AL MOUFID EN

MATHEMATIQUES

2 SM A&B

conçu pour réussir

Tome 2 : Algèbre et Géométrie

Hicham AJANA
Ahmed SANI
Abderrahman AGOURRAM

Sous l'egide de

Abdeslem HAKKANI
Mostafa FAHMI
Mohamed GHOUZAILI
Mostafa JYAD

DAR ATTAKAFA
Edition Diffusion

AL MOUFID EN MATHÉMATIQUES

2ème Année Du Cycle De Baccalauréat

Sciences Mathématiques A & B

TOME 2 : ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Hicham AJANA
Agrégatif en mathématiques
Enseignant aux classes BTS

Ahmed SANI
Inspecteur de mathématiques
Enseignant chercheur

Abderrahman AGOURRAM
Professeur principal
de l'enseignement secondaire qualifiant

Sous la direction de

Abdeslem HAKKANI
Inspecteur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

Mostafa JYAD
Professeur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

Mostafa FAHMI
Inspecteur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

Mohamed GHOUZAILI
Professeur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

LIVRE DE L'ÉLÈVE

AVANT-PROPOS

C'est dans le cadre de la réforme globale du système éducatif et selon les développements enregistrés par le curriculum, que ce manuel a été élaboré. Il s'adresse aux élèves de la 2ème année du baccalauréat (Sciences Mathématiques A & B) ; il accompagne ainsi une étape cruciale importante du cursus scolaire des élèves.

Cette étape se caractérise par :

- L'acquisition d'un bagage cognitif mathématique permettant l'amélioration de l'apprentissage ;
- L'émergence d'aptitudes et de capacités facilitant l'orientation vers des études appropriées meilleures.

L'élaboration de ce livre a donc tenu compte des considérations et caractéristiques suivantes :

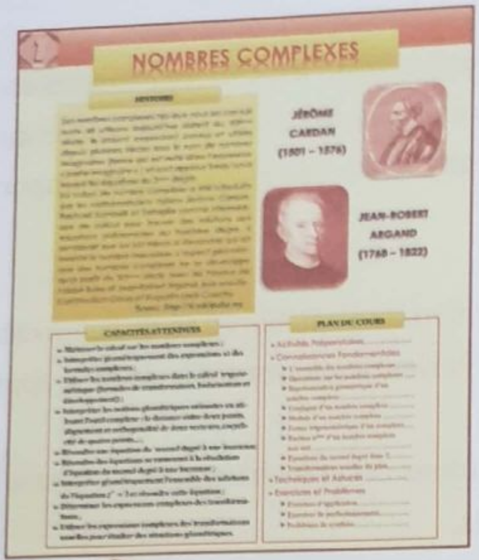
- Maintien, organisation et perfectionnement des acquis.
- Introduction de chaque chapitre par des activités préparatoires qui incitent l'élève à l'adhésion et à l'engagement dans son apprentissage. Ces activités représentent un trait d'union entre les prérequis et les « nouveaux » savoirs et savoirs-faire.
- Consolidation des savoirs et savoirs-faire fondamentaux par le biais d'exemples et d'applications qui jalonnent la totalité de l'ouvrage et qui favorisent la fixation des concepts et leurs appréhension.
- Proposition d'exercices résolus et commentés qui conduisent à la confirmation des notions et leur assimilation à travers l'application fonctionnelle, au contrôle du degré d'acquisition et de la qualité de maîtrise aussi bien que l'entraînement à la formulation rigoureuse du raisonnement.
- Proposition d'exercices et problèmes nombreux, diversifiés et catégorisés comme suit :
  - Exercices d'application.
  - Exercices de perfectionnement.
  - Problème de synthèse.
  - Extraits des examens du baccalauréat.

Les exercices et les problèmes proposés sont calibrés en fonction des capacités exigibles et sont classés selon le degré de difficulté. Dans tous les cas, ces exercices permettent de montrer la pertinence et l'efficacité des outils mathématiques dans des situations variées.

En conclusion, nous souhaitons que ce manuel soit un moyen d'éclairement pour les enseignants et un outil profitable aux élèves.

Finalement, le manuel scolaire reste un instrument pédagogique efficient que le professeur investit pour réaliser les ambitions auxquelles il aspire. C'est dans cette optique qu'il a été conçu.

COMMENT J'UTILISE CE LIVRE ?


NOMBRES COMPLEXES

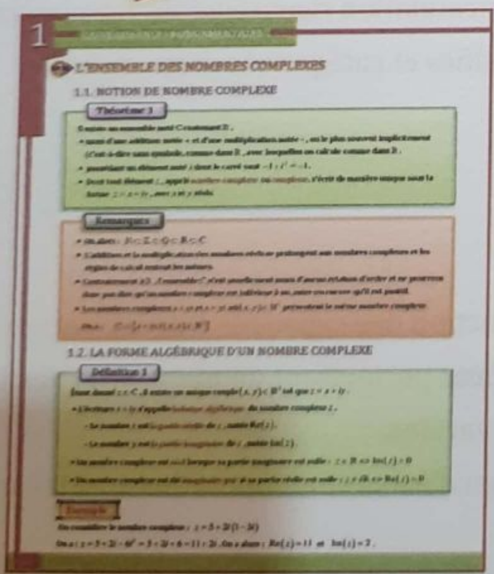
JÉRÔME CARDAN (1501 – 1576)

JEAN-ROBERT ARGAND (1768 – 1822)

Cette page présente les principaux titres, les capacités attendues et un aperçu historique sur des savants mathématiciens.

Ces activités facilitent la construction du savoir en se référant aux prérequis.

On trouve, à ce stade, les savoirs fondamentaux, les règles et les formules qui ont été établies.

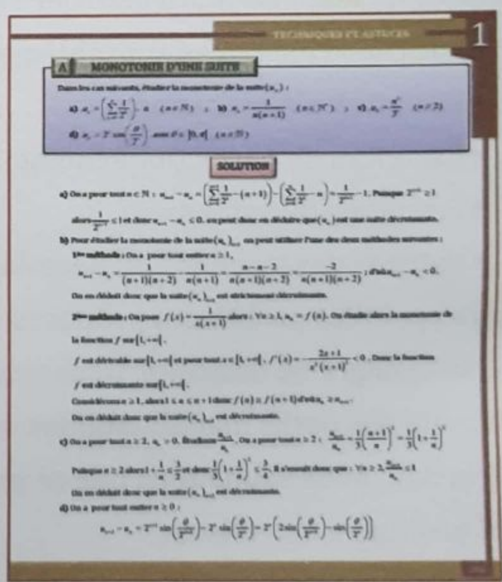

L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1.1. NOTION DE NOMBRE COMPLEXE

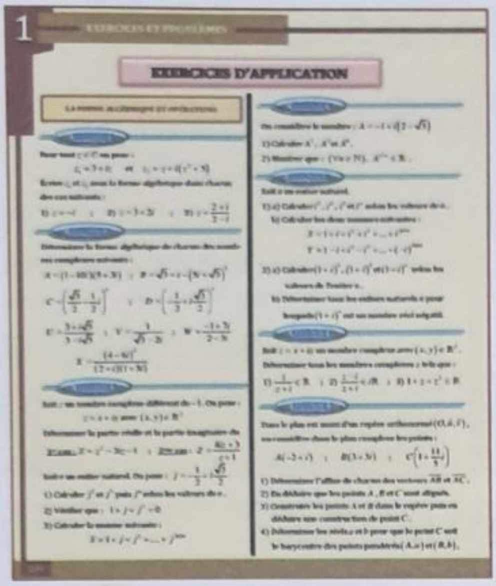
1.2. LA FORME ALGÉBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Méthodes Et Astuces

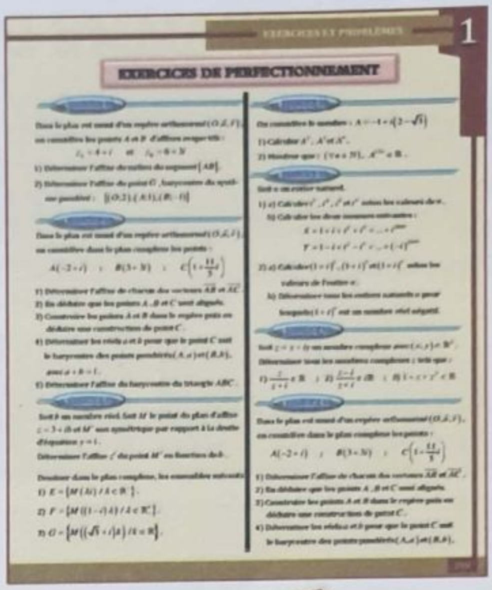
Ce type d'exercices permet de consolider le savoir, de l'investir et de s'exercer au raisonnement.


A MONOTONIE D'UNE SUITE

SOLUTION


EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICES D'APPLICATION


EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

Exercices d'Applications

Exercices d'évaluation et d'application immédiate des apprentissages.

Exercices de Perfectionnement

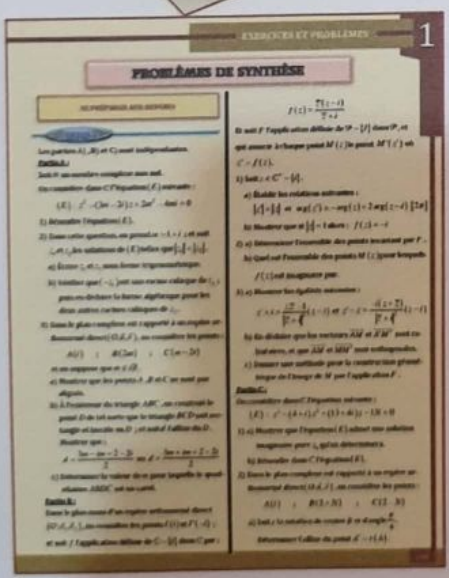
Ces exercices permettent l'amélioration des apprentissages et leur évolution vers la maîtrise, la perfection et l'enrichissement des acquis.

Se Préparer Aux Devoirs

Exercices d'évaluation qui nécessitent une organisation des acquis et la mobilisation des ressources.

Se Préparer Aux Examens

Problèmes de synthèse extraits des anciennes épreuves posées au bac. C'est la phase d'intégration des apprentissages et l'investissement du savoir sous ses différents aspects.


EXERCICES ET PROBLÈMES

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE


EXERCICES ET PROBLÈMES

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE LA DEUXIEME ANNÉE DU CYCLE DU BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES (A ET B)

Contenu Du Programme	Capacités Attendues	Recommandations Pédagogiques
1	**ARITHMÉTIQUE**	
• Les nombres premiers entre eux ; théorème de Gauss ; théorème de Bézout ; • Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $ax+by=c$ • Congruence modulo n (rappel) ; L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; les opérations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et ses propriétés ; • Théorème fondamental de l'arithmétique ; • L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans le cas où p est premier. • Théorème de Fermat (Petit théorème de Fermat). • Systèmes de numération à base $b\ (b \geq 2)$.	• Utiliser la décomposition en facteurs premiers pour déterminer le plus petit multiple commun et le plus grand diviseur commun de deux nombres ou plus ; • Utiliser la congruence modulo n dans des situations d'arithmétiques ; • Utiliser les théorèmes de Gauss, de Bézout et de Fermat dans des situations d'arithmétique ; • Utiliser l'algorithme d'Euclide dans la détermination du plus grand diviseur commun et des coefficients de Bézout ; • Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $ax+by=c$ • Écrire un nombre entier naturel dans un système de numération donné ; • Somme et produit de deux nombres dans un système de numération donné	• On fera la synthèse des acquis déjà abordés au tronc commun scientifique et en première année de la branche sciences mathématiques ; • On insistera sur la rigueur des démonstrations et sur la clarté de l'expression dans la rédaction de la démonstration ; • On étudiera quelques algorithmes (Euclide, crible d'Eratosthène...) et leurs applications ; • On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini ; • On étudiera quelques équations diophantiennes ; • On appliquera les théorèmes de Gauss, de Bézout et de Fermat et le théorème fondamental de l'arithmétique ; • On traitera des exemples de situations de cryptage à travers des exercices d'initiation à cette notion.

2 NOMBRES COMPLEXES

• L'ensemble $\mathbb{C}$; l'écriture algébrique d'un nombre complexe ; égalité de deux nombres complexes ; partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe ; conjugué d'un nombre complexe et ses propriétés ; • Les opérations sur les nombres complexes ; • Le plan complexe ; affixe d'un point ; affixe d'un vecteur ; image d'un nombre complexe ; • Module d'un nombre complexe ; le module et la distance ; l'inégalité triangulaire ; l'ensemble des nombres complexes de module 1; le cercle trigonométrique ; • Argument d'un nombre complexe non nul ; • Forme trigonométrique d'un nombre complexe ; les coordonnées polaires d'un point dans un repère orthonormé ; angle de deux vecteurs et l'argument du quotient de leurs affixes ; l'interprétation géométrique des deux écritures $\frac{z-a}{z-b}$ et $\frac{z-a}{z'-b}$; • Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul ; formules d'Euler et formule de Moivre ; linéarisation et factorisation des polynômes trigonométriques ; • Les racines nièmes de l'unité ; les racines nièmes d'un nombre complexe non nul ; groupe des racines nièmes de l'unité $(\mathbb{U}_n ; \times)$	• Maitriser le calcul sur les nombres complexes ; • Interpréter géométriquement des expressions et des formules complexes ; • Utiliser les nombres complexes dans le calcul trigonométrique (formules de transformation, linéarisation et développement) ; • Interpréter les notions géométriques suivantes en utilisant l'outil complexe : la distance entre deux points, alignement et orthogonalité de deux vecteurs, cocyclicité de quatre points... ; • Résoudre une équation du second degré à une inconnue ; • Résoudre des équations se ramenant à la résolution d'équation du second degré à une inconnue ; • Interpréter géométriquement l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ et résoudre cette équation ; • Déterminer les formules complexes des transformations usuelles ; • Utiliser les formules complexes des transformations usuelles pour étudier des situations géométriques.	• On sensibilisera de la nécessité d'introduire les nombres complexes d'une manière succincte et précise ; • Vue son importance dans la consolidation de la notion de nombre complexe, on traitera la représentation géométrique au début de ce chapitre et en parallèle avec la présentation de la majorité des notions au programme afin d'interpréter géométriquement l'opposé, le conjugué, le module, l'argument, la somme de deux nombres complexes et le produit d'un nombre complexe par un nombre réel ; • On utilisera les formules de transformations géométriques et les nombres complexes pour déterminer quelques formules trigonométriques ; • On amènera les élèves à maitriser l'utilisation des nombres complexes comme l'un des outils pour résoudre les problèmes géométriques ; • Ce chapitre est une occasion pour le rappel et la synthèse des résultats concernant les transformations usuelles du plan ; • On traitera la composée de deux rotations, la composée d'une rotation et d'une translation et la composée d'une homothétie et d'une translation à partir d'exemples.

• L'équation du second degré à une inconnue complexes ; relation entre les coefficients et les racines ; • Les expressions complexes des transformations usuelles dans le plan : translation, symétrie, homothétie, rotation.		

3 CALCUL DE PROBABILITÉS

• Expériences aléatoires ; espace probabilisé fini ; hypothèse d'équiprobabilité ; • Probabilité conditionnelle ; indépendance de deux événements ; indépendance de deux expériences aléatoires ; • Variable aléatoire ; loi de probabilité d'une variable aléatoire ; cas de la loi binomiale ; • Espérance mathématique ; fonction de répartition, variance et écart type.	• Calculer la probabilité de la réunion de deux événements ; la probabilité de l'intersection de deux événements et le calcul de la probabilité de l'événement contraire ; • Utiliser la probabilité conditionnelle pour déterminer la probabilité de l'intersection de deux événements ; • Utiliser le modèle de dénombrement selon la situation étudiée ; • Reconnaître l'indépendance et la compatibilité des événements ; • Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire ; • Reconnaitre et appliquer la loi binomiale à des situations dans des disciplines de la spécialité.	• On évitera toute présentation théorique de la notion de probabilité • On remarquera la stabilité de la fréquence d'un événement aléatoire à partir de la répétition d'une expérience aléatoire simple un très grand nombre de fois (Lancer d'une pièce de monnaie, tirage d'une boule ...), on pourra utiliser à cette fin la touche "rand" de la calculatrice scientifique ou la calculatrice scientifique programmable ou l'ordinateur ; • On partira de situations concrètes de manière progressive pour permettre à l'élève de décrire des expériences aléatoires en utilisant le langage probabiliste ; • On présentera la probabilité d'un événement à partir de la stabilité de la fréquence d'un événement ; • On renforcera la présentation des notions de probabilité par des exemples variés couvrant différents cas possibles ; • On appliquera la probabilité dans des situations variées en relation avec les disciplines de la spécialité. • Le calcul de probabilité sera une occasion pour rappeler les principaux résultats du dénombrement.

4	STRUCTURES ALGÉBRIQUES	
I. Loi de composition interne : • Exemples variés (ensemble de fonctions définies sur un intervalle ; ensemble de fonctions polynômes de degré $\leq n$; ensembles des matrices carrées $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$; les ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; les divers ensembles de transformations munis de la composition des transformations ; • Loi de composition interne ; partie stable ; loi induite ; propriétés d'une loi de composition interne (associativité ; commutativité ; élément neutre ; élément symétrique ; les écritures na et a^n) ; • Homomorphisme et isomorphisme entre deux ensembles munis de deux lois de composition interne ; **II. Groupe, Anneau, corps :** **II.1. Groupe :** • Groupe ; règles de calcul dans un groupe ;sous-groupe ;propriété caractéristique d'un sous-groupe ; • Homomorphisme de deux groupes ; deux groupes isomorphes ; image d'un groupe par un isomorphisme. **II.2. Anneau :** • Anneau : définition et exemples ; applications : anneau intègre. **II.3. Corps :** • Corps : définition, exemples et propriétés ;	• Maitriser les techniques d'opérations sur les différentes structures usuelles ; • Utiliser les structures de quelques ensembles usuels pour étudier les structures d'autres ensembles ; • Comparer deux structures algébriques ; transposer une structure algébrique d'un ensemble à un autre en utilisant la notion d'homomorphisme et d'isomorphisme.	• On se limitera à l'ensemble des fonctions définies sur un intervalle ; l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$; ensembles des matrices carrées $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$; les ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; les divers ensembles de transformations munis de la composition des transformations ; • On insistera sur les opérations fondamentales dans l'ensemble des matrices carrées ; • On présentera les différentes définitions illustrées par des exemples usuels ; • On insistera sur le sous-groupe et le sous-espace vectoriel dans leur relation avec les groupes et les espaces vectoriels usuels ; • On traitera plusieurs modèles d'opérations sur différents ensembles du programme : (les nombres ; les transformations ; les matrices ; les applications ; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $\mathbb{U}_n$; ...) ; On traitera la structure de $(\mathbb{M}_n ; + ; \times)$ et la structure de $(\mathbb{M}_n ; + ; \times)$ pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

III. Espaces vectoriels réels : • Loi de composition externe ; définition d'un espace vectoriel réel ; règles de calcul dans un espace vectoriel réel ; • sous espace vectoriel réel ; propriété caractéristique d'un sous espace vectoriel réel ; combinaison linéaire d'une famille de vecteurs ; dépendance et indépendance linéaire ; base d'un espace vectoriel réel ; • Dimension d'un espace vectoriel réel.		

NOMBRES COMPLEXES

HISTOIRE

Les nombres complexes tels que nous les connaissons et utilisons aujourd'hui datent du XIXème siècle. Ils étaient cependant connus et utilisés depuis plusieurs siècles sous le nom de nombres imaginaires (terme qui est resté dans l'expression « partie imaginaire ») et sont apparus lorsqu'on a essayé les équations du 3ème degré.
La notion de nombre complexe a été introduite par les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Raphaël Bombelli et Tartaglia comme intermédiaire de calcul pour trouver des solutions aux équations polynomiales du troisième degré. Il semblerait que ce soit Héron d'Alexandrie qui ait inventé le nombre impossible. L'aspect géométrique des nombres complexes ne se développe qu'à partir du XIXème siècle avec les travaux de l'abbé Buée et Jean-Robert Argand, puis ensuite Carl Friedrich Gauss et Augustin Louis Cauchy.

Source : https://fr.wikipedia.org

JÉRÔME CARDAN (1501 – 1576)

JEAN-ROBERT ARGAND (1768 – 1822)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Maitriser le calcul sur les nombres complexes ;
- Interpréter géométriquement des expressions et des formules complexes ;
- Utiliser les nombres complexes dans le calcul trigonométrique (formules de transformation, linéarisation et développement) ;
- Interpréter les notions géométriques suivantes en utilisant l'outil complexe : la distance entre deux points, alignement et orthogonalité de deux vecteurs, cocyclicité de quatre points... ;
- Résoudre une équation du second degré à une inconnue;
- Résoudre des équations se ramenant à la résolution d'équation du second degré à une inconnue ;
- Interpréter géométriquement l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ et résoudre cette équation ;
- Déterminer les expressions complexes des transformations ;
- Utiliser les expressions complexes des transformations usuelles pour étudier des situations géométriques.

PLAN DU COURS

1 RAPPELS

A) Autour de la trigonométrie :

1. a) On sait que $-\dfrac{2017\pi}{9}$ est une mesure d'un angle orienté ; Déterminer sa mesure principale.

b) Calculer $\cos\left(\dfrac{17\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\dfrac{213\pi}{4}\right)$.

2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(3x)+\sqrt{3}\sin(3x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad \cos(3x)-\sin(2x)=2\cos\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(3x)+\sqrt{3}\sin(3x)=-1$

3. a) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'équation : $\sin(3x)+\sin(2x)+\sin x=0$

b) Résoudre dans $]-2\pi,3\pi]$ l'équation : $\tan^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\tan x+\sqrt{3}=0$

B) Autour des angles et des coordonnées :

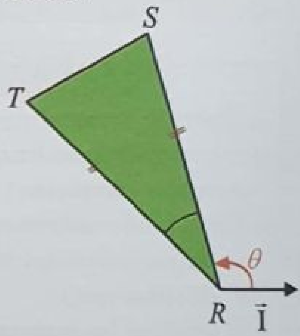
Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$.

1. Soit A le point du plan $\mathscr{P}$ déterminé par : $OA=2$ et $\left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

a) À l'aide de la règle et du compas, construire le point A en indiquant les étapes suivies.

b) Déterminer les coordonnées du point A.

2. Dans la figure ci-contre, RST est un triangle isocèle en R tel que :



$$RS=RT=2 \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{RS},\overrightarrow{RT}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{RS}}\right)\equiv\theta\ [2\pi]$$

où θ est un réel donné.

Montrer que les coordonnées du point T dans le repère $\left(R;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ sont :

$$\begin{cases} x_T=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta \\ y_T=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta \end{cases}$$

3. On considère le point $E\left(\sqrt{3};1\right)$.

a) Calculer la distance OE et déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OE}}\right)$.

b) Soit F le point du plan $\mathscr{P}$ tel que : $OF=2OE$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

- En utilisant les formules de transformation, calculer : $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$
- En déduire les coordonnées du point F.

4. On note (U) le cercle trigonométrique associé au repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Représenter sur le cercle (U) les points M_k dont les abscisses curvilignes sont : $\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}$ où $k\in\mathbb{Z}$.

C) Autour des cercles :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}}\right)$.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant la condition donnée :

1er cas : $x^2+y^2+4x-8y-5=0$; 2ème cas : $(x-2)(x-1)+(y+1)(y-3)=0$

3ème cas : $\begin{cases} x=2+3\cos t \\ y=-1+3\sin t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

2. On considère les points : $A(-4;5)$; $B(-2;7)$; $C(0;3)$

a) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b) Écrire l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC .

2 LE NOMBRE i ET LES NOMBRES COMPLEXES

A) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E_1): x^3-13x+12=0$

Déterminer une solution triviale de cette équation puis la résoudre.

B) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E_2): x^3-9x-11=0$

1. a) Étudier les variations de la fonction numérique f définie par : $f(x)=x^3-9x-11$

b) En déduire que l'équation (E_2) admet une solution unique α et que $\alpha\in[3;4]$.

2. Soit u et v deux nombres réels.

a) Montrer que le nombre $u+v$ est une solution de (E_2) si, et seulement si : $u^3+v^3+3(uv-3)(u+v)-11=0$

b) Montrer que si $\begin{cases} u^3+v^3=11 \\ uv=3 \end{cases}$, alors $u+v$ est une solution de (E_2).

c) On suppose que : $u^3+v^3=11$ et $uv=3$.

Vérifier que :

$(\forall X\in\mathbb{R}),\ (X-u^3)(X-v^3)=X^2-11X+27$

puis déterminer u^3 et v^3 ; puis en déduire u et v.

d) Déterminer l'unique solution de l'équation (E_2), et vérifier que la solution trouvée correspond bien à la formule donnée par Cardan dans « la position historique ».

Position Historique

En 1545, Jérôme Cardan publie l'Ars Magna dans lequel il fournit des formules de résolution d'une équation de la forme $x^3=px+q$ avec p et q entiers positifs. Il développe des méthodes empruntées à Nicolo Tartaglia et découvre que si $27q^2-4p^3\geq 0$, alors le réel positif :

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

est une solution de l'équation.

C) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E): x^3=15x+4$

1. a) Étudier les variations de la fonction numérique g définie par : $g(x)=x^3-15x-4$

b) En déduire que l'équation (E) admet trois solutions réelles.

2\. a) Montrer que si $\begin{cases} u^3+v^3=4 \\ uv=5 \end{cases}$, alors $u+v$ est une solution de (E).

b) Établir que s'il existe deux réels u^3 et v^3 vérifiant ($u^3+v^3=4$ et $u^3v^3=125$) alors ils seront des solutions de l'équation : $(F) : X^2-4X+125=0$

c) Justifier que l'équation (F) n'admet pas de solution réelle.

3\. a) Montrer que l'équation (F) est équivalente à l'équation : $(F_1) : (X-2)^2=-121$

b) On admet l'existence d'un nombre « imaginaire », qu'on note i, vérifiant $i^2=-1$.

En utilisant les mêmes règles de calcul vues dans $\mathbb{R}$, vérifier que l'équation (F_1) admet les nombres $2+11i$ et $2-11i$ pour solutions.

c) Calculer $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$, et déduire de ce qui précède que le nombre 4 est une solution de (E).

4\. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^3-15x-4=(x-4)(x^2+4x+1)$, puis résoudre l'équation (E).

3 OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Les éléments de la forme $x+iy$, où x et y sont des réels, sont appelés nombres complexes.

L'écriture $z=x+iy$ où $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ s'appelle la forme algébrique du nombre z : x est **la partie réelle** de z et on écrit $\mathbf{x=Re(z)}$; y est **la partie imaginaire** de z et on écrit $\mathbf{y=Im(z)}$.

Si $z=iy$ avec $y\in\mathbb{R}$, on dit que z est imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

A) On considère les nombres complexes : $z_1=1+2i$ et $z_2=1-\dfrac{3}{2}i$

1\. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$-2(z_2+i)$; iz_1 ; z_1+z_2 ; z_1-z_2 ; z_1z_2 ; z_1^2 ; $-2z_1+z_2^2$; $(2z_2-z_1+4i)^{2017}$

2\. Vérifier que : $\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$ et $\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{4}{13}+\dfrac{6}{13}i$

3\. Montrer que si z est un nombre complexe non nul de forme algébrique $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

alors : $$\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}i$$

B) Soit $z=x+iy$ un nombre complexe où $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

Déterminer, en fonction de x et y, la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants : $U=3z^2-2z+1$; $V=z(iz+3)$; $W=\dfrac{2z}{iz-1}$ (ici $z\neq -i$)

C) Déterminer les réels α et β sachant que : $\dfrac{\alpha+i}{2-i}=5+\beta i$

D) On considère les nombres complexes : $z_1=7+9i$ et $z_2=(1+4i)a+i(b-7)$ où $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

Déterminer les réels a et b pour que : $z_1=z_2$.

4 REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE D'UN COMPLEXE

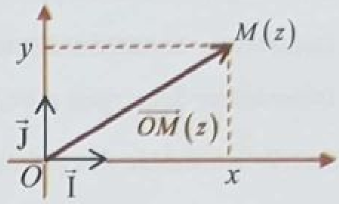
Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

À tout nombre complexe $z = x + iy$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ on associe le point $M(x;y)$ du plan $\mathcal{P}$.

Inversement, à chaque point $M(x;y)$ du plan $\mathcal{P}$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$.

Le point M s'appelle **l'image** du nombre complexe z.

Le nombre z s'appelle **l'affixe** du point M ; on écrit $M(z)$.



On écrit z_M pour désigner l'affixe du point M ou $Aff(M)$

À chaque vecteur $\vec{u}$ du plan on associe l'unique point M du plan $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Le complexe $z_M = z$ est appelé aussi l'affixe du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $\vec{u}(z)$.

On a ainsi réalisé une bijection de l'ensemble des points du plan $\mathcal{P}$ sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Le plan $\mathcal{P}$ est appelé alors **le plan complexe**.

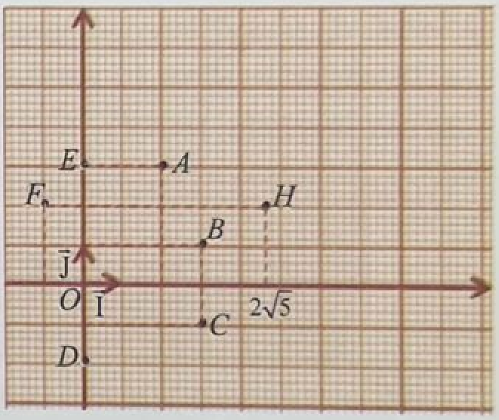
A)

1. Représenter dans le plan $\mathcal{P}$ les images des nombres complexes suivants :

$z_1 = 0 \quad ; \quad z_2 = 1 \quad ; \quad z_3 = -1 \quad ; \quad z_4 = i$

$z_5 = -4i \quad ; \quad z_6 = 1 - i \quad ; \quad z_7 = \dfrac{1+i}{2} \quad ; \quad z_8 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

2. Déterminer les affixes des points A, B, C, D, E, F et H indiqués sur la figure ci-contre.



3. On considère les points $K(1;1)$, $L(2;2)$ et $N\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Déterminer les affixes des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{OK} \quad ; \quad \overrightarrow{OL} \quad ; \overrightarrow{ON} \quad ; \quad \overrightarrow{KN} \quad ; \quad \overrightarrow{LN} \quad ; \quad 2\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{NK}$

B) Soit M et M' deux points du plan complexe.

1. Montrer que l'affixe du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{MM'}$ est : $z_{\vec{v}} = z_{M'} - z_M$

2. Montrer que pour tout $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ et pour tous vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ du plan, on a :

$$Aff(\lambda\vec{v} + \mu\vec{v}') = \lambda Aff(\vec{v}) + \mu Aff(\vec{v}')$$

3. Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha + \beta \neq 0$.

Montrer que l'affixe du point G est : $\quad z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$

4. Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points deux à deux distincts du plan $\mathcal{P}$. Montrer que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\text{Les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés})$$

5 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}})$, on considère les points A , B , C et E d'affixes respectives : $z_A=-2+2i$, $z_B=3+4i$, $z_C=4+7i$, $z_E=1+\dfrac{9}{2}i$

1. Déterminer l'affixe du point D pour lequel $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$; En déduire que les points A , E et C sont alignés.
3. Déterminer deux réels α et β tels que : $\alpha+\beta=1$ et E le barycentre du système $\{(A;\alpha),(C;\beta)\}$.
4. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $(\exists\lambda\in\mathbb{R})\quad z=6\lambda-2+i(5\lambda+2)$

   Montrer que $\mathscr{D}$ est la droite (AC).

6 CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

A) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}})$, on considère les points suivants :

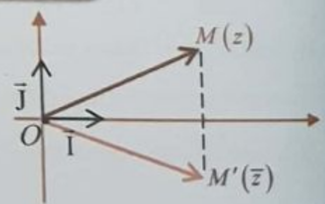
$$A(1+i)\quad;\quad B(-2i)\quad;\quad C(-3+2i)\quad;\quad D(-2)\quad;\quad E(4+2i)$$

1. Représenter les points ci-dessus.
2. Soit A' , B' , C' et D' les symétriques respectifs des points A , B , C et D par rapport à l'axe des abscisses.
   a) Déterminer les affixes des points A' , B' , C' et D'.
   b) Comparer $\mathrm{Re}(z_A)$ et $\mathrm{Re}(z_{A'})$ puis $\mathrm{Re}(z_B)$ et $\mathrm{Re}(z_{B'})$ puis $\mathrm{Re}(z_C)$ et $\mathrm{Re}(z_{C'})$.
   c) Comparer $\mathrm{Im}(z_A)$ et $\mathrm{Im}(z_{A'})$ puis $\mathrm{Im}(z_B)$ et $\mathrm{Im}(z_{B'})$ puis $\mathrm{Im}(z_C)$ et $\mathrm{Im}(z_{C'})$.

> Soit x et y deux nombres réels et z le nombre complexe défini par $z=x+iy$.
> Le nombre complexe $x-iy$ est appelé le **conjugué** de z et est noté $\overline{z}$.

3. Quelle est la nature de la transformation :

$$\varphi:\ \mathscr{P}\to\mathscr{P}\qquad M(z)\mapsto M'(\overline{z})\ ?$$



4. Déterminer le conjugué de chacun des complexes suivants :

$$z_1=5-i\ ;\quad z_2=-3\ ;\quad z_3=-3i\ ;\quad z_4=\frac{1}{2}+i(1+i)\ ;\quad z_5=(1+i)-i(3-i)$$

B) Soit z et z' deux nombres complexes.

1. a) Montrer que : $\overline{\overline{z}}=z$ et $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$
   b) Montrer que : $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=z$ et $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=-z$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}})$, déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{D}_1=\{M(z)/(z-2i)\in\mathbb{R}\}\quad\text{et}\quad\mathscr{D}_2=\{M(z)/(z-2i)\in i\mathbb{R}\}$$

3. a) Montrer que : $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ et $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$

c) On suppose que $z\neq 0$. Déterminer $\frac{1}{z}$ en fonction de $\overline{z}$ et $z.\overline{z}$.

d) Montrer que si $z\neq 0$ alors : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

e) Déterminer de deux façons différentes les conjugués des nombres complexes suivants :

$$Z_1=(2+5i)(4-3i)\quad;\quad Z_2=\frac{1-i}{3+i}\quad;\quad Z_3=(5-2i)^2\quad;\quad Z_4=\frac{(2+5i)i}{(4-i)^2}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3\overline{z}+2z=5-i$

5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan pour lesquels $z^2+2z+\overline{z}$ est réel.

6. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan pour lesquels $3\overline{z}+i\neq 0$ et $\frac{1+i\overline{z}}{3\overline{z}+i}\in\mathbb{R}$.

7 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

A) Le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Soit $z=x+iy$ un nombre complexe avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et M l'image du nombre z dans le plan $\mathcal{P}$.

a) Calculer la distance OM en fonction de x et y puis vérifier que : $OM=\sqrt{z.\overline{z}}$

Le nombre positif $\sqrt{z.\overline{z}}$ est appelé **le module** du nombre complexe z , et est noté $|z|$.

On a donc : $|z|=\sqrt{z.\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$

b) Représenter les points $M(z)$ et $N(\overline{z})$ dans le plan $\mathcal{P}$ puis en déduire que : $|z|=|\overline{z}|$

c) Calculer : $\left|\sqrt{3}+i\right|$; $\left|\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right|$; $|-5|$; $|-i|$; $|\pi-2|$

2. On considère les deux points $A(z_A)$ et $B(z_B)$ et le vecteur $\vec{u}$ d'affixe z .

a) Montrer que : $\|\vec{u}\|=|z|$ et $AB=|z_B-z_A|$.

b) On suppose dans cette question : $A(-1+i)$ et $B(1+3i)$.

Montrer que le triangle OAB est rectangle en A .

B) Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Soit z et z' deux nombres complexes et M et M' leurs images respectives dans le plan $\mathcal{P}$.

a) Montrer que : $\left(|z|=0\Leftrightarrow z=0\right)$ et $|\mathrm{Re}(z)|\leq|z|$ et $|\mathrm{Im}(z)|\leq|z|$

b) Construire le point $S(z+z')$ dans le plan $\mathcal{P}$ puis en déduire que : $|z+z'|\leq|z|+|z'|$.

cette inégalité est appelée : « Inégalité triangulaire »

c) Montrer que $|z.z'| = |z| \times |z'|$ puis en déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|z^n| = |z|^n$

d) En déduire que si $z \neq 0$ alors : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

e) Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \left(5+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{6}\right) \quad ; \quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \quad ; \quad z_3 = \frac{(1-2i)^5}{1+i} \quad ; \quad z_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{2018}$$

$$z_5 = \frac{2}{1-3i} + \frac{3}{1+i} \quad ; \quad z_6 = \left(\sqrt{5}-2i\right)\left(\sin\frac{\pi}{7} - i\cos\frac{\pi}{7}\right) \quad ; \quad z_7 = 1 + i\tan\theta \quad \left(\text{ici : } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

2. Dans le plan complexe, déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{C} = \{M(z) / |z-3+4i| = 2\} \quad ; \quad \mathscr{D} = \{M(z) / |z-5+2i| = |z+1|\} \quad ; \quad \mathscr{E} = \left\{M(z) / \left|\frac{z-1}{z+1+2i}\right| = 3\right\}$$

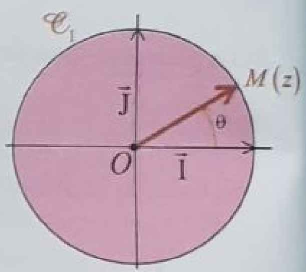
8 ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit $M(x;y)$ un point du cercle $\mathscr{C}_1$ et θ une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{I};\overrightarrow{OM}}\right)$.

Montrer que l'affixe z_M du point M est déterminée par la relation :

$$z_M = \cos\theta + i\sin\theta$$



2. Soit r un réel strictement positif, et soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon r.

On considère le point $M(z)$ de $\mathscr{C}$ et on pose : $\left(\widehat{\vec{I},\overrightarrow{OM}}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$

Montrer que : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

3. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R}$ et $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Montrer que le point $M(z)$ appartient au cercle de centre O et de rayon r.

Toute mesure θ (en rad) de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{I},\overrightarrow{OM}}\right)$ est appelée **un argument** du nombre complexe z, et on le note $\arg z$, et on écrit : $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$

9 FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN COMPLEXE – NOTATION EXPONENTIELLE

Soit z un nombre complexe non nul. L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg z \ [2\pi]$ est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z. On peut aussi écrire : $z = [r;\theta]$.

On pose : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. L'écriture $z = |z|e^{i\theta}$ s'appelle la **notation exponentielle** du nombre z.

A) Préliminaire.

1. Déterminer : e^{i0} , $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$

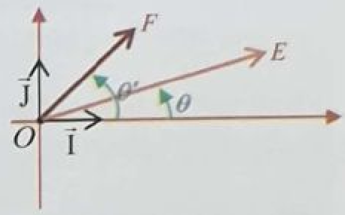
2. Déterminer la forme trigonométrique du nombre $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$.

3. Soit t le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{25\pi}{4}$. Quelle est la forme algébrique de t ?

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$. Vérifier que : $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\arg\left(ke^{i\theta}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$

5. Dans le plan complexe, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $r > 0$; et soit $M(z)$ un point quelconque du plan complexe. Montrer que : $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \left[(\exists \theta \in \mathbb{R}),\ z = \omega + re^{i\theta}\right]$

B) Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{I},\vec{J})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.



1. a) En utilisant les deux points E et F tels que : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AC}$.

Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi]$.

b) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ dans le cas où $A(1)$ et $B(2+i)$ et $C\left(2+i\sqrt{3}\right)$.

2. a) On suppose, et seulement dans cette question, que : $A\left(\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i\right)$ et $B(-1+i)$ et $C(1-i)$

Montrer que le rectangle ABC est rectangle en A .

b) Dans le cas général, montrer l'équivalence suivante : (ABC est rectangle en A) $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

3. Montrer l'équivalence suivante : (ABC est équilatéral) $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \left\{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$

4. Soit A , B , C et D quatre points deux à deux distincts et non alignés. Montrer l'équivalence suivante :

(A , B , C et D sont cocycliques) $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$

On rappelle que les points A , B , C et D sont cocycliques (c'est-à-dire qu'ils appartiennent au même cercle) si, et seulement si : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right) \ [\pi]$

10 FORMULES DE MOIVRE ET D'EULER

A) Soit θ et θ' deux réels et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que : $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

2. Montrer que : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ puis en déduire que : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

La formule $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ est appelée « Formule de Moivre ».

3. Montrer que : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$. Ces deux formules sont appelées « Formules d'Euler ».

B) Soit θ un nombre réel.

1. En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \quad \text{et} \quad \cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

2. Calculer $\sin(3\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin\theta$.

3. Montrer que les nombres $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{5\pi}{9}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{11\pi}{9}\right)$ sont solutions de l'équation : $8x^3 - 6x - 1 = 0$

4. En utilisant les formules d'Euler, montrer que :

$$\cos^4\theta = \frac{1}{8}\left(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right) \quad \text{et} \quad \sin^3\theta = \frac{1}{4}\left(3\sin\theta - \sin(3\theta)\right)$$

On dit qu'on a **linéarisé les expressions** $\cos^4\theta$ et $\sin^3\theta$.

5. Écrire $\cos\theta.\sin^4\theta$ et $\cos^5(2\theta)$ sous la forme d'une somme de termes de la forme $\lambda\cos(px)$ et $\mu\sin(qx)$ avec λ et μ des réels et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

11 RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = -1$

Les nombres i et $-i$ sont appelés les racines carrées du nombre complexe -1. En général :

> On appelle racine carrée d'un nombre complexe u, tout complexe z tel que $z^2 = u$

2. Déterminer les racines carrées des nombres suivants : -49 ; $2i$; $-2i$ (remarquer que $(1+i)^2 = 2i$).

3. On pose $u = -24 - 70i$, et soit $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que : $z^2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ x^2 - y^2 = -24 \\ xy = -35 \end{cases}$

b) Montrer que le nombre $-24 - 70i$ admet deux racines carrées que l'on déterminera.

12 RACINES CUBIQUES D'UN NOMBRE COMPLEXE

On considère le nombre complexe : $u = 2 - 2i$

1. Écrire le nombre u sous forme trigonométrique.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) : z^3 = 2 - 2i$

a) On pose $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $z^3 = 2-2i \Leftrightarrow \left(r^3 = 2\sqrt{2} \text{ et } \arg\left(z^3\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right)$

b) En déduire, sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation (E).

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}})$, on considère les points M_0, M_1 et M_2 images respectives des solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation (E) avec : $\mathrm{Re}(z_2) < \mathrm{Re}(z_1) < \mathrm{Re}(z_0)$.

a) Représenter les points M_0, M_1 et M_2 dans le repère $(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}})$.

b) Montrer que : $\left(\overrightarrow{OM_0};\overrightarrow{OM_1}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OM_2};\overrightarrow{OM_0}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

13 LA REPRÉSENTATION COMPLEXE D'UNE ROTATION

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}})$.

Si F est une transformation de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ transformant le point M d'affixe z en le point M' d'affixe $z' = f(z)$, alors $z' = f(z)$ est l'écriture complexe (ou la représentation complexe) de l'application F.

1. Soit θ un nombre réel tel que : $0 < \theta < \pi$

On considère trois points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \quad \text{et} \quad AB = AC$$

Montrer que : $z_C - z_A = e^{i\theta}(z_B - z_A)$

2. Déterminer l'écriture complexe de la rotation R_1 de centre $\Omega(1-2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3. Soit R l'application de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui, à chaque point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + (1+2i)e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

a) Montrer qu'il existe un unique point $\Omega(\omega)$ tel que $R(\Omega) = \Omega$.

b) Vérifier que : $z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-\omega)$

c) Déterminer la nature de la transformation R ainsi que ses éléments caractéristiques.

On dit que le point Ω est invariant par la transformation F si $F(\Omega) = \Omega$

1 L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1.1. NOTION DE NOMBRE COMPLEXE

Théorème 1

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$,

- muni d'une addition notée $+$ et d'une multiplication notée $\times$, ou le plus souvent implicitement (c'est-à-dire sans symbole, comme dans $\mathbb{R}$) possédant les mêmes propriétés comme dans $\mathbb{R}$.
- possédant un élément noté i dont le carré vaut -1 : $i^2 = -1$.
- où tout élément z, appelé nombre complexe ou complexe, s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, avec x et y réels.

Remarques

- On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Contrairement à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est usuellement muni d'aucune relation d'ordre et nous ne pourrons donc pas dire qu'un nombre complexe est inférieur à un autre ou non plus qu'il est positif.
- Les nombres complexes $x + iy$ et $x + yi$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ représentent le même nombre complexe.

On a : $$\mathbb{C} = \{x + iy \,/\, (x;y) \in \mathbb{R}^2\}$$

1.2. FORME ALGÉBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Définition 1

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.

- L'écriture $x + iy$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z,
  - le nombre x est la partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
  - le nombre y est la partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.
- Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$
- Un nombre complexe est dit imaginaire pur si sa partie réelle est nulle : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$

Exemple

On considère le nombre complexe : $z = 5 + 2i(1 - 3i)$

On a : $z = 5 + 2i - 6i^2 = 5 + 2i + 6 = 11 + 2i$. On a alors : $\mathrm{Re}(z) = 11$ et $\mathrm{Im}(z) = 2$.

1.3. ÉGALITÉ DE DEUX NOMBRES COMPLEXES

Proposition 1

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires. En d'autres termes :

$$\left(\forall (z;z')\in\mathbb{C}^2\right)\quad z=z' \Leftrightarrow \left(\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')\right)$$

Remarques

- Le résultat de la proposition 1 est une conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.
- Pour tout nombre complexe z :

$$z=0 \Leftrightarrow \left(\mathrm{Re}(z)=0 \text{ et } \mathrm{Im}(z)=0\right) \qquad \text{et} \qquad z\neq 0 \Leftrightarrow \left(\mathrm{Re}(z)\neq 0 \text{ ou } \mathrm{Im}(z)\neq 0\right)$$

Exemple

On considère deux nombres complexes : $z_1=x-1+(y+2)i$ et $z_2=-2xi+y$ où $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Déterminons les réels x et y pour que $z_1=z_2$:

On a : $z_1=z_2 \Leftrightarrow (x-1=y \text{ et } y+2=-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x=-\dfrac{1}{3} \text{ et } y=-\dfrac{4}{3}\right)$

2 OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

2.1. ADDITION ET MULTIPLICATION DANS $\mathbb{C}$

Proposition 2

Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec $(x;x';y;y')\in\mathbb{R}^4$.

On a :

- $z+z'=x+x'+i(y+y')$ et $z\times z'=xx'-yy'+i(xy'+xy')$
- Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$: $\lambda z=\lambda x+i(\lambda y)$

Remarques

- Pour tout $(z;z')\in\mathbb{C}^2$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z+z')=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z+z')=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z') \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda z)=\lambda\,\mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(\lambda z)=\lambda\,\mathrm{Im}(z) \end{cases}$$

- Si $k\in\mathbb{N}$ alors $i^{2k}=(i^2)^k=(-1)^k$. Il en résulte donc : $i^{4k}=1$; $i^{4k+1}=i$; $i^{4k+2}=-1$; $i^{4k+3}=-i$.

2.2. OPPOSÉ D'UN COMPLEXE – DIFFÉRENCE DE DEUX COMPLEXES

Proposition 3

Tout nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont des réels, possède un opposé dans $\mathbb{C}$, noté $-z$, qui est le nombre complexe $-x - iy$, et on écrit $-z = -x - iy$. Donc :

$$\text{Re}(-z) = -\text{Re}(z) \quad \text{et} \quad \text{Im}(-z) = -\text{Im}(z)$$

Définition 2

La différence de deux nombres complexes z et z' est le nombre : $z - z' = z + (-z')$

Remarques

- Si x, x', y et y' sont des nombres réels alors : $(x+iy)-(x'+iy') = x - x' + i(y - y')$
- Les identités remarquables vues dans $\mathbb{R}$ restent aussi valables dans $\mathbb{C}$. Ainsi, pour tous nombres complexes z_1 et z_2 on a :

$$(z_1+z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1.z_2 + z_2^2 \quad ; \quad (z_1-z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1.z_2 + z_2^2 \quad ; \quad (z_1+z_2)(z_1-z_2) = z_1^2 - z_2^2$$

En particulier, on a les égalités suivantes, valables pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \quad ; \quad (a-ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi \quad ; \quad (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

On a aussi :

$$(z_1+z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2.z_2 + 3z_1.z_2^2 + z_2^3 \quad ; \quad (z_1-z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2.z_2 + 3z_1.z_2^2 - z_2^3$$

$$z_1^3 - z_2^3 = (z_1-z_2)(z_1^2 + z_1.z_2 + z_2^2) \quad ; \quad z_1^3 + z_2^3 = (z_1+z_2)(z_1^2 - z_1.z_2 + z_2^2)$$

Et de façon générale, on a pour tout $(z_1;z_2) \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(z_1+z_2)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p z_1^p z_2^{n-p} = \sum_{q=0}^{n} C_n^q z_2^q z_1^{n-q} \quad \text{(Formule du binôme de Newton)}$$

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)(z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z_2 + \ldots + z_1 z_2^{n-2} + z_2^{n-1}) = (z_1 - z_2)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^{n-k-1} z_2^k\right)$$

- Un produit de nombres complexes est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

En particulier : $(\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2) \ [z \times z' = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } z' = 0)]$

Exemples

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $z_1 = 5 - iz$ et $z_2 = z + i(z^2+1)$

Ecrivons les nombres z_1 et z_2 sous leur forme algébrique dans chacun des cas suivants :

a) $z = i$; b) $z = 2+3i$; c) $z = (1-3i)^2$

a) On a : $z_1 = 5 - i^2 = 5 - (-1) = 6$ et $z_2 = i + i(i^2 + 1) = i + i(-1+1) = i$

b) On a : $z_1 = 5 - i(2+3i) = 5 - 2i - 3i^2 = 5 - 2i + 3 = 8 - 2i$

Et : $z_2 = 2 + 3i + i\left((2+3i)^2 + 1\right) = 2 + 3i + i(-4+12i) = -10 - i$.

c) On a : $z_1 = 5 - i(1-3i)^2 = 5 - i(-8-6i) = 5 + 8i - 6 = -1 + 8i$

Et : $z_2 = (1-3i)^2 + i\left((1-3i)^4 + 1\right) = -8 - 6i + i\left((-8-6i)^2 + 1\right) = -8 - 6i + i(29 + 96i) = -104 + 23i$

2) On considère le nombre complexe : $t = 1 + \sqrt{3} + i\left(1 - \sqrt{3}\right)$

Calculons puis mettons sous forme algébrique les nombres t^2, t^4, t^6 et t^{12n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

On a : $t^2 = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - \left(1-\sqrt{3}\right)^2 + 2i\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right) = 4\left(\sqrt{3} - i\right) = 4\sqrt{3} - 4i$.

On a : $t^4 = \left[4\left(\sqrt{3} - i\right)\right]^2 = 16\left(\sqrt{3} - i\right)^2 = 16\left(2 - 2i\sqrt{3}\right) = 32 - 32\sqrt{3}\,i$.

On a : $t^6 = t^2 \times t^4 = 4\left(\sqrt{3} - i\right) \times 32\left(1 - i\sqrt{3}\right) = 128\left(\sqrt{3} - i\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right) = 128(-4i) = -512i$

On a : $t^{12} = \left(t^6\right)^2 = (-512i)^2 = \left(-2^9 i\right)^2 = -2^{18}$

On a enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $t^{12n} = \left(t^{12}\right)^n = \left(-2^{18}\right)^n$ (Attention : Ne pas écrire $t^{12n} = (-2)^{18n}$)

2.3. INVERSE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL QUOTIENT DE DEUX NOMBRES COMPLEXES

Proposition 4

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul tels que $(x;y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

l'inverse du nombre z est le nombre complexe noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x^2+y^2}(x - iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Preuve

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul tel que $(x;y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

On a tout d'abord $x^2 + y^2 \neq 0$; ensuite de l'égalité $(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$ on tire :

$$\frac{1}{x^2+y^2}(x+iy)(x-iy) = 1$$

Il en résulte alors : $$\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x^2+y^2}(x - iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Exemple

Déterminons l'inverse du nombre complexe $z = (1-2i)(3+2i)$:

On a $z = 7-4i$, donc : $\frac{1}{z} = \frac{1}{7-4i} = \frac{7+4i}{7^2+(-4)^2} = \frac{7}{65} + \frac{4}{65}i$

Applications

1. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant : $Z = \left(2+i\sqrt{3}\right)(3-4i) + \left(1+\frac{1}{2}i\right)^2$

2. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $u = z^2 - 4z.z' + 3$ sachant que :

$$z = 1-3i \quad \text{et} \quad z' = \frac{3}{2} + 5i$$

3. Soit : $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

   a) Calculer j^2 et j^3.

   b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer j^k selon les valeurs de k.

   c) Vérifier que : $1 + j + j^2 = 0$.

   d) Calculer la somme : $1 + j + j^2 + ... + j^{2018}$

4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $f(z) = z^2 - z + 2$

   Déterminer tous les nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$. (Poser $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$)

5. Soit z un nombre complexe différent de $-i$. Montrer que : $\frac{1}{z+i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = -1$

Proposition 5

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux complexes où x, x', y et y' des réels tels que $(x;y) \neq (0;0)$.

Le quotient de z' par z est le nombre complexe noté $\frac{z'}{z}$ tel que : $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$ et on a :

$$\frac{z'}{z} = \frac{x'+iy'}{x+iy} = \frac{xx'+yy'}{x^2+y^2} + i\,\frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}$$

Exemples

1) Calculons le nombre complexe : $z = \frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}-2i} + \frac{\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+2i}$

On a immédiatement : $z = \frac{\left(\sqrt{3}+2i\right)^2 + \left(\sqrt{3}-2i\right)^2}{\left(\sqrt{3}-2i\right)\left(\sqrt{3}+2i\right)} = \frac{-2}{7}$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) : (4+i)z = 2 + i - z$

L'équation (E) est équivalente à $z+(4+i)z=2+i$, c'est-à-dire $(5+i)z=2+i$. Il s'ensuit donc :

$$z=\frac{2+i}{5+i}=\frac{(2+i)(5-i)}{5^2+1^2}=\frac{11+3i}{26}=\frac{11}{26}+\frac{3}{26}i$$

Par suite, l'ensemble solution de cette équation est : $S=\left\{\frac{11}{26}+\frac{3}{26}i\right\}$

3) Soit $z=x+iy$ un nombre complexe avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. On pose $f(z)=\frac{z+i}{z-1}$.

Déterminons les complexes z $(z\neq 1)$ pour que $f(z)$ soit un réel.

On a : $f(z)=\frac{x+i(y+1)}{(x-1)+iy}=\frac{(x+i(y+1))((x-1)-iy)}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-x+y}{(x-1)^2+y^2}+i\frac{x-y-1}{(x-1)^2+y^2}$.

Il s'ensuit donc que : $\mathrm{Re}(f(z))=\frac{x^2+y^2-x+y}{(x-1)^2+y^2}$ et $\mathrm{Im}(f(z))=\frac{x-y-1}{(x-1)^2+y^2}$

On a alors : $f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f(z))=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-1=0\\(x-1)^2+y^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-1\\(x;y)\neq(1;0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=x+i(x-1)\\x\neq 1\end{cases}$

Par suite, l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z)\in\mathbb{R}$ est : $\{x+(x-1)i\,/\,x\in\mathbb{R}-\{1\}\}$.

Applications

1. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant :

$$Z=(1+i)\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2-(1+3i)\left(\frac{2+i}{1-i}\right)+6$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(E_1) $\quad(-1+4i)z+(1-2i)=iz+3$ $\quad$; $\quad$ (E_2) $\quad\frac{1+3iz}{1+3z}=i\frac{z+2}{z-5}$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

(S_1) : $\begin{cases}2iz+3z'=i\\iz+z'=2\end{cases}$ $\quad$; $\quad$ (S_2) : $\begin{cases}3z-2z'=-11\\iz+(1+i)z'=3(4-i)\end{cases}$

4. Montrer que l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $\frac{iz}{z-2}$ est réel est :

$$E=\left\{x+iy\,/\,(x-1)^2+y^2=1 \text{ et } (x;y)\neq(2;0)\right\}$$

5. Soit $z=x+iy$ un nombre complexe tel que $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

Déterminer tous les nombres complexes z dans chacun des cas suivants :

a) $iz^2\in\mathbb{R}$ $\quad$; $\quad$ **b)** $z^2+z+1\in\mathbb{R}$ $\quad$; $\quad$ **c)** $\frac{1-iz}{1+z}\in i\mathbb{R}$

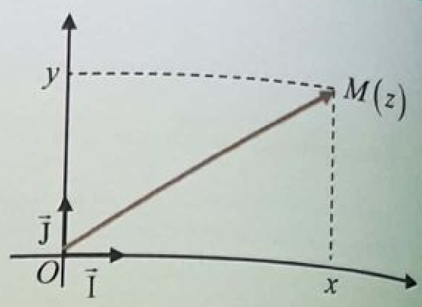
d) $\frac{z-1}{iz}\in i\mathbb{R}$ $\quad$; $\quad$ **e)** $\frac{3+iz}{(1+i)z-1}\in\mathbb{R}$

3 REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE D'UN COMPLEXE

3.1. AFFIXE D'UN POINT – AFFIXE D'UN VECTEUR

Définition 3

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}}\right)$.



- Soit $z = x + iy$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe.

  L'unique point M, de coordonnées $(x;y)$ dans $\left(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}}\right)$, est appelé **l'image** du complexe z et on écrit $M(z)$.
- Soit M un point, de coordonnées $(x;y)$ dans $\left(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}}\right)$.

  Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé **l'affixe** du point M. On le note $Aff(M)$ ou z_M.

Remarques

- Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}}\right)$. À partir de la définition 3, on peut identifier l'ensemble $\mathbb{C}$ au plan $\mathcal{P}$ de la façon suivante :
  - À tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le point $M(x;y)$.
  - À tout point $M(x;y)$ du plan $\mathcal{P}$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$. Ainsi :

  L'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{C} \to \mathcal{P} \\ \quad z \mapsto M(z) \end{array}$ est une bijection. Sa bijection réciproque est : $\begin{array}{l} f^{-1} : \mathcal{P} \to \mathbb{C} \\ \quad M \mapsto Aff(M) \end{array}$

  Le plan $\mathcal{P}$ est appelé alors **le plan complexe** et on a :

$$\left(\forall (M;N) \in \mathcal{P}^2\right) \quad \left(Aff(M) = Aff(N) \Leftrightarrow M = N\right)$$

- Tout point de l'axe des abscisses est l'image d'un nombre réel ; c'est pourquoi l'axe des abscisses s'appelle **l'axe réel.** On a alors :

$$M(z) \in \left(O;\vec{\mathrm{I}}\right) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

- Tout point $B(0;b)$ de l'axe des ordonnées est l'image d'un nombre imaginaire pur ($Aff(B) = bi$), c'est pourquoi l'axe des ordonnées s'appelle **l'axe imaginaire.** On a alors : $M(z) \in \left(O;\vec{\mathrm{J}}\right) \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Définition 4

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}}\right)$.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

Le vecteur $\vec{u} = x.\vec{\mathrm{I}} + y.\vec{\mathrm{J}}$ est appelé du complexe z, et on écrit $\vec{u}(z)$.

De même, le nombre z est appelé du vecteur $\vec{u}$, et on écrit $Aff(\vec{u}) = z$ ou parfois $z_{\vec{u}} = z$.

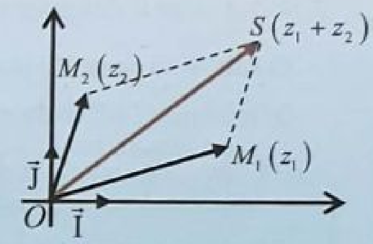
Remarques

- Soit z un nombre complexe. On a : $z = Aff(M) \Leftrightarrow z = Aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$
- Soit $\mathcal{V}_2$ l'ensemble des vecteurs du plan. L'application $\begin{array}{l} g : \mathbb{C} \to \mathcal{V}_2 \\ \quad z \mapsto \vec{w}(z) \end{array}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers $\mathcal{V}_2$ et on a : $\left(\forall(\vec{u};\vec{v}) \in \mathcal{V}_2^2\right) \quad \left(\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow Aff(\vec{u}) = Aff(\vec{v})\right)$

3.2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA SOMME, DE LA DIFFÉRENCE ET DE LA MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

Proposition 6

- Si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont deux vecteurs du plan d'affixes respectives z_1 et z_2, alors l'affixe du vecteur $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ est $z_1 + z_2$. En d'autres termes : $Aff(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = Aff(\vec{v}_1) + Aff(\vec{v}_2)$.
- Si M_1 et M_2 sont les images respectives des affixes z_1 et z_2, alors l'image du nombre $z_1 + z_2$ est le point S tel que : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (C'est-à-dire OM_1SM_2 est un parallélogramme)



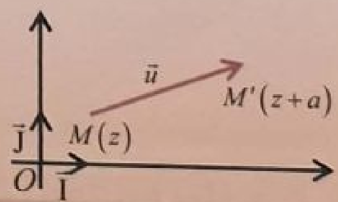
Remarques

- Soit z un nombre complexe et $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(-z)$ deux vecteurs du plan.

  On sait que $Aff\left(\vec{0}\right) = 0$ et $z + (-z) = 0$, donc d'après la proposition 6, on en déduit que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

  Ainsi $\vec{v} = -\vec{u}$ et alors : $Aff(-\vec{u}) = -Aff(\vec{u})$.
- Soit $M(z)$ et $M'(-z)$. Comme $O(0)$ et $z + (-z) = 0$ alors $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$ et par suite : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. Ainsi, le point $M'(-z)$ est le symétrique de point $M(z)$ par rapport à O.
- On peut aussi interpréter géométriquement l'addition de la manière suivante :

  Étant donné un vecteur $\vec{u}$ d'affixe a, la translation de vecteur $\vec{u}$ transforme le point M, d'affixe z, en le point M', d'affixe $z' = z + a$.

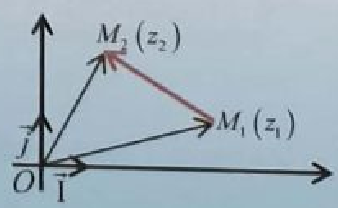


Proposition 7

Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan complexe.

Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est $z_2 - z_1$.

En d'autres termes : $Aff\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right) = Aff(M_2) - Aff(M_1)$



Exemple

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 3+2i$ et $z_B = 1+5i$

Déterminons l'affixe du point C pour lequel $OABC$ est un parallélogramme :

Le quadrilatère $OABC$ est un parallélogramme si, et seulement si : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

D'après la proposition 7, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = -2+3i$.

Et puisque l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OC}$ est celle du point C alors l'affixe du point C est : $z_C = z_B - z_A = -2+3i$

Applications

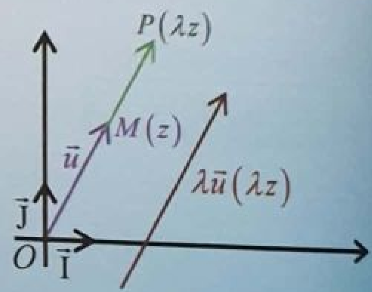
1. Soit A, B, C et D des points du plan d'affixes respectives a, b, c et d.
   Montrer que : ($ABCD$ est un parallélogramme) $\Leftrightarrow a+c=b+d$
2. Soit A, B et E des points du plan d'affixes respectives : $a=3-4i$, $b=7-i$ et $e=1+i$
   Et soit M le point du plan défini par : $-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{EM}=\vec{0}$
   Déterminer l'affixe du point M. Quelle est la nature du quadrilatère $ABME$?

Proposition 8

- Si $\vec{u}$ est un vecteur d'affixe z et λ un nombre réel, alors l'affixe du vecteur $\lambda\vec{u}$ est λz. En d'autres termes :

$$Aff(\lambda\vec{u}) = \lambda Aff(\vec{u})$$

- Si $M(z)$ est un point du plan, alors l'image du nombre complexe λz est le point P défini par : $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OM}$



Remarque

A l'aide des propositions 6 et 8, on peut établir le résultat suivant :
Si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont deux vecteurs du plan, alors pour tout $(\lambda_1;\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$Aff(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 Aff(\vec{v}_1)+\lambda_2 Aff(\vec{v}_2)$$

3.3. INTERPRÉTATION COMPLEXE DE LA LINÉARITÉ, DU PARALLÉLISME ET DU BARYCENTRE

Proposition 9

Soit A, B et C des points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Preuve

Les points A , B et C sont alignés si, et seulement si : $(\exists\lambda\in\mathbb{R});\ \overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$

Puisque l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est z_B-z_A et celle de $\overrightarrow{AC}$ est z_C-z_A, alors l'égalité $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ est équivalente à $z_C-z_A=\lambda(z_B-z_A)$, c'est-à-dire : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

Exemples

1) Soit A , B et C les points du plan complexe d'affixes respectives : $z_A=6-i$ et $z_B=1-11i$ et $z_C=7+i$

On a : $z_B-z_A=-5-10i$ et $z_C-z_A=1+2i$, donc $z_C-z_A=-\dfrac{1}{5}(z_B-z_A)$. Par conséquent : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-\dfrac{1}{5}\in\mathbb{R}$, ce qui entraîne que les points A , B et C soient alignés.

2) Soit $M(z)$, $A(1)$ et $N(z^2)$ avec $z\in\mathbb{C}$.

Déterminons l'ensemble des points M tels que M , A et N sont alignés :

- Si $z=0$ alors les points M et N sont confondus.
- Si $z=1$ alors les points A , M et N sont confondus.

On suppose maintenant que $z\neq 0$ et $z\neq 1$. Les points A , M et N sont alignés si, et seulement si $\dfrac{z^2-1}{z-1}\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $(z+1)\in\mathbb{R}$. Or si on pose $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ on obtient :

$$(z+1)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z+1)=0\Leftrightarrow y=0$$

Par suite, l'ensemble des points recherché est l'axe réel ou l'axe des abscisses.

3) Soit $M(z)$, $A(1)$ et $N(iz+1)$ avec $z\in\mathbb{C}$.

Déterminons l'ensemble des points M tels que M , A et N soient alignés :

- Si $z=1$ alors les points A et M sont confondus.
- Si $z=0$ alors les points A et N sont confondus.
- Si $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ alors les points M et N sont confondus.

On suppose maintenant que $z\neq 0$ et $z\neq 1$ et $z\neq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$. Les points A , M et N sont alignés si, et seulement si $\dfrac{1-z}{1-(iz+1)}\in\mathbb{R}$. En posant $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, on obtient :

$$\frac{1-z}{1-(iz+1)}=\frac{1-z}{-iz}=\frac{-1}{iz}+\frac{1}{i}=\frac{-1}{-y+ix}-i=\frac{y+ix}{y^2+x^2}-i=\frac{y}{x^2+y^2}+i\frac{x-x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Il s'ensuit donc : $$\frac{1-z}{1-(iz+1)}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{x-x^2-y^2}{x^2+y^2}=0\Leftrightarrow x^2+y^2-x=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

Par suite, l'ensemble des points $M(z)$ recherché est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

Applications

Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels les points $B(i)$, $M(z)$ et $M'(iz)$ sont alignés est un cercle que l'on déterminera.

Proposition 10

Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si : $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Preuve

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si : $(\exists k \in \mathbb{R})$; $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$, ce qui signifie que $z_D - z_C = k(z_B - z_A)$, c'est-à-dire que $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$, d'où le résultat.

Exemple

Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives $z_A = -2+6i$, $z_B = 4-3i$ et $z_C = (2-3i)x$ où $x \in \mathbb{R}^*$.

On a : $z_B - z_A = 6-9i$, donc $\dfrac{z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{x}{3}$. Puisque $x \in \mathbb{R}^*$ alors $\dfrac{z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$. Ainsi : $(AB)//(OC)$.

Application

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère les points $A(-1)$, $B(i)$, $M(z)$ et $N(z^2)$.

Déterminer l'ensemble des points M tels que les droites (BM) et (AN) soient parallèles.

Proposition 11

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B, et soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha + \beta \neq 0$.

L'affixe du barycentre G du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ est le complexe : $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$

Remarques

- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors l'affixe du milieu I du segment $[AB]$ est le nombre complexe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.
  En fait ceci n'est rien qu'un cas particulier du barycentre où les « poids » sont égaux.
- On peut généraliser le résultat de la proposition 11 pour le barycentre de plus de deux points.
  Plus précisément : si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$, alors le barycentre G du système pondéré $\{(A_1;\alpha_1);(A_2;\alpha_2);...;(A_n;\alpha_n)\}$
  a pour affixe : $$z_G = \frac{\alpha_1.z_{A_1} + \alpha_2.z_{A_2} + ... + \alpha_n.z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$$

Exemple

Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 3+3i$, $z_B = 5-2i$ et $z_C = 7+10i$

- Le milieu du segment $[AB]$ est le point I d'affixe : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 4 + \dfrac{1}{2}i$.
- Le barycentre H du système pondéré $\{(B;-1);(C;5)\}$ a pour affixe : $z_H = \dfrac{-z_B + 5z_C}{4} = \dfrac{15}{2} + 13i$.
- Le centre de gravité du triangle ABC est le point G d'affixe : $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = 5 + \dfrac{11}{3}i$.

Applications

1. Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $a = 3+7i$ et $b = 4+5i$ et $c = 2+i$.

   a) Déterminer l'affixe du point G barycentre du système pondéré $\{(A;2);(B;1);(C;1)\}$ et l'affixe du point H barycentre du système pondéré $\{(A;1);(B;2);(C;1)\}$.

   b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

2. Soit x et y deux nombres réels. Soit les points A, B, C et G du plan complexe d'affixes respectives :

   $z_A = 1+iy$, $z_B = 2i$, $z_C = x-i$ et $z_G = 1-i$.

   Déterminer les valeurs des réels x et y pour que le point G soit le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;-1)$ et $(C;3)$.

4 CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

4.1. DÉFINITION ET INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Définition 5

Soit $z = x+iy$ un nombre complexe avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle conjugué de z le nombre complexe $x-iy$, noté $\overline{z}$, et on écrit : $\overline{z} = \overline{x+iy} = x-iy$.

On a alors : $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$ et $\overline{\overline{z}} = z$

Exemples

On considère les nombres complexes :

$$z = 1+2i \quad ; \quad t = -7i \quad ; \quad u = 17+3\sqrt{2} \quad ; \quad v = 5-4i \quad ; \quad w = 3+i(5+i)$$

Calculons les conjugués de ces nombres :

On a : $\overline{z} = \overline{1+2i} = 1-2i$; $\overline{t} = \overline{-7i} = 7i$; $\overline{u} = \overline{17+3\sqrt{2}} = 17+3\sqrt{2}$; $\overline{v} = \overline{5-4i} = 5+4i$

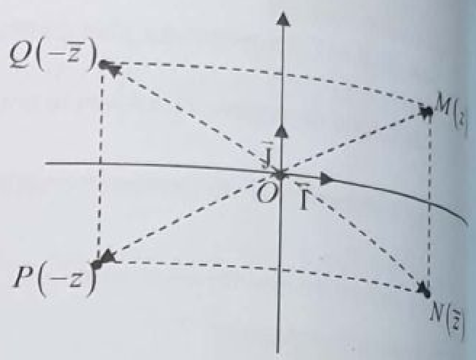
On a : $w = 2+5i$, donc : $\overline{w} = \overline{2+5i} = 2-5i$

Interprétation géométrique de la conjugaison

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses transforme le point $M(x;y)$ en $N(x;-y)$, d'affixe $Aff(N) = \overline{Aff(M)}$.

La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées transforme le point $M(x;y)$ en $Q(-x;y)$, d'affixe $Aff(Q) = -\overline{Aff(M)}$.



4.2. PROPRIÉTÉS DU CONJUGUÉ

Proposition 12

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \quad \text{et} \quad z.\overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$$

On a donc : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

Preuve

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$, d'où :

$$\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = x = \mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy) = y = \mathrm{Im}(z)$$

$$z.\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$$

Pour les deux équivalences :

$$\overline{z} = z \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow 2i\,\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \overline{z} = -z \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

Remarque

- En pratique, pour éliminer les complexes du dénominateur d'une fraction, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Proposition 13

Soit z et z' deux nombres complexes. On a alors les propriétés suivantes :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$
- Si $z \neq 0$ alors : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$
- Si $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors : $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Exemples

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose : $u = (5+6i)^n + (5-6i)^n$ et $v = \left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1} + \left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}$

Montrons que le nombre u est réel et que le nombre v est imaginaire pur.

On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$\overline{u} = \overline{(5+6i)^n + (5-6i)^n} = \overline{(5+6i)^n} + \overline{(5-6i)^n} = (5-6i)^n + (5+6i)^n = u$. Par suite : u est réel.

On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\overline{v} = \overline{\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1} + \left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}} = \left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1} + \left(-i-\sqrt{3}\right)^{2n+1} = (-1)^{2n+1}\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1} + (-1)^{2n+1}\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}$$

Puisque $(-1)^{2n+1} = -1$ alors $\overline{v} = -\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1} - \left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1} = -v$. Par suite : v est imaginaire pur.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on veut déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $2iz - \overline{z}$ est réel.

On pose : $z' = 2iz - \overline{z}$, et soit E l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z' \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$M \in E \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z'} = z' \Leftrightarrow \overline{2iz - \overline{z}} = 2iz - \overline{z} \Leftrightarrow -2i\overline{z} - z = 2iz - \overline{z} \Leftrightarrow z - \overline{z} = -2i(z + \overline{z})$$

Par conséquent : $M \in E \Leftrightarrow 2i\,\mathrm{Im}(z) = -4i\,\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = -2\,\mathrm{Re}(z)$

Si on considère $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on en déduit que : $M \in E \Leftrightarrow y = -2x$

Par suite, l'ensemble $E = \left\{M(z) / 2iz - \overline{z} \in \mathbb{R}\right\}$ est la droite d'équation $y = -2x$.

Applications

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Simplifier l'expression suivante : $\overline{\left(\dfrac{iz+1}{z}\right)} - \dfrac{\overline{1-z}}{\overline{z}}$

2. On considère le nombre complexe : $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\left(j^{2n} - j^n\right) \in i\mathbb{R}$.

   b) Montrer que pour tout $(a;b;c) \in \mathbb{C}^3$:
   $$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a + b\,\overline{j} + c\,j\right)\left(a + b\,j + c\,\overline{j}\right)$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $\overline{z} = (1-i)z + 3 + 2i$ et $z^2 + \overline{z} - \dfrac{1}{4} = 0$

4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $f(z) = (z-2)(\overline{z}+i)$. Soit $M(z)$ un point du plan complexe.

   Déterminer les ensembles suivants : $E = \left\{M(z) / f(z) \in \mathbb{R}\right\}$ et $F = \left\{M(z) / f(z) \in i\mathbb{R}\right\}$

5. Déterminer dans le plan complexe, l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $Z = \dfrac{1+z}{1-\overline{z}}$ est réel.

6. Déterminer dans le plan complexe, l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels le nombre $Z' = \dfrac{z+i}{i\overline{z}+3}$ est imaginaire pur.

Remarques

- Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $z_1, z_2, ..., z_n$ des nombres complexes. Alors :

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} \qquad \text{et} \qquad \overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

- Soit $P(z)$ un polynôme dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels : $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$

(les nombres $a_0, a_1, ..., a_n$ sont alors réels). On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} = \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z} + \overline{a_0}$$

Puisque pour tout entier k compris entre 1 et n (au sens large) : $\overline{a_k} = a_k$ et $\overline{z^k} = (\overline{z})^k$

Alors : $\overline{P(z)} = a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + ... + a_1 \overline{z} + a_0 = P(\overline{z})$. En particulier, si α est racine du polynôme P (c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$), alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine du P car : $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$.

On obtient alors le résultat important suivant :

« Si α est racine d'un polynôme à coefficients réels, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de ce polynôme »

5 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

5.1. DÉFINITION ET INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Définition 6

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

Le module de z est le réel positif noté $|z|$ défini par : $|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

On a alors : $|z| = \sqrt{(\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2}$

Exemples

$|12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$; $|3 + 5i| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$; $|-2\sqrt{15}| = 2\sqrt{15}$

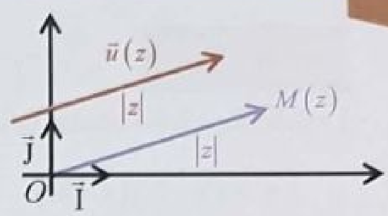
$|7| = 7$; $|-\sqrt{6} - \sqrt{2}\, i| = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $|5i| = \sqrt{5^2} = 5$; $|-3i| = \sqrt{(-3)^2} = 3$

Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $|\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$ et $|1 + i\tan\theta| = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$

Remarques

- La notion de module prolonge celle de la valeur absolue, c'est-à-dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.
- On a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z.\overline{z}$ et $|\overline{z}| = |z|$. Si $z \neq 0$ alors : $\overline{z} = \frac{|z|^2}{z}$

Interprétation géométrique du module



Étant donné $z \in \mathbb{C}$, d'image M, le module de z est la distance OM : $|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$

Si $\vec{u}$ est un vecteur d'affixe z alors : $|z| = \|\vec{u}\|$

À partir de cette interprétation géométrique du module, on peut déduire les résultats suivants :

Proposition 14

La distance entre deux points A et B, d'affixes respectives a et b, est : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |b-a|$

Proposition 15

Soit a un nombre complexe et r un réel strictement positif. On note A l'image de a.

L'ensemble des images $M(z)$ des nombres complexes z tels que :

- $|z-a| = r$ est le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r.
- $|z-a| \le r$ est le disque fermé $\mathscr{D}$ de centre A et de rayon r.
- $|z-a| < r$ est le disque ouvert Δ de centre A et de rayon r.

Exemples

1) Soit E l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z| = 3$. Puisque $OM = 3$ alors E est l'ensemble des points M tels que $OM = 3$. Par conséquent, l'ensemble E est le cercle de centre O et de rayon 3.

2) Soit F l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z-1+i| \le 4$.

En notant A le point d'affixe $1-i$, on obtient : $M \in F \Leftrightarrow |z-(1-i)| \le 4 \Leftrightarrow AM \le 4$

Par suite, l'ensemble F est le disque fermé de centre A et de rayon 4.

5.2. PROPRIÉTÉS DU MODULE

Proposition 16

Soit z et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

- $|z| \ge 0$ et $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \le |z|$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ et $|z-z'| = 0 \Leftrightarrow z = z'$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
- Si $z \ne 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ et $|z^n| = |z|^n$

Exemples

1) Calculons les modules des nombres complexes suivants :

$$z_1=(3-4i)(4+8i)\quad;\quad z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\quad;\quad z_3=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2018}\quad;\quad z_4=\frac{-4i(5-i)^6}{13(3+2i)^4}$$

En utilisant la définition du module et les propriétés énoncées dans la proposition 16, on obtient :

$$|z_1|=|3-4i|\times|4+8i|=\sqrt{25}\times\sqrt{80}=20\sqrt{5}\quad;\quad |z_2|=\frac{\left|\sqrt{3}+i\right|}{\left|\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right|}=\frac{2}{2}=1$$

$$|z_3|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^{2018}=1^{2018}=1\quad;\quad |z_4|=\left|\frac{-4i(5-i)^6}{13(3+2i)^4}\right|=\frac{|-4i|.|5-i|^6}{13|3+2i|^4}=\frac{4\times\left(\sqrt{26}\right)^6}{13\times\left(\sqrt{13}\right)^4}=32$$

2) Déterminons dans le plan complexe, l'ensemble E des points $M(z)$ tels que : $|iz+3|=\left|\frac{1}{i}z-4i+1\right|$

On a pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$M(z)\in E\Leftrightarrow|iz+3|=\left|\frac{1}{i}z-4i+1\right|\Leftrightarrow|i(z-3i)|=\left|\frac{1}{i}(z+4+i)\right|\Leftrightarrow|i||z-3i|=\left|\frac{1}{i}\right||z+4+i|$$

Comme $|i|=\left|\frac{1}{i}\right|=1$, alors : $M(z)\in E\Leftrightarrow|z-3i|=|z+4+i|$

Considérons les points $A(3i)$ et $B(-4-i)$. On a donc : $M(z)\in E\Leftrightarrow|z-3i|=|z+4+i|\Leftrightarrow AM=BM$

Par suite, l'ensemble E est la médiatrice du segment $[AB]$.

3) Soit F l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|iz-2|=|\overline{z}+1-i|$.

On a pour tout $z\in\mathbb{C}$: $|iz-2|=|i(z+2i)|=|i|.|z+2i|=|z+2i|$ et $|\overline{z}+1-i|=\left|\overline{\overline{z}+1-i}\right|=|z+1+i|$

On considère les points $A(-2i)$ et $B(-1-i)$. On a alors : $M\in F\Leftrightarrow|z+2i|=|z+1+i|\Leftrightarrow AM=BM$

Par suite, l'ensemble G est la médiatrice du segment $[AB]$.

4) Soit u un nombre complexe tel que $u\notin\mathbb{R}$. Montrons que : $(\forall z\in\mathbb{C})\ |1+uz|=|1+\overline{u}z|\Rightarrow z\in\mathbb{R}$

Soit $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $|1+uz|=|1+\overline{u}z|$. On a alors :

$$|1+uz|=|1+\overline{u}z|\Rightarrow|1+uz|^2=|1+\overline{u}z|^2\Rightarrow(1+uz)(1+\overline{u}.\overline{z})=(1+\overline{u}z)(1+u.\overline{z})$$

Il en résulte donc : $1+u.z+\overline{u}.\overline{z}+u.\overline{u}.z.\overline{z}=1+u.\overline{z}+\overline{u}.z+u.\overline{u}.z.\overline{z}$, c'est-à-dire : $u.z+\overline{u}.\overline{z}=u.\overline{z}+\overline{u}.z$

par conséquent : $(u-\overline{u})z+(\overline{u}-u)\overline{z}=0$, d'où : $(u-\overline{u})(z-\overline{z})=0$.

Puisque $u-\overline{u}\neq0$ (car $u\notin\mathbb{R}$) alors nécessairement $z-\overline{z}=0$, donc $z=\overline{z}$ et par suite : $z\in\mathbb{R}$

Remarque

Si n est un entier supérieur ou égal à 2, et $z_1,z_2,\ldots,z_n$ des nombres complexes, alors : $\left|\prod_{k=1}^{n}z_k\right|=\prod_{k=1}^{n}|z_k|$

Applications

1. Déterminer le module du nombre complexe : $z=\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{16}$

2. Pour tout $z\in\mathbb{C}-\left\{-\frac{1}{2}i\right\}$, on pose : $Z=\dfrac{z+2i}{2z+i}$.

   Montrer l'équivalence suivante : $|z|=1\Leftrightarrow|Z|=1$

3. Déterminer tous les nombres complexes z tels que :

   a) $\left|z^2\right|-|z-iz|=|\overline{z}|$; b) $\left|-8iz^2\right|=32$; c) $|z-1+2i|=3|\overline{z}+4+3i|$

4. Soit F l'application du plan complexe $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ et qui associe à tout point M d'affixe $z\in\mathbb{C}-\{i\}$ le point M' d'affixe $f(z)=\dfrac{1-iz}{z-i}$.

   Montrer que si le point M varie sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(i)$ et de rayon 4, alors le point M' varie sur un cercle $\mathscr{C}'$ dont on déterminera le centre et le rayon.

Proposition 17

Étant donné deux nombres complexes z et z', on a : $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

C'est l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes.

Preuve

On calcule :

$$\left(|z|+|z'|\right)^2-|z+z'|^2=\left(z.\overline{z}+2|z.z'|+z'.\overline{z'}\right)-(z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)=2\left(|\overline{z}.z'|-\operatorname{Re}(\overline{z}.z')\right)$$

Puisque $\operatorname{Re}(\overline{z}.z')\leq|\overline{z}.z'|$ (d'après proposition 16)

alors $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ car les réels $|z+z'|$ et $|z|+|z'|$ sont positifs.

Remarques

- Soit ABC un triangle et on pose :

  $a=BC$ et $b=AC$ et $c=AB$

  On sait que : $a\leq b+c$, c'est-à- dire : $BC\leq AC+AB$

  Donc : $|z_C-z_B|\leq|z_C-z_A|+|z_A-z_B|$

  D'où la dénomination « » pour cette relation.

- On peut généraliser le résultat de la proposition 17 pour n nombres complexes ($n\in\mathbb{N}^*$ et $n\geq2$) comme suit : « Si $z_1, z_2, ..., z_n$ sont des nombres complexes alors : $\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|$ »

- La proposition 17 affirme que : $\left(\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2\right)$ $|z+z'|\leq|z|+|z'|$. On peut alors se poser la question :

  « À quelles conditions a-t-on l'égalité $|z+z'|=|z|+|z'|$? »

- Si $z = 0$, l'inégalité triangulaire est une égalité.
- Si $z' = \lambda.z$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$, il vient $|z + z'| = |1 + \lambda||z| = (1 + \lambda)|z| = |z| + |z'|$.
- Si $|z + z'| = |z| + |z'|$ et $z \neq 0$, on a $\bar{z}.z' \in \mathbb{R}^+$ (car, d'après la preuve précédente, $\mathrm{Re}(\bar{z}.z') = |\bar{z}.z'| \geq 0$)

donc $z' = \lambda z$ avec $\lambda = \dfrac{\bar{z}.z'}{|z|^2}$.

Corollaire

Étant donné deux nombres complexes z et z', on a : $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$

Applications

1. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes quelconques.

Montrer l'inégalité suivante : $\dfrac{|z_1 + z_2|}{1 + |z_1 + z_2|} \leq \dfrac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1| + |z_2|}$

2. Soit z un nombre complexe. En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que : $|z| \leq |z|^2 + |z - 1|$

(Indication : on pourra distinguer les deux cas : $|z| \geq 1$ et $|z| \leq 1$)

6 FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN COMPLEXE

On rappelle que le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{I}, \vec{J})$.

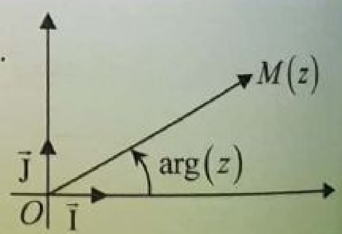
6.1. ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Définition 7

Soit z un nombre complexe non nul, d'image M dans le plan complexe $\mathcal{P}$.

Toute mesure θ de l'angle orienté $(\widehat{\vec{I}; \overrightarrow{OM}})$ s'appelle un argument de z.

On le note $\arg(z)$ et on écrit : $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$



Remarques

- Soit z un nombre complexe non nul.

  Si θ est un argument du nombre complexe z, alors tout nombre réel de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z. Dans la pratique, on prend souvent θ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, c'est-à-dire la mesure principale de l'angle $(\widehat{\vec{I}; \overrightarrow{OM}})$.

- Le nombre 0 est l'unique nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Exemples

On considère la figure ci-contre.

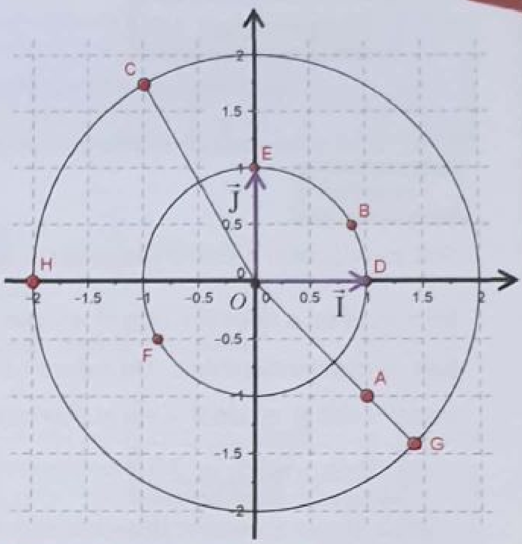
En utilisant la définition 7, on obtient les résultats suivants :

$\arg(z_A) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$; $\arg(z_B) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$\arg(z_C) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$; $\arg(z_D) \equiv 0\ [2\pi]$

$\arg(z_E) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; $\arg(z_F) \equiv -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

$\arg(z_G) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$; $\arg(z_H) \equiv \pi\ [2\pi]$



6.2. FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Proposition 18

- Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ et θ un argument de z.

  Alors : $x = |z|\cos\theta$ et $y = |z|\sin\theta$

- Tout nombre complexe non nul z s'écrit de manière unique sous la forme :

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta), \text{ où } \theta \text{ est un argument de } z.$$

Définition 8

Soit z un nombre complexe non nul et θ un argument de z.

L'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée une écriture trigonométrique ou forme trigonométrique du nombre complexe z. Notation simplifiée : $z = [|z|;\theta]$

Remarque

Tout nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques.

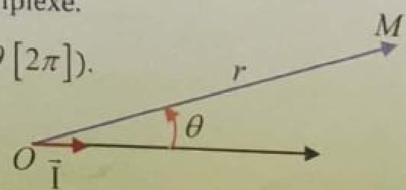
Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors : $z = |z|\big(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\big)$

Définition 9

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On pose : $r = OM$ et θ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{I};\overrightarrow{OM}})$ ($\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$).

Le couple $(r;\theta)$ est appelé le couple des coordonnées polaires du point M par rapport à l'axe polaire $(O;\vec{I})$. Le point O est le pôle.



Proposition 19

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tel que $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors : $|z| = r$ et $\theta \equiv \arg(z)\,[2\pi]$

Preuve

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tel que $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a : $|z| = |r||\cos\theta + i\sin\theta|$. Et puisque $r > 0$, alors $|r| = r$, et on a : $|\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$. Donc : $|z| = r$

Soit φ un argument de z. On a donc : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; il en résulte alors : $\cos\theta = \cos\varphi$ et $\sin\theta = \sin\varphi$. Par conséquent : $\theta \equiv \varphi\,[2\pi]$, ce qui signifie que θ est un argument de z.

Proposition 20

Soit z un nombre complexe non nul. On a les équivalences suivantes :

1) $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\,[\pi]$; 4) $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

2) $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\,[2\pi]$; 5) $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

3) $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi\,[2\pi]$; 6) $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

Remarques

- Les propositions 18 et 19 nous indiquent que toute écriture du genre $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est une forme géométrique d'un nombre complexe de module r et d'argument θ.
- La proposition 20 nous facilite la détermination d'une forme trigonométrique d'un nombre réel ou imaginaire pur. En effet, si x est un nombre réel strictement positif, alors :
- La détermination d'une écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul z est équivalente à la détermination de son module et d'un de ces arguments. Pratiquement :

Si $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ alors $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, et donc : $\frac{z}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Et si $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$ alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, et donc : $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$. Par conséquent :

$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Ainsi, la connaissance de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ permet la détermination d'un argument de z. (On pourra utiliser les boutons $\boxed{\cos^{-1}}$ et $\boxed{\sin^{-1}}$ de la calculatrice).

- Si $z = \lambda(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ alors $|z| = -\lambda$ et $z = |\lambda|(-\cos\theta - i\sin\theta)$. Par suite :

$z = |\lambda|(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$ est une forme trigonométrique du nombre z

Exemples

1) Déterminons une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \quad ; \quad z_2 = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) \quad ; \quad z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} - i \quad ; \quad z_4 = -5 + 5i \quad ; \quad z_5 = \frac{-\sqrt{6} + 3i\sqrt{2}}{-i}$$

• On a : $|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; donc : $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Par suite :

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre z_1. Ainsi : $z_1 = \left[2\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]$.

• On a : $z_2 = 3\left(-\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right) = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right)\right) = 3\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$. Par suite :

$z_2 = 3\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre z_2. Ainsi : $z_2 = \left[3;\frac{6\pi}{5}\right]$.

• On a : $|z_3| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; donc : $z_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Par suite :

$z_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ est une forme trigonométrique du z_1. Ainsi : $z_3 = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{\pi}{3}\right]$.

• On a : $|z_4| = |-5|.|1 - i| = 5\sqrt{2}$; donc : $z_4 = 5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Par suite :

$z_4 = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre z_1. Ainsi : $z_4 = \left[5\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right]$.

• On a : $z_5 = -3\sqrt{2} - \sqrt{6}i$, donc : $|z_5| = \sqrt{\left(-3\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Par conséquent :

$z_5 = 2\sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ est une forme trigonométrique du nombre complexe z_5. Ainsi : $z_5 = \left[2\sqrt{6};-\frac{5\pi}{6}\right]$.

2) Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Déterminons une forme trigonométrique du nombre $z = 1 + i\tan\alpha$:

On a : $z = 1 + i\tan\alpha = 1 + i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$. On peut distinguer deux cas :

• Si $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos\alpha > 0$ et donc : $z = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$. Ainsi : $z = \left[\frac{1}{\cos\alpha};\alpha\right]$.

• Si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ alors $\cos\alpha < 0$ et donc : $z = -\frac{1}{\cos\alpha}\left(\cos(\pi + \alpha) + i\sin(\pi + \alpha)\right)$. Ainsi :

$z = \left[-\frac{1}{\cos\alpha};\pi + \alpha\right]$.

Applications

1. Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -2\left(\cos\frac{3\pi}{7} - i\sin\frac{3\pi}{7}\right) \quad ; \quad z_2 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{2\pi}{11} - i\sin\frac{2\pi}{11}\right) \quad ; \quad z_3 = \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{9} + i\cos\frac{\pi}{9}\right)$$

2. Déterminer une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \sqrt{15} + 3\sqrt{5}\,i \quad ; \quad Z_2 = -2\sqrt{3}\,i - 2 \quad ; \quad Z_3 = 1 - \sqrt{3} + \left(\sqrt{3} - 1\right)i \quad ; \quad Z_4 = \sqrt{3} - \frac{1}{2} + \frac{1-2\sqrt{3}}{2}i$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$u_1 = \cos\alpha - i\sin\alpha \quad ; \quad u_2 = -\cos\alpha + i\sin\alpha \quad ; \quad u_3 = -\cos\alpha - i\sin\alpha \quad ; \quad u_4 = \sin\alpha + i\cos\alpha$$

$$u_5 = \sin\alpha - i\cos\alpha \quad ; \quad u_6 = -\sin\alpha + i\cos\alpha \quad ; \quad u_7 = -\sin\alpha - i\cos\alpha$$

4. Soit θ un nombre réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$.

Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe Z défini par : $Z = \sin(2\theta) - 2i\cos^2\theta$.

5. Soit θ un nombre réel tel que $\sin(2\theta) \neq 0$.

Déterminer, selon les valeurs de θ, une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes :

$$A = 1 + \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) \quad ; \quad B = 1 - \sin(2\theta) + i\cos(2\theta) \quad ; \quad C = 1 - \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

6. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe tel que $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

Montrer que :

$$\begin{cases} \arg(z) \equiv \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \quad [2\pi] \quad \text{si} \quad a > 0 \\ \arg(z) \equiv \pi + \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \quad [2\pi] \quad \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Proposition 21

Pour des nombres complexes non nuls z et z', on a :

1) $z' = z \Leftrightarrow \left(|z'| = |z| \text{ et } \arg(z') \equiv \arg(z)\ [2\pi]\right)$

2) $z' = \overline{z} \Leftrightarrow \left(|z'| = |z| \text{ et } \arg(z') \equiv -\arg(z)\ [2\pi]\right)$

3) $z' = -z \Leftrightarrow \left(|z'| = |z| \text{ et } \arg(z') \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]\right)$

Preuve

- Pour 1), il suffit de noter que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$, où θ est un argument de z et θ' un argument de z'.
- Pour 2), on a : $\overline{z} = |z|(\cos\theta - i\sin\theta) = |\overline{z}|\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$.

• Pour 3), on a : $-z = |z|(-\cos\theta - i\sin\theta) = |-z|(\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta))$.

Corollaire

Soit z un nombre complexe non nul. Si $z = [r,\theta]$ alors : $\overline{z} = [r;-\theta]$ et $-z = [r;\pi+\theta]$.

En particulier, on a : $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$ et $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\,[2\pi]$

Proposition 22

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que : $z = [r;\theta]$ et $z' = [r';\theta']$.

On a les relations suivantes :

1) $zz' = [rr';\theta+\theta']$ et $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.

2) $\dfrac{1}{z} = \left[\dfrac{1}{r};-\theta\right]$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

3) $\dfrac{z}{z'} = \left[\dfrac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $z^n = [r^n;n\theta]$ et $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$.

Preuve

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que : $z = [r;\theta]$ et $z' = [r';\theta']$. Autrement dit :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{et} \quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

1) On a : $z.z' = rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= rr'((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'))$$

Par conséquent : $z.z' = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$. Ainsi :

$$z.z' = [r.r';\theta+\theta'] \quad \text{et} \quad \arg(z.z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$$

2) Puisque $z.\dfrac{1}{z} = 1$ alors $z.\dfrac{1}{z} = [1;0]$. D'après les résultats de 1) :

$$|z|.\left|\frac{1}{z}\right| = 1 \text{ et } \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv 0\ [2\pi]$$

Par suite : $\dfrac{1}{z} = \left[\dfrac{1}{r};-\theta\right]$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

3) De l'égalité $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$ et les résultats 1) et 2) on tire :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{r}{r'} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right)\ [2\pi]$$

Par suite : $\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$.

4) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z^n = \left[r^n;n\theta\right]$

Initialisation : On a pour $n=0$, $z^0 = 1 = [1;0] = \left[r^0;1\right]$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $z^n = \left[r^n;n\theta\right]$ et montrons que $z^{n+1} = \left[r^{n+1};(n+1)\theta\right]$.

On a : $z^{n+1} = z^n \times z = \left[r^n;n\theta\right]\times[r;\theta] = \left[r^n.r;n\theta+\theta\right] = \left[r^{n+1};(n+1)\theta\right]$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n = \left[r^n;n\theta\right]$

Si $n \in \mathbb{Z}^-$ alors $-n \in \mathbb{N}$, et donc : $z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \left[\left(\frac{1}{r}\right)^{-n};-n\times(-\theta)\right] = \left[r^n;n\theta\right]$. Par suite :

$$z^n = \left[r^n;n\theta\right] \quad \text{et} \quad \arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$$

Remarques

- Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $z_1, z_2, ..., z_n$ des nombres complexes non nuls. Alors :

$$\arg\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) \equiv \sum_{k=1}^{n}\arg(z_k)\ [2\pi]$$

- Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls tels que $z_1+z_2 \neq 0$, alors on n'a pas en général $\arg(z_1+z_2) \equiv \arg(z_1)+\arg(z_2)\ [2\pi]$. Contre-exemple :

$$\arg(1)+\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \quad \text{et} \quad \arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} \not\equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$$

- Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, et soit M et M' leurs images respectives dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\text{I}};\vec{\text{J}})$. À partir de la proposition 22, on peut déduire que le point $P(z.z')$ est le point du plan complexe tel que :

$$OP = OM \times OM' \quad \text{et} \quad \left(\overline{\vec{\text{I}};\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\overline{\vec{\text{I}};\overrightarrow{OM}}\right)+\left(\overline{\vec{\text{I}};\overrightarrow{OM'}}\right)\ [2\pi]$$

Exemples

1) On considère les nombres complexes : $a=(1-i)^{17}$ et $b=\left(\sqrt{3}+i\right)^5$ et $z=\frac{a}{b}$

Déterminons une forme trigonométrique et la forme algébrique de chacun des nombres a, b et z puis déduisons-en les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$:

- Pour le nombre a : On a $|1-i|=\sqrt{2}$ et $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$,

donc $1-i=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$ et $a=(1-i)^{17}=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]^{17}=\left[\left(\sqrt{2}\right)^{17};-\frac{17\pi}{4}\right]=\left[256\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$.

Par conséquent, une forme trigonométrique du nombre a est : $a = \left[256\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$

On a : $a = 256\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 256\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 256 - 256i$

- Pour le nombre b : On a $\left|\sqrt{3}+i\right| = 2$ et $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$,

donc $\sqrt{3}+i = \left[2; \frac{\pi}{6}\right]$ et $b = \left(\sqrt{3}+i\right)^5 = \left[2; \frac{\pi}{6}\right]^5 = \left[32; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Par conséquent, une forme trigonométrique du nombre b est : $b = \left[32; \frac{5\pi}{6}\right]$.

On a : $b = 32\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -16\sqrt{3} + 16i$

- Pour le nombre z : On a $z = \frac{a}{b} = \frac{256(1-i)}{-16\left(\sqrt{3}-i\right)} = \frac{-16(1-i)\left(\sqrt{3}+i\right)}{4}$

Donc la forme algébrique du nombre z est : $z = -4\left(\sqrt{3}+1\right) + 4i\left(\sqrt{3}-1\right)$

On peut obtenir une forme trigonométrique du nombre z de la façon suivante :

$$z = \frac{a}{b} = \frac{\left[256\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]}{\left[32; \frac{5\pi}{6}\right]} = \left[\frac{256\sqrt{2}}{32}; -\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right] = \left[8\sqrt{2}; -\frac{13\pi}{12}\right]. \text{ Ainsi : } z = \left[8\sqrt{2}; \frac{11\pi}{12}\right].$$

Déterminons maintenant les valeurs des nombres $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$:

On a : $z = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = -4\left(\sqrt{3}+1\right) + 4i\left(\sqrt{3}-1\right)$. Il s'ensuit donc :

$$\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-4\left(\sqrt{3}+1\right)}{8\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

D'où : $\cos\frac{\pi}{12} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) On considère les nombres complexes : $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

Déterminons une forme trigonométrique de chacun des nombres : $z_1 \times z_2$; $\frac{1}{z_1}$; $-z_2$; $\frac{\overline{z_1}^4}{z_2}$

Déterminons tout d'abord des formes trigonométriques de z_1 et z_2 :

On a $|z_1| = 2\sqrt{2}$ et $|z_2| = 2$, et donc : $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left[2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$.

et $z_2 = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left[2;\frac{\pi}{3}\right]$.

Déterminons ensuite une écriture trigonométrique de chacun des nombres suivants :

- $z_1 \times z_2 = \left[2\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]\times\left[2;\frac{\pi}{3}\right] = \left[2\sqrt{2}\times 2;\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right] = \left[4\sqrt{2};\frac{7\pi}{12}\right]$.
- $\frac{1}{z_1} = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}};-\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$ et $-z_2 = \left[2;\pi+\frac{\pi}{3}\right] = \left[2;\frac{4\pi}{3}\right] = \left[2;-\frac{2\pi}{3}\right]$.
- $\frac{\overline{z_1}^4}{z_2} = \frac{\left[2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]^4}{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]} = \frac{\left[\left(2\sqrt{2}\right)^4;-\pi\right]}{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]} = \frac{[64;-\pi]}{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]} = \left[32;-\frac{4\pi}{3}\right] = \left[32;\frac{2\pi}{3}\right]$.

Signalons enfin que tout nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques ; et en pratique on prend souvent l'argument appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et parfois $[0;2\pi[$.

Applications

1. Soit θ un nombre complexe. Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants :

$$z_1 = \left(1-i\sqrt{3}\right)(1+i)(\cos\theta - i\sin\theta) \quad \text{et} \quad z_2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)(1-i)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

2. On considère le nombre complexe : $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

   a) Calculer z^2 puis $|z^2|$ et $\arg(z^2)$.

   b) En déduire une écriture trigonométrique du nombre complexe z.

   c) Construire dans le plan complexe les points $A(z), B(-z)$ et $C(z^2)$.

   d) Déduire de ce qui précède, les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$ puis celles de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

   e) Vérifier que $z^{2016} \in \mathbb{R}^+$.

3. Soit z un nombre complexe tel que $z \notin \mathbb{R}^-$.

   Montrer que : $2\arg(z+|z|) \equiv \arg(z)\ [2\pi]$.

4. Soit z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls tels que : $|z_1| = |z_2|$ et $z_1 + z_2 \neq 0$.

   Déterminer $\arg(z_1+z_2)$ en fonction de $\arg(z_1)$ et $\arg(z_2)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe : $u_n = (1+i)^n - \left(1+i\sqrt{3}\right)^n$.

6. Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Écrire sous forme trigonométrique le nombre $z = \frac{\tan\theta}{1+i\tan\theta}$.

7. Soit $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[$. Déterminer le module et un argument du nombre : $Z = \frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin(2\alpha)}+i\sqrt{1-\sin(2\alpha)}}$.

6.3. ANGLE DE DEUX VECTEURS ET ARGUMENT D'UN COMPLEXE

On rappelle que le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}}\right)$.

Proposition 23

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z', et soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Alors le nombre complexe $\dfrac{z'}{z}$ a pour argument toute mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$. Ainsi :

1) $\left(\overline{\vec{\mathrm{I}};\vec{u}}\right) \equiv \arg(z)\ [2\pi]$ et $\left(\overline{\vec{\mathrm{I}};\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$ (argument de l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$).

2) $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)\ [2\pi]$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

Preuve

On a par définition de l'argument : $\left(\overline{\vec{\mathrm{I}};\vec{u}}\right) \equiv \arg(z)\ [2\pi]$ et $\left(\overline{\vec{\mathrm{I}};\vec{v}}\right) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right) &\equiv \left(\overline{\vec{u};\vec{\mathrm{I}}}\right) + \left(\overline{\vec{\mathrm{I}};\vec{v}}\right) \quad [2\pi] \\ &\equiv \left(\overline{\vec{\mathrm{I}};\vec{v}}\right) - \left(\overline{\vec{\mathrm{I}};\vec{u}}\right) \quad [2\pi] \\ &\equiv \arg(z') - \arg(z')\ [2\pi]\end{aligned}$$

RAPPEL
Relation de Chasles pour les mesures des angles orientés
$\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right) \equiv \left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right) + \left(\overline{\vec{v};\vec{w}}\right)\ [2\pi]$
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs non nuls.

Par conséquent : $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)\ [2\pi]$.

Les résultats cités en 1) et 2) en découlent immédiatement en tenant compte du fait que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$, et celui de $\vec{\mathrm{I}}$ est 1.

Exemple

Soit A et B et C les points du plan d'affixes respectives : $a = 2 + i$ et $b = 3 + 2i$ et $c = 5 - i$.

Soit α une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$. Calculons $\tan\alpha$:

On a : $\alpha \equiv \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$ et $c - a = 3 - 2i$ et $b - a = 1 + i$; donc :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3-2i}{1+i} = \frac{1-5i}{2}$$

Il en résulte alors $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{25}{4}} = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$, et donc : $\sqrt{26}\cos\alpha = 1$ et $\sqrt{26}\sin\alpha = -5$;

il s'ensuit donc : $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$ et $\sin\alpha = -\dfrac{5}{\sqrt{26}}$. Par suite : $\tan\alpha = -5$.

Proposition 24

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z', et soit A, B, C et D des points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. On a :

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv 0\,[\pi]$ (c'est-à-dire $\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}$).

Et : $$(AB)//(CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\,[\pi]$$

2) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ (c'est-à-dire $\frac{z'}{z} \in i\mathbb{R}$).

Et : $$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

3) Les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques (appartenant au même cercle) si,

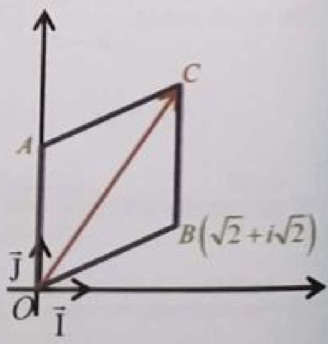
et seulement si : $$\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D}\right) \in \mathbb{R}$$

Exemple

Soit A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives : $a = 2i$ et $b = \sqrt{2}(1+i)$ et $c = a + b$.

Montrons que $OBCA$ est un losange et que $\arg(c) \equiv \frac{3\pi}{8}\,[2\pi]$:

- De l'égalité $c = a + b$ on tire $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, ce qui signifie que $OBCA$ est un parallélogramme. On a de plus $OA = OB$ car : $|a| = |2i| = 2$ et $|b| = \left|\sqrt{2}(1+i)\right| = 2$. Ainsi, $OBCA$ est un losange car c'est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur.
- On a : $$\begin{aligned}\arg(c) &\equiv \left(\overline{\vec{I};\overrightarrow{OC}}\right)\,[2\pi]\\ &\equiv \left(\overline{\vec{I};\overrightarrow{OB}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}\right)\,[2\pi]\\ &\equiv \left(\overline{\vec{I};\overrightarrow{OB}}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right)\,[2\pi] \quad (\textit{car } OBCA \textit{ est un losange})\\ &\equiv \arg(b) + \frac{1}{2}\arg\left(\frac{a}{b}\right)\,[2\pi]\\ &\equiv \frac{1}{2}\left(\arg(a) + \arg(b)\right)\,[2\pi]\end{aligned}$$



Un calcul immédiat nous donne $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $\arg(b) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

Ainsi : $\arg(c) \equiv \frac{3\pi}{8}\,[2\pi]$

Applications

1. Dans le plan complexe, on considère trois points A, B, C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c. On suppose que $a + bj + cj^2 = 0$ avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Montrer que $1 + j + j^2 = 0$ et en déduire la nature du triangle ABC.

2. On considère le nombre complexe $a = 1 + i\sqrt{3}$ et on pose : $b = -a$ et $c = a^2$ et $d = \frac{2}{a}$.

   Montrer que les points $A(a), B(b), C(c)$ et $D(d)$ sont cocycliques.

3. Déterminer l'ensemble des points $A(z)$ tels que les points $A(z)$, $B(z^2)$ et $C(z^3)$ forment un triangle rectangle.

6.4. NOTATION EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Définition10

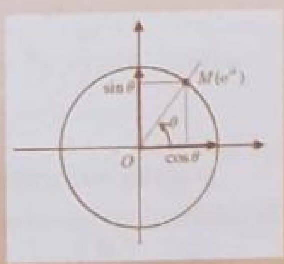
Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ. Autrement dit :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Exemple

$$e^{i\pi} = -1 \;;\; e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \;;\; e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j \;;\; e^{i\frac{\pi}{2}} = i \;;\; e^{i\frac{2017\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \;;\; e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

Remarques



- D'après la définition 10, les nombres complexes de la forme $e^{i\theta}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$) sont les affixes des points du plan complexe situés sur le cercle trigonométrique, et inversement, tout point du cercle trigonométrique a une affixe de la forme $e^{i\theta}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$).
- Par convention, on écrit pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$.
- Lorsque $\theta = 0$, alors on a $e^{i\theta} = 1$; ainsi, cette nouvelle définition est donc compatible avec la valeur que donne en 0 la fonction exponentielle déjà connue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 25

Soit θ et θ' deux nombres réels. Alors :

1) $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta\,[2\pi]$; 2) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

3) $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta$; 4) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

5) $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'\,[2\pi]$; 6) $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Définition11

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée la notation exponentielle ou l'écriture exponentielle du nombre z.

Exemples

- La notation exponentielle du nombre $a = 1 + i\sqrt{3}$ est : $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- La notation exponentielle du nombre $b = -3$ est : $b = 3e^{i\pi}$.
- La notation exponentielle du nombre $c = -4\cos\frac{\pi}{7} + 4i\sin\frac{\pi}{7}$ est : $c = 4e^{i\frac{6\pi}{7}}$.

Proposition 26

- Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n, on a $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ ou encore, par définition de $e^{i\theta}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad \text{« Formule de Moivre »}$$

- Pour tout réel θ :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \text{« Formules d'Euler »}$$

Exemples

1) Soit θ un nombre réel. On pose : $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ et $z' = 1 + \sin\theta - i\cos\theta$ et $u = \frac{z}{z'}$.

- On a : $z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{-i\frac{\theta}{2}} + \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$.

  D'après les formules d'Euler, on a $e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$; donc : $z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$. Ainsi :

  - Si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, alors : $|z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z) \equiv \frac{\theta}{2}\,[2\pi]$.
  - Si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$, alors : $|z| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z) \equiv \pi + \frac{\theta}{2}\,[2\pi]$.
  - Si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$, alors : $z = 0$ (l'argument de z n'est pas défini).

- On a : $z' = 1 + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 1 + e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$. Ainsi :

  - Si $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) > 0$, alors : $|z'| = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z') \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.
  - Si $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) < 0$, alors : $|z'| = -2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z') \equiv \frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$.

- Si $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=0$, alors : $z'=0$ (l'argument de z' n'est pas défini).

- En supposant $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\neq 0$, alors : $u=\dfrac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}=\dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{-i\frac{\pi}{4}}}$.

Par suite : $$u=\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}(1+i)$$

2) Déterminons une forme algébrique du nombre complexe : $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2018}$

On a d'après la formule de Moivre : $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2018}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2018}=\cos\frac{2018\pi}{3}+i\sin\frac{2018\pi}{3}$

Par conséquent : $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2018}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, d'où le résultat.

Applications

1. Soit α et β deux nombres réels quelconques.

a) Montrer que : $e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$ et $e^{i\alpha}-e^{i\beta}=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$.

b) On considère les nombres complexes suivants :

$u=1+i\sqrt{3}$; $v=\sqrt{2}(1+i)$; $t=\left(\sqrt{2}+1\right)+i\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $z=1-\left(2-\sqrt{3}\right)i$

Écrire sous forme exponentielle les nombres u et v puis en déduire une écriture exponentielle de chacun des nombres complexes : $-v$; $u.v$; $\frac{1}{u}$; $u^5.\overline{v}^{18}$; t ; z ; $\frac{z}{t}$

c) On suppose dans cette question que $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\neq 0$.

Donner une écriture exponentielle du nombre complexe : $\omega=\dfrac{e^{i\alpha}.e^{i\beta}}{1+e^{i(\alpha+\beta)}}$

2. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on pose : $A_n=\left(\sqrt{3}-i\right)^n+\left(\sqrt{3}+i\right)^n$

En utilisant la formule de Moivre, montrer l'équivalence suivante : $A_n=2^{n+1}\Leftrightarrow n\equiv 0\,[12]$

3. Soit θ_1 et θ_2 deux réels et $n\in\mathbb{N}$.

Si $z=e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}$, donner une expression simplifiée de $\mathrm{Re}\left(z^n\right)$.

6.5. APPLICATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DES NOMBRES COMPLEXES

La formule du binôme de Newton, la formule de Moivre et les formules d'Euler permettent de transformer certaines expressions trigonométriques.

Développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a : $\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta)$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on en déduit les expressions de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Voici quelques exemples pratiques :

- On a : $\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta.\cos\theta$, dont on déduit

$$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta)=2\sin\theta.\cos\theta.$$

- On a : $\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$, donc :

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta.\sin\theta-3\cos\theta.\sin^2\theta-i.\sin^3\theta$$

On en déduit :

$$\begin{cases}\cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta.\sin^2\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta.(1-\cos^2\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta\\ \sin(3\theta)=3\cos^2\theta.\sin\theta-\sin^3\theta=3(1-\sin^2\theta).\sin\theta-\sin^3\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta\end{cases}$$

On peut démontrer la formule plus générale suivante : (à titre d'exercice)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases}\cos(n\theta)=\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^p C_n^{2p}\cos^{n-2p}(\theta).\sin^{2p}(\theta)\\ \sin(n\theta)=\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}(-1)^p C_n^{2p+1}\cos^{n-2p-1}(\theta).\sin^{2p+1}(\theta)\end{cases} \quad \left(E\left(\frac{n}{2}\right) \text{étant la partie entière de } \frac{n}{2}\right)$$

Linéarisation de $\cos^m\theta$, $\sin^n\theta$ et $\cos^m\theta.\sin^n\theta$ pour $(m;n)\in\mathbb{N}^2$:

Linéariser une expression du genre $\cos^m\theta$, $\sin^n\theta$ et $\cos^m\theta.\sin^n\theta$, c'est la transformer en somme algébrique de termes du genre $a\cos(p\theta)+b\sin(q\theta)$ avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $(p;q)\in\mathbb{N}^2$.

Pour linéariser ces expressions, on utilise les formules d'Euler pour en déduire :

$$\cos^m\theta=\frac{1}{2^m}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^m \quad \text{et} \quad \sin^n\theta=\frac{1}{(2i)^n}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^n$$

On développe les expressions obtenues grâce au binôme de Newton, puis on fait réapparaître les les fonctions cosinus et sinus.

Voici quelques exemples pratiques :

▪ Linéarisation de $\cos^4 x$:

$$\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4+4\left(e^{ix}\right)^3e^{-ix}+6\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^2+4e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^3+\left(e^{-ix}\right)^4\right)$$

Donc : $\cos^4 x=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+6\right)=\frac{1}{16}\left(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6\right)$

Par suite : $\cos^4 x=\frac{1}{8}\left(\cos(4x)+4\cos(2x)+3\right)$

▪ Linéarisation de $\sin^5 x$:

$$\begin{aligned}\sin^5 x&=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5\\&=\frac{-1}{32i}\left(\left(e^{ix}\right)^5-5\left(e^{ix}\right)^4e^{-ix}+10\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right)^2-10\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^3+5\left(e^{-ix}\right)^4e^{ix}-\left(e^{-ix}\right)^5\right)\\&=\frac{-1}{32i}\left(e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}\right)\\&=\frac{-1}{32i}\left(e^{5ix}-e^{-5ix}-5\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)+10\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)\end{aligned}$$

Par suite : $\sin^5 x=-\frac{1}{16}\left(\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin x\right)$

▪ Linéarisation de $\cos^2(x).\sin^3(x)$:

On a : $\cos^2 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)=\frac{1}{4}\left(2\cos(2x)+2\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(2x)+1\right)$

Et : $\sin^3 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{ix}-e^{-3ix}\right)=-\frac{1}{4}\left(\sin(3x)-3\sin x\right)$

Il s'ensuit donc :

$$\begin{aligned}\cos^2 x\sin^3 x&=\left(\frac{1}{2}\left(\cos(2x)+1\right)\right)\left(-\frac{1}{4}\left(\sin(3x)-3\sin x\right)\right)\\&=-\frac{1}{8}\left(\cos(2x)\sin(3x)-3\cos(2x)\sin(x)+\sin(3x)-3\sin(x)\right)\end{aligned}$$

Et puisque : $\cos(2x)\sin(3x)=\frac{1}{2}\left(\sin(5x)+\sin x\right)$ et $\cos(2x)\sin x=\frac{1}{2}\left(\sin(3x)-\sin x\right)$

Alors : $\cos^2(x).\sin^3(x)=-\frac{1}{16}\left(\sin(5x)-\sin(3x)-2\sin x\right)$

Applications

1. Linéariser $\sin^4 x$ puis calculer la somme : $S=\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}$.

2. Linéariser l'expression suivante : $E=6\cos^3(2x)\sin^3(2x)-\cos^2(2x)\sin^2(4x)$.

3. Soit $(p;q)\in\mathbb{R}^2$.

a) En utilisant $\cos p+\cos q=\mathrm{Re}\left(e^{ip}+e^{iq}\right)$, montrer que : $\cos p+\cos q=2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

b) Montrer de même que : $\cos p-\cos q=-2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

c) Factoriser de même les expressions : $\sin p+\sin q$ et $\sin p-\sin q$

4. Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

En utilisant les formules d'Euler, retrouver les formules suivantes (vues en 1ère année du Bac) :

$$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)+\cos(a+b)\right)\quad;\quad \sin a.\sin b=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$$

$$\sin a.\cos b=\frac{1}{2}\left(\sin(a-b)+\sin(a+b)\right)$$

5. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in]0;\pi[$, on pose : $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$

a) Rappeler l'expression simplifiée de la somme $1+q+q^2+...+q^n$ pour $q\neq 1$.

b) Simplifier $T_n=\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}$ et en déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $S_n=\dfrac{\cos\dfrac{n\theta}{2}\,.\,\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

7 RACINES $n^{ème}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

7.1. RACINES $n^{ème}$ DE L'UNITÉ

Définition 12

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle racine $n^{ème}$ de l'unité tout nombre complexe u tel que $u^n=1$.

L'ensemble des racines $n^{ème}$ de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$. On a donc : $\mathbb{U}_n=\left\{z\in\mathbb{C}\,/\,z^n=1\right\}$

Remarque

Les racines $n^{ème}$ de l'unité sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n=1$.

Exemples

1) Cas $n=2$: Les racines carrées de l'unité sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2=1$. Ces solutions sont 1 et -1. Ainsi : $\mathbb{U}_2=\{-1;1\}$

2) Cas $n=3$: Les racines cubiques de l'unité sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3=1$. Remarquons que si $z^3=1$ alors $\left|z^3\right|=|z|^3=1$ et par suite que $|z|=1$. Cela montre que les solutions de

l'équation $z^3 = 1$ s'écrivent sous la forme $e^{i\theta}$ avec $e^{3i\theta} = 1$, c'est-à-dire $3\theta \equiv 0\,[2\pi]$. Par conséquent, $\theta = k\dfrac{2\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En posant $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{3}} = (\omega_1)^k$, on obtient :

- $\omega_0 = 1$.
- $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On note souvent ce nombre par j : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Remarquons que : $\omega_2 = j^2 = \overline{j}$
- $\omega_3 = 1$ et $\omega_4 = \omega_1$ et $\omega_5 = \omega_2$ et ainsi de suite.

Par suite, les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2 : $\mathbb{U}_3 = \{1; j; j^2\}$

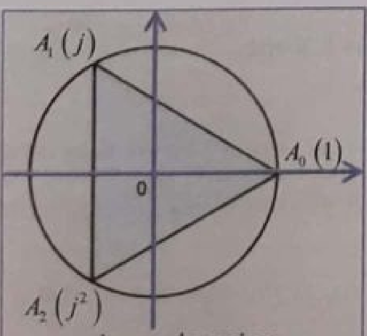
3) Cas $n = 4$: Les racines d'ordre 4 de l'unité sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1$. Comme : $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$, alors les solutions de l'équation $z^4 = 1$ sont : 1 ; -1 ; i ; $-i$. Par suite : $\mathbb{U}_4 = \{1; -1; i; -i\}$.

Remarques

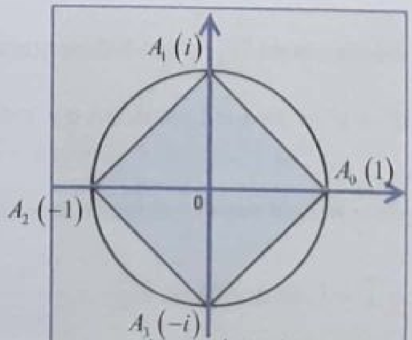
- On a : $1 + j + j^2 = 0$ et $z^3 - 1 = (z-1)(z-j)(z-j^2)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- Pour $n \in \{2;3;4\}$, le produit de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ est aussi élément de $\mathbb{U}_n$. En fait, ce résultat est valable pour tout entier $n \geq 2$.
- Pour $n \in \{2;3;4\}$, l'inverse et le conjugué de tout élément de $\mathbb{U}_n$ sont aussi des éléments de $\mathbb{U}_n$. En fait, ce résultat est valable pour tout entier $n \geq 2$. On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \overline{z} \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$$

- Soit A_0, A_1 et A_2 les points du plan d'affixes respectives 1, j et j^2. Alors, $A_0A_1A_2$ est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.
- Soit A_0, A_1, A_2 et A_3 les points du plan d'affixes respectives 1, i, -1 et $-i$. Alors, $A_0A_1A_2A_3$ est un carré inscrit dans le cercle trigonométrique.



Images des racines cubiques de l'unité.



Images des racines quatrièmes de l'unité.

Proposition 27

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Les racines $n^{ème}$ de l'unité sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0;1;2;...;n-1\}$.

On a donc :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \ / \ k \in \{0;1;...;n-1\} \right\} \quad \text{et} \quad \text{card}\,\mathbb{U}_n = n$$

Preuve

Soit z une racine $n^{ème}$ de 1. On a donc $z^n = 1$. En passant au module, on obtient $|z^n| = 1$, d'où $|z|^n = 1$.

Puisque $|z|$ est positif, on déduit que $|z| = 1$. Ainsi, z est de la forme $z = e^{i\theta}$. On a alors :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow (n\theta \equiv 0 \ [2\pi]) \Leftrightarrow \left(\theta \equiv 0 \ \left[\frac{2\pi}{n}\right]\right)$$

Le réel θ est donc de la forme $\dfrac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On obtient finalement $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Or, on constate que :

$$e^{i\frac{2n\pi}{n}} = 1 \quad ; \quad e^{i\frac{2(n+1)\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \quad ; \quad e^{i\frac{2(n+2)\pi}{n}} = e^{i\frac{4\pi}{n}} \quad ; ....$$

Autrement dit, si k et k' sont deux entiers relatifs tels que $k - k'$ est un multiple de n, alors, $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$.

On peut donc se contenter de faire varier k dans l'ensemble des entiers compris entre 0 et $n-1$.

Réciproquement, si $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0;1;2;...;n-1\}$, alors $z^n = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{2ik\pi} = 1$, d'où z est bien une racine $n^{ème}$ de l'unité.

Proposition 28

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tous u et v de $\mathbb{U}_n$: $\quad u \times v \in \mathbb{U}_n \quad$ et $\quad \dfrac{1}{u} \in \mathbb{U}_n \quad$ et $\quad \overline{u} \in \mathbb{U}_n \quad \left(\overline{u} = \dfrac{1}{u}\right)$

Preuve

Soit u et v deux éléments de $\mathbb{U}_n$, c'est-à-dire que $u^n = 1$ et $v^n = 1$. Donc :

- $(u \times v)^n = u^n \times v^n = 1 \times 1 = 1$, et donc $u \times v \in \mathbb{U}_n$.
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)^n = \dfrac{1}{u^n} = \dfrac{1}{1} = 1$, et donc $\dfrac{1}{u} \in \mathbb{U}_n$.
- $(\overline{u})^n = \overline{u^n} = \overline{1} = 1$, et donc $\overline{u} \in \mathbb{U}_n$.

Ce qui achève la démonstration.

Exemples

1) Les racines $6^{\text{ème}}$ de l'unité sont les nombres complexes $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{6}} = e^{i\frac{k\pi}{3}}$ avec $k \in \{0;1;\ldots;5\}$. Il s'ensuit

donc : $\omega_0 = 1$; $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\omega_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = j$

$\omega_3 = e^{i\frac{3\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$; $\omega_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \overline{\omega_1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\omega_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \overline{\omega_2} = \overline{j}$

2) Les racines $8^{\text{ème}}$ de l'unité sont les nombres complexes $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{8}} = e^{i\frac{k\pi}{4}}$ avec $k \in \{0;1;\ldots;7\}$. Il s'ensuit

donc : $\omega_0 = 1$; $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\omega_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $\omega_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\omega_4 = e^{i\pi} = -1$; $\omega_5 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $\omega_6 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$; $\omega_7 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Remarquer bien qu'on a : $\omega_5 = \overline{\omega_3}$; $\omega_6 = \overline{\omega_2}$; $\omega_7 = \overline{\omega_1}$.

Proposition 29

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Posons, pour tout $k \in \{0;1;\ldots;n-1\}$: $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Alors :

1) Pour tout $k \in \{1;\ldots;n-1\}$: $\overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$.

2) Pour tout $k \in \{0;1;\ldots;n-1\}$: $\omega_k = \omega_1^k$.

3) La somme des n racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est nulle.

4) Les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité sont représentées dans le plan complexe par les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique, et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1. Ce polygone est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Preuve

1) On a $\overline{\omega_k} = \overline{e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = e^{-i\frac{2k\pi}{n}}$ et $\omega_{n-k} = e^{i\frac{2(n-k)\pi}{n}} = e^{i\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right)} = e^{2i\pi}.e^{-i\frac{2k\pi}{n}} = e^{-i\frac{2k\pi}{n}}$, d'où l'égalité annoncée.

2) On a : $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \omega_1^k$.

3) D'après 2), on peut écrire : $\omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_{n-1} = 1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \ldots + \omega_1^{n-1}$

Nous reconnaissons la somme des termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\omega_1 \neq 1$ (car $n \geq 2$), d'où : $\omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_{n-1} = \frac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1} = \frac{1-e^{2i\pi}}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0$.

Ainsi, la somme des n racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est nulle.

4) Les racines $n^{ème}$ de l'unité sont au nombre de n, toutes de module 1, donc, situées sur le cercle trigonométrique. Elles sont représentées par les sommets d'un polygone à n côtés inscrit dans ce cercle. D'autre part

Pour tout $k \in \{0;1;...;n-2\}$:

$$\arg(\omega_{k+1}) - \arg(\omega_k) \equiv \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n}\ [2\pi] \equiv \frac{2\pi}{n}\ [2\pi]$$

et

$$\arg(\omega_0) - \arg(\omega_{n-1}) \equiv 0 - \frac{2(n-1)\pi}{n}\ [2\pi] \equiv \frac{2\pi}{n}\ [2\pi]$$

On passe donc d'un sommet du polygone au suivant en effectuant une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

On peut donc dire que les racines $n^{ème}$ de l'unité sont représentées par les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique. Enfin, la propriété 1) montre la symétrie par rapport à l'axe (Ox).

7.2. RACINES $n^{ème}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Définition 13

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 2

Une racine $n^{ème}$ de Z est un nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Proposition 30

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et Z un nombre complexe non nul d'argument φ : $Z = |Z|.e^{i\varphi}$

Le nombre Z admet exactement n racines $n^{ème}$ données par :

$$z_k = \sqrt[n]{|Z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} \quad \text{avec} \quad k \in \{0;1;...;n-1\}$$

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. On cherche les racines $n^{ème}$ de Z sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$.

L'égalité $z^n = Z$ se traduit par $r^n = |Z|$ et $n\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$, donc par : $r = \sqrt[n]{|Z|}$ et $\theta \equiv \frac{\varphi}{n}\ \left[\frac{2\pi}{n}\right]$.

En posant $z_k = \sqrt[n]{|Z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}$, l'égalité $z_{k'} = z_k$ se traduit par : $\frac{\varphi + 2k'}{n} \equiv \frac{\varphi + 2k}{n}\ [2\pi]$

c'est-à-dire $k' \equiv k\ [n]$.

Les racines $n^{ème}$ de Z sont donc les n nombres complexes deux à deux distincts :

$$z_k = \sqrt[n]{|Z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} \quad \text{avec} \quad k \in \{0;1;...;n-1\}$$

Remarques

- Les racines $n^{ème}$ de Z s'obtiennent à partir de l'une d'entre elles en multipliant celle-ci par chacune des racines $n^{ème}$ de l'unité. En effet, si z_0 est l'une des racines $n^{ème}$ de Z, on a :

$$z^n = Z \Leftrightarrow z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \left[(\exists \omega \in \mathbb{U}_n)\ \ z = \omega z_0\right]$$

Par suite, l'ensemble des racines $n^{ème}$ de Z est : $\{z_0\omega \ / \ \omega \in \mathbb{U}_n\}$.

Ainsi, pour trouver les racines $n^{ème}$ de Z, il suffit donc d'en exhiber une et de la multiplier par toutes les racines $n^{ème}$ de l'unité.

- Une bonne connaissance des racines $n^{ème}$ de l'unité est donc capitale pour résoudre ce type de problème.

Exemples

1) Déterminons les racines cubiques du nombre complexe : $Z = 4\sqrt{2}(-1+i)$

On a $|Z| = 4\sqrt{2}|-1+i| = 8$, donc : $Z = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8e^{i\frac{3\pi}{4}} = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3$

Par suite, les racines cubiques de Z sont les nombres : $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_1 = jz_0$ et $z_2 = j^2 z_0$

Et comme $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$, alors : $z_1 = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $z_2 = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

On peut aussi déterminer les écritures algébriques de ces racines cubiques à partir de celles de z_0, j et j^2.

2) Déterminons les racines quatrièmes (ou d'ordre 4) de nombre -1, c'est-à-dire les solutions de $z^4 = -1$.

On a : $z^4 = -1 \Leftrightarrow z^4 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4$. Par suite, les racines quatrièmes 4 de nombre -1 sont :

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad ; \quad z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = -e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad ; \quad z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Applications

1. Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $1-i$.
2. Déterminer les racines cinquièmes du nombre complexe $1+i$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Déterminer les racines $n^{ème}$ du nombre -1
4. Déterminer les racines d'ordre 6 de l'unité et les écrire sous forme trigonométrique puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 - \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 = 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$. (On pourra poser : $Z = \frac{z+1}{z-1}$)

6. a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe : $a = \frac{-\sqrt{2}}{16}(1+i)$

b) En déduire les valeurs de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$.

7. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) : z^3 = 2 - 11i$

a) Vérifier que $z_0 = 2 - i$ est une solution de (E).

b) En déduire l'ensemble solution de l'équation (E).

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $z^{2n+1} + 1 = 0$.

9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ z^3 = \overline{z}$

8 ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

8.1. RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

On sait que tout nombre complexe non nul Z admet exactement deux racines carrées opposées. Ce sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = Z$.

L'utilisation des formes trigonométrique ou exponentielle donne facilement les expressions des racines carrées d'un nombre complexe non nul quelconque mais on a parfois besoin d'exprimer une racine sous forme algébrique. Dans la pratique, on rencontre deux cas :

1er cas : Si $Z = |Z|e^{i\varphi}$ alors, d'après la proposition précédente, les racines carrées du nombre Z sont :

$$\sqrt{|Z|}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{|Z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}$$

2nd cas : Si $Z = X + iY$ avec $(X;Y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$. On pose $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$z^2 = Z \Leftrightarrow X + iY = (x+iy)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y \end{cases}$$

On peut ajouter à ce dernier système d'équations celle obtenue en considérant les modules :

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Ainsi, on obtient : $z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2+Y^2} \\ 2xy = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}\left(X + \sqrt{X^2+Y^2}\right) \\ y^2 = \frac{1}{2}\left(-X + \sqrt{X^2+Y^2}\right) \\ 2xy = Y \end{cases}$

Puisque $(X;Y) \neq (0;0)$, les deux premières équations du dernier système fournissent chacune deux solutions. La troisième équation $2xy = Y$ permet de sélectionner les deux uniques couples solutions $X + iY$ en raisonnant sur le signe.

En résumé

Tout nombre complexe non nul Z admet exactement deux racines carrées opposées :

1) Si $Z = |Z|e^{i\varphi}$, alors les racines carrées sont : $\sqrt{|Z|}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ et $\sqrt{|Z|}e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}$. En particulier :

- Si $Z \in \mathbb{R}_+^*$, ses racines carrées sont : $\sqrt{Z}$ et $-\sqrt{Z}$.
- Si $Z \in \mathbb{R}_-^*$, ses racines carrées sont : $i\sqrt{-Z}$ et $-i\sqrt{-Z}$.
- Si $Z \in i\mathbb{R}_+^*$, ses racines carrées sont : $\sqrt{\frac{|Z|}{2}}(1+i)$ et $-\sqrt{\frac{|Z|}{2}}(1+i)$.
- Si $Z \in i\mathbb{R}_-^*$, ses racines carrées sont : $\sqrt{\frac{|Z|}{2}}(1-i)$ et $-\sqrt{\frac{|Z|}{2}}(1-i)$.

2) Si $Z = X + iY$ avec $(X;Y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, et si $\alpha = \frac{1}{2}\left(X + \sqrt{X^2+Y^2}\right)$ et $\beta = \frac{1}{2}\left(-X + \sqrt{X^2+Y^2}\right)$

alors les racines carrées de Z sont :

- $\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\beta}$ et $-\sqrt{\alpha} - i\sqrt{\beta}$ si $Y > 0$.
- $\sqrt{\alpha} - i\sqrt{\beta}$ et $-\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\beta}$ si $Y < 0$.

Remarque

Il n'est pas indispensable d'apprendre par cœur les résultats énoncés ci-dessus. Il faut plutôt savoir la démarche à suivre pour la détermination des racines carrées d'un nombre complexe selon le contexte.

Exemples

1) Les racines carrées du nombre $Z = -5$ sont : $\sqrt{5}\,i$ et $-\sqrt{5}\,i$.

2) Les racines carrées du nombre $Z = 6i$ sont : $\sqrt{3}(1+i)$ et $-\sqrt{3}(1+i)$.

3) Les racines carrées du nombre $Z = -11i$ sont : $\sqrt{\frac{11}{2}}(1-i)$ et $-\sqrt{\frac{11}{2}}(1-i)$.

4) Déterminons les racines carrées du nombre $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$:

On a $|Z| = 1$ et $\arg Z \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$, donc les racines carrées de Z sont : $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{12}}$. ($-e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{13}{12}\pi}$)

5) Déterminons les racines carrées du nombre $Z = -24 + 70i$:

Soit $z = x + iy$ une des racines carrées du nombre Z. On a alors :

$$z^2 = Z \Leftrightarrow (x+iy)^2 = -24+70i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -24 \\ x^2 + y^2 = |-24+70i| = 74 \\ 2xy = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 49 \\ xy > 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit donc : $z^2 = Z \Leftrightarrow \left[(x;y)=(5;7) \text{ ou } (x;y)=(-5;-7)\right]$

Ainsi, les racines carrées du nombre Z sont : $5+7i$ et $-5-7i$.

Applications

1. Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

$$-7 \quad ; \quad -25i \quad ; \quad 9+40i \quad ; \quad 1+2i\sqrt{2} \quad ; \quad 1-i\sqrt{15} \quad ; \quad 1-4i\sqrt{3} \quad ; \quad \frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$$

2. a) Déterminer de deux façons différentes, les racines carrées du nombre complexe $1+i$.

b) En déduire la valeur exacte de chacun de : $\cos\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$; $\tan\frac{\pi}{8}$.

2. Déterminer de deux façons différentes, les racines carrées du nombre complexe $-\sqrt{3}+i$, puis en déduire la valeur exacte des rapports trigonométriques : $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

8.2. RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

Soit $(a;b;c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. On considère l'équation $az^2+bz+c=0$, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Pour résoudre cette équation, on utilise la forme canonique du trinôme :

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

En désignant par $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme, on a :

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes z_1 et z_2 données par :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

où δ est une racine carrée de Δ (obtenue, par exemple, par une des méthodes exposées dans 8.1).

De plus : $\quad (\forall z\in\mathbb{C}) \quad az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$

Enfin, les solutions z_1 et z_2 vérifient les relations suivantes, connues sous le nom de formules de Viète

$$z_1+z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}+\frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1\times z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}\times\frac{-b+\delta}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

En notant $s = z_1+z_2$ et $p = z_1\times z_2$, on obtient l'égalité suivante :

$$az^2+bz+c = a\left(z^2-sz+p\right)$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution, dite double, donnée par : $z = \frac{-b}{2a}$.

De plus : $\quad (\forall z\in\mathbb{C}) \quad az^2+bz+c = a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$

Proposition 31

Soit $(a;b;c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ ainsi que l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: $\quad az^2+bz+c=0$

On note $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta\neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes z_1 et z_2 données par :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}\quad \text{et}\quad z_2=\frac{-b+\delta}{2a}\quad \text{où } \delta \text{ est tel que } \delta^2=\Delta.$$

De plus, on a la factorisation : $(\forall z\in\mathbb{C})\quad az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$

- Si $\Delta=0$, l'équation a une seule solution, dite double, donnée par : $z=\dfrac{-b}{2a}$.

De plus, on a la factorisation : $(\forall z\in\mathbb{C})\quad az^2+bz+c=a\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

Exemples

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $\quad (1+i)z^2-(1+7i)z+14+21i=0$

On a : $\quad \Delta=(-(1+7i))^2-4(1+i)(14+21i)=-56-90i$

Déterminons les racines carrées du nombre $\Delta=-56-90i$.

Soit $\delta=x+iy$ une des racines carrées du nombre Δ. On a alors :

$$\delta^2=\Delta\Leftrightarrow(x+iy)^2=-56-90i\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-56\\x^2+y^2=|-56-90i|=106\\xy=-45\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=25\\y^2=81\\xy<0\end{cases}$$

Il s'ensuit donc : $(x;y)=(5;-9)$ ou $(x;y)=(-5;9)$. Donc, $\delta=5-9i$ est une racine carrée de Δ.

Les solutions de cette équation sont : $z_1=\dfrac{1+7i-5+9i}{2(1+i)}=3+5i$ et $z_2=\dfrac{1+7i+5-9i}{2(1+i)}=1-2i$

Par suite, l'ensemble solution est : $S=\{3+5i\,;1-2i\}$.

) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E):(4\cos\theta)z^2-2(\cos(2\theta))z+i\sin\theta=0$ où $\theta\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Le discriminant de cette équation est : $\Delta=4\cos^2(2\theta)-16i\cos\theta.\sin\theta=4\left(\cos^2(2\theta)-4i\cos\theta.\sin\theta\right)$

puisque $2\sin\theta.\cos\theta=\sin(2\theta)$ et $\cos^2(2\theta)=1-\sin^2(2\theta)$ alors :

$$\Delta=4\left(1--4i\cos\theta.\sin\theta-\sin^2(2\theta)\right)=\left[2\left(1-i\sin(2\theta)\right)\right]^2$$

Par suite, l'équation (E) admet deux solutions données par :

$$z_1=\frac{\cos(2\theta)-1+i\sin(2\theta)}{4\cos\theta}\qquad \text{et}\qquad z_2=\frac{\cos(2\theta)+1-i\sin(2\theta)}{4\cos\theta}$$

D'autre part, on a : $\cos(2\theta)-1=-2\sin^2\theta$ et $\cos(2\theta)+1=2\cos^2\theta$, donc :

$z_1=\dfrac{-\sin^2\theta+i\sin\theta.\cos\theta}{2\cos\theta}$ et $z_2=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{2}$. Ainsi : $S=\left\{\dfrac{-\sin^2\theta+i\sin\theta.\cos\theta}{2\cos\theta};\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{2}\right\}$

Remarque

Afin de simplifier les calculs, on peut multiplier les membres de l'équation par le conjugué du coefficient de z^2. Par exemple, l'équation $(1+i)z^2-(1+7i)z+14+21i=0$ est équivalente à : $z^2-(4+3i)z+13-i=0$ et qui a pour discriminant $-45+28i=(2+7i)^2$.

Corollaire

Soit a, b et c trois réels, a étant non nul, ainsi que l'équation dans $\mathbb{C}$: $(E)\quad az^2+bz+c=0$

On note $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta>0$, alors l'équation (E) a deux racines réelles distinctes z_1 et z_2 données par :

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad\text{et}\qquad z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta=0$, l'équation a une racine double réelle donnée par : $z=\dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$, alors l'équation (E) a deux racines complexes distinctes conjuguées z_1 et z_2 données par :

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\qquad\text{et}\qquad z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple

Étant donné un réel θ, résolvons l'équation : $(E)\quad z^2-2z\cos\theta+1=0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta=4\cos^2\theta-4=-4\sin^2\theta=(2i\sin\theta)^2$

- Si $\theta\equiv 0\,[\pi]$, alors $\Delta=0$ et l'équation (E) admet une racine double :

$$z=1 \text{ si } \theta\equiv 0\,[2\pi]\qquad;\qquad z=-1 \text{ si } \theta\equiv\pi\,[2\pi]$$

- Si $\theta\not\equiv 0\,[\pi]$, alors $\Delta<0$ et l'équation (E) admet deux racines distinctes conjuguées :

$$z_1=\cos\theta+i|\sin\theta|\qquad\text{et}\qquad z_2=\cos\theta-i|\sin\theta|$$

En fait, dans ce cas, l'ensemble solution de (E) peut aussi s'écrire :

$$S=\{\cos\theta+i\sin\theta;\cos\theta-i\sin\theta\}=\{e^{i\theta};e^{-i\theta}\}$$

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$z^2-2(2+i)z+6+8i=0$; $(1+i)z^2+(6+4i)z+9+7i=0$; $(3+i)z^2-(8+6i)z+25+5i=0$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^4-(i-1)z^2-i=0 \quad \text{et} \quad z^2-2z\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=0 \text{ avec } \theta\in\left]0;\pi\right]$$

Proposition 32

Soit a, b et c trois nombres complexes, avec $a\neq 0$.

Les nombres complexes z_1 et z_2 (éventuellement égaux) vérifient : $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ et $z_1\times z_2=\dfrac{c}{a}$

si, et seulement si, z_1 et z_2 sont les deux racines (éventuellement confondues) de l'équation :

$$az^2+bz+c=0$$

Remarque

On utilise la proposition précédente sous plusieurs formes :

- Si l'on sait que z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2+bz+c=0$, alors on peut simplifier toute expression symétrique en z_1 et z_2, et l'évaluer en fonction de z_1+z_2 et $z_1\times z_2$, et donc de a, b et c, sans avoir à expliciter z_1 et z_2. Dans la pratique, on rencontre souvent les expressions symétriques :

$$z_1^n+z_2^n \quad ; \quad z_1^n\times z_2^n \quad ; \quad \frac{1}{z_1^n}+\frac{1}{z_2^n} \quad ; \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n+\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n \qquad (\text{avec } n\in\{1;2;3;4\})$$

- Si z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2+bz+c=0$, et si l'on connaît une de ces racines, alors on peut facilement en déduire l'autre.
- Si l'on connaît deux complexes s et p, et si l'on cherche z_1 et z_2 tels que $z_1+z_2=s$ et $z_1z_2=p$, alors une façon élégante et efficace de faire est de dire que z_1 et z_2 sont les racines de l'équation :

$$z^2-sz+p=0$$

Exemple

Soit z_1 et z_2 les deux solutions (ou racines) de l'équation $z^2-z+4=0$.

Exprimer $z_1^2+z_2^2-z_1z_2$ en fonction de z_1+z_2 et z_1z_2, et en déduire sa valeur.

Réponse :

On a : $z_1^2+z_2^2-z_1z_2=z_1^2+z_2^2+2z_1z_2-3z_1.z_2=(z_1+z_2)^2-3z_1.z_2$.

On a $z_1+z_2=1$ et $z_1z_2=4$, d'où : $z_1^2+z_2^2-z_1z_2=(z_1+z_2)^2-3z_1.z_2=1^2-3\times4=-11$

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-\left(5-i\sqrt{3}\right)z+6-3i\sqrt{3}=0$ sachant qu'elle admet une racine réelle.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants : $\begin{cases} z+z'=3+4i \\ z\times z'=-13-i \end{cases}$ et $\begin{cases} z_1+z_2^2=3+6i \\ z_1\times z_2^2=-8+6i \end{cases}$

9 TRANSFORMATIONS USUELLES DU PLAN

Si F est une application du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même, on peut lui associer une unique application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tous points $M(z)$ et $M'(z')$ on ait $M' = F(M)$ si, et seulement si, $z' = f(z)$.

Réciproquement, la donnée de f caractérise l'application F.

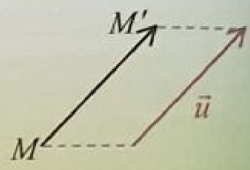
On dit alors que f est représentée par F dans le plan complexe $\mathscr{P}$.

9.1. LA TRANSLATION

Définition 14

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$



Proposition 33

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et a son affixe. La translation de vecteur $\vec{u}$ est représentée dans le plan complexe $\mathscr{P}$ par l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z' = z + a \end{aligned}$$

La relation $z' = z + a$ s'appelle l'écriture (ou la formule) complexe de la translation T de vecteur $\vec{u}(a)$.

9.2. L'HOMOTHÉTIE

Définition 15

Soit Ω un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$

Proposition 34

L'homothétie de centre Ω, d'affixe ω, et de rapport λ est représentée dans le plan complexe $\mathscr{P}$ par l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z' = \omega + \lambda(z - \omega) \end{aligned}$$

La relation $z' = \omega + \lambda(z - \omega)$ s'appelle l'écriture (ou la formule) complexe de l'homothétie H de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport λ.

Exemple

Soit f l'application de plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ telle que :

$$z' = -2z + 3 - 3i$$

Déterminons les points invariants par l'application f : $f(M) = M \Leftrightarrow z = -2z + 3 - 3i \Leftrightarrow z = 1 - i$

Par conséquent, f admet un point invariant qui est $\Omega(1-i)$. On a donc : $z' - (1-i) = -2(z - (1-i))$

Par suite, f est l'homothétie de centre $\Omega(1-i)$ et de rapport -2.

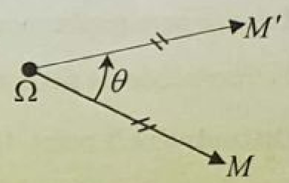
9.3. LA ROTATION

Définition 16

Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$

La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application du plan dans lui-même qui transforme Ω en Ω, et tout point $M \neq \Omega$ en l'unique point M' tel que :

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$$



Proposition 35

La rotation de centre Ω, d'affixe ω, et d'angle θ est représentée dans le plan complexe $\mathscr{P}$ par l'application :

$$\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega) \end{array}$$

La relation $z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$ s'appelle l'écriture (ou la formule) complexe de la rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ.

Exemple

1) Déterminons l'écriture complexe de la rotation R de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$:

On a : $e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$. L'écriture complexe de la rotation R est : $z' = (1+i) + e^{i\frac{3\pi}{4}}(z - (1+i))$,

c'est-à-dire : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z + \sqrt{2} + 1 + i$.

2) Soit R_1 la rotation de centre $\Omega_1(i)$ et qui transforme O (l'origine du repère) en le point $O_1\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)$.

On sait que l'écriture complexe de la rotation R_1 s'écrit sous la forme : $z_1 = e^{i\theta}(z-i) + i$.

Et puisque $R(O) = O_1$, alors $e^{i\theta} = \dfrac{\frac{-\sqrt{3}+i}{2} - i}{0 - i} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit alors que : $\theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Par suite, R_1 est la rotation de centre $\Omega_1(i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Applications

1. Soit f l'application de plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ telle que :

$$z' = -e^{i\frac{\pi}{5}}z + 1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$$

Montrer que f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

2. Soit $A(i)$ un point du plus complexe. Pour tout $M(z)$, on note M' le point d'affixe iz.

Déterminer les nombre complexes z pour lesquels le triangle AMM' est isocèle et rectangle en M.

9.4. COMPOSITION DE QUELQUES TRANSFORMATIONS DU PLAN

Dans ce paragraphe, nous allons examiner plusieurs compositions à partir des exemples :

I) Composée de deux rotations :

On considère le point $A(i)$. Soit R_0 la rotation de centre O (origine du repère) et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et soit R_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminons $R_1 o R_0$:

Pour tout point M d'affixe z, on pose $M' = R_0(M)$ et $M'' = R_1(M')$.

Soit z' l'affixe de M' et z'' l'affixe de M''.

On a $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z$ et $z'' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z' - z_A)$ où z_A est l'affixe de A (autrement dit, $z_A = i$).

Il s'ensuit donc : $z'' - i = e^{i\frac{\pi}{3}}(z' - i)$, et alors : $z'' = i + e^{i\frac{\pi}{3}}(z' - i)$.

On en déduit alors : $z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}.e^{i\frac{\pi}{6}}z + i\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$. Comme $e^{i\frac{\pi}{3}}.e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, alors : $z'' = iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

On sait que la composée de deux rotations est une rotation.

On va maintenant déterminer le centre de la rotation $R_1 o R_0$, et qui n'est rien d'autre que le point invariant $\Omega(\omega)$ par la transformation $R_1 o R_0$. On a $\omega = i\omega + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, ce qui donne $\omega = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$. Et comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, alors $R_1 o R_0$ est la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

II) Composée d'une rotation et d'une translation :

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit R la rotation de centre A et qui transforme B en C,

et soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Déterminons $F_1 = R o T$ et $F_2 = T o R$:

On munit le plan du repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

L'angle de la rotation R est $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$; ainsi R est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

L'écriture complexe de la rotation R est $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$, c'est-à-dire, $z' = iz$.

L'écriture complexe de la translation T est $z'' = z+1$.

Pour tout M d'affixe z, on pose :

$M_1 = F_1(M)$, et on note z_1 l'affixe de M_1 ;

$M_2 = F_2(M)$, et on note z_2 l'affixe de M_2.

On a : $z_1 = i(z+1)$ et $z_2 = iz+1$. Et puisque : $z = i(z+1) \Leftrightarrow (1-i)z = i \Leftrightarrow z = \frac{-1+i}{2}$

alors $\Omega_1\left(\frac{-1+i}{2}\right)$ est l'unique point invariant par l'application F_1.

L'écriture complexe de l'application F_1 s'écrit : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}z + \omega_1\left(1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ où $\omega_1 = \frac{-1+i}{2}$.

F_1 est donc la rotation de centre $\Omega_1\left(\frac{-1+i}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

De plus, $\Omega_2\left(\frac{1+i}{2}\right)$ est l'unique point invariant par l'application F_2.

F_2 est donc la rotation de centre $\Omega_2\left(\frac{1+i}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$; ceci car $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}z + \omega_2\left(1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ où $\omega_2 = \frac{1+i}{2}$.

De l'égalité $z_2 - z_1 = 1-i$ on tire $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{CB}$, ce qui montre que CBM_1M_2 est un parallélogramme.

III) Composée d'une homothétie et d'une translation :

Soit $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, et H l'homothétie de centre un point $\Omega(\omega)$ donné et de rapport k.

Soit b un nombre complexe donné et $\vec{u}(b)$ le vecteur image de b, et T la translation de vecteur $\vec{u}$.

On pose : $F = \mathrm{H} o \mathrm{T}$ et $G = \mathrm{T} o \mathrm{H}$.

L'écriture complexe de l'homothétie H est : $z_1 = kz + \omega(1-k)$.

L'écriture complexe de la translation T est : $z_2 = z+b$.

Déterminons l'écriture complexe des transformations F et G :

Pour tout $M(z)$, on pose $F(M) = M'$ et $G(M) = M''$. On note z' l'affixe de M', et z'' l'affixe de M''.

- On a $M' = \mathrm{H}(M_2)$ où $M_2 = \mathrm{T}(M)$, donc : $z' = kz_2 + \omega(1-k) = k(z+b) + \omega(1-k)$

  Par suite, $z' = kz + kb + (1-k)\omega$ est l'écriture complexe de la transformation F.

Il est facile de montrer que l'application F admet $A\left(\frac{k}{1-k}b+\omega\right)$ comme unique point invariant, et que F est l'homothétie de centre A et de rapport k.

- On a $M''=\mathrm{T}(M_1)$ où $M_1=\mathrm{H}(M)$, donc : $z''=z_1+b$.

Par suite, $z''=kz+b+(1-k)\omega$ est l'écriture complexe de la transformation G.

Il est facile de montrer que l'application G admet $B\left(\frac{b}{1-k}+\omega\right)$ comme unique point invariant, et que G est l'homothétie de centre A et de rapport k.

V) Composée d'une rotation et d'une homothétie :

Soit A le point d'affixe 2, et soit φ l'application de plan $\mathscr{P}$ dans lui-même est qui, à chaque point $M(z)$, associe le point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et on pose $f=\varphi o h$.

- On pose $z_A=2$.

  On a : $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_A+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=z_A$, donc $\varphi(A)=A$. Cela signifie donc que A est invariant par φ.

- L'écriture complexe de l'homothétie h est : $z_1=\frac{2}{\sqrt{3}}(z-2)+2$

- Pour tout point $M(z)$, on pose $M'=f(M)$ et on note z' l'affixe de M'.

  On a : $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_1+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, qu'on peut écrire encore : $z'-2=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}(z_1-2)$.

  Comme $z_1-2=\frac{2}{\sqrt{3}}(z-2)$ alors $z'-2=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}(z-2)$, et donc : $z'-2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}(z-2)$.

  Et puisque $\frac{\sqrt{3}+i}{2}=e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors : $z'-2=e^{i\frac{\pi}{6}}(z-2)$.

  ce qui montre bien que f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

  Et puisque $f=\varphi o h$, alors $f o h^{-1}=(\varphi o h)o h^{-1}=\varphi o\left(h o h^{-1}\right)=\varphi$ (car $h o h^{-1}=Id_{\mathscr{P}}$). D'où :

  $\varphi=f o h^{-1}$. Ainsi, l'application φ est la composée de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et de l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En résumé

a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Soit T la transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$.

- Si $a = 1$ alors T est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
- Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ alors T est l'homothétie de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et de rapport a.
- Si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = 1$, alors T est la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ d'angle $\arg(a)$.
- Si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$, alors T est la composée de la rotation R de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\arg(a)$, et l'homothétie H de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et de rapport $|a|$.

  Dans ce cas, on a : $T = \mathrm{R} \circ \mathrm{H} = \mathrm{H} \circ \mathrm{R}$.

Applications

1. Soit F une transformation du plan définie par son écriture complexe.

   Pour chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de F :

   a) $z' = z - 1 + 2i$; b) $z' = \dfrac{3}{2}z + 1 - i$; c) $z' = (\sqrt{3} - 1)z + 1 + i\sqrt{3}$

   d) $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - 2i$; e) $z' = (2 + 2\sqrt{3}i)z - 7 - i$

2. Soit H l'homothétie de centre $A(i)$ et de rapport -4, et R la rotation de centre $B(2)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

   On désigne par T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations suivantes :

   $\mathrm{H} \circ \mathrm{T}$; $\mathrm{H} \circ \mathrm{R}$; $\mathrm{H} \circ \mathrm{T} \circ \mathrm{R}$

3. Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

   Soit F l'application définie de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ telle que :

   $$z' = u^2 z + u - 1 \quad \text{où} \quad u \in \mathbb{C}$$

   a) Déterminer E_1 l'ensemble des valeurs u pour lesquelles F est une translation.

   b) Déterminer E_2 l'ensemble des valeurs u pour lesquelles F est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   c) Déterminer E_3 l'ensemble des valeurs u pour lesquelles F est une homothétie de rapport -2.

   d) On pose $u = 1 - i$. Montrer que l'application F est une composée d'une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et d'une homothétie de rapport -2 et qui ont un centre commun Ω que l'on déterminera.

A FORME ALGÉBRIQUE – FORME TRIGONOMÉTRIQUE

1) Calculer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (3+2i)^2(2-i) \quad ; \quad z_2 = (3+i)(2-3i)(4+5i) \quad ; \quad z_3 = (1+i)^{10} \quad ; \quad z_4 = (2-i)^4$$

$$z_5 = (4-i)^3 + (1+5i)(2+3i)^3 \quad ; \quad z_6 = \frac{(3+2i)(1+i)}{1-i} \quad ; \quad z_7 = \frac{(5-i)(2-3i)}{(1+i)(1-2)}$$

2) Soit les nombres complexes suivants : $z = 1+i \quad ; \quad z' = 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad z'' = z.z'$

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z, z' et z''.

En déduire les valeurs exactes de : $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

3) Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$; b) $1+i\tan\theta$; c) $(1+i)^n$; d) $\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que la quantité étudiée soit définie.

4) Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique : ($n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$)

$$A = \left(1+i\sqrt{3}\right)^9 \quad ; \quad B = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{125} \quad ; \quad C = (1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

SOLUTION

1) Calcul de la partie réelle et imaginaire :

- On a $(3+2i)^2 = 9+12i-4 = 5+12i$. Ensuite, $(5+12i)(2-i) = 10-5i+24i+12 = 22+19i$, par suite : $z_1 = 22+19i$. On conclut que : $\operatorname{Re}(z_1) = 22$ et $\operatorname{Im}(z_1) = 19$
- On a tout d'abord : $(3+i)(2-3i) = 9-7i$ Ensuite : $(9-7i)(4+5i) = 71+17i$, par suite : $z_2 = 71+17i$. On conclut que : $\operatorname{Re}(z_2) = 71$ et $\operatorname{Im}(z_2) = 17$
- On a $(1+i)^2 = 2i$, par conséquent : $(1+i)^{10} = \left((1+i)^2\right)^5 = (2i)^5 = 32i^5 = 32i$. Ainsi : $z_3 = 32i$. On conclut que : $\operatorname{Re}(z_3) = 0$ et $\operatorname{Im}(z_3) = 32$
- On a $(2-i)^2 = 3-4i$, donc $(2-i)^4 = (3-4i)^2 = -7-24i$. Ainsi : $z_4 = -7-24i$. On conclut que : $\operatorname{Re}(z_4) = -7$ et $\operatorname{Im}(z_4) = -24$
- On a : $(4-i)^3 = 4^3 - 3\times 4^2 \times i + 3\times 4\times i^2 - i^3 = 64-48i-12+i = 52-47i$. Ensuite :

$$(2+3i)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 \times (3i) + 3\times 2\times (3i)^2 + (3i)^3 = 8+36i-54-27i = -46+9i$$

Par conséquent : $z_5 = 52-47i+(1+5i)(-46+9i) = 52-47i-46+9i-230i-45 = -39-268i$

Ainsi : $z_5 = -39-268i$. On conclut que : $\operatorname{Re}(z_5) = -39$ et $\operatorname{Im}(z_5) = -268$

- On a $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{1^2-i^2}=\dfrac{2i}{2}=i$. Par conséquent : $z_6=i(3+2i)=-2+3i$.

  Ainsi : $z_6=-2+3i$. On conclut que : $\operatorname{Re}(z_6)=-2$ et $\operatorname{Im}(z_6)=3$.

- On a : $\dfrac{(5-i)(2-3i)}{(1+i)(1-2i)}=\dfrac{10-15i-2i-3}{1-2i+i+2}=\dfrac{7-17i}{3-i}$; de plus : $\dfrac{7-17i}{3-i}=\dfrac{(7-17i)(3+i)}{3^2-i^2}=\dfrac{38-44i}{10}$

  Ainsi : $z_7=\dfrac{19}{5}-\dfrac{22}{5}i$. On conclut que : $\operatorname{Re}(z_7)=\dfrac{19}{5}$ et $\operatorname{Im}(z_7)=-\dfrac{22}{5}$.

2) Soit les nombres complexes suivants : $z=1+i$; $z'=1+i\sqrt{3}$; $z''=z.z'$

- Par définition : $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$; d'où : $z=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\left[\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

  Ainsi : $|z|=\sqrt{2}$ et $\arg z\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

- Par définition : $|z'|=\sqrt{1+3}=2$; d'où : $z'=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\left[2;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

  Ainsi : $|z'|=2$ et $\arg z'\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

- Comme $z''=z.z'$ alors : $|z''|=|z|.|z'|$ et $\arg z''\equiv\arg z+\arg z'\ [2\pi]$

  Ainsi : $|z''|=2\sqrt{2}$ et $\arg z''\equiv\dfrac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

- Détermination des valeurs exactes de : $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

  D'après ce qui précède : $z''=\left[2\sqrt{2};\dfrac{7\pi}{12}\right]$. On a également : $z''=(1+i)(1+i\sqrt{3})=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$

  Par identification, respectivement, des parties réelles et imaginaires, on obtient :

  $$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\qquad\text{et}\qquad\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

La boîte à idées

- Pour effectuer des calculs dans l'ensemble des nombres complexes, on applique les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$, en utilisant le fait que $i^2=-1$.
- Pour tout $p\in\mathbb{N}$: $i^{2p}=(-1)^p$ et $i^{2p+1}=(-1)^p\,i$.
- Pour simplifier un quotient, on essaye parfois de multiplier le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée.
- Pour mettre un nombre complexe non nul sous forme trigonométrique :
  - Dans les cas simples, on divise $z=a+ib$ par son module, en espérant reconnaître des valeurs usuelles de cos et sin.
  - Sinon on utilise les formules de module $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ et d'argument :

  $$\arg z\equiv\operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)\ [2\pi]\ \ (\text{si } a>0)\qquad\text{ou}\qquad\arg z\equiv\operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)+\pi\ [2\pi]\ \ (\text{si } a<0)$$

- Pour obtenir des résultats en trigonométrie lorsqu'on dispose de l'écriture algébrique et de l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul, il faut penser à identifier respectivement les parties réelles et les parties imaginaires dans ces deux écritures.

4) M

3) Calcul de module et un argument des nombres complexes suivants :

a) Pour le nombre complexe $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$:

On a : $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}=\dfrac{\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]}{\left[2;-\frac{\pi}{6}\right]}=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right]=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{5\pi}{12}\right]$.

Le module de $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ est donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{5\pi}{12}$ en est un argument.

b) Pour le nombre complexe $1+i\tan\theta$:

Pour que $\tan\theta$ soit défini, on doit avoir $\theta\not\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$. On calcule alors :

$$|1+i\tan\theta|=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}=\frac{1}{|\cos\theta|}$$

- Si $\cos\theta>0$, on a alors : $1+i\tan\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)=\left[\dfrac{1}{\cos\theta};\theta\right]$.
- Si $\cos\theta<0$, on a alors :

$1+i\tan\theta=-\dfrac{1}{\cos\theta}(-\cos\theta-i\sin\theta)=-\dfrac{1}{\cos\theta}(\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta))=\left[-\dfrac{1}{\cos\theta};\pi+\theta\right]$.

c) Pour le nombre complexe $(1+i)^n$:

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $(1+i)^n=\left[\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right]^n=\left[\left(\sqrt{2}\right)^n;\dfrac{n\pi}{4}\right]$. Il en résulte que :

Le module de $(1+i)^n$ est $\left(\sqrt{2}\right)^n$ et un argument en est $\dfrac{n\pi}{4}$.

d) Pour le nombre complexe $\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$:

L'expression est définie si et seulement si $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}\neq1$, c'est-à-dire $\theta\not\equiv0\,[2\pi]$. On a donc :

$$z=\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}=\frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}$$

Donc : $z = \dfrac{i}{\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$. Ainsi : $|z| = \dfrac{1}{\left|\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|}$. Un argument en est $\dfrac{\pi}{2}$ si $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$, $-\dfrac{\pi}{2}$ sinon.

4) Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique : ($n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$)

- Pour le nombre complexe A :

On a : $1+i\sqrt{3} = \left[2;\dfrac{\pi}{3}\right]$. Par conséquent : $A = \left(1+i\sqrt{3}\right)^9 = \left[2;\dfrac{\pi}{3}\right]^9 = \left[2^9;\dfrac{9\pi}{3}\right] = \left[2^9;\pi\right] = -2^9$

Par suite : $A = -512$.

- Pour le nombre complexe B :

On a : $1+i\sqrt{3} = \left[2;\dfrac{\pi}{3}\right]$ et $1+i = \left[\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$. Par conséquent :

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{125} = \left[2;\frac{\pi}{3}\right]^{125} = \left[2^{125};\frac{125\pi}{3}\right] = \left[2^{125};42\pi-\frac{\pi}{3}\right] = \left[2^{125};-\frac{\pi}{3}\right]$$

ce qui donne : $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{125} = 2^{125}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{124}\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

De même : $(1+i)^{125} = \left[\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right]^{125} = \left[\left(\sqrt{2}\right)^{125};\dfrac{125\pi}{4}\right] = \left[2^{62}\sqrt{2};32\pi-\dfrac{3\pi}{4}\right] = \left[2^{62}\sqrt{2};-\dfrac{3\pi}{4}\right]$

Il s'ensuit : $(1+i)^{125} = 2^{62}\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = 2^{62}(-1-i)$

donc : $B = \dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{125}}{(1+i)^{125}} = \dfrac{2^{124}\left(1-i\sqrt{3}\right)}{2^{62}(-1-i)} = -2^{62}\,\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = 2^{61}\left(-1+i\sqrt{3}\right)(1-i)$

Ainsi : $B = 2^{62}\left(\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)$. Enfin : $B = 2^{61}\left(\sqrt{3}-1\right)+2^{61}\left(\sqrt{3}+1\right)i$

- Pour le nombre complexe C :

On a : $1+\cos\theta+i\sin\theta = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$. D'après la formule de Moivre :

$C = 2^n\cos^n\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)\right)$. Ainsi : $C = 2^n\cos^n\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)+2^n i\cos^n\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)$

- Lorsqu'on calcule le module et un argument d'un quotient, d'un produit, d'une puissance ou d'un quotient, il est souvent plus pratique de calculer le module et un argument de chacun des termes, puis utiliser les formules du cours.
- Pour calculer les puissances élevées d'un nombre complexe, on utilise sa forme trigonométrique. La formule de Moivre permet alors de simplifier le calcul. De manière générale :
  - L'écriture algébrique $x+iy$, $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, est conseillée pour des calculs additifs.

- L'écriture trigonométrique (et aussi exponentielle) $[r;\theta]$, $(r;\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, est conseillée pour des calculs multiplicatifs.

B MANUPILATION DE LA FORME EXPONENTIELLE

1) Mettre les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

$$z_1=\frac{3}{1+i}\quad;\quad z_2=-4e^{i\frac{\pi}{5}}\quad;\quad z_3=\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{96}\quad;\quad z_4=\frac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(1+i)}{1-i}$$

2) Soit $(\theta;\alpha)\in\mathbb{R}^2$ avec $\alpha\not\equiv\pi\,[2\pi]$. Déterminer la partie réelle de : $A=\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\alpha}+e^{2i\alpha}}$ et $B=\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\alpha}+e^{2i\alpha}}$

3) Soit $(p;q)\in\mathbb{R}^2$. Factoriser : $\sin p+\sin q$; $\cos p+\cos q$; $\cos p+\sin q$.

4) Soit $x\in\mathbb{R}$. Linéariser $\cos^5 x$ et $\cos^2 x.\sin^3 x$.

5) Soit $(x;\alpha)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes : (Indication : on pourra calculer C_n+iS_n)

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(x+k\alpha)\quad;\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(x+k\alpha)$$

6) Soit z_1, z_2 des nombres complexes tels que : $|z_1|=|z_2|=1$. Montrer que : $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1.z_2}\in\mathbb{R}^+$

SOLUTION

1) Mettre les nombres complexes sous forme exponentielle :

- On a : $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$; il s'ensuit donc : $z_1=\dfrac{3}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

- On a immédiatement : $z_2=-4e^{i\frac{\pi}{5}}=4e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{5}}=4e^{\frac{6i\pi}{5}}$

- On a : $-\sqrt{3}+i=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $1-i=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. D'où :

$$z_3=\left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{96}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}\right)^{96}=\left(\sqrt{2}\right)^{96}e^{104i\pi}=2^{48}\left(e^{2i\pi}\right)^{52}$$. Par suite : $z_3=2^{48}$

- On a : $\sqrt{6}-i\sqrt{2}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Par conséquent : $z_4=\dfrac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) Soit $(\theta;\alpha)\in\mathbb{R}^2$ avec $\alpha \not\equiv \pi\ [2\pi]$.

- Déterminons la partie réelle de A :

On utilise la factorisation par l'arc moitié pour le numérateur et le dénominateur :

$$e^{i\theta}+1=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\quad \text{et}\quad e^{i\alpha}+e^{2i\alpha}=e^{i\frac{3\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)=2e^{i\frac{3\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}$$

On remarque que cette dernière expression est non nulle étant donné qu'on a $\alpha \not\equiv \pi\ [2\pi]$. On peut donc considérer le quotient des deux expressions : $A=\dfrac{2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}{2e^{i\frac{3\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}e^{i\left(\frac{\theta-3\alpha}{2}\right)}$.

Par suite : $$\mathrm{Re}(A)=\frac{2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}{2e^{i\frac{3\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{\theta-3\alpha}{2}\right)}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta-3\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

- Déterminons la partie réelle de B :

Comme dans l'exemple précédent, on écrit : $e^{i\theta}-1=2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}$ et $e^{i\alpha}+e^{2i\alpha}=2e^{i\frac{3\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}$

Il s'ensuit donc : $B=\dfrac{2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}}{2e^{i\frac{3\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}ie^{i\left(\frac{\theta-3\alpha}{2}\right)}$. On trouve : $\mathrm{Re}(B)=-\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\sin\left(\frac{\theta-3\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

- Il est important de savoir retrouver l'égalité : $1+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{i\frac{\theta}{2}}$.

L'angle $\frac{\theta}{2}$ se retrouve géométriquement en construisant les points d'affixes 1, $e^{i\theta}$ et $1+e^{i\theta}$:

On écrit alors : $1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{i\frac{\theta}{2}}$.

De même, en construisant les points d'affixes $e^{i\theta}$, $e^{i\theta'}$ et $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$, on voit apparaître l'angle $\frac{\theta+\theta'}{2}$:

$$e^{i\theta}+e^{i\theta'}=e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right).e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

- De la même manière, on montre : $e^{i\theta}-1=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{i\frac{\theta}{2}}=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}$

On a de même : $e^{i\theta}-e^{i\theta'}=e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)=2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right).e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}=2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right).e^{i\frac{\theta+\theta'+\pi}{2}}$

Il est souhaitable de connaître les formes trigonométriques et exponentielles de quelques nombres particuliers à savoir : (on suppose ici $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$)

$$a=[a;0]=ae^{i0} \quad ; \quad -a=[a;\pi]=ae^{i\pi} \quad ; \quad ib=\left[b;\frac{\pi}{2}\right]=be^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad -ib=\left[b;-\frac{\pi}{2}\right]=be^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$i=\left[1;\frac{\pi}{2}\right]=e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad -i=\left[1;-\frac{\pi}{2}\right]=e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad j=\left[1;\frac{2\pi}{3}\right]=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Ces égalités sont très utiles dans la géométrie des nombre complexes.

3) Soit $(p;q)\in\mathbb{R}^2$. Factorisons les expressions suivantes :

La factorisation par l'arc moitié donne : $e^{ip}+e^{iq}=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$. Il s'ensuit donc :

$$\sin p+\sin q=\operatorname{Im}\left(e^{ip}+e^{iq}\right)=\operatorname{Im}\left(2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p+\cos q=\operatorname{Re}\left(e^{ip}+e^{iq}\right)=\operatorname{Re}\left(2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p+\sin q=\cos p+\cos\left(q-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

4) Linéarisons les expressions $\cos^5 x$ et $\cos^2 x.\sin^3 x$:

- Pour l'expression $\cos^5 x$:

D'après la formule d'Euler : $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$; donc : $\cos^5 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5$.

En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos^5 x&=\frac{1}{2^5}\left(e^{5ix}+5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}+10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}+e^{-5ix}\right)\\&=\frac{1}{2^5}\left(e^{5ix}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-ix}+e^{-5ix}\right)\\&=\frac{1}{2^5}\left(2\cos(5x)+10\cos(3x)+20\cos x\right)\end{aligned}$$

Par suite : $\cos^5 x=\frac{1}{16}\cos(5x)+\frac{5}{16}\cos(3x)+\frac{5}{8}\cos x$

- Pour l'expression $\cos^2 x.\sin^3 x$:

D'après la formule d'Euler : $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned}\cos^2 x.\sin^3 x&=-\frac{1}{2^5 i}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}+2\right)\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right)\\&=-\frac{1}{2^5 i}\left(e^{5ix}-3e^{3ix}+3e^{ix}-e^{-ix}+e^{ix}-3e^{-ix}+3e^{-3ix}-e^{-5ix}+2e^{3ix}-6e^{ix}+6e^{-ix}-2e^{-3ix}\right)\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{5ix} - e^{-5ix} - e^{3ix} + e^{-3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{2^5 i}\left(2i\sin(5x) - 2i\sin(3x) - 4i\sin x\right)$$

Par suite : $\cos^2 x.\sin^3 x = \frac{1}{16}\left(-\sin(5x) + \sin(3x) + 2\sin x\right)$

- Linéariser $\cos^m x.\sin^n x$, c'est écrire cette expression sous la forme d'une somme d'expressions du genre $\cos(px)$ et $\sin(qx)$.

Pour linéariser $\cos^m x.\sin^n x$:

- On écrit : $\cos^m x.\sin^n x = \frac{1}{2^m 2^n i^n}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^m \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^n$;
- On développe $\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^m \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^n$ en utilisant les identités remarquables ou la formule du binôme de Newton ;
- On développe ensuite le produit obtenu ;
- Enfin on simplifie en utilisant les relations : $e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x} = 2\cos(\alpha x)$ et $e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x} = 2i\sin(\alpha x)$

La linéarisation de $\cos^m x.\sin^n x$ est fondamentale pour le calcul de l'intégrale $\int_a^b \cos^m x.\sin^n x\,dx$ lorsque les entiers m et n sont deux entiers pairs. (Voir chapitre IV, Analyse).

5) Soit $(x;\alpha) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Pour calculer C_n et S_n, on peut former $C_n + iS_n$. On a : $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i(x+k\alpha)} = e^{ix}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha} = e^{ix}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\alpha}\right)^k$

Deux cas peuvent être présentés :

- Si $e^{i\alpha} = 1$ alors $C_n + iS_n = (n+1)e^{ix}$, donc : $C_n = (n+1)\cos x$ et $S_n = (n+1)\sin x$.
- Si $e^{i\alpha} \neq 1$ alors : $\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\alpha}\right)^k = \frac{e^{i(n+1)\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{e^{i(n+1)\frac{\alpha}{2}} - e^{-i(n+1)\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)} = e^{in\frac{\alpha}{2}}\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

Donc : $C_n = \cos\left(x + \frac{n\alpha}{2}\right).\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ et $S_n = \sin\left(x + \frac{n\alpha}{2}\right).\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

6) Soit z_1, z_2 des nombres complexes tels que : $|z_1| = |z_2| = 1$. Montrons que : $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1.z_2} \in \mathbb{R}^+$

Lorsqu'on connait le module d'un nombre complexe, la principale façon de tirer profit de cette information est de passer en écriture exponentielle.

z_1 et z_2 étant de module 1, il existe deux réels θ_1 et θ_2 tels que $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$. Par conséquent :

$$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=\frac{\left(e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}\right)^2}{e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}}=\frac{e^{2i\theta_1}+2e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2}+e^{2i\theta_1}}{e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}}=\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}+2+\frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}}=2+\left(e^{i(\theta_1-\theta_2)}+e^{i(\theta_2-\theta_1)}\right)$$

Il s'ensuit donc : $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=2+2\cos(\theta_2-\theta_1)$. Comme $\cos(\theta_2-\theta_1)\geq -1$ alors $2+2\cos(\theta_2-\theta_1)\geq$

En définitive : $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1.z_2}\in\mathbb{R}^+$

C RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $(\theta\in\mathbb{R})$

(E_1) : $2z+5\overline{z}=1-i$; (E_2) : $z^2+8i=|z|^2-2$; (E_3) : $z^2-2^{\theta+1}(\cos\theta)z+2^{2\theta}=0$

(E_4) : $z+|z|=5+i$; (E_5) : $z^2+z-(1+3i)=0$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure α à déterminer

$$(E):\ z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$$

SOLUTION

1) Résolution des équations :

- Pour l'équation (E_1) : Écrivons $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. On obtient :

$$2z+5\overline{z}=1-i\Leftrightarrow 2(x+iy)+5(x-iy)=1-i\Leftrightarrow\begin{cases}7x=1\\-3y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{7}\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$$

après avoir identifié les parties réelles et les parties imaginaires. L'équation possède donc une solution unique : $S=\left\{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}i\right\}$

- Pour l'équation (E_2) : Écrivons $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. L'équation de départ devient :

$$(x+iy)^2+8i=(x^2+y^2)-2\Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy+8i=x^2+y^2-2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=x^2+y^2-2\\2xy+8=0\end{cases}$$

après avoir identifié les parties réelles et les parties imaginaires. Ainsi :

$$(E_2)\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1\\xy=-4\end{cases}\Leftrightarrow\left[(x;y)=(-4;1)\text{ ou }(x;y)=(4;-1)\right]$$. Finalement : $S=\{-4+i\ ;\ 4-i\}$

- Pour l'équation (E_3) : L'équation a pour discriminant :

$$\Delta=\left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)^2-4\times2^{2\theta}=2^{2\theta+2}\cos^2\theta-2^{2\theta+2}=-2^{2\theta+2}\sin^2\theta=\left(2^{\theta+1}i\sin\theta\right)^2$$

On distingue deux cas :

- Si $\theta\equiv0\,[\pi]$, alors $\Delta=0$, donc, l'équation admet une solution unique donnée par : $z=2^\theta\cos\theta$

- Si $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$, alors $\Delta \neq 0$, donc, l'équation admet deux solutions données par :

$$z_1 = \frac{2^{\theta+1}\cos\theta + i2^{\theta+1}\sin\theta}{2} = 2^{\theta}e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2^{\theta+1}\cos\theta - i2^{\theta+1}\sin\theta}{2} = 2^{\theta}e^{-i\theta}$$

Finalement : $S = \{2^{\theta}\cos\theta\}$ si $\theta \equiv 0\,[\pi]$; $S = \{2^{\theta}.e^{i\theta} ; 2^{\theta}.e^{-i\theta}\}$ sinon

- Pour l'équation (E_4) : Écrivons $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences :

$$z + |z| = 5 + i \Leftrightarrow x + iy + \sqrt{x^2+y^2} = 5 + i \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2+y^2} = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

- Si $x > 5$, alors l'équation $x + \sqrt{x^2+1} = 5$ n'a pas de solution. Si $x \leq 5$, alors, elle est équivalente à $x^2 + 1 = 25 - 10x + x^2$, soit encore à $x = \dfrac{12}{5}$. Finalement, l'équation de départ possède une unique solution : $S = \left\{\dfrac{12}{5} + i\right\}$.

- Pour l'équation (E_5) : On a $\Delta = 1 + 4(1+3i) = 5 + 12i$. Il faut déterminer une racine carrée de Δ (notée δ). Cherchons cette racine carrée sous sa forme algébrique, c'est-à-dire cherchons deux réels α et β tels que : $(\alpha + i\beta)^2 = 5 + 12i$.

Donc α et β vérifient : $\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 5 + 12i$; donc : $\alpha^2 - \beta^2 = 5$ et $2\alpha\beta = 12$.

De plus, comme $(\alpha + i\beta)^2 = 5 + 12i$ alors $\left|(\alpha + i\beta)^2\right| = |5 + 12i|$, ce qui donne : $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{169} = 13$

Donc, α et β vérifient le système :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 5 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 13 \\ \alpha\beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ 2\beta^2 = 8 \\ \alpha\beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 3 \\ \beta = \pm 2 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de même signe} \end{cases}$$

donc les racines carrées de Δ sont : $3 + 2i$ et $-3 - 2i$. Choisissons $\delta = 3 + 2i$. Alors les solutions de (E_5) sont : $z_1 = \dfrac{-1 + (3+2i)}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \dfrac{-1 - (3+2i)}{2} = -2 - i$. Ainsi : $S = \{1 + i ; -2 - i\}$

- Il y a en gros deux stratégies pour calculer les racines carrées d'un nombre complexe Δ :
  - Dans le cas où l'on connait la formule trigonométrique de Δ (par exemple si Δ est réel ou imaginaire pur), on part de cette forme, on prend la racine carrée du module et on divise un argument par 2 .
  - Dans tous les autres cas, on cherche une racine carrée de $\Delta = a + ib$ sous la forme $\delta = x + iy$.

    1) On développe $\delta^2 = \Delta$ et on identifie les parties réelles et les parties imaginaires.

    2) On ajoute l'équation $x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |\Delta|$ et on trouve les valeurs de x^2 et y^2 .

    3) On obtient alors quatre solutions. On en élimine deux en gardant celles dont les signes respectent l'équation $2xy = b$.

La boîte à idées

2) Résolution de l'équation (E) :

On cherche $\alpha = ix$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) solution de l'équation, donc tel que :

$$-ix^3 + (1+2i)x^2 + 3(1+i)x - 10(1+i) = 0$$

autrement dit : $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 = 0 \\ -x^3 + 2x^2 + 3x - 10 = 0 \end{cases}$ en identifiant parties réelle et imaginaire. La première équati

est du second degré, a pour discriminant $\Delta = 9 + 40 = 49$ et donc pour solutions $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$.

On vérifie que x_2 est solution de la seconde équation, mais x_1 ne l'est pas. Ainsi $\alpha = -2i$.

On cherche maintenant $(a;b;c) \in \mathbb{C}^3$ tel que pour $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + 2iaz^2 + 2ibz + 2ic$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 2ia = -(1+2i) \\ c + 2ib = 3(1+i) \\ 2ic = -10(1+i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = \dfrac{-10(1+i)}{2i} = -5 + 5i \\ b = -1 - 2i - 2ia = -1 - 4i \end{cases}$$

On a omis la troisième équation pour résoudre le système, mais on vérifie que $b = -1 - 4i$ et $c = -5 + 5i$ la vérifient bien. La solution trouvée est donc correcte.

D'après ce qui précède, les solutions de (E) sont $\alpha = -2i$ et les solutions de $z^2 - (1+4i)z + 5(-1+i) = 0$.

Cette dernière équation a pour discriminant : $\Delta = (1+4i)^2 - 20(-1+i) = 1 + 8i - 16 + 20 - 20i = 5 - 12i$

Pour la recherche des racines carrées de Δ, alors, soit on suit la même démarche vue pour l'équation (E_5) soit exploiter le résultat $5 + 12i = (3+2i)^2$ (déjà montré) en passant au conjugué et déduire l'égalité $5 - 12i = (3-2i)^2$. Les solutions de (E) sont donc :

$$\alpha = -2i \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{1+4i+3-2i}{2} = 2+i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1+4i-3+2i}{2} = -1+3i$$

Par suite : $S = \{-2i; 2+i; -1+3i\}$

- Pour résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, on calcule le discriminant de l'équation, puis, s'il est non nul, une racine carrée de ce discriminant (en suivant la méthode précédente). On utilise ensuite les formules du cours.
- Pour résoudre des équations, où apparaît z et $\overline{z}$ à la fois, on peut :
  - Poser $z = x + iy$ ou $z = re^{i\theta}$, puis utiliser la règle d'égalité de deux complexes
  - Passer au conjugué en utilisant l'équivalence : $f(z) = g(z) \Leftrightarrow \overline{f(z)} = \overline{g(z)}$
- On rappelle que les solutions z_1 et z_2 de $az^2 + bz + c = 0$ vérifient : $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1.z_2 = \dfrac{c}{a}$

La boîte à idées

D LES RACINES N$^{\text{ième}}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE

1) Déterminer les racines d'ordre 5 du nombre complexe $Z = \dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}{\left(1-i\right)^3}$.

2) a) Déterminer sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique, les racines sixièmes de 1

b) Calculer $(1-i)^6$. Déduire les racines sixièmes du nombre $8i$.

c) Déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante (E): $\quad z^6-(1+2i)z^3-1+i=0$

SOLUTION

1) Déterminons les racines d'ordre 5 du nombres complexe Z :

On a d'abord: $$Z=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}{(1-i)^3}=\frac{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]^4}{\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]^3}=\frac{\left[16;\frac{4\pi}{3}\right]}{\left[2\sqrt{2};-\frac{3\pi}{4}\right]}=\left[4\sqrt{2};\frac{25\pi}{12}\right]$$

Par conséquent, les racines d'ordre 5 du nombres complexe Z sont :

$$z_k=\left[\sqrt[5]{4\sqrt{2}};\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{5}\right]=\left[\sqrt{2};\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{5}\right] \quad \text{où} \quad k\in\{0;1;2;3;4\}$$

2) a) Les racines sixièmes de 1 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6=1$. Elles sont de la forme :

$$\omega_k=e^{i\frac{2k\pi}{6}}=\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) \quad \text{avec} \quad k\in\{0;1;2;3;4;5\}$$

En ce qui concerne la forme algébrique de chacune des racines :

$$\omega_0=1 \quad ; \quad \omega_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \omega_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega_3=-1 \quad ; \quad \omega_4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \omega_5=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Calculons $(1-i)^6$: $(1-i)^6=\left((1-i)^2\right)^3=(-2i)^3=8i$

Puisque $(1-i)^6=8i$ alors $1-i$ est une racine sixième de $8i$. Les autres racines sixièmes de $8i$ s'obtiennent en multipliant le nombre complexe $1-i$ par les racines sixièmes de 1. En définitive, les racines sixièmes de $8i$ sont :

$$z_0=(1-i)\omega_0=1-i \;\; ; \;\; z_1=(1-i)\omega_1=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i \;\; ; \;\; z_2=(1-i)\omega_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

$$z_3=(1-i)\omega_3=-1+i \;\; ; \;\; z_4=(1-i)\omega_4=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}i \;\; ; \;\; z_5=(1-i)\omega_5=-\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

c) Les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$: On a pour tout $k \in \{0;1;2;3;4;5\}$,

$$z_k = (1-i)\omega_k = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2k\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{2k\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$ On a : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Par conséquent : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

- Pour obtenir les racines n-ièmes d'un nombre complexe (non nul) avec $n \geq 3$, il faut la forme trigonométrique ou exponentielle de ce nombre complexe.
- Il faut savoir retrouver le résultat suivant en procédant comme ci-dessus :
  Les racines n-ièmes d'un nombre complexe a pour lequel on connaît un nombre complexe u vérifiant $u^n = a$ sont : $z_k = ue^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0;1;...;n-1\}$.

La boîte à idées

3) Résolution de l'équation (E):

Posons $Z = z^3$. L'équation donnée est équivalente à : $Z^2 - (1+2i)Z - 1 + i = 0$.

La résolution de cette dernière équation donne : $Z = i$ ou $Z = 1+i$; D'où : $z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ou $z^3 = 1+i = \sqrt{2}$

- Les solutions de l'équation $z^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont : $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $-i$;
- Les solutions de l'équation $z^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont : $z = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

En définitive, l'ensemble solutions de l'équation (E) est : $S = \left\{e^{i\frac{\pi}{6}}; e^{i\frac{5\pi}{6}}; -i; \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}; \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}; \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\}$

- Pour résoudre une équation polynomiale du type : (E_n) : $az^{2n} + bz^n + c = 0 \quad (a \neq 0)$
  On pose $Z = z^n$ et on résout l'équation du second degré $aZ^2 + bZ + c = 0$ d'inconnue Z.
  Si $\Delta = b^2 - 4ac$ est non nul, alors (E_n) admet $2n$ solutions et qui sont les racines n-ième des solutions de l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$.

La boîte à idées

E NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan dans les cas suivants :

a) $|(1+i)z - 2i| = 2$; b) $|z-1| = |z+i|$; c) $I(i)$, $M(z)$ et $M'(iz)$ sont alignés

2) Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{2i\}$, on pose : $Z = \frac{z+1}{z-2i}$

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

a) Z est réel ; b) Z est imaginaire pur ; c) Z vérifie $\arg Z \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

SOLUTION

1) a) On a pour $z \in \mathbb{C}$: $|(1+i)z - 2i| = 2 \Leftrightarrow |1+i|\left|z - \dfrac{2i}{1+i}\right| = 2 \Leftrightarrow |z-(1+i)| = \sqrt{2}$

Si on note $A(1+i)$, alors $AM = \sqrt{2}$. Par conséquent, l'ensemble des points M correspondants est le cercle de centre $A(1+i)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

b) En notant $I(1)$ et $J(i)$, on aura l'équivalence : $|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow IM = JM$; il s'ensuit donc que l'ensemble des points M correspondants est la médiatrice du segment $[IJ]$.

c) Dire que les points I, M et M' sont alignés signifie que $M = I$ ou $M' = I$ ou $\left(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'}\right) \equiv 0\,[\pi]$.

D'où $\arg\left(\dfrac{iz-i}{z-i}\right) \equiv 0\,[\pi]$ ou $z = i$ ou $iz = i$. Par suite : $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$ ou $z = i$ ou $z = 1$

Soit $B(1)$. On a alors : $\left(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{BM}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$ ou $M = I$ ou $M = B$

Et donc : $(IM) \perp (BM)$ ou $M = I$ ou $M = B$

L'ensemble des points demandé est le cercle de diamètre $[IB]$.

2) a) Dire que $Z \in \mathbb{R}$ signifie que les points $M(z)$, $A(-1)$ et $B(2i)$ sont alignés et $M \neq B$.

Par conséquent, l'ensemble des points demandé est la droite (AB), excepté B.

b) Dire que $Z \in i\mathbb{R}$ signifie que $(AM) \perp (BM)$ et $M \neq B$.

Par conséquent, l'ensemble des points demandé est le cercle de diamètre $[AB]$, excepté B.

c) Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg Z \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$:

On a : $\arg Z \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z+1}{z-2i}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Par conséquent, l'ensemble des points demandé est le demi-cercle de diamètre $[AB]$, contenant O, excepté A et B.

- Quand on demande de prouver qu'un triangle est un triangle particulier, ou qu'un quadrilatère est un quadrilatère particulier, il faut toujours avoir à l'esprit que l'on peut calculer :
  - Une distance en appliquant la formule : $|z_B - z_A| = AB$
  - Un angle en appliquant la formule : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\,[2\pi]$
- Dans 90% des cas, il sera demandé de calculer un rapport puis d'en déduire une propriété géométrique sur une configuration, ce qui se fait en prenant le module et l'argument du rapport et en utilisant les deux formules citées ci-dessus.
- Pour déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan vérifiant une condition donnée, on peut :

- Si on voit des $M(z)$ partout, on fait intervenir les barycentres pour se ramener à quelques chose de la forme $GM = r$ ou $AM = BM$.
  - Pour $GM = r$ avec $r > 0$, c'est le cercle de centre G et de rayon r.
  - Pour $AM = BM$, c'est la médiatrice du segment $[AB]$.
- Poser $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. Cette méthode s'utilise lorsqu'on doit déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que le nombre $Z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ vérifie une propriété d'appartenance (réel, imaginaire, réel non nul,...).
  - Pour $Ax + By + C = 0$, c'est l'équation d'une droite.
  - Pour $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ avec $A^2 + B^2 - C > 0$, c'est le cercle de centre $\Omega(-A,-B)$ et de rayon $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$.
- L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $\dfrac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$ est la droite (AB) privée de B où $A(a)$ et $B(b)$.
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan vérifiant $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B où $A(a)$ et $B(b)$.
- Dans un exercice faisant intervenir nombres complexes et géométrie, il n'est pas en général nécessaire d'utiliser ni la forme algébrique, ni la forme trigonométrique, ni les coordonnées des points mais les propriétés reliant les nombres complexes et la géométrie : distance, angle, alignement, orthogonalité.

F TRANSFORMATIONS DU PLAN (1)

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Soit t la translation de vecteur $\vec{w} = 2\vec{u}$ qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$.

   Donnez l'écriture complexe de la transformation t.

2) Soit r la transformation du plan qui, à tout point $M'(z')$ associe le point $M''(z'')$ avec : $z'' = -iz' + 4i$

   a) Démontrer que r est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

   b) Déterminer l'écriture complexe de la transformation $r \circ t$

3) Déterminer la nature et les caractéristiques de l'application h d'écriture complexe : $z' = -3z + 5 + 2i$

SOLUTION

1) L'écriture complexe de la transformation t est donnée par : $z' = z + 2$

2) a) On a dans l'écriture complexe $z'' = -iz' + 4i$: $-i \neq 1$ et $|-i| = 1$

   Donc la transformation r est une rotation.

   Le centre de r est le point $\Omega(2+2i)$ et son angle est $\arg(-i) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

b) En conservant les notations précédentes, on a : $z' = z + 2$ et $z'' = -iz' + 4i$

Donc $z'' = -i(z+2) + 4i$. Ainsi, L'écriture complexe de la transformation $r \circ t$ est : $z'' = -iz + 2i$

3) On a dans l'écriture complexe $z' = -3z + 5 + 2i$: $-3 \in \mathbb{R}^*$ et $-3 \neq 1$

Donc h est une homothétie de rapport $k = -3$. Son centre est le point $\Omega'\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}i\right)$

On rappelle que si $z' = az + b$ est l'écriture complexe d'une transformation T avec $a \neq 1$ alors T admet

Comme point fixe $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$.

G TRANSFORMATIONS DU PLAN

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i\}$, on pose : $f(z) = \frac{iz+2}{z-i}$ et on considère les points $A(i)$, $B(2i)$ et $M(z)$.

1) On pose $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Écrire $f(z)$ sous forme algébrique.

b) Déterminer la nature de l'ensemble : $E = \{M(z) / f(z) \in \mathbb{R}\}$.

2) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i;2i\}$: $|f(z)| = \frac{BM}{AM}$ et $\arg(f(z)) \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})\ [2\pi]$

b) Déterminer la nature de chacun des ensembles : $F = \{M(z) / |f(z)| = 1\}$ et $G = \{M(z) / f(z) \in i\mathbb{R}^*\}$.

3) a) Montrer que tout $z \in \mathbb{C} - \{i\}$: $|f(z) - i| = \frac{1}{|z-i|}$ et $\arg(f(z) - i) \equiv -\arg(z-i)\ [2\pi]$

b) Montrer que si $M(z)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $R = \frac{1}{2}$, alors le point $M'(f(z))$ appartient à un cercle à déterminer.

4) a) Déterminer les solutions α et β de l'équation $f(z) = z$ avec $\mathrm{Re}(\alpha) = 1$

b) Soit $z \in \mathbb{C} - \{i;\alpha;\beta\}$ et soit $M(z)$, $M'(f(z))$, $C(\alpha)$ et $D(\beta)$ des points du plan $\mathscr{P}$.

Montrer que $\frac{f(z)-\alpha}{f(z)-\beta} = -\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ et en déduire que : $(\overrightarrow{M'D};\overrightarrow{M'C}) \equiv \pi + (\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MC})\ [2\pi]$

c) Que peut-on déduire des points M, M', C et D ? Justifier

SOLUTION

1) a) En posant $z = x + iy$, on trouve :

$$f(z) = \frac{i(x+iy)+2}{x+i(y-1)} = \frac{x + i(x^2+y^2-3y+2)}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x}{x^2+(y-1)^2} + \frac{x^2+y^2-3y+2}{x^2+(y-1)^2}i$$

b) Soit $M(z)$ (avec $z \neq i$) un point du plan. D'après le résultat précédent, on a les équivalences suivantes :

$$M(z)\in E \Leftrightarrow f(z)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f(z))=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Par suite, l'ensemble E est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, excepté le point A.

2) a) On a pour tout $z\in\mathbb{C}-\{i;2i\}$:

- $|f(z)|=\left|\frac{iz+2}{z-i}\right|=\left|\frac{i(z-2i)}{z-i}\right|=\left|\frac{z-2i}{z-i}\right|=\frac{|z-2i|}{|z-i|}=\frac{BM}{AM}$.
- $\arg(f(z))\equiv\arg\left(i.\frac{z-2i}{z-i}\right)\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg(f(z))\equiv\arg(i)+\arg\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)\ [2\pi]$

Par conséquent : $\arg(f(z))\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)\ [2\pi]$

b) Soit $M(z)$ (avec $z\neq i$) un point du plan. D'après 2) a), on déduit immédiatement :

- $M(z)\in F \Leftrightarrow |f(z)|=1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM}=1 \Leftrightarrow AM=BM$. Donc, F est la médiatrice du segment $[AB]$.
- $M(z)\in G \Leftrightarrow f(z)\in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(f(z))\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Donc, $M(z)\in G \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)\equiv 0\ [\pi] \Leftrightarrow M\in(AB)$. Ainsi, G est la droite (AB), privée de A et B

Remarque importante : Soit $(\theta;\theta')\in\mathbb{R}^2$. On a : $\theta\equiv\theta'\ [2\pi] \Rightarrow \theta\equiv\theta'\ [\pi]$. La réciproque est fausse.

3) a) On a pour tout $z\in\mathbb{C}-\{i\}$: $f(z)-i=\frac{iz+2}{z-i}-i=\frac{iz+2-iz-1}{z-i}=\frac{1}{z-i}$. Par conséquent :

$$|f(z)-i|=\frac{1}{|z-i|} \text{ et } \arg(f(z)-i)\equiv-\arg(z-i)\ [2\pi]$$

b) Soit $M(z)$ (avec $z\neq i$) un point de cercle $\mathscr{C}$ et M' le point d'affixe $f(z)$. On a $AM=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $|z-i|=\frac{1}{2}$; et puisque $|f(z)-i|=\frac{1}{|z-i|}$, alors $|f(z)-i|=2$, c'est-à-dire $AM'=2$. Par suite, Le point M' appartient au cercle de centre $A(i)$ et de rayon 2.

4) a) Les solutions demandées de l'équation $f(z)=z$ sont : $\alpha=1+i$ et $\beta=-1+i$.

b) Soit $z\in\mathbb{C}-\{i;\alpha;\beta\}$. On a :

$$\frac{f(z)-\alpha}{f(z)-\beta}=\frac{\frac{iz+2}{z-i}-(1+i)}{\frac{iz+2}{z-i}-(-1+i)}=\frac{iz+2-z-iz+i-1}{iz+2+z-i-iz-1}=-\frac{z-(1+i)}{z-(-1+i)}=-\frac{z-\alpha}{z-\beta}, \text{ d'où le résultat.}$$

En passant aux arguments, on obtient immédiatement : $\left(\overrightarrow{M'D};\overrightarrow{M'C}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MC}\right)\ [2\pi]$

c) On a : $\frac{f(z)-\alpha}{f(z)-\beta}\div\frac{z-\alpha}{z-\beta}=-1\in\mathbb{R}$, donc les points M, M', C et D sont alignés ou cocycliques.

EXERCICES D'APPLICATION

FORME ALGÉBRIQUE ET OPÉRATIONS

EXERCICE 01

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$z_1 = 3 + iz \quad \text{et} \quad z_2 = z + i\left(z^2 + 5\right)$$

Écrire z_1 et z_2 sous la forme algébrique dans chacun des cas suivants :

1) $z = -i$; 2) $z = 3 + 2i$; 3) $z = \dfrac{2+i}{2-i}$

EXERCICE 02

Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$A = (1-10i)(5+3i)$; $B = \sqrt{3} + i - \left(5i + \sqrt{3}\right)^2$

$C = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^2$; $D = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$U = \dfrac{3+i\sqrt{5}}{3-i\sqrt{5}}$; $V = \dfrac{1}{\sqrt{3}-2i}$; $W = \dfrac{-1+7i}{2-3i}$

$X = \dfrac{(4-6i)^2}{(2+i)(1+3i)}$; $Y = \dfrac{(i+1)(i+2)(5-7i)}{2i^8}$

EXERCICE 03

Soit z un nombre complexe différent de -1. On pose :

$$z = x + iy \text{ avec } (x;y) \in \mathbb{R}^2$$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre Z dans chacun des cas suivants :

<u>1er cas :</u> $Z = z^2 - 2iz - 1$; <u>2ème cas</u> : $Z = \dfrac{4iz+3}{z+1}$

EXERCICE 04

On considère le nombre complexe : $Z = \dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

1) Déterminer la forme algébrique de Z.

2) Calculer : Z^2 ; Z^3 ; Z^{15}.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$Z^{3n+2} = -2^{3n+1}\left(1+i\sqrt{3}\right) \text{ puis en déduire } Z^{20}.$$

EXERCICE 05

On considère le nombre : $A = -1 + i\left(2-\sqrt{3}\right)$

1) Calculer A^2, A^3 et A^6.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $A^{12n} \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 06

Soit n un entier naturel. On pose : $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1) Calculer j^2 et j^3 puis j^n selon les valeurs de n.

2) Vérifier que : $1 + j + j^2 = 0$

3) Calculer la somme suivante :

$$S = 1 + j + j^2 + ... + j^{2020}$$

EXERCICE 07

Soit n un entier naturel.

1) a) Calculer i^3, i^4, i^5 et i^n selon les valeurs de n.

b) Calculer les deux sommes suivantes :

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{2019}$$

$$T = 1 - i + i^2 - i^3 + ... + (-i)^{2019}$$

2) a) Calculer $(1+i)^3$, $(1+i)^4$ et $(1+i)^n$ selon les valeurs de l'entier n.

b) Déterminer tous les entiers naturels n pour lesquels $(1+i)^n$ est un nombre réel négatif.

EXERCICE 08

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer tous les nombres complexes z tels que :

1) $\dfrac{z}{z+i} \in \mathbb{R}$; 2) $\dfrac{z-i}{z+i} \in i\mathbb{R}$; 3) $1 + z + z^2 \in \mathbb{R}$

EXERCICE 09

Déterminer les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ vérifiant l'égalité :

$$(z-1)^3 + (z-1)^2(z+1) + (z-1)(z+1)^2 + (z+1)^3 = 0$$

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

EXERCICE 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 3+4i \quad , \quad z_B = 3i \quad \text{et} \quad z_C = 2-i$$

1) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Soit D le point du plan pour lequel $ABCD$ est un parallélogramme. Déterminer l'affixe de D.
3) Soit E le point du plan défini par : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
   a) Déterminer l'affixe du point E.
   b) Vérifier que $ABEC$ est un parallélogramme puis déterminer l'affixe de son centre.
   c) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{DE}$.

EXERCICE 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectifs :

$$z_A = 4+i \quad \text{et} \quad z_B = 6+3i$$

1) Déterminer l'affixe du milieu du segment $[AB]$.
2) Déterminer l'affixe du point G, barycentre du système pondéré : $\{(O;2),(A;1),(B;-1)\}$

EXERCICE 12

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère dans le plan complexe les points :

$$A(-2+i) \quad ; \quad B(3+3i) \quad ; \quad C\left(1+\frac{11}{5}i\right)$$

1) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) En déduire que les points A, B et C sont alignés.
3) Construire les points A et B dans le repère puis en déduire une construction du point C.
4) Déterminer les réels a et b pour que le point C soit le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$, avec $a+b=1$.
5) Donner l'affixe du centre de gravité du triangle OAB.

EXERCICE 13

Soit b un nombre réel. Soit M le point du plan d'affixe $z = 3+ib$ et M' son symétrique par rapport à la droite d'équation $y=1$.

Déterminer l'affixe z' du point M' en fonction de b.

EXERCICE 14

Dessiner dans le plan complexe, les ensembles suivants

1) $E = \left\{M(\lambda i) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}^{+}\right\}$.
2) $F = \left\{M((1-i)\lambda) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}_{-}^{*}\right\}$.
3) $G = \left\{M\left(\left(\sqrt{3}+i\right)k\right) \,/\, k \in \mathbb{R}\right\}$.

ÉQUATIONS DU 1er DEGRÉ - SYSTÈMES

EXERCICE 15

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $8+3i+iz+7(z-4i)=0$; 2) $(9+i)z = 3+i-i$

3) $(3-i)z+3+i = 2z-4i$; 4) $\dfrac{3z}{z-i} = 1+i\sqrt{3}$

5) $((2+i)z-i)(9z+8-4i)=0$; 6) $\dfrac{4z+1}{iz+i} = \dfrac{4+i}{3}$

EXERCICE 16

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 2z - z' = 5 \\ z - 3iz' = 7 \end{cases} \quad ; \quad (S_2) : \begin{cases} 3z - 2z' = -11 \\ iz + (1+i)z' = 3(4-i \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} -5iz + \dfrac{3}{2}z' = \dfrac{i}{4} \\ 4z - iz' = 0 \end{cases} \quad ; \quad (S_4) : \begin{cases} \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z'} = 1+3i \\ \dfrac{3i}{z} - \dfrac{2}{z'} = -3-i \end{cases}$$

EXERCICE 17

On considère le polynôme P défini par :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad P(z) = iz^2 + (3+4i)z - 7i + 3$$

1) Montrer que $1+i$ est une racine du polynôme P.
2) En déduire une factorisation de P sous la forme de produit de deux polynômes du 1er degré.

CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

EXERCICE 18

Calculer de deux façons différentes le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (3+i)(2-3i) \quad ; \quad z_2 = \frac{2+i}{3-i} \quad ; \quad z_3 = -\frac{5}{3+4i}$$

$$z_4 = (1+2i)^3 - (1-i)^4 \quad ; \quad z_5 = \frac{(1+5i)i}{(4-i)^2}$$

EXERCICE 19

Soit z un nombre complexe différent de -1.

Simplifier l'expression : $\overline{\left(\frac{-z}{i(z+1)}\right)} + i\overline{\frac{1-i(z+1)}{\overline{z}+1}}$

EXERCICE 20

Soit u un nombre complexe tel que : $u \neq 1$ et $u.\overline{u} = 1$.

Soit z un nombre complexe non réel.

Montrer que $Z = \frac{z - u\overline{z}}{1-u}$ est réel.

EXERCICE 21

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

1) Déterminer la forme algébrique du nombre $3iz - \overline{z}$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3iz - \overline{z} = 8i$.
3) Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $3iz - \overline{z}$ est imaginaire pur.

EXERCICE 22

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z + i\overline{z} = 5 + 4i$; 2) $(z+1-i)\left(\overline{iz} + 2i - 4\right) = 0$

3) $\overline{z} - z = (1+3i)z$; 4) $(2-i)z + 3\overline{z} = 5 + 3i$

5) $\overline{\overline{z} - 2i} = 2z$; 6) $(1+i)\overline{z} - 1 + i = \overline{z} - i$

7) $z.\overline{z} + (2-i)z = 1 + i$; 8) $\overline{z}^2 - (3+i)z + 3i = 0$

9) $\frac{\overline{z}-2}{\overline{z}+1} = 2i$; 10) $\frac{4\overline{z}-2}{z+1} = -3+i$

EXERCICE 23

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2z - z' = i \\ 2\overline{z} + 3i\overline{z'} = 17 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2z - 3z = -4+5 \\ \overline{z} + \overline{z'} = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} z + \overline{t} = i \\ iz + (1-i)t = 5+i \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2\overline{z} + (1-i)t = -2+2i \\ z - 5i.\overline{t} = -8+7i \end{cases}$

EXERCICE 24

Soit z un nombre complexe non nul.

Montrer l'équivalence suivante :

$$\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(z = \overline{z} \text{ ou } z + \overline{z} = 2z.\overline{z}\right)$$

EXERCICE 25

Soit a, b, c et d des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que :

$$\left(\frac{a-d}{b-c} \in i\mathbb{R} \text{ et } \frac{b-d}{c-a} \in i\mathbb{R}\right) \Rightarrow \frac{c-d}{a-b} \in i\mathbb{R}$$

MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

EXERCICE 26

Déterminer le module de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = \left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)^2 \quad ; \quad z_2 = (2+3i)^2 + 5i$$

$$z_3 = (3+2i)^3 \quad ; \quad z_4 = \frac{2017+2i}{2017-2i} \quad ; \quad z_5 = \left(\frac{\sqrt{17}-i}{5+3i}\right)^4$$

$$z_6 = \left(\sqrt{7} + i\right)\left(7 - i\sqrt{11}\right) \quad ; \quad z_8 = i(3-4i)^3(4+i)^2$$

EXERCICE 27

Déterminer tous les nombres complexes z vérifiant :

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$$

EXERCICE 28

Soit z et z' deux nombres complexes. Montrer que :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$$

EXERCICE 29

1) Soit a, b et c des nombres complexes.

Montrer que : $|1+a|+|a+b|+|b| \geq 1$

2) Soit z un nombre complexe de module 1.

Que peut-on dire de $|1+z|^2+|1-z|^2$?

EXERCICE 30

1) Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

Montrer que : $\left|\dfrac{z}{|z|^2}-\dfrac{z'}{|z'|^2}\right| = \dfrac{|z-z'|}{|z|\times|z'|}$

2) Soit a, b et c des nombres complexes de module 1.

a) Montrer que : $|ab+bc+ca| = |a+b+c|$

b) Montrer que si $ac \neq -1$ alors :

$$\frac{a+c}{1+ac} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)} \in i\mathbb{R}$$

EXERCICE 31

Soit u un nombre complexe tel que : $|u|=1$ et $u \neq 1$.

1) Montrer que : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-u}\right)=\dfrac{1}{2}$.

2) Montrer que si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ alors : $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ et réel.

EXERCICE 32

Pour tout $z \in \mathbb{C}-\{1\}$, on pose : $h(z)=i\dfrac{1+z}{1-z}$

1) Montrer que si $|z|=1$, alors $h(z)$ est réel.

2) Montrer que : $|z|<1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(h(z))>0$.

EXERCICE 33

Soit z et z' deux nombres complexes. Montrer que :

$$4z.z' = |\overline{z}+z'|^2-|\overline{z}-z'|^2+i\left(|\overline{z}-iz'|^2-|\overline{z}+iz'|^2\right)$$

EXERCICE 34

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}-\{2\}$:

$$\mathrm{Re}(z)<1 \Rightarrow \left|\frac{z}{2-z}\right|<1$$

ARGUMENT - FORME TRIGONOMÉTRIQUE

EXERCICE 35

Déterminer un argument du nombre complexe z dans chacun des cas suivants :

1) $z=-\sqrt{15}+i\sqrt{5}$; 2) $z=-1-i\sqrt{3}$; 3) $z=-i$

4) $z=(1-i)^2$; 5) $z=(1-i)(-\sqrt{3}+i)$

6) $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$; 7) $z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2i}$; 8) $z=\dfrac{-5}{\sqrt{7}-i\sqrt{21}}$

9) $z=\left(\dfrac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$; 10) $z=\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{2018}$

EXERCICE 36

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_1=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; $z_2=-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$; $z_3=-2i$

$z_4=\dfrac{2i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$; $z_5=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$; $z_6=\left(\sqrt{3}-i\right)^7$

$z_7=\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^8$; $z_8=(1-i)\left(1-i\sqrt{3}\right)$

$z_{10}=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}$; $z_4=\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^7}$

EXERCICE 37

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1) $z_1=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ avec $\pi<\alpha<2\pi$

2) $z_2=\cos\alpha+i(1+\sin\alpha)$ avec $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$

3) $z_3=\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{(\cos\alpha+\sin\alpha)+i(\cos\alpha-\sin\alpha)}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$

4) $z_4=\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ avec $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

EXERCICE 38

On pose : $a = -1 + i\sqrt{3}$

1) Déterminer une forme trigonométrique de a.

2) Déterminer le nombre complexe b tel que :

$$ab = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

3) En déduire les valeurs de : $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$.

EXERCICE 39

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $z_n = \frac{1}{2}\left[(1+i)^n + (1-i)^n\right]$

Montrer que : $z_n = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$

EXERCICE 40

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \left(i - \sqrt{3}\right)\left[\left(1-\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}-1\right)i\right]$$

$$Z_2 = \frac{2+\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}+3\right)i}{\sqrt{2}-2+\left(\sqrt{2}-2\right)i}$$

$$Z_3 = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3} - \frac{1-2\sqrt{3}}{2}i\right)^{2018}$$

EXERCICE 41

Soit $z = x + iy$ un élément de $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que : $\arg z \equiv 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{|z| + x}\right) \ [2\pi]$

EXERCICE 42

1) On considère le nombre complexe :

$$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Montrer que : $\arg z + \arg(z-1) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

2) On considère le nombre : $A = x + i\sqrt{2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer la valeur de réel x pour laquelle :

$$\arg A + \arg(A-1) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

NOTATION EXPONENTIELLE

EXERCICE 43

1) Donner la forme algébrique des nombres suivants :

$$a = 4e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad ; \quad c = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

2) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2018 \ ; \ z_2 = -15 \ ; \ z_3 = 9i \ ; \ z_4 = -\frac{i}{\sqrt{5}}$$

$$z_5 = -4 + 4i \ ; \ z_6 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^7 \ ; \ z_7 = \frac{5\sqrt{2}}{1-i}$$

$$z_8 = -\left(\sqrt{3} - i\right)^{2017} \ ; \ z_9 = \frac{i}{\left(\sqrt{6} + i\sqrt{2}\right)^2}$$

$$z_{10} = e^{-i\frac{3\pi}{2}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} \ ; \ z_{11} = \frac{e^{-i\pi}}{\left(e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^5}$$

3) a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -7\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ et } z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times z_1^2$$

b) En déduire la forme algébrique du nombre z_2.

EXERCICE 44

Les questions sont indépendantes.

1) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, construire les points suivants :

$$A(e^{i\frac{\pi}{4}}) \ ; \ B(-3e^{i\frac{\pi}{4}}) \ ; \ C(2e^{-i\frac{5\pi}{6}}) \ ; \ D(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})$$

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = ie^{i\theta} \ ; \ z_2 = -3ie^{i\theta} \ ; \ z_3 = -5e^{i\theta}$$

3) Linéariser les expressions suivantes :

$$A(x) = \sin^2(x)\cos^4(x) \ ; \ B(x) = \sin^6(x)$$

$$C(x) = \sin^3(x)\cos^3(x) \ ; \ D(x) = \cos^6(x)$$

EXERCICE 45

Pour tout réel $\theta \in]0;2\pi[$, on pose : $G(\theta)=\dfrac{i\left(1-e^{i\theta}\right)}{\sqrt{3}\,e^{i\theta}}$

1) Montrer que : $G(\theta)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right).e^{-i\frac{\theta}{2}}$

2) Calculer : $\left(G\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)^{12}$.

EXERCICE 46

Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z)\neq 2$, on pose :

$$F(z)=\frac{4-z.\overline{z}}{4-z-\overline{z}}$$

Montrer que : $|F(z)-z|=|F(z)-2|$

EXERCICE 47

Pour tout $z\in\mathbb{C}-\{i\}$, on pose : $f(z)=\dfrac{z+i}{1+iz}$

Montrer que : $\operatorname{Re}(f(z))=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)=\dfrac{|1+iz|^2}{4}$

EXERCICE 48

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on pose : $z=\sin(2\theta)-2i\cos^2\theta$

1) On suppose dans cette question que : $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

Déterminer le module et un argument de z.

2) On suppose dans cette question que : $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$

Écrire z sous forme exponentielle.

EXERCICE 49

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $z_n=\dfrac{1}{2}\left((1+i)^n+(i-1)^n\right)$

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ z_n=2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)e^{i\frac{n\pi}{2}}$

2) Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer que : $z_{2p}\in\mathbb{R}$ et $z_{2p+1}\in i\mathbb{R}$

EXERCICE 50

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3=\overline{z}$

EXERCICE 51

Soit θ un réel tel que $\theta\not\equiv\pi\,[2\pi]$, et soit $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$.

1) Montrer que : $\dfrac{1+it}{1-it}=e^{i\theta}$.

2) a) Montrer que : $\dfrac{1+it}{1-it}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+i\dfrac{2t}{1+t^2}$.

b) En déduire l'expression de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de t.

EXERCICE 52

Soit α, β et γ trois réels tels que :

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0\end{cases}$$

Montrer que : $\begin{cases}\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)+\cos(2\gamma)=0\\ \sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)=0\end{cases}$

EXERCICE 53

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_0=\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{5}}\quad;\quad z_1=\frac{3}{2}e^{i\frac{19\pi}{30}}\quad;\quad z_2=\frac{3}{2}e^{i\frac{23\pi}{15}}$$

On pose : $u=z_0.z_1$ et $v=\dfrac{z_2}{z_0}$

1) a) Montrer que : $2u=-\sqrt{3}+i$ et $2v=-1-i\sqrt{3}$

b) Calculer : u^6+v^6

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, On considère les points $A(u)$, $B(v)$ et $C(t)$ avec : $t=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+i\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

Calculer BC et une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

EXERCICE 54

Soit $\omega=e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Calculer les nombres :

$$A=\omega+\omega^2+\omega^4\quad\text{et}\quad B=\omega^3+\omega^5+\omega^6$$

<u>Indication :</u>

On pourra commencer à calculer $A+B$ et AB.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

EXERCICE 55

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(E_1) : $z^2-(3+2i)z+5+i=0$

(E_2) : $(-4-2i)z^2+(7-i)z+1+3i=0$

(E_3) : $z^4+z^2+1=0$

(E_4) : $z^2-\left(\sqrt{3}-i\right)z+2\left(1-i\sqrt{3}\right)=0$

(E_5) : $z^2-(4-i)z+5-5i=0$

(E_6) : $z^4+(3-6i)z^2+2(16-63i)=0$

EXERCICE 56

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E): z^3+(1+i)z^2+(-1+i)z-i=0$$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pur z_0.

2) Déterminer les nombres complexes b et c tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$z^3+(1+i)z^2+(-1+i)z-i=(z-z_0)(z^2+bz+c)$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

EXERCICE 57

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3+(2i-11)z^2+(25-19i)z-8(1-3i)=0$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

EXERCICE 58

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E): z^2-(3-4i)z-1+7i=0$$

2) Soit A et C les images des solutions de (E) dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé. Déterminer les affixes des points B et D du plan $\mathscr{P}$ pour lesquels $ABCD$ est un carré de diamètre $[AC]$.

EXERCICE 59

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E): iz^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2-4\left(-\sqrt{3}+i\right)z+8i=0$$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_0.

2) Déterminer les nombres complexes b et c tel que pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$z^3+(1+i)z^2+(-1+i)z-i=(z-z_0)(z^2+bz+c)$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

EXERCICE 60

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3-(2+3i)z^2+(4+6i)z-8=0$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

2) Soit A, B et C les images des solutions de (E) dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

EXERCICE 61

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E): \frac{1}{2}z^2+2z\cos(2\theta)+1+2\cos(4\theta)=0$$

1) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles (E) deux solutions réelles.

2) Résoudre l'équation (E) lorsque $\theta=-\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 62

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} z_1+z_2=4 \\ z_1\times z_2=7-4i \end{cases} \quad ; \quad (S_2): \begin{cases} z_1+z_2=-2+i \\ z_1\times z_2=9+13i \end{cases}$$

EXERCICE 63

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$

Puis écrire les solutions sous forme trigonométrique.

EXERCICE 64

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1):\ 2z^2-2(1+\cos\theta)z+1+\cos\theta=0$$

$$(E_2):\ z^2\cos^2\theta-2z\cos^2\theta+1=0$$

$$(E_3):\ z^2\tan^2\theta-2z\tan^3\theta+1+\tan^4\theta=0$$

$$(E_4):z^2-2ze^{i\theta}+2i\sin(\theta)e^{i\theta}=0$$

EXERCICE 65

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$z^2-\left[4+\left(1+\sqrt{2}\right)i\right]z+4\sqrt{2}i-\sqrt{2}=0$$

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pur qu'on déterminera.

2) En déduire l'autre solution de l'équation (E).

EXERCICE 66

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^2+8\left|z^2\right|-3=0$

Puis écrire les solutions sous forme trigonométrique.

EXERCICE 67

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E):z^3+(4\cos\theta-2)z^2+(4-8\cos\theta)z-8=0$$

où θ un réel de l'intervalle $]0;\pi[$.

1) a) Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle indépendante de θ.

b) Écrire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, les points suivants :

$$A(2)\quad;\quad B\left(-2e^{-i\theta}\right)\quad;\quad C\left(-2e^{i\theta}\right)$$

a) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle ABC est un triangle équilatéral direct.

c) Déterminer z_E et z_F, affixes des points E et F respectivement, milieux des segments $[AB]$ et $[A$

d) Montrer que $\frac{z_E}{z_F}\times\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A}\in\mathbb{R}$ et en déduire les points A, O, E et F sont cocycliques.

TRANSFORMATIONS USUELLES DU PLAN

EXERCICE 68

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthono direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Déterminer la représentation complexe de chacune des transformations suivantes :

1) La translation du vecteur $\vec{u}\left(3-\frac{2}{7}i\right)$.

2) La translation transformant le point $A(3-4i)$ en le point $B(-7+8i)$.

3) L'homothétie de centre $\Omega(2-i)$ et de rapport -3.

4) L'homothétie de centre $\Omega(-3i)$ et transformant le point $A(-3)$ en le point $B(-4+i)$.

5) La rotation de centre $\Omega(-3)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

6) La rotation de centre $\Omega(-2-i)$ et transformant le point $A(-1-2i)$ en le point $B(-1)$.

EXERCICE 69

Déterminer la nature de chacune des transformations suivantes puis donner ses caractéristiques :

1) $z'=z-3i$; 2) $z'=1-i-z$; 3) $z'=-3z+$

4) $z'+2i=-3(z+2i)$; 5) $z'+3i=(1-i)(z+3i$

6) $z'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}z$; 7) $z'+1+i=-2e^{i\frac{2\pi}{3}}(z+1+i)$

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 70

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E): \frac{1}{2}z^3 - (1+i)z^2 + 2(1+i)z - 4i = 0$$

1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points :

$$A(1+i\sqrt{3}) \quad ; \quad B(1-i\sqrt{3}) \quad ; \quad C(2i)$$

a) Montrer que : $OA = OB$.

b) Soit D le milieu du segment $[AC]$.

Déterminer l'affixe du point D et une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OD}}\right)$.

c) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

3) Soit O' l'image de point O par la rotation R_1 de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et B' l'image de point B par la rotation R_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les affixes des points O' et B'.

b) Soit I le milieu du segment $[OB]$. Montrer que (AI) est une hauteur du triangle $AO'B'$.

EXERCICE 71

Soit les nombres : $a = 3i$ et $b = \sqrt{2}(1+i)+i$

Et on considère dans le plan complexe les points :

$$A(a) \; ; \; B(b) \; ; \; C(a+b-i) \; ; \; E(i)$$

Montrer que $EBCA$ est un losange et que :

$$\arg\left(1+\frac{a-i}{b-i}\right) \equiv \frac{3\pi}{8} \; [2\pi]$$

EXERCICE 72

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2i \quad ; \quad b = -1+i\sqrt{3} \quad ; \quad c = \sqrt{3}+i$$

1) a) Vérifier que le point O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G.

2) On considère le point H d'affixe : $h = (\sqrt{3}-1)(1+i)$

a) Calculer $\arg\left(\frac{c-b}{h-a}\right)$ et $\arg\left(\frac{c-a}{h-b}\right)$.

b) En déduire que H est l'orthocentre de ABC.

3) Montrer que les points O, G et H sont alignés.

EXERCICE 73

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) = z^6 - 12z^4 + 36z^2 - 81$$

1) a) Déterminer les nombres α et β tels que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \; P(z) = (z^2-9)(z^4+\alpha z^2+\beta)$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): P(z) = 0$

c) Vérifier que les solutions de (E) sont les nombres complexes z_k tels que :

$$\begin{cases} z_k = 3\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) \\ k \in \{0;1;2;3;4;5\} \end{cases}$$

2) Pour tout $k \in \{0;1;2;3;4;5\}$, on pose :

$$u_k = 2i\left(z_k - 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right)$$

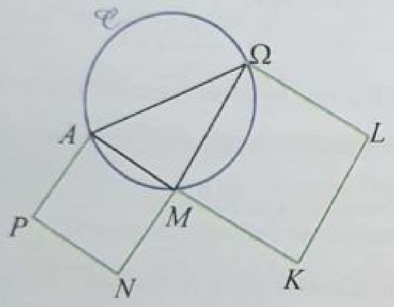
Montrer que les nombres u_k sont des termes successifs d'une suite géométrique puis calculer $u_1 + u_2 + \ldots + u_5$.

EXERCICE 74

Dans le plan orienté, on considère deux points fixes et distincts A et Ω, et le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[A\Omega]$.

Soit M un point parcourant le cercle $\mathscr{C}$ et différent des points A et Ω.

On considère deux carrés directs $MAPN$ et $MKL\Omega$.



On munit le plan d'un repère orthonormé de telle sorte que 0 et 1 soient les affixes respectives de Ω et A.

On note k, ℓ, m, n et p respectivement les affixes des points K, L, M, N et P.

1) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{C}$: $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

2) Montrer que : $\ell = im$; $p = -im + 1 + i$

$$n = (1-i)m + i \quad ; \quad k = (1+i)m$$

3) a) Montrer que le milieu I du segment $[PL]$ ne dépend pas de la position du point M.

b) Montrer que $I \in \mathscr{C}$ et déterminer sa position.

4) a) Calculer KN et montrer qu'elle est constante.

b) Quelle est la nature du triangle INK ?

5) Montrer que le point N appartient à un cercle fixe (indépendamment de point M) dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICE 75

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ tel que : $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Déterminer selon les valeurs de θ, une forme trigonométrique du nombre complexe : $t = z - e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z}$

EXERCICE 76

Soit z et z' deux complexes.

1) Montrer que : $|z.z'|^2 - z.\overline{z'} - \overline{z}.z' + 1 = |z.\overline{z'} - 1|^2$

2) Montrer les inégalités suivantes :

$$|z + z'|^2 \le \left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |z'|^2\right)$$

$$2\,\mathrm{Re}(\overline{z}.z') \le |z|^2 + |z'|^2$$

$$1 + |z.z' - 1| \le \left(1 + |z - 1|\right)\left(1 + |z' - 1|\right)$$

3) On suppose dans cette question que : $|z| = |z'| = 1$

a) Montrer que : $\dfrac{(z + z')^2}{z.z'} = z.\overline{z'} + \overline{z}.z' + 2$

b) En déduire que $\dfrac{(z + z')^2}{z.z'}$ est un réel positif.

4) On suppose dans cette question que :

$$|z| \ge 1 \quad \text{et} \quad |z'| \ge 1 \quad \text{et} \quad |z + z'| \le 1$$

Montrer que : $\left|z^2 + z'^2\right| > 1$

EXERCICE 77

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on pose : $f(z) = z + \dfrac{4}{z}$

1) Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation :

$$(E) : f(z) = -2 \quad \text{avec} \quad \mathrm{Im}\, z_1 > \mathrm{Im}\, z_2$$

2) a) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Montrer que : $z_1^{2016} + z_2^{2016} = 2^{2017}$

3) On munit le plan complexe $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points :

$$A(\alpha) \quad ; \quad B(z_1) \quad ; \quad C(z_2) \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}^+$$

a) Déterminer α pour que ABC soit équilatéral.

b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow (z - \overline{z})(z.\overline{z} - 4) = 0$$

c) En déduire Γ, ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $f(z)$ est réel.

d) Vérifier que les points A, B et C appartiennent à Γ.

EXERCICE 78

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On dit qu'un triangle équilatéral ABC est direct si et seulement si : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On pose : $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1) a) Vérifier que 1, j et j^2 sont solutions de $z^3=1$.

b) Calculer $(1-j)(1+j+j^2)$ et en déduire que $1+j+j^2=0$.

c) Vérifier que : $e^{i\frac{\pi}{3}}+j^2=0$.

2) Dans le plan complexe, on considère trois points A, B et C, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c.

a) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si : $\frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) En utilisant les résultats des questions précedentes, montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si : $a+bj+cj^2=0$.

3) À tout nombre complexe z différent de 1, on associe les points R, M, M' d'affixes respectives 1, z et $\overline{z}$.

a) Pour quelle valeurs de z, les points M et M' sont-ils distincts ?

b) En supposant que la condition précédente est réalisée, montrer que l'ensemble Δ des points M d'affixe z tel que RMM' soit équilatéral direct est une droite privée d'un point.

EXERCICE 79

Pour tout $\theta\in[0;\pi[$, on pose : $f(\theta)=\frac{ie^{i\theta}-1}{\left(e^{i\theta}+1\right)^2}$

1) Montrer que : $\overline{f(\theta)}=ie^{i\theta}f(\theta)$

2) Déterminer θ sachant que : $f(\theta)+\overline{f(\theta)}=0$

3) Écrire $f(\theta)$ sous forme exponentielle.

EXERCICE 80

Soit a un nombre complexe différent de i et $-i$.

On considère l'équation (E) suivante :

$$(E):(1-i)z^2-2(a+1)z+(1+i)(1+a^2)=0$$

1) Résoudre l'équation (E).

On considère les nombres $\alpha=a+i$ et $\beta=1+ai$ et le s points : $A(a)$; $B(\beta)$; $C(\alpha)$

2) On suppose dans cette question que : $a=e^{i\theta}$

Écrire α et β sous forme trigonométrique.

3) a) Montrer que : $\frac{\alpha}{\beta}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow|a|=1$

b) Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels les points O, B et C sont alignés.

4) On suppose dans cette question que :

$$|a|=1 \quad\text{et}\quad a^2+a(2i-1)-1\neq 0$$

a) Montrer que : $\frac{\alpha^2}{a}\in i\mathbb{R}^*$

b) Montrer qu'il existe un unique nombre complexe ω tel que : $\frac{\alpha^2-\omega}{a-\omega}=i$ et $\omega\neq 0$

c) On considère les points : $\Omega(\omega)$ et $D(\alpha^2)$

Montrer que O, Ω, D et A sont cocycliques.

d) Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au quadrilatère ΩDAO. Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que $R(A)=D$ et en déduire le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 81

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$\left(z-e^{ix}\right)\left(z-e^{-ix}\right)=z^2-2z\cos x+1$$

2) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$z^5-1=(z-1)\left(z^2-2z\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{4\pi}{5}+1\right)$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5-1=0$ puis en déduire les valeurs de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Les parties A) , B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

Soit m un nombre complexe non nul.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : z^2 - (3m-2i)z + 2m^2 - 4mi = 0$$

1) Résoudre l'équation (E).

2) Dans cette question, on prend $m = 1+i$; et soit z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que $|z_1| < |z_2|$.

a) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Vérifier que $(-z_1)$ est une racine cubique de z_2 ; puis en déduire la forme algébrique pour les deux autres racines cubiques de z_2.

3) Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points :

$$A(i) \quad ; \quad B(2m) \quad ; \quad C(m-2i)$$

et on suppose que $m \notin i\mathbb{R}$.

a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) À l'extérieur du triangle ABC, on construit le point D de telle sorte que le triangle BCD soit rectangle et isocèle en D ; et soit d l'affixe du D. Montrer que :

$$d = \frac{3m - im + 2 - 2i}{2} \text{ ou } d = \frac{3m + im + 2 - 2i}{2}$$

c) Déterminer la valeur de m pour laquelle le quadrilatère $ABDC$ est un carré.

Partie B :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, on considère les points $I(i)$ et $I'(-i)$; et soit f l'application définie de $\mathbb{C} - \{i\}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = \frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$$

Et soit F l'application définie de $\mathcal{P} - \{I\}$ dans $\mathcal{P}$, et qui associe à chaque point $M(z)$ le point $M'(z')$ où $z' = f(z)$.

1) Soit $z \in \mathbb{C}^* - \{i\}$.

a) Établir les relations suivantes :

$$|z'| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(z') \equiv -\arg(z) + 2\arg(z-i) [\ldots$$

b) Montrer que si $|z| = 1$ alors : $f(z) = -i$

2) a) Déterminer l'ensemble des points invariant par F.

b) Quel est l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $f(z)$ est imaginaire pur ?

3) a) Montrer les égalités suivantes :

$$z' + i = \frac{z.\bar{z} - 1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i) \quad \text{et} \quad z' - z = \frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$$

b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M'}$ sont colinéaires, et que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux.

c) Donner une méthode pour la construction géométrique de l'image de M par l'application F.

Partie C :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$$

1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points :

$$A(i) \quad ; \quad B(2+3i) \quad ; \quad C(2-3i)$$

a) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point $A' = r(A)$.

b) Montrer que les points A', B et C sont alignés.

c) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B et qui transforme le point C en A'.

d) Vérifier que $h^{-1} o\, r(A) = C$ puis déterminer l'écriture complexe de l'application $h^{-1} o\, r$.

DEVOIR 2

Les parties A) , B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2$; $b = 1-i$; $c = 1+i$.

1) Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

2) Soit r la rotation de centre A et transformant le point B en C.

a) Déterminer l'angle de r puis montrer que $z' = -iz + 2 + 2i$ est l'écriture complexe de r.

b) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[BC]$.

Déterminer $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par la rotation r puis vérifier que $\mathscr{C}'$ passe par le point C.

3) Soit $M(z)$ un point du $\mathscr{C}$ différent de C, et $M'(z')$ son image par la rotation r.

a) Montrer qu'il existe $\theta \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$ puis en déduire que : $z' = 2 + i - ie^{i\theta}$

b) Montrer que : $\dfrac{z'-c}{z-c} = \dfrac{2\cos\theta}{\left|e^{i\theta} - i\right|^2}$ et en déduire que les points M , C et M' sont alignés.

c) Construire A, B, C, $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, M et M' dans le cas où $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

Partie B :

Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, on pose : $f(z) = \dfrac{iz}{z-1}$

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (E)

a) Résoudre l'équation (E).

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $|z_1| = 1$.

b) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

c) Calculer $z_1^3 + z_2^6$.

Partie C :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(a)$ et $B(1)$ où $a \in \mathbb{C} - \{1\}$. Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P} - \{B\} &\to \mathscr{P} \\ M(z) &\mapsto M'(z') \end{aligned}$$

telle que : $z' = \dfrac{z-a}{z-1}$

1) Montrer que : $z' = z \Leftrightarrow z^2 - 2z + a = 0$

2) On suppose que : $a = 1 + e^{i\theta \ln 2}$ avec $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$.

a) Résoudre l'équation : $z^2 - 2z + a = 0$.

b) Écrire le nombre $Z = 1 + e^{i\left(\frac{\theta}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{2}\right)}$ sous forme trigonométrique. *On pourra remarquer que :*

$$1 + e^{iu} = e^{i\frac{u}{2}}\left(e^{i\frac{u}{2}} + e^{-i\frac{u}{2}}\right)$$

3) On suppose dans cette question que $a = -1$.

a) Montrer que pour tout point $M \in \mathscr{P} - \{B\}$:

$$\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{BM'}}\right) \equiv 0 \ [2\pi]$$

b) En déduire que $[BA)$ est une bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}}\right)$.

c) En déduire que : $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$

d) Soit M un point du cercle trigonométrique différent de B.

En déduire de ce qui précède une construction de M' image de M par l'application f.

DEVOIR 3

Les parties A), B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : z^3 - \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)z - (1+i) = 0$$

1) Vérifier que les racines cubiques de l'unité sont :

1 et j et $\overline{j}$. (On rappelle que : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$)

2) Déterminer deux nombres complexes u et v vérifiant le système : $(S) : \begin{cases} u+v = 1+i \\ u.v = i \end{cases}$

3) Soit α et β deux nombres complexes telles que $\alpha+\beta$ est solution de (E) et $\alpha\beta = -i.j$.

a) Montrer que α^3 et β^3 vérifient le système (S).

b) En déduire que les solutions de (E) s'écrivent :

$1-i.j$ et $j\left(1-i.\overline{j}\right)$ et $\overline{j}(1-i)$

4) Soit θ un élément de l'intervalle $]0;2\pi[$.

a) Déterminer, en fonction de θ, le module et l'argument du nombre complexe $1-(\cos\theta + i\sin\theta)$.

b) Déterminer le module et l'argument de chacune des solutions de l'équation (E).

Partie B :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On considère l'application f_α définie de $\mathbb{C}-\{\alpha\}$ dans $\mathbb{C}-\{\alpha\}$ par : $f_\alpha(z) = \frac{\alpha z}{z-\alpha}$.

1) Montrer que :

$$f_\alpha(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 \operatorname{Re}(\alpha) = |\alpha|^2 \operatorname{Re}(z)$$

2) Pour tout $z \in \mathbb{C}-\{\alpha\}$, on pose :

$|z-\alpha| = r$ et $\arg(z-\alpha) \equiv \theta\ [2\pi]$

a) Calculer $|f_\alpha(z)-\alpha|$ en fonction de r et $|\alpha|$.

b) Calculer $\arg\left(f_\alpha(z)-\alpha\right)$ en fonction de θ et $\arg\alpha$.

3) On prend dans cette question $\alpha = -1+i$, et on considère dans le plan complexe $\mathcal{P}$ les ensembles :

$$\mathcal{D} = \left\{ M(z) \,/\, \arg\left(f_\alpha(z)-\alpha\right) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ M(z) \,/\, |f_\alpha(z)-\alpha| = 2 \right\}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ M(z) \,/\, f_\alpha(z) \in i\mathbb{R} \right\}$$

a) Déterminer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$.

b) Montrer que $\mathcal{D}$ est une demi-droite d'extrémité $A(\alpha)$ privée du point A, dont on déterminera une équation cartésienne.

c) Soit $z_0 \in \mathbb{C}-\{\alpha\}$ et $B(z_0)$ tel que $B \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$.

Écrire $f_\alpha(z_0)$ sous forme algébrique puis déterminer z_0.

d) Construire $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$.

4) On considère l'application φ qui, à chaque point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (-1+i)z - 1 + 3i$$

a) Montrer que φ est la composée d'une homothétie et d'une rotation à déterminer.

b) Déterminer les images de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ par φ.

Partie C :

Soit x un nombre réel tel que : $x \not\equiv 0\ [2\pi]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = 1 + e^{ix} + \ldots + e^{inx}$.

1) Montrer que : $(\forall \theta \in \mathbb{R})\ 1-e^{i\theta} = \left(-2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$

3) En déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n = \frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.e^{i\frac{nx}{2}}$$

4) On prend dans cette question : $x = \frac{\pi}{n}$ avec $n \geq 2$.

On pose : $A_n = \sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

a) Vérifier que : $S_{n-1} = A_n + iB_n$.

b) En déduire que $B_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

DEVOIR 4

Les parties A), B) , C) et D) sont indépendantes.

Partie A :

Soit les nombres complexes suivants :

$$z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z' = 1 - i$$

1) a) Mettre sous forme trigonométrique :

$$z \quad ; \quad z' \quad ; \quad Z = \frac{z}{z'}$$

b) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\sin x = 2$$

Résoudre cette équation puis placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Partie B :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points :

$$A(1) \quad \text{et} \quad M(z)$$

où : $z = e^{ix}$ avec $x \in \left]-\pi;\pi\right]$.

On désigne par P le point du plan d'affixe $1 + z$ et par Q celui d'affixe z^2.

1) a) À partir du point M, donner une construction géométrique de P et Q.

b) Placer les points O, A, P et Q sur un même figure.

2) Déterminer l'ensemble des points P lorsque x décrit l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$. Représenter cet ensemble.

3) Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$, où z désigne toujours l'affixe du point M.

a) Construire S en justifiant la construction.

b) Dans le cas où S est différent du point O, tracer la droite (OS). Quelle conjecture peut-on faire sur la position du point M ?

c) Démontrer que : $\left(\forall x \in \left]-\pi;\pi\right]\right) \quad \frac{1+z+z^2}{z} \in \mathbb{R}$

Conclure sur la conjecture précédente.

Partie C :

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Soit $\Gamma(O;R)$ le cercle de centre O et de rayon R, et A le point de coordonnées $A(R;0)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la rotation $r\left(O;\frac{2\pi}{n}\right)$ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

On construit une suite de points par récurrence :

$$\begin{cases} M_0 = A \\ M_{k+1} = r(M_k) \ ; \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Si z_k est l'affixe de M_k et z_{k+1} est l'affixe de M_{k+1},

Montrer par récurrence que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad z_k = R.e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

2) Calculer la distance $M_k M_{k+1}$.

Pour $n = 8$, construire les points M_k.

3) On pose : $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$.

Calculer $\lim_{n\to+\infty} L_n$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Partie D :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$z^3 - i(1 + 2\tan\theta)z^2 - (1 + \tan\theta)^2 z + i\left(1 + \tan^2\theta\right) = 0$$

où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pur indépendante de θ à déterminer.

2) Déterminer les deux autres solutions.

On note a et b ces solutions avec $\text{Re}(a) > 0$.

3) Donner le module et l'argument de a en fonction de θ.

4) Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et qui transforme le point $M(\tan\theta)$ en le point $B(b)$.

Déterminer l'écriture complexe de la rotation R , ainsi le centre $\Omega(\omega)$ de cette rotation.

5) Déterminer la valeur de θ pour laquelle les points $\Omega(\omega)$, $M(\tan\theta)$, $A(a)$ et $B(b)$ soient cocycliques.

DEVOIR 5

Les parties A), B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

Pour tout $z \in \mathbb{C}-\{-1\}$, on pose : $f(z)=\dfrac{iz-1}{(z+1)^2}$.

1) a) Déterminer le réel y tel que : $f(iy)=iy$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): f(z)=z$.

On note z_0, z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que : $\mathrm{Re}(z_0)=0$ et $\mathrm{Re}(z_1)>\mathrm{Re}(z_2)$.

2) a) Vérifier que : $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ et $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$

b) En déduire la forme trigonométrique de z_1 et z_2.

3) Dans cette question, on suppose que :

$$z=e^{i\alpha} \quad \text{avec} \quad 0\le\alpha<\pi$$

a) Montrer que : $\overline{f(z)}=izf(z)$

b) Déterminer α sachant que : $f(z)+\overline{f(z)}=0$.

c) Écrire $f(z)$ sous forme exponentielle.

4) Déterminer z sachant que :

$$\begin{cases}|z|=1\\ \mathrm{Re}(f(z))=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Partie B :

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases}z_0=1\\ z_{n+1}=\left(\dfrac{3}{4}+i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n \quad \text{si } n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Et on note A_n l'image du nombre complexe z_n dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ avec : $\|\vec{u}\|=4cm$

1) a) Écrire sous forme exponentielle les nombres z_1 à z_6.

b) Placer les points A_0 à A_6 dans le repère.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $d_n=|z_{n+1}-z_n|$

a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_{n+1}-z_n)$$

b) En déduire une relation liant d_{n+1} et d_n pour $n\in\mathbb{N}$ puis exprimer d_n en fonction de n et d_0.

c) Donner une interprétation géométrique de chacun des nombres d_n.

d) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $L_n=\sum_{k=0}^{n}A_kA_{k+1}$, qui présente la longueur polygonale des sommets successifs A_0, A_1, ..., A_n.

Déterminer l'expression de L_n en fonction de n, et la limite de la suite (L_n) quand n tend vers $+\infty$.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $a_n\equiv\arg(z_n)\,[2\pi]$.

a) Établir une relation entre a_{n+1} et a_n.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $a_n\equiv\dfrac{n\pi}{6}\,[2\pi]$

c) pour quelles valeurs de l'entier n les points O, A_0 et A_n sont alignés ?

Partie C :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on pose : $P(z)=z^2-(2+6i)z$

1) Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}=\{M(z)\ /\ P(z)\in i\mathbb{R}\}$$
$$\mathscr{D}=\{M(z)\ /\ P(z)\in\mathbb{R}\}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z)=4-6i$.

3) On pose : $u=1+5i$; $v=1+i$; $w=239-i$.

Et : $\alpha=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{5}$ et $\beta=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{239}$.

a) Vérifier que : $u^4\times v=4w$

b) Déterminer en fonction de α un argument de u.

Déterminer en fonction de β un argument de w.

c) En déduire que :

$$4\mathrm{Arctan}\frac{1}{5}-\mathrm{Arctan}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E)\quad z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$$

a) Vérifier que Le nombre $a=1+i\left(2-\sqrt{3}\right)$ est une solution de l'équation (E).

b) En déduire b la deuxième solution de (E).

2) a) Montrer que : $a^2=4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) Écrire a sous forme trigonométrique.

3) On considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $c=2i+2e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

a) Déterminer ω l'affixe de Ω centre du cercle Γ.

b) Montrer que les points O et C appartiennent à Γ.

c) Montrer que le nombre $\dfrac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

Examen National 2010 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 2

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E):\ z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+4+4i\sqrt{3}=0$$

a) Vérifier que $\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$ est le discriminant de (E).

b) Déterminer a et b solutions de l'équation (E) (sachant que $b\in\mathbb{R}$).

c) Vérifier que : $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit A le point d'affixe a, et B le point d'affixe b.

a) Déterminer le nombre complexe b_1, affixe du point B_1, image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

c) Vérifier que : $\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

d) Soit C le point, d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit du triangle OAB et différent de O et A.

Déterminer un argument du nombre $\dfrac{c}{c-a}$.

Examen National 2015 (Session Normale)

PROBLÈME 3

Les parties A) et B) sont indépendantes.

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

<u>Partie A :</u>

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E):z^2-4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z+\frac{5}{3}+4i=0$$

1) a) Vérifier que le nombre complexe $z_1=1+\dfrac{2}{3}i$ est solution de l'équation (E).

b) Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est : $z_2=3z_1$.

2) Soit θ un argument du nombre z_1.

Écrire en fonction de θ une forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{5}{3}+4i$.

<u>Partie B :</u>

On considère trois points A, B et Ω, deux à deux différents d'affixes respectives a, b et ω.

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On pose :

$$P=r(A)\quad\text{et}\quad B=r(Q)$$

1) a) Montrer que :

$$p=\omega+e^{i\frac{\pi}{3}}(a-\omega)\quad\text{et}\quad q=\omega+e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-\omega)$$

b) Montrer que : $\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{\frac{4\pi i}{3}}$.

c) Montrer que : $\dfrac{p-a}{q-b} = \dfrac{\omega-a}{\omega-b} e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

2) On suppose que : $\dfrac{\omega-a}{\omega-b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

a) Montrer que $APQB$ est un parallélogramme.

b) Montrer que $\arg\left(\dfrac{b-a}{p-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ puis en déduire que $APQB$ est un rectangle.

Examen National 2012 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère deux points M_1 et M_2 du plan complexe tels que les points O, M_1 et M_2 soient deux à deux distincts et non alignés.

Soit z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2, et soit M le point d'affixe z vérifiant la relation :

$$z = \frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$$

1) a) Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z} \times \dfrac{z_2}{z_1} = -1$.

b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2.

2) Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe réel.

3) On suppose dans cette question que M_2 est l'image de M_1 par la rotation r de centre O et d'angle α tel que $\alpha \in]0;\pi[$.

a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et α.

b) En déduire que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.

4) Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0;\pi[$.

On suppose que z_1 et z_2 sont les racines de l'équation

$$6t^2 - \left(e^{i\theta}+1\right)t + \left(e^{i\theta}-1\right) = 0$$

a) Sans calculer z_1 et z_2, vérifier que : $z = 2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

b) Donner une écriture trigonométrique du nombre complexe z en fonction de θ.

Examen National 2016 (Session Normale)

PROBLÈME 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit θ un réel tel que : $\theta \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[- \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$(E) : z^2 - \sqrt{2}\, e^{i\theta} z + e^{2i\theta} = 0$$

a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est :

$$\Delta = \left(\sqrt{2}\, i e^{i\theta}\right)^2$$

b) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) On considère les points I, J, T_1, T_2 et A les points du plan d'affixes respectives 1, -1, $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$, $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$.

a) Montrer que les droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.

b) Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$.

Montrer que les points O, K et A sont alignés.

c) En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$.

3) Soit r la rotation de centre T_1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Donner l'écriture complexe de la rotation r.

b) Vérifier que l'affixe du point B, image du point I par la rotation r est : $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$

c) Montrer que $(IJ) \perp (AB)$.

d) Déterminer l'affixe du point C, image du point A par la translation de vecteur $(-\vec{v})$.

5) Montrer que A est le milieu du segment $[BC]$.

Examen National 2014 (Session Normale)

PROBLÈME 6

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$$

1) a) Vérifier que $(1-3i)^2$ est le discriminant de (E).

b) Déterminer z_1 et z_2, les racines de l'équation (E). (On prend z_1 imaginaire pur).

c) Montrer que : $\dfrac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points :

$$A(z_1) \quad \text{et} \quad B(z_2)$$

a) Déterminer le nombre complexe e, affixe du point E, milieu du segment $[AB]$.

b) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Et soit c l'affixe du point C, image du point E par la rotation r.

Montrer que : $c = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

c) Soit D le point d'affixe $d = 1 + \dfrac{3}{2}i$.

Montrer que le nombre $\left(\dfrac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\dfrac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)$

est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Examen National 2015 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application r qui à chaque point $M(z)$ du plan, associe le point $M_1(z_1)$ tel que :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

et l'application h qui à chaque point $M(z)$ du plan, associe le point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2 = -2z + 3i$

Et on pose : $F = h \circ r$

1) Déterminer la nature de chacune des applications r et h et déterminer les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

2) On considère les points $\Omega(i)$ et $A(a)$ où a est un nombre complexe différent de i. On pose :

$$B = F(A) \quad ; \quad C = F(B) \quad ; \quad D = F(C)$$

a) Montrer que si $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par l'application F est : $z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i)$

b) Vérifier que Ω est l'unique point invariant par l'application F (c'est-à-dire : $F(\Omega) = \Omega$)

3) a) Déterminer en fonction de nombre a, les nombres complexes b, c et d, affixes respectives des points B, C et D.

b) Montrer que les points Ω, A et D sont alignés.

c) Montrer que Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B;4);(C;2);(D;1)\}$.

d) Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point D appartienne à l'axe réel.

Examen National 2008 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 8

Les parties A) et B) sont indépendantes.

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$$

où a est un nombre complexe non nul donné.

1) Déterminer z_1 et z_2, les racines de l'équation (E).

2) a) Vérifier que : $z_1.z_2 = a^2(i-1)$.

b) Montrer que : $\arg a \equiv \frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow z_1 z_2 \in \mathbb{R}$.

Partie B :

Soit $c \in \mathbb{R}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$. On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectives 1, $1+i$, c, ic et z.

1) a) Montrer que les points A, M et D sont alignés si, et seulement si : $(ic+1)z+(ic-1)\overline{z}=2ic$

b) Montrer que :

$$(AD)\perp(OM) \Leftrightarrow (ic+1)z-(ic-1)\overline{z}=0$$

2) Soit H la projection orthogonale du point O sur la droite (AD), et soit h son affixe.

a) Montrer que : $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$.

b) En déduire que : $(CH)\perp(BH)$

Examen National 2012 (Session Normale)

PROBLÈME 9

Partie A :

Soit a un nombre complexe différent de 1.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E):\ 2z^2-2(a-1)z+(a-1)^2=0$$

1) Montrer que :

$$z_1=\frac{(a-1)}{2}(1+i) \quad \text{et} \quad z_2=\frac{(a-1)}{2}(1-i)$$

sont les solutions de l'équation (E).

2) On prend : $a=e^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$.

a) Montrer que : $a-1=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

b) En déduire une forme trigonométrique de chacune des solutions z_1 et z_2.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On suppose que $\operatorname{Re}(a)<0$ et on considère les points $A(a)$, $B(-i)$, $C(i)$ et $B'(1)$.

1) On note respectivement J et K, les milieux des segments $[AC]$ et $[AB]$.

Déterminer les affixes des points J et K.

2) Soit :

- r_1 la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- r_2 la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose $C'=r_1(C)$ et $A'=r_2(A)$, et on désigne par c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A'.

Montrer que : $a'=z_1$ et $c'=z_2$.

3) Calculer $\frac{a'-c'}{a-1}$ puis en déduire que la droite (AB') est une hauteur du triangle $A'B'C'$.

Examen National 2013 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 10

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que : $f(z)=\frac{1}{6}\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2\overline{z}\right]$

($\overline{z}$ étant le conjugué du nombre complexe z).

I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z)=0$.

II) On pose : $z_0=1$ et $z_{n+1}=f(z_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On désigne par u_n, le module du nombre z_n.

1) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\le u_{n+1}\le\frac{2}{3}u_n$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note M_k l'image du nombre z_k, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}OM_k=OM_0+OM_1+\ldots+OM_n$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad S_n\le 3$.

b) Montrer que la suite (S_n) est convergente.

(le calcul de la limite de (S_n) n'est pas demandé).

III) On pose : $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi;\pi]$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que : $f(z) = \frac{2}{3}r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2) Montrer que les points M_1 et M_2 et ... et M_n sont alignés. (n étant un entier naturel non nul).

Examen National 2006 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 11

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E): z^2 - \left(1+\sqrt{3}\right)(1+i)z + 4i = 0$$

1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = \left[\left(\sqrt{3}-1\right)(1-i)\right]^2$

b) Écrire sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixe respectives $a = 1+i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3}+i$.

a) Montrer que $\mathcal{D}$, ensemble des points $M(z)$ tels que $z = \frac{1}{2}a\overline{z}$, est une droite passant par B.

b) Soit M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z' tels que : $z' = a\overline{z} + b$ et $z \neq b$.

Montrer que : $\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \frac{2}{|z-b|^2}$.

c) En déduire que la droite $\mathcal{D}$ est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}\right)$.

Examen National 2016 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 12

Partie A :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + i = 0$

(On note a la solution telle que : $\mathrm{Re}(a) > 0$)

2) a) Déterminer le module et un argument de $1+a$.

b) En déduire que : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Vérifier que : $(1+a)(1-a) = 1+i$ puis en déduire une forme trigonométrique de $1-a$.

Partie B :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives a, $-a$, z et z'. On suppose de plus que : $zz' + i = 0$.

1) Soit N le point d'affixe $\overline{z}$ ($\overline{z}$ étant le conjugué de z).

Montrer que : $(ON) \perp (OM')$.

2) a) Montrer que : $z' - a = i\frac{z-a}{az}$.

b) Montrer que si $z \neq -a$ alors :

$$z' \neq -a \quad \text{et} \quad \frac{z'-a}{z'+a} = -\frac{z-a}{z+a}$$

3) On suppose que le points A, B et M sont non alignés. Montrer que le point M' appartient au cercle circonscrit du triangle ABM.

Examen National 2014 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 13

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E): (1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$$

où α est un réel de l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Soit z_0 une solution de (E). Montrer que : $|1+iz_0| = |1-iz_0|$ et en déduire que z_0 est réel.

2) a) Donner la forme trigonométrique du nombre complexe : $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

b) Soit z un nombre complexe. On pose $z = \tan\varphi$ avec φ un réel de l'intervalle I.

Montrer que l'équation (E) est équivalente à une équation (E') d'inconnue φ puis la résoudre.

c) Résoudre l'équation (E).

Extrait Bac 1998 (Session Normal)

ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{Z}$

HISTOIRE

Dans l'école pythagoricienne (Pythagore de Samos), à la deuxième moitié du VIème siècle avant J.-C., l'arithmétique était, avec la géométrie, l'astronomie et la musique, une des quatre sciences quantitatives ou mathématiques.
L'arithmétique modulaire est un ensemble de méthodes permettant la résolution de problèmes sur les nombres entiers. Ces méthodes dérivent de l'étude du reste obtenu par une division euclidienne.
En mathématiques appliquées, cette expression est d'un usage fréquent pour décrire les bases mathématiques de différents domaines de la théorie de l'information : cryptologie, théorie des codes et informatique.
De nombreux outils et algorithmes entrent dans ce champ d'étude. On y trouve les tests de primalités, la décomposition en produit de facteurs premiers, l'étude des polynômes,...etc.

Source : https://fr.wikipedia.org

FERMAT, PIERRE DE (1601-1665)

GAUSS, CARL FRIEDRICH (1777 – 1855)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Utiliser la décomposition en facteurs premiers pour déterminer le plus petit multiple commun et le plus grand diviseur commun de deux nombres ou plus.
- Utiliser la congruence modulo n dans des situations d'arithmétiques.
- Utiliser les théorèmes de Gauss, de Bézout et de Fermat dans des situations d'arithmétique.
- Utiliser l'algorithme d'Euclide dans la détermination du plus grand diviseur commun et des coefficients de Bézout ;
- Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $ax + by = c$.
- Écrire un nombre entier naturel dans un système de numération donné.
- Somme et produit de deux nombres dans un système de numération donné.

PLAN DU COURS

1 RAPPELS

A) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$:

1. Soit a, b, α et β des entiers relatifs tels que : $a = b\alpha + \beta$

Montrer que tout diviseur commun de a et b est un diviseur du nombre β.

2. Soit x et y deux entiers naturels.

a) Montrer que : $(7 / 4x+3y \text{ et } 7 / 7x+5y) \Rightarrow (7 / x \text{ et } 7 / y)$

b) Cas général : soit $(u;v;\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^4$ et d un diviseur commun des entiers $ux + vy$ et $\alpha x + \beta y$.

Montrer que si $|u\beta - v\alpha| = 1$ alors d est un diviseur commun de x et y.

B) Division euclidienne :

1. Déterminer les entiers naturels m sachant que les restes de la division euclidienne des nombres 21685 et 33509 par m sont respectivement 37 et 53.

2. Soit a et b deux entiers naturels vérifiant :

- Le reste de la division euclidienne de a par 11 est 2.
- Le reste de la division euclidienne de b par 11 est 7.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $a+b$ et $a-b$ par 11 puis en déduire le reste de la division euclidienne de $a^2 - b^2$ par 11.

3. Soit x un entier naturel tel que : $100^{100} = 13x + 35$

Déterminer, en fonction de x, le quotient et le reste de la division euclidienne du nombre 100^{100} par 13.

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^n - 1$ par 2^{n-1}.

C) Congruence modulo :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $9 / 7^{3n} - 1$.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre $(2792)^{2017}$ par 5.

3. Montrer que :

a) $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 3^{3n} \equiv 1 \ [13]$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est divisible par 13.

D) Plus grand commun diviseur - Plus petit commun multiple – Algorithme d'Euclide :

1. Déterminer tous les entiers naturels x tels que : $\begin{cases} x \wedge 144 = 18 \\ x < 144 \end{cases}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le plus grand commun diviseur des nombres $7^{n+2} - 7^n$ et $5^{n+2} - 5^n$.

3. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que :

$p \geq 3$ et le reste de la division euclidienne de p par 12 et par 18 est le même et égal à 3.

4. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer $138807 \wedge 52089$ puis simplifier le nombre : $\dfrac{138807}{52089}$

E) Nombres premiers – Théorème fondamental de l'arithmétique :

1. Montrer que 2017 est un nombre premier.

2. Soit a, b et c des nombres premiers positifs tels que : $a^3b^2c^2 + a^2b^2c + a = 1982$.

   a) Décomposer le nombre 1982 en produit de facteurs premiers.

   b) En déduire que $a = 2$ puis déterminer b et c.

3. Après avoir décomposé le nombre $17!$ en produit de facteurs premiers, quel est l'exposant du nombre 2 dans cette décomposition ?

2 NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

1. Montrer que : $1223 \wedge 717 = 1$.

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ (n^2+5n+7)\wedge(n+2) = 1$.

3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ (n^2+1)\wedge(n^2+2n+2) \in \{1;5\}$.

4. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{Z})\ 3(14n+3)-2(21n+4) = 1$.

   b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{Z})\ (14n+3)\wedge(21n+4) = 1$.

Si $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \wedge b = 1$, on dit que a et b sont premiers entre eux

3 THÉORÈME DE BEZOUT

A) Théorème de Bezout :

On considère les nombres : $a = 959$ et $b = 279$.

1. Vérifier que l'algorithme d'Euclide donne les divisions suivantes :

$$\begin{cases} a = bq_1 + r_1 & \text{avec } 0 < r_1 < b \\ b = r_1q_2 + r_2 & \text{avec } 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2q_3 + r_3 & \text{avec } 0 < r_3 < r_2 \\ r_2 = r_3q_4 + \delta & \text{avec } 0 < \delta < r_3 \\ r_3 = \delta q_5 & \text{avec } \delta = a \wedge b \end{cases}$$

On rappelle que $a \wedge b$ est le dernier reste non nul dans la méthode des divisions successives de a par b

   où r_1, r_2, r_3 et δ sont les restes successifs à déterminer.

2. Vérifier que : $r_1 = a - 3b$ et $r_2 = -2a + 7b$ et $r_3 = 7a - 24b$ et $\delta = -16a + 55b$.

3. a) Montrer qu'il existe un couple $(u;v)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $959u + 279v = 1$.

   b) Déduire de cette relation que $959 \wedge 279 = 1$.

4. En suivant la démarche précédente, déterminer deux entiers relatifs α et β tels que : $2160\alpha + 168\beta = 24$.

5. Soit n un entier naturel.

   a) Montrer que : $(n^4+3n^2+1)\wedge(n^3+2n) = 1$.

   b) Déterminer un couple (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $(n^4+3n^2+1)u + (n^3+2n)v = 1$.

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. On a : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \left[\left(\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 \right) ;\ au + bv = 1 \right]$
Ce résultat porte le nom de « Théorème de Bezout ».

B) Applications :

1ère application : Soit a et b deux entiers relatifs non nuls, et soit $\delta = a \wedge b$. On pose : $a = \delta\alpha$ et $b = \delta\beta$.

a) Vérifier que : $\alpha \wedge \beta = 1$.

b) En utilisant le théorème de Bezout, montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{N}^* \right) \quad (ax) \wedge (bx) = (a \wedge b)x$

2ème application : Soit a, b et c des entiers relatifs non nuls tels que $a \wedge b = 1$.

a) En utilisant le théorème de Bezout, montrer que : $\left(\forall y \in \mathbb{Z}^* \right) \quad a \wedge (by) = a \wedge y$

b) En déduire que : $\left(a \wedge b = 1 \text{ et } a \wedge c = 1 \right) \Rightarrow a \wedge (bc) = 1$

3ème application : Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que les nombres n et $n+1$ sont premiers entre eux.

b) Montrer que les nombres $n+2$ et $2n^2 + 4n + 1$ sont premiers entre eux.

4 THÉORÈME DE GAUSS

Soit a, b et c des entiers naturels.

1. A-t-on l'implication suivante : (a / bc et a ne divise pas b) $\Rightarrow a / c$? Justifier.
2. On suppose dans cette question que : $a \wedge b = 1$ et a / bc .

   En utilisant le théorème de Bezout, montrer que a / c.

   On a alors montré le résultat suivant :

   Pour tous a, b et c de $\mathbb{Z}^*$, on a : $\left(a / bc \text{ et } a \wedge b = 1 \right) \Rightarrow a / c$
   Ce résultat porte le nom de « Théorème de Gauss ».

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j} \right)$, on considère le point $A(a;b)$ où a et b sont deux entiers relatifs premiers entre eux.

   Montrer qu'il n'existe aucun point M du segment $[OA]$ différent de O et A et dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

5 ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES

A) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E) \ : \ 959x + 279y = 1$

1. Vérifier que le couple $(-16;55)$ est une solution particulière de l'équation (E).
2. Soit $(x;y)$ une solution de l'équation (E).

   a) Montrer que : $959(x+16) + 279(y-55) = 0$.

   b) En utilisant le théorème de Gauss, montrer que :

$$(\exists k \in \mathbb{Z})\ ;\ \begin{cases} x = -16 + 279k \\ y = 55 - 959k \end{cases}$$

c) Déterminer les solutions de l'équation (E).

3. Application : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la droite (Δ) d'équation $959x + 279y - 1 = 0$.

Montrer que la droite (Δ) passe par une infinité de points dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

B) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E')\ :\ 700x + 429y = 5$

1. Déterminer tous les couples $(\alpha;\beta)$ de $\mathbb{Z}^2$ tels que : $700\alpha + 429\beta = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E').

C) Soit a, b et c des entiers relatifs non nuls.

1. Montrer que l'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si, et seulement si, $a \wedge b$ divise c.
2. Est-ce que l'équation $26x + 65y = 20$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$? Justifier.

On vient a alors de montrer le résultat suivant :

> Toute équation dans $\mathbb{Z}^2$ de la forme $ax + by = c$ avec $(a;b;c) \in \mathbb{Z}^3$ est appelée une équation diophantienne. Cette équation admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si, et seulement si : $a \wedge b / c$.

6 NOMBRES PREMIERS

A) Soit a et b deux entiers relatifs, et p un nombre premier positif.

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{Z})\ \ (p / x \text{ ou } p \wedge x = 1)$.
2. En déduire que : $p / ab \Rightarrow (p / a \text{ ou } p / b)$.
3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ (p / a^n \Rightarrow p / a)$.

B) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = (4n)! - 1$

1. Montrer que le reste de la division euclidienne de a_n par 4 est 3.
2. Soit p un diviseur premier de a_n. Montrer que $p > n$.
3. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui s'écrivent sous la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

7 PETIT THÉORÈME DE FERMAT

A) Soit p un nombre premier positif.

1. Soit k un entier naturel tel que : $1 \leq k \leq p$.

a) Montrer que : $pC_{p-1}^{k-1} = kC_p^k$.

b) En utilisant le théorème de Gauss, montrer que : p / C_p^k.

> On rappelle que :
> $$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)....(p-k+1)}{k!}$$

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ (n+1)^p \equiv n^p + 1\ [p]$.

3. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ n^p \equiv n\ [p]$.

4. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que si p ne divise pas a alors : $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

On a ainsi montré le résultat suivant dit « Petit théorème de Fermat »

> Soit p un nombre premier et n un entier naturel.
> On a $n^p \equiv n\ [p]$ et, si p ne divise pas n, $n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

B) Applications :

1. Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre 33782^{240} par 17.

2. Soit p un nombre premier tel que : $p \geq 19$.

   Montrer que : $16320 / p^{16} - 1$.

3. Soit p et q deux nombres premiers distincts.

   a) Montrer que : $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1\ [pq]$.

   b) Montrer que si p et q ne divisent pas un entier relatif a alors : $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ [pq]$

8 SYSTÈMES DE NUMÉRATION

Le système de numération usuel utilise les numéros 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 et 9 et à l'aide desquels on peut représenter n'importe quel entier naturel selon la convention suivante : (à titre d'exemple)

Le nombre 139557 a été obtenu après la décomposition :

$$139557 = 10^5 + 3\times10^4 + 9\times10^3 + 5\times10^2 + 5\times10 + 7$$

Ce système familier n'est rien d'autre que le système de numération décimal .

<u>Écriture d'un nombre dans le système de numération à base 8 :</u>

Soit N le nombre qui s'écrit $N = 3386$ dans le système de numération décimal :

Écrivons N sous la forme $N = 8^n u_n + 8^{n-1} u_{n-1} + \ldots + 8u_1 + u_0$ où u_0, u_1,..., u_n sont des chiffres de 0 à 7 :

On a : $3386 = 8\times423 + 2 = 8(8\times52+7)+2 = 8^2\times52 + 8\times7 + 2 = 8^2\times(8\times6+4)+8\times7+2$

ce qui donne : $3386 = 8^3\times6 + 8^2\times4 + 8\times7 + 2$. On écrit alors : $3386 = \overline{6472}_{(8)}$

<u>Applications :</u>

1. Écrire dans le système à base 2 (appelé système binaire) les nombres suivantes : 8 ; 24 ; 35 ; 76

2. On considère le nombre $A = \overline{21837}_{(9)}$. Écrire le nombre A dans le système à base 5.

3. Sachant que $\overline{58}_{(a)} + \overline{72}_{(a)} = \overline{141}_{(a)}$, déterminer la base a puis calculer $\overline{58}_{(a)} \times \overline{72}_{(a)}$.

4. Soit $B = 435$ dans le système décimal.

   Déterminer la base b d'un système dans lequel le nombre B s'écrit : $B = \overline{1161}_{(b)}$

1 PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN

1.1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS

Définition 1

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

- Le plus grand commun diviseur de a et b, noté $a \wedge b$ ou $PGCD(a,b)$, est le plus grand des diviseurs positifs communs à a et b.
- Le plus petit commun multiple de a et b, noté $a \vee b$ ou $PPCM(a,b)$, est le plus petit des multiples strictement positifs communs à a et b.
- On convient que : $a \wedge 0 = |a|$ et $a \vee 0 = 0$

Exemples

$\begin{cases} 5 \wedge 15 = 5 \\ 5 \vee 15 = 15 \end{cases}$; $\begin{cases} (-7) \wedge 16 = 1 \\ (-7) \vee 16 = 112 \end{cases}$; $\begin{cases} 6 \wedge 9 = 3 \\ 6 \vee 9 = 18 \end{cases}$; $\begin{cases} 27 \wedge 41 = 1 \\ 27 \vee 41 = 1107 \end{cases}$; $\begin{cases} (-12) \wedge (-30) = 6 \\ (-12) \vee (-30) = 60 \end{cases}$

Remarques

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. Si $d = a \wedge b$ et $m = a \vee b$ alors :

- $d \geq 1$ et d / a et d / b
- $m \geq 1$ et a / m et b / m
- Pour tout $c \in \mathbb{N}^*$: $\left[(c / a \text{ et } c / b) \Rightarrow c / d\right]$ et $\left[(a / c \text{ et } b / c) \Rightarrow m / c\right]$
- Pour tout $c \in \mathbb{N}^*$: $\left[(c / a \text{ et } c / b) \Rightarrow c \leq d\right]$ et $\left[(a / c \text{ et } b / c) \Rightarrow m \leq c\right]$
- $|a| \wedge |b| = d$ et $a \wedge 1 = 1$ et $a \wedge a = a \wedge 0 = |a|$.
- $|a| \vee |b| = m$ et $a \vee 1 = |a|$ et $a \vee a = |a|$.

Proposition 1

Soit a, b et c des entiers relatifs non nuls et n un entier naturel. Alors :

1) $a \wedge b = b \wedge a$; 2) $a \vee b = b \vee a$; 3) $a / b \Leftrightarrow a \wedge b = |a| \Leftrightarrow a \vee b = |b|$

4) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$; 5) $(ca) \wedge (cb) = |c|(a \wedge b)$; 6) $\begin{cases} c / a \\ c / b \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{a}{c}\right) \wedge \left(\dfrac{b}{c}\right) = \dfrac{a \wedge b}{|c|}$

7) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$; 8) $(ca) \vee (cb) = |c|(a \vee b)$; 9) $\begin{cases} c / a \\ c / b \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{a}{c}\right) \vee \left(\dfrac{b}{c}\right) = \dfrac{a \vee b}{|c|}$

10) $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$; 11) $a^n \vee b^n = (a \vee b)^n$; 12) $(a \wedge b).(a \vee b) = |ab|$

Exemples

1) En utilisant les résultats de la proposition 1, on obtient :

- $7 \wedge 21 = 7$ et $7 \vee 21 = 21$ car $7 / 21$.
- $(32\times12)\wedge(32\times75) = 32\times(12\wedge75) = 32\times3\times(4\wedge25) = 32\times3\times1 = 96$.
- $(-324)\vee 288 = 36\times((-9)\vee8) = 36\times72 = 2592$

2) Montrons que si $(a;b;c;\alpha)\in\mathbb{Z}^4$ tel que $a = bc+\alpha$ alors : $a\wedge b = b\wedge\alpha$.

Posons $d_1 = a\wedge b$ et $d_2 = b\wedge\alpha$.

- On a d_1 / a et d_1 / b, donc, $d_1 / a-bc$, c'est-à-dire d_1 / α.

  Ainsi, d_1 / b et d_1 / α, donc d'après la remarque précédente, d_1 / d_2.

> **Très Important**
> Pour tout $(x;y)\in(\mathbb{N}^*)^2$:
> $(x/y \text{ et } y/x) \Leftrightarrow x = y$

- Inversement, d_2 / b et d_2 / α, donc, $d_2 / bc+\alpha$, c'est-à-dire d_1 / a. Ainsi, d_2 / a et d_2 / b, donc, d_2 / d_1.

  Puisque d_1 / d_2 et d_1 / d_2 alors $|d_1| = |d_2|$, et donc $d_1 = d_2$ puisque d_1 et d_2 sont des entiers naturels.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = n^2+5n$, $b_n = (4n+1)(n+5)$, $d_n = a_n\wedge b_n$, $m_n = a_n\vee b_n$

Calculons d_n et m_n en fonction de n.

- On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $a_n\wedge b_n = [n(n+5)]\wedge[(4n+1)(n+5)] = (n+5)[n\wedge(4n+1)]$

  Si d est un diviseur commun de n et $4n+1$, alors $d / (4n+1)-4n$, donc $d / 1$, et alors $d = 1$. Il s'ensuit

  donc que $n\wedge(4n+1) = 1$. Ainsi : $d_n = n+5$.

- Pour déterminer m_n en fonction de n, on peut suivre une des deux méthodes suivantes :
  - **1ère méthode :**

    On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $a_n\vee b_n = [n(n+5)]\vee[(4n+1)(n+5)] = (n+5)[n\vee(4n+1)]$

    Comme $n\wedge(4n+1) = 1$ alors $n\vee(4n+1) = n(4n+1)$. Ainsi : $m_n = n(n+5)(4n+1)$
  - **2ème méthode :**

    On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_n\vee b_n)\times(a_n\wedge b_n) = a_n\times b_n$. Par conséquent :

$$m_n = a_n\vee b_n = \frac{a_n\times b_n}{a_n\wedge b_n} = \frac{a_n\times b_n}{d_n} = \frac{n(4n+1)(n+5)^2}{n+5} = n(4n+1)(n+5).$$

Applications

1. Soit x et y deux entiers naturels non nuls. On pose : $a = 9x+4y$ et $b = 2x+y$.

   Montrer que : $a\wedge b = x\wedge y$.
2. Montrer que : $\left(\forall(a;b;c)\in(\mathbb{N}^*)^3\right)$ $a\wedge b = a\wedge(a^2bc+ac+b)$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = (25^n-1)(9^n-1)$ et $b_n = (5^n+1)(3^n+1)$

   Déterminer $a_n\wedge b_n$ et $a_n\vee b_n$ en fonction de n.

1.2. CALCUL PRATIQUE DU P.G.C.D : ALGORITHME D'EUCLIDE

Proposition 2

Soit $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Lorsque b ne divise pas a, le plus grand commun diviseur des entiers a et b est égal au dernier reste non nul obtenu grâce à l'algorithme d'Euclide.

Explication de l'algorithme d'Euclide :

On considère deux entiers $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

- On fait la division euclidienne de a par b : $a = bq_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < b_1$.
  - Si $r_1 = 0$, on arrête l'algorithme en déduisant que : $a \wedge b = b$
  - Si $r_1 \neq 0$, on continue.
- On fait la division euclidienne de b par r_1 : $b = r_1 q_2 + r_2$ avec $0 \leq r_2 < r_1$.
  - Si $r_2 = 0$, on arrête l'algorithme en déduisant que : $a \wedge b = r_1$
  - Si $r_2 \neq 0$, on continue.
- Etc.

Notons que le processus engagé va s'arrêter, car sinon, on construirait une suite d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est impossible. Il existe donc un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $r_p \neq 0$ et $r_{p+1} = 0$.

Par conséquent : $a \wedge b = r_p$

Exemple

Calculons $6468 \wedge 1547$ en appliquant l'algorithme d'Euclide :

$$6468 = 1547 \times 4 + 280$$
$$1547 = 280 \times 5 + 147$$
$$280 = 147 \times 1 + 113$$
$$147 = 133 \times 1 + 14$$
$$133 = 14 \times 9 + \boxed{7}$$
$$14 = 7 \times 2 + 0$$

Le dernier reste non nul dans l'algorithme est 7, ce qui permet de conclure que : $6468 \wedge 1547 = 7$

1.3. NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

Définition 2

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

On dit que a et b sont premiers entre eux si le seul diviseur positif commun à a et b est 1, c'est-à-dire si :

$$a \wedge b = 1$$

Exemples

1) Les nombres 12 et 35 sont premiers entre eux car : $12 \wedge 35 = 1$.

2) Les nombres 2018 et -625 sont premiers entre eux car : $2018 \wedge (-625) = 1$.

3) Les nombres -45 et -18 ne sont pas premiers entre eux car : $(-45) \wedge (-18) = 9$.

4) Deux entiers relatifs successifs et non nuls sont premiers entre eux car :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}) \quad n \wedge (n+1) = 1$$

5) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrons que : $(x^4 + 3x^2 + 3) \wedge (x^4 + 2x^2 + 1) = 1$

Posons $(x^4 + 3x^2 + 3) \wedge (x^4 + 2x^2 + 1) = d$. On a alors :

$$\begin{cases} d / x^4 + 3x^2 + 3 \\ d / x^4 + 2x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d / (x^4 + 3x^2 + 3) - (x^4 + 2x^2 + 1) \\ d / x^4 + 2x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d / x^2 + 2 \\ d / x^4 + 2x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d / x^2 (x^2 + 2) \\ d / x^4 + 2x^2 + 1 \end{cases}$$

Par conséquent : $d / x^4 + 2x^2 + 1 - x^2(x^2 + 2)$, c'est-à-dire : $d / 1$. Ainsi : $d = 1$

En définitive : $\quad (\forall x \in \mathbb{Z}) \quad (x^4 + 3x^2 + 3) \wedge (x^4 + 2x^2 + 1) = 1$

Applications

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{Z}) \quad (2x+1) \wedge (3x+1) = 1$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on pose : $d = (9x+4) \wedge (2x-1)$

   a) Montrer que : $d = 1$ ou $d = 17$

   b) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les entiers $9x + 4$ et $2x - 1$ sont premiers entre eux.

Théorème 1

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls, et d un entier naturel non nul.

Alors : $\quad d = a \wedge b \Leftrightarrow \left[(\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{Z}^2) \quad a = \alpha d \text{ et } b = \beta d \text{ et } \alpha \wedge \beta = 1 \right]$

Preuve

Supposons que $d = a \wedge b$. Comme d / a et d / b alors : $(\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{Z}^2) \ a = \alpha d$ et $b = \beta d$. Il s'ensuit

donc : $d = (\alpha d) \wedge (\beta d) = |d| (\alpha \wedge \beta)$. Par suite : $\alpha \wedge \beta = 1$ car $d \in \mathbb{N}^*$.

Inversement, supposons que : $(\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{Z}^2) \quad a = \alpha d$ et $b = \beta d$ et $\alpha \wedge \beta = 1$

On a alors : $a \wedge b = (\alpha d) \wedge (\beta d) = d(\alpha \wedge \beta) = d \times 1 = d$, d'où le résultat.

Théorème 2

Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$. On a l'implication : $\quad d = a \wedge b \Rightarrow \left[(\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2) \ d = au + bv \right]$

Preuve

- Quitte à remplacer a par $|a|$ et b par $|b|$, il suffit de traiter le cas où a et b sont des entiers naturels. On va démontrer l'existence de u et v par une récurrence sur $b \in \mathbb{N}^*$.
- Démontrons, par récurrence sur $b \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante :

$$H_b : \text{« Pour tout } a \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } (u;v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } au + bv = d \text{ »}$$

- Initialisation : H_1 est vraie car, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a : $a \times 1 + 1 \times (1 - a) = 1$. (Ici : $d = a \wedge 1 = 1$)
- Hérédité : Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $b - 1$. Soit $a \in \mathbb{N}^*$; notons $d = a \wedge b$.
  On effectue la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.
  D'après la proposition 2, on a donc $d = b \wedge r$ et la propriété H_r montre qu'il existe $(u';v') \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $bu' + rv' = d$.
  On a donc : $bu' + (a - bq)v' = d$, ce qui donne $au + bv = d$ avec $u = v'$ et $v = u' - qv'$.
- Conclusion : Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, il existe $(u;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = d$.

Remarques

- Le couple $(u;v)$ n'est pas unique. Par exemple :
  $9 \wedge 4 = 1 = 1 \times 9 - 2 \times 4$ $(u = 1$ et $v = -2)$; $9 \wedge 4 = (-43) \times 9 + 97 \times 4$ $(u = -43$ et $v = 97)$
- La réciproque du théorème 2 est incorrecte ; contre-exemple : $3 \times 5 + 7 \times (-1) = 8$ mais $3 \wedge 7 \neq 8$.

1.4. THÉORÈME DE BEZOUT

Théorème 3

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

Alors :
$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \left[\left(\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 \right) \ au + bv = 1 \right]$$

Preuve

Si $a \wedge b = 1$ alors d'après le théorème 2, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$.

Inversement, s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$, alors tout diviseur commun à a et b divise $au + bv$ donc est égal à 1 ou -1. On en déduit que a et b sont premiers entre eux, d'où le résultat.

Exemples

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n \wedge (n+1) = 1$ (car : $1 \times (n+1) - 1 \times n = 1$).

2) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $(n^2 + 2) \wedge (3n^2 + 5) = 1$ (car : $3(n^2 + 2) - 1(3n^2 + 5) = 1$).

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(4n + 3) \wedge (9n + 7) = 1$ (car : $-9(4n + 3) + 4(9n + 7) = 1$).

Applications

En utilisant le théorème de Bezout, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $(5n+3) \wedge (2n+1) = 1$; b) $(2n-1) \wedge (3-7n) = 1$; c) $(6n+3) \wedge (3n+1) = 1$

d) $(n+1) \wedge (2n^2-1) = 1$; e) $(2n(n+1)) \wedge (2n+1) = 1$; f) $(6n^2-n) \wedge (2n-1) = 1$

1.5. DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS DU THÉORÈME DE BEZOUT

L'inconvénient du théorème du Bezout, sous sa forme théorique, est qu'il ne fournit pas les coefficients u et v intervenant dans la relation $au + bv = 1$. L'algorithme d'Euclide fournit une réponse pratique à ce problème. À titre d'exemple, posons : $a = 1452$ et $b = 161$.

Utilisons la méthode de l'algorithme d'Euclide pour déterminer $a \wedge b$:

$$
\begin{aligned}
1452 &= 161 \times 9 + 3 && (\text{Ligne } 1)\\
161 &= 3 \times 53 + 2 && (\text{Ligne } 2)\\
3 &= 2 \times 1 + \boxed{1} && (\text{Ligne } 3)\\
2 &= 1 \times 2 + 0 && (\text{Ligne } 4)
\end{aligned}
$$

On déduit donc que $1452 \wedge 161 = 1$, donc, les entiers a et b sont premiers entre eux. Nous allons déduire des quatre lignes ci-dessus un couple $(u;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $1452u + 161v = 1$. Il suffit pour cela de remonter l'algorithme d'Euclide :

$$
\begin{aligned}
1 &= 3 - 2 \times 1 && (\text{D'après la ligne } 3)\\
&= 3 - (161 - 3 \times 53) \times 1 && (\text{D'après la ligne } 2)\\
&= 3 \times (1 + 53) - 161 &&\\
&= (1452 - 161 \times 9) \times 54 - 161 && (\text{D'après la ligne } 1)\\
&= 1452 \times 54 + 161 \times (-9 \times 54 - 1) &&\\
1 &= 1452 \times \underbrace{54}_{u} + 161 \times \underbrace{(-487)}_{v} &&
\end{aligned}
$$

Finalement : $1452 \times 54 + 161 \times (-487) = 1$ ($u = 54$ et $v = -487$)

1.6. APPLICATIONS DU THÉORÈME DE BEZOUT

Théorème 4

Soit a, b et c des entiers relatifs non nuls. On a l'implication : $(a / bc \text{ et } a \wedge b = 1) \Rightarrow a / c$

Ce résultat est connu sous le nom de « Théorème de Gauss ».

Preuve

Supposons que a / bc et $a \wedge b = 1$. D'après le théorème de Bezout, on peut affirmer l'existence d'un couple $(u;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. On en déduit $acu + bcv = c$. Par ailleurs, a / bc, donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$bc = ak$. Finalement, $acu + bcv = c$, c'est-à-dire $c = a(cu + kv)$, d'où a / c.

Remarque

Dans le théorème de Gauss, la condition $a \wedge b = 1$ est nécessaire. Par exemple : $12 / 9 \times 8$ mais 12 ne divise ni le nombre 9 ni le nombre 8.

Exemple

Recherchons les entiers a et b vérifiant l'égalité $11a = 5b$. Si a et b sont de tels entiers, alors $5 / 11a$ et puisque $5 \wedge 11 = 1$, on déduit du théorème de Gauss que $5 / a$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 5k$. En reportant dans l'égalité de départ, on trouve alors $55k = 5b$, d'où $b = 11k$. Réciproquement, tous les couples $(a;b)$ de la forme $(5k;11k)$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) sont solutions de l'égalité de départ.

Théorème 5

Soit a, b et c des entiers relatifs non nuls. On a l'implication : $(a / c \text{ et } b / c \text{ et } a \wedge b = 1) \Rightarrow ab / c$

Preuve

On sait que $(a \vee b).(a \wedge b) = |ab|$ et $a \wedge b = 1$, donc $a \vee b = |ab|$. Puisque a / c et b / c, alors $a \vee b$ divise c, c'est-à-dire $|ab| / c$. Par suite : ab / c.

Remarque

Dans le théorème 5, la condition $a \wedge b = 1$ est nécessaire. Par exemple : $8 / 48$ et $12 / 48$ mais 12×8 ne divise pas 48.

Proposition 3

Soit a, b et c des entiers relatifs non nuls. Alors :

1) $(a \wedge b = 1 \text{ et } a \wedge c = 1) \Leftrightarrow a \wedge bc = 1$.

2) Pour tout $(m;n) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $\quad (a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1) \quad$ et $\quad (a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^m \wedge b^n = 1)$

Preuve

$(\Rightarrow)$ Supposons que $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$. D'après le théorème de Bezout :

$$\left[(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2) \;\; \alpha a + \beta b = 1\right] \quad \text{et} \quad \left[(\exists(x;y) \in \mathbb{Z}^2) \;\; xa + yc = 1\right]$$

Par conséquent : $\quad (\alpha a + \beta b)(xa + yc) = 1 \Leftrightarrow (\alpha ax + \alpha cy + \beta bx)a + \beta ybc = 1$

En posant : $u = \alpha ax + \alpha cy + \beta bx$ et $v = \beta y$, On aura : $(u;v) \in \mathbb{Z}^2$ et $au + bcv = 1$

Et d'après le théorème de Bezout : $\quad a \wedge bc = 1$

$(\Leftarrow)$ Inversement, on a d'après le théorème de Bezout :

$$a \wedge bc = 1 \Leftrightarrow \left[\left(\exists (\alpha_1 ; \beta_1) \in \mathbb{Z}^2 \right) \ \alpha_1 a + \beta_1 bc = 1 \right]$$

Il s'ensuit donc : $\alpha_1 a + (\beta_1 c) b = \alpha_1 a + (\beta_1 b) c = 1$

D'après le théorème de Bezout :

$a \wedge b = 1$ (en prenant $u = \alpha_1$ et $v = \beta_1 b$) ; $a \wedge c = 1$ (en prenant $u = \alpha_1$ et $v = \beta_1 c$)

2) $(\Rightarrow)$ On suppose que $a \wedge b = 1$. Montrons par récurrence que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \right) \ a \wedge b^n = 1$.

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 1$, on a bien $a \wedge b^1 = 1$.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $a \wedge b^n = 1$ et montrons que $a \wedge b^{n+1} = 1$.

On a par hypothèse : $a \wedge b^n = 1$ et $a \wedge b = 1$, donc, d'après le résultat 1) précédent : $a \wedge \left(bb^n \right) = 1$,

ce qui entraîne que $a \wedge b^{n+1} = 1$.

<u>Conclusion :</u> $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \right) \ a \wedge b^n = 1$.

$(\Leftarrow)$ Inversement, si $a \wedge \left(bb^{n-1} \right) = 1$, alors d'après le résultat 1) : $a \wedge b = 1$.

3) Soit $(m;n) \in \left(\mathbb{N}^* \right)^2$. D'après le résultat 2) : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1 \Leftrightarrow b^n \wedge a = 1 = b^n \wedge a^m = 1$

Par suite : $\forall (m;n) \in \left(\mathbb{N}^* \right)^2 \ a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^m \wedge b^n = 1$

1.7. L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE $ax + by = c$

Une équation diophantienne est une équation polynomiale à une ou plusieurs inconnues dont les solutions sont cherchées parmi les nombres entiers, éventuellement rationnels, les coefficients étant eux-mêmes également entiers. Certaines équations diophantiennes ont demandé pour leur résolution les efforts conjugués de nombreux mathématiciens sur plusieurs siècles. Le dernier théorème de Fermat est un exemple typique ; il est conjecturé par Pierre de Fermat et démontré en 1994 par Andrew Wiles, après 357 ans d'efforts de la part de nombreux mathématiciens.

L'intérêt de la résolution de questions de cette nature réside rarement dans l'établissement d'un théorème clé pour les mathématiques, la physique ou les applications industrielles, même s'il existe des contre exemples comme la cryptologie, qui fait grand usage du petit théorème de Fermat. Leur analyse amène le développement d'outils mathématiques puissants dont l'usage dépasse le cadre de l'arithmétique.

La richesse et la beauté formelle des techniques issues de la résolution d'équations diophantiennes fait de l'arithmétique la branche « reine des mathématiques » pour David Hilbert.

L'équation $ax + by = c$, où les coefficients a, b et c sont trois entiers relatifs (a et b non tous deux nuls) et où les inconnues x et y sont entiers relatifs, est une des équations diophantiennes les plus simples à résoudre. Sa résolution s'appuie sur l'algorithme d'Euclide, le théorème de Bezout (qui correspond au cas, appelé aussi identité de Bezout, où c'est égal à $a \wedge b$) et le théorème de Gauss.

Dans l'ensemble des entiers relatifs, une telle équation possède, ou bien aucune solution, ou bien une infinité de solutions. Lorsque les coefficients et les inconnues sont des entiers naturels, l'équation possède un nombre fini de solutions.

Théorème 6

Soit a, b et c des entiers relatifs tels que $ab \neq 0$.

L'équation $ax + by = c$ d'inconnue $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$ a des solutions si, et seulement si, $a \wedge b$ divise c.

Preuve

Soit $d = a \wedge b$ et $a = da'$, $b = db'$ avec $(a';b') \in \left(\mathbb{Z}^*\right)^2$.

L'égalité $ax + by = c$ entraîne $d(a'x + b'y) = c$, ce qui montrer que d est nécessairement un diviseur de c.

La condition « $a \wedge b$ divise c » est nécessaire pour que $ax + by = c$ admette des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

En supposant que $a \wedge b$ divise c, on est ramené à la résolution de l'équation :

$$(E') : \; a'x + b'y = c', \text{ avec } c' = \frac{c}{d} \text{ et } a' \wedge b' = 1 .$$

Puisque $a' \wedge b' = 1$, alors d'après le théorème de Bezout, il existe $(u;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. Il s'ensuit $a'(c'u) + b'(c'v) = c'$ et $(c'u;c'v)$ est une solution de l'équation (E') dans $\mathbb{Z}^2$. Par suite :

« L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si, et seulement si, $a \wedge b$ divise c »

Technique de résolution de l'équation (E') dans $\mathbb{Z}^2$:

Soit $(x_0;y_0)$ une solution (particulière) de l'équation (E'). On a donc $a'x_0 + b'y_0 = c'$ et l'équation (E') se lit alors : $a'x + b'y = a'x_0 + b'y_0$, c'est-à-dire : $\quad a'(x - x_0) = b'(y_0 - y) \qquad (*)$

La relation $(*)$ entraîne $b' / a'(x - x_0)$, et comme $a' \wedge b' = 1$, le théorème de Gauss nous donne $b' / x - x_0$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = b'k$. La relation $(*)$ donne alors $y - y_0 = a'k$. Les solutions de (E') dans $\mathbb{Z}^2$ ne peuvent être que $(x_0 + b'k; y_0 - a'k)$.

Pour conclure, il suffit de vérifier que tous ces couples sont solutions de (E'). D'où le théorème suivant :

Théorème 7

Si le couple $(x_0;y_0)$ est une solution de l'équation (E) : $ax + by = c$, alors l'ensemble solution de l'équation (E) s'écrit sous la forme : $\quad S = \left\{ \left(x_0 + \dfrac{bk}{a \wedge b}; y_0 - \dfrac{ak}{a \wedge b} \right) \; / \; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exemples

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $\quad (E_1) \quad 15x + 20y = 7$

On a $15 \wedge 20 = 5$. Et puisque 5 ne divise pas 7 alors l'équation (E_1) n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$:

$$S_1 = \varnothing$$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : (E_2) $54x+21y=906$

Utilisons la méthode de l'algorithme d'Euclide pour déterminer $54\wedge 21$:

$$54=2\times 21+12$$
$$21=1\times 12+9$$
$$12=1\times 9+\boxed{3}$$
$$9=3\times 3+0$$

Il s'ensuit donc $54\wedge 21=3$ et 3 divise 906. Par conséquent, l'équation (E_2) admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

En remontant l'algorithme d'Euclide, on obtient :

$$3=12-1\times 9=12-1\times(21-1\times 12)=12\times 2-1\times 21=(54-2\times 21)\times 2-1\times 21=2\times 54-5\times 21$$

Ainsi, $2\times 54-5\times 21=3$. En multipliant les membres de cette dernière égalité par 302, on obtient :

$$54\times 604+21\times(-1510)=906$$

On en déduit alors que $(x_0;y_0)=(604;-1510)$ est une solution particulière de l'équation (E_2). Par suite, l'ensemble solutions de l'équation (E_2) est : $S_2=\{(604+7k;-1510-18k)\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : (E_3) $41x-10y=2018$

Remarquons que le couple $(1;4)$ est une solution évidente de l'équation $41x-10y=1$. Il s'ensuit que $(1\times 2018;4\times 2018)=(2018;8072)$ est une solution particulière de l'équation (E_3). Ainsi, l'ensemble solutions de l'équation (E_3) est : $S_3=\{(2018-10k;\,8072-41k)\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$

Dans l'ensemble S_3, le nombre k parcourt $\mathbb{Z}$, ce qui permet aussi d'écrire :

$$S_3=\{(2018+10k;\,8072+41k)\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$$

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

(E_1) : $2017x+48y=-5$; (E_2) : $297x-72y=45$; (E_3) : $51x+136y=2018$

2. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : (E) : $324x-245y=7$

a) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E) alors x est un multiple du nombre 7.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

c) On pose $d=x\wedge y$ où $(x;y)$ est une solution de (E).

- Déterminer les valeurs possibles de l'entier d.
- Déterminer les couples $(x;y)$ solutions de l'équation (E) tels que $x\wedge y=1$

3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation suivante : $23562x-13167y=693$

1.8. P.G.C.D ET P.P.C.M D'UN NOMBRE FINI D'ENTIERS RELATIFS

On montre sans difficulté que les notions de $PGCD$ et $PPCM$ sont associatives, au sens où :

$$\left(\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{Z}^*\right)^2\right)\quad \begin{cases} a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c \\ a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c \end{cases}$$

Ainsi, le calcul d'un $PGCD$ ou d'un $PPCM$ de n entiers peut se ramener au $PGCD$ ou au $PPCM$ de $n-1$ entiers par les égalités suivantes :

$$a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n=a_1\wedge(a_2\wedge\ldots\wedge a_n)\qquad \text{et}\qquad a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_n=a_1\vee(a_2\vee\ldots\vee a_n)$$

Cela permet de généraliser au cas de n entiers les définitions et résultats qui viennent d'être exposés concernant le $PGCD$ et le $PPCM$ de deux entiers.

Définition 3

Soit n un entier naturel, $n\geq 2$, et des entiers relatifs non nuls $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n$.

- **Le plus grand commun diviseur** des entiers $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, noté $a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n$ ou $PGCD(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, est le plus grand des diviseurs positifs communs à $a_1,a_2,\ldots,a_n$.
- **Le plus petit commun multiple** des entiers $a_1,a_2,\ldots,a_n$, noté $a_1\vee a_2\ldots\vee a_n$ ou $PPCM(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, est le plus petit des multiples positifs communs à $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Exemples

$$\begin{cases}12\wedge15\wedge30=3\\12\vee15\vee30=60\end{cases}\ ;\quad \begin{cases}(-14)\wedge21\wedge15=1\\(-14)\vee21\vee15=210\end{cases}\ ;\quad \begin{cases}14\wedge21\wedge35\wedge49=7\\14\vee21\vee35\vee49=1470\end{cases}$$

Théorème 8

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et des entiers relatifs non nuls $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Il existe des entiers relatifs $u_1,u_2,\ldots,u_n$ tels que : $\quad\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i.u_i=\delta$

où δ désigne le plus grand commun diviseur de $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Preuve

On procède par récurrence sur n en montrant le résultat suivant :

$$\delta=a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n\Rightarrow\left[\left(\exists(u_1;u_2;\ldots;u_n)\in\mathbb{Z}^n\right);\ \sum_{i=1}^{n}a_i.u_i=\delta\right]$$

<u>Initialisation :</u> pour $n=2$ déjà montré dans le théorème 2.

<u>Hérédité :</u> Supposons le résultat vrai pour tout n-uplet d'entiers relatifs non nuls. Considérons $n+1$ entiers non nuls $a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1}$. Notons $\delta'=a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n$. L'hypothèse de récurrence donne l'existence

d'entiers $u_1', u_2', ..., u_n'$ tels que $a_1u_1' + a_2u_2' + ... + a_nu_n' = \delta'$. D'autre part, en notant :

$$\delta = a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n \wedge a_{n+1} = (a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n) \wedge a_{n+1} = \delta' \wedge a_{n+1}$$

Le théorème 2 pour deux entiers fournit deux entiers u et v tels que : $a_{n+1}u + \delta' v = \delta$.

On obtient alors : $a_{n+1}u + (a_1u_1' + a_2u_2' + ... + a_nu_n')v = \delta \Rightarrow a_1u_1'v + a_2u_2'v + ... + a_nu_n'v + a_{n+1}u = \delta$

ce qui montre le résultat du théorème 8 et achève la démonstration.

Définition 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et des entiers relatifs non nuls $a_1, a_2, ..., a_n$.

On dit que les entiers $a_1, a_2, ..., a_n$ sont premiers entre eux si 1 est le seul diviseur positif commun à tous ces entiers, c'est-à-dire : $a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n = 1$

Remarques

- Attention, dire que des entiers sont premiers entre eux ne signifie pas qu'ils sont entre eux deux à deux. Par exemple, les trois entiers $a = 8$, $b = 7$ et $c = 12$ sont premiers entre eux. Pourtant, les entiers a et c ont 4 pour grand diviseur commun : $a \wedge c = 4 > 1$.
- La relation $(a \vee b).(a \wedge b) = |ab|$ n'est pas valable pour plus de deux entiers relatifs.

  Contre-exemple : $6 \vee 10 \vee 15 = 30$ et $6 \wedge 10 \wedge 15 = 1$

  donc : $(6 \vee 10 \vee 15) \times (6 \wedge 10 \wedge 15) = 30$ et $30 \neq 6 \times 10 \times 15$

  c'est-à-dire qu'on a en général : $(a \wedge b \wedge c) \times (a \vee b \vee c) \neq |abc|$
- Le résultat du théorème 1 reste aussi valable pour plus de deux entiers. Plus précisément : $(n \geq 2)$

  $\delta = a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n$ signifie qu'il existe $(a_1'; a_2'; ...; a_n') \in \mathbb{Z}^n$ tel que pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$:

  $$a_i = \delta a_i' \quad \text{et} \quad a_1' \wedge a_2' \wedge ... \wedge a_n' = 1$$

Théorème 9

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et des entiers relatifs non nuls $a_1, a_2, ..., a_n$.

Les entiers $a_1, a_2, ..., a_n$ sont premiers entre eux si, et seulement si : $\exists (u_1; u_2; ...; u_n) \in \mathbb{Z}^n$; $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 1$

Autrement dit : $a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n = 1 \Leftrightarrow \left[(\exists (u_1; u_2; ...; u_n) \in \mathbb{Z}^n) ; \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 1 \right]$

Preuve

Pour la démonstration du théorème 9, On suit la même démarche utilisée pour la démonstration du théorème de Bezout. (À vérifier)

1.9. CONGRUENCE MODULO n (RAPPELS ET COMPLÉMENTS)

Définition 5

Soit n un entier naturel non nul.

On dit que deux entiers relatifs a et b sont congrus modulo n si n divise $b-a$, c'est-à-dire s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + kn$. On écrit : $a \equiv b \ [n]$

Exemples

1) On a $247 \equiv 7 \ [15]$ car $15 / 247 - 7$. De même : $163 \equiv -2 \ [15]$ car $15 / 163 + 2$.

2) Si $n \in \mathbb{Z}$ alors : $n(n+1) \equiv 0 \ [2]$ et $(2n+1)^2 \equiv 1 \ [4]$

Proposition 4

Soit n un entier naturel non nul.

La relation « de congruence» est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire :

1) Elle est réflexive : $(\forall a \in \mathbb{Z}) \quad a \equiv a \ [n]$.

2) Elle est symétrique : $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2) \quad (a \equiv b \ [n] \Rightarrow b \equiv a \ [n])$.

3) Elle est transitive : $(\forall (a;b;c) \in \mathbb{Z}^3) \quad (a \equiv b \ [n] \text{ et } b \equiv c \ [n]) \Rightarrow a \equiv c \ [n]$

La proposition suivante montre que la relation de congruence est compatible avec les opérations usuelles dans $\mathbb{Z}$.

Proposition 5

Soit n un entier naturel non nul et $(a;b;c;d) \in \mathbb{Z}^4$. Alors :

1) $a \equiv b \ [n] \Leftrightarrow$ (Les restes respectifs des divisions euclidiennes de a et de b par n sont égaux).

2) Si $a \equiv b \ [n]$ et $c \equiv d \ [n]$, alors : $a + c \equiv b + d \ [n]$ et $ac \equiv bd \ [n]$.

3) Si $a \equiv b \ [n]$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors : $ka \equiv kb \ [n]$.

4) Si $a \equiv b \ [n]$ et $p \in \mathbb{N}$, alors : $a^p \equiv b^p \ [n]$.

Exemple

On pose : $a = 2 \times 7^{2018} + 3 \times 5^{2018} - 5$. Montrons que 24 divise a.

On a : $7 \equiv -1 \ [8]$ et $5 \equiv -3 \ [8]$ et $7^2 \equiv 1 \ [8]$ et $5^2 \equiv 1 \ [8]$

Par conséquent : $2 \times 7^{2018} \equiv 2 \ [8]$ et $3 \times 5^{2018} \equiv 3 \ [8]$

Il s'ensuit donc : $2 \times 7^{2018} + 3 \times 5^{2018} - 5 \equiv 2 + 3 - 5 \ [8]$, c'est-à-dire : $a \equiv 0 \ [8]$

On a : $7 \equiv 1\,[3]$ et $5 \equiv -1\,[3]$ et $7^2 \equiv 1\,[3]$ et $5^2 \equiv 1\,[3]$

Par conséquent : $2 \times 7^{2018} + 3 \times 5^{2018} - 5 \equiv 2+3-5\ [3]$, c'est-à-dire : $a \equiv 0\,[3]$.

Enfin, puisque $8 / a$ et $3 / a$ et $3 \wedge 8 = 1$ alors $24 / a$, d'où le résultat.

Applications

1. Montrer que le reste de la division euclidienne du nombre $N = (2018)^{102}$ par 5 est égale à 4.
2. Déterminer le chiffre des unités du nombre : $X = 2017^{1991^{1983}}$.
3. a) Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des nombres suivants :

$$5 \quad ; \quad 5^2 \quad ; \quad 5^3 \quad ; \quad 5^4 \quad ; \quad 5^5 \quad ; \quad 5^6 \quad ; \quad 5^7$$

   b) En déduire, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.
4. Soit a, b, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
   a) Montrer l'implication suivante : $n \equiv 0\ [m] \Rightarrow b^n \equiv 1\ [b^m - 1]$
   b) Établir l'équivalence suivante : $a^n \equiv 0\ [b^n] \Leftrightarrow a \equiv 0\ [b]$.

Théorème 10

Soit a, b et c des entiers relatifs non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $d = c \wedge n$ alors :

$$ac \equiv bc\ [n] \Leftrightarrow a \equiv b\ \left[\frac{n}{d}\right]$$

Preuve

Soit a, b et c des entiers relatifs non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$ac \equiv bc\ [n] \Leftrightarrow [(\exists k \in \mathbb{Z})\ \ ac - bc = kn] \Leftrightarrow [(\exists k \in \mathbb{Z})\ \ c(a-b) = kn]$$

Puisque $d = c \wedge n$ alors il existe $(\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $n = \beta d$ et $c = \alpha d$ et $\alpha \wedge \beta = 1$.

Par conséquent : $ac \equiv bc\ [n] \Rightarrow \alpha d(a-b) = \beta dk \Rightarrow \alpha(a-b) = \beta k$

D'après le théorème de Gauss : $\begin{cases} \beta / \alpha(a-b) \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \beta / a-b$. Donc : $a \equiv b\ [\beta]$.

Enfin, puisque $\beta = \dfrac{n}{d}$ alors : $a \equiv b\ \left[\dfrac{n}{d}\right]$.

Inversement, supposons que $a \equiv b\ \left[\dfrac{n}{d}\right]$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = b + k.\dfrac{n}{d}$, et par conséquent :

$$a \equiv b\ \left[\frac{n}{d}\right] \Rightarrow \alpha da = \alpha db + \alpha kn \Rightarrow ca = cb + \alpha kn$$

Par suite : $ac \equiv bc\ [n]$

Les résultats cités dans la proposition suivante sont des conséquences importantes du théorème 10, très utiles en pratique.

Proposition 6

Soit a, b et c des entiers relatifs non nuls et $(n;p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $\boldsymbol{c \wedge n = 1}$. Alors :

1) $ac \equiv bc\ [n] \Leftrightarrow a \equiv b\ [n]$; 2) $\begin{cases} a \equiv b\ [n] \\ p / n \end{cases} \Rightarrow a \equiv b\ [p]$

3) $\begin{cases} ac \equiv bc\ [p] \\ p \text{ premier} \\ p \text{ ne divise pas } c \end{cases} \Rightarrow a \equiv b\ [p]$

Exemple

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $3x \equiv 4\ [5]$

On a : $3x \equiv 4\ [5] \Leftrightarrow 3x \equiv 9\ [5]$. Puisque $3 \wedge 5 = 1$ alors : $3x \equiv 4\ [5] \Leftrightarrow x \equiv 3\ [5]$

Par suite, l'ensemble solution de cette équation est : $S = \{3 + 5k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $2x \equiv 4\ [6]$

D'après le théorème 10 ($n = 6$ et $c = d = 2$), on a pour tout $x \in \mathbb{Z}$: $2x \equiv 4\ [6] \Leftrightarrow x \equiv 2\ [3]$

Par suite, l'ensemble solution de cette équation est : $S = \{2 + 3k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

2 LES NOMBRES PREMIERS

2.1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS

Un entier relatif n non nul a au plus $2n$ diviseurs (si k / n, alors $|k| \leq |n|$ et $k \neq 0$).

Si $|n| \geq 2$, il y a au moins quatre diviseurs distincts : 1 ; -1 ; n ; $-n$.

1 et -1 ont exactement deux diviseurs.

Définition 6

Un entier relatif p est dit premier lorsqu'il admet exactement quatre diviseurs.

Exemples

1) Les nombres suivants sont des entiers premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; -13 ; -17 ; -41 ; -97.

2) Le nombre 15 n'est pas premier car il est divisible par 5.

3) Le nombre 2016 n'est pas premier car il est divisible par 4.

4) Le nombre 2 est le seul entier naturel pair et premier.

Remarques

- Si p est un entier premier dans $\mathbb{N}$, alors $-p$ est premier dans $\mathbb{Z}$. C'est pourquoi dans cette section, nous nous limitons à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- L'ensemble des nombres premiers (positifs) est noté $\mathbb{P}$.
- Un entier $n \geq 2$ non premier est dit composé.

Applications

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose : $H(k) = k^2 - k + 41$

   Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z} \cap [-39;40]$: $H(k) \in \mathbb{P}$
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que n divise $(n-1)! + 1$.

   Montrer que n est premier.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les nombres premiers p qui s'écrivent sous la forme : $p = n^4 + n^2 + 1$
4. Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que si $3^m + 1$ est premier alors m est pair.

Théorème 11

Soit n un entier composé supérieur ou égal à 2. Alors :

1) Le plus petit diviseur positif de n différent de 1 est un nombre premier.
2) n est un produit de nombres premiers. En particulier, n possède au moins un diviseur premier.
3) n possède un facteur premier p tel que $p^2 \leq n$.

Preuve

Soit n un entier composé supérieur ou égal à 2.

1) Puisque n n'est pas premier, alors il admet un diviseur propre (c'est-à-dire différent de 1 et n). Notons p le plus petit diviseur propre positif de n et montrons que p est premier.

   Par l'absurde, si p n'était pas premier, alors il admet un diviseur propre positif, que l'on le note d. Comme d / p et p / a alors d / a et $1 < d < p$, et cela contredit le fait que p est le plus petit diviseur propre positif de n. Par suite, l'entier p est premier.
2) D'après 1), le nombre n admet un diviseur premier p_1, donc, il existe un entier $n_1 \geq 2$ tel que : $n = n_1 . p_1$.

   Si n_1 est premier, le résultat est prouvé, sinon n_1 admet un diviseur premier p_2, donc, il existe un entier $n_2 \geq 2$ tel que : $n_1 = p_2 . n_2 = p_1 . p_2 . n_2$.

   En recommençant cette opération un nombre fini de fois, nous aurons : $n = p_1 . p_2 . \dots . p_r$ $(r \in \mathbb{N}^* - \{1\})$, ce qui montre que n est un produit de nombres premiers.
3) Puisque $n \notin \mathbb{P}$, il s'écrit $n = ab$, où a, b sont deux entiers strictement supérieurs à 1, on peut supposer que $a \leq b$. Soit p un facteur premier de a. Alors p / n, et $p^2 \leq ap \leq ab = n$.

Voici deux questions qui se posent naturelement :

- Comment savoir si un entier $N \geq 2$ est premier ?

La proposition ci-dessus donne une réponse : On dresse la liste des nombres premiers p tels que $p^2 \leq N$, c'est-à-dire $p \leq E\left(\sqrt{N}\right)$ $(x \mapsto E(x)$ est la fonction partie entière). Alors N est premier si et seulement s'il n'est multiple d'aucun des nombres obtenus.

À titre d'exemple : Montrons que le nombre 2017 est premier.

D'abord $E\left(\sqrt{2017}\right) = 44$. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 44 sont :

$$2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19 - 23 - 29 - 31 - 37 - 41 - 43$$

Par division euclidienne ou critère de divisibilité, on vérifie qu'aucun de ces nombres ne divise 2017.

- Soit $N \geq 2$ un entier donné, comment trouver tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à N ?

Le crible d'Ératosthène fournit une méthode. Dans la liste des entiers de 2 à N, on supprime tous les multiples de 2, puis tous les multiples de 3, et ainsi de suite. Après avoir supprimé tous les multiples d'un certain entier, le plus petit des entiers qui restent dans la liste, s'il y en a, est premier, et tous les nombres premiers entre 2 et N sont obtenus successivement par ce procédé.

2	3	5	7
11	13	17	19
23	29	31	37
41	43	47	53
59	61	67	71
73	79	83	89
97	101	103	107
109	113		

Les nombres premiers inférieures ou égales à 120

Applications

1. Parmi les nombres suivants, lesquels sont des nombres premiers :

$$127 \quad - \quad 1979 \quad - \quad 2003 \quad - \quad 13957 \quad - \quad 3599$$

2. En utilisant le crible d'Eratosthène, déterminer les nombres premiers qui existent entre 100 et 150.
3. Déterminer les nombres premiers qui existent entre 1000 et 1050.
4. Soit a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

   Montrer que le nombre $N = a^4 + 4b^4$ est composé.

Théorème 12

L'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers positifs est infini.

Preuve

De très nombreuses preuves de ce résultat existent. Proposons ici la démonstration d'Euclide, sans doute la plus connue, en raisonnant par l'absurde. Supposons que l'ensemble $\mathbb{P}$ soit fini. On peut alors écrire $\mathbb{P} = \{p_1; p_2; ...; p_k\}$. D'après le résultat 2) du théorème 11, l'entier $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$ admet au moins un facteur premier p. Ce nombre premier est donc l'un des p_i. On a alors p / N et $p / p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$, il en résulte alors $p / N - p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$, c'est-à-dire $p / 1$, ce qui est impossible. L'hypothèse de départ est donc fausse.
Mieux encore, l'activité préparatoire n°6 montre l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 3$. C'est une autre démonstration du théorème 12.

Théorème 13

1) Si p et q sont deux nombres premiers positifs distincts, alors ils sont premiers entre eux.

En d'autres termes : $(p \in \mathbb{P} \text{ et } q \in \mathbb{P} \text{ et } p \neq q) \Rightarrow p \wedge q = 1$

2) Si $p \in \mathbb{P}$, alors p est premier avec tous les entiers qu'il ne divise pas.

En d'autres termes : $(\forall a \in \mathbb{Z})\ (\forall p \in \mathbb{P})\ \left[(p \text{ ne divise pas } a) \Rightarrow p \wedge a = 1\right]$

Preuve

1) On pose $d = p \wedge q$ et on suppose que $(p;q) \in \mathbb{P}^2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} d = p \wedge q &\Rightarrow (d / p \text{ et } d / q) \\ &\Rightarrow (d \in \{1; p\} \text{ et } d \in \{1; q\}) \\ &\Rightarrow d \in \{1; p\} \cap \{1; q\} \\ &\Rightarrow d = 1 \quad (\text{car } p \neq q) \end{aligned}$$

Par conséquent : $(p \in \mathbb{P} \text{ et } q \in \mathbb{P} \text{ et } p \neq q) \Rightarrow p \wedge q = 1$

2) Soit $a \in \mathbb{Z}$, et p un nombre premier ne divisant pas a.

En posant $d = p \wedge a$ on obtient :

$$\begin{aligned} d = p \wedge a &\Rightarrow (d / p \text{ et } d / a) \\ &\Rightarrow (d \in \{1; p\} \text{ et } d / a) \\ &\Rightarrow \left[(d = 1 \text{ et } d / a) \text{ ou } (d = p \text{ et } d / a)\right] \\ &\Rightarrow d = 1 \quad (\text{car } p \text{ ne divise pas } a) \end{aligned}$$

Par suite : $(\forall a \in \mathbb{Z})\ (\forall p \in \mathbb{P})\ \left[(p \text{ ne divise pas } a) \Rightarrow p \wedge a = 1\right]$

Proposition 7

Soit $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ et p un nombre premier. Alors :

$$p / ab \Leftrightarrow (p / a \text{ ou } p / b)$$

Preuve

Si p / a et p / b alors on a bien évidemment p / ab. Inversement, supposons que p / ab et que, par exem[ple] p ne divise pas a ; alors $p \wedge a = 1$ (d'après le théorème 13). Comme p / ab alors, d'après le théorème de Gauss, p / b. Ainsi : $p / ab \Leftrightarrow (p / a \text{ ou } p / b)$

Corollaire

- Soit a_1, a_2,..., a_n des entiers relatifs et p un nombre premier. Alors :

$$p / a_1.a_2...a_n \Leftrightarrow (\exists i \in \{1;2;...n\} \ \ p / a_i)$$

- Soit $a \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier. Alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ \ p / a^n \Leftrightarrow p / a$$

- Soit p_1, p_2,..., p_n et p des nombres premiers. Alors :

$$p / p_1.p_2...p_n \Leftrightarrow (\exists i \in \{1;2;...n\} \ \ p = p_i)$$

Applications

1. Soit a et b deux entiers relatifs et p un nombre premier.

a) Montrer que : $\begin{cases} p / a \\ p / b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p / a+b \\ p / ab \end{cases}$.

b) Montrer que : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow ab \wedge (a+b) = 1$.

c) En déduire que : $27 \wedge 182 = 1$.

[2.] Déterminer tous les nombres premiers positifs p et q sachant que :

$$p / q^2 - q \qquad \text{et} \qquad q / p^2 - p$$

[2].2. PETIT THÉORÈME DE FERMAT

Théorème 14

[1]) Si p est un nombre premier positif, alors il divise $a^p - a$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$. Autrement dit :

$$(\forall a \in \mathbb{Z}) \ \ a^p \equiv a \ [p]$$

[2]) Si p est un nombre premier positif, alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$:

$$p \wedge a = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$$

Remarques

- La réciproque du petit théorème de Fermat n'est pas vraie. Autrement dit, si $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$, alors l'entier p n'est pas nécessairement premier. A titre d'exemple, le nombre $p = 341 = 31 \times 11$ n'est pas premier, or, il divise $2^{341} - 2$ car :

$$2^{341} - 2 = 2\left(2^{340} - 1\right) = 2\left(\left(2^{10}\right)^{34} - 1\right) = 2 \times \left(2^{10} - 1\right)\sum_{k=0}^{33} 2^{10k} = 2 \times 3 \times 341 \times \sum_{k=0}^{33} 2^{10k}$$

- Le petit théorème de Fermat permet de calculer le reste de n'importe quel entier assez grand modulo un nombre premier positif p.

Exemples

1) Déterminons le reste de la division euclidienne de nombre 2018^{2011} par 11 :

On a $2018 \equiv 5\ [11]$, donc $2018^{2011} \equiv 5^{2011}\ [11]$. Puisque 11 est un nombre premier positif et $5 \wedge 11 = 1$, alors, selon le petit théorème de Fermat, $5^{10} \equiv 1\ [11]$, d'où : $\left(5^{10}\right)^{201} \times 5 \equiv 5\ [11]$, et alors $5^{2011} \equiv 5\ [11]$.

Par suite, $2018^{2011} \equiv 5\ [11]$, et comme $0 \leq 5 < 11$ alors 5 est le reste demandé.

2) Soit p un nombre premier différent de 7, et n un entier naturel. Montrons que : $7^{n+p} - 7^{n+1} \equiv 0\ [p]$.

posons : $a_n = 7^{n+p} - 7^{n+1}$. On a : $a_n = 7^{n+1}\left(7^{p-1} - 1\right)$.

Puisque $p \neq 7$ et p est un nombre premier, alors, d'après le petit théorème de Fermat : $7^{p-1} - 1 \equiv 0\ [p]$.

Il s'ensuit donc : $7^{n+1}\left(7^{p-1} - 1\right) \equiv 0\ [p]$, c'est-à-dire : $7^{n+p} - 7^{n+1} \equiv 0\ [p]$

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrons que $n^5 \equiv n\ [30]$:

Puisque 5 est un nombre premier positif, alors, d'après le petit théorème de Fermat : $n^5 \equiv n\ [5]$.

d'autre part, on a : $n^5 - n = n\left(n^4 - 1\right) = n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right) = \left(n^3 - n\right)\left(n^2 + 1\right)$

Puisque 3 est un nombre premier positif, alors, d'après le petit théorème de Fermat : $n^3 \equiv n\ [3]$. Donc :

$\left(n^3 - n\right)\left(n^2 + 1\right) \equiv 0\ [3]$, c'est-à-dire : $n^5 - n \equiv 0\ [3]$, donc : $n^5 \equiv n\ [3]$.

Puisque n et n^5 ont la même parité, alors : $n^5 \equiv n\ [2]$.

En résumé : $2 / n^5 - n$ et $3 / n^5 - n$ et $5 / n^5 - n$

Puisque $2 \wedge 3 = 1$ alors $6 / n^5 - n$, et comme $6 \wedge 5 = 1$ alors $30 / n^5 - n$, c'est-à-dire : $n^5 \equiv n\ [30]$.

Applications

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $12^{12n+1} + 1 \equiv 0\ [13]$ et $10^{6n+4} + 3 \equiv 0\ [7]$
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{38} par 11.
3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels : 3 divise le nombre $45671^n + 11569^n$.

2.3. DÉCOMPOSITION EN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS

Théorème 15

Tout élément de $\mathbb{Z}^* - \{1;-1\}$ admet une décomposition en produit de nombres premiers, unique à l'ordre près des facteurs. Autrement dit, si $n \in \mathbb{Z}^* - \{1;-1\}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*, \varepsilon \in \{-1;1\}$, des nombres premiers deux à deux distincts $p_1, p_2, ..., p_N$, et des entiers $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$ de $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$n = \varepsilon . p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} ... p_N^{\alpha_N}$$

Ce théorème est connu sous le nom « Théorème fondamental de l'arithmétique ».

Exemples

Décomposition de nombre 840 en produit de facteurs premiers :

$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$\begin{array}{r|l} 840 & 2 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

De même, en suivant la technique ci-contre, on trouve :

$2073456 = 2^4 \times 3^2 \times 7 \times 11^2 \times 17$

$-1950 = -2 \times 3 \times 5^2 \times 13$

$-4096 = -2^{12}$

Applications

1. Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre : $a = 6^6 + 1$
2. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants :

   1001 ; 4199 ; 10000 ; −1032 ; 111333 ; −102960
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre : $N = 100^{2n}$.
4. Soit a et b deux entiers supérieurs ou égales à 2 et premiers entre eux.

   Montrer l'équivalence suivante : (ab est un carré parfait) $\Leftrightarrow$ (a et b sont des carrés parfaits).

2.4. APPLICATIONS DE LA DÉCOMPOSITION EN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS

Théorème 16

Soit $n \in \mathbb{Z}^* - \{1;-1\}$ et sa décomposition $n = \varepsilon . p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} ... p_N^{\alpha_N}$ en produit de facteurs premiers.

- Les diviseurs de n sont les entiers relatifs :

$$d = \varepsilon' . p_1^{\gamma_1} . p_2^{\gamma_2} ... p_N^{\gamma_N} \quad \text{avec} \quad \forall k \in \{1;2;...;N\} \ \ 0 \le \gamma_k \le \alpha_k \quad \text{et} \quad \varepsilon' \in \{-1;1\}$$

- Le nombre de diviseurs positifs de n est : $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)....(1+\alpha_n)$

Exemples

1) Si p est un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, alors le nombre de diviseurs positifs de p^α est $1+\alpha$.

Ces diviseurs sont : $1 \quad ; \quad p \quad ; \quad p^2 \quad ; \quad .... \quad ; \quad p^\alpha$ (leur nombre est donc $1+\alpha$)

2) Soit p et q deux nombres premiers distincts. Le nombre de diviseurs positifs de nombre $n = p^2q^3$ est $(1+2)(1+3) = 12$. Ces diviseurs sont :

$1 \; ; \; p \; ; \; p^2 \; ; \; q \; ; \; q^2 \; ; \; q^3 \; ; \; pq \; ; \; p^2q \; ; \; pq^2 \; ; \; p^2q^2 \; ; \; pq^3 \; ; \; p^2q^3$

3) On considère le nombre $n = 5 \times 7^2 \times 13$.

Le nombre de diviseurs positifs de n est $2 \times 3 \times 2 = 12$ (citer ces diviseurs).

Applications

1. Déterminer le nombre de diviseur de nombre $n = 3600$.
2. On considère le nombre $a = p^2q^5$ avec p et q deux nombres premiers distincts.
   a) Donner tous les diviseurs de a.
   b) Déterminer la somme de tous les diviseurs positifs de a.
3. Montrer l'équivalence suivante : $p \in \mathbb{P} \Leftrightarrow$ la somme des diviseurs de p est $1+p$.

3 L'ENSEMBLE $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

3.1. CLASSES D'ÉQUIVALENCE

Définition 7

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

- L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r de la division euclidienne par n est appelé la classe d'équivalence de r, et on la note $\overline{r}$. C'est la classe d'équivalence de r modulo n dans $\mathbb{Z}$.
- Généralisation : Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

  La classe d'équivalence de a modulo n est l'ensemble défini par :

$$\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \equiv a\,[n]\} = \{a + kn \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemples

1) Si $n = 2$ alors : $\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 0\,[2]\} = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$ et $\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 1\,[2]\} = \{2k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$

On voit bien que $\overline{0}$ est l'ensemble des nombres pairs, tandis que $\overline{1}$ est l'ensemble des nombres impairs.

Remarquons enfin que pour $n = 2$: $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1}$

2) Si $n = 3$ alors : $\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 0\,[3]\} = \{3k / k \in \mathbb{Z}\}$ et $\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 1\,[3]\} = \{3k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$

et $\overline{2} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 2\,[3]\} = \{3k+2 / k \in \mathbb{Z}\}$. De plus, on a pour : $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2}$.

Applications

Déterminer la classe d'équivalence modulo 12 de chacun des nombres : 116 ; 1979 ; 2018.

Proposition 8

Soit n un entier naturel non nul.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on désigne par $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x modulo n. Alors :

1) $(\forall a \in \mathbb{Z})$ $(\exists! r \in \{0;1;...;n-1\})$ $\overline{a} = \overline{r}$.

2) Si $0 \leq r < n$ et $0 \leq r' < n$ alors : a) $\overline{r} = \overline{r'} \Leftrightarrow r = r'$; b) $r \neq r' \Leftrightarrow \overline{r} \cap \overline{r'} = \varnothing$

3) $(\forall x \in \mathbb{Z})$ $(\exists! r \in \{0;1;...;n-1\})$ $x \in \overline{r}$. (r étant le reste de la division euclidienne de x par n)

4) $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup ... \cup \overline{n-1}$.

5) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}; ...; \overline{n-1}\}$ et $\text{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$.

Exemples

1) On considère l'ensemble $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

On a : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}\}$ avec $\overline{0} = \{2k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\overline{1} = \{2k+1 \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.

On a : $\overline{4} = \overline{0} = \overline{8} = \overline{20} = \overline{2018}$ et $\overline{13} = \overline{1} = \overline{5} = \overline{17} = \overline{2019}$

2) On considère l'ensemble $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

On a : $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}\}$ avec $\overline{0} = \{3k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\overline{1} = \{3k+1 \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\overline{2} = \{3k+2 \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

On a : $\overline{0} = \overline{3} = \overline{66} = \overline{2016}$ et $\overline{1} = \overline{4} = \overline{7} = \overline{2017}$ et $\overline{2} = \overline{8} = \overline{83} = \overline{2018}$

3.2. OPÉRATIONS DANS L'ENSEMBLE $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

INTRODUCTION

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit r le reste de la division euclidienne de x par n, et r' le reste de la division euclidienne de y par n.

- On a : $\begin{cases} x \in \overline{r} \Leftrightarrow x \equiv r\,[n] \\ y \in \overline{r'} \Leftrightarrow y \equiv r'\,[n] \end{cases}$, donc : $x + y \equiv r + r'\,[n]$, c'est-à-dire : $\overline{x+y} = \overline{r+r'}$.

  On a $x + y \in \overline{r+r'}$ et on écrit alors : $\overline{r+r'} = \overline{r} + \overline{r'}$.

- On a : $\begin{cases} x \in \overline{r} \Leftrightarrow x \equiv r\,[n] \\ y \in \overline{r'} \Leftrightarrow y \equiv r'\,[n] \end{cases}$, donc : $xy \equiv rr'\,[n]$, c'est-à-dire : $\overline{xy} = \overline{rr'}$.

  On a $xy \in \overline{rr'}$ et on écrit alors : $\overline{rr'} = \overline{r} \times \overline{r'}$.

Par suite, on peut donner la définition suivante :

Définition 8

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

- On définit l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme suit : Pour tous $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$.
- On définit la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme suit : Pour tous $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{x}\times\overline{y}=\overline{x\times y}$.

Exemples

1) On a dans l'ensemble $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

$\overline{4}+\overline{2}=\overline{6}=\overline{0}$; $\overline{5}\times\overline{4}=\overline{20}=\overline{2}$; $\overline{5}^2=\overline{25}=\overline{1}$; $\overline{4}\times\overline{3}=\overline{12}=\overline{0}$

2) Résolvons dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$\overline{2}x=\overline{1}$; $\overline{2}x=\overline{3}$; $x^5=\overline{1}$; $x^2-\overline{3}x+\overline{2}=\overline{0}$

On a : $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}=\left\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6}\right\}$. On obtient alors le tableau suivant :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$
x^5	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$
$x^2-\overline{3}x+\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$

À partir de tableau ci-dessus, on en déduit que :

- L'ensemble des solutions de l'équation $\overline{2}x=\overline{1}$ est : $S=\left\{\overline{4}\right\}$.
- L'ensemble des solutions de l'équation $\overline{2}x=\overline{3}$ est : $S=\left\{\overline{5}\right\}$.
- L'ensemble des solutions de l'équation $x^5=\overline{1}$ est : $S=\left\{\overline{1}\right\}$.
- L'ensemble des solutions de l'équation $x^2-\overline{3}x+\overline{2}=\overline{0}$ est : $S=\left\{\overline{1};\overline{2}\right\}$.

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$\overline{4}x=\overline{2}$; $\overline{3}x^2+x+\overline{1}=\overline{0}$; $\left(\overline{4}x-\overline{1}\right)\left(\overline{2}x+\overline{3}\right)=\overline{0}$; $x^3=x$

Théorème 17

Soit p un nombre premier positif. Alors :

1) $\left(\forall\overline{x}\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-\left\{\overline{0}\right\}\right)\left(\exists\overline{y}\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-\left\{\overline{0}\right\}\right)\ \overline{x}\times\overline{y}=\overline{1}$.

2) $\left(\forall\left(\overline{x};\overline{y}\right)\in\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2\right)\ \left[\overline{x}\times\overline{y}=\overline{0}\Leftrightarrow\left(\overline{x}=\overline{0}\ \text{ou}\ \overline{y}=\overline{0}\right)\right]$

Preuve

1) On pose $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\overline{0}\}$. On a : $\overline{x} \in E \Leftrightarrow \overline{x} \in \{\overline{1};\overline{2};....;\overline{p-1}\}$; par conséquent :

$$\overline{x} \in E \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \{1;2;...;p-1\})\ \ \overline{x} = \overline{\alpha}$$

Puisque p est premier et ne divise aucun élément de l'ensemble $\{1;2;....;p-1\}$, alors $p \wedge \alpha = 1$

D'après le théorème de Bezout, il existe $(u;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $pu + \alpha y = 1$, et donc $\overline{pu + \alpha y} = \overline{1}$, ce qui donne $\overline{\alpha} \times \overline{y} = \overline{1}$, c'est-à-dire $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{1}$.

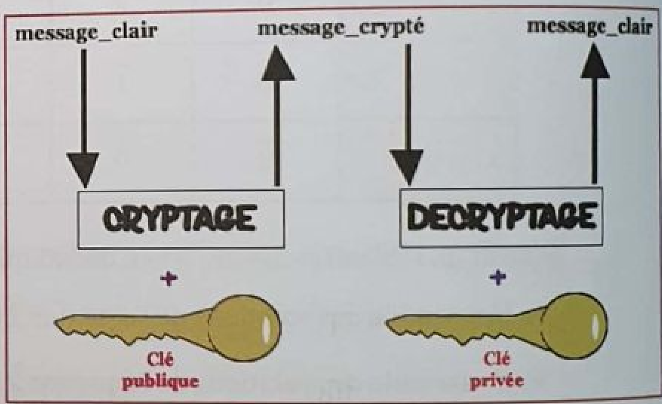
Par suite : $(\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\overline{0}\})(\exists \overline{y} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\overline{0}\})$; $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{1}$

2) Soit $(\overline{x};\overline{y}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. L'égalité $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{0}$ signifie que $xy \equiv 0\,[p]$, c'est-à-dire, que p / xy. Comme p est premier, alors : $p / xy \Leftrightarrow (p / x \text{ ou } p / y) \Leftrightarrow (\overline{x} = \overline{0} \text{ ou } \overline{y} = \overline{0})$.

Par suite : $(\forall (\overline{x};\overline{y}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2)\ [\overline{x} \times \overline{y} = \overline{0} \Leftrightarrow (\overline{x} = \overline{0} \text{ ou } \overline{y} = \overline{0})]$

3.3. APPLICATIONS À LA CRYPTOGRAPHIE

Voici une application du théorème de Fermat. Il s'agit d'une méthode de codage très utilisée en cryptographie, la méthode RSA (due à Rivest, Shamir et Adleman). Soient p et q deux **nombres premiers distincts**, $N = pq$ et $c \in \mathbb{N}^*$ fixé premier avec $(p-1)(q-1)$.



L'expéditeur du message ne connaît que N et c : la « Clé publique », mais ni p ni q. Le message à transmettre est initialement constitué de « **lettres** » ou, plus généralement, de « **caractères** ». On le transforme en une liste de « **chiffres** » en remplaçant, dans le premier cas, chaque lettre par son rang dans l'alphabet et, dans le second, chaque caractère par le nombre qui le représente dans un certain **encodage**, par exemple en utilisant le codage ASCII (American Standard Code for Information Interchange ; version étendue 8 bits) par un entier entre 0 et $255 = 2^8 - 1$. On découpe ensuite le message ainsi transformé en « **tranches** » de même longueur représentant chacune un nombre entier $x < N$, puis l'on remplace chaque tranche par le $\overline{x} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ correspondant. On code chaque $\overline{x}$ en le remplaçant par $\overline{y} = \overline{x}^c$ et l'on transmet la liste des $y \in \{0;1;...;N-1\}$ correspondants.

Comment le destinataire du message peut-il décoder, c'est-à-dire retrouver $\overline{x}$ à partir de $\overline{y}$ en connaissant p et q ? Voici la réponse. D'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers d et k tels que : $cd - k(p-1)(q-1) = 1$; on peut de plus supposer $k \geq 1$, d'où $d \geq 1$. Alors $\overline{x} = \overline{y}^d$. En effet, il s'agit de vérifier que $x^{cd} \equiv x\ [pq]$, ou encore que pq divise $x^{cd} - x$. Comme $pq = p \vee q$, il suffit de voir que $x^{cd} - x$ est multiple de p et q. Par symétrie, il suffit de montrer que $x^{cd} - x \equiv 0\ [p]$. C'est clair si p / x, auquel cas p / x^{cd}. Si p ne divise pas x, le théorème de Fermat donne $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$. Puisque :

$x^{cd} = x^{1+k(p-1)(q-1)} = x\left[x^{p-1}\right]^{k(q-1)}$, alors $x^{cd} \equiv x\ [p]$. Ainsi, pour récupérer $\overline{x}$, il suffit d'élever $\overline{y}$ à la puissance d.

En pratique, on choisit pour p et q deux « grands » nombres premiers distincts (de quelques centaines de chiffres chacun). Quel est l'intérêt ?

Le point capital est que, depuis un peu plus d'une vingtaine d'années, grâce à des méthodes que nous ne pouvons pas détailler ici, on sait fabriquer à la demande des nombres premiers p et q de la taille requise.

En revanche, il se trouve que, dans l'état actuel, on ne peut pas factoriser un entier de taille de $N = pq$.

Les entiers N et c constituent la « **clé publique** », ils peuvent sans inconvénient être connus de tous, et permettant de coder les messages.

Pour décoder il faut avoir d, ce qui revient, comme nous l'avons vu, à connaître le nombre suivant $(p-1)(q-1) = N - p - q + 1$, c'est-à-dire p ou q. L'entier d, appelé « **clé secrète** », ne peut donc pas être trouvé, même si N et c sont connus, ainsi le message initial $\overline{x}$ et le message codé $\overline{y}$. C'est l'avantage essentiel de cette méthode de codage, dite à clé publique.

Voici un exemple numérique : $N := 415439 = pq$, où $p := 233$ et $q := 1783$. Alors :

$$(p-1)(q-1) = 232 \times 1732 = 2^4 \times 3^4 \times 11 \times 29$$

Choisissons $c := 113$ et $q := 336593$.

Il est facile de vérifier que $cd \equiv 1\ [(p-1)(q-1)]$. Le mot « eau » est codé par $\overline{x} := \overline{50121}$ (les numéros des lettres e, a et u sont 5,1 et 21 respectivement). On vérifie que $\overline{x}^c = \overline{220914}$.

4 SYSTÈMES DE NUMÉRATION

4.1. REPRÉSENTATION D'UN ENTIER NATUREL DANS UN SYSTÈME DE NUMÉRATION

La numération est la science qui traite de la dénomination et de la représentation graphique des nombres. Le problème posé est de représenter tous les entiers naturels et les décimaux à l'aide d'un ensemble fini de symboles (appelés des chiffres) rassemblés selon des règles (le code) pour former un nombre.

Il est important de connaître les différents systèmes car ils sont utilisés en informatique et plus généralement dans le traitement de l'information. Selon le contexte il peut être plus judicieux d'utiliser un code plutôt qu'un autre, il faut donc savoir comment passer de l'un à l'autre.

Définition 9

La base b d'un système de numération représente le nombre d'unités d'un certain rang, nécessaire pour former une unité de rang immédiatement supérieur.

L'ensemble $B_b = \{0;1;2;...;b-1\}$, soit b caractères (chiffres en base 10) quantifie le nombre d'unités d'un rang quelconque.

Exemples

1) Le Système Décimal :

C'est le système de représentation naturel connu par tout le monde. C'est le système de base 10 que nous utilisons tous les jours. il comprend dix **symboles** différents : 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9.

Prenons l'exemple du nombre $n = 2356$:

Par convention nous l'écrivons $n = \overline{2356}_{(10)}$. L'indice « 10 » indique la base dans laquelle le nombre est écrit. Nous verrons plus tard que cela a son importance.

Ce nombre n peut être écrit sous la forme suivante :

$$n = 2\times10^3 + 3\times10^2 + 5\times10^1 + 6\times10^0 = 2000 + 300 + 50 + 6 = 2356$$

Cette méthode de décomposition sera utilisée pour toutes les autres bases.

2) Le Système Binaire :

De nos jours, il est possible de compter avec une arithmétique ne possédant que deux chiffres 0 et 1.

L'informatique et l'électronique ont employé cette arithmétique dans des domaines divers. En effet, l'électronique numérique est en train de prendre la place de l'électronique analogique : l'enregistrement de la musique, le téléphone, la transmission des images de télévision, ...etc.

Un système de numération utilisant la base 2 s'adapte à toutes les technologies. En effet, nous ne disposons plus alors que de 2 caractères pour écrire les nombres dont nous avons besoin, 0 et 1.

Tout système pouvant se présenter dans deux états distincts pourra être adapté aux techniques binaires.

Exemples :

$45 = 2^5\times1 + 2^4\times0 + 2^3\times1 + 2^2\times1 + 2\times0 + 1 = \overline{101101}_{(2)}$

$230 = 2^7\times1 + 2^6\times1 + 2^5\times1 + 2^4\times0 + 2^3\times0 + 2^2\times1 + 2\times1 = \overline{11100110}_{(2)}$

On va voir ultérieurement comment obtenir la représentation binaire d'un entier.

Un peu de vocabulaire :

- Chaque élément binaire pouvant prendre la valeur 0 ou 1 est appelé un digit binaire (**BI**nary digi**T : BIT**)
- Une suite de 4 bits est appelée **quartet**
- Une suite de 8 bits est appelée **octet.**

Depuis 1998, l'organisme international IEC (International Electrotechnical Commission), a défini les mesures suivantes :

$1\,Ko = 1024\,octets\ (2^{10})$; $1\,Mo = 1000\,Ko$; $1\,Go = 1000\,Mo$; $1\,To = 1000\,Go$

Mais de nombreux logiciels, parfois même certains systèmes d'exploitation, utilisent toujours la notation antérieure à 1998 pour laquelle $1\,Ko = 1024$ octets (2^{10} bits).

Théorème 18

Soit b un entier supérieur ou égal à 2.

Tout entier naturel non nul n peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

où a_0, $a_1, \dots, a_m$ sont des entiers tels que : $a_m \neq 0$ et $0 \leq a_i \leq b-1$ pour tout $i \in \{0;1;2;\dots;m\}$.

On écrit : $n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}_{\ (b)}$, et on dit qu'on a représenté le nombre n dans le système de numération de base b.

Preuve

En effectuant la division euclidienne de n par b, on peut trouver deux entiers naturels q_1 et a_0 vérifiant la relation : $n = q_1 b + a_0$ et $0 \leq a_0 < b$

Si $q_1 \geq b$, alors on utilise encore une fois la division euclidienne pour obtenir deux entiers naturels q_2 et a_1 vérifiant la relation : $q_1 = q_2 b + a_1$ et $0 \leq a_1 < b$. En remplaçant q_1 dans l'égalité précédente, on obtient :

$$n = q_1 b + a_0 = (q_2 b + a_1) b + a_0 = q_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

et en suivant le même processus des divisions successives, on va obtenir à l'étape m deux entiers naturels q_m et a_{m-1} tels que : $q_{m-1} = q_m b + a_{m-1}$ et $0 \leq a_{m-1} \leq b$.

Et puisque $q_1 > q_2 > \dots > q_m$ (en remarquant que la suite $(q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est positive et strictement décroissante), alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $q_m < b$. Dans ce cas, on s'arrête en posant $a_m = q_m$ afin d'obtenir l'égalité :

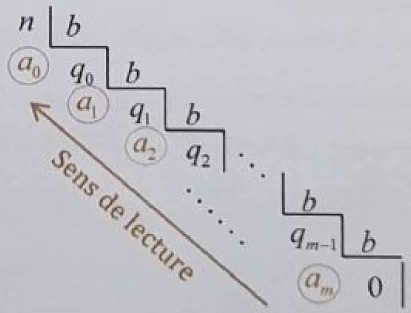
$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

L'unicité de cette écriture provient de celle du couple $(q_i\,; a_i)$.

Méthode de représentation d'un entier naturel non nul n dans un système de numération de base b :

En utilisant la division euclidienne par b, on obtient ce qui suit :

$$\begin{cases} n = q_0 b + a_0 & ; \ 0 \leq a_0 < b \\ q_0 = q_1 b + a_1 & ; \ 0 \leq a_1 < b \\ q_1 = q_2 b + a_2 & ; \ 0 \leq a_2 < b \\ \vdots \quad\quad \vdots & \quad\quad \vdots \\ q_{m-1} = a_m & ; \ 0 \leq a_m < b \end{cases}$$



Par conséquent : $n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}_{\ (b)}$

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Représentation du nombre 529 en système de base 8 :

$$\begin{array}{r|l} 529 & 8 \\ \hline 1 & 66 \;|\; 8 \\ & 2 \quad 8 \;|\; 8 \\ & \quad 0 \quad 8 \;|\; 8 \\ & \quad\quad 1 \quad 0 \end{array}$$

Donc : $529 = \overline{1021}_{(8)}$

2) Représentation du nombre 496 en système de base 7 :

En suivant la même démarche, on obtient :

$$496 = \overline{1306}_{(7)}$$

3) Représentation du nombre 37 en système binaire :

En suivant la même démarche, on obtient : $37 = \overline{100101}_{(2)}$

Applications

1. Convertir en binaire les nombres suivants :

97 ; 397 ; 133 ; 110 ; 1652

2. Convertir en numération décimale les nombres dont l'écriture en binaire est :

$\overline{101}_{(2)}$; $\overline{1101110}_{(2)}$; $\overline{10011011}_{(2)}$; $\overline{110010110}_{(2)}$; $\overline{101110011}_{(2)}$

4.2. COMPARAISON DE DEUX NOMBRES PRÉSENTÉS DANS LE MÊME SYSTÈME DE NUMÉRATION

Théorème 19

Soit x et y deux entiers naturels représentés dans le même système de numération par :

$$x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}_{(b)} \quad \text{et} \quad y = \overline{c_m c_{m-1} \ldots c_0}_{(b)}$$

1) Si $m > n$ alors $y > x$.

2) Si $m = n$ et $c_n = a_n$ et $c_{n-1} = a_{n-1}$ et ... et $c_{i+1} = a_{i+1}$ et $c_i \neq a_i$, alors, l'ordre de x et y est celui de c_i et a_i. En particulier, si $c_i > a_i$ alors $y > x$.

Exemples

1) Dans le système de numération de base 7, on pose : $x = \overline{12651}_{(7)}$ et $y = \overline{5416}_{(7)}$

On a le nombre de chiffres formant le nombre x est 5, tandis que le nombre de chiffres formant le nombre y est 4. Comme $5 > 4$ alors $x > y$.

2) On a : $\overline{1345}_{(9)} > \overline{427}_{(9)}$ et $\overline{435}_{(6)} > \overline{432}_{(6)}$.

3) Dans le système de numération de la base 12, le chiffre 10 est noté α et le chiffre 11 est noté β.

Par exemple :

$2278 = 1\times 12^3 + 3\times 12^2 + 9\times 12^1 + \alpha \times 12^0 = \overline{139\alpha}_{(12)}$ et $\overline{71\alpha 9}_{(12)} > \overline{9\beta 2}_{(12)}$

4.3. ADDITION ET MULTIPLICATION DE DEUX NOMBRES PRÉSENTÉS DANS LE MÊME SYSTÈME DE NUMÉRATION

- On considère les deux nombres suivants : $x = \overline{5312}_{(6)}$ et $y = \overline{214}_{(6)}$

On veut représenter le nombre $x + y$ en base 6.

On a : $x = 5\times 6^3 + 3\times 6^2 + 6 + 2$ et $y = 2\times 6^2 + 6 + 4$

Par conséquent : $x + y = 5\times 6^3 + 5\times 6^2 + 3\times 6 = x = \overline{5530}_{(6)}$.

On peut représenter le nombre $x + y$ directement en base 6 en utilisant la méthode vue au primaire « l'addition par retenue » comme suit :

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ \overline{5312}_{(6)} \\ + \quad \overline{214}_{(6)} \\ \hline = \overline{5530}_{(6)} \end{array}$$

- On considère les deux nombres suivants : $a = \overline{432}_{(5)}$ et $b = \overline{134}_{(5)}$

On veut représenter le nombre $a \times b$ en base 5.

On a : $a = 4\times 5^2 + 3\times 5 + 2$ et $b = 5^2 + 3\times 5 + 4$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} a\times b &= \left(4\times 5^2 + 3\times 5 + 2\right)\left(5^2 + 3\times 5 + 4\right) \\ &= 4\times 5^4 + 3\times 5^4 + 5^4 + 2\times 5^2 + 3\times 5^2 + 3\times 5 + 5 + 3 \\ &= 5^5 + 3\times 5^4 + 5^3 + 4\times 5 + 3 \\ &= \overline{131043}_{(5)} \end{aligned}$$

Tout comme l'addition, on peut représenter le nombre $a \times b$ directement dans en base 5 en utilisant la méthode de « la multiplication par retenue » comme suit :

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ \overline{432}_{(5)} \\ \times \quad \overline{134}_{(5)} \\ \hline 3333 \\ + \quad 2401\bullet \\ + \quad 432\bullet\bullet \\ \hline = \overline{131043}_{(5)} \end{array}$$

4.4. CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ SUR LES NOMBRES 3 ; 4 ; 5 ; 9 ; 11 ; 25 DANS LE SYSTÈME DÉCIMAL

Proposition 9

Soit $x \in \mathbb{N}$ tel que $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{\,(10)} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_1 \times 10 + a_0$ avec :

$$a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq a_i < 10 \text{ pour tout } i \in \{0;1;\ldots;n\}$$

On a alors les équivalences suivantes :

1) $x \equiv 0\,[5] \Leftrightarrow (a_0 = 5 \text{ ou } a_0 = 5)$; 4) $x \equiv 0\,[3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\,[3]$

2) $x \equiv 0\,[25] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}_{(10)} \equiv 0\,[25]$; 5) $x \equiv 0\,[9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\,[9]$

3) $x \equiv 0\,[4] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}_{(10)} \equiv 0\,[4]$; 6) $x \equiv 0\,[11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0\,[11]$

A P.G.C.D ET P.P.C.M

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Calculer $(3^{123}-5)\wedge 25$ et $(2^{443}+7)\wedge 15$.

2) Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $c/ab \Rightarrow c/(a\wedge c)(b\wedge c)$.

3) Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{N}^{*2}$: $x\wedge y=1 \Leftrightarrow (x+y)\wedge(xy)=1$.

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer : $(n^2+n)\wedge(2n+1)$ et $(15n^2+8n+6)\wedge(30n^2+21n+13)$.

5) Trouver tous les couples d'entiers $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ tels que : $(x\vee y)+11(x\wedge y)=203$.

6) Soit $m\in\mathbb{N}^*$ tel que 2^m+1 soit premier. Montrer que $m=2^k$ avec $k\in\mathbb{N}$.

7) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases}x\wedge y=18\\ x\vee y=540\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}x+y=56\\ x\vee y=105\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}x\wedge y=x-y\\ x\vee y=72\end{cases}$$

8) Trouver $n\in\mathbb{Z}$ tel que : $\dfrac{n^2-9}{n^2-5n+4}\in\mathbb{Z}$.

SOLUTION

1) Calculons $(3^{123}-5)\wedge 25$:

Posons $d=(3^{123}-5)\wedge 25$. On a $d/25$ donc $d\in\{1;5;25\}$. Or 5 ne divise pas 3^{123} (car sinon, on aura $5/3$ car 5 est premier). Par conséquent, $3^{123}-5$ n'est pas divisible par 5. Ainsi : $(3^{123}-5)\wedge 25=1$.

Calculons $(2^{443}+7)\wedge 15$:

Posons $d'=(2^{443}+7)\wedge 15$. On a $d'/15$ donc $d'\in\{1;3;5;15\}$. On a $2^2\equiv 1\ [3]$ donc $2^{442}\equiv 1\ [3]$.
Cela donne $2^{443}\equiv 2\ [3]$ et $2^{443}+7\equiv 0\ [3]$ et par conséquent, $3/2^{443}+7$.
De même : $2^4\equiv 1\ [5]$ et $2^{440}\equiv 1\ [5]$. Ceci donne $2^{443}\equiv 8\ [5]$ et $2^{443}+7\equiv 0\ [5]$. Par Conséquent, $5/2^{443}+7$. Puisque 3 et 5 sont premiers entre eux, alors $15/2^{443}+7$. Ainsi : $(2^{443}+7)\wedge 15=15$.

2) Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrons que $c/ab \Rightarrow c/(a\wedge c)(b\wedge c)$:

Posons : $a=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$, $b=p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}...p_r^{\beta_r}$ et $c=p_1^{\gamma_1}.p_2^{\gamma_2}...p_r^{\gamma_r}$. Puisque c/ab, alors pour tout $i\in\{1,2,...,r\}$: $\gamma_i\le\alpha_i+\beta_i$. D'autre part, on sait que :

$$a\wedge c=p_1^{\min(\alpha_1;\gamma_1)}.p_2^{\min(\alpha_2;\gamma_2)}...p_r^{\min(\alpha_r;\gamma_r)} \quad \text{et} \quad b\wedge c=p_1^{\min(\beta_1;\gamma_1)}.p_2^{\min(\beta_2;\gamma_2)}...p_r^{\min(\beta_r;\gamma_r)}$$

Donc $c/(a\wedge c)(b\wedge c)$ si, et seulement si : $\gamma_i\le\min(\alpha_i;\gamma_i)+\min(\beta_i;\gamma_i)$

On distingue alors deux cas :

- Si $\min(\alpha_i;\gamma_i)=\gamma_i$ ou $\min(\beta_i;\gamma_i)=\gamma_i$, alors le résultat est trivial.
- Sinon, on a bien $\min(\alpha_i;\gamma_i)+\min(\beta_i;\gamma_i)=\alpha_i+\beta_i$ et donc : $\gamma_i \le \min(\alpha_i;\gamma_i)+\min(\beta_i;\gamma_i)$

Conclusion : $c/ab \Rightarrow c/(a\wedge c)(b\wedge c)$

3) Montrons que pour tout $(x;y)\in\mathbb{N}^*$: $x\wedge y=1 \Leftrightarrow (x+y)\wedge(xy)=1$

Supposons que $x\wedge y=1$. Si p est un diviseur premier commun à $x+y$ et xy, alors :

$$\begin{cases} p/x+y \\ p/xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p/x^2+xy \\ p/xy \\ p/x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p/x^2 \\ p/x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p/x \\ p/x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p/x \\ p/y \end{cases}$$

Cela contredit l'hypothèse $x\wedge y=1$. Donc $(x+y)\wedge(xy)=1$.

Supposons que $(x+y)\wedge(xy)=1$. Si d est un diviseur commun à x et y, alors ça serait aussi un diviseur commun à $x+y$ et xy, et ceci contredit l'hypothèse $(x+y)\wedge(xy)=1$. D'où le résultat.

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- Calculons $(n^2+n)\wedge(2n+1)$: Soit d un diviseur commun de n^2+n et $2n+1$. On a alors :

$$\begin{cases} d/n^2+n \\ d/2n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2n^2+2n \\ d/2n^2+n \\ d/2n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/n \\ d/2n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2n \\ d/2n+1 \end{cases} \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

Ce qui montre que $(n^2+n)\wedge(2n+1)=1$

- Calculons $(15n^2+8n+6)\wedge(30n^2+21n+13)$:

Soit d un diviseur commun de $15n^2+8n+6$ et $30n^2+21n+13$. On a alors :

$$\begin{cases} d/15n^2+8n+6 \\ d/30n^2+21n+13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/30n^2+16n+12 \\ d/30n^2+21n+13 \\ d/15n^2+8n+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/5n+1 \\ d/15n^2+8n+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/5n+1 \\ d/15n^2+3n \\ d/15n^2+8n+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/5n+1 \\ d/5n+6 \end{cases}$$

Donc : $$\begin{cases} d/15n^2+8n+6 \\ d/30n^2+21n+13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/5n+1 \\ d/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/5n+1 \\ d/5n \end{cases} \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

Par conséquent : $(15n^2+8n+6)\wedge(30n^2+21n+13)=1$

5) Déterminons tous les couples d'entiers $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ tels que : $(x\vee y)+11(x\wedge y)=203$

Posons $d=x\wedge y$. Ils existent alors des entiers naturels x' et y' tels que $x=x'd$ et $y=y'd$ avec $x'\wedge y'=1$.

L'équation devient $d(x'y'+11)=203=7\times 29$. On a donc $d\in\{1;7;29;203\}$.

- 1^er^ cas : $d=1$

On a alors $x'y'=192=2^6\times 3$. Comme $x'\wedge y'=1$ alors : $(x';y')\in\{(1;192);(3;64);(64;3);(192;1)\}$;

ce qui donne $(x;y)\in\{(1;192);(3;64);(64;3);(192;1)\}$.

- $2^{\text{ème}}$ cas : $d=7$

  On a alors $x'y'=18=2\times 3^2$. Comme $x'\wedge y'=1$ alors : $(x',y')\in\{(1;18);(9;2);(2;9);(18;1)\}$

  Ce qui donne $(x,y)\in\{(7;126);(126;7);(14;63);(63;14)\}$

- $3^{\text{ème}}$ cas : $d=29$

  On a alors $x'y'=-4$. Impossible car x' et y' sont des entiers naturels.

- $4^{\text{ème}}$ cas : $d=203$

  On a alors $x'y'=-10$. Impossible car x' et y' sont des entiers naturels.

  En définitive, les couples recherchés sont :

$$(7;126),\ (126;7),\ (14;63),\ (63;14),\ (1;192),\ (3;64),\ (64;3),\ (192;1)$$

6) Soit $m\in\mathbb{N}^*$ tel que 2^m+1 soit premier. Montrons que $m=2^k$ avec $k\in\mathbb{N}$.

Supposons que l'entier m ne s'écrit pas sous la forme 2^k. Dans ce cas, il existe un couple $(\alpha;\beta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que $m=2^\alpha\times(2\beta+1)$ et alors :

$$2^m+1=2^{2^\alpha\times(2\beta+1)}+1=\left(2^{2^\alpha}\right)^{2\beta+1}+1=\left(2^{2^\alpha}+1\right)\left(\left(2^{2^\alpha}\right)^{2\beta}-\left(2^{2^\alpha}\right)^{2\beta-1}+\dots+1\right)$$

Ce qui montre que $2^{2^\alpha}+1$ divise 2^m+1. Ceci contredit l'hypothèse de primalité de 2^m+1.

7) Résolvons les systèmes suivants :

- Le système $\begin{cases}x\wedge y=18\\ x\vee y=540\end{cases}$: Posons $x=18x'$ et $y=18y'$ avec $x'\wedge y'=1$. Le système devient :

  $\begin{cases}x'\wedge y'=1\\ x'y'=30\end{cases}$, Ce qui donne : $(x';y')\in\{(30;1);(1;30);(15;2);(2;15);(5;6);(6;5)\}$

  Par conséquent, l'ensemble solution du système est :

$$S=\{(540;18);(18;540);(270;36);(36;270);(180;54);(54;180);(108;90);(90;108)\}$$

- Le système $\begin{cases}x+y=56\\ x\vee y=105\end{cases}$:

  Posons $d=x\wedge y$. On a d/x et d/y, donc $d/x+y$ et $d/(x\vee y)$, d'où $d/(56\wedge 105)$, c'est-à-dire $d/7$.

  Deux cas peuvent se présenter :

  - Si $d=1$ alors le système devient : $\begin{cases}x+y=56\\ x.y=105\end{cases}$. Ce système n'a aucune solution dans $\mathbb{N}^2$.

  - Si $d=7$, on peut poser $x=7x'$ et $y=7y'$ avec $x'\wedge y'=1$, et le système devient : $\begin{cases}x'+y'=8\\ x'.y'=15\end{cases}$

  Ce système a pour solutions dans $\mathbb{N}^2$: $(3;5)$ et $(5;3)$

  Par conséquent, l'ensemble solution du système est : $S=\{(21;35);(35;21)\}$

- Le système $\begin{cases}x\wedge y=x-y\\ x\vee y=72\end{cases}$:

  Posons $x\wedge y=d$, $x=dx'$ et $y=dy'$ avec $x'\wedge y'=1$. Le système devient :

$\begin{cases} x' - y' = 1 \\ d\,x'y' = 72 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x' = y' + 1 \\ d\,y'(y'+1) = 72 \end{cases}$. Puisque $y'(y'+1) / 72$ alors $y' \in \{1; 2; 3; 8\}$.

L'ensemble des solutions de système est : $S = \{(72;36);(36;24);(24;12);(9;8)\}$

8) Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{n^2 - 9}{n^2 - 5n + 4} \in \mathbb{Z}$.

Puisque $\dfrac{n^2-9}{n^2-5n+4} = 1 + \dfrac{5n-13}{n^2-5n+4}$ alors $\dfrac{5n-13}{n^2-5n+4} \in \mathbb{Z}$. Donc, si $n \neq 1$ et $n \neq 4$, alors :

$$(5n-13) \wedge (n^2-5n+4) = |n^2-5n+4|$$

Donc $|n^2-5n+4| \leq |5n-13|$, c'est-à-dire : $(n^2-10n+17)(n^2-9) \leq 0$.

Ceci n'est vrai que si $n \in \{-3;-2;-1;0;2;3;5;6;7\}$

Une vérification simple montre que : $\dfrac{n^2-9}{n^2-5n+4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (n = 3 \text{ ou } n = -3)$

La boîte à idées

- Pour déterminer le pgcd de deux entiers : $(k \in \mathbb{Z}^*)$
  - On essaye de se ramener à un pgcd plus simple en appliquant la formule :
  $$\text{pgcd}(ka;kb) = |k|\,\text{pgcd}(a;b)$$
  puis on utilise l'algorithme d'Euclide si le pgcd n'est pas évident.
  - On décompose chaque entier en produit de facteurs premiers.
  - On fait appel aux résultats suivants :
  $$\text{pgcd}(a;b) = \text{pgcd}(a;b-aq) \;;\; \text{pgcd}(a;b) = \text{pgcd}(c;d) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pgcd}(a;b)/c \text{ et } \text{pgcd}(a;b)/d \\ \text{pgcd}(c;d)/a \text{ et } \text{pgcd}(c;d)/b \end{cases}$$
- Pour déterminer le ppcm de deux entiers :
  - On essaye de se ramener à un ppcm plus simple en appliquant la formule :
  $$\text{ppcm}(ka;kb) = |k|\,\text{ppcm}(a;b)$$
  - On décompose chaque entier en produit de facteurs premiers.
  - On calcule le pgcd puis on applique la formule : $\text{ppcm}(a;b) = \dfrac{|ab|}{\text{pgcd}(a;b)}$
- Pour la résolution du système dans $\mathbb{Z}^2$: $(S) : \begin{cases} \text{pgcd}(x;y) = d \\ \text{ppcm}(x;y) = m \end{cases}$, on suit la discussion suivante :
  - Si d ne divise pas m, alors le système (S) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.
  - Si d divise m, on pose : $x = dx'$ et $y = dy'$ avec $\text{pgcd}(x';y') = 1$.

  Dans ce cas, le système (S) est équivalent au système : $\begin{cases} \text{pgcd}(x';y') = 1 \\ x'.y' = \dfrac{m}{d} \end{cases}$.

On achève la résolution en sélectionnant parmi les factorisations de $\frac{m}{d}$ celles pour lesquelles $\text{pgcd}(x';y')=1$.

- En arithmétique, s'il n'y a qu'un nombre raisonnable de cas à étudier, il est souvent préférable d'étudier un à un tous les cas plutôt que chercher un raisonnement global.
- L'égalité $x^r-1=(x-1)(x^{r-1}+x^{r-2}+...+x+1)$ (où $r\in\mathbb{N}^*$) est à connaître absolument. Elle est très souvent utilisée, par exemple pour les racines de l'unité dans $\mathbb{C}$, la somme des premiers termes d'une suite géométrique,...etc.

B THÉORÈME DE BÉZOUT - THÉORÈME DE GAUSS

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

1) Montrer que pour tout $(k;n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ avec $k\le n$: $k\wedge n=1\Rightarrow n/C_n^k$.

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $(n+1)/C_{2n}^n$ (Indication : exprimer C_{2n}^{n+1} en fonction de C_{2n}^n).

3) Soit $(a;b;c)\in(\mathbb{Z}^*)^3$. En utilisant le théorème de Gauss, montrer que $a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge(bc)=a\wedge c$.

4) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ (suite de FIBONACCI).

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2=(-1)^n$ et en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $u_n\wedge u_{n+1}=1$.

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $u_{m+n}=u_mu_{n+1}+u_{m-1}u_n$.

c) En déduire que $u_m\wedge u_n=u_{m\wedge n}$ pour tout $(m;n)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

SOLUTION

1) Montrer que pour tout $(k;n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ avec $k\le n$: $k\wedge n=1\Rightarrow n/C_n^k$

Supposons que $k\wedge n=1$. On a : $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n}{k}\times\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$, Ce qui entraîne que $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$ et donc n/kC_n^k. Or $k\wedge n=1$, donc d'après le théorème de Gauss, n/C_n^k ; d'où le résultat.

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $(n+1)/C_{2n}^n$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $C_{2n}^{n+1}=\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}=\frac{2n\times(2n-1)(2n-2)\times...\times n}{(n+1)!}=\frac{n}{n+1}C_{2n}^n$

Ce qui donne $(n+1)C_{2n}^{n+1}=nC_{2n}^n$, et Par conséquent $(n+1)/nC_{2n}^n$. Comme $n\wedge(n+1)=1$, alors d'après le théorème de Gauss $(n+1)/C_{2n}^n$.

3) Soit $(a;b;c)\in(\mathbb{Z}^*)^3$. Montrons que $a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge(bc)=a\wedge c$:

Posons $d = a \wedge c$ et $d' = a \wedge (bc)$. On a bien $d \,/\, d'$ car si $d \,/\, a$ et $d \,/\, c$ alors $d \,/\, bc$ et donc $d \,/\, a \wedge (bc)$.

Montrons maintenant que $d' \,/\, d$. On a $d' \,/\, a$ et $d' \,/\, bc$, et puisque $a \wedge b = 1$ alors $d' \wedge b = 1$ car sinon il existerait un diviseur premier p commun à d' et b, ce qui entraîne $p \,/\, a$ et $p \,/\, b$. d' divise bc et $d' \wedge b = 1$ donc d'après le théorème de Gauss $d' \,/\, c$. Par conséquent, $d' \,/\, a \wedge c$ et $d' \,/\, d$.

Conclusion : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (bc) = a \wedge c$.

4) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$

On a pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$. On aura alors :

$$v_{n+1} = u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_n + u_{n+1})u_n - u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) = u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = -v_n$$

La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison $q = -1$ et de premier terme $v_1 = -1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (-1)^n$ et donc $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$

Déduisons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \wedge u_{n+1} = 1$

Puisque $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$, alors $u_n.u_n - u_{n+1}u_{n-1} = 1$ ou $u_{n+1}u_{n-1} - u_n.u_n = 1$. D'après le théorème de Bézout, $u_n \wedge u_{n+1} = 1$

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{m+n} = u_m u_{n+1} + u_{m-1}u_n$

Pour $m = 1$ et $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+m} = u_{n+1} = u_{n+1}u_1 + u_n u_0 = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n$

Pour $m = 2$ et $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+m} = u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = u_{n+1}u_2 + u_n u_1 = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+m} = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n$ et $u_{n+m+1} = u_{n+1}u_{m+1} + u_m u_n$ et montrons que $u_{n+m+2} = u_{n+1}u_{m+2} + u_{m+1}u_n$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+m+2} = u_{n+m+1} + u_{n+m} = u_{n+1}u_{m+1} + u_m u_n + u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n = u_{n+1}(u_{m+1} + u_m) + u_n(u_m + u_{m-1})$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{m+n} = u_{n+1}u_{m+2} + u_{m+1}u_n$

c) Déduisons que pour tout $(m;n) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $u_m \wedge u_n = u_{m \wedge n}$

On utilisa les relations suivantes : $\quad u_n \wedge u_{n+1} = 1 \quad (1) \quad ; \quad u_{m+n} = u_m.u_{n+1} + u_{m-1}.u_n \quad (2)$

De (2) il résulte $u_{2n} = (u_{n+1} + u_{n-1})u_n$; d'où u_n / u_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Une récurrence simple sur n montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$: u_n / u_{qn}.

Par ailleurs, on sait que $m \wedge n$ est le dernier reste non nul dans l'algorithme des divisions euclidiennes successives : $\quad m \geq n \Rightarrow m = nq + r \Rightarrow m \wedge n = n \wedge r = \ldots = r_n$ où r_n / r_{n-1}.

Il résulte de ce qui précède que : $\quad u_m = u_{nq+r} = u_r.u_{nq+1} + u_{r-1}.u_{nq}$

Et donc que : $u_m \wedge u_n = u_n \wedge u_r \quad (3)$

De (3) on déduit, exactement comme dans l'algorithme d'Euclide que : $\quad u_m \wedge u_n = u_{m \wedge n}$

- Pour montrer que $P(n)$ est divisible par b, où $P(n)$ est un polynôme en n :
  - On essaye de l'écrire comme produit de nombres consécutifs.
  - On essaye une démonstration par récurrence.
  - Faire une étude des cas : $n = r + bk$ avec $r \in \{0;1;2;...;b-1\}$.
- Pour montrer qu'une somme de puissance d'exposants dépendant de n est divisible par b :
  - On utilise les congruences et le théorème de Fermat.
  - On utilise une démonstration par récurrence.
- Pour montrer qu'un entier b divise l'entier a, on peut :
  - Vérifier que le reste de la division euclidienne de a par b est nul.
  - Utiliser le théorème de Gauss.
  - Utiliser la décomposition en facteurs premiers de a et b, et montrer que tous les facteurs premiers de a apparaissent aussi dans la décomposition de a, et avec une puissance supérieure.
- Pour montrer que deux entiers a et b sont premiers entre eux:
  - On essaye d'appliquer le théorème de Bézout, en cherchant à trouver deux entiers u et v tels que :

$$au + bv = 1$$

  - On prouve que leur pgcd vaut 1 par des divisions successives.
  - On utilise les résultats suivants :

$$\begin{cases} \text{pgcd}(A;B) = 1 \\ \text{pgcd}(A;C) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{pgcd}(A;BC) = 1 \quad ; \quad \text{pgcd}(A;B) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}(A^m;B^n) = 1$$

$$\text{pgcd}(A;B) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}(A;B-Aq) = 1 \quad \text{(à montrer d'abord)}$$

$$\text{pgcd}(A;B) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}(A+B;AB) = 1 \quad \text{(à montrer d'abord)}$$

C CONGRUENCE – ÉQUATION DIOPHANTIENNE

Une étoile est visible de la terre tous les 100 jours et est apparue y a 7 jours. Une seconde est visible du même point sur Terre tous les 59 jours et a été observée pour la dernière fois il y a 3 jours. Une troisième étoile est observable tous les 347 jours. On pourra la voir dans 3 jours exactement. Le but de l'exercice est de savoir leurs dates de conjonction, c'est-à-dire les dates auxquelles elles sont visibles au même endroit dans le ciel.

1) Démontrer que résoudre ce problème revient à résoudre le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} n \equiv 7 & [100] \\ n \equiv 3 & [59] \\ n \equiv 344 & [347] \end{cases}$$

2) Résolution du système intermédiaire : $(S') : \begin{cases} n \equiv 7 \ [100] \\ n \equiv 3 \ [59] \end{cases}$

a) Démontrer qu'il existe $(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que : $100u+59v=1$.

b) Déterminer un couple $(u_0;v_0)\in\mathbb{Z}^2$ tel que : $100u_0+59v_0=1$.

c) Démontrer que $n_0=7-4\times100\times u_0$ est une solution du système (S').

d) Démontre l'équivalence suivante :

$$(n \text{ est solution du système } (S')) \Leftrightarrow n-n_0\equiv 0 \ [5900]$$

e) En déduire les solutions de du système (S').

3) Résolution du système (S) :

a) Démontrer que résoudre (S) revient à déterminer les entiers n de la forme $n=9207+5900k$ où k est un entier relatif tel que : $k\equiv 159\ [347]$.

b) En déduire les solutions de du système (S).

c) Combien de jours devra-t-on attendre pour voir les trois étoiles en même temps si l'on rate la première conjonction ?

SOLUTION

1) Si n est l'entier correspondant à ce jour, alors $n-7$ est un multiple de 100, $n-3$ est un multiple de 59 et $n+3$ est un multiple de 347. On obtient alors :

$$\begin{cases} n\equiv 7 & [100] \\ n\equiv 3 & [59] \\ n\equiv -3 & [347]\end{cases}, \text{ ce qui est équivaut au système : } (S):\begin{cases} n\equiv 7 & [100] \\ n\equiv 3 & [59] \\ n\equiv 344 & [347]\end{cases}$$

2) a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, on vérifie facilement que les entiers 100 et 59 son premiers entre eux. Donc, d'après le théorème de Bézout, il existe $(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que : $100u+59v=1$.

b) On reprend l'algorithme d'Euclide « à l'envers » pour déterminer le couple $(u_0;v_0)\in\mathbb{Z}^2$ tel que : $100u_0+59v_0=1$. Le couple $(-23;39)$ convient.

c) D'après la question précédente, $u_0=-23$ et $n_0=7-4\times100\times(-23)=9207$. Or, $9207\equiv 7\ [100]$ et $9207\equiv 3\ [59]$. Ainsi : $n_0=7-4\times100\times u_0$ est bien une solution du système (S').

d) On va démontrer cette équivalence en deux temps.

- **Sen direct :**

On suppose que n est solution du système (S'). On a donc : $\begin{cases} n\equiv 7\ [100] \\ n\equiv 3\ [59]\end{cases}$ et $\begin{cases} n_0\equiv 7\ [100] \\ n_0\equiv 3\ [59]\end{cases}$

Par transitivité de la congruence : $n\equiv n_0\ [100]$ et $n\equiv n_0\ [59]$. Il s'ensuit donc que :

$100 / n-n_0$ et $59 / n-n_0$. Puisque $100 \wedge 59=1$ alors $5900 / n-n_0$. Ainsi : $n-n_0 \equiv 0 \quad [5900]$.

- **Sen réciproque :**

  Supposons que $n-n_0 \equiv 0 \ [5900]$. Alors $5900 / n-n_0$. En particulier : $59 / n-n_0$ et $100 / n-n_0$ car 59 et 100 sont des diviseurs de 5900. Il s'ensuit donc que : $n \equiv n_0 \ [100]$ et $n \equiv n_0 \ [59]$.

  Par suite : n est solution du système (S').

e) D'après la question précédente, les solutions du système (S') sont les entiers $9207+5900k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3) Résolution du système (S) :

a) L'entier n est solution du système (S) si ; et seulement si, n est solution du système (S') et de l'équation $n \equiv 344 \ [347]$. Ce sont les entiers n de la forme $9207+5900k$, $k \in \mathbb{Z}$ tels que $n \equiv 344 \ [347]$.

soit $k \in \mathbb{Z}$. On a : $9207+5900k \equiv 344 \ [347] \Leftrightarrow 5900k \equiv -8863 \ [347] \Leftrightarrow k \equiv 159 \ [347]$

Réciproquement, si $k \equiv 159 \ [347]$ alors $9207+5900k \equiv 344 \ [347]$. De plus, d'après la question 2) e), les entiers $9207+5900k$ sont solutions du système (S').

b) L'équation $k \equiv 159 \ [347]$ donne $k=159+347\ell$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$. Par suite, les solutions du système (S) sont tous les entiers relatifs n tels que : $n=947307+2047300\ell$ où $\ell \in \mathbb{Z}$.

c) Les dates de conjonction sont les termes d'une suite arithmétique de raison 2047300. Elles sont donc espacées de 2047300 jours pour la prochaine rencontre. Cela correspond à environ 5609 ans.

- Il faut se souvenir de la façon dont on utilise l'algorithme d'Euclide pour montrer que deux entiers a et b sont premiers entre eux et ensuite pour obtenir des entiers u et v tels que $au+bv=1$.
- Il faut se souvenir de l'importance des congruences en arithmétique et de leurs sens.

  Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$. On a : $a \equiv b \ [n] \Leftrightarrow n / (b-a) \Leftrightarrow [\ (\exists k \in \mathbb{Z}) \ b=a+kn \ ]$
- Il est intéressant de connaître et savoir démontrer le résultat suivant :

  Soit a, b, m et n des entiers relatifs tels que m et n soient premiers entre eux.

  Le système $\begin{cases} x \equiv a \ [m] \\ x \equiv b \ [n] \end{cases}$ possède des solutions dans $\mathbb{Z}$. Si x_0 est l'une de ces solutions alors le système est équivalent à une seule équation dans $\mathbb{Z}$ qui est : $x \equiv x_0 \ [mn]$

  Voici quelques éléments de la démonstration :

  « Puisque $m \wedge n=1$ alors d'après de théorème de Bézout, il existe un couple $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $mu+nv=1$. Si on pose $x_0=bmu+anv$, alors x_0 est bien solution du système.

  Puisque $m / x-x_0$ et $n / x-x_0$ et $m \wedge n=1$ alors $mn / x-x_0$ et donc $x \equiv x_0 \ [mn]$

  Réciproquement, si $mn / x-x_0$ alors $m / x-x_0$ et $n / x-x_0$, d'où le résultat ».

- Pour résoudre l'équation $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$, on commence par calculer $d = a \wedge b$ et on note $a = a'd$ et $b = b'd$ avec $(a';b') \in \mathbb{Z}^2$.
  - Si d ne divise pas c, alors l'équation $ax + by = c$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.
  - Si d divise c, alors on note $c = c'd$ avec $c' \in \mathbb{Z}$.

  Si $(u;v)$ est un couple de coefficients de Bézout pour a et b, alors $(x_0;y_0) = (c'u;c'v)$ est une solution entière, on remarque que si $(x;y)$ est une solution de l'équation, alors $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$.

  On termine la résolution en utilisant le théorème de Gauss.

D CHIFFREMENT DE HILL

Le chiffrement de Hill (1891-1961) est un chiffrement polygraphique, c'est-à-dire que l'on ne (dé)chiffre pas les lettres les unes après les autres, mais par paquets, ici de deux lettres.

Partie A :

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E) :\ 23x - 26y = 1$

1) Vérifier que le couple $(-9;-8)$ est solution particulière de l'équation (E).

2) Résoudre alors l'équation (E).

3) En déduire un entier a tel que : $0 \leq a \leq 25$ et $23a \equiv 1\,[26]$.

Partie B :

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :

Étape 1 : Chaque lettre du mot est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

On obtient un couple d'entiers $(x_1\,;\,x_2)$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

Étape 2 : $(x_1\,;\,x_2)$ est transformé en $(y_1\,;y_2)$ tel que :

$$(S_1) :\ \begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \ [26] \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \ [26] \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq y_1 \leq 25 \ \text{ et } \ 0 \leq y_2 \leq 25$$

Étape 3 : $(y_1\,;y_2)$ est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1 .

Exemple : $\underbrace{\text{TE}}_{\textit{mot en clair}} \xrightarrow{\textit{étape 1}} (19;4) \xrightarrow{\textit{étape 2}} (13;19) \xrightarrow{\textit{étape 3}} \underbrace{\text{NT}}_{\textit{mot codé}}$

1) Coder le mot ST.

2) On veut maintenant déterminer la procédure de décodage :

a) Montrer que tout couple $(x_1 ; x_2)$ vérifiant les équations du système (S_1), vérifie les équations du système :

$$(S_2) : \begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 \quad [26] \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 \quad [26] \end{cases}$$

b) À l'aide de la partie A, montrer que le couple $(x_1 ; x_2)$ vérifiant les équations du système (S_2), vérifie les équations du système :

$$(S_3) : \begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \quad [26] \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \quad [26] \end{cases}$$

c) Montrer que tout couple $(x_1 ; x_2)$ vérifiant les équations du système (S_3), vérifie les équations du (S_1).

d) Décoder le mot YJ.

SOLUTION

Partie A :

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E) : 23x - 26y = 1$

1) On a $23\times(-9) - 26\times(-8) = -207 + 208 = 1$, donc $(-9;-8)$ est solution particulière de l'équation (E).

2) Résolution de l'équation (E) : Posons $(x_0 ; y_0) = (-9;-8)$. Soit $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de (E).

On a donc : $23x - 26y = 23x_0 - 26y_0 \Leftrightarrow 23(x - x_0) = 26(y - y_0)$. Ainsi, 26 divise $23(x - x_0)$ et 26 est premier avec 23. D'après le théorème de Gauss, 26 divise $x - x_0$. Par conséquent : $(\exists k \in \mathbb{Z})\ x - x_0 = 26k$.

L'égalité $23(x - x_0) = 26(y - y_0)$ donne $y - y_0 = 23k$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$x = -9 + 26k \quad \text{et} \quad y = -8 + 23k$$

En résumé, l'ensemble solution de l'équation (E) est : $S = \{(-9 + 26k ; -8 + 23k) \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

3) Soit a un entier relatif. La relation $23a \equiv 1\ [26]$ signifie qu'il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $23a - 26y = 1$. D'après la question précédente, ceci impose l'existence d'un entier relatif k tel que $a = -9 + 26k$. Ensuite :

$$0 \le a \le 25 \Leftrightarrow 0 \le -9 + 26k \le 25 \Leftrightarrow 9 \le 26k \le 34 \Leftrightarrow \frac{9}{26} \le k \le \frac{34}{26} \Leftrightarrow k = 1$$

Pour $k = 1$, on obtient $a = -9 + 26 = 17$. Réciproquement, puisque $17 \times 23 = 391 = 1 + 15 \times 26$, l'entier $a = 17$ est un entier tel que : $0 \le a \le 25$ et $23a \equiv 1\ [26]$.

Partie B :

1) **Étape 1** : Le mot ST correspond à $(x_1 ; x_2) = (18;19)$.

Étape 2 : On a $11x_1 + 3x_2 = 11\times 18 + 3\times 19 = 255$. L'entier y_1 est alors le reste de la division euclidienne de

255 par 26. Comme $255 = 21 + 234 = 21 + 9\times 26$ et que $0 \leq 21 \leq 25$, on en déduit que $y_1 = 21$.

De la même façon, on montre que $y_2 = 20$.

Étape 3 : Le couple $(21;20)$ correspond au mot VU et donc : Le mot ST se code en VU.

2) a) Soient x_1, x_2, y_1 et y_2 quatre entiers. On a les implications :

$$\begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \ [26] \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \ [26] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y_1 + 23y_2 \equiv (4\times 11 + 23\times 7)x_1 + (4\times 3 + 23\times 4)x_2 \ [26] \\ 19y_1 + 11y_2 \equiv (19\times 11 + 11\times 7)x_1 + (19\times 3 + 11\times 4)x_2 \ [26] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y_1 + 23y_2 \equiv 205x_1 + 104x_2 \ [26] \\ 19y_1 + 11y_2 \equiv 286x_1 + 101x_2 \ [26] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y_1 + 23y_2 \equiv 23x_1 \ [26] \\ 19y_1 + 11y_2 \equiv 23x_2 \ [26] \end{cases}$$

car $205 \equiv 23\,[26]$, $104 \equiv 0\,[26]$, $286 \equiv 0\,[26]$ et $101 \equiv 23\,[26]$; d'où le résultat.

b) En suivant la même démarche de la question 2) a), on trouve le résultat demandé. (À vérifier)

c) Réciproquement, on a les implications :

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \ [26] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x_1 + 3x_2 \equiv 209y_1 + 26y_2 \ [26] \\ 7x_1 + 4x_2 \equiv 156y_1 + 27y_2 \ [26] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \ [26] \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \ [26] \end{cases}$$

En résumé : $$\begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \ [26] \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \ [26] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \ [26] \end{cases}$$

d) Le mot YJ correspond au couple $(y_1;y_2) = (24;9)$. De plus :

- $16y_1 + y_2 = 16\times 24 + 9 = 393 = 3 + 15\times 26$ et donc $x_1 = 3$.
- $11y_1 + 5y_2 = 11\times 24 + 5\times 9 = 309 = 23 + 11\times 26$ et donc $x_2 = 23$.

Le couple $(3;23)$ correspond au mot DX et donc :

Le mot YJ se décode en DX

EXERCICES D'APPLICATION

DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{Z}$

EXERCICE 01

1) On sait que le reste de la division euclidienne d'un entier a par 12 est égale à 7. Déterminer le reste de la division euclidienne de a par 3.
2) On sait que le reste de la division euclidienne d'un entier b par 3 est égale à 2. Déterminer les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de b par 12.

EXERCICE 02

1) Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 37^n par 7.
2) En déduire le reste de la division euclidienne des nombres 37^{26} et 37^{250} par 7.
3) Quel est le reste de la division euclidienne de nombre $N=(705432)^5$ par 11 ?

EXERCICE 03

Soit n un entier naturel.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^n par 3.
2) Déterminer le reste de la division euclidienne de $(275423)^n$ par 3.
3) Déterminer le reste de la division euclidienne de $(372121)^n$ par 3.
4) Déterminer les valeurs de l'entier n pour lesquelles le nombre $N=(275423)^n+(372121)^n$ est divisible par 3.

EXERCICE 04

Montrer que le nombre $a=n^2\left(n^2-1\right)$ est divisible par 12 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

EXERCICE 05

Déterminer les entiers naturels n pour lesquelles le nombre $a=n^2-3n+6$ est divisible par 5.

EXERCICE 06

Soit a, b, c et d des entiers relatifs tels que $ad+bc\neq 0$.
On suppose que $ad+bc$ divise les nombres a, b, c et d.
Établir que : $|ad+bc|=1$.

EXERCICE 07

1) On pose : $E=\{n\in\mathbb{N} / n\geq 7\}$
   Déterminer les valeurs de $n\in E$ pour lesquelles :
   $$n-6 / n+9$$
2) Soit $n\in\mathbb{Z}-\{3\}$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles : $n-3 / n^3-3$
3) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $3xy+x+3y=99$

CONGRUENCE MODULO

EXERCICE 08

Déterminer $x\in\mathbb{Z}$ sachant que :

1) $212\equiv x\,[11]$ et $0<x<11$.
2) $1111\equiv x\,[23]$ et $-23<x<0$.
3) $7000\equiv x\,[102]$ et $-102<x<0$.
4) $2017\equiv x\,[20]$ et $0<x<20$.
5) $(2601)^{187}\equiv x\,[11]$ et $0\leq x<11$.
6) $(20197)^{1438}\equiv x\,[7]$ et $0\leq x<7$.

EXERCICE 09

Soit $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$ et $(m;n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$. Montrer que :

$$\begin{cases} n / m \\ a\equiv b\,[m] \end{cases} \Rightarrow a\equiv b\,[n]$$

EXERCICE 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer le reste de la division euclidienne de a par b.

1) $a = 5^{206}$ et $b = 7$; 2) $a = 8^{2018} - 8$ et $b = 11$

3) $a = 7 \times 3^{20}$ et $b = 5$; 4) $a = 2017^{1438}$ et $b = 3$

EXERCICE 11

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 10^{3n} \equiv 1 [27]$

2) On pose : $N = 10^{100} + 100^{10}$

Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 27.

NOMBRES PREMIERS

EXERCICE 12

Les questions suivantes sont **indépendantes**.

1) Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.

Montrer que : $p \equiv 1 [4]$ et $p \equiv 3 [4]$

2) Soit a, b et c trois nombres premiers distincts et strictement supérieurs ou égales à 3.

Montrer que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas premier.

3) Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

Montrer que : $p^2 + 11 \equiv 0 [12]$

4) Montrer que la somme de trois entiers naturels impairs consécutifs n'est pas un nombre premier.

5) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Le nombre $a^4 + a^2 + 1$ est-il premier ?

6) Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls.

Montrer que si $ab = cd$ alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ n'est pas premier.

7) Soit $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x > 1$ et $y > 1$.

Montrer que $N = a^4 + 4b^4$ n'est pas premier.

8) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles $n^4 + 4$ est premier.

9) Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^2 - y^2 = p$

EXERCICE 13

Soit $(a; b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que les nombres a, $a + b$ et $a + 2b$ sont premiers.

1) Montrer que b est pair.

2) Montrer que si $a > 3$ alors 3 divise b.

3) Donner trois exemples dans lesquels les entiers a, $a + b$ et $a + 2b$ sont des nombres premiers.

EXERCICE 14

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

1) Montrer que : $p^2 \equiv 1 [3]$ et $2^p \equiv 2 [3]$.

2) En déduire que l'entier $p^2 + 2^p$ n'est pas premier.

ALGORITHME D'EUCLIDE ET P.G.C.D

EXERCICE 15

En utilisant l'algorithme d'Euclide, Déterminer $a \wedge b$ dans chacun des cas suivants :

1) $a = 604800$ et $b = 176280$.

2) $a = 1309770$ et $b = 571725$.

EXERCICE 16

Déterminer b tel que : $600 < b < 1100$ et $630 \wedge b = 105$.

EXERCICE 17

Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes.

1) On pose : $a = 257$ et $b = 45$

a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer $a \wedge b$.

b) En déduire qu'il existe un couple $(\alpha; \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\alpha a + \beta b = a \wedge b$ (α et β à déterminer).

2) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs x et y tels que :

$$1050x + 735y = 1050 \wedge 735$$

3) En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer $137 \wedge 726$ puis déterminer $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$726x_0 + 137y_0 = 1$$

EXERCICE 18

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Établir que :

1) $(3a+4b)\wedge(4a+5b)=1$.

2) $(4a+15b)\wedge(3a+11b)=1$.

3) $(a+2b)\wedge(2a+b)=1$ ou $(a+2b)\wedge(2a+b)=3$.

EXERCICE 19

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$a=9n+2 \quad \text{et} \quad b=9n^2-n-4$$

1) Montrer que : $a\wedge b=(3n+4)\wedge 10$

2) En déduire les valeurs possibles de $a\wedge b$.

3 Déterminer selon les valeurs de n, la valeur de $a\wedge b$.

EXERCICE 20

1) Montrer que pour tout $(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$:

$$a\wedge c=1\Rightarrow(ab)\wedge c=b\wedge c$$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$c=5n+8 \quad \text{et} \quad b=n^2+n-3$$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$b\wedge c=(5n+8)\wedge(3n+15)=(n+22)\wedge 51$$

b) Déterminer les valeurs possible de $b\wedge c$.

c) Déterminer selon les valeurs de n, la valeur de plus grand commun diviseur de b et c.

EXERCICE 21

Soit $(a;b)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

1) On suppose dans cette question que $a\wedge b=1$.

a) Montrer que si $a+b$ impair, alors :

$$(a^2+b^2)\wedge(a+b)=1$$

b) Montrer que : $(a^2-ab+b^2)\wedge(a+b)\leq 3$

2) Montrer que :

$$(a^2+b^2)\wedge(ab)=(a\wedge b)^2$$

$$a\wedge b=(a+b)\wedge(a\vee b)$$

$$(a\wedge b)+(a\vee b)=a+b\Leftrightarrow(a/b \text{ ou } b/a)$$

THÉORÈME DE BEZOUT - THÉORÈME DE GAUSS

EXERCICE 22

En utilisant le théorème de Bezout, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

1) $n\wedge(2n+1)=1$; 2) $(2n+3)\wedge(3n+5)=1$

3) $n\wedge(n^3+1)=1$; 4) $(7n+2)\wedge(11n+3)=1$

5) $(n+2)\wedge(2n^2+4n+1)=1$.

EXERCICE 23

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$(n^2+4n+1)\wedge(n+4)=1$$

2) a) Développer $(n^2+1)^2$ et $(n^2+1)^3$.

b) En déduire, à l'aide de théorème de Bezout, que

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ (n^4+2n^2+1)\wedge(n^4+3n^2+3)=1$$

EXERCICE 24

1) Déterminer $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$ sachant : $3a=2b$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

$$(E_1): 7x=5y \quad ; \quad (E_2): 5(x-1)=2(x-3)$$

3) Trouver $(\alpha;\beta)\in\mathbb{Z}^2$ tel que : $4(\alpha-1)=7(\beta+2)$

avec : $-20\leq\alpha\leq 21$ et $-34\leq\beta\leq 25$

EXERCICE 25

Soit $(x;y;z)\in\mathbb{N}^3$ tel que : $3x-7y-24z=0$

En utilisant le théorème de Gauss, montrer que 21 divise $y(x-z)$.

EXERCICE 26

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n\leq 10$

et : $n\equiv 5\,[139]$ et $n\equiv 5\,[140]$

EXERCICE 27

Déterminer dans $\mathbb{N}^2$ tous les couples $(x;y)$ tels que :

$$\frac{x+12}{y+15}=\frac{x}{y} \quad \text{et} \quad x\wedge y=1$$

L'ENSEMBLE $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

EXERCICE 28

Résoudre les équations suivantes :

1) $x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; $\overline{3}x = \overline{1}$

2) $x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; $\overline{5}x = \overline{2}$

3) $x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; $\overline{6}x^2 + \overline{4} = \overline{0}$

4) $x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$; $\overline{5}x^2 + x - \overline{4} = \overline{0}$

5) $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; $(\overline{4}x + \overline{5})(\overline{2}x + \overline{3}) = \overline{0}$

6) $x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; $x^3 = \overline{5}x^2 - \overline{4}$

EXERCICE 29

Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \overline{2}x + \overline{7}y = \overline{3} \\ x + \overline{4}y = \overline{2} \end{cases}$$

EXERCICE 30

1) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} \overline{2}x + \overline{6}y = \overline{4} \\ x - \overline{3}y = \overline{0} \end{cases}$$

2) Trouver tous les couples $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que les nombres $2a - 6b - 4$ et $a - 3b$ soient divisibles à la fois par 8.

EXERCICE 31

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ ce qui suit :

1) $8x \equiv 1\ [5]$; 2) $x^2 \equiv 4\ [7]$; 3) $4x \equiv 1\ [3]$

EXERCICE 32

Soit p un nombre premier.

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 = \overline{0}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ l'équation :

$$x^2 + \overline{16}x + \overline{15} = \overline{0}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $4x^2 - 2x - 2 \equiv 0\ [9]$

ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES

EXERCICE 33

1) Déterminer $168 \wedge 20$.

2) Les équations suivantes admettent-elles des solutions dans $\mathbb{Z}^2$:

$(E_1) : 168x + 20y = 6$; $(E_2) : 168x + 20y = 4$

$(E_3) : 42x + 5y = 2$; $(E_4) : 336x + 40y = 20$

3) a) Déterminer un couple $(m;p) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$42m + 5p = 1$$

b) En déduire une solution $(u_0 ; v_0)$ de l'équation :

$$(x;y) \in \mathbb{Z}^2 \quad 42x + 5y = 2$$

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $42x + 5y = 2$

d) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation :

$$(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = -5$$

EXERCICE 34

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $17x - 7y = 1$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes :

a) $\begin{cases} x \equiv 2\ [7] \\ x \equiv -2\ [17] \end{cases}$; b) $\begin{cases} x \equiv -2\ [7] \\ x \equiv 2\ [17] \end{cases}$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 \equiv 4\ [119]$

EXERCICE 35

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : 324x - 245y = 7$$

1) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E), alors le nombre x est divisible par 7.

2) Résoudre l'équation (E).

3) Soit $(x;y)$ une solution de (E). On pose : $d = x \wedge y$.

a) Déterminer les valeurs possibles de d.

b) Déterminer les couples $(x;y)$ solutions de l'équation (E) tels que : $x \wedge y = 1$

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE FERMAT

EXERCICE 36

1) Montre que : $2^{349} \equiv 2\,[7]$ et $8^{2020} \equiv 1\,[11]$

2) Montrer que 13 divise $2^{70}+3^{70}$.

3) Déterminer le reste de la division euclidienne de nombre 5^{38} par 11.

4) Montrer que $2018^{2010}-4$ est divisible par 5.

EXERCICE 37

Soit p un nombre premier positif et x un entier tel que : $1 < x < p-1$. Montrer que : $\left(x^2-1\right)^{p-1} \equiv 1\,[p]$

EXERCICE 38

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : x^3 - 3y^3 - 6y^2 - 13x + 10 = 0$$

Monter que (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

EXERCICE 39

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier tel que $p > 2$.

1) Montrer que : $n^p \equiv n\,[2]$

2) En déduire à l'aide de théorème de Fermat que :

$$(n+1)^p - \left(n^p+1\right) \equiv 0\,[2p]$$

EXERCICE 40

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer que : $n^7 + 6n \equiv 0\,[7]$ et $n^7 \equiv n\,[42]$

2) a) Montrer que : $n^5 - n \equiv 0\,[5]$

b) En déduire que : $n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right) \equiv 0\,[5]$

3) Montrer que : $n^2\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right) \equiv 0\,[60]$

EXERCICE 41

Soit p un nombre premier tel que p divise $1+2^p$.

Montrer que $p = 3$.

EXERCICE 42

Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls.

À l'aide de théorème de Fermat, montrer que :

$$a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0\,[30]$$

EXERCICE 43

Soit p un nombre premier positif et $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$.

Montrer que si $a^p \equiv b^p\,[p]$, alors $a^p \equiv b^p\,\left[p^2\right]$.

EXERCICE 44

Soit p un nombre premier positif impair et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge p = 1$.

1) Montrer que : $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\,[p]$ et $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\,[p]$

2) Montrer que : $n^{p(p-1)} \equiv 1\,[p]$

SYSTÈMES DE NUMÉRATION

EXERCICE 45

1) Déterminer les valeurs des entiers naturels x et y pour lesquelles le nombre $N = \overline{26x95y}_{(10)}$ est divisible par 3 et par 11.

2) Déterminer les chiffres α et β pour lesquels le nombre $K = \overline{11\alpha 1\beta}_{(10)}$ est divisible par 28.

EXERCICE 46

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

$(E_1) : \overline{23}_{(10)} = \overline{27}_{(b)}$; $(E_2) : \overline{136}_{(10)} = \overline{253}_{(b)}$

$(E_3) : \overline{303}_{(10)} = \overline{523}_{(b)}$; $(E_4) : \overline{12551}_{(10)} = \overline{30407}_{(b)}$

EXERCICE 47

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 6.

On considère le nombre $N = \overline{1540}_{(b)}$.

1) Montrer que le nombre N est divisible par b, par $b+1$ et par $b+4$.

2) Existe-t-il des valeurs de l'entier b pour lesquelles le nombre N est divisible par $b-1$?

EXERCICE 48

Les questions suivantes sont indépendantes.

A) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $N = \overline{52}_p$ et $N = \overline{42}_q$.

Déterminer les valeurs de p et q.

B) Soit $X = \overline{62310425}_{(7)}$.

Déterminer l'écriture du reste de la division euclidienne de X dans le système de numération de base 7.

C) Déterminer les entiers naturels α, β et b tels que :

$$\overline{\beta\beta\beta}_{(b)} = \overline{\alpha\alpha}_{(2)}$$

D) On considère les nombres suivants:

$$x = \overline{236}_{(8)} \quad \text{et} \quad y = \overline{347}_{(8)}$$

Calculer : $x + y$ et $x \times y$

E) Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que : $\overline{45}_{(b)} + \overline{36}_{(b)} = \overline{103}_{(b)}$

Calculer : $\overline{45}_{(b)} \times \overline{36}_{(b)}$

F) Représenter le nombre $\overline{4523}_{(8)}$ dans le système de numération binaire.

EXERCICE 49

Les questions suivantes sont indépendantes.

A) Soit $N = \overline{1010111}_{(2)}$. Montrer que le reste de la division euclidienne de N par 2^3 est $\overline{111}_{(2)}$.

B) Déterminer l'entier naturel b sachant que :

$$334 = \overline{11032}_{(b)}$$

C) Soit $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Montrer que le nombre $\overline{10401}_{(p)}$ n'est pas premier.

EXERCICE 50

On considère le nombre : $N = \overline{28\alpha75\beta}_{(10)}$

1) Montrer que : $3 / N \Rightarrow 3 / 1 + \alpha + \beta$.

2) Montrer que : $N \equiv 8 - \alpha + \beta \ [11]$

3) En déduire α et β sachant que : $3 / N$ et $11 / N$

ARITHMÉTIQUE ET SUITES NUMÉRIQUES

EXERCICE 51

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \text{ si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} \equiv u_n \ [4] \quad \text{et} \quad 2u_n \equiv 28 \ [100]$$

3) A-t-on : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n \equiv 14 \ [100]$

EXERCICE 52

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$.

1) Calculer $S_{n+1} \wedge S_n$.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ S_{n+2} \wedge S_{n+1} \wedge S_n = 1$

EXERCICE 53

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $F_n = 2^{2^n} + 1$.

Montrer que : $(\forall (n;k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) \ F_n \wedge F_{n+k} = 1$

EXERCICE 54

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$x_n = \frac{n(n+1)}{2} \ ; \ y_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ; \ z_n = x_n^2$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad y_n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad z_n \in \mathbb{N}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $d_n = (2n+1) \wedge 3$

a) Calculer d_n en fonction de n.

b) En déduire $x_n \wedge y_n$.

3) Calculer $\Delta_n = n \wedge (n+2)$.

4) En déduire $z_{n+1} \wedge z_n$.

5) Montrer que si $n \geq 2$ alors : $z_n \wedge z_{n+1} \wedge z_{n+2} = 1$.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 55

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{6n+3}+1 \equiv 0\ [7]$; b) $10^n(9n-1) \equiv 8\ [9]$

c) $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1 \equiv 0\ [13]$; d) $7^{3n} \equiv 1\ [9]$

e) $5n^3+n \equiv 0\ [6]$; f) $n(n+1)(n+5) \equiv 0\ [6]$

g) $5(n^2+n)^2 \equiv 0\ [20]$; h) $4^n+7^n \equiv 2\ [9]$

EXERCICE 56

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$6^n \equiv 1+5n\ [25] \quad \text{et} \quad 4^n+6n-1 \equiv 0\ [9]$$

2) Montrer que pour tout $(a;b) \in \mathbb{N}^2$:

$$ab(a^2-b^2) \equiv 0\ [3]$$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $n^{19} \equiv n\ [19]$

EXERCICE 57

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+1)^n \equiv 1\ [n^2] \quad ; \quad 2^{2n-1} \times 3^{n+2}+1 \equiv 0\ [11]$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \equiv 0\ [24]$$

EXERCICE 58

Résoudre dans $\mathbb{N}$ ce qui suit :

a) $2^n+5^n \equiv 0\ [7]$; b) $100+102^n+103^n \equiv 0\ [7]$

c) $(2n+3)5^n \equiv 0\ [8]$; d) $5^n+2n+3 \equiv 0\ [8]$

EXERCICE 59

1) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 210.

2) Soit $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On pose :

$$m = x \vee y \quad \text{et} \quad d = x \wedge y$$

Déterminer tous les couples $(x;y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} m = 210d \\ y-x = d \end{cases}$$

EXERCICE 60

Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes.

Pour tout $(a;b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose :

$$m = a \vee b \quad \text{et} \quad d = a \wedge b$$

1) Déterminer tous les couples $(a;b)$ tels que :

a ne divise pas b et $a < b$ et $2m+3d = 78$.

2) Déterminer tous les couples $(a;b)$ tels que :

$$\begin{cases} a \leq b \\ a+b = 100 \\ m = 19 \end{cases}$$

3) Déterminer tous les couples $(a;b)$ tels que :

$$a < b \quad \text{et} \quad m-d = 77.$$

4) Déterminer tous les paires $\{a;b\}$ tels que :

$$2m+7d = 11$$

EXERCICE 61

Soit a, b, α et β des éléments de $\mathbb{Z}^*$ tels que : $a = \alpha b+\beta$

1) Montrer que : $a \wedge b = b \wedge \beta$.

2) On pose : $d_1 = a \wedge b$ et $d_2 = (9a+7b) \wedge (5a+4b)$

Déterminer d_2 en fonction de d_1.

3) Calculer $(9n+4) \wedge (2n-1)$ selon les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 62

1) Soit $(a;b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $a+b = 23$

a) Montrer que : $a \wedge b = 1$.

b) En déduire a et b tels que : $a < b$ et $a \vee b = 126$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $9u-14v = 1$.

3) On considère l'ensemble S des nombres $x \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{cases} x \equiv 4\ [9] \\ x \equiv 5\ [14] \end{cases}$$

Montrer que les éléments de S sont congrus à un même nombre modulo 126.

EXERCICE 63

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E)\ :\ 409x - 68y = 17$$

1) Montrer que si $(x;y)$ est solution de (E) alors le nombre x est divisible par 17.

2) Déterminer la solution $(x_0;y_0)$ de l'équation (E) tel que $0 < x_0 < 30$ et en déduire les solutions de (E).

3) Soit $(x;y)$ une solution de (E).

a) Montrer que le quotient de la division euclidienne de y par x est indépendant de x et de y.

b) Montrer que $x \wedge y = 17$ si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de y par x est un multiple du nombre 17.

EXERCICE 64

Soit $(u;v) \in (\mathbb{Z}^*)^2$.

1) Montrer que si $u \wedge v = 1$ alors : $(u^2+v^2) \wedge u = 1$ et $(u^2+v^2) \wedge v = 1$ et $(u^2+v^2) \wedge (uv) = 1$

2) On considère dans $(\mathbb{Z}^*)^3$ l'équation :

$$(E)\ :\ (x^2+y^2)z = 26xy$$

a) Soit $(x;y;z)$ une solution de (E) tel que $x \wedge y = 1$.

Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$(x^2+y^2)t = 26$$

b) Trouver tous les triplets $(x;y;z)$ solutions de l'équation (E) tels que : $x \wedge y = 1$.

EXERCICE 65

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) suivante :

$$(E)\ :\ x^2 + y^2 + xy - 13x = 0$$

On pose : $d = x \wedge y$ et $x = ad$ et $y = bd$

1) Montrer que a divise d.

2) On pose : $d = ac$ où $c \in \mathbb{N}^*$

Montrer que : $c(a^2+ab+b^2) = 13$

3) En déduire que $c = 1$.

4) Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E).

EXERCICE 66

Soit p et q deux entiers naturels non nuls.

1) Montrer que si $p \wedge q = 1$ alors :

$$(p+q) \wedge p = 1 \quad \text{et} \quad p \wedge q(p+1) = 1$$

2) Soit $(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que :

$$(1) \quad x(43-x) = y(x+y)$$

On pose : $d = x \wedge y$ et $x = ad$ et $y = bd$

a) Montrer que : $a(43-ad) = bd(a+b)$.

b) Montrer que a divise d. On pose donc $d = ac$.

c) Montrer que $c(a^2+ab+b^2) = 43$ et en déduire $c = 1$.

d) Déterminer tous les couples $(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant la relation (1).

EXERCICE 67

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E)\ :\ 4x^2 - 9y^2 = 432$$

1) a) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E), alors : $2 / y$ et $3 / x$.

b) Montrer que si $(X;Y)$ est une solution de l'équation $X^2 - Y^2 = 12$ alors $(3X;2Y)$ est une solution de l'équation (E).

2) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $X^2 - Y^2 = 12$.

b) En déduire les solutions de l'équation (E).

EXERCICE 68

Soit $(a;b) \in \mathbb{N}^2$. On pose :

$$A = 11a + 2b \quad \text{et} \quad B = 18a + 5b$$

1) a) Calculer $7A + B$ en fonction de a et b.

b) En déduire que : $A \equiv 0\,[19] \Leftrightarrow B \equiv 0\,[19]$

2) On pose : $A \wedge B = \delta$

Montrer que : $a \wedge b = 1 \Rightarrow \delta \in \{1;19\}$

EXERCICE 69

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ définis par :

$\mathscr{P} : x+2y-z+2=0$ et $\mathscr{Q} : 3x-y+5z=0$

1) Montrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ se coupent selon une droite $\mathscr{D}$.

2) Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

Montrer que : $M\in\mathscr{D} \Leftrightarrow 8x+9y+10=0$

3) Quelle sont les points de la droite $\mathscr{D}$ dont les coordonnées appartiennent à $\mathbb{Z}$?

EXERCICE 70

1) Montrer que pour tout $(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$:

$$a\wedge b=b\wedge(a-bc)$$

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}$:

$$(5n^3-n)\wedge(n+2)=(n+2)\wedge 38$$

3) Déterminer l'ensemble H définie par :

$$H=\{n\in\mathbb{Z}/\ (n+2) \text{ divise } (5n^3-n)\}$$

4) Quelles sont les valeurs possibles de nombre :

$$(5n^3-n)\wedge(n+2)\ ?$$

5) Déterminer l'ensemble K définie par :

$$K=\{n\in\mathbb{Z}/\ (5n^3-n)\wedge(n+2)=19\}$$

EXERCICE 71

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x\wedge y=x-y \\ x\vee y=12 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x\wedge y=x-y \\ x\vee y=12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x\wedge y=12 \\ x\vee y=420 \\ x>y>20 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x\vee y=(x\wedge y)^2 \\ x+y=180 \end{cases}$

EXERCICE 72

Soit $(a;b;c;d)\in(\mathbb{Z}^*)^4$ tel que : $a\wedge b=c\wedge d=1$

Montrer que : $(ac)\wedge(bd)=(a\wedge b)(b\wedge c)$

EXERCICE 73

Soit $(a;b;c;d;p;q)\in(\mathbb{Z}^*)^6$ tel que : $ad-bc=1$

Montrer que : $(ap+bq)\wedge(cp+dq)=p\wedge q$

EXERCICE 74

Soit $(x;p;q;d)\in(\mathbb{N}^*)^4$ avec $x>1$.

1) Montrer que si d/p alors (x^d-1) divise (x^p-1).

2) a) Montrer que si $p\wedge q=d$ alors il existe un couple $(m;n)\in\mathbb{N}^2$ avec $mp-nq=d$.

b) En déduire que si $p\wedge q=d$, alors il existe un couple $(m;n)\in\mathbb{N}^2$ tel que :

$$(x^{mp}-1)-(x^{nq}-1)x^d=x^d-1$$

3) Déduire de ce qui précède que :

$$(x^{mp}-1)\wedge(x^{nq}-1)=x^d-1$$

EXERCICE 75

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

1) Montrer que :

$$(a\wedge b)+(a\vee b)=a+b \Leftrightarrow (a/b \text{ et } b/a)$$

$$(a^2+ab+b^2)\wedge(ab)=(a\wedge b)^2$$

2) a) Montrer l'équivalence : $a^2/b^2 \Leftrightarrow a/b$

b) En déduire que : $(\forall r\in\mathbb{Q}^*)\ r^2\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow r\in\mathbb{Z}$

EXERCICE 76

On considère l'ensemble :

$$S=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2\ /2^x-3^y=1\}$$

1) Montrer que : $(2;1)\in S$ et $(1;0)\in S$

2) Soit $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ tel que : $(x;y)\notin\{(1;0);(2;1)\}$

On suppose que $y\geq 2$.

a) Montrer que : $(x;y)\in S\Rightarrow 2^x\equiv 1\,[9]$

b) Montrer que : $2^x\equiv 1\,[9]\Rightarrow x\equiv 0\,[6]$

3) En déduire que : $S=\{(1;0);(2;1)\}$

EXERCICE 77

Soit p un nombre premier.

1) a) On suppose dans cette question que $p \geq 5$.

Montrer que $p^2 \equiv 1\,[3]$ et $2^p \equiv 2\,[3]$ puis en déduire que $p^2 + 2^p$ n'est pas premier.

b) Montrer que si $p^2 + 2^p$ est premier alors $p = 3$.

2) Montrer que si p divise $2^p + 1$ alors $p = 3$.

3) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(2x^2 + x\right)^2 < 4\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4\right) < \left(2x^2 + x + 2\right)^2$$

b) Montrer que si la somme des diviseurs positifs du nombre p^4 est un carré parfait alors $p = 3$.

EXERCICE 78

Déterminer les entiers naturels a, b et c tels que :

$$\begin{cases} a \wedge b = 12 \\ b \wedge c = 18 \\ a + b + c = 102 \end{cases}$$

EXERCICE 79

On considère dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation : $(1)\ \ x^2 + 5y^2 = z^2$

1) On pose $\delta = x \wedge y$.

Montrer que l'on peut restreindre la résolution de l'équation (1) à $\delta = 1$.

2) On pose $d = (z - x) \wedge (z + x)$.

Montrer que : $d = 1$ ou $d = 2$

3) Montrer que si $d = 1$, alors il existe $(u;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : u et v impairs et $y = uv$ et $5u^2 + v^2 = z$.

4) Montrer que si $y = 2$, alors il existe $(u;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : u et v impairs et $y = 2uv$ et $5u^2 + v^2 = z$.

5) Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation (1).

EXERCICE 80

Soit $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $xy / \left(x^2 + y^2 - x\right)$

Montrer que x est un carré parfait.

EXERCICE 81

Soit $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $x + y^2 = y^3$.

1) On suppose que $xy \neq 0$.

a) Montrer que y divise x.

b) On pose : $x = dy$. Établir que y divise d.

c) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ tel que :

$$y = 2\alpha + 1 \quad \text{et} \quad x = 2\alpha(2\alpha + 1)^3$$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x + y^2 = y^3$

EXERCICE 82

1) Soit p et q deux éléments de $\mathbb{Z}^*$ tels que $p \wedge q = 1$.

a) Montrer que pour tout $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$, le système :

$$(S) : \begin{cases} x \equiv a\,[p] \\ x \equiv b\,[q] \end{cases}$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}$.

b) Montrer que si x et x' sont deux solutions de (S), alors : $\quad x \equiv x'\,[pq]$

c) Soit x_0 une solution particulière de (S).

Résoudre dans $\mathbb{Z}$.

2) Application :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants : $(n \geq 2)$

$$(S_1) : \begin{cases} x \equiv 4\ [6] \\ x \equiv 2\ [11] \end{cases} \quad ; \quad (S_2) : \begin{cases} x \equiv 3\ [n] \\ x \equiv 5\ [n+1] \end{cases}$$

EXERCICE 83

Soit $(a;b;c;n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$ tel que : $a \wedge b = 1$ et $ab = c^n$.

Montrer que : $\left(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{N}^2\right)$; $a = \alpha^n$ et $b = \beta^n$

EXERCICE 83

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes de congruence :

$$(S_1) : \begin{cases} 5x \equiv 7\ \ [11] \\ 7x \equiv 11\ [5] \\ 11x \equiv 5\ [7] \end{cases} \quad ; \quad (S_2) : \begin{cases} x \equiv 1\ \ [6] \\ x \equiv 3\ [10] \\ x \equiv 7\ [15] \end{cases}$$

EXERCICE 84

On considère le polynôme :

$$P(x)=16x^3-20x^2-8x+3$$

On suppose que P admet une racine dans $\mathbb{Q}^*$ que l'on note $\frac{m}{n}$ avec : $m\in\mathbb{Z}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$ et $m\wedge n=1$.

1) Montrer que : $m/3$ et $n/16$

2) Soit $a\in\mathbb{Z}$.

a) Déterminer un polynôme Q tel que :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad P(x)-P(a)=(x-a)Q(x)$$

b) Vérifier que : $n^2Q\left(\frac{m}{n}\right)\in\mathbb{Z}$

c) Montrer que : $(m-an)\wedge n=1$

3) En déduire que $(m-an)$ divise $P(a)$.

EXERCICE 85

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On pose :

$$S=(2p-1)^2+(2p+1)^2+(2p+3)^2$$

On suppose que $S=\overline{xxxx}$ dans le système décimal.

1) Montrer que : $12p(p+1)=11\left(x\overline{101}-1\right)$

2) Montrer que : $p^2\leq 832$

3) En déduire le chiffre x.

EXERCICE 86

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, on pose : $a_n=(n!)^2+1$

a) Montrer que a_n est impair.

b) Montrer que a_n admet un diviseur premier strictement supérieur à n.

c) On admet que le nombre p s'écrit sous la forme $p=4k+3$ avec $k\in\mathbb{N}$. Montrer que a_n divise le nombre $(n!)^{2(2k+1)}+1$ et que le nombre p divise le nombre $(n!)^p+n!$.

d) En déduire que le nombre p ne peut pas s'écrire sous la forme : $p=4k+3$ avec $k\in\mathbb{N}$.

2) En déduire de ce qui précède que la suite numérique $(4n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ contient une infinité des nombres premiers.

EXERCICE 87

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases}u_0=0 \text{ et } u_1=1\\ u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$$

1) Calculer les termes u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}=2u_n+1$

et en déduire $u_{n+1}\wedge u_n$.

3) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=2^n-1$.

les nombres 2^n-1 et $2^{n+1}-1$ sont-ils premiers entre eux pour tout $n\in\mathbb{N}$? Justifier.

b) Vérifier que pour tout $(n;p)\in\mathbb{N}^2$:

$$u_{n+p}=u_p\left(u_p+1\right)+u_p$$

et en déduire que : $u_{n+p}\wedge u_p=u_n\wedge u_p \quad (1)$

c) Soit $(a;b)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ et r le reste de la division euclidienne de a par b.

En déduire de la propriété (1) que :

$$u_a\wedge u_b=u_b\wedge u_r \quad \text{et} \quad u_a\wedge u_b=u_{(a\wedge b)}$$

d) Calculer $u_{1980}\wedge u_{312}$.

EXERCICE 88

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On pose :

$$S_n=\left\{x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ /\ x^2+\overline{1}=\overline{0}\right\}$$

1) Justifier que $\overline{0}$ et $\overline{1}$ et $\overline{-1}$ n'appartiennent pas à S_n.

2) Montrer que pour tous x et y de S_n :

$$(x+y)(x-y)=\overline{0}$$

3) Montrer que si l'entier n est premier, alors :

$$\text{card } S_n=2 \quad \text{ou} \quad S_n=\varnothing$$

4) Résoudre l'équation $x^2+\overline{1}=\overline{0}$ dans les cas où :

$$n\in\{5;6;7;10\}$$

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Les parties A), B), C), D) et E) sont indépendantes.

Partie A :

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(2n+1) \wedge n = 1 \quad \text{et} \quad (2n+1) \wedge n^2 = 1$$

b) En déduire que si $(n;d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que d divise $2n+1$ alors $d \wedge n^2 = 1$.

2) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que : $(2n+1) \wedge 5 = 5$

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n^2(n^2+1) \wedge (2n+1) = (2n+1) \wedge 5$$

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que : $n^2(n^2+1) \wedge (2n+1) = 1$

Partie B :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $11x - 7y = 10$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} z \equiv 5 \ [7] \\ z \equiv -5 \ [11] \end{cases} \quad ; \quad (S_2) : \begin{cases} z \equiv -5 \ [7] \\ z \equiv 5 \ [11] \end{cases}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $z^2 \equiv 25 \ [77]$

Partie C :

1) Soit $(m;n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $m \wedge n = 1$

a) Montrer que : $2m^2 + n^2 \not\equiv 0 [5]$

b) En déduire que : $(2m^2 + n^2) \wedge 5 = 1$

2) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : \ 2x^3 + x - 5 = 0$$

a) Montrer que (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $1 < \alpha < 2$.

b) On suppose que : $\alpha = \dfrac{m}{n}$ avec m et n des entiers naturels premiers entiers eux.

Vérifier que : $(2m^2 + n^2)m = 5n^3$ puis montrer que : $m = 5$

c) En déduire que α est irrationnel.

Partie D :

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2) Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.

3) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre :

$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$$

a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division euclidienne de A_p par 7 ?

b) Démontrer que si $p = 3n+1$, alors $7 / p$.

c) Étudier le cas où $p = 3n+2$.

4) On considère les nombres a et b écrits dans le système binaire :

$$a = \overline{1001001000}_{(2)} \quad \text{et} \quad b = \overline{1000100010000}_{(2)}$$

a) Vérifier que ces deux nombres sont de la forme A_p

b) a et b sont-ils divisibles par 7 ? Justifier.

Partie E : (Codage Affine)

On numérise les lettres de l'alphabet par :

$$A = 0 \ , \ B = 1 \ , \ldots , \ Z = 25$$

On code ces lettres grâce à la fonction :

$$f(x) \equiv 17x + 22 \quad [26]$$

1) Coder les mots suivants :

« **ARITHMETIQUE** » et « **FERMAT** »

2) Déterminer la fonction f^{-1} de décodage.

3) Décoder les mots suivants :

« **OAYRC** » et « **GAUSS** » et « **ELMOFIDE** »

DEVOIR 2

Les parties A), B), C) , D) et E) sont indépendantes.

Partie A :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $d = (n^2+1) \wedge (n+1)$

1) a) Déterminer le nombre d suivant la parité de n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre n^2+1 n'est pas un carré parfait.

2) Soit a, b et n sont des entiers naturels non nuls et tels que : $a \wedge b = 1$ et $a(n^2+1) = b^2(n+1)$

a) Montrer que : $a \wedge b^2 = 1$ et $a \leq n$ et $b \leq n$.

b) Montrer que : $(n^2+1) \wedge (n+1) = 2$

c) On pose : $n^2+1 = 2p$ et $n+1 = 2q$

avec : $(p;q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$

Montrer que : $a = q$ et $b^2 = p$

d) On pose : $b = a+1$.

Calculer a, b et n.

Partie B :

1) Montrer que 163 est un nombre premier.

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : 13x - 162y = 1$$

a) Déterminer une solution particulière de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

3) On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} x \equiv a\ [13] \\ x \equiv b\ [162] \end{cases} \quad \text{où } (a;b) \in \mathbb{Z}^2$$

a) Vérifier que le nombre $x_0 = 325b - 324a$ est une solution du système (S).

b) Montrer que : $(S) \Leftrightarrow x \equiv x_0\ [2106]$

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) dans le cas où $a = 2$ et $b = 3$.

4) Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{25} \equiv 3\ [163]$

a) Montrer que : $x \wedge 163 = 1$ puis que $x \equiv 3^{13}\ [163]$.

b) En déduire que : $x^{25} \equiv 3\ [163] \Leftrightarrow x \equiv 3^{13}\ [163]$

Partie C :

Soit p et q deux nombres premiers positifs distincts.

1) a) Montrer que : $p^{q-1} \equiv 1\ [q]$ et $q^{q-1} \equiv 1\ [p]$

b) Montrer que : $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1\ [pq]$

c) En déduire que l'équation d'inconnue $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$: $(p^{q-1} + q^{p-1})x + pqy \equiv x\ [pq]$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que : $a \wedge p = 1$ et $a \wedge q = 1$

a) Montrer que : $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ [pq]$.

b) En déduire que $27^{4200} - 1$ est divisible par 4331.

Partie D :

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que m^2 et $m-1$ sont premiers entre eux.

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante :

$$(E_m) : m^2x + (m-1)y = 1$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (E_m) est :

$$S_m = \{(km - k + 1; -km^2 - m - 1) / k \in \mathbb{Z}\}$$

3) Dans cette question, on pose : $m = 7$.

a) Vérifier que le couple $(49;-400)$ est une solution de l'équation (E_7).

b) Montrer que 401 est un nombre premier.

c) En déduire en utilisant le théorème de Fermat que : $2011^{49^2} \equiv 2011\ [401]$

Partie E :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 9$. On considère les nombres :

$$a = \overline{1680}_{(n)} \quad \text{et} \quad b = \overline{252}_{(n)}$$

1) Montrer que : $n+2 / b$ et $n+2 / a$

2) On pose : $\alpha = \overline{21}_{(n)}$ et $\beta = \overline{14}_{(n)}$ et $d = \alpha \wedge \beta$

a) Montrer que d divise 7.

b) Montrer que : $7 / (n-3) \Rightarrow (7 / \alpha$ et $7 / \beta)$

3) Montrer que : $(2n+1) \wedge n = 1$

4) Déterminer $a \wedge b$ selon les valeurs de l'entier n.

DEVOIR 3

Les parties A), B), C), D) et E) sont indépendantes.

Partie A :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose : $a_n = \dfrac{n^3 - 1}{n+1}$

1) a) On pose : $d = (n^3 - 1) \wedge (n+1)$

Montrer que $d = (n+1) \wedge 2$ puis déterminer les valeurs de d selon la parité de l'entier n.

b) Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles a_n est un entier naturel ?

c) Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles a_n est une fraction irréductible.

2) On suppose dans cette question que a_n est un nombre décimal, c'est-à-dire que :

$$\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{N}^2 \ / \ a_n = \frac{\alpha}{10^\beta}$$

a) Soit p un entier premier positif tel que $p / n+1$. Montrer que : $p = 5$ ou $p = 2$.

b) En déduire que a_n est un nombre décimal si, et seulement si :

$$\left(\exists(p;q) \in \mathbb{N}^2\right) \quad a_n = \frac{\left(2^p \times 5^q - 1\right)^3 - 1}{2^p \times 5^q}$$

Partie B :

Dans le système de numération de base n $(n \geq 6)$, on considère les nombres : $a = \overline{2310}_{(n)}$ et $b = \overline{252}_{(n)}$.

1) a) Montrer que $2n+1$ divise a et b.

b) On pose : $d = a \wedge b$. Montrer que $d = 2n+1$ ou $d = 2(2n+1)$ selon la parité de nombre n.

2) On prend $n = 6$. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$$ax + by = -26$$

Partie C :

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E) : 23x - 47y = 1$

1) a) Vérifier que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$ puis la résoudre.

b) Déterminer tous les entiers relatifs N vérifiant :

$$\begin{cases} N \equiv 1\ [23] \\ N \equiv 2\ [47] \end{cases}$$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}/47\mathbb{Z}$ l'équation : $\overline{x}^2 = \overline{1}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \{1;2;\ldots;46\}$:

$$x^{23} \equiv -1\ [47] \quad \text{ou} \quad x^{23} \equiv 1\ [47]$$

c) Montrer que : $46! \equiv 46\ [47]$

3) Montrer que le reste de la division euclidienne de nombre 2^{506} par 1081 est 1.

Partie D :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point $M_n(\cos\alpha_n ; \sin\alpha_n)$ tel que :

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

1) Soit $(n;p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$.

Montrer que les points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si : 12 divise $(n-p)$.

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E) : 12x - 5y = 3$

a) Résoudre l'équation (E).

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels les points M_n appartiennent à la demi-droite $[Ox)$.

(Demi-axe des abscisses positives)

Partie E :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

1) Montrer que : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge [b(a+b)] = 1$

2) On considère dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : x^2 + y^2 + xy - 31x = 0$$

Soit $(x;y)$ une solution de (E) et on pose : $d = x \wedge y$.

a) Montrer qu'il existe un couple $(a;b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $a(31 - da) = bd(a+b)$

b) En déduire que a divise d.

3) a) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$c\left(a^2 + b^2 + ab\right) = 31$$

b) En déduire que $c = 1$.

4) En déduire les solutions de l'équation (E).

DEVOIR 4

On considère dans $\mathbb{N}^3$ l'équation : $(E) : x^2+y^2=z^2$

Partie A :

1) Vérifier que $(0;0;0)$, $(3;4;5)$ et $(5;12;13)$ sont solutions de l'équation (E).

2) Soit $(u;v)\in\mathbb{N}^2$ tel que $u<v$.

Montrer que $(u^2-v^2\,;\,2uv;\,u^2+v^2)$ est une solution de l'équation (E).

3) Montrer que si $(x;y;z)$ est solution de (E) alors $(nx;ny;nz)$ est aussi solution de (E) où $n\in\mathbb{N}$.

Partie B :

Dans cette partie, on veut résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $(\mathbb{N}^*)^3$.

Soit $(x;y;z)$ une solution de l'équation (E).

On pose : $x\wedge y\wedge z=d$

1) Montrer qu'on peut restreindre l'étude à $d=1$.

Dans tout ce qui suit, $(x;y;z)$ est une solution de (E) telle que : $x\wedge y\wedge z=1$

2) Montrer que : $x\wedge y=y\wedge z=z\wedge x=1$

3) Montrer que x et y ont des parités distinctes et que le nombre z est impair.

On suppose dans ce qui suit que z et x sont impairs, y est pair et on pose : $\delta=(z-x)\wedge(z+x)$

4) Montrer que si $c^2=ab$ et $a\wedge b=1$ alors :

$$\left(\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{N}^2\right)\ \left[a=\alpha^2 \text{ et } b=\beta^2 \text{ et } \alpha\wedge\beta=1\right]$$

5) a) Montrer que : $\delta=2$

b) En déduire qu'il existe $(u;v)\in\mathbb{N}^2$ tel que :

$$\begin{cases} z+x=2u^2 \\ z-x=2v^2 \quad \text{puis que } y=2uv \\ u\wedge v=1 \end{cases}$$

c) En déduire que :

$$(x;y;z)=(u^2-v^2\,;2uv;u^2+v^2)$$

d) Donner les solutions de l'équation (E).

DEVOIR 5

Les questions suivantes sont indépendantes :

Q1) Quel est le reste de la division euclidienne de nombre 5^{100} par 7 ?

Q2) Montrer que 100^7-100 est divisible par 7.

Q3) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $5^{2n}-2^{2n+3}$ est divisible par 7.

Q4) Calculer le reste de la division euclidienne de 353^{2018} par 13.

Q5) Calculer selon les valeurs de $n\in\mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 7^n par 19.

Q6) On considère le nombre N définie par :

$N=\overline{abcdabcd}_{(10)}$ (c.-à-d. : écrit en base 10)

Montrer que N est divisible par 73.

Q7) Déterminer les entiers naturels n tels que :

$$\frac{n+17}{n+4}\in\mathbb{Z}$$

Q8) Déterminer les entiers naturels n tels que :

$$\frac{n^2+2n+2}{n+3}\in\mathbb{N}$$

Q9) On pose pour tout $(m;n)\in\mathbb{N}^2$:

$$u(n;m)=\frac{(2n)!\,(2m)!}{n!\,m!\,(m+n)!}$$

a) Montrer que pour tout $(m;n)\in\mathbb{N}^2$:

$$u(n+1;m)+u(n;m+1)=4u(n;m)$$

b) En utilisant un raisonnement par récurrence sur m, montrer que pour tout $(m;n)\in\mathbb{N}^2$:

$$u(n;m)\in\mathbb{N}$$

Q10) Déterminer $\underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Max}}\ \sin(2^n)$, où le nombre 2^n est exprimé en degré.

Q11) Trouver tous les couples d'entiers $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ tels que : $(x\vee y)+11(x\wedge y)=203$

Q12) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation suivante :

$$3x^3+xy+4y^3=349$$

On se propose de démontrer le théorème d'Euler, publié en 1761 par le mathématicien Leonard Euler.
Ce théorème est une généralisation du petit théorème de Fermat (qui ne traite que le cas où n est un nombre premier).
Il s'énonce de la façon suivante :

> « Soit n un entier naturel et a un nombre premier avec n, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$ »

où $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ désigne la fonction indicatrice d'Euler.
Soit $(a;n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

On note :

- φ, la fonction indicatrice d'Euler, la fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, définie par : $\varphi(n) = \mathrm{Card}(A)$
  où : $A = \{m \in \mathbb{N}^* \ / \ m < n \text{ et } m \wedge n = 1\}$.
- $m_1, m_2, \dots, m_{\varphi(n)}$ les éléments de A.
  et $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(n)}$ leurs restes respectifs par la division euclidienne par n.

1) a) Calculer :
   - $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(p)$ si p est un nombre premier.
   - $\varphi(p \times q)$, où p et p sont des nombres premiers distincts.
   - $\varphi(p^k)$, où p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}$.

   b) Démontrer que : p premier $\Leftrightarrow \varphi(p) = p - 1$

   c) Soit $(u;v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer que :
   $$u \wedge v = 1 \Rightarrow \varphi(u \times v) = \varphi(u) \times \varphi(v)$$

   d) Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition en produits de facteurs premiers.
   Montrer que :
   $$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

   e) Calculer $\varphi(3240)$.

2) Si $a \wedge n = 1$, montrer que les nombres $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(n)}$ sont distincts, compris entre 1 et $n - 1$ et tous premiers avec n.

3) En déduire que :
$$m_1 \times m_2 \times \dots \times m_{\varphi(n)} \equiv r_1 \times r_2 \times \dots \times r_{\varphi(n)}\ [n]$$
puis que : $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$

4) Établir que pour tout $(a;n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:
$$a \wedge n = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$$

5) **Applications à l'algorithme RSA :**
Soit p et q deux nombres premiers distincts et supérieurs ou égales à 3. On pose : $n = pq$.
Soit m un entier vérifiant : $0 \leq m < n$.

   a) Montrer qu'il existe au moins un entier e premier avec $(p-1)(q-1)$ et vérifiant :
   $$1 < e < (p-1)(q-1)$$

   b) Montrer qu'il existe un unique entier d vérifiant :
   $$ed \equiv 1\ [(p-1)(q-1)] \text{ et } 1 \leq ed < (p-1)(q-1)$$

   c) Montrer que : $m^{ed} \equiv m\ [n]$

6) **Mise en œuvre de l'algorithme RSA :**
Le résultat de la question précédente a un intérêt cryptographique. A priori, il permet de crypter les nombres entre 0 et $n - 1$.
Le chiffrement se fait en élevant à la puissance e :
$$f : n \to n^e$$
Le déchiffrement en portant à la puissance d :
$$g : n \to n^d$$
En effet, si un message en clair est n, le message chiffré est $f(n)$ et comme $g(f(n)) = n$, on le déchiffre grâce à la fonction g.
En 1977, Ronalt Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman ont remarqué qu'on disposait ainsi d'une méthode de chiffrement dont la clé était distincte de celle de déchiffrement. Elle est aujourd'hui appelée **RSA** en hommage à se inventeurs.
Voici une application pratique :
   - Rachid choisit secrètement deux très grands nombres premiers p et q et publie : $n = p \times q$
   - Il choisit un exposant public convenable e (petit en

général, souvent égal à 3, pour simplifier les calculs).

- Il calcule l'exposant secret d par inversion modulaire.
- Le message à transmettre est découpé en entiers $m < n$.
- Ahmed calcule $m' = m^e$ et envoie l'entier codé à Rachid.
- Rachid décode m' par :

$$(m')^d = (m^e)^d = m^{ed} \equiv m\,[n]$$

un éventuel attaquant indiscret peut capter le message codé m' mai il ne peut calculer, en un temps raisonnable, l'exposant de décodage d.

a) On donne $p = 41$ et $q = 53$. Calculer n et $\varphi(n)$.

b) Montrer que $e = 1427$ est premier avec $\varphi(n)$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.

c) En déduire l'exposant secret d.

f) Coder, puis décoder l'entier 666 par l'algorithme **RSA**.

DEVOIR 7

Le numéro **INSEE** de sécurité sociale est un code alphanumérique formé d'un nombre N de **13 chiffres** qui sont dans l'ordre :

- Un chiffre pour le sexe.
- Deux chiffres pour l'année de naissance.
- Deux chiffres pour le département de naissance.
- Trois chiffres pour la commune de naissance.
- Trois chiffres qui permettent de distinguer les personnes nées au même lieu à la même période.

Auquel on rajoute une **clé de contrôle** codée sur **deux chiffres**. Cette clé est fabriquée par : $k \equiv -N[97]$

1) Calculer la clé associée au numéro :

$$N = 171\ 08\ 11\ 055\ 386$$

2) Montrer que si un seul chiffre de N est erroné, alors une erreur est détectée.

3) Montrer que si deux chiffres consécutifs de N sont intervertis, alors l'erreur est détectée.

DEVOIR 8

Les parties A), B) et C) sont indépendantes.

Partie A : Autour du théorème de Wilson

1) Soit p un nombre premier et x un entier naturel.

Démontrer l'équivalence :

$$x^2 \equiv 1\,[p] \Leftrightarrow (x \equiv 1\,[p] \text{ ou } x \equiv -1\,[p])$$

2) On dit qu'un entier naturel x est inversible modulo p s'il existe un entier naturel y tel que : $xy \equiv 1\,[p]$.

y est appelé un inverse de x.

a) Montrer que tous les éléments de l'ensemble $A = \{1; 2; ..; p-1\}$ sont inversibles modulo p et que leur inverse est unique dans A.

b) Quels sont les éléments qui sont leur propre inverse ?

c) En déduire que :

p est un nombre premier $\Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1\,[p]$

Ceci constitue **le théorème de Wilson.**

Partie B : Les nombres parfaits

Un nombre entier naturel non nul est dit parfait s'il égal à la somme de ses diviseurs strictement positifs (autre que lui-même). Ainsi 6 est parfait car les diviseurs stricts de 6 sont 1, 2 et 3 et $1+2+3=6$.

1) Montrer que 28 est un nombre parfait.

2) Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait.

Partie C : Numération décimale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer en fonction de n, le nombre de chiffres de n en base 10.

2) Soit $\sigma(n)$ la somme des chiffres de n en base 10

a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}\right)_{n\geq 1}$ est bornée.

b) Montrer que $1 \leq \sigma(n) \leq 9(1 + \log n)$

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\sigma(n)} = 1$

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 1

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante :

$$(E) : 143x - 195y = 52$$

1) a) Déterminer le plus grand commun diviseur des nombres 143 et 195 et en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Sachant que $(-1;-1)$ est une solution particulière de (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en indiquant les étapes de la résolution.

2) Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $n^{4k} \equiv 1\ [5]$.

3) Soit x et y deux entiers naturels non nuls tels que :

$$x \equiv y\ [4]$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n^x \equiv n^y\ [5]$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n^x \equiv n^y\ [10]$.

4) Soit x et y deux entiers naturels tels que le couple $(x;y)$ soit solution de l'équation (E).

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les nombres n^x et n^y ont le même chiffre d'unité dans le système de numération décimal.

Examen National 2012 (Session Normale)

PROBLÈME 2

Soit x un entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436\ [2015]$

1) Sachant que $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2) Soit d un diviseur commun des nombres x et 2015.

a) Montrer que d divise 1436.

b) En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

3) a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que :

$$x^{1440} \equiv 1\ [5] \text{ et } x^{1440} \equiv 1\ [13] \text{ et } x^{1440} \equiv 1\ [31]$$

(remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 13$)

b) Montrer que $x^{1440} \equiv 1\ [65]$ puis en déduire que :

$$x^{1440} \equiv 1\ [2015]$$

4) Montrer que : $x \equiv 1050\ [2015]$.

Examen National 2015 (Session Normale)

PROBLÈME 3

Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$b_n = 2 \times 10^n + 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2 \times 10^n - 1$$

1) Montrer que $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ puis en déduire que les entiers b_n et c_n sont premiers entre eux.

2) Trouver un couple $(x_n ; y_n)$ de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant l'égalité :

$$b_n . x_n + c_n y_n = 1$$

Examen National 2014 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 4

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) suivante :

$$195x - 232y = 1$$

a) Déterminer le plus grand commun diviseur des entiers 195 et 232.

b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{(163 + 232k ; 137 + 195k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

c) Trouver l'unique entier naturel d vérifiant :

$$0 \le d \le 232 \quad \text{et} \quad 195d \equiv 1\ [232]$$

2) Montrer que le nombre 233 est premier.

3) On désigne par A l'ensemble des entiers naturels compris « au sens large » entre 0 et 232.

On considère l'application f définie de A dans A comme suit :

Pour tout $a \in A$, $f(a)$ est le reste de la division euclidienne de nombre a^{195} par 233.

a) Montrer que pour tout $(a;b) \in A^2$:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

b) Soit $(a;b) \in A^2$ tel que $f(a) = b$.

Déterminer a en fonction de b.

c) En déduire que l'application f est bijective puis déterminer sa bijection réciproque.

Examen National 2007 (Session Normale)

PROBLÈME 5

On considère dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E): \ x^2(x^2+7) = y(2x+y)$$

Soit $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $\delta = x \wedge y$. On pose :

$$x = \delta a \quad \text{et} \quad y = \delta b$$

1) On suppose que $(x;y)$ est une solution de (E).

a) Vérifier que : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a+b)$

b) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que : $\delta^2 a^2 + 7 = kb$ et $2a + b = ka^2$.

c) Montrer que $a = 1$.

d) En déduire que : $(b+1)^2 = \delta^2 + 8$.

2) Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation (E).

Examen National 2003 (Session Normale)

PROBLÈME 6

Partie A :

Soit $(a;b)$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre premier 173 divise $a^3 + b^3$.

1) Montrer que : $a^{171} \equiv -b^{171} \ [173]$.

(remarquer que $171 = 3 \times 57$)

2) Montrer que le nombre 173 divise a si, et seulement si 173 divise b.

3) On suppose que 173 divise a. Montrer que 173 divise le nombre $a+b$.

4) On suppose que 173 ne divise pas a.

a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que

$$a^{172} \equiv b^{172} \ [173]$$

b) Montrer que : $a^{171}(a+b) \equiv 0 \ [173]$

c) En déduire que 173 divise $a+b$.

Partie B :

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation :

$$(E): \ x^3 + y^3 = 173(xy+1)$$

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de (E).

On pose : $x + y = 173k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

1) Vérifier que : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$.

2) Montrer que $k = 1$ puis résoudre l'équation (E).

Examen National 2016 (Session Normale)

PROBLÈME 7

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): 3x - 2y = 1$

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que le couple $(14n+3; 21n+4)$ est solution de l'équation (E).

b) En déduire que les nombres $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux.

3) Soit $d = (2n+1) \wedge (21n+4)$.

a) Montrer que $d = 1$ ou $d = 13$.

b) Montrer que : $d = 13 \Leftrightarrow n = 6 \ [13]$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose :

$$A = 21n^2 - 17n - 4 \quad \text{et} \quad B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - \ldots$$

a) Montrer que A et B sont divisible par $n-1$.

b) Déterminer selon les valeurs de n, le plus grand commun diviseur des entiers A et B.

Examen National 2004 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \underbrace{333\ldots3}_{n \text{ fois}}1$

1) Vérifier que les entiers a_1 et a_2 sont premiers.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$.

3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7 \ [31]$

4) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0 \ [31]$, puis en déduire que 31 divise a_{30k+1}.

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \equiv 1 \ [30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$.

Examen National 2014 (Session Normale)

PROBLÈME 9

1) Soit n un entier naturel.

a) Montrer que si n est impair alors : $n^2 \equiv 1\,[8]$

b) Montrer que si n est pair alors :

$$n^2 \equiv 0\,[8] \quad \text{ou} \quad n^2 \equiv 1\,[8]$$

2) Soit a, b et c des entiers naturels impaires.

a) Montrer que le nombre $a^2+b^2+c^2$ n'est pas un carré parfait (c'est-à-dire, n'est pas un carré d'un entier naturel.

b) Montrer que : $2(ab+bc+ac) \equiv 6\,[8]$.

(on pourra remarquer que :

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$)

c) En déduire que $2(ab+ac+bc)$ n'est pas un carré parfait.

d) Montrer que $ab+ac+bc$ n'est pas un carré parfait.

Examen National 2004 (Session Normale)

PROBLÈME 10

1) a) Vérifier que 503 n'est pas un entier premier.

b) Montrer que : $7^{502} \equiv 1\,[503]$

puis en déduire que : $7^{2008} \equiv 1\,[503]$

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : 49x - 6y = 1$$

Sachant que le couple $(1;8)$ est solution de (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en indiquant les étapes de la résolution.

3) On pose : $N = 1+7+7^2+\ldots+7^{2007}$

a) Montrer que le couple $(7^{2006};\,N)$ est une solution de l'équation (E).

b) Montrer que : $N \equiv 0\,[4]$ et $N \equiv 0\,[503]$

c) En déduire que N est divisible par 2012.

Examen National 2012 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 11

Soit N l'entier naturel exprimé dans le système de numération décimal par :

$$N = \underbrace{111\ldots11}_{\substack{2010 \text{ fois} \\ \text{le chiffre } 1}}$$

1) Montrer que N est divisible par 11.

2) a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que :

$$10^{2010} - 1 = 9N$$

b) Montrer que 2011 divise $9N$.

c) En déduire que 2011 divise $9N$.

3) Montrer que le nombre N est divisible par 22121.

Examen National 2011 (Session Normale)

PROBLÈME 12

Partie A :

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

1) Montrer que $p^2 \equiv 1\,[3]$.

2) a) En utilisant la parité du nombre p, montrer qu'il existe un entier naturel q tel que :

$$p^2 - 1 = 4q(q+1)$$

b) En déduire que : $p^2 \equiv 1\,[8]$.

3) Montrer que : $p^2 \equiv 1\,[24]$

Partie B :

Soit a un entier naturel premier avec le nombre 24.

1) Montrer que : $a^2 \equiv 1\,[24]$.

2) Existe-t-il des entiers naturels a_1, a_2,..., a_{23} tels que :

$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{23}^2 = 23997$ et $a_k \wedge 24 = 1$ pour tout entier $k \in \{1;2;\ldots;23\}$?

Examen National 2005 (Session Normale)

PROBLÈME 13

Pour tout entier x supérieur ou égale à 2, $\overline{abc}_x$ désigne l'écriture du nombre "abc" dans le système de numération à base x.

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : (x+1)^2 = 9+5y$$

a) Soit $(x;y)$ une solution de l'équation (E).

Montrer que : $x \equiv 1\,[5]$ ou $x \equiv 2\,[5]$

b) Résoudre l'équation (E).

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$(5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) = (k-3) \wedge 8$$

3) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} \overline{121}_x = \overline{59}_y \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1\,[5] \end{cases}$$

Examen National 2005 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 14

Soit x un entier naturel vérifiant : $10^x \equiv 2\,[19]$

1) a) Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1\,[19]$

b) Montrer que : $10^{18} \equiv 1\,[19]$

2) Soit d le plus grand commun diviseur de $x+1$ et 18.

a) Montrer que : $10^d \equiv 1\,[19]$.

b) Montrer que : $d = 18$.

c) En déduire que : $x \equiv 17\,[18]$.

Examen National 2011 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 15

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} x \equiv a\,[p] \\ x \equiv b\,[p] \end{cases}$$

où a, b, p et q sont des entiers relatifs avec $p \wedge q = 1$.

1) a) Montrer qu'il existe un couple $(u_0;v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $pu_0 + qv_0 = 1$

b) Montrer que $x_0 = bqu_0 + aqv_0$.

2) Soit x une solution du système (S).

Montrer que le nombre pq divise le nombre $x - x_0$.

3) Soit x un entier relatif tel que pq divise $x - x_0$.

Montrer que x est solution du système (S).

4) En déduire l'ensemble solution du système (S).

5) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 3\,[13] \end{cases}$$

Examen National 2007 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 16

1) Déterminer les entiers naturels m tels que :

$$m^2+1 \equiv 0\,[5]$$

2) Soit p un nombre premier tel que :

$$p = 3+4k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}$$

et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n^2+1 \equiv 0\,[p]$

a) Vérifier que : $(n^2)^{1+2k} \equiv -1\,[p]$

b) Montrer que n et p sont premiers entre eux.

c) En déduire que : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1\,[p]$

d) En déduire de ce qui précède qu'il n'existe aucun entier naturel vérifiant : $n^2+1 \equiv 0\,[5]$

Examen National 2010 (Session Normale)

PROBLÈME 17

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) a) Vérifier que a_n est pair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles on a :

$$a_n \equiv 0\,[3]$$

2) Soit p un nombre premier tel que $p > 3$.

a) Montrer que :

$$2^{p-1} \equiv 1\,[p] \text{ et } 3^{p-1} \equiv 1\,[p] \text{ et } 6^{p-1} \equiv 1\,[p]$$

b) Montrer que p divise a_{p-2}.

c) Montrer que pour tout entier naturel premier q, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $a_n \wedge q = q$

Examen National 2009 (Session Normale)

PROBLÈME

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation :

$$(E) : x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$$

1) Soit $(x;y)$ une solution de (E). On pose :

$$d = x \wedge y \quad ; \quad x = ad \quad ; \quad y = bd$$

a) Vérifier que : $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$

b) En déduire que : $b = 1$.

c) Montrer que : $a \neq 1$ et $(a-1)$ divise $(a+1)$.

d) En déduire que : $a = 2$ ou $a = 3$

2) Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E).

Examen National 2006 (Session Normale)

PROBLÈME

Partie A :

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante :

$$(E) : 35u - 96v = 1$$

1) Vérifier que le couple $(11;4)$ est une solution particulière de l'équation (E).

2) En déduire l'ensemble solution de l'équation (E).

Partie B :

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $(F) : x^{35} \equiv 2 \; [97]$

1) Soit x une solution de l'équation (F).

a) Montrer que le nombre 97 est premier et que les entiers x et 97 sont premiers entre eux.

b) Montrer que : $x^{96} \equiv 1 \; [97]$

c) Montrer que : $x \equiv 2^{11} \; [97]$

2) Montrer que si un entier naturel x vérifie la relation $x \equiv 2^{11} \; [97]$, alors x est une solution de (F).

3) Montrer que l'ensemble solution de l'équation (F) est l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent sous la forme $11 + 97k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Examen National 2008 (Session Normale)

PROBLÈME

1) On pose : $a = pn$ et $b = p(n-1)$

où $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Montrer que : $a \wedge b = a - b$

2) Montrer que si a et b sont des entiers naturels non nuls vérifiant l'égalité $a \wedge b = a - b$, alors il existe $(p;n) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $a = pn$ et $b = p(n-1)$.

3) **Application :**

Pour tout $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose : $a = 40x(3y+2)$, $b = 15x(8y+5)$ et $c = 24x(5y+3)$.

a) Déterminer : $a \wedge b$ et $b \wedge c$.

b) Vérifier que : $a \wedge b \wedge c = x$.

Examen Bac 1995 (Session Normale)

PROBLÈME

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : 16x - 5y = 65$$

On désigne par S l'ensemble solution de (E).

1) Montrer que si $(x;y) \in S$ alors : $x \equiv 0 \; [5]$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

3) Soit $(x;y) \in S$. On pose : $d = x \wedge y$.

a) Déterminer les valeurs possible de l'entier d.

b) Déterminer les éléments $(x;y)$ de S vérifiant $d = 5$.

4) Soit $N = \overline{abc}_{(10)}$ un entier naturel écrit dans le système de numération décimale (avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$).

On pose : $R(N) = \overline{cba}_{(10)}$.

a) Montrer que si $R(N) = 4N - 9$ alors :

$$133a + 10b = 32c + 3$$

puis en déduire que $a = 1$.

b) Déterminer les entiers naturels N tels que :

$$R(N) = 4N - 9$$

Examen Bac 1998 (Session Normale)

3

CALCUL DE PROBABILITÉS

HISTOIRE

Les probabilités sont aujourd'hui l'une des branches les plus importantes et les plus pointues des mathématiques. Pourtant, c'est en cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités.

Initialement, la probabilité d'un événement était définie comme le nombre de cas favorables pour l'événement, divisé par le nombre total d'issues possibles à l'expérience aléatoire.

Le véritable début de calcul de probabilités date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654. Ceux-ci commencent à élaborer les bases du traitement mathématique des probabilités autour de l'étude de jeux de hasard proposés. Même s'ils sont considérés comme les fondateurs du traitement des probabilités, ils n'ont rien publié de leurs travaux, et il faudra attendre Huygens pour avoir un premier ouvrage sur le sujet.

Source : https://fr.wikipedia.org

BLAISE PASCAL (1623 – 1662)

CHRISTIAN HUYGENS (1629 – 1695)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Calculer la probabilité de la réunion de deux événements; la probabilité de l'intersection de deux événements et le calcul de la probabilité de l'événement contraire.
- Utiliser la probabilité conditionnelle pour déterminer la probabilité de l'intersection de deux événements.
- Utiliser le modèle de dénombrement selon la situation étudiée.
- Reconnaître l'indépendance et la compatibilité des événements.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire
- Reconnaitre et appliquer la loi binomiale à des situations dans des disciplines de la spécialité.

PLAN DU COURS

1 RAPPELS

A) Calcul de C_n^p, A_n^p et $n!$:

1. Sans utiliser la calculatrice, déterminer les valeurs numériques de ce qui suit :

$$C_{10}^{3} \quad ; \quad C_{2018}^{0} \quad ; \quad C_{2020}^{2019} \quad ; \quad C_{23}^{23} \quad ; \quad A_{7}^{4} \quad ; \quad A_{2016}^{1} \quad ; \quad A_{15}^{0} \quad ; \quad A_{6}^{6}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les expressions suivantes :

$$C_n^0 \quad ; \quad C_n^1 \quad ; \quad C_n^2 \quad ; \quad C_n^n \quad ; \quad C_n^{n-1} \quad ; \quad A_n^0 \quad ; \quad A_n^1 \quad ; \quad A_n^2 \quad ; \quad A_n^n \quad ; \quad A_n^{n-1}$$

B) Tirage simultané :

Dans une urne, on dépose huit boules blanches, six boules noires et quatre boules rouges.

On tire simultanément trois boules de l'urne. Combien y a-t-il de manières de tirer :

1. Aucune boule noire ?
2. Exactement une boule noire ?
3. Exactement deux boules noires ?
4. Trois boules noires ?
5. Trois boules de couleurs différentes deux à deux ?

C) Tirage successif avec remise :

On considère un sac contenant 4 jetons numérotés de 1 à 4. On tire successivement et avec remise 3 jetons du sac afin de former un nombre de trois chiffres.

1. Combien de nombres différents peut-on obtenir ?
2. Combien de nombres différents peut-on obtenir dans chacun des cas suivants :
   a) Le nombre obtenu est impair ?
   b) Le nombre obtenu est pair ?
   c) Le nombre obtenu est strictement inférieur à 400 ?

D) Tirage successif sans remise :

Une entreprise comprend 35 employés dont 16 femmes et 19 hommes. On élit un bureau composé d'un président, d'un vice-président et d'un trésorier. Les postes sont non cumulables.

1. Quel est le nombre de bureaux possibles ?
2. Quel est le nombre de bureaux :
   a) où le vice-président est une femme ?
   b) où le président et le trésorier sont des hommes ?
   c) où le président et le vice-président sont de sexes différents ?

E) Statistiques descriptives :

Le tableau ci-dessous présente la série de notes obtenues par 20 élèves dans un devoir de mathématiques :

Les notes x_i	5	7	10	13	16
Nombre d'élèves n_i	1	2	8	6	3

Déterminer pour cette série statistique :

les fréquences f_i ; la moyenne arithmétique $\overline{x}$; la variance v ; l'écart-type σ.

2 EXPÉRIENCE ALÉATOIRE – UNIVERS DES POSSIBLES – ÉVÉNEMENTS

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

A) On lance le dé une seule fois dans l'air.

1. Avant que le dé se stabilise sur une table, conjecturer le résultat du jet qui sera indiqué par la face supérieure du dé.
2. Toute expérimentation ou phénomène conduisant à plusieurs résultats, et pour lequel on ne peut pas savoir à priori le résultat qui se produira est appelée une expérience aléatoire.
   Ces différents résultats sont appelés issues (ou résultats, éventualités, possibilités...).
   Décrire l'ensemble de toutes les issues possibles pour cette expérience aléatoire. On note Ω cet ensemble.
   L'ensemble Ω est appelé l'univers de l'expérience aléatoire.
3. On considère la situation A : « obtenir un nombre pair ».
   Conjecturer les éventualités vérifiées par A puis décrire A.
   L'ensemble A est une partie de l'univers Ω. On dit que A est un événement.
   Définir les éventualités vérifiées par les événements suivants et décrire ces événements :
   - B : « Obtenir un nombre impair ».
   - C : « Obtenir un nombre divisible par 3 ».
   - D : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 ».

B) On lance maintenant le dé deux fois successivement et on note par le couple $(a;b)$ chaque résultat de cette expérience aléatoire, avec a le résultat du premier lancer et b le résultat du deuxième lancer. On a donc : $1 \leq a \leq 6$ et $1 \leq b \leq 6$.

1. Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ? Que vaut son cardinal ?
2. On considère les événements suivants :
   - E : « Obtenir deux numéros égaux ».
   - F : « Obtenir deux numéros différents ».
   - G : « Obtenir deux numéros de parités différentes ».

Déterminer le nombre d'éventualités vérifiées par chacun des événements E, F et G.

3 OPÉRATIONS SUR LES ÉVÉNEMENTS : $A \cap B$ - $A \cup B$ - $\overline{A}$

Une urne contient 3 boule rouges : R_1, R_2 et R_3 ; et deux boules vertes : V_1 et V_2 ; et une boule noire N_1.
On suppose que les boules sont indiscernables au toucher, et on considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne.

1. Donner toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire et décrire l'univers Ω.

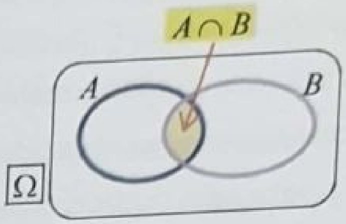
2. On considère les événements suivants :

A : « Obtenir exactement une boule verte » ; B : « Obtenir au moins une boule rouge »

a) Décrire les événements A et B. Quel est le nombre d'éventualités vérifiées par A ? par B ?

b) On considère l'événement :

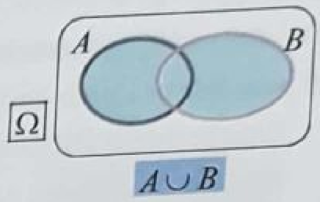
E : « Obtenir une boule verte et une boule rouge ».



- Décrire l'ensemble E puis écrire E en fonction des événements A et B.
- Lorsqu'une éventualité est réalisée à la fois par A et B, peut-on dire que l'événement E est réalisé ?

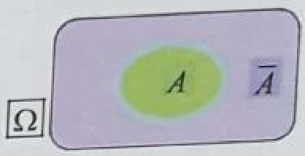
c) On considère l'événement :

F : « Obtenir deux boules rouges ou de couleurs différentes ».



- Décrire l'ensemble F puis écrire F en fonction des événements A et B.
- Lorsqu'une éventualité est réalisée par A ou B ou les deux à la fois, peut-on dire que l'événement E est réalisé ?

d) Lorsqu'une éventualité ne réalise pas l'événement A, on dit alors que l'événement $\overline{A}$ (événement contraire de A) est réalisé. Autrement dit : L'événement contraire d'un événement A, noté $\overline{A}$, est l'événement constitué par tous les éventualités qui ne sont pas dans A.



- Écrire une phrase traduisant la réalisation de l'événement $\overline{A}$ puis décrire cet événement.
- Écrire une phrase traduisant la réalisation de l'événement $\overline{B}$ puis décrire cet événement.

Soit ω une éventualité de l'univers Ω. On a :
$\omega \in A \cap B \Leftrightarrow (\omega \in A \text{ et } \omega \in B)$; $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow (\omega \in A \text{ ou } \omega \in B)$; $\omega \in \overline{A} \Leftrightarrow \omega \notin A$

4 PROBABILITÉ DÉFINIE SUR Ω - SIMULATION

On lance 1000 fois une pièce de monnaie, et on obtient la distribution ci-contre :

	PILE	FACE
Fréquence	0,528	0,472

On souhaite savoir si les écarts entre les résultats obtenus et le modèle d'équirépartition sont dus aux simples fluctuations d'échantillonnage ou au fait que la pièce n'est pas bien équilibrée, ce qui voudrait alors dire que le modèle d'équirépartition est mal adapté à l'expérience étudiée.

A) Écart entre la distribution des fréquences observées et la loi équirépartie :

Par analogie avec la formule qui permet de calculer en géométrie le carré de la distance entre deux points, on mesure la carré de l'écart entre la distribution des fréquences observées $\{f_1 ; f_2\}$ et la loi de probabilité équirépartie $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ par : $d_{obs}^2 = \left(f_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(f_2 - \frac{1}{2}\right)^2$

Calculer d_{obs}^2.

B) Simulation la loi équirépartie :

Comment évaluer, à partir de la valeur calculée d^2_{obs}, l'éloignement des fréquences $\{f_1;f_2\}$ et $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$?

À partir de quel seuil cette valeur sera-t-elle jugée « petite » ou « grande » ?

Pour répondre à ces questions, on simule un grand nombre de fois une série de 1000 lancers d'une **pièce bien équilibrée** et on calcule pour chaque série la valeur de d^2 correspondante.

On pourra alors regarder comment se situe la valeur de d^2_{obs} par rapport à l'ensemble des valeurs de d^2 ainsi obtenues.

On réalise 200 simulations à l'aide du tableur Excel, on notera 0 pour Pile et 1 pour Face.

1. Dans la cellule A1, saisir la formule =ENT(2*ALEA()). Cette cellule affichera donc 0 ou 1 de façon aléatoire. Recopier la formule dans le domaine A1 :GR1000 pour simuler 200 fois une série de 1000 lancers de la pièce.
2. Dans la cellule A1003, saisir la formule =SOMME(A1:A1000)/1000 qui donne pour résultat la fréquence de Pile pour la 1ère série. Dans la cellule A1004, saisir =1-A1003 qui calcule la fréquence de Face et enfin dans A1005, saisir =(A1003-0,5)^2+(A1004-0,5)^2 qui donnera donc pour résultat la valeur de d^2 pour la 1ère série de 1000 lancers.
   Recopier ces formules jusqu'à la colonne GR.
3. Dans la cellule A1007, saisir =MIN(A1005:GR1005) et dans la cellule B1007, saisir =MAX(A1005:GR1005).
4. Pour terminer la feuille de calcul, dans la cellule C1007, saisir =CENTILE(A1005:GR1005;0,9) , on obtient ainsi le 9ème décile de la série des 200 valeurs de d^2.

	A	B	C	D	E	F	G
1003	0,49	0,508	0,505	0,492	0,497	0,488	0,503
1004	0,51	0,492	0,495	0,508	0,503	0,512	0,497
1005	0,0002	0,000128	5,E-05	0,000128	0,000018	0,000288	0,000018
1006	d^2 minimum	d^2 maximum	**D9**				
1007	0	0,004418	**0,001458**				

5. Avec la touche $\boxed{\text{F9}}$, réaliser de nouvelles séries de 200 simulations de 1000 lancers. Observer à chaque fois la valeur du 9ème décile **D9** et la comparer à d^2_{obs}.

C) Définir une règle de décision :

Lors d'une réalisation des 200 simulations, on a obtenu $D_9 = 0,001458$ et d'après la partie A), $d^2_{obs} = 0,001568$, donc $d^2_{obs} > D_9$.

Peut-on alors rejeter le fait que la pièce soit bien équilibrée ?

La conclusion est-elle certaine ?

LOI DES GRANDS NOMBRES

Les valeurs de d^2 obtenues dans la simulation diminuent quand on augmente le nombre n de lancers de chaque série car les fluctuations d'échantillonnages sont moindres pour les grands échantillons.

D) Synthèse :

Le jeu de Pile ou Face est un exemple d'expérience aléatoire. Elle s'appelle ainsi car on ne peut pas prévoir le résultat qui se produira. Les résultats possibles s'appellent des issues. Ici, les issues sont « Pile » et « Face ».

On a vu que lors du jeu de pile ou face, on n'obtenait pas forcément pile une fois sur deux, mais qu'en augmentant suffisamment le nombre de lancers, la fréquence d'apparition de « Pile » s'approche d'une valeur théorique.

Cette valeur théorique s'appelle la probabilité de l'évènement « Pile ». Cette probabilité vaut $\frac{1}{2}$.

Si on désigne par E l'événement « la pièce a indiqué Pile » et par F l'événement « la pièce a indiqué Face », on écrit $P(E)=\frac{1}{2}$ pour exprimer que la probabilité de l'événement « Pile » est égale à $\frac{1}{2}$. On a aussi : $P(F)=\frac{1}{2}$.

5 HYPOTHÈSE D'ÉQUIPROBABILITÉ

On considère un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Puisque le dé est équilibré, alors toutes ses faces ont la même chance d'apparition, et cette chance vaut $\frac{1}{6}$. On dit alors que la probabilité d'apparition de chaque face est $p=\frac{1}{6}$, et que l'hypothèse d'équiprobabilité est bien vérifiée.

On peut généraliser la notion de probabilité sur un univers comme suit :

GÉNÉRALISATION

On dit qu'on définit une probabilité P sur l'univers $\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\ldots;\omega_n\}$ d'une expérience aléatoire ayant un nombre fini d'éventualités :

- si à chaque éventualité ω_i on associe un nombre réel p_i tel que tous les nombres p_i vérifient : $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- et si à chaque événement E est associe le nombre $P(E)$ défini par : $P(E)=\sum_{\omega_i \in E} p_i$, c'est-à-dire que la probabilité de chaque événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

On considère les événements suivants :

E_1 : « obtenir un nombre premier » ; E_2 : « obtenir un diviseur du nombre 12 »

E_3 : « obtenir un nombre impair et différent de 1».

1. En utilisant la définition ci-dessus, déterminer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3. On note ces probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$ et $P(E_3)$.

2. a) Comparer ces probabilités avec les fréquences des nombres premiers, les diviseurs de 12 et les nombres impairs différents de 1.

b) Comparer $\frac{\text{Card } E_i}{\text{Card } \Omega}$ avec $P(E_i)$ dans chacun des cas suivants : $i=1$; $i=2$; $i=3$.

6 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

A) Vers la notion de probabilité conditionnelle :

On a réalisé une enquête auprès des employés d'une société d'assurances. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-contre.

	Salaire $< 13000\,Dh$	Salaire $\geq 13000\,Dh$	Total
Femmes	450	150	600
Hommes	500	300	800
Total	950	450	1400

1. Une première expérience aléatoire :

   On désigne au hasard une personne parmi les 1400 employés de la société, ce qui signifie que tous les choix sont équiprobables. On considère les deux événements :

   A : « la personne gagne moins de $13000\,Dh$ par mois » ; B : « la personne est une femme ».

   Calculer les probabilités des événements A, B et $A \cap B$.

2. D'autres expériences aléatoires :

   a) On désigne maintenant au hasard une personne **parmi les 600 employés féminines** de la société.

   On appelle U l'événement « L'employé gagne moins de $13000\,Dh$ par mois ».

   Calculer la probabilité de l'événement U.

   b) Enfin, dans une dernière situation, on désigne au hasard une personne **parmi les 950 employés dont le salaire est strictement inférieur à $13000\,Dh$**.

   On appelle V l'événement « La personne désignée est une femme ». Calculer la probabilité de V.

3. Où l'on établit des relations :

   En examinant la façon dont les probabilités précédentes ont été calculées à partir des effectifs du tableau, exprimer les probabilités des événements U et V en fonction de celles des événements A, B et $A \cap B$.

B) Des arbres en probabilités :

1. Un arbre pour décrire les issues d'une expérience aléatoire :

   Une urne contient quatre boules : une rouge, une verte, une bleue et une jaune.

   On tire au hasard une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on tire une deuxième boule et on note sa couleur.

   a) Construire un arbre qui permet d'obtenir toutes les issues de l'expérience.

   b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule verte.

2. Un arbre avec des probabilités conditionnelles :

   Dans un magasin, deux tiroirs contiennent des ceintures.

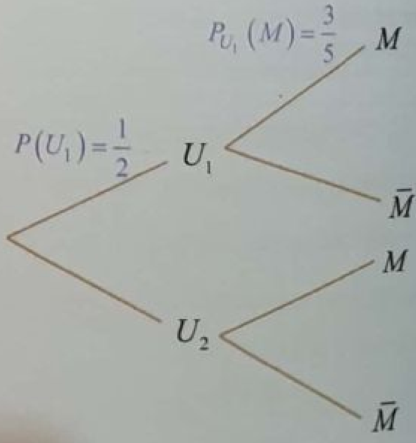
   Le tiroir 1 contient deux ceintures noires et trois marrons, le tiroir 2 contient trois ceintures noires et cinq marrons.

   On choisit au hasard un tiroir, puis on tire une ceinture de ce tiroir, toujours au hasard.

   On considère les événements suivants :

   U_1 : « La ceinture provient du tiroir 1 ».

   M : « La ceinture est marron ».



a) Vérifier que la probabilité de l'événement M sachant que l'événement U_1 est réalisé est égale à $\frac{3}{5}$.

On reporte cette probabilité ainsi que celle de l'événement U_1 sur l'arbre ci-dessus.

b) Reproduire et compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité qui convient.

7 VARIABLE ALÉATOIRE – LOI BINOMIALE

A) Vers la notion de variable aléatoire :

Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré deux fois de suite. Une issue de l'expérience est un couple $(a;b)$ où a est le numéro obtenu au 1er lancer et b au 2ème. Les nombres a et b sont des entiers compris. entre 1 et 6. On note Ω l'ensemble de toutes les issues possibles.

Soit S l'application qui associe à chaque issue $(a;b) \in \Omega$, la somme $a+b$ des deux numéros obtenus.

1. Quelle sont les valeurs possibles de la somme $a+b$ lorsque $(a;b)$ parcourt l'ensemble Ω ?

   Dans la suite, on désigne par $S(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par S.

2. Pour tout $k \in S(\Omega)$, on note $(S=k)$ l'événement « la somme est égale à k ».

   Déterminer les probabilités $p_k = P(S=k)$ pour tout $k \in S(\Omega)$.

   On dit alors qu'on a défini une loi de probabilité sur Ω.

B) La loi binomiale :

Un tireur effectue des tirs à l'issue desquels la probabilité qu'il atteigne sa cible est $p = \frac{3}{4}$.

1. On suppose qu'il fait deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès obtenus.

   a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

   b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   (On pourra s'aider d'un arbre pondéré et on désignera par S les succès et E les échecs).

2. On suppose maintenant qu'il fait six tirs et on note Y le nombre de succès obtenus.

   On a donc $Y(\Omega) = \{0;1;2;3;4;5;6\}$. On voudrait calculer la probabilité de l'événement $(Y=4)$.

   a) Peut-on encore facilement raisonner par un arbre ?

   b) Calculer la probabilité qu'il commence par quatre succès suivis de deux échecs.

   c) Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre. Parmi les « mots » de six lettres (avec ou sans sens) qui ne contiennent que des S et des E, combien contiennent exactement quatre fois la lettre S ?

   d) En déduire la probabilité de l'événement $(Y=4)$.

3. On suppose maintenant qu'il fait dix tirs et on note Z le nombre de succès obtenus.

   On a alors : $Z(\Omega) = \{0;1;\dots;10\}$. Montrer que pour tout $k \in Z(\Omega)$: $P(Z=k) = C_{10}^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{10-k}$

1 LE JARGON DES PROBABILITÉS

1.1. EXPÉRIENCE ALÉATOIRE – NOTION D'ÉVÉNEMENT

Définition 1

Une expérience aléatoire (ou épreuve aléatoire) est une mise en œuvre, dans des conditions bien définies, d'un processus évolutif pour un système (matériel ou modèle) dont l'état final est observable (expérience concrète) ou imaginable (expérience abstraite) mais imprévisible. Un tel état final est appelé résultat de l'expérience aléatoire.

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé univers (ou univers des possibilités, ou ensemble fondamental), noté en général Ω.

Un élément de cet ensemble Ω est appelé une issue ou une éventualité. Il est dit réalisé s'il est effectivement constaté lors d'un déroulement particulier de l'expérience aléatoire.

Exemples

1) Le lancer d'un dé non truqué (ou non pipé) est une expérience aléatoire.

L'univers est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

2) Le lancer de deux dés non truqués est une expérience aléatoire.

Un résultat est un couple d'éléments de $\{1,2,3,4,5,6\}$. En effet, on suppose que ces dés sont discernables. Cela signifie qu'on peut décider qu'un dé est le dé numéro 1 et l'autre le dé numéro 2.

L'univers est donc : $\Omega = \{(i;j) / 1 \le i \le 6 \text{ et } 1 \le j \le 6\}$. C'est un ensemble fini à 36 éléments.

3) Le jeu « Pile ou Face » est une expérience aléatoire. L'univers Ω dépend dans ce cas de la façon dont le jeu est effectué. Voici quelques situations :

Situation 1 : On lance la pièce de monnaie une seule fois.

Ici : $\Omega = \{P;F\}$

Situation 2 : On lance la pièce de monnaie deux fois de suite.

Ici : $\Omega = \{PP;PF;FP;FF\}$

4) Le tirage de p objets parmi n objets, est une expérience aléatoire. L'univers Ω dépend du type de tirage. Si, par exemple, le tirage effectué est simultané, alors l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de p objets choisi parmi n objets. Il y a dans ce cas C_n^p possibilités. Par contre, Si le tirage effectué est successif avec remise, alors l'univers Ω est l'ensemble des arrangements avec répétitions de p objets choisis parmi n objets. Il y a dans ce cas n^p possibilités.

5) La mesure de la durée de vie d'une ampoule électrique est une expérience aléatoire.

Le résultat est un réel positif ou nul. L'univers est : $\Omega =]0,+\infty[$

Définition 2

On appelle événement lié à une expérience aléatoire, tout résultat de cette expérience pouvant se produire. Chaque événement lié à cette expérience aléatoire est une partie de l'univers Ω de ses résultats observables.

Exemple

On lance un dé cubique honnête, puis un deuxième identique au premier, et on s'intéresse aux numéros affichés. On a déjà vu que : $\Omega = \{(i,j) / 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$

- Si on note A l'événement « Les deux dés affichent le même numéro », alors :
$$A = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$$
- Si on note B l'événement « Le premier dé affiche le numéro 1 », alors :
$$B = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6)\}$$
- Si on note C l'événement « La somme des 2 numéros obtenus est 4 », alors :
$$C = \{(1,3);(2,2);(3,1)\}$$
- Si on note D l'événement « Le produit des 2 numéros obtenus est 12 », alors :
$$D = \{(4,3);(2,6);(6,2);(3,4)\}$$
- Si on note E l'événement « Le produit des 2 numéros obtenus est 18 », alors :
$$E = \{(6,3);(3,6)\}$$
- Si on note F l'événement « La somme des 2 numéros obtenus est 1 », alors :
$$F = \varnothing$$

Remarques

- La définition 2 montre qu'un événement est une propriété attachée à l'expérience aléatoire qui peut être vérifiée ou non.
- Il est bon de remarquer qu'un événement se réalise lorsque le résultat constaté de l'épreuve est l'un des éléments qui constituent l'événement.
- L'ensemble de tous les événements est égal à l'ensemble de toutes les parties de Ω, qu'on note $\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 3

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire.

- L'événement Ω se réalise toujours, et est appelé l'événement certain.
- L'événement $\varnothing$ ne se réalise jamais, et appelé l'événement impossible.
- L'événement $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$ est appelé événement élémentaire.

1.2. OPÉRATIONS SUR LES ÉVÉNEMENTS

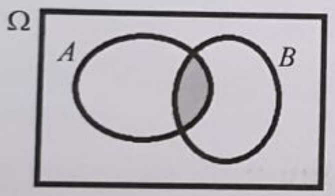
Définition 4

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire. A et B étant deux événements de Ω.

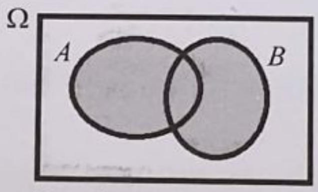
- L'événement « A et B » est réalisé si, et seulement si, A et B sont réalisés au cours de la même expérience. Cet événement est appelé l'intersection des événements A et B, et on le note $A \cap B$.
- L'événement « A ou B » est réalisé si, et seulement si, l'un au moins des deux événements A ou B est réalisé au cours de la même expérience. Cet événement est appelé la réunion des événements A et B, et on le note $A \cup B$.
- L'événement « non A » est réalisé si, et seulement si, A n'est pas réalisé. Cet événement est appelé l'événement contraire de A, et on le note $\overline{A}$.
- On dit que les événements A et B sont incompatibles ou disjoints s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément. Donc, A et B sont incompatibles si, et seulement si, $A \cap B = \varnothing$.

Diagramme de Venn

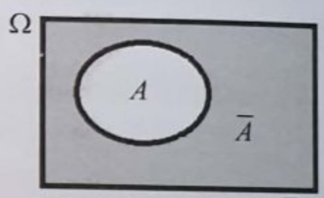
Pour bien comprendre les opérations sur les événements et ses propriétés, on utilise une création mathématique intéressant qui s'appelle diagramme de Venn. Ce diagramme permet de représenter sur une figure, un ensemble et certaines de ses parties. A titre d'exemple :



Représentation de $A \cap B$



Représentation de $A \cup B$



Représentation de $\overline{A}$

Exemples

1) On considère trois événements A, B et C définis sur le même univers Ω.

- L'événement « Parmi les trois événements A, B et C, seul A est réalisé » est l'événement $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
- L'événement « les trois événements A, B et C sont réalisés» est l'événement $A \cap B \cap C$.
- L'événement « A et C sont réalisés mais pas B » est l'événement $A \cap \overline{B} \cap C$
- L'événement « Au moins l'un des trois événements est réalisé » est l'événement contraire de l'événement « tous les événements sont réalisés ». On peut donc exprimer cet événement par $\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}}$.
- L'événement « Au moins deux d'entre eux sont réalisés » signifie que soit exactement deux événements sont réalisés, soit exactement les trois sont réalisés. On peut donc exprimer cet événement par :

$$\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap B \cap C\right)$$

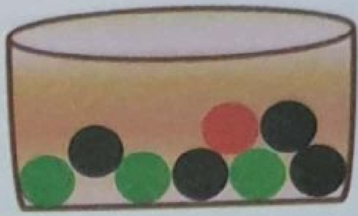
2) Une urne contient 8 boules : 3 vertes, 4 noires et une rouge. on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne et on considère les événements suivants :

A : « Obtenir trois boules noires »

B : « Obtenir trois boules vertes »

C : « Obtenir exactement une boule verte »

D : « Obtenir exactement une boule noire »



a) On considère l'événement :

E : « Obtenir 3 boules de la même couleur »

Obtenir 3 boules de la même couleur correspond à l'obtention, soit de 3 boules noires, soit 3 boules vertes. Par conséquent : $E = A \cup B$.

b) On considère l'événement :

F : « Obtenir au plus deux boules vertes ».

L'événement F est l'événement contraire de l'événement B. Il s'ensuit donc : $F = \overline{B}$

c) On considère l'événement :

G : « Obtenir trois boules de couleurs deux à deux distinctes ».

Obtenir trois boules de couleurs deux à deux distinctes correspond à l'obtention d'une boule noire, d'une boule rouge et d'une boule verte. Par suite : $G = C \cap D$.

d) Les événements B et C sont incompatibles car ils ne peuvent pas être réalisés en même temps. On a alors $B \cap C = \varnothing$. Par contre, les événements D et C sont compatibles.

TABLEAU RÉCAPUTILATIF

Langage ensembliste	Langage probabiliste	Notation
$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$	Univers des possibilités	Ω
Ensemble vide	Evénement impossible	$\varnothing$
$\{\omega_i\}$	Evénement élémentaire	$\{\omega_i\}$
A est une partie de Ω	A est un événement	$A \subset \Omega$
$C = A \cup B$	C est l'événement « A ou B »	$C = A \cup B$
$C = A \cap B$	C est l'événement « A et B »	$C = A \cap B$
A et B sont disjoints	Les événements A et B sont incompatibles	$A \cap B = \varnothing$
A et B sont complémentaires	Les événements A et B sont contraires	$B = \overline{A}$

Applications

1. On considère une urne contenant 5 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules de l'urne.
   a) Déterminer le nombre des cas possibles.
   b) Déterminer le nombre des cas possibles vérifiés par les événements suivants :
   A : « Obtenir quatre boules blanches » ; B : « Obtenir au moins une boule noire »
   C : « Parmi les boules tirées, il y a deux boules blanches ».
2. Dans chacune des situations décrites en-dessous, énoncer l'événement contraire de l'événement donné :
   a) Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard :
   A : « Les deux élèves sont des filles »
   b) Au restaurant, Aîcha prend un plat et un dessert :
   C : « Aîcha prend une viande et une glace »
   c) À une loterie, Rachid achète trois billets :
   D : « L'un des billets au moins est gagnant » ; E : « Deux billets au maximum sont gagnants »
3. Soit Ω un univers et soient A , B et C trois événements de Ω .
   Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A , B et C) les événements suivants :
   A_1 : « Seul A est réalisé » ; A_2 : « A et B sont réalisés, mais pas C »
   A_3 : « Les trois événements sont réalisés » ; A_4 : « Un seul événement se produit »
   A_5 : « Au moins l'un des trois événements se réalise.

Proposition 1

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire. A , B et C des événements de Ω .
On a alors les propriétés suivantes :

$A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cup\varnothing=A$

$A\cap\Omega=A$; $A\cup\Omega=\Omega$; $\overline{\overline{A}}=A$; $A\cup\overline{A}=\Omega$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

Remarques

- Comme dans le langage ensembliste, les égalités $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ et $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ portent le nom de « les lois de Morgan ».
- L'égalité $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ joue un rôle important en calcul des probabilités.

1.3. SYSTÈMES COMPLETS D'ÉVÉNEMENTS

Définition 5

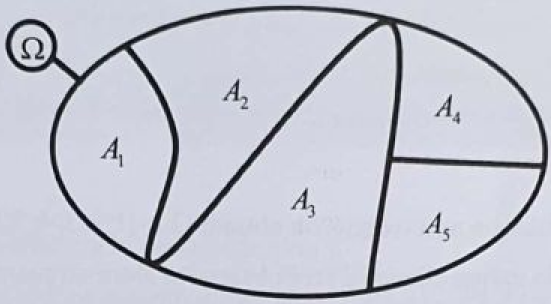
Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements de Ω.

On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment un système complet d'événements lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles :

$$\forall (i,j) \in \{1;2;\dots;n\}^2 \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$

- Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont complémentaires : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.



$\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ forme un système complet d'événements de Ω

Remarques

- Pour tout événement non vide A de Ω, les événements A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements car : $\quad A \cap \overline{A} = \varnothing \quad$ et $\quad A \cup \overline{A} = \Omega$
- Pour tout univers fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, les événements élémentaires $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$ forment un système complet d'événements.

Exemple

On lance quatre fois un dé non truqué. Pour chaque $k \in \{1;2;3;4\}$, on considère l'événement :

A_k : « obtenir pour la première fois 6 au k-ième lancer »

et E l'événement « n'obtenir aucun 6 à l'issue des quatre lancers ».

Les événements A_1, A_2, A_3, A_4, E forment un système complet d'événements qui modélise l'information sur le rang du premier 6.

Les événements A_1 et $\overline{A_1}$ (respectivement E et $\overline{E}$) forment un système complet d'événements qui modélise l'information sur le fait d'obtenir un 6 au premier lancer (respectivement sur le fait d'obtenir un 6 parmi les quatre lancers).

2 PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

2.1. LOI DE PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI

Définition 6

Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; ... ; \omega_n\}$ un ensemble fini.

- Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est attribuer à chaque éventualité ω_i, un réel $p_i \in [0;1]$ de telle sorte que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

  On dit alors que la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est p_i, et on écrit : $P(\{\omega_i\}) = p_i$
- Étant donné un événement $A \subset \Omega$, on définit alors la probabilité de A, et on note $P(A)$ comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A.

  Le couple $(\Omega ; P)$ est appelé un espace probabilisé fini.

Exemples

1) Lors de lancement d'un dé cubique non truqué, on obtient $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

Puisque toutes les faces ont la même chance d'être observées alors on peut définir une probabilité sur Ω comme suit : $P(\{1\}) = P(\{2\}) = ... = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

Remarquons bien que toutes ces probabilités soient dans l'intervalle $[0;1]$ et leur somme est égale à 1.

Soit A l'événement « obtenir un nombre pair ». On a alors $A = \{2;4;6\}$, et donc la probabilité de A est :

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

2) On considère une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'apparition de Face « F » est égale au double de celle d'apparition de Pile « P ». Calculons alors les probabilités des événements :

A : « Obtenir Face » et B : « Obtenir Pile »

Ici l'univers est $\Omega = \{P;F\}$; donc A et B sont les événements élémentaires constituant cet univers.

Il en résulte alors : $P(\Omega) = P(A) + P(B)$. Puisque $P(A) = 2P(B)$ et $P(\Omega) = 1$ alors :

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

Applications

1. Un dé cubique truqué est tel que la probabilité p_k de sortie du numéro k est proportionnelle à k.

   On lance ce dé et on considère les événements :

   A : « Le numéro est pair » ; B : « Le numéro est supérieur ou égal à 3 "

   Calculer p_k pour chaque $k \in \{1;2;...;6\}$ puis en déduire les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.

2. On jette une pièce de monnaie équilibrée trois fois de suite.
   a) Citer la liste de tous les résultats possibles en notant P pour Pile et F pour face. (Exemple : PPF)
   b) Donner la probabilité de chacun des événements suivants :
      A : « Le tirage ne comporte que des Piles» ; B : « Le tirage comporte au moins une fois Face »

Proposition 2

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire, et P une probabilité définie sur Ω. Soit A et B deux événements de Ω. On a alors les propriétés suivantes :

1) $P(\Omega)=1$ et $P(\varnothing)=0$ et $0 \leq P(A) \leq 1$.
2) Si A et B sont incompatibles alors : $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.
3) $P(\overline{A})=1-P(A)$ et $P(B \cap \overline{A})=P(B)-P(B \cap A)$.
   En particulier, si $A \subset B$ alors : $P(B \cap \overline{A})=P(B)-P(A)$ et $P(A) \leq P(B)$
4) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.

Preuve

1) et 2) découlent immédiatement de la définition 5.

3) Les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles, donc : $P(A)+P(\overline{A})=P(A \cup \overline{A})=P(\Omega)=1$. Par suite :

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Les événements $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles car $(B \cap A) \cap (B \cap \overline{A})=B \cap A \cap \overline{A}=\varnothing$, donc :

$$P(B \cap A)+P(B \cap \overline{A})=P((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}))=P(B \cap (A \cup \overline{A}))=P(B \cap \Omega)=P(B)$$

Ce qui donne : $P(B \cap \overline{A})=P(B)-P(B \cap A)$

Si $A \subset B$ alors $B \cap A=A$, ce qui donne : $P(B \cap \overline{A})=P(B)-P(A)$

Signalons au passage que ce résultat montre le caractère croissant de la fonction "probabilité".

4) Montrons maintenant l'égalité : $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

On a $A \cup B=A \cup (B \cap \overline{A})$ et $A \cap (B \cap \overline{A})=\varnothing$ (faites un diagramme de Venn), par conséquent :

$P(A \cup B)=P(A)+P(B \cap \overline{A})$. D'après 3), on en déduit que : $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

Exemples

En étudiant une population, on a remarqué que, durant un mois, 40% des individus sont allés au cinéma, 25% sont allés au théâtre et $12,5\%$ sont allés au cinéma et au théâtre. Calculons les probabilités que durant un mois, un individu :

a) aille au cinéma ou au théâtre ;
b) n'aille pas au cinéma ;

c) n'aille ni au cinéma, ni au théâtre ;

d) aille au cinéma mais pas au théâtre.

Réponses :

Soit C l'événement « aller au cinéma » et T l'événement « aller au théâtre». On a alors :

$$P(C)=0,4 \quad ; \quad P(T)=0,25 \quad ; \quad P(C\cap T)=0,125$$

a) La probabilité qu'un individu aille au cinéma ou au théâtre est :

$$P(C\cup T)=P(C)+P(T)-P(C\cap T)=0,4+0,25-0,125=0,525$$

b) La probabilité qu'un individu n'aille pas au cinéma est :

$$P(\overline{C})=1-P(C)=1-0,4=0,6$$

c) La probabilité qu'un individu n'aille ni au cinéma, ni au théâtre est:

$$P(\overline{C}\cap\overline{T})=P(\overline{C\cup T})=1-P(C\cup T)=1-0,525=0,475$$

d) La probabilité qu'un individu aille au cinéma mais pas au théâtre est:

$$P(C\cap\overline{T})=P(C)-P(C\cap T)=0,525-0,25=0,275$$

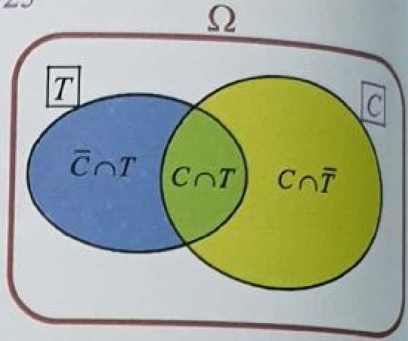


Diagramme de Venn

Applications

1. Dans une classe de 38 élèves, on sait que :

- 31 étudient l'anglais, 24 l'espagnol et 17 l'allemand ;
- 12 étudient à la fois anglais et allemand ;
- 9 étudient espagnol et allemand ;
- 4 étudient les trois langues simultanément.

On choisit un élève au hasard. Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « L'élève étudie l'anglais et l'espagnol» ; B : « L'élève étudie l'anglais ou l'espagnol»

C : « L'élève étudie uniquement l'allemand»

D : « L'élève étudie l'allemand et l'anglais, mais pas l'espagnol»

E : « L'élève étudie l'allemand ou l'anglais, mais pas l'espagnol»

2. Soit Ω un univers et p une probabilité définie sur Ω.

On considère deux événements A et B tels que : $P(A)=\frac{1}{2}$ $\quad P(B)=\frac{5}{12}$; $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$.

Calculer dans l'ordre que vous voulez :

$P(\overline{A})$; $P(\overline{A}\cap\overline{B})$; $P(A\cap B)$; $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

$P(\overline{A\cap B})$; $P(A\cap\overline{B})$; $P(A\cup\overline{B})$

3. Soit Ω un univers et p une probabilité définie sur Ω. Soit A, B et C des événements de Ω.

Montrer la formule suivante dite « formule du crible de Poincaré » :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

2.2. HYPOTHÈSE D'ÉQUIPROBABILITÉ

La définition 5 ci-dessus montre que pour $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, la donnée de n nombres $p_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$, associés à chacun des événements élémentaires par $P(\{\omega_i\}) = p_i$ tel que $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, suffit à déterminer une probabilité p sur Ω. Ainsi, la probabilité d'un événement quelconque A de Ω est définie comme la somme des probabilités de tous les événements élémentaires qui y sont inclus.

Il y a un cas très fréquent dans la pratique où tous les événements élémentaires ont la même probabilité, ce qui correspond à la loi uniforme discrète définie par :

$$\text{Pour tout } i \in \{1, 2, ..., n\} : \quad p_i = \frac{1}{n}$$

Dans le langage des probabilités, on dit alors qu'il s'agit d'équiprobabilité. Cette particularité est souvent sous-entendue ou précisée par l'affirmation que les résultats de l'expérience sont obtenus au hasard. On obtient alors :

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \text{Card } A = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} \quad \text{(Remarquer bien que } n = \text{Card } \Omega\text{)}$$

Ce résultat s'énonce souvent sous la forme de la règle énoncée par Laplace au $XVIII^e$ siècle :

$$P(A) = \frac{\textit{nombre de cas favorables pour A}}{\textit{nombre de cas possibles}}$$

Un cas favorable étant un événement élémentaire qui réalise A. On est alors ramené à un simple problème de dénombrement (déjà vu en 1ère année du bac) . Mais il faut bien faire attention que cette règle ne s'applique que dans le cas d'équiprobabilité.

Définition 7

Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; ... ; \omega_n\}$ l'univers lié à une expérience aléatoire, et P une probabilité définie sur Ω.

On dit qu'il y a équiprobabilité, lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales. On dit aussi que P est la probabilité uniforme sur Ω.

Proposition 3

Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; ... ; \omega_n\}$ l'univers lié à une expérience aléatoire, et P une probabilité définie sur Ω.

Dans le cas d'équiprobabilité, on a les formules suivantes :

1) Pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$: $\quad P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{Card } \Omega}$

2) Pour tout événement A de Ω : $\quad P(A) = \frac{\text{Card } A}{n} = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$

Remarques

- Si l'énoncé du problème contient des phrases comme : « dé non pipé » , « pièce non truquée » , « manière équiprobable » , « tirage au hasard » , « boules indiscernables au toucher », ...etc., cela signifie qu'il s'agit bien d'une équiprobabilité. Bien entendu, dans la limite des programmes, on s'intéresse de façon générale à l'équiprobabilité dans la résolution des problèmes. Mais si l'énoncé indique qu'il n'y a pas d'équiprobabilité, on aura besoin d'autres informations pour résoudre le problème.
- Jusqu'à présent, pour calculer la probabilité d'un événement A , on peut envisager les stratégies suivantes :
  - Exprimer A en fonction d'événements de probabilités connues dans le langage des événements ;
  - Modéliser A par une expression ensembliste. Cette traduction se fait en remplaçant les « et » par des « $\cap$ », les « ou » par des « $\cup$ » et les négations par des complémentaires ;
  - Simplifier ou transformer l'expression obtenue grâce au calcul ensembliste de façon à pouvoir appliquer les formules des calculs des probabilités ; on pourra utiliser dans les simplifications les diagrammes ensemblistes.

Exemples

1) On jette trois dés identiques numérotés de 1 à 6. Il y a équiprobabilité des événements élémentaires de l'ensemble fondamental $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$. La probabilité d'un événement quelconque A se calcule donc par $P(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$. En particulier :

a) La probabilité d'observer trois fois le même chiffre est : $\dfrac{6}{6^3} = \dfrac{1}{36}$

En effet, l'événement considéré est de la forme aaa , où il y a six choix possibles pour le chiffre a.

b) La probabilité d'observer deux fois le même chiffre et un autre différent est : $3 \times \dfrac{6 \times 5}{6^3} = \dfrac{5}{12}$.

En effet, il s'agit cette fois d'un événement de la forme aab , avec six choix pour le chiffre a , cinq choix pour b et trois possibilités pour la place du résultat b .

c) La probabilité d'observer trois chiffres différents est : $\dfrac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \dfrac{5}{9}$

En effet, un résultat quelconque de la forme abc correspond à une permutation de trois chiffres choisis parmi six.

2) Une urne contient deux boules blanches, trois boules rouges et cinq boules noires.
On suppose que ces boules sont indiscernables au toucher.
Soit Ω l'univers des possibles.

a) On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne.
Ω est l'ensemble des arrangements avec répétitions de 3 boules par les 10 boules.
Donc : $\text{Card } \Omega = 10^3 = 1000$

- La probabilité de l'événement A : « obtenir une boule de chaque couleur » est :

$$P(A)=\frac{\text{Card } A}{\text{Card }\Omega}=\frac{3!(2\times 3\times 5)}{10^3}. \text{ Par conséquent : } P(A)=\frac{9}{50}=0{,}18$$

- La probabilité de l'événement B : « obtenir au moins deux boules noires » est :

$$P(B)=\frac{\text{Card } B}{\text{Card }\Omega}=\frac{C_3^1\times(5^2\times 5)+5^3}{10^3}. \text{ Par conséquent : } P(B)=\frac{375+125}{1000}=\frac{1}{2}$$

- La probabilité de l'événement C : « obtenir des boules de même couleur » est :

$$P(C)=\frac{\text{Card } C}{\text{Card }\Omega}=\frac{3^3+5^3}{10^3}. \text{ Par conséquent : } P(C)=\frac{27+125}{1000}=\frac{19}{125}$$

b) On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Ω est l'ensemble des arrangements sans répétitions de 3 boules par les 10 boules.

Donc : $\text{Card }\Omega = A_{10}^3 = 720$

- La probabilité de l'événement A : « obtenir une boule de chaque couleur » est :

$$P(A)=\frac{\text{Card } A}{\text{Card }\Omega}=\frac{3!\left(A_2^1\times A_3^1\times A_5^1\right)}{720}. \text{ Par conséquent : } P(A)=\frac{180}{720}=\frac{1}{4}$$

- La probabilité de l'événement B : « obtenir au moins deux boules noires » est :

$$P(B)=\frac{\text{Card } B}{\text{Card }\Omega}=\frac{C_3^1\times A_5^2\times A_5^1+A_5^3}{720}. \text{ Par conséquent : } P(B)=\frac{360}{720}=\frac{1}{2}$$

3) Dans un lot de 20 yaourts, il y en a 3 qui ont dépassé la date de péremption. On extrait au hasard et simultanément 4 yaourts. Calculons la probabilité de l'événement :

E : « un seul de ces yaourts ait dépassé la date de péremption ».

On choisit l'univers $\Omega=\{\textit{combinaisons de } 4 \textit{ yaourts parmi } 20\}$. Donc :

$$\text{Card }\Omega = C_{20}^4 = 4845$$

Comme le tirage est simultané, on en déduit que : $P(E)=\dfrac{\text{Card } E}{\text{Card }\Omega}=\dfrac{C_3^1\times C_{17}^3}{4845}=\dfrac{8}{19}$

4) On apprend que 18 personnes se sont présentées à une collecte de sang. Il y avait onze personnes du groupe O, quatre personnes du groupe A, deux personnes du groupe B et un personne du groupe AB.

À l'issue de la collecte, on prélève au hasard 3 flacons parmi les 18 flacons obtenus.

Calculons la probabilité de chacun des événements suivants :

L'événement E : « Les sangs des 3 flacons appartiennent au même groupe ».

L'événement F : « Parmi les 3 flacons prélevés, il y a au moins 1 flacon contenant du sang du groupe A »

L'événement G : « Les sangs des 3 flacons appartiennent à 3 groupes différents».

Réponses :

L'expérience étant le prélèvement de 3 flacons parmi 18, l'univers des possibles Ω a pour cardinal :

$$\text{Card}(\Omega)=C_{18}^3=816$$

La probabilité de l'événement E est : $P(E)=\dfrac{C_{11}^{3}+C_{4}^{3}}{816}=\dfrac{169}{816}$.

La probabilité de l'événement F est : $P(F)=1-\dfrac{C_{14}^{3}}{816}=1-\dfrac{364}{816}=\dfrac{452}{816}=\dfrac{113}{204}$.

La probabilité de l'événement G est : $P(G)=\dfrac{11\times4\times2+11\times4\times1+11\times2\times1+4\times2\times1}{816}=\dfrac{27}{136}$.

Applications

1. On compose au hasard un numéro de téléphone à 10 chiffres.
   a) Quelle est la probabilité que tous les chiffres soient distincts ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il commence par 01 ?
   c) Quelle est la probabilité que ses chiffres forment une suite strictement croissante ?
2. Un sac contient 10 jetons blancs, 6 jetons rouges et 4 jetons noirs.
   a) On tire au hasard trois jetons successivement et avec remise.
   Quel est l'événement le plus probable parmi les trois événements suivants ?
   A : « Obtenir un tirage unicolore»
   B : « Obtenir un tirage bicolore »
   C : « Obtenir un tirage tricolore »
   b) Même question si l'on tire simultanément trois jetons.
   c) Même question si l'on tire successivement et sans remise.
3. On range aléatoirement cinq boules distinguables dans quatre boîtes également distinguables.
   a) Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
   b) Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boîte ?
   c) Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?
   d) Quelle est la probabilité qu'une boîte exactement soit vide ?
   e) En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide ?
4. On jette trois fois un dé non pipé, et on note a , b et c les résultats successifs obtenus.
   On note dans la suite : $Q(x)=ax^2+bx+c$
   Déterminer la probabilité pour que :
   a) Le polynôme Q ait deux racines réelles distinctes.
   b) Le polynôme Q ait une racine réelle double.
   c) Le polynôme Q n'ait pas de racines réelles.
5. On jette une pièce de monnaie en l'air cinq fois de suite et l'on note chaque fois la face apparente après sa chute.
   Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi exactement deux fois « Pile » ?

3 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

3.1. INTRODUCTION

Pourquoi les probabilités conditionnelles ?

Les décisions dans la vie courante sont souvent influencées ou conditionnées par la survenue d'événements extérieurs. L'influence de ces événements sur d'autres événements ne peut souvent être appréhendée que de façon subjective, mais parfois cette influence peut être appréhendée de façon objective par une mesure de probabilité.

Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; ... ; \omega_n\}$ l'univers lié à une expérience aléatoire, et P une probabilité définie sur Ω.

Supposons que l'événement A est réalisé. Sous l'information « A est réalisé », un événement B est réalisé si et seulement si $A \cap B$ est réalisé. On dira que la probabilité que B est réalisé, sachant que A est réalisé est :

$$\frac{\textit{nombre de cas favorables à } A \cap B}{\textit{nombre de cas favorables à } A} = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}\, A} = \frac{\dfrac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}\, \Omega}}{\dfrac{\mathrm{Card}\, A}{\mathrm{Card}\, \Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Pour reconnaitre une hypothèse de probabilité conditionnelle, on examine si la probabilité donnée est celle d'un événement B sous la contrainte que l'événement A soit réalisé. Par exemple, dans un établissement scolaire, la phrase « La probabilité qu'une fille soit de terminale bac sciences mathématiques vaut $\frac{1}{7}$ », ne correspond pas à une probabilité conditionnelle. Dans la phrase « Parmi les élèves de terminale bac, la probabilité qu'une fille soit de terminale bac sciences mathématiques vaut $\frac{5}{11}$ », $\frac{5}{11}$ correspond à une probabilité conditionnelle. Voici deux autres exemples concrets pour bien comprendre :

<u>Exemple 1 :</u>

On lance une fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Soit A l'événement : « on obtient un nombre inférieur ou égal à 5 » et B l'événement : « on obtient un nombre supérieur ou égal à 3 ».

Supposons que l'on sache que A est réalisé. Le résultat du lancer est donc un élément ω de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et il y a 5 cas possibles. L'événement B est réalisé signifie que $\omega \in \{3, 4, 5\}$. Il y a donc 3 cas favorables pour que B soit réalisé. La probabilité que B soit réalisé sachant que A l'est est $\frac{3}{5}$.

Or, on a : $P(A) = \frac{5}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{3}{6}$. Donc : $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{5}$

<u>Exemple 2 :</u>

Une pisciculture dispose de deux bassins notés B_1 et B_2. Le bassin B_1 contient 5 poissons dont 3 truites et 2 carpes, et B_2 contient 10 poissons dont 7 truites et 2 carpes. On extrait au hasard un poisson.

La probabilité d'obtenir une truite sachant qu'elle provient de B_1 est $\frac{3}{5} = 0,6$.

Définition 8

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, et soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement B, on pose : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

P_A est une probabilité définie sur Ω, appelée probabilité conditionnelle relative à A ou probabilité conditionnel sachant A.

$P_A(B)$ s'appelle « la probabilité de B sachant que A est réalisé » ou « la probabilité de B sachant A » ou encore « la probabilité de B conditionnellement à A ».

Remarques

- La probabilité $P_A(B)$ de B sachant A est à bien distinguer de la probabilité de l'intersection de B et de A égale à $P(A \cap B)$. En effet dans le calcul de la probabilité $P_A(B)$, nous supposons implicitement que l'événement A est réalisé tandis que dans le calcul de la probabilité $P(A \cap B)$, nous cherchons la probabilité de l'événement (A et B) où l'événement A n'est pas *a priori* réalisé.
- Au lieu de $P_A(B)$, on note aussi $P(B / A)$. Cette notation prête à confession. La raison en est qu'elle donne à penser qu'il existe un événement conditionnel « B / A » dont on calculerait la probabilité. Il n'existe pas d'événements conditionnels, mais seulement des probabilités conditionnelles, c'est-à-dire d'autres probabilités sur l'espace probabilisable.
- Il est parfois utile de connaître $P_B(A)$ pour calculer $P_A(B)$. En effet, on a la relation suivante :

$P_A(B) = P_B(A) \times \dfrac{P(B)}{P(A)}$. Cette formule est connue sous le nom « Formule de Bayes ».

Exemple

On considère deux urnes dont les contenus sont les suivants :

U_1 : 2 boules blanches et 3 boules noires ; U_2 : 4 boules blanches et 2 boules noires.

On choisit une urne au hasard puis on y tire une boule. Calculons la probabilité que l'on ait choisi l'urne U_1 sachant que la boule tirée est blanche.

Notons les événements :

U_1 : « la boule est tirée de l'urne U_1 »

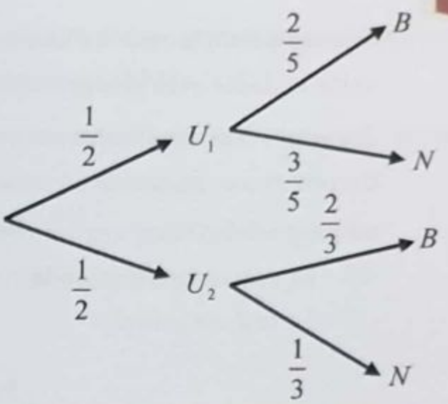
U_2 : « la boule est tirée de l'urne U_2 »

B : « la boule tirée est blanche »

Selon les données : $P_{U_1}(B) = \dfrac{2}{5}$ et $P(U_1) = \dfrac{1}{2}$

Pour le calcul de $P(B)$, on peut faire un arbre de probabilité.

Voici un arbre pondéré modélisant la situation étudiée:



On a : $P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$

Il s'ensuit donc :

$$P_B(U_1)=P_{U_1}(B)\times\frac{P(U_1)}{P(B)}=\frac{2}{5}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{8}{15}}=\frac{3}{8}$$

Corollaire

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, et soit A un événement tel que $P(A)\neq 0$.

Puisque P_A est une probabilité sur Ω, elle possède toutes les propriétés d'une probabilité.

En particulier, on a :

1) $P_A(\varnothing)=0$ et $P_A(A)=P_A(\Omega)=1$.

2) Pour tout événement B vérifiant $B\subset A$, $P_A(B)=1$.

3) Pour tout événement B, $P_A(\overline{B})=1-P_A(B)$.

4) Pour tous événements B et C : $P_A(B\cup C)=P_A(B)+P_A(C)-P_A(B\cap C)$

5) Pour tous événements B et C : $P_A(B\cap\overline{C})=P_A(B)-P_A(B\cap C)$

3.2. FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES

Proposition 4

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω. Pour tous événements A et B de Ω, on a la formule suivante dite « Formule des probabilités composées » :

1) $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$ si $P(A)\neq 0$

2) $P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$ si $P(B)\neq 0$

Exemples

1) Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires.

On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

Réponse :

On note N_i, pour $i\in\{1;2\}$, l'événement « on tire une boule noire au $i^{ème}$- tirage ». On obtient :

$$P(N_1\cap N_2)=P(N_1)\times P_{N_1}(N_2)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$$

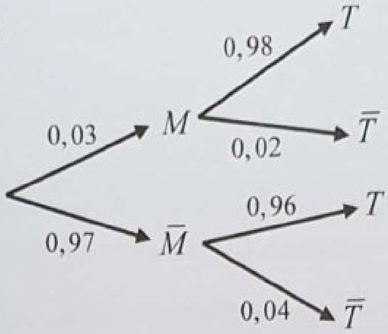
2) Une maladie affecte 3% d'une population. Un test sanguin détecte cette maladie avec une probabilité de $0,98$ chez un malade mais il indique à tort à 4% des personnes saines qu'elles sont malades.

On prend une personne au hasard ayant subi le test.

on peut schématiser ces données par l'arbre pondéré suivant :

M : La personne est malade

T : Le test est positif



a) La probabilité que la personne soit malade et que le test soit positif est :

$$P(T\cap M)=P(M).P_M(T)=0,03\times 0,98=0,0294$$

b) La probabilité que la personne soit malade et que le test soit négatif est :

$$P(\overline{T}\cap M)=P(M).P_M(\overline{T})=0,03\times 0,02=0,0006$$

c) La probabilité que la personne soit en bonne santé et que le test soit négatif est :

$$P(\overline{T}\cap \overline{M})=P(\overline{M}).P_{\overline{M}}(\overline{T})=0,97\times 0,96=0,9312$$

d) La probabilité que la personne soit en bonne santé et que le test soit positif est :

$$P(T\cap \overline{M})=P(\overline{M}).P_{\overline{M}}(T)=0,97\times 0,04=0,0388$$

e) La probabilité que le test soit positif est :

$$P(T)=P(T\cap M)+P(T\cap \overline{M})=0,0682$$

f) La probabilité que la personne soit malade sachant que le test est positif est :

$$P_T(M)=\frac{P(M)}{P(T)}\times P_M(T)=\frac{147}{341}$$

Applications

1. Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boîtes de CD-ROM. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.
- 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boîte du lot. On désigne par A et B les événements suivants :

A : « La boîte est abîmée » ; B : « La boîte achetée contient au moins un CD-ROM défectueux »

a) Donner les probabilités suivantes : $P(A)$; $P(\overline{A})$; $P_A(D)$; $P_{\overline{A}}(D)$; $P_A(\overline{D})$; $P_{\overline{A}}(\overline{D})$

b) Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux.

Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

2. Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte $15Dh$.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle R_n l'événement : « L'employé est en retard le jour n »

On pose : $p_n = P(R_n)$, $q_n = P(\overline{R}_n)$, $p_1 = 0$

a) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R}_n}(R_{n+1})$.

b) En utilisant la formule des probabilités composées, déterminer $P(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n, et $P(R_{n+1} \cap \overline{R}_n)$ en fonction de q_n.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$.

d) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \frac{4}{23}\left(1 - \left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1}\right)$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

3.3. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Proposition 5

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, et soit $(A_1, A_2, ..., A_n)$ un système complet d'événements de Ω. Pour tout événement $B \subset \Omega$, on a la formule suivante dite « Formule des probabilités totales » :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$$

Si, pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$, on a $P(A_i) \neq 0$, on obtient :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) P(A_i) = P_{A_1}(B) P(A_1) + P_{A_2}(B) P(A_2) + ... + P_{A_n}(B) P(A_n)$$

Corollaire

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.

Pour tous événements A et B de Ω, on a : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$.

Si $0 < P(A) < 1$, on obtient : $P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})$

Exemples

1) On dispose de 2 pièces de monnaie. Une des 2 pièces est équilibrée, l'autre est truquée : elle affiche Pile avec la probabilité $\frac{3}{5}$. On choisit au hasard une pièce et on la lance une fois. Calculons la probabilité

d'obtenir Pile. Pour cela, considérons les événements :

P : « obtenir Pile » et T : « la pièce est truquée »

Selon les données de l'exemple : $P(T)=P(\overline{T})=\frac{1}{2}$, $P_T(P)=\frac{3}{5}$, $P_{\overline{T}}(P)=\frac{1}{2}$

D'après la formule des probabilités totales (on pourra dessiner un arbre pondéré), on a alors :

$$P(P)=P(T)P_T(P)+P(\overline{T})P_{\overline{T}}(P)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{20}$$

2) Une urne A contient 5 boules rouges et 2 boules blanches et une urne B contient 3 boules rouges et 4 boules blanches. On lance un dé équilibré :

- Si on obtient 1 ou 2, on tire une boule dans l'urne A.
- Si on obtient 3, 4, 5 ou 6, on tire une boule dans l'urne B.

Calculons la probabilité d'obtenir une boule rouge.

Pour cela, considérons les événements :

D : « obtenir 1 ou 2 » et R : « la boule tirée est rouge »

Selon les données de l'exemple : $P(D)=\frac{2}{6}$; $P(\overline{D})=\frac{4}{6}$; $P_D(R)=\frac{5}{7}$; $P_{\overline{D}}(R)=\frac{3}{7}$

D'après la formule des probabilités totales (on pourra dessiner un arbre pondéré),

on a alors : $$P(R)=P(D)P_D(R)+P(\overline{D})P_{\overline{D}}(R)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{11}{21}$$

3) A un carrefour, une étude statistique sur un feu tricolore montre que :

- Si le feu est vert, il y a 99% de chances que l'automobiliste passe.
- Si le feu est orange, il y a 30% de chances que l'automobiliste passe.
- Si le feu est rouge, il y a 1% de chances que l'automobiliste passe.

Le cycle du feu tricolore dure une minute répartie comme suit : le feu vert dure 25 secondes, l'orange, 5 secondes et le rouge, 30 secondes. On veut calculer la probabilité qu'un automobiliste passe sans s'arrêter à ce feu tricolore.

Pour cela, on considère les événements

A : « l'automobiliste passe » ; V : « le feu est vert »

O : « Le feu est orange » ; R : « le feu est rouge »

Selon les données de l'exemple : $P_V(A)=\frac{99}{100}$; $P_R(A)=\frac{1}{100}$

$P_O(A)=\frac{30}{100}$, $P(V)=\frac{25}{60}$, $P(O)=\frac{5}{60}$, $P(R)=\frac{30}{60}$

On cherche à calculer $P(A)$. Comme la famille V, O et R forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$$P(A)=P(V)P_V(A)+P(O)P_O(A)+P(R)P_R(A)=\frac{25}{60}\times\frac{99}{100}+\frac{5}{60}\times\frac{30}{100}+\frac{30}{60}\times\frac{1}{100}$$

Par suite : $$P(A)=\frac{177}{400}$$

4 L'INDÉPENDANCE

4.1. INDÉPENDANCE DES ÉVÉNEMENTS

Définition 9

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.

On dit que deux événements A et B de Ω sont **indépendants** si on a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \text{ou} \quad P_B(A) = P(A) \quad \text{ou} \quad P_A(B) = P(B)$$

Remarques

- Les trois égalités citées dans la définition 9 ci-dessus sont équivalentes, à conditions bien sûr que A et B soient de probabilités non nulles, ce qui est souvent dans la pratique. Ainsi, si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si la probabilité de B et sa probabilité conditionnelle à A sont égales : la réalisation de l'événement A n'influe pas sur celle de B. Lorsqu'une telle absence de lien causal (« indépendance » au sens logique) se manifeste entre deux événements A et B, on peut affirmer l'indépendance de ces événements.
- L'indépendance n'est en général pas démontrable. Elle constitue un choix (ou une conséquence) de la modélisation probabiliste d'un phénomène aléatoire. Lorsqu'il est demandé de démontrer que deux événements sont indépendants, c'est parce qu'il existe déjà une hypothèse d'indépendance (éventuellement dissimulée) parmi les données du problème.
- Lorsque l'énoncé du problème contient des phrases comme « tirage avec remise dans une urne », « lancers successifs d'une pièce »..., l'indépendance est claire.
- Attention ! l'indépendance (notion probabiliste) ne doit pas être confondue avec l'incompatibilité (notion ensembliste). En fait, deux événements incompatibles (et de probabilités non nulles) ne sont jamais indépendants puisque, si tel est le cas de A et B, on a : $P(A) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$.

  Intuitivement, deux événements incompatibles sont dépendants l'un de l'autre puisque la place occupée par l'un ne peut être occupée par l'autre.

Exemples

1) On lance deux dés non truqués. On considère les événements :

A : « Le premier dé donne un numéro pair » et B : « le deuxième dé donne 3 »

Le nombre de résultats possibles est : $\text{Card}\,\Omega = 6^2 = 36$

Il s'ensuit donc : $P(A) = \dfrac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \dfrac{3 \times 6}{36} = \dfrac{1}{2}$ et $P(B) = \dfrac{\text{Card}\,B}{\text{Card}\,\Omega} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Comme $A \cap B = \{(2;3);(4;3);(6;3)\}$, on obtient : $P(A \cap B) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

Enfin, et puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{12}$, les événements A et B sont indépendants.

2) Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On tire au hasard et simultanément 4 boules de l'urne. On considère les événements :

A : « on obtient deux boules blanches » et B : « on obtient deux boules rouges »

Le nombre de résultats possibles est : $\text{Card}\,\Omega = C_{13}^{4} = 715$. On a alors :

- $P(A) = \dfrac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \dfrac{C_3^2 \times C_{10}^2}{715} = \dfrac{27}{143}$ et $P(B) = \dfrac{\text{Card}\,B}{\text{Card}\,\Omega} = \dfrac{C_4^2 \times C_9^2}{715} = \dfrac{216}{715}$
- $P(A \cap B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}\,\Omega} = \dfrac{C_3^2 \times C_4^2}{715} = \dfrac{18}{715}$

Comme $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, alors les événements A et B ne sont pas indépendants.

3) Une pièce de monnaie (truquée ou pas) est lancée deux fois de suite. L'univers est $\Omega = \{PP; PF; FP; FF$

On considère les événements :

A : « les deux lancers ne donnent pas le même résultat » et B : « le deuxième lancer donne face »

- Si la pièce est parfaitement équilibrée, alors : $P(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $P(B) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$.

  Ainsi, les événements A et B sont indépendants.

- Si la pièce est truquée et qu'elle tombe sur pile avec une probabilité de $\dfrac{3}{4}$, on obtient alors :

$$P(A) = P(\{(P;F)\}) + P(\{(F;P)\}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = P(\{(F;F)\}) + P(\{(P;F)\}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cap B) = P(\{(P;F)\}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

Puisque $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, alors les événements A et B ne sont pas indépendants.

Applications

1. Dans une université, une enquête sur le tabagisme a donné les résultats suivants :

On choisit au hasard l'une des 1000 personnes interrogées.

On note A et B les événements :

A : « En réponse à l'enquête, la personne a déclaré être du sexe féminin

B : « En réponse à l'enquête, la personne a déclaré fumeur»

a) A et B sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.

b) Même question pour la même enquête dans une autre université ou les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

	Hommes	Femmes
Fumeurs	420	75
Non-fumeurs	280	225

	Hommes	Femmes
Fumeurs	440	360
Non-fumeurs	110	90

2. Soient A et B deux événements indépendants d'un univers Ω, et P une probabilité définie sur Ω.
Montrer les résultats suivants :
   a) A et $\overline{B}$ sont indépendants. ; b) $\overline{A}$ et B sont indépendants.
   c) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants. ; d) $P(A\cap B)\times P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(A\cap\overline{B})\times P(\overline{A}\cap B)$.

4.2. ÉPREUVES INDÉPENDANTES – RÉPÉTITION D'UNE ÉPREUVE

Définition 10

Il y a répétition d'expériences identiques, lorsque la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois de suite. Ces expériences aléatoires successives sont indépendantes lorsque l'issue de l'une quelconque de ces expériences ne dépend pas de l'issue des autres expériences.

Exemples

1) On lance 10 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de 6 obtenus.
2) On lance une pièce de monnaie équilibrée 100 fois et on s'intéresse au nombre de fois où la pièce retombe sur pile.

Proposition 6

Soit A un événement de probabilité p lors d'une épreuve aléatoire, et soit n un entier naturel non nul. Lorsqu'on répète cette épreuve n fois de manières identiques et indépendantes, alors la probabilité que l'événement A soit réalisé k fois exactement est : $C_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k}$ où $k\in\{0;1;2;\ldots;n\}$.

Exemple

On lance 10 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de 6 obtenus.

- La probabilité d'obtenir « le numéro 6 » 3 fois exactement est : $C_{10}^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$.
- La probabilité de n'obtenir jamais « le numéro 6 » est : $C_{10}^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.
- La probabilité d'obtenir « le numéro 6 » une fois exactement est : $C_{10}^1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^9$.

5 LES VARIABLES ALÉATOIRES

5.1. INTRODUCTION

La première question qu'on peut poser dans ce chapitre est la suivante :

« Pourquoi les variables aléatoires ? A quoi servent-elles ? »

Le besoin de calculs, comme par exemple celui de la moyenne associée aux différents résultats possibles d'une épreuve aléatoire, impose que ce résultat, symbolisé ou non par un nombre, soit mis sous forme numérique. C'est pourquoi on souhaitera presque toujours, traduire par une valeur numérique l'événement réalisé.

Pour un lancer de pièce de monnaie, on peut retenir par exemple comme codage des résultats : pile $\mapsto 0$, face $\mapsto 1$. Pour un lancer de dé, il y a un codage naturel puisque le résultat a ici un caractère numérique : face1 $\mapsto 1$,..., face6 $\mapsto 6$. Mais on peut bien sûr envisager d'autres codages, comme par exemple noter par 0 tout résultat pair et par 1 tout résultat impair.

Bien entendu la valeur numérique associée à un résultat est arbitraire et correspond à un codage des événements qui va se faire au moyen d'une certaine application, notée usuellement X, qui va associer un nombre à chaque événement élémentaire, soit :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega) = x$$

Le résultat ω ayant un caractère aléatoire, la valeur numérique $X(\omega)$ associée a aussi un caractère aléatoire. Il serait donc intéressant de pouvoir calculer la probabilité que X prenne une certaine valeur ou appartienne à un certain intervalle.

Pour pouvoir définir cette probabilité sur l'ensemble image $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, il faut pouvoir revenir en arrière sur l'ensemble de départ puisque la probabilité est définie sur Ω. Il va donc falloir imposer une certaine condition à cette application qui sera alors appelée variable aléatoire.

Le rôle extrêmement important que jouent les variables aléatoires est la modélisation d'un caractère quantitatif. En effet, si on considère une population Ω sur laquelle est défini un caractère quantitatif X, alors X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout individu ω, associe un réel $x = X(\omega) \in X(\Omega)$ ensemble des valeurs du caractère. Cette application modélise le caractère d'une façon déterministe en ce sens que, si on connaît l'individu ω, on connaît aussitôt la valeur de x.

Définition 11

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Une variable aléatoire réelle définie sur Ω est une application X définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X s'appelle le support de la variable aléatoire X.

Remarques

- Noter bien qu'une variable aléatoire est une application définie sur Ω et non une variable numérique.
- Comme Ω est fini, il en est de même de son image par l'application X . En notant n le cardinal de $X(\Omega)$, on écrira d'habitude $X(\Omega)=\{x_1;x_2;...;x_n\}$. Dans la plupart des exemples concrets, on a $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$ ou, plus rarement, $X(\Omega)\subset\mathbb{Z}$.
- Pour insister sur l'importance des valeurs prises par X et non sur les valeurs des antécédents, l'événement $\{\omega\in\Omega\,/\,X(\omega)=x\}$ sera noté tout simplement $(X=x)$ ou parfois $[X=x]$.
De même, les événements $\{\omega\in\Omega\,/\,X(\omega)\le x\}$ et $\{\omega\in\Omega\,/\,x'<X(\omega)<x\}$ seront notés respectivement $(X\le x)$ et $(x'<X<x)$.

Exemples

1) Une urne contient 100 boules de différentes couleurs à savoir : 10 bleues, 10 rouges, 5 orange, 15 vertes, 20 noires, 40 marrons.
Expérience aléatoire : tirer une boule dans l'urne.
Résultat $(\omega\in\Omega)$: couleur de la boule extraite de l'urne.
On a donc $\Omega=\{b,r,o,v,n,m\}$ (La couleur est identifiée par sa première lettre).
A chaque élément $\omega\in\Omega$, on associe un nombre qui représente un gain en DH, ce nombre est négatif s'il s'agit d'une perte.

$$b\mapsto X(b)=100 \quad ; \quad r\mapsto X(r)=300 \quad ; \quad o\mapsto X(o)=-200$$
$$v\mapsto X(v)=100 \quad ; \quad n\mapsto X(n)=-200 \quad ; \quad m\mapsto X(m)=50$$

La variable aléatoire X est bien définie comme une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
La variable aléatoire X peut prendre quatre valeurs :

$$x_1=-200 \quad ; \quad x_2=50 \quad ; \quad x_3=100 \quad ; \quad x_4=300$$

Ces valeurs de X apparaissent de façon aléatoire avec les expériences.
Les éléments « o » et « n » ont la même image : $X(o)=X(n)=-200$

2) Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On a : $\Omega=\{(x_1,x_2)\,/\,x_1,x_2\in\{1,2,..,6\}\}$ et $\operatorname{Card}\Omega=36$. Considérons l'application X qui à chaque résultat possible de ces lancers associe la somme de chiffres apparus :

$$X:\Omega\to\mathbb{R}\ ,\ (x_1,x_2)\mapsto X(x_1,x_2)=x_1+x_2$$

Alors X est une variable aléatoire sur Ω et $X(\Omega)=\{2,3,...,12\}$. Par exemple :

$$(X=5)=\{(x_1,x_2)\in\Omega\,/\,x_1+x_2=5\}=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

5.2. LOI DE POROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Définition 12

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega;P)$, et $X(\Omega)$ son support.

On appelle loi de probabilité de X (ou loi de X ou distribution de X) l'ensemble des couples (x_i, p_i) où :

$$x_i \in X(\Omega) \quad \text{et} \quad p_i = P(X = x_i)$$

Remarque

En pratique, pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, on détermine les valeurs x_i susceptibles d'être prises par X, puis les probabilités $p_i = P(X = x_i)$. On peut résumer les résultats obtenus sous forme d'un tableau donnant les probabilités des différents éléments de l'ensemble $X(\Omega)$:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Comme les événements $(X = x_i)$, où $i \in \{1,2,...,n\}$, forment un système complet d'événements alors :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

Exemples

1) Un dé cubique, non truqué et non standard, porte inscrits sur ses faces les nombres :

$$-2 \quad ; \quad -2 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 4$$

Soit X la variable aléatoire égale au numéro que ce dé affiche après un lancer. Ici $\Omega = \{-2;-2;1;1;1;4\}$ et $\text{Card}\,\Omega = 6$. L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{-2,1,4\}$.

Calculons maintenant les probabilités : $P(X=-2)$; $P(X=1)$; $P(X=4)$

On a : $P(X=-2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(X=1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X=4) = \frac{1}{6}$

Loi de probabilité de X:

x_i	-2	1	4
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

2) Un joueur joue à un jeu où la probabilité de gagner est $0,32$. S'il gagne, il reçoit $40DH$, sinon il perd $20DH$. Soit G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (une perte est un gain négatif).

Déterminons la loi de probabilité de G :

D'après l'énoncé, on a $G(\Omega)=\{-20,40\}$.

La loi de probabilité de G est :

$P(G=-20)=1-0,32=0,68$ et $P(G=40)=0,32$

3) Un marchand de glaces propose 9 parfums au choix pour les glaces en cornet.

Trois clients choisissent chacun un des parfums proposés.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parfums différents choisis par les trois clients.

Si on désigne par Ω l'univers des possibles, on obtient $\text{Card}\,\Omega=9^3=729$.

L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega)=\{1,2,3\}$

Calculons maintenant les probabilités :

$P(X=1)$; $P(X=2)$; $P(X=3)$

On a : $(X=1)=\{(parfum1, parfum1, parfum1);...;(parfum9, parfum9, parfum9)\}$

Donc : $$P(X=1)=\frac{9}{729}=\frac{1}{81}$$

L'événement $(X=3)$ est constitué des arrangements de 3 parfums choisis parmi 9.

Donc : $P(X=1)=\dfrac{A_9^3}{729}=\dfrac{56}{81}$. Puisque on a $X(\Omega)=\{1,2,3\}$ alors :

$$P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)=1-\frac{56}{81}-\frac{1}{81}=\frac{24}{81}$$

Loi de probabilité de X:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{56}{81}$

4) Une urne contient quatre boules rouges et six boules blanches. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

On a ici $X(\Omega)=\{0,1,2\}$. On note :

R_1 l'événement « on obtient une boule rouge au premier tirage »

R_2 l'événement « on obtient une boule rouge au deuxième tirage »

Dans ce cas, on a :

$$(X=0)=\overline{R}_1\cap\overline{R}_2 \quad ; \quad (X=1)=(\overline{R}_1\cap R_2)\cup(R_1\cap\overline{R}_2) \quad ; \quad (X=2)=R_1\cap R_2$$

De plus, les événements $\overline{R}_1$ et $\overline{R}_2$ sont indépendants. Donc :

$$P(X=0)=P(\overline{R}_1\cap\overline{R}_2)=P(\overline{R}_1).P(\overline{R}_2)=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{9}{25}$$

On montre de même que :

$$P(X=1) = P(\overline{R}_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap \overline{R}_2)$$
$$= P(\overline{R}_1).P(R_2) + P(R_1).P(\overline{R}_2)$$
$$= \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{10}$$
$$= \frac{12}{25}$$

et

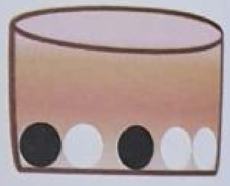
$$P(X=2) = P(R_1 \cap R_2)$$
$$= P(R_1).p(R_2)$$
$$= \frac{4}{10} \times \frac{4}{10}$$
$$= \frac{4}{25}$$

Loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

Applications

1. Un dé cubique est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir $k \in \{1;2;3;4;5;6\}$ soit proportionnelle à
   On note X la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu. Déterminer la loi de X
2. On lance simultanément deux dés à 6 faces. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus et Y la variable aléatoire égale au maximum des numéros obtenus.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X .
   b) Déterminer la loi de probabilité de Y .
3. On tire 4 boules d'une urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
   Dans chacun des cas suivants, déterminer la loi de probabilité de X :
   a) Si le tirage se fait successivement et avec remise.
   b) Si le tirage se fait successivement et sans remise.



5.3. ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE – VARIANCE – ECART-TYPE

Définition 13

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega;P)$ telle que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{et} \quad p_i = P(X = x_i) \text{ pour tout } i \in \{1,2,\dots,n\}$$

On appelle espérance mathématique de X le nombre réel donné par la formule :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Interprétation de l'espérance mathématique

L'espérance mathématique $E(X)$ est la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire X pondérées par la probabilité que X prenne cette valeur. Dans le cas où $E(X)=0$, on dit que la variable aléatoire X est centrée.

On notera que l'espérance ne dépend pas directement de la variable aléatoire mais seulement de sa loi. À l'origine des probabilités, la quantité $E(X)$ a été introduite pour traduire la notion de gain moyen, ou espérance de gain, la variable aléatoire X représentant la valeur du gain à un certain jeu. Dans un jeu au hasard, lorsque $E(X)=0$, le jeu est dit équitable. En revanche, si $E(X)<0$ le jeu est défavorable au joueur. Pour les économistes et statisticiens, $E(X)$ est souvent noté μ ou m. Bien que le terme de moyenne soit communément employé pour désigner l'espérance mathématique, la signification n'est pas la même que la moyenne utilisée en statistique descriptive. Cette dernière se calcule avec des fréquences observées.

Exemples

1) Le tableau suivant présente la variable aléatoire X égale au gain algébrique lors d'un jeu : (les valeurs sont donnée en DH)

x_i	-200	50	100	300
p_i	$0,25$	$0,40$	$0,25$	$0,10$

L'espérance mathématique de X est :

$$E(X)=-200\times 0,25+50\times 0,40+100\times 0,25+300\times 0,10=25\,DH$$

Puisque ici $E(X)>0$ alors le jeu est favorable pour le joueur.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la variable aléatoire X définie par :

$$X(\Omega)=\{1,2,...,n\} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } k\in X(\Omega),\ P(X=k)=\frac{2k}{n(n+1)}.$$

Calculons l'espérance mathématique $E(X)$: (On rappelle que $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n+1}{3}$$

Définition 14

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega;P)$ telle que :

$$X(\Omega)=\{x_1,x_2,...,x_n\} \quad \text{et} \quad p_i=P(X=x_i) \text{ pour tout } i\in\{1,2,...,n\}$$

On appelle variance mathématique de X le nombre réel positif :

$$V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-E(X))^2$$

La racine carrée de la variance est appelée écart-type de X et on la note $\sigma(X)$.

On a donc : $$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Interprétation de la variance mathématique

La variance d'une variable aléatoire est toujours positive. C'est la moyenne des carrés de la distance entre valeurs de X et l'espérance de X. La variance est donc une mesure de la dispersion de X par rapport à $E(X)$. Plus la variance est élevée, plus la dispersion est grande et plus les réalisations x de la variable aléatoire X sont dispersées.

A titre d'exemple, considérons les deux variables aléatoires discrètes X et Y dont les lois de probabilité sont données par les tableaux suivants :

x_i	2	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

y_k	-4	3	33
$P(Y = y_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Un calcul élémentaire montre que les variables X et Y ont même espérance : $E(X) = E(Y) = 4{,}5$

Par contre, le calcul de la variance à l'aide de la définition ci-dessus donne : $V(X) = \frac{11}{4}$ et $V(Y) = \frac{689}{4}$.

Ces dernières indiquent une dispersion de Y autour de sa moyenne beaucoup plus grande que celle de X.

Pour le calcul de la variance, la formule $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - E(X)\right)^2$ est un peu lourde et aboutit parfois à des calculs compliqués. C'est pourquoi il est préférable d'utiliser la formule développée suivante nommée « formule de Koenig »

Proposition 7

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega; P)$ telle que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{et} \quad p_i = P(X = x_i) \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

On a alors la formule suivante dite « **formule de Koenig** » :

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle les sommes classiques :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

On considère la variable aléatoire X définie par :

$$X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } k \in X(\Omega), P(X = k) = \frac{2k-1}{n^2}$$

Calculons $E(X)$ et $V(X)$:

On a d'abord : $$E(X)=\sum_{k=1}^{n} k.P(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-k}{n^2}=\frac{1}{n^2}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

Donc : $E(X)=\dfrac{(n+1)(n-1)}{6n}$

Ensuite : $$E(X^2)=\sum_{k=1}^{n} k^2.P(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^3-k^2}{n^2}=\frac{1}{n^2}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$

Il en résulte alors : $$E(X^2)=\frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}$$

D'où : $$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{(n+1)(17n^3+7n^2-5n-1)}{36n^2}$$

Applications

A. Pour une demande aléatoire de x tonnes de denrées périssables, un grossiste commande y tonnes de denrées chaque jour avec $y\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

Soit X la variable aléatoire « demande en tonnes » et sa loi de probabilité :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,02	0,15	0,25	0,30	0,15	0,10	0,03

1. a) Calculer la probabilité que le grossiste vende moins de trois tonnes de denrées dans la journée.
   b) Calculer le nombre moyen de tonnes vendues chaque jour.
   c) Calculer l'écart-type de X
2. Le grossiste gagne $5000Dhs$ par tonne vendue et perd $2000Dhs$ par tonne non vendue.
   Soit la variable $G_y:\{0,1,2,3,4,5,6\}\to\mathbb{R}$ dont les valeurs sont égales au bénéfice lorsque y tonnes sont commandées pour une journée.
   a) Construire un tableau donnant les valeurs prises par G_y pour $y\in\{1,2,..,6\}$ ainsi que les probabilité associées.
   b) Calculer $E(G_y)$ pour $y\in\{1,2,..,6\}$.
   Pour quelle valeur de y l'espérance de gain est maximale ?

B. On lance simultanément deux dés à 6 faces.

On appelle Z la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z.
2. Calculer L'espérance mathématique de Z.
3. En déduire la variance et l'écart-type de Z.

5.4. FONCTION DE RÉPARTITION

Définition 15

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega; P)$.

La fonction F_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $F_X(x) = P(X \leq x)$

est appelée la fonction de répartition de X.

Remarques

- La définition 14 ci-dessus est justifiée car, pour tout réel x, $(X \leq x)$ est un événement, donc on peut calculer sa probabilité.
- La fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ et non seulement sur le support $X(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par X).

Exemple

On considère le tableau suivant donnant la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	-2	-1	2	3
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Déterminons la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X :

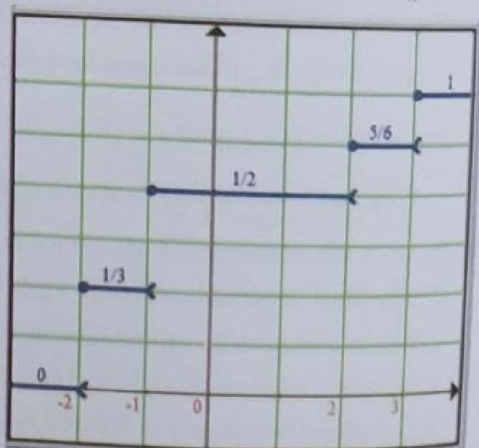
On a par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F_X(x) = P(X \leq x)$. Il s'ensuit donc :

- Si $x < -2$: $F_X(x) = 0$
- Si $-2 \leq x < -1$: $F_X(x) = \frac{1}{3}$
- Si $-1 \leq x < 2$: $F_X(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- Si $2 \leq x < 3$: $F_X(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
- Si $3 \leq x$: $F_X(x) = 1$

Par suite, la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -2 \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad -1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6} & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Représentation graphique de F_X



Scanné avec CamScanner

Applications

1. Soit X une variable aléatoire discrète ayant pour distribution de probabilité :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,15	0,15

a) Vérifier que le tableau représente bien une distribution de probabilité.

b) Calculer les probabilités suivantes : $P(1 \leq X \leq 3)$; $P(X \geq 2)$; $P_{(X\geq 2)}(X = 4)$.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

d) Déterminer la fonction de répartition F_X de X puis tracer sa courbe.

2. On lance une pièce de monnaie 4 fois de suite. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque éventualité, le nombre de fois d'apparition de la face F.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X puis tracer sa courbe.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir la face F au plus trois fois ?

3. Dix chevaux, quatre blancs et six noirs entrent sur la piste d'un cirque un par un et au hasard. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de chevaux blancs précédant le premier cheval noir. Préciser la loi de X puis déterminer la fonction de répartition F_X de X et tracer son graphe.

6 LA LOI BINOMIALE

SITUATION TYPE

Considérons une urne contenant un nombre fini de boules blanches et de boules noires supposées indiscernables au toucher, la proportion des boules blanches dans l'urne étant p et la proportion de boules noires $q = 1 - p$. Soit l'expérience qui consiste à tirer n boules avec remise dans cette urne. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

On a $X(\Omega) = \{0;1;...;n\}$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$: $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. En effet :

L'événement $(X = k)$ est la réalisation disjointe des événements $A_{i_1,i_2,...,i_k}$:

« on a tiré des boules blanches aux tirages numéros $i_1, i_2, ..., i_k$ et des boules noires aux $n - k$ autres tirages » pour $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$. On a $P(A_{i_1,i_2,...,i_k}) = p^k q^{n-k}$, car de les résultats des différents tirages sont indépendants, et comme $A_{i_1,i_2,...,i_k}$ est la réunion de C_n^k événements (qui correspondent au nombre de façons de choisir $i_1, i_2, ..., i_k$ dans $\{1;2;..;n\}$, c'est-à-dire les places des tirages donnant des boules blanches parmi les n tirages), on obtient $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Définition 16

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega;P)$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p si on a :

$$X(\Omega)=\{0;1;...;n\} \quad \text{et} \quad P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \text{ pour tout } k \in X(\Omega)$$

Remarques

- On a d'après la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1^n=1$$

Cela montre bien qu'il s'agit d'une loi de probabilité.

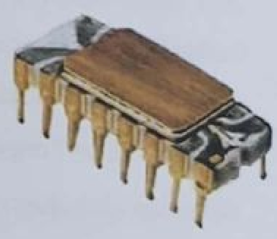
- Dans la pratique, on se donne un événement A associé à une expérience aléatoire et qui se réalise avec la probabilité p. On répète cette expérience n fois de manière indépendante. On désigne par X la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de fois où A se réalise. Alors la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Exemples

1) On lance 50 fois, de manière indépendante, une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est 0,4, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de faces obtenues durant ces 50 lancers. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0,4$. Par conséquent :

$$X(\Omega)=\{0,1,...,50\} \quad \text{et} \quad P(X=k)=C_{50}^k (0,4)^k (0,6)^{50-k}$$

2) Une fabrique de microprocesseurs utilise un procédé qui produit en moyenne 2% de pièces défectueuses. Toutes les deux heures, on choisit au hasard et avec remise 50 pièces parmi les microprocesseurs produits. Le nombre de pièces défectueuses trouvées est une variable aléatoire X.



Déterminons la loi de la variable aléatoire X :

On a $X(\Omega)=\{0;1;..;50\}$. On considère l'événement A : « la pièce est défectueuse ».

Par l'énoncé, X est égale au nombre de réalisations de l'événement A en 50 expériences indépendantes.

On en déduit que X suit une loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=P(A)=\dfrac{2}{100}=0,02$. De plus,

On a pour tout $k \in X(\Omega)$: $\quad P(X=k)=C_{50}^k (0,02)^k (1-0,02)^{50-k}$

On adopte la règle de contrôle de qualité suivante : la production sera arrêtée si l'échantillon contient au moins 3 pièces défectueuses. Dans ce cas, la probabilité que la production soit arrêtée est donc :

$$P(X \geq 3)=1-P(X<3)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right)$$

Par suite : $\quad P(X \geq 3)=0,0792$

3) A la livraison d'un nombre très important de colis dont 1% sont endommagés, on prélève au hasard un échantillon de 50 colis.
On admet que l'on peut assimiler ce prélèvement à 50 tirages avec remise.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de colis endommagés.
On a $Y(\Omega)=\{0,1,..,50\}$. On considère l'événement A : « le colis est endommagé ».
Par l'énoncé, Y est égale au nombre de réalisations de l'événement A en 50 expériences indépendantes.
On en déduit que Y suit une loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=P(A)=\dfrac{1}{100}=0,01$. De plus :

$$\text{On a pour tout } k\in Y(\Omega) : \quad P(Y=k)=C_{50}^{k}(0,01)^{k}(1-0,01)^{50-k}$$

Considérons les événements :

E : « L'échantillon ne comporte aucun colis endommagé »
F : « L'échantillon comporte un seul colis endommagé »
G : « L'échantillon comporte au moins deux colis endommagés»

On a alors :

$$P(E)=P(X=0)=C_{50}^{0}\times(0,01)^{0}\times(0,99)^{50} \quad \text{d'où } P(E)\approx 0,60$$

$$P(F)=P(X=1)=C_{50}^{1}\times(0,01)^{1}\times(0,99)^{49} \quad \text{d'où } P(F)\approx 0,31$$

$$P(G)=P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1) \quad \text{d'où } P(G)\approx 0,09$$

Proposition 8

Si la variable aléatoire X suit la loi de Binomiale de paramètres n et p alors :

$$E(X)=np \quad \text{et} \quad V(X)=np(1-p)$$

Applications

Un sac contient 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire une boule au hasard et on répète l'opération avec remise. Soit X le nombre de boules blanches obtenues en 6 tirages.

1. Préciser la loi de X . On donnera les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs de $P(X=k)$.
2. Calculer la probabilité d'obtenir :
   a) 5 boules blanches en 6 tirages.
   b) Au plus 4 boules blanches en 6 tirages.
   c) Ni plus de 5 boules ni moins de 2 boules en 6 tirages.
3. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

A CALCUL DES PROBABILITÉS

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Soit A et B deux événements tels que : $P(A)=0,6$ et $P(B)=0,3$ et $P(A\cap B)=0,1$.

a) Quelle est la probabilité que A et B se réalisent simultanément ?

b) Calculer la probabilité que A ou B se réalise.

c) Calculer la probabilité que ni A, ni B se réalisent.

2) Soit A et B deux événements. Montrer que : $P(A)-P(\overline{B})\leq P(A\cap B)\leq \min(P(A);P(B))$

3) Soit A, B et C trois événements tels que :

$$P(A)=0,6 \;\; ; \;\; P(A\cap B)=0,2 \;\; ; \;\; P(B\cap C)=0,1 \;\; ; \;\; P(A\cap C)=0,1 \;\; ; \;\; P(A\cap B\cap C)=0,05$$

a) Calculer $P(A\cup(B\cap C))$ et $P(A\cap(B\cup C))$.

b) On suppose que $P(B)=0,4$. Calculer : $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ et $P(A\cap\overline{B})$.

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\Omega=\{1;2;...;n\}$. On considère l'application $Q:\Omega\to\mathbb{R}$ définie par :

$$(\forall k\in\Omega)\quad Q(\{k\})=\frac{2k}{n(n+1)}$$

Montrer que Q définit est une probabilité sur Ω.

SOLUTION

1) a) La probabilité que A et B se réalisent simultanément est $P(A\cap B)=0,1$.

b) La probabilité que A ou B se réalise est $P(A\cup B)$. Il s'ensuit donc :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,6+0,3-0,1=0,8$$

c) La probabilité que ni A, ni B se réalisent est $P(\overline{A}\cap\overline{B})$. D'après le résultat de la question précédente :

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,8=0,2$$

2) Soit A et B deux événements. On a d'une part $A\cap B\subset A$ et $A\cap B\subset B$; par conséquent, $P(A\cap B)\leq P(A)$ et $P(A\cap B)\leq P(B)$. Il s'ensuit donc : $P(A\cap B)\leq \min(P(A);P(B))$. D'autre part, on a la formule :

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

Comme $P(A\cup B)\leq 1$ et $P(\overline{B})=1-P(B)$, on a : $P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1$

ce qui entraîne que : $P(A\cap B)\geq P(A)-P(\overline{B})$.

Au final : $P(A)-P(\overline{B})\leq P(A\cap B)\leq \min(P(A);P(B))$

3) Soit A, B et C trois événements.

a) Calculons $P(A\cup(B\cap C))$ et $P(A\cap(B\cup C))$:

$$P(A\cup(B\cap C))=P(A)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)=0,6+0,1-0,05=0,65$$

$$P(A\cap(B\cup C))=P((A\cap B)\cup(A\cap C))=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$$

ce qui donne : $P(A\cap(B\cup C))=0,2+0,1-0,05=0,25$

b) On suppose que $P(B)=0,4$. On a :

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=0,2$$

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=0,6-0,2=0,4$$

4) On a $\Omega=\{1;2;...;n\}$. Pour tout $k\in\Omega$, on a : $Q(\{k\})=\dfrac{2k}{n(n+1)}\geq 0$.

De plus, en utilisant la formule $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}Q(\{k\})=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)}{2}=1$$

Donc Q est une probabilité sur Ω.

La boite à idées

- Pour calculer une probabilité, on peut utiliser les règles suivantes :
  - La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.
  - Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1.
  - La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. En cas d'équiprobabilité : $P(A)=\dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$
  - Pour deux événements A et B :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ ;\ P(\overline{A})=1-P(A)\ ;\ P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$$

B PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Une entreprise comprend 40% de cadres et 60% d'employés. On sait que 80% des cadres et 50% des Employés parlent l'anglais.

1) On interroge une personne de cette entreprise au hasard ; quelle est la probabilité pour que ce soit :

a) un cadre parlant l'anglais ?

b) un employé parlant l'anglais ?

c) une personne parlant l'anglais ?

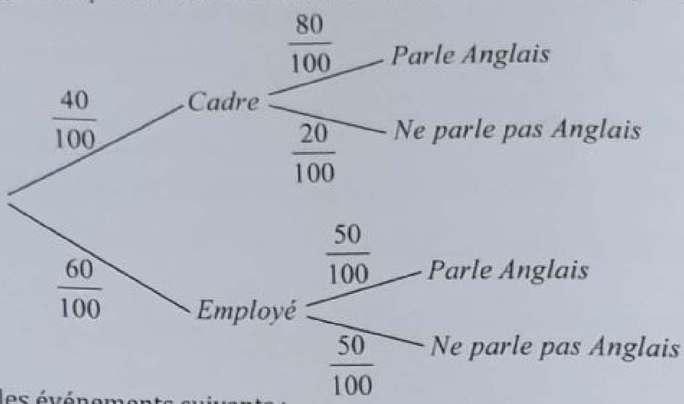
2) La personne interrogée parle l'anglais.

a) Quelle est la probabilité pour que ce soit un employé ?

b) Quelle est la probabilité pour que soit un cadre ?

SOLUTION

La meilleure façon pour répondre à cet exercice est l'utilisation d'un arbre pondéré.



On note E , C et A les événements suivants :

A : « La personne parle l'Anglais » ; E : « La personne interrogée est un employé »

C : « La personne interrogée est un cadre »

1) On interroge une personne de cette entreprise au hasard :

a) La probabilité pour que la personne soit un cadre parlant anglais est : $P(C \cap A) = \frac{40}{100} \times \frac{80}{100} = 0{,}32$

b) La probabilité pour que la personne soit un employé parlant anglais est : $P(E \cap A) = \frac{60}{100} \times \frac{50}{100} = 0{,}3$

c) La probabilité pour que la personne parle l'anglais est : $P(A) = 0{,}32 + 0{,}3 = 0{,}62$

2) La personne interrogée parle l'anglais.

a) La probabilité pour que ce soit un employé est : $P_A(E) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}62} = \frac{15}{31}$

b) La probabilité pour que ce soit un cadre est : $P_A(C) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}32}{0{,}62} = \frac{16}{31}$

- Un arbre pondéré des probabilités vérifie toujours les propriétés fondamentales suivantes :
  - La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches (formule des probabilités composées) : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$
  - Pour les branches issues d'un même nœud, la somme des probabilités vaut 1 :

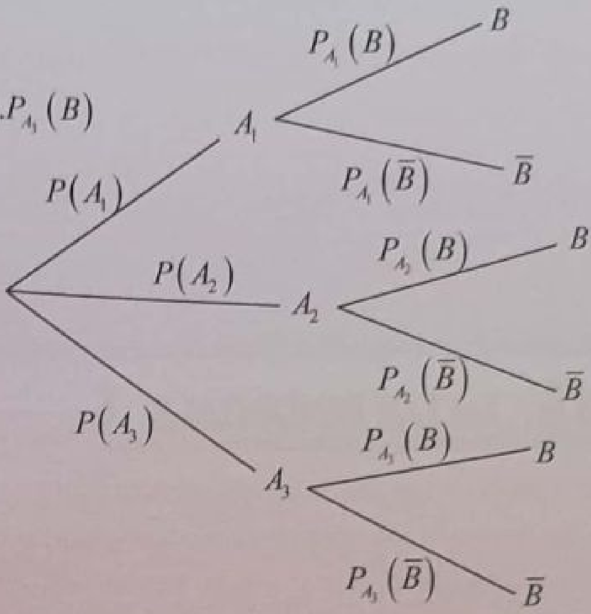
    $P(A) + P(\overline{A}) = 1$; $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$; $P_{\overline{A}}(B) + P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1$
  - La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le réalisent :

    $$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$
- Si on connait un système complet d'évènements (A_1, A_2, A_3), on peut réaliser un arbre de probabilité comme suit :

Par exemple, la formule des probabilités totales s'écrit dans ce cas :

$$P(B)=P(A_1).P_{A_1}(B)+P(A_2).P_{A_2}(B)+P(A_3).P_{A_3}(B)$$

Attention ! L'arbre a pour but de schématiser l'expérience aléatoire et la comprendre.
Il ne constitue en aucun cas une démonstration !



C L'INDÉPENDANCE

Un élève se présente à deux concours C_1 et C_2. Ces deux concours sont indépendants. Il a une chance sur trois de réussir le concours C_1 et une chance sur trois de réussir le concours C_2.

Pensant augmenter ses chances de réussite, l'élève décide de passer les deux concours.
Quelle probabilité p a-t-il de réussir au moins un concours ?

SOLUTION

La probabilité de réussir le concours C_1 est $\frac{1}{3}$ et même chose pour le concours C_2. On note :

A l'événement « l'élève réussisse le concours C_1 » et B l'événement « l'élève réussisse le concours C_2 ».

Puisque les deux concours sont indépendants alors $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

La probabilité de réussir au moins un concours est donc :

$$p=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=$$

<u>Remarque :</u> On peut aussi penser à l'événement contraire, c'est-à-dire « rater les deux concours ».

- Pour étudier l'indépendance de deux événements A et B, on compare $P(A\cap B)$ et $P(A)\times P(B)$, ou $P_A(B)$ et $P(B)$, ou $P_B(A)$ et $P(A)$. En cas d'égalité, les événements A et B sont indépendants.
- Pour calculer des probabilités dans le cadre d'expériences répétées indépendantes, on utilise le principe multiplicatif pour les probabilités, après s'être assuré de l'indépendance de ces expériences.

- Connaître la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète, c'est connaître les valeurs possibles prises par cette variable et les probabilités élémentaires $p_k = P(X = x_k)$.
- S'il manque une seule probabilité, par exemple $P(X = x_1)$, On utilise le système complet d'événements $(X = x_1), ..., (X = x_n)$. On a l'égalité $\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) = 1$ et alors :

$$P(X = x_1) = 1 - \sum_{k=2}^{n} P(X = x_k)$$

La boîte à idées

E LA LOI BINOMIALE

Dans cet exercice, on étudie quelques situations probabilistes liées à un standard téléphonique d'un service après-vente. Le standard de ce service après-vente reçoit deux types d'appels :

Les appels concernant le petit électroménager et les appels concernant les appareils audio et vidéo. Lors d'un appel, le problème est soit résolu directement par téléphone, soit il nécessite l'intervention d'un technicien. On considère les évènements suivants :

E : « Un appel concerne le petit électroménager »

A : « Un appel concerne les appareils audio-vidéo »

T : « Le problème posé se résout directement par téléphone »

De plus, des études ont permis d'établir les résultats suivants :

(H_1) Le standard reçoit 20% d'appels concernant le petit électroménager et 80% d'appels concernant les appareils audio et vidéo.

(H_2) Lorsqu'un appel concerne le petit électroménager, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est de $0,5$.

(H_3) Lorsqu'un appel concerne un appareil audio-vidéo, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est de $0,375$.

On supposera enfin les appels indépendants les uns des autres.

1) a) Traduire en terme de probabilité les données (H_1), (H_2) et (H_3).

b) Montrer que $P(T) = 0,4$.

c) On suppose qu'une personne appelant le standard a vu son problème résolu directement par téléphone. Calculer la probabilité pour que le problème posé concerne un petit électroménager.

2) Un standardiste reçoit 10 appels dans l'heure, on note X la variable aléatoire représentant le nombre d'appels concernant le petit électroménager.

a) Déterminer la loi de X : on donnera les valeurs prises par X ainsi que, pour chacune d'elles, la probabilité correspondante.

b) Donner les valeurs de l'espérance mathématique et de la variance de X.

3) Pendant une période de 10 jours, un standardiste reçoit 600 appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre d'appels résolus directement par téléphone.

a) Donner la loi de Y.

b) Préciser l'espérance mathématique $E(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$.

SOLUTION

1) a) L'hypothèse (H_1) se traduit par : $P(E)=0,2$ et $P(A)=0,8$.

L'hypothèse (H_2) se traduit par : $P_E(T)=0,5$; L'hypothèse (H_3) se traduit par : $P_A(T)=0,375$

b) Les événements E et A forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales : $P(T)=P(E)\times P_E(T)+P(A)\times P_A(T)=0,2\times 0,5+0,8\times 0,375=0,4$.

c) Il s'agit de calculer la probabilité $P_T(E)$. On a : $P_T(E)=\dfrac{P(T\cap E)}{P(T)}=\dfrac{P(E)\times P_T(E)}{P(T)}=\dfrac{0,2\times 0,5}{0,4}=\dfrac{1}{4}$.

2) a) La variable aléatoire X compte le nombre de réalisations de l'événement succès « l'appel concerne le petit électroménager » de probabilité $0,2$ lors de 10 épreuves identiques et indépendantes. Donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,2$. Par suite :

$$X(\Omega)=\{0;1;...;10\} \text{ et pour tout } k\in X(\Omega) : P(X=k)=C_{10}^{k}(0,2)^{k}(0,8)^{10-k}.$$

b) L'espérance mathématique de X est : $E(X)=np=10\times 0,2=2$.

la variance de X est : $V(X)=np(1-p)=2\times 0,8=1,6$.

3) a) La variable aléatoire Y compte le nombre de réalisations de l'événement succès « Le problème posé se résout directement par téléphone » de probabilité $0,4$ lors de 600 épreuves identiques et indépendantes. Donc la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n=600$ et $p=0,4$. Par suite :

$$Y(\Omega)=\{0;1;...;600\} \text{ et pour tout } k\in Y(\Omega) : P(Y=k)=C_{600}^{k}(0,4)^{k}(0,6)^{600-k}.$$

b) L'espérance mathématique de Y est : $E(Y)=np=600\times 0,4=240$.

la variance de X est : $V(X)=np(1-p)=240\times 0,6=144$. L'écart-type est : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=12$.

- Pour reconnaître une loi binomiale, on repère des mots clés dans l'énoncé, par exemple :
  « X est la variable aléatoire qui compte le nombre de .... » ;
  « On répète de manière identique et indépendante l'expérience... ».
- Si X suit une loi binomiale de paramètre p et n, alors :

$$E(X)=np \quad ; \quad V(X)=np(1-p) \quad ; \quad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$$

La boite à idées

EXERCICES D'APPLICATION

EXPÉRIENCES ALÉATOIRES – ÉVÉNEMENTS

EXERCICE 01

Soit Ω un univers et soient A, B et C trois évènements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

1) Seul A se réalise.
2) A et B se réalisent, mais pas C.
3) Les trois événements se réalisent.
4) Au moins l'un des trois évènements se réalise.
5) Au moins deux des trois événements se réalisent.
6) Deux événements au plus se produisent.
7) Un seul événement se produit.
8) Deux événements seulement se produisent.
9) Aucun ne se réalise.
10) Au plus l'un des trois se réalise.
11) Exactement deux des trois se réalisent.

CALCUL DES PROBABILITÉS

EXERCICE 02

On lance trois dés E, F et H ; les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les faces ont la même probabilité d'apparition.
Calculer les probabilités d'obtenir :

1) Le numéro 5 une seule fois exactement.
2) Au moins une fois le numéro 5.
3) Trois numéros identiques.
4) Au moins deux faces portant le même numéro.
5) Exactement deux faces portant le même numéro.
6) La somme des numéros est paire.
7) La somme des numéros est strictement supérieur à 26.

EXERCICE 03

On lance une pièce équilibrée quatre fois de suite.

1) Décrire de façon ensembliste les évènements suivants :
   A : « On obtient deux fois Pile et deux fois Face»
   B : « Les deux premiers lancers ont donné des résultats différents »
2) Calculer les probabilités suivantes :
   $P(A)$; $P(B)$; $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$

EXERCICE 04

On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'apparition de numéro 6 est égale à 11 fois la probabilité d'apparition de chacune des cinq autres faces.

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.
2) On lance le dé une seule fois. Calculer la probabilité d'obtenir :
   a) Un multiple de 3 ; b) Un numéro impair

EXERCICE 05

1) Dans une urne sont placées 15 boules verts et 10 boules blanches. On tire successivement et sans remise 5 boules de l'urne.
   Calculer les probabilités suivantes :
   a) On obtient 5 boules vertes.
   b) On obtient une première boule verte, les deux suivantes blanches et les deux dernières vertes.
   c) On obtient au plus une boule blanche.
   d) On obtient trois boules vertes et deux boules blanches.
2) Reprendre les questions a), b), c) et d) de 1) avec des tirages successifs avec remise.
3) Reprendre les questions a), c) et d) de 1) avec des tirages simultanés.

EXERCICE 06

On jette une pièce de monnaie trois fois de suite.

1) Citer la liste de tous les résultats possibles en notant P pour Pile et F pour face. (Exemple : PPF)
2) Donner la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : « Le tirage ne comporte que des Piles»

   B : « Le tirage comporte au moins une fois Face »

EXERCICE 07

On lance une pièce équilibrée quatre fois de suite.

1) Décrire de façon ensembliste les évènements suivants :

   A : « On obtient deux fois Pile et deux fois Face»

   B : « Les deux premiers lancers ont donné des résultats différents »
2) Calculer les probabilités suivantes :

$$P(A) \;;\; P(B) \;;\; P(A\cap B) \;;\; P(A\cup B)$$

EXERCICE 08

Un coffre contient 6 diamants, 8 émeraudes et 10 rubis. On tire quatre pierres précieuses au hasard dans le coffre.

Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : « Les quatre pierres sont du même type »

B : « On tire deux diamants »

C : « On tire autant de diamants que de rubis »

EXERCICE 09

Le bureau d'un organisme comprend :

3 secrétaires, 5 trésoriers, 2 présidents.

On constitue une commission de trois membres pris au hasard dans ce bureau.

1) Quelle est la probabilité que cette commission comprenne un président, un trésorier et un secrétaire ?
2) Quelle est la probabilité que cette commission comprenne trois trésoriers ?
3) Quelle est la probabilité que cette commission comprenne au moins une secrétaire ?

EXERCICE 10

Soit $(\Omega ; P)$ un espace probabilisé.

On considère deux évènements E et F tels que :

$$P(E)=\frac{1}{2} \quad ; \quad P(F)=\frac{1}{4} \quad ; \quad P(E\cap F)=\frac{5}{36}$$

Calculer dans l'ordre que vous voulez :

$$P(\overline{E}) \quad ; \quad P(E\cup F) \quad ; \quad P(\overline{E}\cap\overline{F})$$

$$P(E\cap\overline{F}) \quad ; \quad P(E\cup\overline{F}) \quad ; \quad P(\overline{E}\cup\overline{F})$$

EXERCICE 11

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 telles que :

- Les faces portant les numéros pairs ont la même probabilité d'apparition.
- Les faces portant les numéros impairs ont la même probabilité d'apparition.
- La probabilité d'apparition d'un numéro pair est égale au double de celle d'un numéro impair.

1) Calculer la probabilité d'apparition d'un numéro impair et la probabilité d'apparition des faces du dé.
2) On lance le dé trois fois de suite.

   Calculer la probabilité de chacun des événements :

   A : « Aucune apparition d'un numéro impair »

   B : « Obtenir trois numéros successifs dans n'importe quel ordre »

EXERCICE 12

Dans une entreprise qui comporte 400 personnes, 300 sont assurées contre la maladie, 160 contre les accidents et 120 à la fois contre la maladie et les accidents.

Si l'on choisit au hasard une personne dans l'entreprise, qu'elle est la probabilité qu'elle soit assurée :

a) Contre la maladie, mais pas contre les accidents ?

b) Contre la maladie ou les accidents ?

c) Ni contre la maladie, ni contre les accidents ?

EXERCICE 13

Dans le parking d'un club privé sont parquées 50 voitures. Parmi celles-ci il y a 20 Jaguars, 35 décapotables, dont 12 Jaguars décapotables.

On emprunte une voiture au hasard.

Calculer la probabilité d'avoir :

1) Une Jaguar non décapotable.
2) Une décapotable qui ne soit pas une Jaguar.
3) Une voiture qui ne soit ni une Jaguar, ni une décapotable.

EXERCICE 14

Un sac contient 10 jetons blancs, 6 jetons rouges et 4 jetons noires.

1) On tire trois jetons successivement et avec remise. Quel est l'évènement le plus probable parmi les trois événements suivants ?
   - A : « Obtenir un tirage unicolore»
   - B : « Obtenir un tirage bicolore »
   - C : « Obtenir un tirage tricolore »
2) Même question si l'on tire simultanément trois jetons.
3) Même question si l'on tire successivement et sans remise.

EXERCICE 15

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une urne contient 30 boules dont $(n+1)$ sont rouges, $(n+2)$ sont vertes et le reste est composé de boules blanches. (On suppose que $n < 13$)

On tire au hasard, successivement et avec remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- A : « Obtenir une boule rouge puis une boule verte et enfin une boule blanche dans cet ordre ».
- B : « Obtenir deux boules rouges et une boule verte ».
- C : « Obtenir des boules de couleurs deux à deux distinctes »

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

EXERCICE 16

Une urne contient 8 boules :

- 4 boules rouges numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2.
- 4 boules vertes numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2.

On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des évènements :

- R : « Obtenir deux boules rouges »
- R_2 : « Obtenir deux boules rouges sachant que l'une d'elles porte le numéro 2 »
- V_1 : « Obtenir deux boules vertes sachant que l'une d'elles est verte et porte le numéro 1 »

EXERCICE 17

Un sac contient 32 pions :

- 16 pions rouges dont 6 d'entre eux portent la lettre F
- 16 pions noires dont 6 d'entre eux portent la lettre F

On tire au hasard un pion du sac et on considère les événements suivants :

- A : « Le pion tiré est noire »
- B : « Le pion tiré est porte la lettre F »

1) Calculer $P_B(A)$.
2) Calculer la probabilité de tirer un pion noir et portant la lettre F.

EXERCICE 18

On considère trois urnes :

- U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges
- U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges
- U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2 et on les met dans U_3. On tire une boule de U_3, elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

EXERCICE 19

1) Soient A et B deux évènements tels que :

$$P(A)=0,2 \quad ; \quad P(B)=0,3 \quad ; \quad P(A\cup B)=0,5$$

Calculer $P_B(A)$ et $P_A(B)$

2) Soient E et F deux évènements tels que :

$$P_F(E)=\frac{1}{2} \quad ; \quad P_E(F)=\frac{2}{3} \quad ; \quad P(E\cup F)=0,2$$

Calculer $P(E)$ et $P(F)$

EXERCICE 20

Soient A et B deux évènements tels que :

$$P(A)=\frac{1}{2} \quad ; \quad P(B)=\frac{2}{5} \quad ; \quad P_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{5}$$

Calculer : $P(A\cap B)$; $P_{\overline{B}}(A)$; $P_B(\overline{A})$

EXERCICE 21

On lance deux dés bien équilibrés. On considère les évènements suivants :

A : « La face numéro 2 apparaît au moins une fois »

B : « La somme des points est égale à 6 »

Calculer les probabilités suivantes :

$$P(A) \quad ; \quad P(B) \quad ; \quad P(A\cap B)$$

$$P_B(A) \quad ; \quad P_A(B) \quad ; \quad P_{\overline{A}}(B)$$

EXERCICE 22

Un laboratoire utilise un test biologique pour le dépistage d'une maladie rare (un pour mille de la population). Ce test biologique possède les caractéristiques suivantes :

- 99,9% des patients sains donnent un résultat négatif.
- 90% des patients réellement malades donnent un résultat positif.

1) Un patient subit ce test, le résultat est positif.
   a) Calculer la probabilité pour que ce patient soit réellement malade.
   b) Calculer la probabilité que ce patient soit sain.
2) Calculer la probabilité pour que le résultat soit positif.

EXERCICE 23

Adam, Rachid et Manal vont à la chasse.

Leurs coefficients de réussite respectifs sont $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{10}$ (probabilité pour qu'une balle tirée atteigne son but).

On supposera que leurs résultats ne sont bien sur incompatibles, mais qu'ils sont indépendants.

Ils tirent simultanément sur le même lapin.

1) Montrer que le lapin a quand même sa chance en évaluant la probabilité qu'il ne soit pas touché.
   En déduire la probabilité qu'il soit touché.
2) Quelle est la probabilité qu'Adam soit le seul à toucher le lapin ?
3) On suppose dans cette question que le lapin est touché.
   a) Quelle est la probabilité qu'Adam ait participé au crime ?
   b) Quelle est la probabilité qu'Adam soit le seul responsable ?
   c) Après avoir autopsié le lapin (ou tout simplement après l'avoir mangé), on constate qu'il ne contenait qu'une seule balle. Quelle est la probabilité que ce soit celle d'Adam ?

EXERCICE 24

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne.

Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit noire, la seconde blanche et la troisième noire ?

EXERCICE 25

Trois pièces non truquées (10 dirhams, 5 dirhams, 1 dirham) sont jetées simultanément.

Déterminer la probabilité que toutes les pièces donnent face sachant que :

1) La pièce de 5 dirhams a donné face.

2) Au moins l'une des pièces a donné face.

EXERCICE 26

Une usine fabrique des pièces dont $1,8\%$ sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- Sachant qu'une pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de $0,97$.
- Sachant qu'une pièce est mauvaise, elle est refusée avec une probabilité de $0,99$.

1)Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse ?

2) a) Montrer que la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est $0,00018$.

b) Montrer que la probabilité pour qu'une pièce soit bonne et refusée est $0,02946$.

c) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle.

3) Si on effectue cinq contrôles de suite, quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement deux erreurs de contrôle ?

EXERCICE 27

Le gérant d'un magasin de matériel informatique a acheté un stock de boîtes de disquette. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins une disquette défectueuse.
- 98% des boîtes en bon état ne contiennent aucune disquette défectueuse.
- Les états des diverses boîtes sont indépendants les uns des autres.

Un client achète une des boîtes du lot.

On désigne par A et D les événements suivants :

A : « La boîte achetée est abîmée »

B : « La boîte achetée contienne au moins une disquette défectueuse»

1) a) Donner les probabilités :

$$P(A)\ ;\ P(\overline{A})\ ;\ P_A(D)\ ;\ P_A(\overline{D})\ ;\ P_{\overline{A}}(\overline{D})$$

b) Calculer la probabilité de l'événement D .

2) Le client constate qu'une des disquettes est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'il ait achetée une boîte abîmée ?

EXERCICE 28

Une enquête est faite auprès des 1000 élèves d'un lycée sans internat, afin de savoir s'ils disposent d'un ordinateur chez eux. Dans ce lycée, 55% des élèves sont demi-pensionnaires.

L'enquête révèle, d'une part que 40% des élèves disposent d'au moins un ordinateur chez eux, et, d'autre part, que parmi ces lycées disposant d'au moins un ordinateur chez eux, 216 ne sont pas demi-pensionnaires.

1) Compéter le tableau des effectifs suivant :

	demi-pensionnaires	Non demi-pensionnaires	Total
Lycéens disposant d'au moins un ordinateur chez eux			
Lycéens ne disposant pas d'ordinateur chez eux			
Total			1000

2) On tire au hasard le nom d'un élève du lycée. Tous les élèves ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les événements suivants :

D : « L'élève est demi-pensionnaire »

O : « L'élève dispose d'au moins un ordinateur chez lui »

a) En s'inspirant sur les données du tableau, déterminer les probabilités :

$$P(D)\ ;\ P(O)\ ;\ P_O(D)\ ;\ P_D(O)$$

b) En déduire les probabilités :

$$P(D\cap O)\quad \text{et}\quad P(D\cup O)$$

EXERCICE 29

Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M_1 et M_2 pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement $0,01$ et $0,008$.

De plus, la probabilité de l'évènement « la machine M_2 est en panne sachant que M_1 est en panne » vaut $0,4$.

1) Quelle est la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment ?
2) Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?

EXERCICE 30

Une banque propose deux types de carte bancaire à ses clients : « VISA » et « MasterCard »

Parmi l'ensemble de ses clients, 50% possèdent une carte VISA, 40% possèdent une MasterCard et 25% possèdent les deux types de carte.

Soit A l'évènement :

« le client possède une carte VISA »

1) Expliciter les événements suivants à l'aide du langage ensembliste et calculer la probabilité correspondante, en justifiant les calculs :
   - E : « Un client possède au moins un des deux type de carte »
   - F : « Un client ne possède aucun des deux type de carte »
   - G : « Un client ne possède qu'un seul type de carte »
2) On considère un client qui possède une carte VISA. Quelle est la probabilité qu'il possède aussi une carte MasterCard ?
3) On considère un client qui possède au moins une carte. Quelle est la probabilité que ce soit une carte VISA ?

INDÉPENDANCE DES ÉVÉNEMENTS

EXERCICE 31

Soit A et B deux évènements tels que :

$$P(A) = 0,8 \quad \text{et} \quad P(B) = 0,4$$

1) Peut-on avoir $P(A \cap B) = 0,1$? Justifier.
2) Si $P(A \cap B) = 0,2$, que peut-on en déduire ?
3) Si $P(A \cap B) = 0,4$, que peut-on en déduire ?
4) Déterminer $P(A \cap B)$ sachant que les évènements A et B sont indépendants.

EXERCICE 32

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1à 6 et on considère les événements :

A : « Le numéro obtenu est strictement supérieur à 4 »

B : « Le numéro obtenu est pair »

1) Calculer : $P(A)$; $P(B)$; $P(A \cap B)$
2) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

EXERCICE 33

Soit A et B deux événements indépendants tels que :

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad P(A \cup B) = \frac{3}{5}$$

Déterminer $P(A)$ et $P(B)$.

EXERCICE 34

On considère les deux évènements suivants :

A : « Une famille a des enfants des deux sexes »

B : « Une famille a au plus un garçon »

On s'intéresse dans cet exercice aux familles qui ont trois enfants.

1) Calculer la probabilité qu'une famille a deux filles.
2) Calculer la probabilité qu'une famille a au moins un garçon.
3) Montrer que les évènements A et B sont indépendants.

EXERCICE 35

Un atelier d'assemblage de matériel informatique s'approvisionne en pièces d'un certain modèle.
L'atelier reçoit ce modèle de pièce en grande quantité.
Chaque pièce peut présenter deux défauts que l'on appelle défaut a et défaut b.
On prélève une pièce au hasard dans une importante livraison. On considère les événements :

A : « l'appareil présente le défaut a »

B : « l'appareil présente le défaut b »

On admet que les probabilités des événements A et B sont : $P(A)=0,02$ et $P(B)=0,01$
On suppose que les deux événements A et B sont indépendants.

1) Calculer la probabilité des événements suivants :
   - E : « La pièce présente le défaut a et le défaut b »
   - F : « La pièce présente au moins un des défauts »
   - G : « La pièce ne présente aucun défaut »
2) Calculer la probabilité que la pièce présente les deux défauts sachant qu'elle est défectueuse.

EXERCICE 36

La probabilité qu'une personne donnée contracte la grippe en un an est $0,4$. La probabilité pour que cette personne soit atteinte d'une maladie M, autre que la grippe, pendant la même période est $0,2$. On suppose que contracter la grippe et la maladie M sont deux événements indépendants.
Quelle est la probabilité pour que cette personne contracte au moins l'une de ces deux maladies en un an ?

EXERCICE 37

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune n boules rouges et $2n$ boules vertes.

1) On tire une boule dans chaque urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux vertes.
2) On tire une boule dans, on la met dans U_2 puis on tire une boule dans U_2.

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

EXERCICE 38

Soit X la variable aléatoire définie par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,25	p_2	0,18	p_4	0,37

1) Déterminer la valeur de p_2 et p_4, sachant que les événements $[X=2]$ et $[X=4]$ sont équiprobables.
2) Calculer les probabilités suivantes :
   $P(X\geq 2)$; $P(1\leq X\leq 3)$; $P_{(X\geq 2)}(X\leq 4)$
3) Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.
4) Déterminer la fonction de répartition F_X de X puis tracer sa courbe.

EXERCICE 39

Un marchand de glaces propose dix parfums au choix pour des glaces en cornet.

Trois élèves choisissent, au hasard et indépendamment l'un de l'autre, un des parfums proposés.

1) Calculer la probabilité de l'évènement :
   A : « Les trois élèves choisissent des parfums deux à deux distincts »
2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parfums choisis par les trois élèves.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ puis interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 40

Un chef de service commercial estime avoir une probabilité $0,6$ de faire gagner 100000 Dirhams à son entreprise. Si cette opération est manquée, la perte est de 200000 Dirhams.
Quelle est l'espérance mathématique du gain ?

EXERCICE 41

On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué.
S'il obtient 1, 2 ou 3, il gagne l'équivalent en dirhams (c'est-à-dire $1\,Dh$ s'il obtient 1 par exemple). Sinon, il perd $2Dh$. On note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (négatif en cas de perte).

1) Donner la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition F_X.
2) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.
3) On modifie le jeu de la façon suivante : les gains restent les mêmes pour les résultats 1, 2 ou 3, mais si le joueur obtient autre chose, il relance le dé. S'il obtient 3 ou moins, il gagne $3Dh$, sinon il perd $5Dhs$.
   a) Décrire formellement l'univers du nouveau jeu.
   b) On note Y la variable aléatoire qui désigne le nouveau gain du joueur.
   Donner la loi de Y et calculer son espérance.
4) Quelle variante du jeu est la plus avantageuse pour le joueur ? Justifier.

LA LOI BINOMIALE

EXERCICE 42

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,4$.

1) a) Déterminer $X(\Omega)$ et l'expression de $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$
   b) En déduire les probabilités suivantes :
   $P(X = 6)$; $P(X \leq 3)$; $P(X \geq 2)$
   $P(X = 8,5)$; $P(3 \leq X \leq 6)$; $P_{(X\geq 3)}(X \leq 6)$
2) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n_0 pour lesquelles : $P(X \geq n_0) \leq 0,63$
3) Déterminer l'espérance et la variance de X.

EXERCICE 43

La probabilité que Younes d'atteindre une cible est p (avec $p \in]0;1[$). Il tire 5 fois de suite.

1) On considère les événements suivants :
   A : « La cible est atteinte dans les deux premiers essais »
   B : « La cible est atteinte dans le deuxième et le troisième essais »
   C : « La cible est atteinte dans le troisième et le quatrième essais »
   a) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
   b) Les événements A et C sont-ils indépendants ?
2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que la cible est atteinte.
   a) Préciser la loi de X. On donnera $X(\Omega)$ et l'expression de $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   b) Calculer la probabilité d'atteindre la cible au moins deux fois.
   c) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
   d) Définir la fonction de répartition F de X puis tracer sa courbe dans un repère orthogonal.

EXERCICE 44

Considérerons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé non pipé, l'issue de l'expérience étant l'apparition ou non du chiffre 6. L'expérience est répétée 100 fois.

1) Préciser la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de fois où le chiffre 6 est apparu au cours des 100 lancers.
2) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

EXERCICE 45

Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p. Montrer que pour tout $k \in \{0;1;...;n-1\}$ on a :

$$P(X = k+1) = \frac{(n-k)}{(1+k)(1-p)} P(X = k)$$

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 46

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On définit les événements suivants :

A : « La carte choisie est un pique »

B : « La carte choisie est rouge (cœur ou carreau) »

C : « La carte choisie est une figure (valet ou dame ou roi) »

2) Déterminer les probabilités des événements suivants :

A ; B ; C ; $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cup B$; $A \cup C$

3) Déterminer la probabilité de l'événement suivant :

D : « La carte choisie n'est ni un pique ni une figure »

EXERCICE 47

On lance un dé quatre fois de suite. Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « On obtient quatre fois le même chiffre»

B : « On obtient quatre chiffres différents »

C : « On obtient quatre chiffres qui se suivent en croissant ou en décroissant »

EXERCICE 48

Soit Ω un espace muni d'une probabilité P.

On considère trois évènements A, B et C tels que :

$$P(A)=P(B)=\frac{2}{3}\ ;\ P(A\cap C)=\frac{1}{4}\ ;\ P(B\cap C)=\frac{1}{3}$$

$$P(C)=P(A\cap B)=\frac{1}{2}\quad ;\quad P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{6}$$

Déterminer la probabilité des événements suivants :

1) C se réalise sans que B se réalise.

2) A et B se réalisent sans que C se réalise.

3) Deux au moins des évènements A, B et C se réalisent.

4) Aucun des événements A, B et C ne se réalise.

EXERCICE 49

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega;P)$ tels que :

$$P(A)=\frac{4}{5}\quad ;\quad P_A(B)=\frac{7}{10}\quad ;\quad P_{\overline{A}}(B)=\frac{1}{2}$$

1) a) Calculer $P(A\cap B)$ et $P(\overline{A}\cap B)$.

b) En déduire $P(B)$.

2) a) Calculer $P(A\cap\overline{B})$ et $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

b) Calculer $P(\overline{B})$ de deux façons différentes.

3) Calculer $P_B(A)$.

EXERCICE 50

Soit E_1, E_2 et E_3 trois événements quelconques d'un ensemble fondamental Ω.

1) Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que E_1, E_2 et E_3) les événements suivants :

H : « Un et un seul des trois événements se produit »

K : « Deux et deux seulement des trois événements se produisent »

L : « Les trois événements se produisent simultanément »

2) Calculer les probabilités des événements H, K et L sachant que : $P(E_1\cup E_2\cup E_3)=0{,}8$

$$P(E_2\cap E_3)=0{,}2\quad ;\quad P(E_1\cap E_2)=0{,}4$$

$$P(E_1\cap E_3)=0{,}3\quad ;\quad P(E_1\cap E_2\cap E_3)=0{,}1$$

EXERCICE 51

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega;P)$. Montrer que A et B sont indépendants si, et seulement si :

$$P(A\cap B)\times P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A}\cap B)\times P(A\cap\overline{B})$$

EXERCICE 52

On jette une pièce de monnaie en l'air cinq fois de suite et l'on note chaque fois quelle est la face apparente après sa chute.
Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi exactement deux fois « Pile » ?

EXERCICE 53

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation de la manière suivante :
Si la place est réservé le jour k , elle le sera encore le le jour $k+1$ avec la probabilité $\frac{9}{10}$.

Si la place est librele jour k , elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $\frac{4}{10}$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note r_k la probabilité de que la place soit réservée le jour k .
On pose par convention $r_0 = 0$.

1) Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k.
2) En déduire l'expression explicite de r_k en fonction de k et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = r$.

EXERCICE 54

Des enfants s'entraînent à réussir des paniers de basket. Pour chacun d'eux, indépendamment les uns des autres et des essais successifs, la probabilité de réussite d'un panier est p ($p \in]0,1[$).

Hamza est l'un de ces enfants ; soit N le nombre d'essais que va faire Hamza.
On considère la variable aléatoire X qui égale au nombre des paniers réussis par Hamza parmi les N essais.

1) Montrer que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2) Quelle est la probabilité que Hamza ne réussisse aucun panier ?
3) Soit $\alpha \in]0,1[$.
Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la probabilité qu'il réussisse au moins un panier soit supérieure ou égale à $1-\alpha$, est :

$$N \geq \frac{\ln \alpha}{\ln(1-p)}$$

EXERCICE 55

Une urne contient cinq boules noires et cinq boules blanches indiscernables au toucher.
On tire successivement et avec remise n de ces boules dans l'urne, n étant un entier naturel tel que $n \geq 2$.
On considère les deux évènements suivants :
A : « On obtient des boules des deux couleurs »
B : « On obtient au plus une boule blanche »

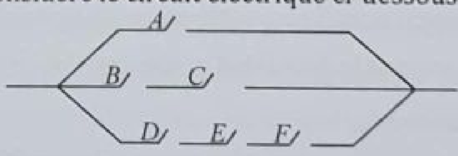
1) Calculer $P(A)$ et $P(B)$ en fonction de n.
2) Montrer que les évènements A et B sont indépendants si et seulement si : $2^{n-1} = n+1$

EXERCICE 56

Un gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clefs dont une et une seule convient.
Il essaie les clefs au hasard les unes après les autres.
Calculer, pour tout $k \in \{1;2;...;n\}$, la probabilité que la porte s'ouvre à la k-ième tentative (et pas avant).

EXERCICE 57

On considère le circuit électrique ci-dessous :



Les probabilités pour que les interrupteurs A , B , C , D , E et F soient ouverts sont respectivement $\frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}$ et $\frac{1}{10}$.
Quelle est la probabilité pour que le courant passe ?
(On suppose les évènements indépendants)

EXERCICE 58

On dispose de n boîtes pouvant contenir de 0 à n boules numérotées de 1 à n. On place les n boules au hasard dans les n boîtes.

1) On désigne par p_n la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule.

   Montrer que : $p_n = \dfrac{n!}{n^n}$

2) a) Justifier que : $\dfrac{p_n}{p_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

   b) En utilisant la formule du binôme, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $(1+x)^n \geq 1+nx$

   c) En déduire de ce qui précède que : $\dfrac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2$

   puis que : $p_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

EXERCICE 59

On considère deux pièces de monnaie truquées M_1 et M_2. Lorsqu'on lance la pièce M_1, la probabilité d'avoir face est égale à $\dfrac{1}{3}$ et lorsqu'on lance M_2, la probabilité d'avoir face est égale à $\dfrac{2}{9}$.

On effectue une succession de parties de la façon suivante :

- À la premier partie, on prend une des deux pièces au hasard et on lance cette pièce ; si le résultat est face, on joue la deuxième partie avec M_1, sinon on joue avec M_2.
- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on joue la $(n+1)^{\text{ième}}$ partie avec M_1 si on a obtenu face à la $n^{\text{ième}}$ partie ; on joue la $(n+1)^{\text{ième}}$ partie avec M_2 si on a obtenu pile à la $n^{\text{ième}}$ partie.

On note p_n la probabilité d'avoir face à la $n^{\text{ième}}$ partie.

1) En utilisant la formule des probabilités totales :

   a) Calculer les valeurs de p_1 et p_2.

   b) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{n+1} = \dfrac{1}{9}p_n + \dots$

2) a) Donner l'expression de p_n en fonction de n.

   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

EXERCICE 60

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il y reste avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$, soit il se déplace sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets. Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), le mobile se trouve en A.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements A_n (resp. B_n, C_n) :

Le mobile se trouve en A à l'instant n (resp. en B, en C)

et les probabilités :

$$a_n = P(A_n) \quad ; \quad b_n = P(B_n) \quad ; \quad c_n = P(C_n)$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n + b_n + c_n$.

2) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \text{ et } a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n)$$

4) En déduire une expression de a_n, b_n, c_n en fonction de n.

EXERCICE 61

Un restaurant dispose de 80 places. La pratique montre que 20% des clients ayant réservé le soir ne viennent finalement pas. Ce soir, le restaurant enregistre 24 réservations. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de clients ayant réservé qui viennent.

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire X .

2) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

EXERCICE 62

On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \; ; \; D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1) a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Vérifier que $P^{-1}AP = D$.

2) a) Exprimer A en fonction de D , P et P^{-1} .

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; A^n = PD^nP^{-1}$

c) Calculer D^n pour tout entier naturel n .

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constituée de 3 pièces contiguës A , B et C .

À l'instant initial 0 , la mouche se trouve dans la pièce B . On suppose que les déplacements qui suivent se font selon le protocole suivant :

- Si à l'instant n donné la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n+1$;
- Si à l'instant n donné la mouche est dans la pièce B alors elle y reste à l'instant $n+1$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$, sinon elle va de façon équiprobable dans A ou dans C .

Pour tout entier naturel n , on définit l'évènement :

A_n : « La mouche est dans la pièce A à l'instant n »

On définit de même les évènements B_n et C_n . Enfin, on note a_n , b_n et c_n les probabilités respectives de ces évènements.

3) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \;\; ; \;\; b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \;\; ; \;\; c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

4) Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$$

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne :

$$U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

5) a) Justifier que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; U_{n+1} = AU_n$

c) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; U_n = A^nU_0$$

d) Déduire de la question 2.d) que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

on a : $b_n = \frac{1}{3}\left(2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de a_n et c_n e fonction de n .

EXERCICE 63

Une entreprise fabrique en série des balles de ping-pong à l'aide de deux machines A et B .

La machine A produit un tiers des éléments, les autres étant produits par la machine B .

Certaines balles fabriquées présentent un défaut. C'est le cas pour 12% des balles fabriquées par la machine A et pour 9% de celles fabriquées par la machine B .

À la sortie des machines les balles arrivent dans le désordre sur un tapis roulant. Ce qui fait que si l'on prend une balle au hasard à la sortie du processus de la fabrication, la probabilité qu'elle provienne de A est $\frac{1}{3}$ et celle qu'elle provienne de B est $\frac{2}{3}$.

1) a) On prélève sur le tapis roulant une balle au hasard.

On définit les événements :

A : « La balle provient de la machine A »

B : « La balle provient de la machine B »

D : « La balle prélève présente un défaut »

Montrer que : $P(D)=\frac{1}{10}$

b) On constate que la balle prélevée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A.

2) On se donne un entier naturel n non nul et on suppose maintenant que l'on prélève n balles au hasard à la sortie du tapis roulant. Les prélèvements successifs sont supposés indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoires égale au nombre de balles défectueuses prélevées.

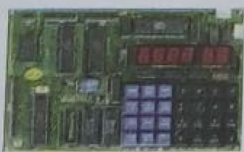
a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres. Donner les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $P(X=k)$.

b) Déterminer, en fonction de n, les valeurs de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$.

EXERCICE 64

Partie A :

Une usine de microprocesseurs informatiques fabrique 1000 microprocesseurs par jour.



La probabilité qu'un microprocesseur soit défectueux est $p=\frac{1}{200}$. Soit X le nombre de microprocesseurs défectueux dans une journée de production.

1) a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer son espérance et sa variance.

2) Calculer la probabilité qu'il y ait au plus un microprocesseur défectueux dans la production d'une journée.

Partie B :

Les microprocesseurs installés dans les ordinateurs d'un constructeur informatique proviennent de 3 usines U_1, U_2 et U_3 qui fournissent respectivement 50%, 30% et 20% des microprocesseurs.

À la livraison, chaque microprocesseur est vérifié et il a été établi que 4% des microprocesseurs provenant de U_1 étaient défectueux, ainsi que 5% de ceux de U_2 et 10% de ceux de U_3.

1) Retranscrire clairement l'énoncé à l'aide d'événement et de probabilités.

2) Déterminer la probabilité qu'un microprocesseur soit défectueux.

3) Calculer la probabilité qu'un microprocesseur défectueux provienne de l'usine U_1.

EXERCICE 65

L'étoile Sirius est la plus brillante du ciel de l'hémisphère Nord.

La probabilité annuelle d'apparition d'au moins une comète plus brillante que Sirius est $\frac{1}{43}(\approx 0,0232)$. Calculer la probabilité qu'il apparaisse au moins une comète plus brillante que Sirius pendant un siècle d'observation.

EXERCICE 66

A et **B** sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne.

Quel avion choisissez- vous ?

(on discutera en fonction de p).

EXERCICE 67

On lance deux fois de suite un dé cubique non pipé. Sachant que la somme des deux nombres est 6, quelle est la probabilité que ces deux nombres soient égaux ?

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Les parties A), B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

Dans une assemblée de 250 personnes, on remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate.

On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

1) Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate ?
2) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate ?
3) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate ?
4) Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

Partie B :

Une usine fabrique des pièces dont $1,8\%$ sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- Sachant qu'une pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de $0,97$.
- Sachant qu'une pièce est mauvaise, elle est refusée avec une probabilité de $0,99$.

1) Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse ?
2) a) Montrer que la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est $0,00018$.
   b) Montrer que la probabilité pour qu'une pièce soit bonne et refusée est $0,02946$.
   c) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle.
3) Si on effectue cinq contrôles de suite, quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement deux erreurs de contrôle ?

Partie C :

Mouna est élève en terminale. Chaque matin, elle se lève en retard avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle se lève en retard elle est obligée de prendre le bus pour se rendre au lycée. Par contre, lorsqu'elle est à l'heure, elle choisit avec deux chances sur cinq d'aller à pied et avec trois chances sur cinq de prendre le bus.

On considère un matin donné et on définit les événements :

R : « Mouna se lève en retard »

B : « Mouna prend le bus »

1) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que : $P(B)=\frac{11}{15}$
2) On remarque qu'un matin donné Mouna prend le bus. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ?
3) On étudie maintenant les trajets pendant les 180 jours de cours d'une année scolaire. On suppose que chaque jour les choix de Mouna sont indépendantes des choix des jours précédents.
   On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de fois ou Mouna prend le bus.
   a) Reconnaître la loi de X . Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque entier k , une expression de $P(X=k)$ en fonction de k .
   b) Donner $E(X)$ et $V(X)$.
   c) En moyenne combien de matins dans l'année Mouna peut-elle espérer allez au lycée à pied ?

DEVOIR 2

Le secteur de production d'une entreprise est composé de trois catégories de personnel :

- Les ingénieurs ;
- Les opérateurs de production ;
- Les agents de maintenance.

Il y a 8% d'ingénieurs et 82% d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60% des opérateurs de production.

Partie A :

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.

On note les évènements suivants :

M : « Le personnel interrogé est un agent de maintenance »

O : « Le personnel interrogé est un opérateur de production »

I : « Le personnel interrogé est un ingénieur»

F : « Le personnel interrogé est une femme »

1) Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
2) Calculer la probabilité d'interroger :
   a) Un agent de maintenance
   b) Une femme agent de maintenance
   c) Un femme

Partie B :

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue. Des études ont montré que sur une journée :

- La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,002$.
- La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $0,003$;
- La probabilité qu'une panne se produise est égale à $0,04$.

On note :

- A l'évènement : « L'alarme se déclenche »
- B l'évènement : « Une panne se produit »

1) Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,037$.
2) Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
3) Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

DEVOIR 3

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

À chaque partie, un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12. Il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possédant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la $n^{ième}$ partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne la $n^{ième}$ partie, il mise sur les chiffres $1,3$ et 5.

1) On note p_n la probabilité de l'événement :

A_n : « Le joueur gagne la $n^{ième}$ partie »

a) Calculer les probabilités conditionnelles :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}$

c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = p_n - \frac{2}{11}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique.

En déduire l'expression de p_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

2) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$.

On note B_k l'événement :

« Le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{ième}$ partie »

a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $P(B_n)$.

b) Calculer $P(B_k)$ pour $k \leq n-1$.

c) En déduire la probabilité q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties.

DEVOIR 4

Les parties A), B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

Une urne contient deux boules blanches, trois boules rouges et cinq boules noires. On suppose que ces boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard, successivement et avec remise trois boules de l'urne.

Calculer les probabilités des événements suivants :

E : « Obtenir une boule de chaque couleur »

F : « Obtenir au moins deux boules noires »

G : « Obtenir deux boules rouges et une boule blanche sachant que la première boule tirée est blanche »

2) Dans cette question, on tire au hasard, successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements E, F et G.

Partie B :

On jette un dé cubique non truqué, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, trois fois de suite.

1) On considère les événements :

A : « Obtenir au moins un 6 »

B : « Deux dés au moins donnent le même résultat »

a) Calculer la probabilité de chacun des événements :

$\overline{A}$; $\overline{B}$; A ; B

b) Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et en déduire $P(\overline{A} \cap B)$.

c) Calculer de la même manière $P(A \cap B)$.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2) Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre d'as obtenus.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

c) Déterminer la fonction de répartition de X puis tracer sa courbe.

Partie C :

Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces A et B. Elle est dans la pièce A à l'instant $t = 0$, et évolue ainsi :

- Si elle est en A à l'instant n, elle reste en A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou passe en B avec une probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n+1$.
- Si elle est en B, elle retourne en A avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, reste en B avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec une probabilité de $\frac{1}{4}$. Si elle est dehors, elle y reste.

On note A_n, B_n et C_n les évènements suivants :

A_n : « La guêpe est en A à l'instant n »

B_n : « La guêpe est en B à l'instant n »

C_n : « La guêpe est en dehors à l'instant n »

Les probabilités respectives de ces évènements sont notées a_n, b_n et c_n.

1) Calculer $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2$ et c_2.

2) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3) On définit les suites (u_n) et (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$ et $v_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$

a) Montrer que la suite (u_n) est constante.

b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

c) Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

d) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n. Que vaut c_n ?

DEVOIR 5

On considère deux urnes U et V qui contient chacune des boules blanches et rouges indiscernables au toucher. On choisit au hasard et de manière équiprobable une des deux urnes et on y tire une boule au hasard.
Soit les événements :

A : « L'urne U a été choisie »

B : « L'urne V a été choisie »

R : « Obtenir une boule rouge »

1) On suppose dans cette question que l'urne U contient une boule rouge et 4 boules blanches ; et que l'urne V contient 4 boules rouges et deux blanches.
   a) Déterminer les probabilités suivantes :
   $$P(A) \quad ; \quad P_A(R) \quad ; \quad P(A\cap R)$$
   b) Montrer que : $P(R)=\dfrac{13}{30}$
   c) Sachant qu'on a obtenu une boule rouge, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée de l'urne U ?
2) Dans cette question, on suppose que l'urne U contient 4 boules blanches et n boules rouges ; et que l'urne V contient deux boules blanches et $5-n$ boules rouges (avec $n\in\{0;1;2;3;4;5\}$).
   a) Exprimer $P_A(R)$ et $P_B(R)$ en fonction de n.
   b) Montrer que : $P(R)=\dfrac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$.
   c) On sait que n prend six valeurs entières. Déterminer la distribution des cinq boules sur les urnes U et V pour que $P(R)$ soit maximale.

DEVOIR 6

Une entreprise fabrique des appareils électriques en grande quantité.

Partie A :

On admet que 5% des appareils présentent un défaut.
On contrôle les appareils d'un lot.
Ce contrôle refuse 90% des appareils avec défaut et accepte 80% des appareils sans défaut.
On prélève au hasard dans le lot.
On considère les événements suivants :

D : « L'appareil a un défaut »

A : « L'appareil est accepté à l'issue du contrôle »

1) Donner la valeur des probabilités et probabilités conditionnelles suivantes :
   $$P(D) \;;\; P(\overline{D}) \;;\; P_D(\overline{A}) \;;\; P_D(A) \;;\; P_{\overline{D}}(A)$$
2) Calculer à $0,001$ près les probabilités suivantes :
   $$P(A\cap D) \quad \text{et} \quad P(A\cap \overline{D})$$
3) Déduire de ce qui la probabilité la probabilité $P(A)$ à $0,001$ près.
4) Calculer à $0,001$ près la probabilité qu'un appareil soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle.

Partie B :

On prélève au hasard 10 appareils électriques d'une livraison pour vérification. La livraison étant suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise des appareils.
On rappelle que 5% des appareils présentent un défaut.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre sans défaut de ce prélèvement.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2) Préciser $X(\Omega)$ et, pour tout $k\in X(\Omega)$, donner la valeur de $P(X=k)$.
3) Déterminer les valeurs de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$.
4) Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, tous les appareils soient sans défaut.
5) Déterminer la fonction de répartition F_X de X puis tracer sa courbe.

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 1

Un sac contient 10 boules blanches et 10 boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule du sac. Si la boule tirée est rouge, on la remet dans le sac ; et si elle blanche, on la remplace par 3 boules rouges puis on tire une boule du sac.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   R : « Les deux boules tirées sont rouges »
   B : « Les deux boules tirées sont blanches »
   E : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes »
2) Calculer la probabilité que la première boule tirée est blanche sachant que la deuxième boule tirée est rouge.

Examen National 2004 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 2

On distribue aléatoirement quatre boules indiscernables au toucher et numérotées 1, 2, 3 et 4 à six personnes A, B, C, D, E et F. (Chaque personne peut y avoir 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 boules).

1) Quel est le nombre d'éventualités ?
2) Calculer la probabilité pour que la personne A a obtenu au moins une boule.
3) Calculer la probabilité de l'événement suivant :
   « Le total des boules obtenues par B et C est égal au nombre des boules obtenues par A »

Examen National 2006 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 3

On considère trois urnes U , V et W telles que :

- L'urne W contient une boule noire et deux boules blanches ;
- Les urnes U et V contient chacune deux boules noires et deux boules blanches.

On considère l'expérience suivante :
On tire une boule de l'urne W . Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne U puis on y tire deux boules simultanément ; et si la boule tirée de W est noire, on la remet dans l'urne V puis on y tire deux boules simultanément.

1) Quelle est la probabilité que le tirage soit effectué dans l'urne U ?
2) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches à la fin de l'expérience ?
3) Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules blanches tirées à la fin de l'expérience ? Déterminer la loi de probabilité de la variable X .

Examen National 2014 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 4

On considère deux urnes U et V . L'urne U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues ; l'urne V contient 2 boules rouges et 4 boules bleues.
On considère l'expérience suivante : On tire au hasard une boule de l'urne U : Si elle est rouge, on la remet dans l'urne U puis on tire au hasard une boule de l'urne V ; et si elle est bleue, on la remet à côté puis on tire au hasard une boule de l'urne V .
On considère les événements suivants :

R_U : « La boule tirée de l'urne U est rouge »
B_U : « La boule tirée de l'urne U est bleue »
R_V : « La boule tirée de l'urne V est rouge »
B_V : « La boule tirée de l'urne V est bleue »

1) Calculer les probabilités des événements R_U et B_U .
2) a) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement R_U est réalisé.
   b) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement B_U est réalisé.
3) Montrer que la probabilité de B_V est $\frac{13}{21}$.
4) En déduire la probabilité de l'événement R_V

Examen National 2016 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 5

Partie A :

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux, alors : $a^{2016} \equiv 1\ [13]$

2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(E) : x^{2015} \equiv 2\ [13]$ et soit x une solution de l'équation (E).

a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

b) Montrer que : $x \equiv 7\ [13]$.

Partie B :

On considère une urne U contenant cinquante boules numérotées de 1 à 50. (Les boules sont indiscernables au toucher).

1) On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro solution de l'équation (E) ?

2) On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro puis on la remet dans l'urne. On répète cette expérience trois fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois portant un numéro solution de l'équation (E) ?

Examen National 2015 (Session Normale)

PROBLÈME 6

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

I- On tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne et on considère la variable aléatoire X égale au nombre de boules noires tirées de l'urne.

1) Préciser la loi de la variable aléatoire X.

2) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

II- On effectue l'expérience aléatoire suivante sur trois étapes comme suit :

1ère étape : On rire une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet dans l'urne.

2ème étape : On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur de celle de la 1ère boule tirée.

3ème étape : On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne parmi les 12 boules.

On considère les événements suivants :

N : « La 1ère boule tirée de l'urne est noire »

R : « La 1ère boule tirée de l'urne est rouge »

E : « Les boules tirées dans la 3ème étapes sont toutes noires ».

1) Montrer que : $P(E \cap N) = \frac{12}{55}$.

2) Calculer $P(E)$.

3) Calculer la probabilité de l'événement R sachant l'événement E est réalisé.

Examen National 2013 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 7

Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 tels que :

- L'urne U_1 contient une boule rouge et $(n-1)$ boules noires.
- L'urne U_2 contient deux boules rouges et $(n-2)$ boules noires.
- L'urne U_3 contient trois boules rouges et $(n-3)$ boules noires.

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On choisit au hasard une urne par les trois urnes et on y tire simultanément deux boules.
On considère la variable aléatoire X égale au nombre de boules rouges tirées de l'urne.

1) Déterminer les valeurs prises par X.

2) a) Montrer que : $P(X=2) = \frac{8}{3n(n-1)}$

b) Montrer que : $P(X=1) = \frac{4n(3n-7)}{3n(n-1)}$

c) En déduire la loi de probabilité de X.

3) Sachant qu'on a obtenu deux boules rouges, quelle est la probabilité que le tirage a été effectué dans l'urne U_3.

Examen National 2009 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 8

Soit n un entier impair supérieur ou égal à 3 .

On considère n urnes numérotées de 1 à n . L'urne numéro k $(1 \leq k \leq n)$ contient k boules blanches et $n-k$ boules noires indiscernables au toucher.

On choisit aléatoirement une urne et on y tire une boule et une seule.

1) Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.
2) Calculer la probabilité que le tirage soit effectué dans une urne de numéro impair.
3) Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche sachant que le tirage a été effectué dans une urne de numéro impair.

Examen National 2007 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 9

Soit n un entier supérieur ou égal à 20.

Un sac contient 10 boules blanches et $n-10$ boules noires indiscernables au toucher.

On tire une boule du sac, on note sa couleur puis on la remet dans le sac.

On répète cette expérience n fois de suite. On note p_k la probabilité d'obtention de k boules blanches avec $k \in \{0;1;2;...;n\}$.

1) Calculer p_k en fonction de n et k .
2) On pose $u_k = \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ avec $k \in \{0;1;...;n-1\}$.
   a) Montrer que : $u_k = \dfrac{n-k}{k+1} \times \dfrac{10}{n-10}$.
   b) Montrer les équivalences suivantes :
   $$0 \leq k \leq 9 \Leftrightarrow u_k \geq 1$$
   $$10 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow u_k \leq 1$$
   c) En déduire la plus grande valeur M de p_k quand l'entier k varie dans l'ensemble $\{0;1;2;...;n\}$ puis établir que : $M = \dfrac{n!}{n^n} \times \dfrac{10^{10}}{10!} \times \dfrac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$

Examen National 2005 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 10

Une urne contient 4 boules blanches et trois boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet dans l'urne.

On répète successivement l'expérience et on s'arrête dès qu'on a obtenu successivement deux boules de la même couleur.

Soit X la variable aléatoire égale au rang de tirage dans lequel l'expérience s'est arrêtée.

1) Calculer les probabilités des événements :
   $$[X=2] \quad \text{et} \quad [X=3]$$
2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que la probabilité de l'événement $[X=2k]$ est : $p_{2k} = \dfrac{5}{8}\left(\dfrac{3}{16}\right)^{k-1}$
   b) Montrer que la probabilité de l'événement $[X=2k+1]$ est : $p_{2k+1} = \left(\dfrac{3}{16}\right)^{k}$

Examen National 2008 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 11

Une urne contient une boule blanche et une boule noire indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne $(n \geq 2)$.

1) Calculer les probabilités des événements suivants :
   A : « Obtenir exactement une boule blanche »
   B : « Obtenir au plus une boule blanche »
2) On considère l'événement :
   C : « Obtenir des boules des deux couleurs »
   Calculer $P(\overline{C})$ et en déduire $P(C)$.
3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre des boules blanches obtenues lors de n tirages.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X .
   b) Déterminer l'espérance $E(X)$ de X .
   c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$

Examen National 2000 (Session Normale)

4. LOIS DE COMPOSITION INTERNE

HISTOIRE

Après son doctorat, Abel ne parvient pas à trouver un poste, ses conditions de vie sont de plus en plus précaires et sa santé se fait fragile : il est atteint de tuberculose. Malgré des déplacements à Paris et à Berlin, ses travaux ne sont toujours pas perçus à leur juste valeur. Dans ses dernières semaines, il n'a plus assez de force pour quitter son lit. Il décède le 5 avril 1829, à même pas 27 ans, alors qu'un ami venait juste de lui trouver un poste à Berlin.
C'est Jacobi qui comprendra tout le génie de ce jeune mathématicien. Abel avait notamment démontré, à l'âge de 19 ans, l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations algébriques de degré 5, ce que son contemporain Galois généralisera à tout entier n supérieur ou égal à 5. À titre posthume, Abel recevra en 1830 le grand prix de Mathématiques de l'Institut de France.

Source : https://fr.wikipedia.org

NIELS
ABEL
(1802 – 1829)

CARL GUSTAV
JACOBI
(1804 – 1851)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Maitriser les techniques d'opérations sur les différentes structures usuelles ;
- Utiliser les structures des quelques ensembles usuels pour étudier les structures d'autres ensembles ;
- Comparer deux structures algébriques ; transposer une structure algébrique d'un ensemble à un autre en utilisant la notion d'homomorphisme et d'isomorphisme.

PLAN DU COURS

1 RAPPELS

A) À propos des propriétés sur quelques opérations :

1. Déterminer les propositions vraies et les propositions fausses parmi les propositions suivantes :

(On rappelle que $\mathcal{V}_3$ est l'ensemble des vecteurs de l'espace euclidien)

$P_1 : \forall(x;y) \in \mathbb{N}^2 \quad x+y \in \mathbb{N}$	$P_1 : \forall(x;y) \in \mathbb{N}^2 \quad x-y \in \mathbb{N}$
$P_3 : \forall(\vec{u};\vec{v}) \in \mathcal{V}_3^2 \quad 2\vec{u}+\vec{v} \in \mathcal{V}_3$	$P_4 : \forall(\vec{u};\vec{v}) \in \mathcal{V}_3^2 \quad \vec{u}-\vec{v} \in \mathcal{V}_3$
$P_5 : \forall(\vec{u};\vec{v}) \in \mathcal{V}_3^2 \quad \vec{u}.\vec{v} \in \mathcal{V}_3$	$P_6 : \forall(\vec{u};\vec{v}) \in \mathcal{V}_3^2 \quad \vec{u}\wedge\vec{v} \in \mathcal{V}_3$
$P_7 : \forall(z;z') \in (i\mathbb{R})^2 \quad z.z' \in i\mathbb{R}$	$P_8 : \forall(z;z') \in (i\mathbb{R})^2 \quad z+z' \in i\mathbb{R}$
$P_9 : \forall(a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \quad a-(b-c)=(a-b)-c$	$P_{10} : \forall(x;y;z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \quad x^{(y)^z} = (x^y)^z$

2. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions appartenant à $\mathcal{A}$.
   a) Montrer que : $f+g \in \mathcal{A}$ et $fog \in \mathcal{A}$.
   b) A-t-on $f \times g \in \mathcal{A}$? Justifier.

B) La multiplication dans l'ensemble des racines cinquième de l'unité :

On considère l'ensemble : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / z^5 = 1\}$, et on pose pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$: $\omega_\lambda = e^{i\frac{2\lambda\pi}{5}}$.

1. Vérifier que : $(\forall \lambda \in \mathbb{Z})$: $\omega_\lambda \in \mathbb{U}$.
2. Établir que : $\mathbb{U} = \{\omega_k / k \in \{0;1;2;3;4\}\}$.
3. Vérifier que : $(\forall k \in \{0;1;2;3;4\})$ $\omega_k = \omega_1^k$.
4. a) Copier puis remplir le tableau ci-contre.
   b) Vérifier que pour tout k et k' de $\{0;1;2;3;4\}$,
   il existe $p \in \{0;1;2;3;4\}$ tel que : $\omega_k \times \omega_{k'} = \omega_p$

$\times$	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
ω_0					
ω_1					
ω_2					
ω_3					
ω_4					

C) Composition des applications :

1. Soient $(\alpha;\beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et Ω un point du plan.
   - $H(\Omega;\alpha)$ est l'homothétie de centre Ω est de rapport α.
   - $R(\Omega;\alpha)$ est l'homothétie de centre Ω est d'angle α.
   - $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$.

On considère les transformations suivantes : $f = t_{\vec{u}} o t_{\vec{v}}$ et $g = R(\Omega;\alpha)oR(\Omega;\beta)$ et $h = H(\Omega;\alpha)oH(\Omega;\beta)$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune de ces transformations.

2. On considère les applications :

$$f:\begin{array}{ccc}[-1;+\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1}\end{array} \quad \text{et} \quad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^+ & \to & [-1;1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x-2}{x+2}\end{array} \quad \text{et on pose : } h = gof$$

a) Montrer que f et g sont bijectives et déterminer f^{-1} et g^{-1}.

b) Montrer que h est bijective et vérifier que $h^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

2 LOI DE COMPOSITION INTERNE

On considère l'ensemble : $E = \{0;1;2;3;4;5\}$

Pour tout $(x;y) \in E \times E$, on note $x \oplus y$ le reste de la division euclidienne du nombre $x+y$ par 5.

1. Montrer que pour tout $(x;y) \in E \times E$, $x \oplus y$ est un élément de E.

   Puisque pour tout $(x;y) \in E \times E$, $x \oplus y$ est un élément de E, on dit qu'on a défini une loi de composition interne sur l'ensemble E. (Abréviation : L.C.I sur E).
2. Calculer : $2 \oplus 2$ et $4 \oplus 3$ et $4 \oplus 4$.
3. Compléter le tableau ci-contre.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0		1			
1					
2					1
3					
4				2	

4. Vérifier que pour tout $(x;y;z) \in E^3$:

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

5. Montrer que : $(\forall (x;y) \in E \times E) \quad x \oplus y = y \oplus x$

3 PARTIE STABLE D'UN ENSEMBLE MUNI D'UNE L.C.I

A) On considère l'ensemble : $S = \left\{a + b\sqrt{2} \,/\, (a;b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Montrer que $S \neq \varnothing$.
2. Déterminer deux éléments de S.
3. Vérifier que $S \subset \mathbb{R}$ puis montrer que la multiplication $\times$ est une loi de composition interne dans S.

   Puisque $S \subset \mathbb{R}$ et que $\times$ est une loi de composition interne dans S : $\left(\forall (x;y) \in S^2\right) \quad x \times y \in S$ alors on dit que S est une partie stable de $\mathbb{R}$ pour la loi $\times$ (ou que S est stable dans $(\mathbb{R};\times)$).
4. Montrer que S est une partie stable de $(\mathbb{R};+)$.

B) On considère l'ensemble $E = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et son sous-ensemble $F = \left\{\overline{1};\overline{3};\overline{5};\overline{7};\overline{9}\right\}$.

1. Montrer que la partie F est une partie stable pour la loi $\times$ dans E.
2. Est-ce-que la partie F est stable dans $(E;+)$? Justifier votre réponse.

C) On considère la loi de composition $\top$ définie sur $\mathbb{C}$ par : $\left(\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2\right) \quad z \top z' = z.z' + i(z+z') - (1+i)$.
et soit $\mathcal{D} = \left\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z+i| \leq 1\right\}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est une partie stable de $(\mathbb{C};\top)$.

4 PROPRIÉTÉS D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE

A) On considère l'ensemble $E=[1;+\infty[$.

Pour tous x et y de E, on pose : $x*y=(x-1)(y-1)+1$

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur E.
2. Montrer que pour tout $(x;y)\in E^2$: $x*y=y*x$. On dit alors que la loi $*$ est commutative.
3. Montrer que pour tout $(x;y;z)\in E^3$: $(x*y)*z=x*(y*z)$. On dit alors que la loi $*$ est associative.
4. Montrer que pour tout $x\in E$: $x*2=2*x=x$. On dit que 2 est un élément neutre pour $(E;*)$.
5. Soit $x\in E-\{1\}$. Montrer qu'il existe $x'\in E$ tel que : $x*x'=x'*x=2$

L'élément x' s'appelle un symétrique de l'élément x pour la loi $*$ dans E.

B) On considère la loi de composition interne T définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\left(\forall(n;m)\in(\mathbb{N}^*)^2\right)\ n\top m=n^m$.

1. Montrer que la loi T n'est pas commutative.
2. Montrer que la loi T n'est pas associative.
3. Est-ce que 1 est un élément neutre dans $(\mathbb{N}^*;\top)$? Justifier.

C) On considère l'ensemble fini $E=\{0;1;2;3;4;5\}$.

Soit $\perp$ la loi de composition interne définie par le tableau ci-contre :

$\perp$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	0	5	1	4
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	4	2	0	3
5	5	0	4	1	2	3

1. Vérifier que la loi $\perp$ est commutative.
2. La loi $\perp$ est-elle associative ? Justifier.

D) On considère l'ensemble $E=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et ses deux parties :

$$A=\{\overline{0};\overline{2};\overline{4}\}\quad\text{et}\quad B=\{\overline{0};\overline{3}\}$$

1. a) Montrer que A est une partie stable pour les lois $+$ et $\times$ dans E.
   b) Montrer que $\overline{4}$ est l'élément neutre pour $(A;\times)$.
2. a) Montrer que A est une partie stable de $(E;\times)$.
   b) Montrer que $(B;\times)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

5 HOMOMORPHISMES OU MORPHISMES

A) Soit K un ensemble donné. On sait que $\cap$ et $\cup$ sont des lois de composition internes dans $\mathcal{P}(K)$ (On rappelle que $\mathcal{P}(K)$ est l'ensemble des parties de K).

1. On considère l'application :
$$\begin{aligned}\varphi:\ \mathcal{P}(K)&\to\mathcal{P}(K)\\ X&\mapsto\overline{X}=K-X\end{aligned}$$

Montrer que : $\left(\forall(X;Y)\in(\mathcal{P}(K))^2\right)\ \varphi(X\cup Y)=\varphi(X)\cap\varphi(Y)$

On dit alors que φ est un homomorphisme (ou simplement un morphisme) de $(\mathcal{P}(K);\cup)$ dans $(\mathcal{P}(K)$

2. Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathcal{P}(K);\cap)$ dans $(\mathcal{P}(K);\cup)$.

GÉNÉRALISATION

On dit qu'une application φ de E dans F est un homomorphisme (ou simplement un morphisme) de $(E;*)$ dans $(F;\top)$ si : $(\forall(x;y)\in E^2)\quad \varphi(x*y)=\varphi(x)\top\varphi(y)$

B) Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par : $x*y=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que : $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)\quad f(x+y)=f(x)*f(y)$
   b) En déduire que $*$ est commutative et associative dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $f(0)$ est l'élément neutre pour $(\mathbb{R};*)$.
4. En déduire que tout élément de $(\mathbb{R};*)$ admet un symétrique.
5. Vérifier que $(\mathbb{R};+)$ et $(\mathbb{R};*)$ ont la même structure.
6. Soit f^{-1} la bijection réciproque de l'application f.
   a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
   b) Calculer $A(x)=\underbrace{x*x*....*x}_{2020\ fois}$ en fonction de x.

Déterminer la structure de $(E;*)$, signifie la détermination des propriétés de $*$ dans E

6 CALCUL MATRICIEL

Dans une entreprise de vente des matériaux de construction, deux clients **A** et **B** ont acheté durant les mois d'Avril et de Mai des sacs de sable et des sacs de ciment selon les tableaux suivants :

	Sable	Ciment
Client A	10 sacs	12 sacs
Client B	15 sacs	7 sacs

Mois d'Avril

	Sable	Ciment
Client A	8 sacs	17 sacs
Client B	9 sacs	10 sacs

Mois de Mai

On peut exprimer aussi les données de ces tableaux par :

$$C_1=\begin{array}{c} \text{Sable}\quad\text{Ciment} \\ \downarrow\qquad\downarrow \\ \begin{pmatrix}10 & 12\\ 15 & 7\end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Client } \mathbf{A}\\ \leftarrow \text{Client } \mathbf{B}\end{array}\qquad C_2=\begin{array}{c} \text{Sable}\quad\text{Ciment} \\ \downarrow\qquad\downarrow \\ \begin{pmatrix}8 & 17\\ 9 & 10\end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Client A}\\ \leftarrow \text{Client B}\end{array}$$

Chacun des tableaux C_1 et C_2 est appelé une matrice carrée d'ordre 2.

Les matrices C_1 et C_2 sont à deux lignes et deux colonnes.

1. Durant les mois d'Avril et de Mai, le client **A** a acheté 29 sacs de sable et 18 sacs de ciment, et le client **B** a acheté 17 sacs de sable et 24 sacs de ciment.

   Ces résultats peuvent être exprimés par la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$$

   La matrice C est appelé la somme des matrices C_1 et C_2, et on écrit :

$$C = C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 17 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+8 & 12+17 \\ 15+9 & 7+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$$

   Calculer de la même façon, la somme des matrices : $E = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 37 & 27 \\ 18 & 60 \end{pmatrix}$

2. Le prix unité d'un sac de sable est $20\,Dh$ et le prix unité de sa livraison est $1\,Dh$.

   Le prix unité d'un sac de ciment est $55\,Dh$ et le prix unité de sa livraison est $2\,Dh$.

   On exprime ces données des prix par la matrice P :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Prix Achat} & \text{Prix Livraison} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} 55 & 2 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Ciment} \\ \leftarrow \text{Sable} \end{array} \end{array}$$

   a) Vérifier que les montants d'achats et de livraison payés par les clients **A** et **B** durant le mois d'Avril sont :

   - Pour le client **A** : Prix d'achat $= 790\,Dh$; Prix de livraison $= 32\,Dh$.
   - Pour le client **B** : Prix d'achat $= 965\,Dh$; Prix de livraison $= 37\,Dh$.

   On exprime ces prix par la matrice :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Prix Achat} & \text{Prix Livraison} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ F_1 = & \begin{pmatrix} 790 & 32 \\ 965 & 37 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Client A} \\ \leftarrow \text{Client B} \end{array} \end{array}$$

   Remarquons bien que :

$$790 = 10\times 55 + 12\times 20 \quad ; \quad 32 = 10\times 2 + 12\times 1 \quad ; \quad 965 = 15\times 55 + 7\times 20 \quad ; \quad 37 = 15\times 2 + 7\times 1$$

   La matrice F_1 est le produit des deux matrices C_1 et P dans cet ordre et on écrit :

$$F_1 = C_1 \times P = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 55 & 2 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\times 55 + 12\times 20 & 10\times 2 + 12\times 1 \\ 15\times 55 + 7\times 20 & 15\times 2 + 7\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 790 & 32 \\ 965 & 37 \end{pmatrix}$$

   b) Calculer de la même façon $F_2 = C_2 \times P$ qui exprime les montants d'achats et de livraison payés par les clients **A** et **B** durant le mois de Mai.

   c) Déterminer la matrice $F = F_1 + F_2$ qui exprime les frais des clients **A** et **B** durant les mois d'Avril et de Mai.

Remarques

Afin de simplifier, la matrice notée $\propto M$ est la matrice obtenue en multipliant tous les termes de la matrice par le réel $\propto$.

1 LOI DE COMPOSITION INTERNE

1.1. INTRODUCTION

Pour une bonne compréhension du contenu de ce chapitre, voici quelques rappels concernant les opérations usuelles sur quelques ensembles particuliers. Ils ont pour but principalement d'enrichir ce chapitre grâce à des exemples et contre-exemples

L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n	Notation : $\mathcal{P}_n$ ou $\mathbb{R}_n[X]$
$P \in \mathcal{P}_n$ signifie que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n $(\forall (P;Q) \in \mathcal{P}_n^2)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \begin{cases}(P+Q)(x) = P(x)+Q(x)\\(P\times Q)(x) = P(x)\times Q(x)\end{cases}$	

L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$	Notation : $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$
$\mathcal{F}(I;\mathbb{R}) = \{f \,/\, f : I \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto f(x)\}$ $\left(\forall (f;g) \in (\mathcal{F}(I;\mathbb{R}))^2\right)\ (\forall x \in I)\ \begin{cases}(f+g)(x) = f(x)+g(x)\\(f\times g)(x) = f(x)\times g(x)\end{cases}$	

L'ensemble des classes modulo n	Notation : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0};\overline{1};\overline{2};...;\overline{n}\}$ Pour tous $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\overline{x}+\overline{y} = \overline{x+y}$ et $\overline{x}\times\overline{y} = \overline{x\times y}$	

L'ensemble des parties d'un ensemble A	Notation : $\mathcal{P}(A)$
$X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A$ Pour tous X et Y de $\mathcal{P}(A)$: $x \in X\cap Y \Leftrightarrow (x \in X$ et $x \in Y)$; $x \in X \cup Y \Leftrightarrow (x \in X$ ou $x \in Y)$ $x \in \overline{X} \Leftrightarrow (x \in A$ et $x \notin X)$; $x \in X - Y \Leftrightarrow (x \in X$ et $x \notin Y)$; $X\Delta Y = (X-Y)\cup(Y-X)$	

L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2	Notation : $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$
$\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} / (a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4\right\}$ On définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ comme suit : $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & z\\ y & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+x & c+z\\ b+y & d+t\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x & z\\ y & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+cy & az+ct\\ bx+dy & bz+dt\end{pmatrix}$	

L'ensemble des matrices carrées d'ordre 3	Notation : $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$

$$\mathbb{M}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} / (a_1;a_2;a_3;b_1;b_2;b_3;c_1;c_2;c_3) \in \mathbb{R}^9 \right\}$$

On définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+x_1 & a_2+x_2 & a_3+x_3 \\ b_1+y_1 & b_2+y_2 & b_3+y_3 \\ c_1+z_1 & c_2+z_2 & c_3+z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1 & a_1x_2+a_2y_2+a_3z_2 & a_1x_3+a_2y_3+a_3z_3 \\ b_1x_1+b_2y_1+b_3z_1 & b_1x_2+b_2y_2+b_3z_2 & b_1x_3+b_2y_3+b_3z_3 \\ c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1 & c_1x_2+c_2y_2+c_3z_2 & c_1x_3+c_2y_3+c_3z_3 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des transformations du plan	Notation : $\mathcal{T}$

Toute application bijective de plan $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ s'appelle une transformation du plan.

Les translations, les homothéties et les rotations font parties de l'ensemble des transformations $\mathcal{T}$.

$$(\forall (f;g) \in \mathcal{T}^2)(\forall M \in \mathcal{P}) \quad (fog)(M) = f(g(M))$$

1.2. DÉFINITION D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE

Définition 1

On appelle loi de composition interne sur un ensemble E, toute application de $E \times E$ dans E.

Traditionnellement, on utilise la notation $x * y$ pour désigner l'image d'un couple $(x;y) \in E \times E$ par une loi $*$ plutôt qu'une notation fonctionnelle.

On note $(E;*)$ un ensemble E muni d'une loi de composition interne « $*$ ».

Notations d'une loi de composition interne

- Les opérations usuelles sont notées $+$, $-$, $\times$, ... dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
- L'opération o est utilisée pour la composition des applications.
- Les opérations $\cap$, $\cup$, Δ sont utilisées pour les ensembles.
- $\wedge$, $\vee$, $*$, $\top$, $\perp$, $\oplus$, $\otimes$, $\bullet$, ... sont utilisées pour des opérations moins familières.

Exemples

1) L'addition et la multiplication sont des lois de composition interne sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

2) La soustraction est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{N}$.

3) La division est une loi de composition interne sur $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$, mais pas sur $\mathbb{Z}^*$ et $\mathbb{C}$.

4) Si E est un ensemble, on a sur $\mathcal{P}(E)$ les lois de composition internes suivantes :

- L'intersection : $(A;B) \mapsto A \cap B$.
- La réunion : $(A;B) \mapsto A \cup B$.
- La différence : $(A;B) \mapsto A \setminus B$.
- La différence symétrique : $(A;B) \mapsto A \Delta B$.

5) Soit $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur un intervalle I.

- L'addition et la multiplication sont des lois de composition interne sur $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$.
- Pour $I = \mathbb{R}$, la composition o est une loi de composition interne sur $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

6) L'addition et la multiplication matricielles sont des lois de composition interne sur $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.

7) L'addition et la multiplication sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définies dans le chapitre « Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ » sont des lois de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

8) Le produit scalaire dans le plan vectoriel $\mathcal{V}_2$ n'est pas une loi de composition interne car si $(\vec{u};\vec{v}) \in \mathcal{V}_2^2$ alors $\vec{u}.\vec{v} \in \mathbb{R}$, et donc $\vec{u}.\vec{v} \notin \mathcal{V}_2$.

Applications

1. Pour tous x et y de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose : $x * y = x + y - 2xy$.

   Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2. Sur l'intervalle $I =]-1;1[$, on définit la relation $\perp$ par : $(\forall (x;y) \in I^2) \quad x \perp y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

   La relation $\perp$ est-elle une loi de composition interne sur I ? Justifier.

3. On considère l'ensemble $E = \{f_1; f_2; f_3; f_4\}$ où les fonctions f_i $(i \in \{1;2;3;4\})$ des fonctions numériques définies de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}^*$ par : $f_1 : x \mapsto x$; $f_2 : x \mapsto -x$; $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $f_4 : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$

   a) Montrer que o (composition des fonctions) est une loi de composition interne sur E.

   b) Dresser la table de $(E;o)$.

4. On considère l'ensemble $A = \{1;2;4;6;18\}$, et soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f : A \times A &\to A \\ (x;y) &\mapsto x \wedge y \end{aligned}$$

($x \wedge y$ étant le plus grand commun diviseur des entiers x et y)

   a) Dresser la table de la loi $\wedge$ dans A.

   b) En déduire que $\wedge$ est une loi de composition interne dans A.

1.3. PARTIE STABLE – LOI INDUITE

Définition 2

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et F une partie de E.

On dit que F est stable par $*$ si : $\left(\forall(x;y)\in F^2\right) \quad x*y\in F$

La loi de composition interne alors définie sur F par : $\begin{array}{ccc} F^2 & \to & F \\ (x;y) & \mapsto & x*y \end{array}$

est appelée loi induite par $*$ sur F.

Exemples

1) L'ensemble $\mathbb{R}^*$ (resp. $\mathbb{C}^*$) est une partie stable de $(\mathbb{R};\times)$ (resp. $(\mathbb{C};\times)$).

2) L'ensemble des nombres complexes de module 1 est une partie stable de $(\mathbb{C};\times)$.

3) L'ensemble $\mathbb{Z}^-$ est une partie stable de $(\mathbb{R};+)$, mais n'est pas une partie stable de $(\mathbb{R};\times)$ car :

$$(-1;-1)\in\left(\mathbb{Z}^-\right)^2 \quad \text{et} \quad -1\times(-1)=1\notin\mathbb{Z}^-$$

4) L'ensemble $\mathscr{A}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ des fonctions affines est une partie stable de $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});o)$.

5) L'ensemble $\mathbb{H}=\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} / \ a\in\mathbb{R}\right\}$ est une partie stable de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$. En effet, on a pour tout

$(a;b)\in\mathbb{R}^2$: $$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{H}.$$

6) L'ensemble $\mathbb{R}^*$ n'est pas stable pour l'addition dans $\mathbb{R}$ car $(1;-1)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$ mais $1+(-1)=0\notin\mathbb{R}^*$.

7) L'ensemble $P=\{z\in\mathbb{C} / \operatorname{Re}(z)\geq 0\}$ est une partie stable de $(\mathbb{C};+)$, mais n'est pas une partie stable de $(\mathbb{C};\times)$. (Remarquer bien que : $i\times i=-1\notin P$ malgré que $i\in P$).

8) On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ comme suit : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right) \quad x*y=xy-3x-3y+12$

On considère la partie $S=\left]3;+\infty\right[$. Montrons que S est une partie stable de $(\mathbb{R};*)$:

On a pour tous x et y de S : $x*y-3=xy-3x-3y+9=(x-3)(y-3)$

Et puisque : $(x\in S \text{ et } y\in S)\Rightarrow(x>3 \text{ et } y>3)\Rightarrow(x-3)(y-3)>0\Rightarrow x*y-3>0$

alors : $\left(\forall(x;y)\in S^2\right) \quad x*y\in S$. Par suite, S est une partie stable de $(\mathbb{R};*)$.

Applications

1. On considère l'ensemble : $S=\left\{x^2+y^2 / (x;y)\in\mathbb{N}\right\}$

   a) Montrer S est une partie stable de $(\mathbb{N};\times)$.

   b) L'ensemble S est-il stable pour l'addition dans $\mathbb{N}$? Justifier.

2. On considère les ensembles : $A = \{3^n \times 2^m \,/\, (n;m) \in \mathbb{N}^2\}$ et $B = \{n^2 \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.
   a) Etudier la stabilité de A pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$.
   b) Même question pour l'ensemble B.

3. On considère l'ensemble : $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \,/\, (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

   Montrer que G est une partie stable de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

4. Dans l'espace $\mathcal{V}_3$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère l'ensemble :

$$E = \{\vec{0};\vec{i};\vec{j};\vec{k};-\vec{i};-\vec{j};-\vec{k}\}$$

   a) Dresser la table de la loi $\wedge$ dans E. ($\wedge$ étant le produit vectoriel dans $\mathcal{V}_3$).
   b) Vérifier que E est une partie stable de $(\mathcal{V}_3;\wedge)$.

2 PROPRIÉTÉS D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE

2.1. ASSOCIATIVITÉ - COMMUTATIVITÉ

Définition 3

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

- On dit que la loi $*$ est associative dans $(E;*)$ si :

$$(\forall(a;b;c) \in E^3) \quad (a*b)*c = a*(b*c)$$

- On dit que la loi $*$ est commutative dans $(E;*)$ si :

$$(\forall(a;b) \in E^2) \quad a*b = b*a$$

Exemples

1) Sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, l'addition et la multiplication sont associatives et commutatives.
2) Sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, les lois $\cap$ et $\cup$ sont associatives et commutatives.
3) Sur $\mathbb{R}$, la soustraction n'est ni commutative, ni associative. Contre-exemples :

$$5-7 \neq 7-5 \quad \text{et} \quad (7-5)-1 \neq 7-(5-1)$$

4) L'addition matricielle est associative et commutative dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.
5) La multiplication matricielle est associative dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, mais pas commutative.
6) Dans $\mathcal{V}_3$, le produit vectoriel n'est ni commutative, ni associative. Contre-exemples : Si $(O;\vec{i};$ un repère orthonormé direct, alors : $\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i}$ et $(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{j} \neq \vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{j})$
7) La composition des fonctions est associative dans $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, mais pas commutative.

Remarques

- La loi $*$ n'est pas commutative dans $(E;*)$ signifie que : $(\exists(a;b)\in E^2)\quad a*b\neq b*a$.
- La loi $*$ n'est pas associative dans $(E;*)$ signifie que : $(\exists(a;b;c)\in E^3)\quad (a*b)*c\neq a*(b*c)$.
- Si la loi $*$ est associative dans $(E;*)$, alors on peut supprimer les parenthèses et écrire :

$$(a*b)*c=a*(b*c)=a*b*c$$

Si la loi $*$ est associative dans $(E;*)$, alors, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$, on définit en général des applications $(x_1;x_2;...;x_n)\mapsto x_1*x_2*...*x_n$ de E^n dans E : pour $n=1$, on part de l'application identique de E, puis on utilise la formule de récurrence : $x_1*x_2*...*x_n=(x_1*x_2*...*x_{n-1})*x_n\ ,\ n\geq 2$.

Si $x_1,x_2,...,x_n\in E$ et $y_1,y_2,...,y_m\in E\ (n,m\in\mathbb{N}^*)$, on a :

$$(x_1*x_2*...*x_n)*(y_1*y_2*...*y_m)=x_1*x_2*...*x_n*y_1*y_2*...*y_m$$

On le montre par récurrence sur $m\in\mathbb{N}^*$. En notation additive, $x_1+x_2+...+x_n$ est aussi noté $\sum_{i=1}^{n}x_i$, en notation multiplicative, $x_1.x_2....x_n$ est aussi noté $\prod_{i=1}^{n}x_i$. Le cas où tous les x_i sont égaux à un même élément x est important.

Définition 4

Soit E un ensemble muni d'une loi **associative** et $x\in E$. Pour tous entiers non nuls m et n, on a :

- En notation additive : $mx+nx=(m+n)x$ et $m(nx)=(mn)x$.
- En notation multiplicative : $x^m x^n=x^{m+n}$ et $(x^m)^n=x^{mn}$.

Applications

1. Étudier la commutativité et l'associativité de la loi de composition interne $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)\quad x*y=2^{xy}$$

2. Étudier la commutativité et l'associativité de la loi de composition interne T définie sur $E=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ par :

$$(a;b)\mathsf{T}(x;y)=(ax;ay+bx)$$

3. Étudier la commutativité et l'associativité de la loi de composition interne $\perp$ définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$(\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2)\quad z\perp z'=iz.z'+2z+(1+i)z'+2$$

4. On munit un ensemble E d'une loi de composition interne $\bullet$ (notation multiplicative) telle que :

$$(\forall(x;y)\in E^2)\ x(xy)=(yx)x=y$$

Montrer que la loi $\bullet$ est commutative.

5. Soit $(E;\bullet)$ un ensemble muni d'une loi multiplicative telle que : $(\forall(x;y;z;\omega)\in E^4)\ x(\omega x)(yz)=\omega x$

Montrer que : $(\forall(a;b;c)\in E^3)\ c=ab\Rightarrow c^2=c$. En déduire que : $(\forall(a;b;x)\in E^3)\ (ab)x=ax$.

2.2. L'ÉLÉMENT NEUTRE

Définition 5

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Un élément e de $(E;*)$ est dit **neutre** si : $(\forall x \in E)\ e*x = x*e = x$

Exemples

1) 0 est un élément neutre de $(\mathbb{N};+)$, $(\mathbb{Z};+)$, $(\mathbb{Q};+)$, $(\mathbb{R};+)$ et $(\mathbb{C};+)$.

2) 1 est un élément neutre de $(\mathbb{N};\times)$, $(\mathbb{Z};\times)$, $(\mathbb{Q};\times)$, $(\mathbb{R};\times)$ et $(\mathbb{C};\times)$.

2) Dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, $\varnothing$ est neutre pour $\cup$ et E est neutre pour $\cap$.

3) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, la fonction identique $Id : x \mapsto x$ est neutre pour la composition.

4) La matrice nulle $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est neutre dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$: $(\forall M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}))\ M + O_2 = O_2 + M$.

5) La matrice identité $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est neutre dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$: $(\forall M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}))\ M \times I_2 = I_2 \times M$.

De même, la matrice identité $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est neutre dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

6) La loi soustraction « $-$ » définie sur $\mathbb{R}$ ne possède pas d'élément neutre.

7) La loi $\perp$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ \ x \perp y = x + y + 2 + xy$ ne possède pas d'élément neutre.

En effet, il est impossible de trouver $e \in \mathbb{R}$ tel que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x + e + 2 + xe = x$.

Remarques

- Si la loi $*$ est **commutative** dans $(E;*)$, alors une des relations de la définition 5 suffit. On peut prendre alors soit « $(\forall x \in E)\ e*x = x$ » ou bien « $(\forall x \in E)\ x*e = x$ ».
- Si S est une partie stable de $(E;*)$, et si e est neutre dans $(E;*)$ alors cela n'implique pas que e est neutre dans $(S;*)$. À titre d'exemple : Prenons $E = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $S = \{\overline{0};\overline{2};\overline{4}\}$

  $\overline{1}$ est neutre dans E et $\overline{4}$ est neutre dans S.

Applications

1. On munit l'ensemble $\mathbb{Z}$ d'une loi de composition interne $*$ définie par : $(\forall (x;y) \in \mathbb{Z}^2)\ x*y = x+y-3$.

Montrer que $(\mathbb{Z};*)$ admet un élément neutre.

2. On considère l'ensemble : $E=\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2\ /\ x^2-2y^2=1\}$

On définit sur E l'opération suivante : $(x;y)*(a;b)=(xa+2yb;\ xb+ya)$

a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur E.

b) La loi $*$ admet-elle un élément neutre ? Justifier.

3. On considère l'ensemble : $A=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} / (\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$

a) Montrer que $\times$ est une loi de composition interne sur A.

b) Est-ce-que $(A;\times)$ admet un élément neutre ? Justifier.

Proposition 1

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Si e et e' sont deux éléments neutres pour la loi $*$ dans E, alors $e=e'$. Autrement dit : un élément neutre pour une loi de composition interne, lorsqu'il existe, est unique.

Preuve

Si deux tels éléments existent, on a $e*e'=e$ car e' est neutre, et $e*e'=e'$ car e est neutre, d'où : $e=e'$.

2.3. SYMÉTRIQUE D'UN ÉLÉMENT

Définition 6

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et possédant un élément neutre e.

Un élément $a\in E$ est dit symétrisable (ou inversible) pour $*$ s'il existe un élément a' de E tel que $a*a'=a'*a=e$. Un tel élément a' (s'il existe) est appelé un symétrique (ou inverse) de a pour $*$.

Remarques

- Si a' est un symétrique de a pour la loi $*$, alors a est un symétrique de a' pour la même loi.
- Si la loi $*$ est **commutative**, alors on peut se contenter de l'une des relations $a*a'=e$ ou $a'*a=e$.
- Si a' est un symétrique de a pour la loi $*$, on dit alors que a et a' sont symétriques dans $(E;*)$.

Exemples

1) Dans $(\mathbb{Z};+)$, $(\mathbb{Q};+)$, $(\mathbb{R};+)$ et $(\mathbb{C};+)$, tout élément a admet un symétrique qui est son opposé $-a$.

2) Dans $(\mathbb{Q}^*;\times)$, $(\mathbb{R}^*;\times)$ et $(\mathbb{C}^*;\times)$, tout élément a admet un symétrique qui est son inverse a^{-1} ou $\frac{1}{a}$.

3) Dans $(\mathscr{P}(E);\cap)$, l'unique élément symétrisable est E et, dans $(\mathscr{P}(E);\cup)$, l'unique élément symétrisable est l'ensemble vide $\varnothing$.

4) S'il existe, l'élément neutre de $(E;*)$ est symétrisable pour $*$ et il est son propre symétrique.

5) Dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};+)$, tout élément $\overline{a}$ admet un symétrique qui est $-\overline{a}$ (ou encore $\overline{(-a)}$.

6) Dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};\times)$, tout élément $\overline{a}$ différent de $\overline{0}$ admet un inverse.

7) Dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\times)$, l'élément $\overline{2}$ n'admet pas d'inverse.

8) Dans $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R});\times)$, La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ admet un inverse qui est $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, par contre la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'en a pas.

Proposition 2

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne **associative** et possédant un élément neutre e.

Si un élément $a \in E$ est symétrisable, alors, le symétrique de a est unique.

Preuve

Supposons qu'il existe deux éléments b et c dans E tels que : $a*b=b*a=e$ et $a*c=c*a=e$

L'associativité de la loi $*$ permet alors d'écrire : $b=b*e=b*(a*c)=(b*a)*c=e*c=c$

ce qui achève la démonstration.

Remarques

- Le symétrique d'un élément a se note :
  - a^{-1} pour une loi notée multiplicativement et s'appelle inverse de a.
  - $-a$ pour une loi notée additivement et s'appelle opposé de a.
- Lorsque f est une bijection de E dans E, il n'y a donc pas ambiguïté dans la notation f^{-1} : il s'agit aussi bien de son application réciproque que de son inverse pour la loi o.

Proposition 3

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne **associative** et possédant un élément neutre e.

Si a et b sont deux éléments symétrisables, alors $a*b$ est aussi symétrisable et son symétrique est $(a*b)'=b'*a'$, où a' et b' sont respectivement les symétriques de a et b.

Preuve

l suffit de vérifier que : $(a*b)*(b'*a')=e$ et $(b'*a')*(a*b)=e$

e qui découle immédiatement de l'associativité de $*$.

Exemples

1) Si f et g sont deux bijections d'un ensemble E dans lui-même, alors $f\,o\,g$ est également bijective et sa bijection réciproque est $g^{-1}o\,f^{-1}$: $(f\,o\,g)^{-1} = g^{-1}o\,f^{-1}$

2) Si A et B sont deux matrices inversibles dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$, alors le produit AB est également inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Applications

1. On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne définie comme suit : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ \ x * y = x + y + \frac{1}{2}xy$.
   a) Montrer que la loi $*$ est associative.
   b) Montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
   c) Déterminer les éléments symétrisables pour la loi $*$.
   d) Montrer que le symétrique de -1 est 2, et que le symétrique de 6 est -3.

2. On définit sur l'intervalle $I =]-1;1[$ une loi $\top$ comme suit : $(\forall x, y \in I)\ \ x \top y = \dfrac{x+y}{1+xy}$
   a) Montrer que $\top$ est une loi de composition interne sur I .
   b) Montrer que la loi $\top$ est associative dans I .
   c) Déterminer l'élément neutre e dans $(I;\top)$.
   d) Montrer que tout élément $x \in I$ admet un symétrique dans $(I;\top)$.

3. On munit $\mathbb{C}$ de la loi de composition interne définie comme suit :
$$(\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2)\ \ z \perp z' = zz' + i(z+z') - (1+i)$$
   a) Montrer que $\perp$ est commutative et associative.
   b) Montrer que $\perp$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
   c) Déterminer les éléments symétrisables pour la loi $\perp$.

2.4. ÉLÉMENT RÉGULIER D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE

Définition 7

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Un élément $a \in E$ est dit **régulier ou simplifiable** si, et seulement si :

$$(\forall (x;y) \in E^2)\ \begin{cases} a * x = a * y \Rightarrow x = y & (1) \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y & (2) \end{cases}$$

Remarque

Si la loi $*$ est commutative dans E, alors l'une des implications (1) ou (2) suffit pour que l'élément a soit régulier dans $(E;*)$.

Exemples

1) Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tout élément est régulier pour l'addition.
2) Dans $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$, tout élément est régulier pour la multiplication.
3) Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre e. Alors, tout élément inversible de E est régulier. En effet, soit $x \in E$ un élément inversible et x' son inverse.

   Soit $(a;b) \in E^2$. On a : $x' * (x * a) = (x' * x) * a = e * a = a$ et de même $x' * (x * b) = b$.

   On en déduit donc que si $x * a = x * b$, alors $a = b$. On démontre de même que : $a * x = a * y \Rightarrow x = y$
4) Attention, un élément régulier n'est pas nécessairement inversible. A titre d'exemple, dans $(\mathbb{N};+)$, tout élément est régulier mais seul 0 est inversible : $\left(\forall (a;x;y) \in \mathbb{N}^3\right) \quad a + x = a + y \Rightarrow x = y$.

Applications

1. On considère l'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de la loi de composition interne définie par : $a \wedge b = c$ où c est le plus grand commun diviseur des entiers a et b.

   Est-ce-que tout élément de $\mathbb{N}^*$ est régulier dans $(\mathbb{N}^*;\wedge)$? Justifier.
2. On définit sur l'ensemble $\mathbb{Q}_+^*$ une loi de composition interne comme suit :
$$\left(\forall (x;y) \in \left(\mathbb{Q}_+^*\right)^2\right) \quad x \top y = \frac{xy}{x+y}$$
   Déterminer les éléments réguliers dans $(\mathbb{Q}_+^*;\top)$.
3. Soit $\mathcal{A}(E;E)$ l'ensemble des applications de E dans E muni de la loi de composition o.
   a) Montrer que les éléments f qui vérifient : « Pour tous g et h de $\mathcal{A}(E;E)$, $foh = fog \Rightarrow h = g$ » sont les applications injectives.
   b) Montrer que les éléments f qui vérifient : « Pour tous g et h de $\mathcal{A}(E;E)$, $hof = gof \Rightarrow h = g$ » sont les applications surjectives.
4. Est-ce-que tout élément de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$ est régulier ? Justifier.

3 MORPHISMES

3.1. DÉFINITION D'UN MORPHISME

Définition 8

Soit $(E;*)$ et $(F;\top)$ deux ensembles munis de lois de composition interne et soit f une application de E dans F. On dit que f est **un morphisme** de $(E;*)$ dans $(F;\top)$ lor
$$\left(\forall (x;y) \in E^2\right) \quad f(x*y) = f(x) \top f(y)$$

Définition 9

- Un morphisme s'appelle aussi un homomorphisme.
- Un endomorphisme de $(E;*)$ est un morphisme de $(E;*)$ dans lui-même.
- Un isomorphisme est un morphisme bijectif.
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Exemples

1) On considère l'application : $\begin{array}{l} f:(\mathbb{Z};+)\to(\mathbb{Z}^*;\times) \\ \quad x \mapsto 5^x \end{array}$

On a pour tout $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$: $f(x+y)=5^{x+y}=5^x\times 5^y=f(x)\times f(y)$

Par conséquent, f est un morphisme de $(\mathbb{Z};+)$ dans $(\mathbb{Z}^*;\times)$.

2) On considère l'application : $\begin{array}{l} g:]0;+\infty[\to\mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \ln x \end{array}$

On a pour tout $(x;y)\in(]0;+\infty[)^2$: $g(xy)=\ln(xy)=\ln x+\ln y=g(x)+g(y)$

Par conséquent, g est un morphisme de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

3) On considère l'application : $\begin{array}{l} h:\mathbb{C}\to\mathbb{R} \\ \quad z \mapsto |z| \end{array}$

On a pour tout $(z_1;z_2)\in\mathbb{C}^2$: $h(z_1\times z_2)=|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|=h(z_1)\times h(z_2)$

Par conséquent, h est un morphisme de $(\mathbb{C};\times)$ dans $(\mathbb{R};\times)$.

4) On considère l'application : $\begin{array}{l} k:\mathbb{R}\to\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \\ \quad x \mapsto \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} \end{array}$

On a pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $k(x+y)=\begin{pmatrix}1 & x+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. D'autre part :

$$k(x)\times k(y)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}=k(x+y)$$

Par conséquent, k est un morphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

5) On considère l'application : $\begin{array}{l} \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^* \\ \quad \theta \mapsto e^{i\theta} \end{array}$

On a pour tout $(\theta_1;\theta_2)\in\mathbb{R}^2$: $\varphi(\theta_1+\theta_2)=e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}=\varphi(\theta_1)\times\varphi(\theta_2)$.

Par conséquent, φ est un morphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(\mathbb{C}^*;\times)$.

Applications

1. Soit f_a l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right)\ f_a(x;y)=\left(ax;\dfrac{y}{a}\right)$ (où $a\in\mathbb{R}^*$)

   a) Montrer que f_a est une application bijective.

   b) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f_a quand a varie sur $\mathbb{R}^*$.

   - Déterminer l'application $f_{a'} o f_a$ où $(a;a')\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$.
   - En déduire que la composition des applications o est une loi de composition interne sur $\mathcal{F}$.

   c) On considère l'application : $h:\mathbb{R}^*\to\mathcal{F}$
   $a\mapsto f_a$
   Montrer que h est un morphisme de $\left(\mathbb{R}^*;\times\right)$ dans $(\mathcal{F};o)$.

2. Soit f l'application définie de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ par : $f(X)=C_E^X=E-X$

   a) Montrer que f est un morphisme de $(\mathcal{P}(E);\cap)$ dans $(\mathcal{P}(E);\cup)$.

   b) Montrer que f est un morphisme de $(\mathcal{P}(E);\cup)$ dans $(\mathcal{P}(E);\cap)$.

   c) L'application f est-elle un automorphisme ? Justifier.

3. On considère l'ensemble : $\mathcal{E}=\left\{M(x;y)=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x+y\end{pmatrix}\ /\ (x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

   Et soit $z_0=a+ib$ un nombre complexe avec $(a;b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

   On considère l'application : $\phi:\quad E\to\mathbb{C}$
   $M(x;y)\mapsto x+yz_0$

   a) Montrer que ϕ est un isomorphisme de $(E;+)$ dans $(\mathbb{C};+)$.

   b) Déterminer le nombre complexe z_0 pour que ϕ soit un morphisme de $(E;\times)$ dans $(\mathbb{C};\times)$.

3.2. PROPRIÉTÉS D'UN MORPHISME

Proposition 4

Soit f un morphisme de $(E;*)$ dans $(F;\top)$.

1) $f(E)$ est une partie stable de $(F;\top)$.
2) Si la loi $*$ est associative dans $(E;*)$, alors la loi $\top$ est associative dans $(f(E);\top)$.
3) Si la loi $*$ est commutative dans $(E;*)$, alors la loi $\top$ est commutative dans $(f(E);\top)$.
4) Si la loi $*$ admet un élément neutre e dans $(E;*)$, alors $f(e)$ est un élément neutre dans $(f(E);\top)$
5) Si la loi $*$ admet un élément neutre e dans $(E;*)$, et un élément x admet un symétrique x' dans $(E;*)$, alors $f(x)$ admet un symétrique dans $(f(E);\top)$ qui est $f(x')$.

Preuve

1) Soit y_1 et y_2 deux éléments de $f(E)$. Il existe donc $(x_1;x_2)\in E^2$ tel que : $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$.

Puisque f un morphisme de $(E;*)$ dans $(F;\top)$, alors : $y_1\top y_2=f(x_1)\top f(x_2)=f(x_1*x_2)$

Comme $*$ est une loi de composition interne sur E, alors $x_1*x_2\in E$, et donc $f(x_1*x_2)\in f(E)$.

Par suite, $y_1\top y_2\in f(E)$. Ainsi, $f(E)$ est une partie stable de $(F;\top)$.

2) Soit $(u;v;w)\in(f(E))^3$. Il existe donc $(x;y;z)\in E^3$ tel que : $u=f(x)$ et $v=f(y)$ et $w=f(z)$.

Puisque f un morphisme de $(E;*)$ dans $(F;\top)$, alors :

$$(u\top v)\top w=(f(x)\top f(y))\top f(z)=f(x*y)\top f(z)=f[(x*y)*z]$$

Si la loi $*$ est associative dans $(E;*)$, alors :

$$(u\top v)\top w=f[x*(y*z)]=f(x)\top f(y*z)=f(x)\top[f(y)\top f(z)]=u\top(v\top w)$$

Par suite, la loi $\top$ est associative dans $(f(E);\top)$.

3) Supposons que la loi $*$ est commutative dans $(E;*)$. En conservant les notations de 1), on obtient :

$$y_1\top y_2=f(x_1)\top f(x_2)=f(x_1*x_2)=f(x_2*x_1)=f(x_2)\top f(x_1)=y_2\top y_1$$

ce qui montre bien que la loi $\top$ est commutative dans $(f(E);\top)$.

4) Soit $u\in f(E)$. Il existe alors $x\in E$ tel que $u=f(x)$. On suppose que la loi $*$ admet un élément neutre e dans $(E;*)$. Il s'ensuit donc : $u\top f(e)=f(x)\top f(e)=f(x*e)=f(x)=u$. On montre de même que $f(e)\top u=u$, ce qui entraîne immédiatement que $f(e)$ est l'élément neutre dans $(f(E);\top)$.

5) Soit x' le symétrique de x dans $(E;*)$. De $x*x'=e$ et $x'*x=e$, ajouté au fait que f un morphisme de $(E;*)$ dans $(F;\top)$, on déduit : $f(x)\top f(x')=f(x*x')=f(e)$ et $f(x')\top f(x)=f(x'*x)=f(e)$. Comme $f(e)$ est un élément neutre dans $(f(E);\top)$, alors $f(x)$ admet un symétrique dans $(f(E);\top)$ qui est $f(x')$.

Corollaire

Si f un isomorphisme de $(E;*)$ dans $(F;\top)$ (c'est-à-dire morphisme bijectif), alors f transfère les propriétés de la loi $*$ dans $(E;*)$ vers la loi $\top$ de $(F;\top)$, et va ainsi conserver toutes les propriétés liées à cette loi. On exprime ce résultat en disant que $(E;*)$ et $(F;\top)$ ont la même structure.

A UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE ET SES PROPRIÉTÉS

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)\quad x*y=xy+(x^2-1)(y^2-1)$

1) Montrer que la loi $*$ est commutative.
2) Montrer que la loi $*$ n'est pas associative.
3) La loi $*$ admet-elle un élément neutre ? Justifier.
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(E_1)\ 2*x=5 \quad ; \quad (E_2)\ x*x=1$

SOLUTION

1) Montrons que la loi $*$ est commutative :

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. On a : $x*y=xy+(x^2-1)(y^2-1)$ et $y*x=yx+(y^2-1)(x^2-1)$

donc $x*y=y*x$ (car la multiplication est associative dans $\mathbb{R}$). Ainsi, la loi $*$ est commutative.

2) Montrons que la loi $*$ n'est pas associative :

On a : $(-1*0)*2=0*2=-3$ et $(-1)*(0*2)=(-1)*(-3)=3$; donc la loi $*$ n'est pas associative.

3) On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $x*1=1*x=x$; d'où 1 est l'élément neutre pour la loi $*$.

4) Résolution des équations :

- Pour l'équation (E_1) :

$$2*x=5 \Leftrightarrow 2x+3(x^2-1)=5 \Leftrightarrow 3x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow \left(x=-2 \text{ ou } x=\frac{4}{3}\right)$$

L'ensemble solution de cette équation est : $S=\left\{-2;\frac{4}{3}\right\}$.

- Pour l'équation (E_2) :

$$x*x=1 \Leftrightarrow x^2+(x^2-1)^2=1 \Leftrightarrow x^4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-1)=0$$

Par conséquent : $x*x=1 \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x=-1 \text{ ou } x=1)$.

L'ensemble solution de cette équation est : $S=\{0;1;-1\}$.

B LA STABILITÉ

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne $*$ comme suit :

Pour tous $(x;y)$ et $(x';y')$ de $\mathbb{R}^2$: $(x;y)*(x';y')=(xx';yy')$

1) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.
2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre puis déterminer les éléments symétrisables pour la loi $*$.
3) On considère l'ensemble $S=\mathbb{R}\times\{0\}$.
   a) Montrer que S est une partie stable de $(\mathbb{R}^2;*)$.
   b) Montrer que $(S;*)$ admet un élément neutre puis Comparer cet élément neutre avec celui de $(\mathbb{R}^2;*)$

SOLUTION

1) On a pour tous $(x;y)$ et $(x';y')$ de $\mathbb{R}^2$: $(x;y)*(x';y')=(xx';yy')=(x'x;y'y)=(x';y')*(x;y)$.

Donc, la loi $*$ est commutative.

On a pour tous $(x;y)$, $(x';y')$ et $(x'';y'')$ de $\mathbb{R}^2$:

$$[(x;y)*(x';y')]*(x'';y'')=(xx';yy')*(x'';y'')=(xx'x'';yy'y'')$$

$$(x;y)*[(x';y')*(x'';y'')]=(x;y)*(xx'';yy'')=(xx'x'';yy'y'')$$

Donc, la loi $*$ est associative.

2) On a pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, $(x;y)*(1;1)=(1;1)*(x;y)=(x;y)$; donc $(1;1)$ est l'élément neutre pour $*$.

Cherchons maintenant les éléments symétrisables pour la loi $*$:

On a pour tous $(x;y)$ et $(x';y')$ de $\mathbb{R}^2$: $(x;y)*(x';y')=(1;1)\Leftrightarrow(xx';yy')=(1;1)\Leftrightarrow\begin{cases}xx'=1\\ yy'=1\end{cases}$

Si $x\neq 0$ et $y\neq 0$ alors $x'=\dfrac{1}{x}$ et $y'=\dfrac{1}{y}$. Donc tout élément de $(\mathbb{R}^*)^2$ est symétrisable pour la loi $*$.

3) a) Soit $(x;0)$ et $(y;0)$ deux éléments de S. On a : $(x;0)*(y;0)=(xy;0)$, donc $(x;0)*(y;0)\in S$.

Par suite, S est une partie stable de $(\mathbb{R}^2;*)$.

b) Soit $(x;0)$ un élément de S. On a : $(x;0)*(1;0)=(x;0)$ et $(1;0)*(x;0)=(x;0)$.

Par conséquent, $(S;*)$ admet $(1;0)$ comme élément neutre pour la loi $*$.

On a enfin $(1;0)\neq(1;1)$. Ainsi, l'élément neutre de $(S;*)$ est différent de celui de $(\mathbb{R}^2;*)$.

C UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE DANS C

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ la loi de composition interne $\top$ définie par :

Pour tout $(z;z')\in\mathbb{C}^2$: $\quad z\top z'=z.\overline{z'}$

1) Étudier la commutativité et l'associativité de la loi $\top$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $\quad (z\top z)\top=i$

SOLUTION

1) **Étude de la commutativité** : On a $i\top 1=i$ et $1\top i=-i$, donc $i\top 1\neq 1\top i$.

Ainsi, la loi $\top$ n'est pas commutative.

Étude de l'associativité : On a $(i\top 1)\top i=i\top i=i\times(-i)=1$ et $i\top(1\top i)=i\top(-i)=i\times i=-1$, donc

$(i\top 1)\top i\neq i\top(1\top i)$. Ainsi, la loi $\top$ n'est pas associative.

2) Résolution de l'équation $(z\top z)\top=i$: On pose $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$(z\top z)\top = i \Leftrightarrow |z|^2\,\overline{z} = i \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x-iy) = i \Leftrightarrow (x^2+y^2)x - i(x^2+y^2)y = i$$

Par identification on trouve : $(z\top z)\top = i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=0 \text{ ou } x=0 \\ (x^2+y^2)y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$.

Par conséquent : $(z\top z)\top = i \Leftrightarrow z=-i$. Ainsi, l'ensemble solution est : $S=\{-i\}$.

D EXEMPLE DE MORPHISME

On définit sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$ une loi de composition interne $*$ comme suit :

$$\text{Pour tout } (x;y)\in I^2 : x*y = \sqrt{x^2+y^2}$$

On définit une application f définie de I sur I par : $f(x)=x^2$.

1) Montrer que pour tout $(x;y)\in I^2$: $f(x*y)=f(x)+f(y)$

2) a) Montrer que la loi $*$ est associative.

b) La loi $*$ admet-elle un élément neutre ? Justifier.

3) Soit a un élément de I et $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer : $A=\underbrace{a*a*\dots*a}_{n\ fois}$

SOLUTION

1) On a pour tout $(x;y)\in I^2$: $f(x*y)=(x*y)^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2=f(x)+f(y)$.

2) On a f est un isomorphisme de $(I;*)$ de $(I;+)$, donc $(I;*)$ et $(I;+)$ ont la même structure.

a) Puisque la loi $+$ est associative dans I alors la loi $*$ est associative dans I.

b) Puisque la loi $+$ n'admet pas d'élément neutre dans I, alors $(I;*)$ n'a pas d'élément neutre.

3) On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $f(A)=f\big(\underbrace{a*a*\dots*a}_{n\ fois}\big)=\underbrace{f(a)+f(a)+\dots+f(a)}_{n\ fois}=nf(a)=na^2$.

Et comme f est un isomorphisme de I dans I, alors : $A=f^{-1}(na^2)=\sqrt{na^2}=a\sqrt{n}$

E EXEMPLE D'ISOMORPHISME

On définit sur $\mathbb{R}$ une loi de composition interne $*$ comme suit : Pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, $x*y=x+y-xy$

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-x$

1) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$.

2) En déduire que $*$ est associative et admet un élément neutre qu'on déterminera.

3) Déterminer les éléments symétrisables pour la loi $*$.

4) Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer : $A=\underbrace{a*a*\dots*a}_{n\ fois}$

SOLUTION

1) L'application f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f^{-1} = f$

On a pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x*y) = 1-(x*y) = 1-(x+y-xy) = (1-x)(1-y) = f(x)\times f(y)$.

Par suite, l'application f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$.

2) Puisque f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$, alors l'ensemble $(\mathbb{R};*)$ a la même structure de l'ensemble $(\mathbb{R};\times)$.Puisque la loi $\times$ est associative dans $\mathbb{R}$ alors la loi $*$ est associative dans $\mathbb{R}$.

Puisque 1 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R};\times)$, alors $f^{-1}(1)$ est l'élément neutre dans $(\mathbb{R};*)$.

Comme $f^{-1}(x) = f(x)$ alors $f^{-1}(1) = f(1) = 0$. Donc 0 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R};*)$.

3) On a 0 est l'unique élément non symétrisable dans $(\mathbb{R};\times)$. Comme $f(0) = 1$ alors l'ensemble des éléments symétrisables pour la loi $*$ est $\mathbb{R}-\{1\}$.

4) Soit a un élément de $\mathbb{R}$. On a : $f(A) = f(\underbrace{a*a*\ldots*a}_{n\ fois}) = \underbrace{f(a)\times f(a)\times\ldots\times f(a)}_{n\ fois} = (f(a))^n = (1-a)^n$

Par suite : $A = f^{-1}\left((1-a)^n\right) = f\left((1-a)^n\right) = 1-(1-a)^n$

F CALCUL MATRICIEL

On considère dans l'ensemble $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Calculer A^2 et A^3.

b) En déduire A^n pour tout entier $n \geq 3$.

2) Dans cette question, M désigne une matrice de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ qui commute avec la matrice A, c'est-à-dire qui vérifie la relation : $AM = MA$

On pose : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ avec $(a;b;c;u;v;w;x;y;z) \in \mathbb{R}^9$

a) Montrer que les matrices qui commutent avec A sont de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI + bA + cA^2$$

b) En déduire que l'on a : $M^2 = a^2 I + 2abA + \left(b^2 + 2ac\right)A^2$

Ecrire explicitement la matrice M^2 en fonction de a, b et c.

3) On se propose de montrer qu'il n'existe aucune matrice $N \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = A$.

a) Montrer que si une telle matrice N existait, alors elle vérifierait : $AN = NA$

b) En utilisant la question 2)b), en déduire qu'il n'existe pas de matrice N telle que $N^2 = A$.

4) L'objectif de cette question est de trouver les matrices $P \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $PA = P - A$

a) Développer le produit $(I - A)(I + A + A^2)$ et en déduire l'inverse de la matrice $I - A$ en fonction de A et A^2.

b) Soit P une matrice carrée d'ordre 3 vérifiant $PA = P - A$. Montrer que : $P = A(I - A)^{-1}$

En déduire l'expression de P en fonction de A et A^2.

SOLUTION

1) a) Calcul de A^2 et A^3 :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

b) Puisque $A^3 = O$ alors pour tout entier $n \geq 3$: $A^n = O$

2) a) Avec les notations de l'exercice, on a :

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } MA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & u & v \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$$

La condition $AM = MA$ se traduit alors par : $u = x = y = 0$ et $z = v = a$ et $w = b$

Par suite, la matrice M est de la forme : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI + bA + cA^2$

b) Montrons l'égalité : $M^2 = a^2 I + 2abA + (b^2 + 2ac)A^2$

De l'égalité $M = aI + bA + cA^2$ on tire :

$$M^2 = (aI + bA + cA^2)(aI + bA + cA^2) = a^2 I + b^2 A^2 + c^2 A^4 + 2abA + 2bcA^3 + 2acA^2$$

Comme $A^3 = A^4 = O$ alors : $M^2 = a^2 I + 2abA + (b^2 + 2ac)A^2$

Explicitement : $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$

3) On se propose de montrer qu'il n'existe aucune matrice N d'ordre 3 telle que $N^2 = A$.

a) Si une telle matrice N existait, on aura alors : $NA = N.N^2 = N^3$ et $AN = N^2.N = N^3$.
Donc : $NA = AN$

b) D'après la question 2) b), la matrice N s'écrit :

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

L'égalité $N^2 = A$ donne : $a^2 = 0$ et $2ab = 1$ et $b^2 + 2ac = 0$

Ce qui est impossible car on aura $a = 0$ et $2ab = 1$.

En résumé : Il n'existe pas une matrice N telle que $N^2 = A$.

4) L'objectif de cette question est de trouver les matrices P, carrées d'ordre 3, vérifiant : $PA = P - A$

a) Le calcul donne : $(I-A)(I+A+A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I - A^3$

Comme $A^3 = O$ alors $(I-A)(I+A+A^2) = I$.

Il s'ensuit donc que $I - A$ est inversible et son inverse est : $(I-A)^{-1} = I + A + A^2$

b) Soit P une matrice vérifiant $PA = P - A$. On a alors $P - PA = A$ et donc $P(I-A) = A$.

Puisque $I - A$ est inversible, alors $P(I-A)(I-A)^{-1} = A(I-A)^{-1}$ et donc $P = A(I-A)^{-1}$.

Puisque $(I-A)^{-1} = I + A + A^2$ et $A^3 = O$: $P = A(I-A)^{-1} = A(I+A+A^2) = A + A^2 + A^3 = A + A^2$

Conclusion : $P = A + A^2$.

La boîte à idées

- L'addition et la multiplication de matrices possèdent des propriétés qui peuvent être utiles dans les exercices et problèmes. À titre d'exemple : Si A, B et C sont trois matrices de même taille, alors : (O étant la matrice nulle et I la matrice identité)

$$A + B = B + A \quad ; \quad (A+B)+C = A+(B+C) \quad ; \quad A + O = A \quad ; \quad A + (-A) = O$$

$$(AB)C = A(BC) \quad ; \quad AO = OA = O \quad ; \quad AI = IA = A$$

Mais une chose très importante et qui appelle la prudence est que le produit matriciel n'est pas commutatif. C'est-à-dire qu'on **n'a pas en général** $AB = BA$.

- Dans la plupart des exercices et problème, on demande de montrer qu'une matrice A est inversible et déterminer son inverse. Pour cela, plusieurs questions peuvent se poser :
  - Connaît-on une matrice B telle que $BA = I$ ou $AB = I$? Dans ce cas, A est inversible et $A^{-1} = B$.
  - Existe-t-il une relation entre les puissances de A ? Par exemple, supposons qu'on a montré l'égalité $aA^2 + bA + cI = O$ avec $c \neq 0$. On aura alors $A(aA + bI) = -cI$, ce qui donne $A\left(\dfrac{aA+bI}{-c}\right) = I$.

Par suite, A est inversible et on a : $A^{-1} = -\dfrac{1}{c}(aA + bI)$

EXERCICES D'APPLICATION

LOI DE COMPOSITION INTERNE - PROPRIÉTÉS

EXERCICE 01

On considère la loi de composition interne $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x * y = xy - 2(x+y) + 6$

1) a) Montrer que $*$ est commutative et associative.
 b) Montrer que $*$ admet un élément neutre.
2) a) Est-ce-que tout élément de $\mathbb{R}$ est symétrisable pour la loi $*$? Justifier.
 b) On pose : $E =]2;+\infty[$.
 Montrer que E est une partie stable de $(\mathbb{R};*)$.

EXERCICE 02

On munit l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ de la loi de composition interne $*$ définie comme suit : $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

1) Étudier la commutativité et l'associativité de $*$.
2) La loi $*$ admet-elle un élément neutre dans $\mathbb{R}_+^*$?
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, calculer : $\underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}}$

EXERCICE 03

On définit sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, la loi de composition interne $\top$ définie comme suit :

$$z \top z' = z.\overline{z'} + i$$

1) Étudier la commutativité et l'associativité de $\top$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z \top z) \top z = i$

EXERCICE 04

On considère la loi de composition interne $\top$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \top y = xy - x - y + 2$

1) Déterminer l'élément neutre de la loi $\top$.
2) Déterminer les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R};\top)$.
3) Montrer que $]1;+\infty[$ est stable pour la loi $\top$.
4) Montrer que tout élément de $]1;+\infty[$ est symétrisable dans $(]1;+\infty[;\top)$.

EXERCICE 05

On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ comme suit : $x * y = xy - 3x - 3y + 12$

1) a) Déterminer l'élément neutre e dans $(\mathbb{R};*)$.
 b) Déterminer les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R};*)$.
2) a) Montrer que $]3;+\infty[$ est stable dans $(\mathbb{R};*)$.
 b) Soit $x \in]3;+\infty[$ et x' son symétrique dans $(\mathbb{R};*)$.
 A-t-on $x' \in]3;+\infty[$? Justifier votre réponse.

EXERCICE 06

On pose pour tout $(x;y) \in]-1;1[\times]-1;1[$, on pose

$$x \top y = \frac{x+y}{1+xy}$$

1) Montrer que $\top$ est une loi de composition interne dans $]-1;1[$.
2) Montrer que la loi $\top$ est associative dans $]-1;1[$.
3) Déterminer l'élément neutre de la loi $\top$.
4) Montrer que tout élément x de $]-1;1[$ est symétrisables dans $(]-1;1[;\top)$.

EXERCICE 07

On considère la loi $\perp$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\left(\forall (x;y) \in (\mathbb{R}^+)^2\right) \quad x \perp y = \ln(e^x + e^y - 1)$$

1) Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que $\perp$ est commutative et associative.
3) Montrer que la loi $\perp$ admet un élément neutre.
4) Déterminer les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R}^+;\perp)$.

EXERCICE 08

1) Soit $(E;\top)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et admettant un élément neutre e. Montrer qu'il existe au moins un élément symétrisable dans $(E;\top)$.

2) On prend $E=\{a;b\}$ et on considère le tableau :

T	a	b
a	a	b
b	b	

Compléter le tableau pour que b soit symétrisable dans $(E;\top)$.

EXERCICE 09

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $G =]-a;a[$. On définit l'opération :

$$\left(\forall (x;y)\in G^2\right) \quad x\top y=\frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}}$$

1) Montrer que $\top$ est une loi de composition interne dans G.
2) Montrer que $\top$ est commutative et associative.
3) Montrer que $\top$ admet un élément neutre.
4) Déterminer les éléments symétrisables dans G.

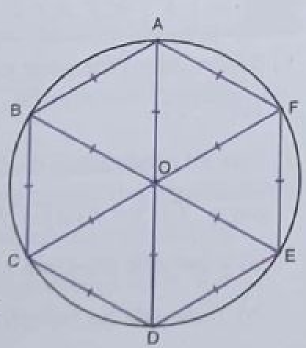
EXERCICE 10

Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O.

On considère l'ensemble :

$X=\{A;B;C;D;E;F\}$

On définit sur X une loi de composition interne • comme suit : Pour tous M et N de X, M • N est le symétrique de M par rapport à la droite (ON).



1) Déterminer la table de la loi •.
2) La loi • est-elle commutative ? Associative ?
3) La loi • admet un élément neutre ?

EXERCICE 11

On définit dans $\mathbb{R}^+$ l'opération suivante :

$$\left(\forall (x;y)\in \left(\mathbb{R}^+\right)^2\right) \quad x\perp y=\frac{x+y+|x-y|}{2}$$

1) Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que la loi $\perp$ est commutative.
3) La loi $\perp$ est-elle associative ? Justifier.
4) Montrer que la loi $\perp$ admet un élément neutre.
5) Déterminer les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R}^+;\perp)$.

EXERCICE 12

On considère l'ensemble $E=\{1;2;3;4\}$, muni d'une loi de composition interne T définie par :

Pour tout $(x;y)\in E^2$, $x\top y$ est le reste de la division euclidienne de x^y par 5.

1) Déterminer la table de la loi T.
2) La loi T admet un élément neutre ?
3) La loi T est-elle associative ? Commutative ?
4) Résoudre dans E les équations suivantes :
   a) $1\top x=1$; b) $x\top x=3$; c) $3\top x=1$

EXERCICE 13

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne. On suppose que la loi $*$ est associative.

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des éléments régulier dans $(E;*)$.

Montrer que $\mathscr{A}$ est une partie stable dans $(E;*)$.

EXERCICE 14

Soit T une loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\left(\forall (x;y)\in \left(\mathbb{R}^*\right)^2\right) \quad x\top y=\frac{xy}{x+y}$$

1) Montrer que la loi T est-elle associative.
2) La loi T admet un élément neutre ?
3) Déterminer les éléments réguliers dans $(\mathbb{R}^*;\top)$.

MORPHISME ET SES PROPRIÉTÉS

EXERCICE 15

On définit sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, la loi de composition interne T définie comme suit :

$$z \top z' = z.z' + i(z+z') - 1 - i$$

On pose : $E = \mathbb{C} - \{-i\}$.

1) Montrer que E est stable dans $(\mathbb{C};\top)$.
2) Montrer que T admet un élément neutre.
3) Montrer que tout élément de E admet un symétrique dans $(\mathbb{C};\top)$.
4) On considère l'application :

$$f : \mathbb{C}^* \to E$$
$$z \mapsto f(z) = z - i$$

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(E;\top)$.

b) Montrer que T est commutative et associative.

5) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le symétrique de $f(z)$ dans $(E;\top)$.

EXERCICE 16

On considère l'ensemble : $A = \{a + ib \,/\, (a;b) \in \mathbb{Z}^2\}$

1) On considère l'application :

$$A \to \mathbb{Z}$$
$$z = a + ib \mapsto \varphi(z) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a) Montrer que l'application φ est un morphisme de $(A;\times)$ dans $(\mathbb{Z};\times)$.

b) Soit $z \in A$.
Montrer que z admet un symétrique par rapport à la loi $\times$ si, et seulement si : $\varphi(z) = 1$

2) On note $\mathcal{V}$ le sous-ensemble de A admettant un symétrique dans $(A;\times)$.

Déterminer en extension l'ensemble $\mathcal{V}$.

EXERCICE 17

Soit $\perp$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2) \quad x \perp y = x + y - xy$$

et soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - x$$

1) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};\times)$ dans $(\mathbb{R};\perp)$.
2) En déduire que :
   a) La loi $\perp$ est associative.
   b) La loi $\perp$ admet un élément neutre à déterminer.
3) Déterminer les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R};\perp)$.
4) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer : $\underbrace{a \perp a \perp \ldots \perp a}_{n\ fois}$

EXERCICE 18

Soit : $E = \{1;2;3;4\}$ et $F = \{a;b;c;d;e\}$

On définit sur E et F les deux lois de compositions internes $*$ et T respectivement par ses tableaux :

T	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	b	a	d	a
c	c	e	b	a	c
d	d	d	a	b	a
e	e	b	c	d	e

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	3	3	4
4	4	3	4	3

1) Déterminer l'élément neutre pour chacun de $(E;*)$ et $(F;\top)$.
2) Soit f l'application de E dans F et qui est définie par : $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = b$
   a) f est-elle injective ? Surjective ?
   b) f est-elle un morphisme de $(E;*)$ dans $(F;\top)$?
   c) Déterminer l'image de l'élément neutre de $(E;*)$
   d) Comparer l'élément neutre de $(f(E);\top)$ avec celui de $(F;\top)$.

EXERCICE 19

On considère F l'application $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par :

Pour tout $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$F(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$$

1) Calculer x et y en fonction de $|F(z)|$ et $\arg(F(z))$.

2) En déduire que F est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

3) L'application F est-elle injective ?

4) Montrer que pour tout $(z;z') \in \mathbb{C}^2$:

$$F(z+z') = F(z) + F(z')$$

5) Montrer que l'application F est un morphisme de $(\mathbb{C};+)$ dans $(\mathbb{C}^*;\times)$.

6) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F(x) \in \mathbb{R}_+^*$.

7) On pose : $I = \{ix \,/\, x \in \mathbb{R}^*\}$ et $U = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$.

a) Montrer que pour tout $z \in I$: $F(z) \in U$

b) En déduire que F est un morphisme de $(I;+)$ dans $(U;\times)$.

EXERCICE 20

Pour tout réel non nul a, on considère l'application f_a définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f_a(x;y) = \left(ax;\dfrac{y}{b}\right)$

1) Montrer que f_a est bijective.

2) On considère l'ensemble : $\mathscr{E} = \{f_a \,/\, a \in \mathbb{R}^*\}$

a) Pour tous a et b de $\mathbb{R}^*$, déterminer l'application $f_a o f_b$.

b) En déduire que la composition des applications est une loi de composition interne dans $\mathscr{E}$.

3) On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}^*$ dans E par : $\varphi(a) = f_a$

a) Montrer que l'application φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathscr{E}$.

b) En déduire les propriétés de la loi o dans $\mathscr{E}$.

EXERCICE 21

On considère l'ensemble $F = \{0;1;2\}$. On définit sur F une loi de composition interne $*$ donnée par le tableau suivant :

*	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

1) La loi $*$ est-elle associative ? commutative ?

2) On considère l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications f_a définies de F dans F par : $(\forall a \in F)\ f_a(x) = a*(x*x)$

On définit la loi T sur $\mathscr{F}$ par :

$$(\forall (a;b) \in F^2)\ f_a \top f_b = f_{a*b}$$

a) T est-elle une loi de composition interne sur $\mathscr{F}$?

b) La loi T est-elle associative ?

c) On considère l'application φ de F dans $\mathscr{F}$ définie par : $\varphi(a) = f_a$.

Comparer $\varphi(a)\top\varphi(b)$ et $\varphi(a*b)$ pour tout $(a;b) \in F^2$.

EXERCICE 22

Soit f morphisme de $(E;*)$ dans $(F;\top)$. Soit A une partie stable de $(E;*)$ et B une partie stable de $(F;\top)$

1) Montrer que $f(A)$ est une partie stable de $(F;\top)$.

2) Montrer que $f^{-1}(B)$ est une partie stable de $(E;*)$.

EXERCICE 23

On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'application f_α définie par : $f_\alpha : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, $M(x;y) \mapsto M'(x';y')$

avec : $x' = x + \alpha$ et $y' = 2\alpha x + y + \alpha^2 - 4\alpha$

On considère l'ensemble : $\mathrm{E} = \{f_\alpha \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$

1) Montrer que la composition des applications « o » est une loi de composition interne dans E.

2) Montrer que f_α est une application bijective.

3) Montrer que $(\mathrm{E};o)$ et $(\mathbb{R};+)$ sont isomorphes.

4) Déterminer $f_\alpha o f_\alpha$ et $(f_\alpha)^{-1}$.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 24

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on pose : $M(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^x \end{pmatrix}$

Et on pose : $E = \{M(x) / x \in \mathbb{Z}\}$

1) Montrer que E est une partie stable de l'ensemble $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) ; \times)$.

2) Calculer $(M(x))^n$ pour tout $(n;x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

EXERCICE 25

On munit $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne T définie comme suit :

$$(x;y)\ \mathrm{T}\ (x';y') = (xx';xy' + yx'^2)$$

Déterminer les propriétés de la loi T.

EXERCICE 26

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ comme suit : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $x * y = xy + (x^2-4)(y^2-4)$

1) a) Montrer que la loi $*$ est commutative.

b) Vérifier que la loi $*$ n'est pas associative.

2) Déterminer l'élément neutre de la loi $*$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations :

a) $3 * x = 72$; b) $x * x = 16$

EXERCICE 27

Soit A l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R} - \{0;1\}$ vers $\mathbb{R} - \{0;1\}$ tel que : $A = \{f_0 ; f_1 ; f_2 ; f_3 ; f_4 ; f_5\}$

avec : $f_0(x) = x$; $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $f_2(x) = \dfrac{x-1}{x}$

$f_3(x) = \dfrac{1}{x}$; $f_4(x) = 1 - x$; $f_5(x) = \dfrac{x}{x-1}$

1) Dresser la table de la loi de composition o dans A.

2) La loi o est-elle commutative dans A ?

3) La loi o admet-elle un élément neutre dans A ?

EXERCICE 28

On considère l'ensemble :

$$E = \{(x;y) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ x^2 - 2y^2 = 1\}$$

et l'application T définie de E^2 dans $\mathbb{Z}^2$ par :

$$(x;y)\mathrm{T}(x';y') = (xx' + 2yy' ; xy' + x'y)$$

1) Montrer que T est une loi de composition interne définie sur E.

2) La loi T admet-elle un élément neutre ?

EXERCICE 29

Soit $(E; \bullet)$ un ensemble muni d'une loi multiplicative.

On suppose que la loi $\bullet$ est associative, admet un élément neutre e et tout élément x de E admet un symétrique noté x^{-1}.

Soit l'ensemble : $C = \{a \in E / \forall x \in E \ xa = ax\}$

1) Vérifier que $C \neq \varnothing$. Dans quel cas $C = E$?

2) Montrer que C est une partie stable de $(E; \bullet)$ et que :

$$\forall (a;b) \in C^2 \quad ab^{-1} \in C$$

3) Soit $a \in E$ et on considère l'application :

$$f_a : E \to E$$
$$x \mapsto axa^{-1}$$

Soit $E' = \{f_a / a \in E\}$.

a) Montrer que f_a est un isomorphisme de $(E; \bullet)$ dans $(E; \bullet)$.

b) Montrer que $(E'; o)$ admet un élément neutre et que o est associative et que tout élément de E' est symétrisable.

c) Soit φ l'application définie de E dans E' par :

$$\varphi(a) = f_a$$

Montrer que φ est un morphisme de $(E; \bullet)$ dans $(E'; o)$ puis montrer que φ est un isomorphisme si $C = \{e\}$.

EXERCICE 30

On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

On considère dans E la loi $\top$ telle que :

$$(a;b)\top(a';b') = (aa';ab'+b)$$

pour tout $(a;b)$ et $(a';b')$ de E.

1) a) Montrer que $\top$ est associative.

b) La loi $\top$ est-elle commutative ?

c) Montrer que la loi $\top$ admet un élément neutre et que tout élément de E admet un symétrique qu'on déterminera.

2) Soit $F = \{(a;0) / a \in \mathbb{R}^*\}$.

Montrer que F est une partie stable de $(E;\top)$ et que $(F;\top)$ et $(\mathbb{R}^*;\times)$ sont isomorphes.

3) On considère l'application : $\varphi : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}^* \\ (a;b) \mapsto a \end{array}$

a) Montrer que φ est un morphisme de $(E;\top)$ dans $(\mathbb{R}^*;\times)$.

b) Soit $G = \varphi^{-1}(\{1\})$. Montrer que $(G;\top)$ et $(\mathbb{R};+)$ sont homomorphes.

4) Soit $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});o)$ l'ensemble des fonctions numériques muni de l'opération « composition des fonctions » et $\mathcal{A}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f_{(a;b)}$ telles que : $f_{(a;b)}(x) = ax+b$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable dans $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});o)$.

b) Montrer que l'application : $\psi : \begin{array}{l} \mathcal{A} \to E \\ f_{(a;b)} \mapsto (a;b) \end{array}$

est un morphisme de $(\mathcal{A};o)$ dans $(E;\top)$.

EXERCICE 31

On considère la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer B^2 et B^3.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & a_n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } a_{n+1} = a_n + 4n + 3$$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n = 2n^2 + n$

EXERCICE 32

On considère l'ensemble :

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

1) Montrer que $\mathbb{H} \neq \varnothing$.

2) Montrer que $\mathbb{H}$ est stable dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

3) Déterminer l'élément neutre de $(\mathbb{H};\times)$.

4) La loi $\times$ est-elle commutative dans $\mathbb{H}$?

5) On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^{2017}.

EXERCICE 33

Dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble :

$$\mathbb{H} = \left\{ M(a;b) = \begin{pmatrix} a + \frac{\sqrt{2}}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}b \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}b & a - \frac{\sqrt{2}}{2}b \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que $\mathbb{H}$ est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$.

2) Déterminer les propriétés de la loi $+$ dans $\mathbb{H}$.

3) Montrer que $\mathbb{H}$ est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

4) La loi $\times$ est-elle commutative dans $\mathbb{H}$? Justifier.

EXERCICE 34

On considère l'ensemble :

$$E = \{x \in \mathbb{N} / \exists(a;b) \in \mathbb{N}^2 ; x = a^2 + b^2\}$$

Montrer que E est une partie stable de $(\mathbb{R};\times)$.

EXERCICE 35

On considère l'intervalle $I =]-1;1[$.

1) a) Montrer que : $(\forall (t;s) \in I^2)\ st+1 \neq 0$

b) Soit $s \in I$. On considère la fonction T_s définie sur I par : $T_s(t) = \dfrac{s+t}{1+st}$

Étudier les variations de la fonction T_s sur I.

c) Pour tout t et s de I, on pose : $s * t = \dfrac{s+t}{st+1}$.

En déduire de ce qui précède que $*$ est une loi de composition interne dans I.

2) a) Donner le tableau de variation de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ G(x) \leq x$

c) Montrer que G est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(I;*)$.

d) Quelles sont les propriétés de la loi $*$?

EXERCICE 36

Pour tous α et α' de l'intervalle $I =]-1;1[$, on pose :

$$\alpha * \alpha' = \frac{\alpha+\alpha'}{1+\alpha\alpha'}$$

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I.

2) On considère l'ensemble : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

a) Soit $\alpha \in]-1;1[$ et $z \in \mathbb{U}$.

Comparer les nombres $|z-\alpha|$ et $|1-\alpha z|$ et en déduire que si $z \in \mathbb{U}$ alors $\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha z} \in \mathbb{U}$.

b) On considère l'application :

$$f_\alpha : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, \quad z \mapsto f_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\alpha z}$$

Montrer que f_α est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

3) On pose : $\mathcal{F} = \{f_\alpha \ / \ \alpha \in I\}$

Montrer que la composition des applications $\circ$ est une loi de composition interne dans $\mathcal{F}$.

et que l'application : $\varphi : I \to \mathcal{F}, \ \alpha \mapsto f_\alpha$

est un morphisme de $(I;*)$ dans $(\mathcal{F};\circ)$.

EXERCICE 37

On considère l'ensemble :

$$E = \{z \in D \ / \ z = x+iy \text{ et } (x;y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } xy > 0\}$$

1) a) La partie E est-elle stable dans $(\mathbb{C};+)$?

b) La partie E est-elle stable dans $(\mathbb{C};\times)$?

2) On définit dans $\mathbb{C}$ la loi $*$ telle que : $z * z' = xx' + iyy'$

où : $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ et $(x;y;x';y') \in \mathbb{R}^4$

Montrer que la loi $*$ est interne dans E.

3) Soit f l'application définie de E dans $\mathbb{R}$ par :

$f(z) = \ln(xy)$ avec $z = x+iy \in E$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

a) Montrer que l'application f est un morphisme de $(E;*)$ dans $(\mathbb{R};+)$.

b) Déterminer l'ensemble N tel que :

$$N = \{z \in E \ / \ f(z) = 0\}$$

L'application f est-elle bijective ?

c) Construire dans le plan complexe l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $z \in N$

EXERCICE 38

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n est inversible dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$ et déterminer son inverse.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Les parties A), B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left(\forall (x;y)\in \mathbb{R}^2\right) \quad x*y=x+y+x^2y^2$$

1) Vérifier que la loi $*$ est commutative.
2) La loi $*$ est-elle associative ? Justifier.
3) Montrer que $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour $*$ et calculer ce neutre.
4) Résoudre les deux équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$(E_1)\ 1*x=0 \quad ; \quad (E_2)\ 1*x=1$$

Partie B :

On note $\top$ la loi de composition interne dans l'ensemble $G=\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ définie, pour tous $(z;t)$ et $(z';t')$ de G :

$$(z;t)\top(z';t')=\left(z+z';t+t'+\operatorname{Im}(\overline{z}.z')\right)$$

1) Montrer que la loi $\top$ est associative.
2) La loi $\top$ est-elle commutative ? Justifier.
3) Montrer que la loi $\top$ admet un élément neutre dans G qu'on déterminera.
4) Montrer que tout élément de G est symétrisable pour la loi $\top$ et déterminer son symétrique.

Partie C :

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne noté multiplicativement, associative et telle qu'il existe $a\in E$ tel que :

$$(\forall y\in E)\ (\exists x\in E)\ \ y=axa$$

1) Démontrer que $(E;\cdot)$ admet un élément neutre.
2) Établir que a est symétrisable et exprimer le symétrique de a^{-1} de a.

DEVOIR 2

Les parties A) et B) sont indépendantes.

Partie A :

On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Pour tout $a\in\mathbb{R}$, on considère l'application T_a définie par :

$$T_a:\ \mathscr{P} \to \mathscr{P}$$
$$M(x;y)\mapsto M'(x';y')$$

avec : $x'=x+a$ et $y'=ye^a$

On considère l'ensemble : $\mathrm{E}=\{T_a\ /\ a\in\mathbb{R}\}$

1) Montrer que la composition des applications « o » est une loi de composition interne dans E.
2) On considère l'application :

$$\varphi:\ \mathbb{R}\to\mathrm{E}$$
$$a\ \mapsto T_a$$

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ dans $(\mathrm{E};o)$.

b) En déduire l'élément neutre de $(\mathrm{E};o)$.

b) Déterminer $(T_a)^{-1}$ dans $(\mathrm{E};o)$ pour tout $a\in\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit $\top$ une loi de composition interne associative définie sur un ensemble E et a un élément de E.

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur E par :

$$\left(\forall (x;y)\in E\right)\ x*y=x\top a\top y$$

1) Montrer que la loi $*$ est associative.
2) Montrer que si la loi $\top$ est commutative alors la loi $*$ l'est aussi.
3) On suppose que la loi $\top$ est commutative et admet un élément neutre e tel que $e\neq a$ et que a admet un symétrique a' dans $(E;\top)$.

a) Montrer que $(E;*)$ admet un élément neutre.

b) Soit $x\in E$ et x' son symétrique dans $(E;\top)$. Établir que x est symétrisable dans $(E;*)$.

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 1

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ comme suit : $x * y = xy - 3x - 3y + 12$

1) a) Déterminer l'élément neutre e de $(\mathbb{R};*)$.

b) Déterminer les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R};*)$.

2) a) Montrer que $]3;+\infty[$ est stable dans $(\mathbb{R};*)$.

b) Soit $x \in]3;+\infty[$ et x' son symétrique dans $(\mathbb{R};*)$.

A-t-on $x' \in]3;+\infty[$? Justifier.

Examen Bac 1987 (Session Normale)

PROBLÈME 2

On munit $\mathbb{Z}$ d'une loi de composition interne $*$ comme suit : $(\forall (x;y) \in \mathbb{Z}^2)\ x * y = xy(x+y)$

1) Montrer que la loi $*$ est commutative.

2) Calculer $(1*(-1))*2$ et $1*((-1)*2)$.

La loi $*$ est-elle associative ?

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x * x = 16$

4) Montrer que $*$ n'admet pas un élément neutre.

Examen Bac 1989 (Session Normale)

PROBLÈME 3

On munit $\mathbb{R}^+$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)\ x * y = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$$

1) Calculer $1*(4*9)$ et $(1*4)*9$.

La loi $*$ est-elle associative ?

2) Montrer que la loi $*$ est commutative et admet un élément neutre qu'on déterminera.

3) Quels sont les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R}^+;*)$?

Examen Bac 1988 (Session Normale)

PROBLÈME 4

On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ définie comme suit : $(\forall (x;y) \in \mathbb{Z}^2)\ x * y = x + y - 3$

1) Montrer que $*$ est commutative et associative.

2) Montrer que $(\mathbb{Z};*)$ admet un élément neutre.

3) a) Déterminer le symétrique de 2 pour la loi $*$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x * 5 = 7$

Examen Bac 1988 (Session Normale)

PROBLÈME 5

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ comme suit : $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

1) Montrer que la loi $*$ est commutative..

2) Calculer $((-1)*0)*3$ et $(-1)*(0*3)$.

La loi $*$ est-elle associative ?

2) Montrer que $(\mathbb{R};*)$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

3) Résoudre les deux équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$(E_1)\ 2 * x = 5 \quad ; \quad (E_2)\ x * x = 1$

Examen Bac 1981 (Session Normale)

5

GROUPE, ANNEAU ET CORPS

HISTOIRE

La notion de groupe est issue de la théorie des substitutions pour la résolution des équations algébriques, à laquelle ont contribué Carl Friedrich Gauss, Joseph - Louis Lagrange, Augustins Cauchy et Niels Abel. Cauchy a publié vingt-cinq articles sur les « groupes ». Mais l'apport majeur est dû à Galois, lequel est le premier à dégager la notion de sous-groupe distingué et à qui revient la première idée de la notion de représentation linéaire d'un groupe. C'est également sous sa plume qu'apparaît le terme groupe d'une équation algébrique.

D'autres structures sont mises en évidence, particulièrement en Allemagne. Indépendamment des travaux de Galois, Kummer étudie des anneaux et découvre l'ancêtre de la notion d'idéal. Kronecker et Dedekind développent les prémisses de la théorie des anneaux et des corps. Kronecker établit le pont entre les écoles française et allemande. Il donne la définition moderne de groupe de Galois à partir d'automorphismes de corps.

Source : https://fr.wikipedia.org

ÉVARISTE GALOIS (1811-1832)

AUGUSTIN CAUCHY (1789-1857)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Maitriser les techniques d'opérations sur les différentes structures usuelles ;
- Utiliser les structures des quelques ensembles usuels pour étudier les structures d'autres ensembles ;
- Comparer deux structures algébriques ; transposer une structure algébrique d'un ensemble à un autre en utilisant la notion d'homomorphisme et d'isomorphisme.

PLAN DU COURS

1 RAPPELS

A) Propriétés d'une loi de composition interne

On considère dans $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ définie par : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad x*y=xy-(ax+by)$

où a et b sont deux réels donnés.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la loi $*$ soit commutative.
2. Calculer : $(0*1)*1 \quad ; \quad 0*(1*1) \quad ; \quad 0*(1*1) \quad ; \quad (1*1)*0 \quad ; \quad 1*(1*0)$.
3. Montrer que la loi $*$ est associative si, et seulement si : $(a=0 \text{ et } b=0)$ ou $(a=-1 \text{ et } b=-1)$.
4. On suppose dans cette question que $a=b=-1$.
   a) Montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
   b) Déterminer les nombres admettant un symétrique pour la loi $*$.

B) Structure de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et l'arithmétique :

1. a) Donner la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
   b) Est-ce-que tout élément α de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}-\{\overline{0}\}$ admet un symétrique pour la multiplication ? Justifier.
   c) Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \overline{2}x=\overline{1} \qquad ; \qquad (E_2) : \overline{2}x=\overline{2} \qquad ; \qquad (E_3) : \overline{3}x=\overline{2}$$

2. Soit n et p deux entiers tels que $n>p\geq 1$. On pose : $\sigma=n\wedge p$ et $n=k\sigma$ et $p=q\sigma$.
   et on considère l'ensemble : $E=\{x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ / \ x=\lambda.\overline{p} \text{ et } \lambda\in\mathbb{Z}\}$
   a) Montrer que E est une partie stable pour les lois d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   b) Montrer que : $(\forall x\in E)(\forall\alpha\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\quad \alpha x\in E$.
   c) Montrer que : $\overline{1}\in E \Leftrightarrow p\wedge n=1$
   d) On suppose que : $\forall(x;y)\in E^2 \quad x.y=\overline{0} \qquad (1)$
   Montrer que k divise p.
   <u>Application :</u> En considérant $n=18$; déterminer tous les entiers p pour lesquels (1) est vérifiée $(n>p\geq 1$

C) Des matrices régulières :

Dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, ensemble des matrices carrées d'ordre 2, on considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

1. Calculer : A^2 ; $B\times C$; $C\times B$.
2. La proposition « $\forall(M;N)\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \quad AM=AN\Rightarrow M=N$ » est-elle vraie ? Justifier.

D) Des fonctions numériques symétrisables :

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que tout élément $f\in\mathcal{F}$ admet un symétrique dans $(\mathcal{F};+)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $f\in\mathcal{F}$ admet un symétrique dans $(\mathcal{F};\times)$.

2 GROUPE ET SOUS-GROUPE

On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et on définit sur E une loi de composition interne comme suit :

$$(\forall (a;b) \in E)(\forall (x;y) \in E) \quad (a;b)*(x;y) = \left(ax; bx + \frac{y}{a}\right)$$

1. a) Montrer que pour tous $(a;b)$, $(x;y)$ et $(z;t)$ de E, on a : $[(a;b)*(x;y)]*(z;t) = \left(axz ; bxz + \frac{yz}{a} + \frac{t}{ax}\right)$

   b) Montrer que la loi $*$ est associative et admet un élément neutre $(e;u)$ à déterminer ; et que tout élément $(a;b)$ de E admet un symétrique dans E que l'on déterminera (on note $(a;b)^*$ le symétrique de $(a;b)$).

   On dit que $(E;*)$ est un groupe.

GÉNÉRALISATION

Soit $(G;\top)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

On dit que $(G;\top)$ est un groupe si, et seulement si, la loi $\top$ est associative, admet un élément neutre et tout élément de G admet un symétrique pour la loi $\top$. Si de plus, la loi $\top$ est commutative, on dit que le groupe $(G;\top)$ est commutatif.

   c) Le groupe $(E;*)$ est-il commutatif ?

2. Les ensembles $(\mathbb{C}^*;\times)$, $(\mathbb{C};+)$, $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$ et $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$ sont-ils des groupes ? sont-ils commutatifs ?

3. Soit $F = \{(a;0) / a \in \mathbb{R}^*\}$.

   a) Montrer que F est une partie stable de $(E;*)$.

   b) Montrer que $(F;*)$ est un groupe commutatif.

   On dit que $(F;*)$ est un sous-groupe du groupe $(E;*)$.

GÉNÉRALISATION

On dit que H est un sous-groupe de groupe $(G;\top)$ si H est une partie stable de G pour la loi $\top$ et $(H;\top)$ est un groupe.

4. Soit K une partie non vide de E et vérifiant : $(\forall (X;Y) \in K^2) \quad X * Y^* \in K$

   (Y^* est le symétrique de Y dans $(E;*)$)

   a) Vérifier que $(e;u) \in K$ (où $(e;u)$ est l'élément neutre déjà déterminé dans la question 1) b).

   b) Montrer que pour tout $Y \in K$: $Y^* \in K$.

   c) En déduire que K est une partie stable dans $(E;*)$ et que $(K;*)$ est un sous-groupe de $(E;*)$.

5. On considère l'ensemble $L = \left\{\left(x; x - \frac{1}{x}\right) / x \in]0;+\infty[\right\}$. Montrer que $(L;*)$ est un sous-groupe de $(E;*)$.

3 IMAGE D'UN GROUPE PAR UN MORPHISME

Pour tout réel α, on pose : $M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, et on considère les ensembles :

$$\mathbb{M} = \{M_\alpha / \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathbb{U} = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{M}$.
2. a) Montrer que $\mathbb{U}$ est une partie stable pour la multiplication dans $\mathbb{C}$.
   b) Montrer que $(\mathbb{U};\times)$ est un sous-groupe du groupe commutatif $(\mathbb{C}^*;\times)$.
3. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{U} &\to \mathbb{M} \\ e^{i\theta} &\mapsto M_\theta \end{aligned}$$

   a) Montrer que f est une morphisme surjectif de $(\mathbb{U};\times)$ vers $(\mathbb{M};\times)$.
   b) En déduire que $(\mathbb{M};\times)$ est un groupe commutatif.

4 DISTRIBUTIVITÉ

A) Soit A, B et M des matrices de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \quad \text{où } (x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4.$$

Montrer que : $(A+B)M = AM + BM$ et $M(A+B)M = MA + MB$

En fait, on peut généraliser ces deux résultats comme suit :

$$\left(\forall (M;E;F) \in (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}))^3\right) \quad \begin{cases} M(E+F) = ME + MF \\ (E+F)M = EM + FM \end{cases}$$

On dit alors que « la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$ dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ »

B) Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Pour tous X et Y de $\mathcal{P}(E)$, on pose : $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

a) Montrer que $\cap$ (l'intersection) est distributive par rapport à $\cup$ (la réunion) dans $\mathcal{P}(E)$.

b) Montrer que $\cap$ est distributive par rapport à Δ dans $\mathcal{P}(E)$.

C) On munit l'ensemble $\mathcal{V}_3$ des vecteurs de l'espace de deux lois de composition internes :

- L'addition vectorielle : $+$
- Le produit vectoriel : $\wedge$

On suppose que l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Montrer que le produit vectoriel $\wedge$ est distributif par rapport à l'addition vectorielle $+$ dans $\mathcal{V}_3$.

<u>Indication :</u> On pourra utiliser les égalités : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$; $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} =$

5 ANNEAU

1. On considère l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de deux lois de composition internes T et $*$ définies par :

$$\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right)\ \begin{cases} x\,\mathrm{T}\,y = x+y-1 \\ x*y=(x-1)(y-1)+1 \end{cases}$$

a) Montrer que $(\mathbb{R};\mathrm{T})$ est un groupe commutatif.

b) Montrer que la loi $*$ est associative et distributive par rapport à la loi T dans $\mathbb{R}$.

On exprime les propriétés citées en a) et b) en disant que $(\mathbb{R};\mathrm{T};*)$ est un anneau.

Et comme on a en plus, la loi $*$ est commutative (à vérifier), on dit que $(\mathbb{R};\mathrm{T};*)$ est un anneau commutatif.

c) Vérifier que $*$ admet un élément neutre u à déterminer. On dit que $(\mathbb{R};\mathrm{T};*)$ est un anneau commutatif unitaire. (Ainsi, $(\mathbb{R};\mathrm{T};*)$ est un anneau commutatif d'unité u).

2. Les ensembles suivants munis de deux lois de composition internes sont-ils des anneaux ? Si c'est le cas, sont-ils commutatifs ? sont-ils unitaires ?

$$(\mathbb{C};+;\times)\quad;\quad(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};+;\times)\quad;\quad(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)\quad;\quad(\mathcal{V}_3;+;\wedge)$$

3. Soit $(A;\mathrm{T};*)$ un anneau d'élément neutre 0_A pour la loi T .

On dit que l'anneau $(A;\mathrm{T};*)$ est intègre si : $\left(\forall(x;y)\in A^2\right)\ \left[x*y=0_A \Rightarrow \left(x=0_A \text{ ou } y=0_A\right)\right]$.

a) Vérifier que l'anneau $(\mathbb{R};\mathrm{T};*)$, cités dans la question 1), est un anneau intègre.

b) L'anneau $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est-il intègre ? Même question pour l'anneau $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};+;\times)$?

6 CORPS

A) Soit ξ l'ensemble des matrices $M(a;b)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$ où $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que ξ est une partie stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$, et que $(\xi;+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$.
2. Montrer que $(\xi;+;\times)$ est un anneau unitaire, et que toute matrice non nulle de ξ admet un inverse dans ξ.

   On dit alors que $(\xi;+;\times)$ est un corps.
3. Montrer que l'anneau $(\xi;+;\times)$ intègre.

B) Dresser la table de multiplication de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};\times)$ puis vérifier que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};+;\times)$ est un corps commutatif.

C) Soit p **un nombre premier positif,** et soit $x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-\{\overline{0}\}$. On note $x=\overline{m}$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha;\beta)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $\alpha m+\beta p=1$. En déduire que : $\overline{\alpha}.\overline{m}=\overline{1}$.
2. Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-\{\overline{0}\}\right)\ \left(\exists!\, y\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-\{\overline{0}\}\right)\ :\ x.y=\overline{1}$
3. En déduire que $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-\{\overline{0}\};\times\right)$ est un groupe commutatif et que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z};+;\times)$ est un corps commutatif.

1 GROUPE

1.1. DÉFINITION D'UN GROUPE

Définition 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne (notée $*$).

On dit que $(G;*)$ est **un groupe** lorsque :

1) La loi $*$ est associative,

2) $(G;*)$ possède un élément neutre,

3) Tout élément de G possède un symétrique dans G pour la loi $*$.

Si de plus la loi $*$ est commutative, on dit que $(G;*)$ est un **groupe commutatif** (ou **groupe abélien**).

Exemples

1) $(\mathbb{Z};+)$, $(\mathbb{Q};+)$, $(\mathbb{R};+)$ et $(\mathbb{C};+)$ sont des groupes commutatifs, mais $(\mathbb{N};+)$ n'est pas un groupe car aucun entier $n \geq 1$ n'est symétrisable.

2) $(\mathbb{Q}^*;\times)$, $(\mathbb{R}^*;\times)$ et $(\mathbb{C}^*;\times)$ sont des groupes commutatifs, mais $(\mathbb{Z}^*;\times)$ n'en est pas un car aucun élément (excepté 1 et -1) n'est symétrisable.

3) $(\mathbb{Q}_+^*;\times)$ et $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ sont des groupes commutatifs.

4) $(\mathcal{V}_2;+)$ et $(\mathcal{V}_3;+)$ sont des groupes commutatifs.

5) $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$ et $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+)$ sont des groupes commutatifs, mais $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$ n'est pas un groupe car les matrices $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, par exemple, ne sont pas inversibles dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

6) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z};+)$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};\times)$ sont des groupes commutatifs, mais $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\times)$ n'en est pas un car $\overline{2}$ n'est pas symétrisable dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\times)$.

7) La composée de deux rotations de même centre Ω et d'angles θ et θ' est une rotation de centre Ω et d'angle $\theta+\theta'$. Ces deux rotations commutent, c'est-à-dire que :

$$R(\Omega;\theta)oR(\Omega;\theta')=R(\Omega;\theta')oR(\Omega;\theta)$$

L'ensemble des rotations de centre Ω, muni de la loi de composition est donc un groupe commutatif.

8) Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. En munissant $\mathbb{R}^n$ de l'addition terme à terme définie par :

Pour tous $(x_1;...;x_n)$ et $(y_1;...;y_n)$ de $\mathbb{R}^n$: $(x_1;...;x_n)+(y_1;...;y_n)=(x_1+y_1;...;x_n+y_n)$

On obtient un groupe commutatif. L'élément neutre est $(0;...;0)$ et l'opposé de $(x_1;...;x_n)$ est $(-x_1;...;-x_n)$.

L'associativité et la commutativité sont immédiates.

Remarques

- Lorsqu'on travaille de manière abstraite dans un groupe non connu, il est fréquent d'emprunter les notations d'un groupe usuel, par exemple $(\mathbb{R};+)$ ou $(\mathbb{R}^*;\times)$. Deux types de notations seront ainsi fréquemment utilisées : La notation additive et la notation multiplicative.

Loi	Composé de deux éléments	Neutre	Symétrique d'un élément x	Composé de x et d'un symétrique
$+$	$x+y$	0	$-x$	$x-y$
$\times$ ou $\cdot$	xy	1	x^{-1}	xy^{-1}

De la même façon, si $x \in G$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, on notera :

- $nx = \underbrace{x+x+...+x}_{n\text{ fois}}$ si la notation est additive.
- $x^n = \underbrace{x.x...x}_{n\text{ fois}}$ si la notation est multiplicative.

- Par abus de langage et lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, on dit souvent « soit G un groupe ...» sans préciser la loi.

Applications

1. On considère l'ensemble : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

   Montrer que $(\mathbb{U};\times)$ est un groupe commutatif.

2. Soit $(G;*)$ un groupe d'élément neutre e tel que pour tout $x \in G$: $x*x*x=e$.

   Montrer que pour tout $(x;y) \in G^2$: $x*y*x*y = y*y*x*x$ et $x*y*y*x = y*x*x*y$

3. On munit $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne T comme suit :

   Pour tous $(a;b)$ et $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$: $(x;y)\mathrm{T}(a;b) = (x+a\,;ye^x+be^{-x})$

   Montrer que $(\mathbb{R}^2;\mathrm{T})$ est un groupe non commutatif.

4. Montrer que l'ensemble $G = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ muni de la loi $\perp$ définie par : $x \perp y = \mathrm{Arctan}(\tan(x)+\tan(y))$

   est un groupe commutatif.

5. On pose $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et on définit sur G une loi de composition interne par :

   Pour tous $(a;b)$ et $(c;d)$ de G : $(a;b)*(c;d) = (ac;ad+b)$

   a) Montrer que la loi $*$ est associative. La loi $*$ est-elle commutative dans $(G;*)$? Justifier.

   b) Montrer que $(G;*)$ est un groupe.

   c) On pose : $H = \{(x;0) / x \in \mathbb{R}^*\}$ et $K = \{(1;x) / x \in \mathbb{R}\}$

c_1) Montrer que les parties H et K sont stables dans $(G;*)$.

c_2) Montrer, en utilisant la définition, que $(H;*)$ et $(K;*)$ sont des groupes commutatifs.

c_3) Justifier pourquoi $(H \cup K;*)$ n'est pas un groupe.

1.2. PRINCIPALES PROPRIÉTÉS D'UN GROUPE

Proposition 1

Soit $(G;*)$ un groupe. Alors :

1) G est non vide : il contient au moins son élément neutre.

2) L'élément neutre e de G est unique.

3) Le symétrique de tout élément de G est unique.

4) Pour tout $(x;y) \in G^2$: $(x')' = x$ et $(x*y)' = y'*x'$. (x' étant le symétrique de x dans $(G;*)$)

5) Tout élément $x \in G$ est régulier. Autrement dit, pour tout $(a;x;y) \in G^3$:

$$(a*x = a*y \Rightarrow x = y) \quad \text{et} \quad (x*a = y*a \Rightarrow x = y)$$

Preuve

Les propriétés 2), 3) et 4) ont été déjà établies dans le chapitre précédent. Montrons 5) :

Soit $(a;x;y) \in G^3$. En notant a' le symétrique de a dans G, l'associativité de $*$ donne :

$$a*x = a*y \Rightarrow a'*(a*x) = a'*(a*y) \Rightarrow (a'*a)*x = (a'*a)*y \Rightarrow e*x = e*y \Rightarrow x = y$$

On montre de même que $x*a = y*a \Rightarrow x = y$, d'où le résultat.

Proposition 2

Soit $(G;*)$ un groupe d'élément neutre e.

Pour tout $(a;b) \in G^2$, l'équation $a*x = b$ (resp. $x*a = b$) admet une solution unique dans E qui est $x = a'*b$ (resp. $x = b*a'$), où a' désigne le symétrique de a dans $(G;*)$. En d'autres termes :

Pour tout $(a;b;x) \in G^3$: $(a*x = b \Leftrightarrow x = a'*b)$ et $(x*a = b \Leftrightarrow x = b*a')$

Applications

1. Soit $(G;*)$ un groupe et a un élément de G. On considère les applications f et g définies de G dans G par : $\quad f(x) = a*x \quad$ et $\quad g(x) = x*a$

   Montrer que les applications f et g sont bijectives de G dans G.

2. Soit $(G;*)$ un groupe tel que : $\quad (\forall (x;y;z) \in G^3) \quad x*y*z = y*z*x$

   Montrer que le groupe $(G;*)$ est commutatif.

1.3. SOUS-GROUPES

Définition 2

Soit $(G;*)$ un groupe et H une partie non vide de G.

On dit que H est un sous-groupe de $(G;*)$ lorsque :

- ✓ H est stable par la loi $*$, c'est-à-dire : $(\forall (x;y)\in H^2)\quad x*y\in H$.
- ✓ $(H;*)$ est un groupe.

Exemples

1) $(\mathbb{Z};+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R};+)$.

2) $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*;\times)$.

3) L'ensemble $\mathbb{U}$ constitué des nombres complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$.

4) G et $\{e\}$ sont des sous-groupes du groupe $(G;*)$. On les appelle sous-groupes triviaux de G.

5) L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$.

6) $(\mathbb{Z}^*;\times)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*;\times)$.

7) On pose : $E=\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & 0\end{pmatrix} / \ a\in\mathbb{R}\right\}$. Alors, $(E;+)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$, car :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\in E \text{ mais sa matrice opposée } -A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix} \text{ n'appartient pas à } E$$

1.4. PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE D'UN SOUS-GROUPE

Proposition 3

Soit $(G;*)$ un groupe d'élément neutre e, et H une partie de G.

$$H \text{ est un sous-groupe de } (G;*) \Leftrightarrow \begin{cases} H\neq\varnothing \\ (\forall (x;y)\in H^2)\quad x*y'\in H\end{cases}$$

où y' est le symétrique de y dans $(G;*)$.

Preuve

Commençons par montrer la condition est nécessaire. Supposons que H est un sous-groupe de G. Puisque H est non vide, alors il contient au moins un élément a, et d'après la définition 2, on déduit que $a'\in H$, et par stabilité : $e=a'*a\in H$. Soit $(x;y)\in H^2$. D'après la définition 2 : $x*y'\in H$.

Réciproquement, On a H est non vide. D'autre part, si $x\in H$, alors $e=x*x'\in H$ et $x'=e*x'\in H$, ce qui montre que H contient tous les inverses de tous ses éléments. Enfin, si $(x;y) \in H^2$, alors $y' \in H$, donc $x * y = x * (y')' \in H$, ce qui montre la stabilité de H pour la loi $*$.

Remarques

- En notation additive, la propriété caractéristique précédente s'écrit :

$$\begin{cases} H \neq \varnothing \\ (\forall (x;y) \in H^2) \quad x - y \in H \end{cases}$$

- En notation multiplicative, la propriété caractéristique précédente s'écrit :

$$\begin{cases} H \neq \varnothing \\ (\forall (x;y) \in H^2) \quad x.y^{-1} \in H \end{cases}$$

- Muni de la loi induite, un sous-groupe est un groupe. C'est la méthode habituelle, car la plus efficace, pour montrer que l'on a affaire à un groupe : on démontre en général que c'est un sous-groupe d'un groupe connu. Cela permet, en particulier, de ne pas à avoir à montrer l'associativité.
  Le lecteur est donc invité à bien connaître les exemples classiques cités en 1.1, afin de pouvoir les utiliser pour démontrer qu'une de leurs parties est un groupe.

Exemples

1) On considère l'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Démontrons que $(\mathbb{U};\times)$ est groupe commutatif :

On sait que $(\mathbb{C}^*;\times)$ est un groupe commutatif, donc, il suffira de montrer que $(\mathbb{U};\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$.

Tout d'abord, on a $1 \in \mathbb{U}$ et $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$, donc $\mathbb{U} \neq \varnothing$; ensuite, on a pour tout $(z_1;z_2) \in \mathbb{U}^2$, $|z_1| = |z_2| = 1$,

et donc : $\left|z_1 \times z_2^{-1}\right| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{1}{1} = 1$. On a donc montré que : $(\forall (z_1;z_2) \in \mathbb{U}^2) \quad z_1 \times z_2^{-1} \in \mathbb{U}$

Par conséquent, $(\mathbb{U};\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$, et donc en particulier, c'est groupe commutatif.

2) On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib / (a;b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrons que $(\mathbb{Z}[i];+)$ est groupe commutatif :

Pour cela, il suffit de montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe du groupe commutatif $(\mathbb{C};+)$.

On a tout d'abord $0 \in \mathbb{Z}[i]$ (car $0 = 0 + i \times 0$) et $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$. Soit maintenant z_1 et z_2 deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$.

Par définition de l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$, il existe $(a_1;b_1;a_2;b_2) \in \mathbb{Z}^4$ tel que : $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$;

il s'ensuit donc : $z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

Comme $(a_1;b_1;a_2;b_2) \in \mathbb{Z}^4$ alors $a_1 - a_2 \in \mathbb{Z}$ et $b_1 - b_2 \in \mathbb{Z}$, ce qui entraîne que $z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}[i]$.

Par suite, $(\mathbb{Z}[i];+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C};+)$, et donc en particulier, c'est groupe commutatif.

3) On considère l'ensemble : $\mathbb{E}=\left\{M(a;b)=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ -b & a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Montrons que $(\mathbb{E};+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+)$: (on rappelle que O_3 est matrice nulle)

On a $O_3\in\mathbb{E}$ (car $O_3=M(0;0)$) et $\mathbb{E}\subset\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $M(a;b)$ et $M(c;d)$ deux éléments de $\mathbb{E}$ avec $(a;b;c;b;d)\in\mathbb{R}^4$. On a :

$$M(a;b)-M(c;d)=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ -b & a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c & d & 0\\ -d & c & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & b-d & 0\\ -(b-d) & a-c & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=M(a-c;b-d)$$

Il s'ensuit donc que $M(a;b)-M(c;d)\in\mathbb{E}$. Ainsi, $(\mathbb{E};+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{M}_2;+)$.

Applications

1. On considère l'ensemble suivant : $\mathbb{H}=\{3^m\times 7^n \ / (m;n)\in\mathbb{Z}^2\}$

   Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*;\times)$.

2. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G;\bullet)$. Montrer que $H\cap K$ est un sous-groupe de $(G;\bullet)$.

3. Soit $(G;\times)$ un groupe et a un élément de G. On considère les ensembles :

   $$C_a=\{x\in G / ax=xa\} \quad \text{et} \quad Z(G)=\{x\in G/(\forall y\in G)\ xy=yx\}$$

   (L'ensemble C_a est appelé le centralisateur de a et l'ensemble $Z(G)$ est appelé le centre du groupe G)

   Montrer que C_a et $Z(G)$ sont des sous-groupes de G.

1.5. MORPHISMES DE GROUPES

Proposition 4

Soit f un morphisme d'un groupe $(G;*)$ dans un groupe $(F;\top)$. Alors :

L'image de groupe $(G;*)$ est le groupe $(f(G);\top)$.

Preuve

On a déjà démontré les propriétés suivantes dans les sections précédentes :

Si f est un morphisme de $(G;*)$ dans $(F;\top)$, alors :

- $f(G)$ est une partie stable de $(F;\top)$.
- $*$ est associative dans $(G;*)$, donc, $\top$ est associative dans $(f(G);\top)$.
- e est l'élément neutre dans $(G;*)$, donc, $f(e)$ est l'élément neutre dans $(f(G);\top)$.
- x' est le symétrique de x dans $(G;*)$, donc, $f(x')$ est le symétrique de $f(x)$ dans $(f(G);\top)$.

Par suite, $(f(G);\top)$ est un groupe.

Remarques

- Soit f un morphisme d'un groupe $(G;*)$ dans un groupe $(F;\top)$. On dit aussi :
  - f est un isomorphisme de groupes si f est bijectif.
  - f est un endomorphisme de groupe $(G;*)$ si f est défini de $(G;*)$ dans $(G;*)$.
  - f est un automorphisme de groupe $(G;*)$ si f est un endomorphisme bijectif.
- Si le morphisme f est surjectif ou un isomorphisme de groupes alors $f(G)=F$, et dans ce cas, l'image du groupe $(G;*)$ par f est le groupe $(F;\top)$. On dit alors que le morphisme f transfère « la structure du groupe $(G;*)$ » en celle du groupe $(F;\top)$.
- Si f est un isomorphisme de $(G;*)$ dans $(F;\top)$, alors $(G;*)$ et $(F;\top)$ ont la même structure.

  En particulier :
  - Si $(G;*)$ est un groupe, alors $(F;\top)$ est un groupe.
  - Si $(G;*)$ est un groupe commutatif, alors $(F;\top)$ est un groupe commutatif.

  Ce résultat est très utile en pratique.

Exemples

1) L'égalité : $\left(\forall (t;t') \in \mathbb{R}^2\right) \quad \exp(t+t') = \exp(t) \times \exp(t')$

signifie que l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ t &\mapsto \exp(t) \end{aligned}$$

est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R};+)$ dans le groupe $(\mathbb{R}_+^*;\times)$. Sa bijection réciproque :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \ln(t) \end{aligned}$$

est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ dans le groupe $(\mathbb{R};+)$.

2) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, les applications :

$$\begin{aligned} f_\alpha : (\mathbb{R};+) &\to (\mathbb{R};+) \\ x &\mapsto \alpha x \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} g_\alpha : (\mathbb{R}_+^*;\times) &\to (\mathbb{R}_+^*;\times) \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned}$$

sont des morphisme de groupes.

3) On considère l'ensemble $\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\right\}$. Les applications :

$$\begin{aligned} h : (\mathbb{U};\times) &\to (\mathbb{U};\times) \\ z &\mapsto z^2 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} k : (\mathbb{C}^*;\times) &\to (\mathbb{C}^*;\times) \\ z &\mapsto \overline{z} \end{aligned}$$

sont des endomorphismes de groupes.

Applications

1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ une loi de composition interne $*$ comme suit :

Pour tous $(a;b)$ et $(c;d)$ de $\mathbb{R}^2$: $\quad (a;b)*(c;d)=\left(\frac{1}{2}ad+\frac{1}{2}bc;\frac{1}{2}bd-\frac{9}{4}ac\right)$

Et soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^2 \\ z=a+ib &\mapsto \left(\frac{4b}{3};3a\right) \end{aligned}$$

a) Montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{C};\times)$ dans $(\mathbb{R}^2;*)$.

b) En déduire la structure de $\left(\mathbb{R}^2-\{(0;0)\};*\right)$.

c) Déterminer le symétrique de l'élément $(a;b)$ de $\left(\mathbb{R}^2-\{(0;0)\};*\right)$ par la loi $*$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}$ l'équation : $\quad (a;b)*(a;b)=(0;2)$

2. Soit $\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions linéaires. On note θ la fonction numérique nulle.

On a donc : $\quad \mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})=\{f_a\,/\,(\forall x\in\mathbb{R})\ f_a(x)=ax\}$

En utilisant un morphisme bien adapté, montrer que $(\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R});+)$ est un groupe commutatif, et que $(\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})-\{\theta\};o)$ est un groupe. (o étant la loi de compositions des applications).

3. On considère l'ensemble : $\mathbb{E}=\left\{M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}/\theta\in\mathbb{R}\right\}$

a) Montrer que $\mathbb{E}$ est une partie stable de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

b) En utilisant un morphisme de groupes, montrer que $(\mathbb{E};\times)$ est un groupe commutatif.

2 ANNEAU

2.1 DISTRIBUTIVITÉ

Définition 3

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition interne $\oplus$ et $\otimes$.

On dit que la loi $\otimes$ est **distributive** par rapport à la loi $\oplus$ si pour tous x, y et z de E, on a :

$$x\otimes(y\oplus z)=(x\otimes y)\oplus(x\otimes z) \quad \text{et} \quad (y\oplus z)\otimes x=(y\otimes x)\oplus(z\otimes x)$$

Exemples

1) Sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition ; c'est-à-dire :

$$x\times(y+z)=x\times y+x\times z \quad \text{et} \quad (y+z)\times x=y\times z+z\times x$$

2) Dans $\mathscr{P}(E)$, ensemble des parties de E, l'intersection est distributive par rapport à la réunion :

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \quad \text{et} \quad (B\cup C)\cap A=(B\cap A)\cup(C\cap A)$$

De même, la réunion est distributive par rapport à l'intersection:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \quad \text{et} \quad (B\cap C)\cup A=(B\cup A)\cap(C\cup A)$$

3) Dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition ; c'est-à-dire :

$$M_1\times(M_2+M_3)=M_1\times M_2+M_1\times M_3 \quad \text{et} \quad (M_2+M_3)\times M_1=M_2\times M_1+M_3\times M_1$$

4) Soit $\mathscr{A}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ étant muni de l'addition usuelle.

f et g étant dans E, $f+g$ est l'application définie sur $\mathscr{A}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ par :

$$(\forall x\in E) \quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

Etudions la distributivité de composition usuelle « o » par rapport à « + ».

Soit f, g et h trois éléments de $\mathscr{A}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

- On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$((f+g)oh)(x)=(f+g)(h(x))=f(h(x))+g(h(x))=foh(x)+goh(x)=(foh+goh)(x)$$

D'où : $(f+g)oh=(foh)+(goh)$

- On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$(ho(f+g))(x)=h((f+g)(x))=h(f(x)+g(x))$$

Faute d'une propriété telle que $f(y+z)=f(y)+f(z)$, on ne peut pas poursuivre. On peut donner dans ce cas un simple contre-exemple :

$f=g=Id_{\mathbb{R}}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=x^2$. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$h(f(x)+g(x))=h(2x)=4x^2 \quad \text{et} \quad h(f(x))+h(g(x))=2h(x)=2x^2$$

Donc, on n'a pas en général : $ho(f+g)=hof+hog$

Conclusion : La composition usuelle « o » n'est pas distributive par rapport à la loi « + » dans $\mathscr{A}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Applications

1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ une loi de composition interne T comme suit :

$$(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)(\forall(x';y')\in\mathbb{R}^2) \quad (x;y)\mathsf{T}(x';y')=(xx'+2yy';xy'+x'y)$$

Montrer que T est distributive par rapport à l'addition « + » dans $\mathbb{R}^2$.

(on rappelle que : $(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$)

2. On définit sur $\mathbb{R}$ deux lois de composition interne T et $*$ comme suit :

Pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $\quad x*y=x+y-1 \quad$ et $\quad x\mathsf{T}y=x+y-xy$

Montrer que T est distributive par rapport à l'addition « $*$ » dans $\mathbb{R}$.

2.2. STRUCTURE D'ANNEAU

Définition 4

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition interne $\oplus$ et $\otimes$.

On dit que $(A;\oplus;\otimes)$ est un anneau lorsque :

(1) $(A;\oplus)$ est un groupe commutatif.

(2) La loi $\otimes$ est associative et distributive par rapport à la loi $\oplus$.

On dit que l'anneau $(A;\oplus;\otimes)$ est **commutatif** si la loi $\otimes$ est commutative.

On dit que l'anneau $(A;\oplus;\otimes)$ est **unitaire** si la loi $\otimes$ possède un élément neutre pour la loi $\otimes$.

Notations

- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note les lois $\oplus$ et $\otimes$ respectivement $+$ (notation additive) et $\times$ (notation multiplicative). Dans le cas habituel :
  - ✓ On note 0 (ou 0_A), appelé le zéro de l'anneau A, l'élément neutre pour $+$, et
  - ✓ On note 1 (ou 1_A), appelé l'élément unité de l'anneau A, l'élément neutre pour $\times$ si A est **unitaire.**
  - ✓ On note couramment $x.y$ ou même xy à la place de $x \times y$.
  - ✓ Le symétrique de $x \in A$ pour l'addition (opposé de x) est noté $-x$.
  - ✓ Le symétrique de $x \in A$ pour la multiplication (inverse de x), **s'il existe**, est noté x^{-1}.
- Soit $(A;+;\times)$ un anneau unitaire. Soient $x \in A$ et $n \in \mathbb{Z}$. On peut définir le symbole nx dans A par :

$$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ fois}} \text{ si } n \geq 1 \quad ; \quad nx = \underbrace{(-x)+(-x)+\ldots+(-x)}_{-n \text{ fois}} \text{ si } n \leq -1 \quad ; \quad 0x = 0_A$$

De même, on peut définir le symbole x^n dans A par :

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}} \text{ si } n \geq 1 \quad ; \quad x^n = \underbrace{x^{-1} \times \ldots \times x^{-1}}_{-n \text{ fois}} \text{ si } x \text{ est inversible et } n \leq -1 \quad ; \quad x^0 = 1_A$$

Ces notations sont très utiles dans les calculs numériques (réels et complexes) et matriciels.

Exemples

1) $(\mathbb{Z};+;\times)$, $(\mathbb{Q};+;\times)$, $(\mathbb{R};+;\times)$ et $(\mathbb{C};+;\times)$ sont des anneaux commutatifs unitaires, mais $(\mathbb{N};+;\times)$ n'est pas un anneau car $(\mathbb{N};+)$ n'est pas un groupe.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire. Son zéro est $\overline{0}$, et son élément unité est $\overline{1}$.

3) $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ et $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ sont des anneaux unitaires non commutatifs. L'élément unité pour $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et l'élément unité pour l'anneau $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire. Son élément unité est la fonction $u : x \mapsto 1$.

5) $(\mathcal{P}(E);\Delta;\cap)$ est un anneau commutatif unitaire. Son élément unité est E. Par contre, $(\mathcal{P}(E);\Delta;\cup)$ n'est pas un anneau, car on n'a pas en général : $(A\cup B)\Delta(A\cup C) = A\Delta(B\cup C)$

Applications

1. On considère l'ensemble : $A=\left\{a+b\sqrt{2}\,/\,(a;b)\in\mathbb{Z}\right\}$

   a) Montrer que pour tout $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$: $a+b\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow a=b=0$

   b) Montrer que $(A;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

2. On considère l'ensemble : $\mathbb{K}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -3\beta & \alpha\end{pmatrix}\,/\,(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$

   Montrer que $(\mathbb{K};+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

2.3. RÈGLES DE CALCUL DANS UN ANNEAU

Proposition 5

Soit $(A;+;\bullet)$ un anneau unitaire. On a les propriétés suivantes :

1) Pour tout $x\in A$: $0_A\bullet x = x\bullet 0_A = 0_A$.

2) Pour tout $x\in A$: $(-1_A)\bullet x = x\bullet(-1_A) = -x$.

3) Pour tout $(x;y)\in A^2$: $(-x)\bullet y = x\bullet(-y) = -(x\bullet y)$.

4) Pour tout $(x;y)\in A^2$: $(-x)\bullet(-y) = x\bullet y$.

Preuve

1) De l'égalité $x+0_A=x$, on déduit successivement :

$$x+0_A=x \Rightarrow x\bullet(x+0_A)=x^2 \Rightarrow x^2+x\bullet 0_A=x^2 \Rightarrow x\bullet 0_A=0_A$$

$$x+0_A=x \Rightarrow (x+0_A)\bullet x=x^2 \Rightarrow x^2+0_A\bullet x=x^2 \Rightarrow 0_A\bullet x=0_A$$

2) De l'égalité $1_A+(-1_A)=0_A$, on déduit que pour tout $x\in A$: $(1_A+(-1_A))\bullet x = 0_A\bullet x = 0_A$, il s'ensuit donc $1_A\bullet x+(-1_A)\bullet x=0_A$, c'est-à-dire $x+(-1_A)\bullet x=0_A$. Par conséquent : $(-1_A)\bullet x=-x$.

On montre de même : $x\bullet(-1_A)=-x$.

3) On a pour tout $(x;y)\in A^2$:

$$x+(-x)=0_A \Rightarrow (x+(-x))\bullet y=0_A\bullet y \Rightarrow x\bullet y+(-x)\bullet y=0_A \Rightarrow (-x)\bullet y=-(x\bullet y)$$

On montre de même l'égalité : $x\bullet(-y)=-(x\bullet y)$

4) On a pour tout $(x;y)\in A^2$:

$$x+(-x)=0_A \Rightarrow (x+(-x))\bullet(-y)=0_A\bullet y \Rightarrow -x\bullet y+(-x)\bullet(-y)=0_A \Rightarrow (-x)\bullet(-y)=x\bullet y$$

Remarques

- En appliquant les règles de calcul citées dans la proposition 5 dans l'anneau $(\mathbb{R};+;\times)$, on obtient :

$$0\times x = x\times 0 = x \quad ; \quad x\times(-y)=(-x)\times y = -(x\times y)$$
$$(-1)\times x = x\times(-1) = -x \quad ; \quad (-x)\times(-y) = x\times y$$

- Attention, il ne faut pas déduire trop hâtivement de la première propriété qu'un produit n'est nul que lorsqu'un des deux éléments multipliés est nul. Par exemple, dans l'anneau $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$:

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ malgré que les deux matrices $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ne sont pas nulles

- Il peut arriver que l'on rencontre, dans la littérature, une autre définition de la notion d'anneau dans laquelle on suppose la seconde loi admit un élément neutre. D'ailleurs, tous les anneaux envisagés dans cet ouvrage ou même dans les programmes du BAC+2 (LICENCE & CLASSES PRÉPAS) seront unitaires. Les anneaux non unitaires n'ont pas en général d'intérêt pratique car on peut toujours injecter un anneau non unitaire dans un anneau unitaire.

2.4. DIVISEURS DE ZÉRO DANS UN ANNEAU – ANNEAU INTÈGRE

Définition 5

Soit $(A;+;\bullet)$ un anneau et $a\in A-\{0_A\}$.

On dit que a est un diviseur de zéro dans l'anneau A s'il existe $b\in A-\{0_A\}$ tel que :

$$a\bullet b = 0_A \qquad \text{ou} \qquad b\bullet a = 0_A$$

Exemples

1) Dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, l'élément $\overline{2}$ est un diviseur de zéro car : $\overline{2}\neq\overline{0}$ et $\overline{2}\times\overline{3}=\overline{3}\times\overline{2}=\overline{0}$.

De même, $\overline{3}$ est un diviseur de zéro dans cet anneau.

2) Dans l'anneau $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$, l'élément $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ est un diviseur de zéro car :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\neq O_2 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=O_2$$

3) Dans l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\times)$, on considère les fonctions suivantes :

$$f : x\mapsto\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\geq 0\\ x^5 & \text{si } x<0\end{cases}$$

On a $f\neq\theta$ et $g\neq\theta$ où θ est la fonction nulle (zéro de l'anneau $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$), mais $f\times g=\theta$.

Il s'ensuit donc que les fonctions f et g sont des diviseurs de zéro dans l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\times)$.

Définition 6

On dit qu'un anneau $(A;+;\bullet)$ est intègre s'il n'est pas réduit à zéro et n'admet aucun diviseur de zéro.

Autrement dit : $[(A;+;\bullet)$ est intègre$] \Leftrightarrow [(\forall(a;b)\in A^2)\ \ ab=0_A \Rightarrow (a=0_A \text{ ou } b=0_A)]$

Exemples

1) $(\mathbb{Z};+;\times)$, $(\mathbb{Q};+;\times)$, $(\mathbb{R};+;\times)$ et $(\mathbb{C};+;\times)$ sont des anneaux intègres.

2) Les anneaux $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$, $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$, $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\times)$ et $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z};+;\times)$ ne sont pas intègres.

Applications

1. Montrer que l'anneau $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};+;\times)$ est intègre.
2. On considère l'ensemble $A=\left\{x+y\sqrt{7}\ /\ (x;y)\in\mathbb{Z}^2\right\}$. Montrer que l'anneau $(A;+;\times)$ est intègre.
3. Dans l'ensemble $A=\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$, on définit les deux lois de composition interne par :

   Pour tous $(x;y)$ et $(x';y')$ de A : $(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$ et $(x;y)\times(x';y')=(xx';yy')$

   a) Montrer que $(A;+;\times)$ est un anneau commutatif.

   b) Déterminer les diviseurs de zéro dans l'anneau $(A;+;\times)$. L'anneau $(A;+;\times)$ est-il intègre ?

Proposition 6

Soit $(A;+;\bullet)$ un anneau unitaire et $a\in A$.

Si a est inversible dans $(A;\bullet)$ alors a n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau $(A;+;\bullet)$.

Preuve

Supposons que a est inversible dans $(A;\bullet)$. On note a^{-1} sont inverse. On a donc pour tout $b\in A$:

$$a\bullet b=0_A \Rightarrow a^{-1}\bullet(a\bullet b)=a^{-1}\bullet 0_A \Rightarrow (a^{-1}\bullet a)\bullet b=0_A \Rightarrow 1_A\bullet b=0_A \Rightarrow b=0_A$$

On montre de même que $b\bullet a=0_A \Rightarrow b=0_A$. Ainsi, a n'est pas un diviseur de zéro dans $(A;+;\bullet)$.

Signalons au passage que la réciproque est fausse en général. Par exemple, dans l'anneau $(\mathbb{Z};+;\times)$, l'élément 2 n'est pas un diviseur de zéro et n'est pas inversible dans $(\mathbb{Z};\times)$.

Remarque

Soit $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}$ une matrice de $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$. On rappelle que : $\det M=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d\end{vmatrix}=ad-bc$

La matrice M est inversible dans $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ si, et seulement si, son déterminant est non nul.

Si $\det M\neq 0$ alors la matrice inverse de M est donnée par la formule : $M^{-1}=\dfrac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a\end{pmatrix}$

3 CORPS

Certains anneaux jouissent propriétés supplémentaires qui les rendent plus aisés à manier. Les règles de calculs et les réflexes acquis depuis longtemps dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ y sont encore valables.

Définition 7

On appelle corps tout anneau unitaire $(K;+;\bullet)$ non réduit à $\{0_K\}$ tel que tout élément autre que 0_K est inversible pour la loi $\bullet$.

Un corps est dit commutatif si sa multiplication $\bullet$ est commutative.

Exemples

1) $(\mathbb{Q};+;\times)$, $(\mathbb{R};+;\times)$ et $(\mathbb{C};+;\times)$ sont des corps commutatifs, mais $(\mathbb{Z};+;\times)$ n'est pas un corps car l'élément 2 n'a pas d'inverse pour la loi $\times$ dans $\mathbb{Z}$.

2) Si p est un nombre premier, alors $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z};+;\times)$ est un corps commutatif. C'est une conséquence du théorème 17 du cours d'arithmétique et du fait que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z};+;\times)$ est un anneau commutatif.

3) $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ n'est pas un corps car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'inverse pour la loi $\times$ dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

4) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z};+;\times)$ n'est pas un corps.

5) On considère l'ensemble : $K=\left\{a+b\sqrt{5}\ /\ (a;b)\in\mathbb{Q}^2\right\}$. Montrons que $(K;+;\times)$ est un corps commutatif :

Tout d'abord, $(K;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire (À vérifier). Soit maintenant $x\in K-\{0\}$.

Il existe $(a;b)\in\mathbb{Q}^2-\{(0;0)\}$ tel que $x=a+b\sqrt{5}$. Puisque $x\neq 0$ alors il admet un inverse dans $\mathbb{R}$ qui

est : $x^{-1}=\dfrac{1}{a+b\sqrt{5}}=\dfrac{a-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2}=\dfrac{a}{a^2-5b^2}-\dfrac{b}{a^2-5b^2}\sqrt{5}$ (remarquer bien que $a\neq b\sqrt{5}$ car $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$)

Puisque $(a;b)\in\mathbb{Q}^2-\{(0;0)\}$ alors $\left(\dfrac{a}{a^2-5b^2};\dfrac{-b}{a^2-5b^2}\right)\in\mathbb{Q}$, ce qui montre que $x^{-1}\in\mathbb{Q}$.

En résumé, $(K;+;\times)$ est un corps commutatif.

Remarques

- Il peut arriver que l'on rencontre, dans la littérature, une autre définition de la notion de corps dans laquelle on suppose la commutativité de la multiplication $\bullet$. D'ailleurs, tous les corps envisagés dans cet ouvrage ou même dans les programmes du BAC+2 (LICENCE & CLASSES PRÉPAS) seront commutatifs. Les corps non commutatifs n'ont pas en général d'intérêt pratique.
- D'après la proposition 6, l'intégrité est une condition nécessaire, mais insuffisant, pour qu'un anneau soit un corps. Ainsi, $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z};+;\times)$ n'est pas un corps car il n'est pas un anneau intègre.

Proposition 7

Soit $(K;+;\bullet)$ un ensemble muni de deux lois de composition interne $+$ et $\bullet$.

Pour que $(K;+;\bullet)$ soit un corps, il faut et il suffit que les trois axiomes suivants soient vérifiés :

(1) $(K;+)$ est un groupe commutatif.

(2) $(K-\{0_K\};\bullet)$ est un groupe.

(3) La loi $\bullet$ est distributive par rapport à la loi $+$.

Applications

1. Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit les deux lois de compositions interne $\oplus$ et $\otimes$ par :

$$(a;b)\oplus(a';b')=(a+a';b+b') \quad \text{et} \quad (a;b)\otimes(a';b')=(aa'-bb';ab'+ba')$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2;\oplus;\otimes)$ est un corps commutatif.

2. On considère l'ensemble : $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Montrer que $(A;+;\times)$ est un corps commutatif.

3. On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ de deux lois de compositions interne $\top$ et $*$ comme suit :

$$z_1 \top z_2 = z+z'-i \quad \text{et} \quad z_1 * z_2 = izz'+z+z'$$

Montrer que $(\mathbb{C};\top;*)$ est un corps commutatif.

4. On muni l'ensemble $K=\{0;1\}$ des lois $+$ et $\times$ définies par les tables suivantes :

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Vérifier que $(K;+;\times)$ est un corps dans lequel chaque élément est son propre symétrique pour l'addition.

Proposition 8

Soit $(K;+;\bullet)$ un corps. On a alors les propriétés suivantes :

1) Tout élément a de $K-\{0_K\}$ est régulier pour l'opération $\bullet$:

Pour tout $(x;y)\in K^2$: $a\bullet x=a\bullet y \Rightarrow x=y$ et $x\bullet a=y\bullet a\Rightarrow x=y$

2) $(K;+;\bullet)$ est un anneau intègre : $(\forall(x;y)\in K^2)\ [x\bullet y=0_K \Rightarrow (x=0_K \text{ ou } y=0_K)]$

3) Pour tous $a\in K-\{0_K\}$ et $b\in K$, on a :

$$a\bullet x=b \Leftrightarrow x=a^{-1}\bullet b \quad \text{et} \quad x\bullet a=b\Leftrightarrow x=b\bullet a^{-1}$$

Voici enfin un récapitulatif des règles de calcul dans un corps commutatif $(K;+;\bullet)$ vues dans ce paragraphe :

1) Associativité de + : pour tout $(a;b;c)\in K^3$, $(a+b)+c=a+(b+c)$.

2) Commutativité de + : pour tout $(a;b)\in K^2$, $a+b=b+a$.

3) Pour tout $a\in K$, $a+0_K=a$ et $a+(-a)=0_K$.

4) Associativité de $\bullet$: pour tout $(a;b;c)\in K^3$, $(a\bullet b)\bullet c=a\bullet(b\bullet c)$.

5) Commutativité de $\bullet$: pour tout $(a;b)\in K^2$, $a\bullet b=b\bullet a$.

6) Pour tout $a\in K$, $1_K\bullet a=a$.

7) Pour tout $a\in K-\{0_K\}$, $a\bullet a^{-1}=1_K$.

8) Pour tout $a\in K$, $0_K\bullet a=0_K$.

9) Distributivité de la loi $\bullet$ par rapport à la loi + : : pour tout $(a;b;c)\in K^3$, $a\bullet(b+c)=a\bullet b+a\bullet c$.

10) Pour tout $(a;b)\in K^2$, $(-a)\bullet b=-(a\bullet b)=a\bullet(-b)$ et $(-a)\bullet(-b)=a\bullet b$.

11) Régularité de + : pour tout $(a;b;c)\in K^3$, $a+b=a+c\Rightarrow b=c$.

12) Pour tout $(a;b)\in K^2$, la différence $a-b$ est définie, elle vaut $a+(-b)$.

13) Intégrité : pour tout $(a;b)\in K^2$: $a\bullet b=0_K\Rightarrow(a=0_K$ ou $b=0_K)$

14) Régularité de $\bullet$: pour tous $a\in K-\{0_K\}$ et $(b;c)\in K^2$, $a\bullet b=a\bullet c\Rightarrow b=c$.

15) Pour tous $a\in K-\{0_K\}$ et $b\in K$, $a\bullet x=b\Leftrightarrow x=a^{-1}\bullet b$.

Remarque

• Soit $(A;\oplus;\otimes)$ un anneau unitaire d'élément unité 1_A, et soit K une partie de A, stable pour les lois $\oplus$ et $\otimes$ dans A.

On peut avoir $(K;\oplus;\otimes)$ un corps commutatif d'élément unité 1_K différent de 1_A. À titre d'exemple, considérons : $A=\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et $K=\left\{\begin{pmatrix} x & x \\ x & x\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}\right\}$

$(K;+;\times)$ est un corps commutatif. Son zéro est $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et son élément unité est $J=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Par contre, l'élément unité de $(A;+;\times)$ est la matrice identité $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

L'inverse de $M=\begin{pmatrix}x & x\\ x & x\end{pmatrix}$ (pour $x\neq 0$) est la matrice : $M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4x} & \frac{1}{4x}\\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x}\end{pmatrix}=\frac{1}{4x}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

A DES EXEMPLES DE GROUPES

Les parties A et B sont indépendantes.

<u>Partie A :</u>

En relativité restreinte, la loi de composition des vitesses est donnée par la formule :

$$v_1 * v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 . v_2}{c^2}}$$ où $c \in \mathbb{R}_+^*$ désigne la vitesse de la lumière.

1) Montrer que $]-c;c[$ est stable pour la loi $*$.

2) Montrer que $(]-c;c[;*)$ est un groupe commutatif.

<u>Partie B :</u>

Pour $(a;b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on définit l'application $f_{(a;b)}$ définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f_{(a;b)}(z) = az + b$.

et on pose : $G = \left\{ f_{(a;b)} \,/\, (a;b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \right\}$

Montrer que la composition des applications est une loi de composition interne sur G et que $(G;o)$ est un groupe.

SOLUTION

<u>Partie A :</u>

1) Soit $(u;v) \in (]-c;c[)^2$ et $w = u * v$. On a :

$$c - w = c - \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = c - \frac{c^2(u+v)}{c^2+uv} = c\left(1 - \frac{cu+cv}{c^2+uv}\right) = c\left(\frac{c^2+uv-cu-cv}{c^2+uv}\right) = \frac{c(c-u)(c-v)}{c^2+uv}$$

$$w + c = c + \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = c + \frac{c^2(u+v)}{c^2+uv} = c\left(1 + \frac{cu+cv}{c^2+uv}\right) = c\left(\frac{c^2+uv+cu+cv}{c^2+uv}\right) = \frac{c(c+u)(c+v)}{c^2+uv}$$

Puisque $-c < u < c$ et $-c < v < c$, alors $\frac{c(c-u)(c-v)}{c^2+uv} > 0$ et $\frac{c(c+u)(c+v)}{c^2+uv} > 0$; Il s'ensuit donc que $-c < w < c$. Par suite, l'ensemble $]-c;c[$ est stable pour la loi $*$.

2) La question précédente montre que $*$ est une loi de composition interne sur $]-c;c[$. On vérifie maintenant les trois points de la définition d'un groupe :

- **Commutativité :** On a pour tout $(u;v) \in (]-c;c[)^2$: $u * v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}} = v * u$

Ainsi, la loi $*$ est commutative.

- **Associativité :** Soit $(u;v;w) \in (]-c;c[)^3$. On calcule :

$$u*(v*w)=v*\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}=\frac{u+\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}}{1+\frac{u}{c^2}\times\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}}=\frac{\left(1+\frac{vw}{c^2}\right)u+v+w}{1+\frac{vw}{c^2}+\frac{u(v+w)}{c^2}}=\frac{c^2u+uvw+c^2v+c^2w}{c^2+vw+uv+uw}$$

$$(u*v)*w=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}*w=\frac{\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}+w}{1+\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\times\frac{w}{c^2}}=\frac{u+v+\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)w}{1+\frac{uv}{c^2}+\frac{(u+v)w}{c^2}}=\frac{c^2u+uvw+c^2v+c^2w}{c^2+vw+uv+uw}$$

Donc $(u*v)*w=u*(v*w)$. Ainsi, la loi $*$ est associative.

- **Élément neutre :** On a pour tout $u\in\left]-c;c\right[$, $u*0=0*u=u$. Donc $*$ admet 0 comme élément neutre.
- **Inverse :** Soit $u\in\left]-c;c\right[$. Posons $v=-u\in\left]-c;c\right[$. Alors : $u*v=v*u=\dfrac{u-u}{1-\frac{u^2}{c^2}}=0$.

Donc tout élément admet un inverse pour la loi $*$. En conclusion, $(\left]-c;c\right[;*)$ est un groupe commutatif.

Partie B :

Montrons que $(G;o)$ est un groupe :

- On a $G\neq\varnothing$ car $f_{(1;0)}=Id_{\mathbb{C}}\in G$ ($Id_{\mathbb{C}}$ étant l'application identique définie sur $\mathbb{C}$ par $Id_{\mathbb{C}}(z)=z$).
- On a o est une loi de composition interne dans G. En effet, pour tous $(a;b)$ et $(a';b')$ de $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$: $f_{(a;b)}\,o\,f_{(a';b')}(z)=a\,f_{(a';b')}(z)+b=a(a'z+b')+b=aa'z+ab'+b=f_{(aa';ab'+b)}(z)$

  Par conséquent, $f_{(a;b)}\,o\,f_{(a';b')}=f_{(aa';ab'+b)}$ et cette application est bien un élément de G.
- En notant $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, le sous-ensemble G de $\mathcal{F}$ est stable dans $(\mathcal{F};o)$. Comme la loi de composition est associative dans $\mathcal{F}$, alors elle en est de même dans G.
- On a pour tout $f\in G$: $f\,o\,Id_{\mathbb{C}}=Id_{\mathbb{C}}\,o\,f=f$. Ainsi, $Id_{\mathbb{C}}$ est l'élément neutre dans $(G;o)$.
- Enfin, on a pour tout $(z;z')\in\mathbb{C}^2$: $f_{(a;b)}(z)=z'\Leftrightarrow z=\dfrac{z'-b}{a}\Leftrightarrow z=f_{\left(\frac{1}{a};-\frac{b}{a}\right)}(z')$

  On en déduit que tout élément $f_{(a;b)}\in G$ est symétrisable dans $(G;o)$ et son symétrique est :

  $\left(f_{(a;b)}\right)^{-1}=f_{\left(\frac{1}{a};-\frac{b}{a}\right)}\in G$. Par suite, $(G;o)$ a une structure de groupe.

Lorsqu'on doit montrer que $(G;*)$ est un groupe, on commence par se regarder si la loi $*$ est la même que celle d'un exemple usuel $(H;*)$ avec $G\subset H$. Dans ce cas, on montre que G est un sous-groupe de H. Sinon, on vérifie point par point la définition d'un groupe.

B EXEMPLES DE CALCUL DANS UN GROUPE ET DANS UN ANNEAU

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Soit $(G;\bullet)$ un groupe d'élément neutre e.

1) Montrer que si pour tout $(x;y)\in G^2$: $(x\bullet y)\bullet(x\bullet y)=(x\bullet x)\bullet(y\bullet y)$ alors la loi $\bullet$ est commutative dans G.

2) Montrer que si pour tout $x\in G$, $x\bullet x=e$, alors la loi $\bullet$ est commutative dans G.

Partie B :

Soi $(A;*;\top)$ un anneau d'élément neutre e tel que : $(\forall x\in A)\ x\top x=x$.

1) a) Montrer que pour tous x et y de A : $(x*y)\top(x*y)=(x\top y)*(y\top x)*(x*y)$

b) En déduire que pour tous x et y de A : $(y\top x)'=x\top y$ (x' est le symétrique de x dans $(A;*)$).

c) En déduire que pour tout $x\in A$: $x'=x$.

d) En déduire que la loi $\top$ est commutative dans A.

2) Montrer que pour tout $(x;y)\in A^2$: $(x\top y)\top(x*y)=e$

SOLUTION

Partie A :

1) Soit $(x;y)\in G^2$. On a $(x\bullet y)\bullet(x\bullet y)=(x\bullet x)\bullet(y\bullet y)$, donc $x\bullet(y\bullet x)\bullet y=x\bullet(x\bullet y)\bullet y$ car la loi $\bullet$ est associative dans G ; et comme $(G;\bullet)$ un groupe alors tout élément de G est régulier ; il s'ensuit donc $(y\bullet x)\bullet y=(x\bullet y)\bullet y$ car x est régulier puis $y\bullet x=x\bullet y$ car y est régulier.

Par suite, pour tout $(x;y)\in G^2$, $y\bullet x=x\bullet y$, c'est-à-dire que la loi $\bullet$ est commutative dans G.

2) On a pour tout $x\in G$, $x\bullet x=e$; donc pour tout $(x;y)\in G^2$, $(x\bullet y)\bullet(x\bullet y)=e$, c'est-à-dire que $x\bullet(y\bullet x)\bullet y=e$; il s'ensuit donc les implications suivantes :

$$x\bullet(y\bullet x)\bullet y=e\Rightarrow x\bullet(x\bullet(y\bullet x)\bullet y)\bullet y=x\bullet y\Rightarrow(x\bullet x)\bullet(y\bullet x)\bullet(y\bullet y)=x\bullet y\Rightarrow e\bullet(y\bullet x)\bullet e=x\bullet y$$

Par suite, pour tout $(x;y)\in G^2$, $y\bullet x=x\bullet y$, c'est-à-dire que la loi $\bullet$ est commutative dans G.

Partie B :

1) a) Pour tout $(x;y)\in A^2$, on pose : $z=(x\top y)*(y\top x)*(x*y)$. On a :

$z=(x\top y)*(y\top x)*((x\top x)*(y\top y))$ car $x\top x=x$ et $y\top y=y$; et comme la loi $*$ est commutative et associative dans A alors : $z=((x\top y)*(x\top x))*((y\top x)*(y\top y))$. La distributivité de la loi $\top$ par rapport à la loi $*$ donne : $z=(x\top(y*x))*(y\top(x*y))=(x\top(x*y))*(y\top(x*y))=(x*y)\top(x*y)$

Ainsi : $(\forall(x;y)\in A^2)\quad(x*y)\top(x*y)=(x\top y)*(y\top x)*(x*y)$

b) Soit $(x;y)\in A^2$. Pour montrer que $(y\top x)' = x\top y$, il suffit de montrer que $(y\top x)*(x\top y)=e$.

D'après le résultat de la question précédente, on a : $(x*y)\top(x*y)=(x\top y)*(y\top x)*(x*y)$, donc $(x\top y)*(y\top x)*(x*y)=x*y$ car pour tout $z\in A$, $z\top z=z$. Comme $(A;*)$ est un groupe commutatif, alors tout élément de A est régulier ; en particulier $x*y$ est régulier, d'où : $(x\top y)*(y\top x)=e$.

La commutativité de la loi $*$ dans A donne : $(\forall(x;y)\in A^2)\quad (y\top x)'=x\top y$

c) Soit $x\in A$. D'après le résultat de la question précédente, $(x\top x)'=x\top x$; et comme $x\top x=x$ alors $x'=x$.

d) On a pour tout $(x;y)\in A^2$: $(y\top x)'=x\top y$ et $(y\top x)'=y\top x$ (d'après 1) b et c). Il s'ensuit donc que $x\top y=y\top x$. Ainsi, la loi $\top$ est commutative dans A.

2) Montrons que pour tout $(x;y)\in A^2$: $(x\top y)\top(x*y)=e$

Pour tout $(x;y)\in A^2$, on pose : $z=(x\top y)\top(x*y)$. Puisque la loi $\top$ est associative et distributive par rapport à la loi $*$, alors :

$$z=x\top\big(y\top(x*y)\big)=x\top\big((y\top x)*(y\top y)\big)=x\top\big((y\top x)*y\big)=\big(x\top(y\top x)\big)*(x\top y)\quad(\text{car } y\top y=y)$$

Il en résulte de l'égalité $(y\top x)'=x\top y$ et la commutativité de la loi $\top$ que :

$z=\big((x\top x)\top y\big)*(x\top y)=(x\top y)'*(x\top y)=e$. Ainsi : $(\forall(x;y)\in A^2)\ (x\top y)\top(x*y)=e$

C ÉTUDE D'UNE LOI – SOUS-GROUPE – MORPHISME

On définit sur $\mathbb{R}^2$ une loi de composition interne $\top$ comme suit :

Pour tous $(a;b)$ et $(a';b')$ de $\mathbb{R}^2$: $\quad (a;b)\top(a';b')=\left(\frac{1}{3}ab'+\frac{1}{3}ba';\frac{1}{3}bb'-\frac{3}{4}aa'\right)$

1) Étudier les propriétés de la loi $\top$ (commutativité, associativité, existence d'élément neutre).

2) a) Déterminer G l'ensemble des éléments symétrisables dans $(\mathbb{R}^2;\top)$.

b) Montrer que G est une partie stable de $(\mathbb{R}^2;\top)$.

c) Montrer que $(G;\top)$ est un groupe commutatif.

3) On considère l'application f définie de $\mathbb{C}^*$ dans G par :

Pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}$: $f(a+ib)=(2b;3a)$

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(G;\top)$.

b) Retrouver le résultat de la question 2) c).

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n=\underbrace{\left(\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)\top\left(\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)\top\ldots\top\left(\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)}_{n\text{ fois}}$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $Z_n=\left(2\sin\frac{n\pi}{3};\,3\cos\frac{n\pi}{3}\right)$

4) On considère l'ensemble : $S=\{(2\sin x;3\cos x)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$

a) Montrer que $(S;\top)$ est un sous-groupe de $(G;\top)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(2\sin x;3\cos x)\top(2;0)=(0;3)$

SOLUTION

1) Étudions les propriétés de la loi $\top$:

- **La commutativité :** On a pour tous $(a;b)$ et $(a';b')$ de $\mathbb{R}^2$,

$$(a;b)\top(a';b')=\left(\frac{1}{3}ab'+\frac{1}{3}ba';\frac{1}{3}bb'-\frac{3}{4}aa'\right)=\left(\frac{1}{3}a'b+\frac{1}{3}b'a;\frac{1}{3}b'b-\frac{3}{4}a'a\right)=(a';b')\top(a;b)$$

Donc la loi $\top$ est commutative.

- **L'associativité :** On a pour tous $(a;b)$, $(a';b')$ et $(a'';b'')$ de $\mathbb{R}^2$,

$$((a;b)\top(a';b'))\top(a'';b'')=\left(\frac{1}{3}ab'+\frac{1}{3}ba';\frac{1}{3}bb'-\frac{3}{4}aa'\right)\top(a'';b'')$$

$$=\left(\frac{1}{9}ab'b''+\frac{1}{9}ba'b''+\frac{1}{9}bb'a''-\frac{1}{4}aa'a'';\frac{1}{9}bb'b''-\frac{1}{4}aa'b''-\frac{1}{4}ab'a''-\frac{1}{4}ba'a''\right)$$

$$(a;b)\top((a';b')\top(a'';b''))=(a;b)\top\left(\frac{1}{3}a'b''+\frac{1}{3}b'a'';\frac{1}{3}b'b''-\frac{3}{4}a'a''\right)$$

$$=\left(\frac{1}{9}ab'b''-\frac{1}{4}aa'a''+\frac{1}{9}ba'b''+\frac{1}{9}bb'a'';\frac{1}{9}bb'b''-\frac{1}{4}aa'b''-\frac{1}{4}ba'a''-\frac{1}{4}ab'a''\right)$$

D'où : $((a;b)\top(a';b'))\top(a'';b'')=(a;b)\top((a';b')\top(a'';b''))$. Donc la loi $\top$ est associative

- **Existence d'élément neutre :** Cherchons $(e_1;e_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right)\ (a;b)\top(e_1;e_2)=(a;b)$

On a pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^2$:

$$(a;b)\top(e_1;e_2)=(a;b)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}ae_2+\frac{1}{3}be_1;\frac{1}{3}be_2-\frac{3}{4}ae_1\right)=(a;b)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}ae_2+\frac{1}{3}be_1=a\\ \frac{1}{3}be_2-\frac{3}{4}ae_1=b\end{cases}$$

Pour que ce dernier système soit valable pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}$, il faut et il suffit : $(e_1;e_2)=(0;3)$.

On a donc pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}$: $(a;b)\top(0;3)=(0;3)\top(a;b)=(a;b)$.

Donc $(0;3)$ est l'élément neutre pour la loi $\top$.

2) a) Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ un élément symétrisable dans $(\mathbb{R}^2;\top)$; il existe donc $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$(a;b)\top(a';b')=(0;3)$, ce qui conduit au système suivant d'inconnue $(a';b')$: $\begin{cases}\frac{1}{3}ab'+\frac{1}{3}ba'=0\\ \frac{1}{3}bb'-\frac{3}{4}aa'=3\end{cases}$

Le déterminant de ce système est $\Delta = \frac{1}{9}b^2 + \frac{1}{4}a^2$; et on a : $\Delta = 0 \Leftrightarrow (a;b) = (0;0)$

par suite, l'élément $(a;b)$ est symétrisable dans $(\mathbb{R}^2;\top)$ si, et seulement si $(a;b) \neq (0;0)$; et son symétrique est donné par : $(a';b') = \left(\frac{-36a}{9a^2+4b^2};\frac{36b}{9a^2+4b^2}\right)$. Enfin, l'ensemble G est : $G = \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$

b) Montrons que G est une partie stable de $(\mathbb{R}^2;\top)$:

Soit $(a;b)$ et $(a';b')$ deux éléments de G. Montrons que $(a;b)\top(a';b') \neq (0;0)$.

En utilisant un raisonnement par contraposé, on a :

$$(a;b)\top(a';b') = (0;0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}ab' + \frac{1}{3}ba' = 0 \\ \frac{1}{3}bb' - \frac{3}{4}aa' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}abb' + \frac{1}{3}b^2a' = 0 \\ \frac{1}{3}abb' - \frac{3}{4}a^2a' = 0 \\ \frac{3}{4}a^2b' + \frac{3}{4}aba' = 0 \\ \frac{1}{3}b^2b' - \frac{3}{4}aba' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}b^2a' + \frac{3}{4}a^2a' = 0 \\ \frac{1}{3}a^2b' + \frac{3}{4}b^2b' = 0 \end{cases}$$

par conséquent : $(a;b)\top(a';b') = (0;0) \Rightarrow \begin{cases} a'\left(\frac{1}{3}b^2 + \frac{3}{4}a^2\right) = 0 \\ b'\left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{3}{4}b^2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 0 \\ b' = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Par contraposé, on en déduit que : $(a;b)\top(a';b') \neq (0;0)$. Ainsi, G est une partie stable de $(\mathbb{R}^2;\top)$.

c) Montrons que $(G;\top)$ est un groupe commutatif :

- On a G est une partie stable de $(\mathbb{R}^2;\top)$ et la loi $\top$ est commutative et associative dans $\mathbb{R}^2$, donc elle en est de même dans G.
- Puisque $(0;3)$ est l'élément neutre dans $(\mathbb{R}^2;\top)$ et G est une partie stable de $(\mathbb{R}^2;\top)$ et $(0;3) \in G$, alors $(0;3)$ est l'élément neutre dans $(G;\top)$.
- Tout élément $(a;b) \in G$ est symétrisable dans $(\mathbb{R}^2;\top)$ et a pour symétrique $\left(\frac{-36a}{9a^2+4b^2};\frac{36b}{9a^2+4b^2}\right)$ qui est un élément de G (car $(a;b) \neq (0;0)$)

En résumé, $(G;\top)$ est un groupe commutatif.

3) Soit f l'application définie de $\mathbb{C}^*$ dans G par : Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$ $f(a+ib) = (2b;3a)$

a) On a pour tous $(a;b)$ et $(a';b')$ de $\mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$:

$$f((a+ib)(a'+ib')) = f(aa'-bb'+i(ab'+ba')) = (aa'-bb';\ ab'+ba')$$

D'autre part :

$$f(a+ib)\top f(a'+ib')=(2b;3a)\top(2b';3a')=\left(\frac{1}{3}(2b)(3a')+\frac{1}{3}(3a)(2b')\,;\,\frac{1}{3}(3a)(3a')-\frac{3}{4}(2b)(2b')\right)$$

Il s'ensuit donc que : $f\big((a+ib)(a'+ib')\big)=(aa'-bb';\,ab'+ba')=f(a+ib)\top f(a'+ib')$.

c'est-à-dire que f est un morphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(G;\top)$.

Soit maintenant $(a;b)\in G$. Résolvons l'équation $f(z)=(a;b)$ dans $\mathbb{C}^*$. On pose $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}$. On a :

$$f(z)=(a;b)\Leftrightarrow f(x+iy)=(a;b)\Leftrightarrow(2y;3x)=(a;b)\Leftrightarrow\left(x=\frac{b}{3}\text{ et }y=\frac{a}{2}\right)$$

Ainsi, l'équation $f(z)=(a;b)$ admet une solution unique dans $\mathbb{C}^*$ qui est $z=\frac{b}{3}+\frac{a}{2}i$.

Enfin f est bijective et donc c'est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(G;\top)$.

b) On a f est isomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(G;\top)$ et $(\mathbb{C}^*;\times)$ est un groupe commutatif, donc $(G;\top)$ est aussi un groupe commutatif.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n=\underbrace{\left(\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)\top\left(\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)\top\ldots\top\left(\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)}_{n\text{ fois}}$

On a $\left(\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc : $Z_n=\underbrace{f\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\top f\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\top\ldots\top f\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{n\text{ fois}}$

Et comme f est un morphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(G;\top)$ alors :

$$Z_n=f\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n\right)=f\left(e^{i\frac{n\pi}{3}}\right)=f\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)=\left(2\sin\frac{n\pi}{3};\,3\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

D'où le résultat souhaité.

4) On considère l'ensemble : $S=\{(2\sin x;3\cos x)\,/\,x\in\mathbb{R}\}$

a) Montrons que $(S;\top)$ est un sous-groupe de $(G;\top)$:

- On a S est une partie non vide de G car $(0;3)\in S$ et pour tout $x\in S$: $(2\sin x;3\cos x)\neq(0;0)$.
- Soit $(2\sin x;3\cos x)$ et $(2\sin y;3\cos y)$ deux éléments de S (où $(x;y)\in\mathbb{R}^2$). Le symétrique de $(2\sin y;3\cos y)$ étant le couple $(a;b)$ avec :

$$a=\frac{-36(2\sin y)}{9(4\sin^2 y)+4(9\cos^2 y)}=-2\sin y\quad\text{et}\quad b=\frac{36(3\cos y)}{9(4\sin^2 y)+4(9\cos^2 y)}=3\cos y$$

Et on a :

$$\begin{aligned}(2\sin x;3\cos x)\top(-2\sin y;3\cos y)&=\big(2(\sin x\cos y-\cos x\sin y);3(\cos x\cos y-\sin x\sin y)\big)\\&=\big(2\sin(x-y);3\cos(x-y)\big)\end{aligned}$$

D'où, $(2\sin x;3\cos x)\top(-2\sin y;3\cos y)\in S$. Ainsi, $(S;\top)$ est un sous-groupe de $(G;\top)$.

b) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(2\sin x;3\cos x)\top(2;0)=(0;3)$

$$(2\sin x;3\cos x)\top(2;0)=(0;3) \Leftrightarrow (2\cos x;-3\sin x)=(0;3) \Leftrightarrow (\cos x=0 \text{ et } \sin x=-1)$$

D'où : $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Ainsi, l'ensemble solution est : $S=\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \;/ k\in\mathbb{Z}\right\}$

- Pour montrer qu'une loi de composition interne est commutative, ou est associative, ou admet un neutre, ou que certains éléments admettent un symétrique, il suffit de revenir aux définitions et les appliquer.
- Pour montrer que H est un sous-groupe de $(G;*)$, il suffit de démontrer que :
  - H est une partie non vide de G (pour $H\neq\varnothing$, on prouve en général que l'élément neutre de G est un élément de H) ;
  - pour tout $(x;y)\in H^2$: (x' est le symétrique de x dans $(G;*)$

    ($x*y\in H$ et $x'\in H$)   ou bien   ($x*y'\in H$)
- Pour démontrer que $(G;*)$ est un groupe, il suffit de montrer que G est un sous-groupe d'un groupe $(G';*)$ connu.

D TRANSFERT DE LA STRUCTURE DE GROUPE

Soit G et H deux ensembles non vides et f une bijection de G dans H. On munit G d'une loi de composition interne $*$ et on pose pour tout $(x;y)\in H^2$: $x\top y=f\left(f^{-1}(x)*f^{-1}(y)\right)$

1) Montrer que $\top$ est une loi de composition interne définie sur H.

2) Montrer que f est un isomorphisme de $(G;*)$ dans $(H;\top)$.

3) Montrer que pour tout $(x;y)\in G^2$: $x*y=f^{-1}\left(f(x)\top f(y)\right)$.

4) En déduire que les lois $*$ et $\top$ ont les mêmes propriétés.
   Que peut-on déduire si $(G;*)$ est un groupe commutatif ?

5) **Applications :** Dans chacun des cas suivants, montrer que $(H;\top)$ est un groupe commutatif :

   a) $H=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et la loi $\top$ est définie par : $\left(\forall(x;y)\in H^2\right)$ $x\top y=\operatorname{Arctan}\left(\tan(x)+\tan(y)\right)$

   b) $H=\mathbb{R}_+^*-\{1\}$ et la loi $\top$ est définie par : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2\right)$ $x\top y=e^{\ln(x).\ln(y)}$.

   c) $H=]0;1[$ et la loi $\top$ est définie par : $\left(\forall(x;y)\in(]0;1[)^2\right)$ $x\top y=e^{-\ln(x).\ln(y)}$.

   d) $H=]a;+\infty[$ et la loi $\top$ est définie par : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right)$ $x\top y=(x-a)(y-a)+a$ (ici $a\in\mathbb{R}$)

6) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit sur $\mathbb{C}$ les deux lois de composition interne $\oplus$ et $\otimes$ par :

$$(\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2) : z \oplus z' = z + z' - \alpha \quad \text{et} \quad z \otimes z' = \alpha z + \alpha z' - z.z' - \alpha^2 + \alpha^2$$

En considérant l'application f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = -z + \alpha$, montrer que $(\mathbb{C};\oplus;\otimes)$ est un corps commutatif

SOLUTION

1) Montrons que $\top$ est une loi de composition interne définie sur H :

Soit $(x;y) \in H^2$. Puisque f une bijection de G dans H, alors, en notant f^{-1} sa bijection réciproque, on aura $f^{-1}(x) \in G$ et $f^{-1}(y) \in G$. Puisque la loi $*$ est interne dans G, alors $f^{-1}(x) * f^{-1}(y) \in G$; donc $f\left(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\right) \in H$. Ainsi, $\top$ est une loi de composition interne définie sur H.

2) Montrons que f est un isomorphisme de $(G;*)$ dans $(H;\top)$:

On sait que f est une bijection de G dans H. Il suffit donc de montrer que f est un morphisme.

On a pour tout $(x;y) \in G^2$: $f(x*y) = f\left(f^{-1}(f(x)) * f^{-1}(f(y))\right) = f(x) \top f(y)$

Il s'ensuit donc que f est un isomorphisme de $(G;*)$ dans $(H;\top)$.

3) Montrer que pour tout $(x;y) \in G^2$: $x * y = f^{-1}\left(f(x) \top f(y)\right)$

Soit $(x;y) \in G^2$. On a déjà vu dans la question 3) : $f(x*y) = f(x) \top f(y)$; ceci entraîne immédiatement : $x * y = f^{-1}\left(f(x*y)\right) = f^{-1}\left(f(x) \top f(y)\right)$. D'où le résultat souhaité.

4) Puisque f est un isomorphisme de $(G;*)$ dans $(H;\top)$, le cours nous enseigne que $(G;*)$ et $(H;\top)$ ont la même structure et donc les lois $*$ et $\top$ ont les mêmes propriétés.

Si $(G;*)$ est un groupe commutatif, il en est de même pour $(H;\top)$.

5) Montrons que $(H;\top)$ est un groupe commutatif :

a) On sait que Arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et que $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif ; donc $\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[;\top\right)$ est un groupe commutatif.

b) On sait que exp est une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $H = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et que $(\mathbb{R}^*;\times)$ est un groupe commutatif ; donc $(\mathbb{R}_+^* - \{1\};\top)$ est un groupe commutatif.

c) On sait que $x \mapsto e^{-x}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0;1[$ et que $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ est un groupe commutatif ; donc $(]0;1[;\top)$ est un groupe commutatif.

d) On sait que $x \mapsto x + a$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans l'intervalle $]a;+\infty[$ et que $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ est un groupe commutatif ; donc $(]a;+\infty[;\top)$ est un groupe commutatif.

6) L'application f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z)=-z+\alpha$ étant bijective et sa bijection réciproque est f elle-même. On a de plus : $\left(\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2\right)\ z\oplus z'=z+z'-\alpha=f\left(f^{-1}(z)+f^{-1}(z')\right)$

Puisque $(\mathbb{C};+)$ est un groupe commutatif, alors $(\mathbb{C};\oplus)$ est aussi un groupe commutatif.

On a aussi : $\left(\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2\right)\ z\otimes z'=\alpha z+\alpha z'-z.z'-\alpha^2+\alpha^2 z+z'-\alpha=f\left(f^{-1}(z)\times f^{-1}(z')\right)$

On en déduit alors que les lois $\times$ et $\otimes$ ont les mêmes propriétés (commutativité, associativité, existence d'un élément neutre pour $\otimes$ qui est $f(1)=\alpha-1$ et tout élément différent de α est symétrisable dans $(\mathbb{C};\otimes)$).

De plus, pour tout $(z;z';z'')\in\mathbb{C}^3$: $z\otimes(z'\oplus z'')=f\left(f^{-1}(z)\times f^{-1}(z'\oplus z'')\right)$

donc : $z\otimes(z'\oplus z'')=f\left(f^{-1}(z)\times f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(z')+f^{-1}(z'')\right)\right)\right)=f\left(f^{-1}(z)\times\left(f^{-1}(z')+f^{-1}(z'')\right)\right)$

Par suite : $z\otimes(z'\oplus z'')=f\left(f^{-1}(z\otimes z')+f^{-1}(z\otimes z'')\right)=(z\otimes z')\oplus(z\otimes z'')$, ce qui montre bien que $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$ dans $\mathbb{C}$. Ainsi, $(\mathbb{C};\oplus;\otimes)$ est un corps commutatif.

- Pour montrer que $(A;+;\times)$ est un anneau unitaire, $+$ et $\times$ étant des lois de composition interne sur A, on applique la définition vue dans le cours, c'est-à-dire que l'on montre :
  - $(A;+)$ est un groupe commutatif (en général, il suffit pour cela de montrer que A est un sous-groupe d'un groupe commutatif $(A';+)$;
  - La loi $\times$ admet un élément neutre (appartenant à A) ;
  - La loi $\times$ est associative et distributive par rapport à la loi $+$.

  Pour le dernier point, on peut noter que si $+$ et $\times$ sont des lois de composition internes sur un ensemble A' telles que $\times$ est associative et distributive par rapport à la loi $+$ et A est une partie de A' stable pour les lois $+$ et $\times$, alors dans A la loi induite par $\times$ est également associative et distributive par rapport à la loi
- Pour montrer qu'un anneau n'est pas un corps, il suffit de trouver un élément non nul et non inversible dans cet anneau.
- Pour démontrer qu'un anneau $(A;+;\times)$ n'est pas intègre, il suffit de trouver deux éléments X et Y de A tels que : $X\neq O$ et $Y\neq O$ et $X\times Y=O$, où O représente l'élément neutre pour la loi $+$.
- Pour montrer que $(K;+;\times)$ est un corps, on applique la définition, c'est-à-dire que l'on montre que $(K;+;\times)$ est un anneau unitaire non réduit à $\{0_k\}$ et que tout élément $x\in K-\{0_k\}$ possède un symétrique (appartenant à K) pour la loi $\times$.

  On peut aussi utiliser dans quelques situations montrer les trois axiomes suivants:
  - $(K;+)$ est un groupe commutatif.
  - $(K-\{0_K\};\times)$ est un groupe.
  - La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$.

EXERCICES D'APPLICATION

GROUPE – MORPHISME DE GROUPES

EXERCICE 01

Soit : $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x^2-y^2=1\}$

Pour tout $(x;y)\in E$ et $(x';y')\in E$, on pose :

$$(x;y)\top(x';y')=(xx'+yy';\; xy'+yx')$$

1) Montrer que $\top$ est une loi de composition interne dans E.

2) Montrer que $(E;\top)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 02

On considère l'intervalle $I=]-1;1[$ de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que : $(\forall(a;b)\in I^2)\quad -1<\dfrac{a+b}{1+ab}<1$

2) On définit sur I une loi de composition interne $*$ comme suit : $(\forall(a;b)\in I^2)\quad a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$

Montrer que $(I;*)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 03

On définit sur l'ensemble $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ une loi de composition interne comme suit :

$$(a;b)*(c;d)=(ac;bc+d)$$

1) Montrer que $(G;*)$ est un groupe.

2) On considère l'ensemble :
$$H=\{(1;x)\in G \;/\; x\in\mathbb{R}\}$$

Montrer que H est un sous-groupe de $(G;*)$.

EXERCICE 04

On considère l'ensemble $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. On définit sur E une loi de composition interne $*$ comme suit :

Pour tous $(x;y)$ et $(z;t)$ de E :

$$(x;y)*(z;t)=(xz;\; xt+z^n y)$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Montrer que $(E;*)$ est un groupe non commutatif.

EXERCICE 05

Soit $(G;*)$ un groupe d'élément neutre e.

On note a^{-1} le symétrique de a.

On considère l'application f définie de G dans G par :

$$f(a)=a^{-1}$$

Montrer que f est un isomorphisme si, et seulement si, le groupe $(G;*)$ est commutatif.

EXERCICE 06

On considère l'ensemble :

$$E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ -x & 1 & -\dfrac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \;/\; x\in\mathbb{R}\right\}$$

1) Calculer $M(x)\times M(x')$ pour tout $(x;x')\in\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $(E;\times)$ est un groupe.

EXERCICE 07

$(E;*)$ est un groupe d'élément neutre e.

Pour un élément $a\in E$ donné $(a\neq e)$, on définit la loi $\top$ sur E par : $(\forall(x;y)\in E^2)\quad x\top y=x*y*a$

Montrer que $(E;\top)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 08

Soit $(G;*)$ un groupe d'élément neutre e.

On note a^{-1} le symétrique de a. Soit H un sous-groupe de $(G;*)$ et $n\in G$ (n donné). Montrer que l'ensemble $H_n=\{n*h*n^{-1}\}$ est un sous-groupe de $(G;*)$.

EXERCICE 10

Soit p et q deux nombres premiers positifs distincts.

Montrer que : $H = \{p^m q^n \ / \ (m;n) \in \mathbb{Z}^2\}$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^* ; \times)$.

EXERCICE 11

Soit f un morphisme de groupe $(G;\top)$ dans un groupe $(G';\perp)$. Soit H' un sous-groupe de $(G';\perp)$.

Montrer que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $(G;\top)$.

EXERCICE 12

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ comme suit : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2) \quad x * y = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$

et on considère l'application s définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

par : $$s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1) Montrer que s est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(\mathbb{R};*)$.

2) En déduire la structure de $(\mathbb{R};*)$ en déterminant son élément neutre et le symétrique de tout élément dans $(\mathbb{R};*)$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \geq 2$, on pose :
$$x^{(n)} = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ fois}}$$
Calculer $x^{(n)}$.

EXERCICE 13

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on considère l'application φ_a définie par :
$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(x;y) & \mapsto & M'(x';y') \end{array}$$
avec : $x' = x + \ln a$ et $y' = ay$

On considère l'ensemble : $F = \{\varphi_a \ / a \in \mathbb{R}_+^*\}$

1) Montrer que la composition des applications « o » est une loi de composition interne dans F.

2) On considère l'application :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & F \\ a & \mapsto & \varphi_a \end{array}$$
a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^* ; \times)$ dans $(F;o)$.

b) En déduire la structure de $(F;o)$.

c) Déterminer le symétrique de φ_a dans $(F;o)$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 15

On considère l'ensemble : $E = \left\{\dfrac{1+2p}{1+2q} \ / \ (p;q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$

Montrer que $(E;\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q};\times)$.

EXERCICE 16

1) Soit A, J et I les trois matrices carrées d'ordre 2 définies par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
a) Déterminer $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $A = aJ + bI$

b) Calculer J^2 en fonction de J.

c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation suivante :
$$A^n = (-2)^n I + \frac{1}{2}\left(4^n - (-2)^n\right)J$$
d) Donner l'expression explicite de A^n sous forme d'une matrice carrée d'ordre 2.

e) Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

2) On note (v_n) et (w_n) les deux suites définies par : $v_0 = 3$, $w_0 = 3$ et les relations suivantes : $(n \in \mathbb{N})$
$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + 3w_n \\ w_{n+1} = 3v_n + w_n \end{cases} \text{ et on pose : } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ X_n = A^n X_0$

b) En déduire l'expression de X_n en fonction de n.

c) Calculer les valeurs de v_n et w_n en fonction de n.

ANNEAU ET CORPS

EXERCICE 17

Soit T et $\perp$ deux lois de composition interne dans $\mathbb{R}$ définies par : Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x \perp y = 2y - x \quad \text{et} \quad x \mathrm{T} y = \frac{1}{2}(x+y)$$

1) Étudier les propriétés des lois T et $\perp$.

2) a) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $\perp$.

b) Montrer que la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi T.

EXERCICE 18

On définit sur $\mathbb{R}^2$ deux lois de composition interne $+$ et $\times$ comme suit : Pour tous $(a;b)$ et $(a';b')$ de $\mathbb{R}^2$,

$$(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')$$

$$(a;b)\times(a';b')=(aa';\, ab'+ba')$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

EXERCICE 19

On définit sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ deux lois de composition interne T et $*$ comme suit : Pour tout $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$x \mathrm{T} y = x+y+3 \quad \text{et} \quad x * y = xy+3x+3y+6$$

1) Montrer que $(\mathbb{Z};\mathrm{T})$ est un groupe commutatif.

2) Montrer que $(\mathbb{Z};\mathrm{T};*)$ est un anneau commutatif.

EXERCICE 20

On munit $\mathbb{Z}^2$ de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ comme suit : Pour tous $(a;b)$ et $(a';b')$ de $\mathbb{Z}^2$,

$$(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')$$

$$(a;b)\times(a';b')=(aa'+2bb';\, ab'+ba')$$

Montrer que $(\mathbb{Z}^2;+;\times)$ est un anneau commutatif.

EXERCICE 21

Soit $(A;+;\times)$ un anneau unitaire.

On définit sur A une loi de composition interne T comme suit : $(\forall (x;y) \in A^2) \quad x \mathrm{T} y = xy - yx$

1) Montrer que : $(\forall (x;y) \in A^2) \quad x \mathrm{T} y = -(y \mathrm{T} x)$

2) Montrer que la loi T n'est pas associative.

3) Montrer que $(A;\mathrm{T})$ n'admet pas d'élément neutre.

4) Montrer que T est distributive par rapport à la loi ...

5) Montrer que pour tout $(x;y;z) \in A^3$:

$$x \mathrm{T} (y \mathrm{T} z) + y \mathrm{T} (z \mathrm{T} x) + z \mathrm{T} (x \mathrm{T} y) = 0$$

et que : $y \mathrm{T} (x \mathrm{T} z) = x \mathrm{T} (y \mathrm{T} z) - (x \mathrm{T} y) \mathrm{T} z$

EXERCICE 22

Soit $(A;+;\times)$ un anneau unitaire tel que pour tout $x \in A$, $x^{12} = x$. On note 0_A le zéro de A et 1_A son élément unité.

1) Montrer que : $(\forall x \in A) \quad x = -x$

2) Montrer que : $(\forall x \in A) \quad x^8 + x^4 = 0_A$.

(Remarquer que : $(x+1_A)^{12} = x + 1_A$)

3) Montrer que : $(\forall x \in A) \quad x^2 = x$

EXERCICE 23

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} \,/\, (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

1) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif.

2) Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$. Montrer que :

$$a^2 - 7b^2 = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

3) Montrer que l'anneau $(E;+;\times)$ est intègre.

EXERCICE 24

On considère l'ensemble :

$$K = \left\{ a + b\sqrt{5} \,/\, a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \in \mathbb{Q} \right\}$$

Montrer que $(K;+;\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 25

On considère l'ensemble $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = \overline{2}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est vide.

2) On considère l'ensemble $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

On munit A des deux lois de composition interne :

$$(x_1;y_1)\oplus(x_1;y_1)=(x_1+x_2\,;\,y_1+y_2)$$

$$(x_1;y_1)\otimes(x_1;y_1)=(x_1x_2+2y_1y_2\,;\,x_1y_2+x_2y_1)$$

Montrer que $(A;\oplus;\otimes)$ est un anneau commutatif.

3) Soit $B = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\times\{\overline{0}\}$. Trouver un morphisme de B dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\,;+\,;\times)$.

EXERCICE 26

On considère l'ensemble :

$$E=\left\{M(x;y)=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x+y \end{pmatrix} / (x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1) Montrer que E est une partie stable pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif

L'anneau $(E;+;\times)$ est-il intègre ? Justifier

3) Montrer que $(E;+;\times)$ est un corps commutatif.

4) Résoudre dans E l'équation : $-X^2+4X-3I=0$

EXERCICE 27

On définit sur l'ensemble $\mathbb{C}$ une loi de composition interne $*$ comme suit :

$$(\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2)\quad z*z'=z-z'-i$$

1) Montrer que $(\mathbb{C};*)$ est un groupe commutatif.

2) Soit $m\in\mathbb{C}^*$. On définit sur $\mathbb{C}$ une loi de composition interne $\top$ comme suit :

$$(\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2)\ z\top z'=mizz'+m(z+z')+i(1-m)$$

a) Montrer que $\top$ est commutative et distributive par rapport à la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

b) Montrer que $(\mathbb{C};*;\top)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 28

On considère l'ensemble :

$$K=\left\{M(x;y)=\begin{pmatrix} x & x \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} / (x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Montrer que $(K;+;\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 29

On considère l'ensemble :

$$L=\left\{\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2x & x & y \\ 2y & 2z & x \end{pmatrix} / (x;y;z)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Montrer que $(L;+;\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 30

Soit $(A;+;\times)$ un anneau unitaire d'élément unité 1.

Soit $(a;b)\in A^2$ tel que $1-ab$ admet un inverse dans A .

1) Calculer $(1+bca)(1-ba)$ et $(1-ba)(1+bca)$ pour tout $c\in A$.

2) En déduire que $1-ba$ est inversible dans A et que son inverse : $(1-ba)^{-1}=1+b(1-ab)^{-1}a$

EXERCICE 31

On considère l'ensemble : $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib/(a;b)\in\mathbb{Z}^2\}$

1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est une partie stable de $(\mathbb{C};+)$ et de $(\mathbb{C};\times)$.

2) Montrer que $(\mathbb{Z}[i];\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments inversibles dans $(\mathbb{Z}[i]\,;\times)$. On pose : $(\forall z\in\mathbb{C})\ N(z)=z\times\overline{z}=|z|^2$

a) Soit $x\in\mathbb{Z}[i]$. Montrer que : $x\in\mathcal{U}\Leftrightarrow N(x)=1$

b) En déduire que : $\mathcal{U}=\{1;-1;i\,;-i\}$

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 32

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\ ;\ I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1) Calculer B^2 et B^n pour tout entier $n\geq 2$.

2) a) Exprimer A en fonction de I et B.

b) En déduire A^n en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 33

On considère les deux matrices suivantes : $(a\in\mathbb{R}^*)$

$$D=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad N=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

1) a) Calculer N^2 et N^3.

b) Vérifier que : $ND=DN$

2) On considère la matrice : $A=N+D$

Exprimer A^n en fonction de a et n. $(n\in\mathbb{N}^*)$

EXERCICE 34

On considère dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble suivant :

$$G=\left\{M=\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}\ /\ (x;y;z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

1) Montrer que G est stable dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

2) Montrer que $(G;\times)$ est un groupe.

3) Déterminer l'ensemble C défini par :

$$C=\{A\in G\ /\ \forall M\in G;\ AM=MA\}$$

EXERCICE 35

Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G;*)$.

Montrer que : $H\cup G$ est un sous-groupe de $(G;*)$ si, et seulement si : $H\subset G$ ou $G\subset H$

EXERCICE 36

Soit K un ensemble fini tel que $(K;+;\times)$ est un co[...] commutatif. On pose : $K^*=K-\{0\}$

Montrer que : $\prod_{x\in K^*} x=-1$

EXERCICE 37

Soit $(G;*)$ un groupe d'élément neutre e.

Pour tout $x\in G$, on note $x^2=x*x$ et x' le symétri[...] le symétrique de x dans $(G;*)$

Montrer que si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

C₁) $(\forall(a;b)\in G^2)\ \ (a*b)^2=a^2*b^2$.

C₂) $(\forall a\in G)\ \ a^2=e$.

C₃) $(\forall a\in G)\ \ a'=a$.

alors le groupe $(G;*)$ est commutatif.

EXERCICE 38

On considère l'ensemble :

$$E=\left\{M_a=\begin{pmatrix}2^a&0\\a2^a&2^a\end{pmatrix}\ /\ a\in\mathbb{Z}\right\}$$

1) Montrer que $(E;\times)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{Z};+)$.

2) Montrer que pour tout $p\in\mathbb{Z}$: $(M_a)^p=M_{ap}$

3) Soit $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$ et on considère l'ensemble :

$$F_{(a;b)}=\{(M_a)^p\times(M_b)^q\ /\ (p;q)\in\mathbb{Z}^2\}$$

a) Montrer que $F_{(a;b)}$ est un sous-groupe de $(E;\times)$

b) Soit $c\in\mathbb{Z}$. Montrer que :

$$M_c\in F_{(a;b)}\Leftrightarrow(c\ divise\ a\wedge b)$$

c) En déduire que : $F_{(a;b)}=E\Leftrightarrow a\wedge b=1$

EXERCICE 39

On considère l'ensemble E définie par :

$$E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} x & 0 \\ x\ln x & x \end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$$

et on considère l'application ψ définie par :

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}_+^* &\to E \\ x &\mapsto M(x)\end{aligned}$$

1) Montrer que ψ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^* ; \times)$ dans $(E ;\times)$.

2) Quelle est la structure de $(E ;\times)$?

3) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

Calculer les matrices : $(M(x))^{-1}$ et $(M(x))^n$

EXERCICE 40

Soit I et J les deux matrices de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ données :

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J=\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } p\in\mathbb{R}$$

On considère l'ensemble :

$$E=\left\{M(x;y)=\begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix} / (x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1) Vérifier que $J^2 = pI$ puis montrer que $(E;+;\times)$ est est un anneau commutatif unitaire.

2) On suppose que $p<0$ et on pose : $E^* = E-\{O\}$

On considère l'application φ de E^* dans $\mathbb{C}^*$ définie par :

$$(\forall M(x;y)\in E^*)\ \varphi(M(x;y)) = x+iy\sqrt{-p}$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(E^*;\times)$ dans $(\mathbb{C}^*;\times)$.

b) Quelle est la structure de $(E^*;\times)$?

c) Développer $\left(\sqrt{-p}+i\right)^2$ puis en déduire les solutions dans E^* de l'équation : $X^2=(-p-1)I+2J$

EXERCICE 41

On définit sur $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ une loi de composition interne $*$ comme suit :

$$(x;y)*(x';y')=\left(xx' ; \frac{y'}{x}+x'y\right)$$

1) Montrer que $(E;*)$ est un groupe.

Le groupe $(E;*)$ est-il commutatif ? Justifier.

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ et on pose :

$$\Gamma(f)=\{(x;f(x)) / x\in\mathbb{R}^*\}$$

a) Montrer que $\Gamma(f)$ est une partie stable de $(E;*)$ si, et seulement si :

$$\left(\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^*)^2\right)\ f(xy)=\frac{1}{x}f(y)+yf(x)$$

b) Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_k(x)=k\left(x-\frac{1}{x}\right) \qquad \text{où } k\in\mathbb{R}$$

Montrer que $(\Gamma(f_k) ; *)$ est un sous-groupe de $(E;*)$.

c) Montrer que si $\Gamma(f)$ est stable de $(E;*)$, alors :

$$\left(\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^*)^2\right)\ \left(y-\frac{1}{y}\right)f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)f(y)$$

d) Montrer que $(\Gamma(f) ; *)$ est un sous-groupe de $(E;*)$ si, et seulement si : $(\exists k\in\mathbb{R})\ f=f_k$

EXERCICE 42

On considère l'ensemble F définie par :

$$F=\left\{\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} / (x;y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$$

1) Montrer que $(F;+)$ est un groupe commutatif.

2) Montrer que $(F;+;\times)$ est un anneau unitaire.

3) a) Soit $(x;y)\in\mathbb{Q}^2$. Montrer l'équivalence suivante :

$$x^2=2y^2 \Leftrightarrow x=y=0$$

b) Montrer que $(F;+;\times)$ est un corps commutatif.

c) Résoudre dans F l'équation suivante :

$$(X \in F) \; ; \; X^2 - 4X + 3I = O$$

(O est la matrice nulle et I est la matrice identité)

EXERCICE 43

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que :

$$a = re^{i\theta} \text{ avec : } |a| = r \text{ et } \alpha \neq k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$$

Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$M(x;y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -r^2 y & x + 2ry\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Soit E l'ensemble : $E = \{M(x;y) \,/\, (x;y) \in \mathbb{R}^2\}$

1) a) Montrer que $(E;+)$ est un groupe commutatif.

b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un corps commutatif.

2) a) Montrer que :

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\exists!(x;y) \in \mathbb{R}^2) \; / \; z = x + ay$$

On pose donc : $M(x;y) = M(z)$

b) Soit φ l'application définie de $\mathbb{C}$ dans E par :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \; \varphi(z) = M(z)$$

Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C};\times)$ dans $(E;\times)$.

c) Calculer $(\varphi(a))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 44

Partie A :

Soit $(G;*)$ un groupe commutatif et f une bijection de G dans un ensemble H. On considère la loi de composition interne $\top$ définie sur H par :

$$(\forall (x;y) \in H^2) \; x \top y = f\left(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\right)$$

1) Montrer que f est un isomorphisme de $(G;*)$ dans $(H;\top)$.

2) En déduire la structure de $(H;\top)$.

Partie B :

Soit a un réel et g la bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; g(x) = x + a$$

1) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2) \; x * y = x + y - a$

a) Montrer que $(\mathbb{R};*)$ un groupe commutatif.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha * \alpha * \ldots * \alpha}_{n \text{ fois}}$$

Calculer α^n en fonction de n.

3) Soit $\top$ la loi de composition interne définie sur $E = \mathbb{R} - \{a\}$ par :

$$(\forall (x;y) \in E^2) \; x \top y = (x-a)(y-a) + a$$

a) Montrer que $(E;\top)$ est un groupe commutatif et déterminer son élément neutre.

b) Soit $\beta \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\beta^n = \underbrace{\beta \top \beta \top \ldots \top \beta}_{n \text{ fois}}$$

Calculer β^n en fonction de n.

Partie C :

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $I =]-m;m[$ et on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; f_m(x) = m\left(\frac{e^{2mx} - 1}{e^{2mx} + 1}\right)$$

1) Montrer que f_m est bijective de $\mathbb{R}$ dans I.

2) Déterminer $f_m^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

3) Calculer $f_m\left(f_m^{-1}(x) + f_m^{-1}(y)\right)$ pour tout $(x;y) \in$

4) Pour tout $(x;y) \in I^2$, on pose :

$$x * y = \frac{m^2(x+y)}{m^2 + xy}$$

Montrer que $(I;*)$ est un groupe commutatif.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Les parties A) , B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

On définit sur l'ensemble $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ une loi de composition interne comme suit :

Pour tous $(a;b)$ et $(c;d)$ de G :

$$(a;b)*(c;d) = (ac;ad+b)$$

1) Montrer que $*$ est associative dans G.
La loi $*$ est-elle commutative ?

2) Montrer que $(G;*)$ est un groupe.

3) On pose :

$$H = \{(x;0)/x \in \mathbb{R}^*\} \quad \text{et} \quad K = \{(1;x)/x \in \mathbb{R}\}$$

a) Montrer que H et K sont des parties dans $(G;*)$.

b) Montrer que $(H;*)$ et $(K;*)$ sont des groupes commutatifs.

c) $*$ est-elle une loi de composition interne sur $H \cup K$? Justifier

4) On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / (a;b) \in G \right\}$$

a) Montrer que E est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

b) Montrer que $(E;\times)$ est un groupe.

Partie B :

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(a;b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

et on pose : $J = M(1;0)$ et $L = M(0;1)$

1) Montrer que $(E;+)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$ des matrices carrées d'ordre 2.

2) a) Calculer : L^2 ; J^2 ; JL ; LJ.

b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif.

3) a) Déterminer les diviseurs de zéro dans l'anneau $(E;+;\times)$.

b) L'anneau $(E;+;\times)$ est-il intègre ? Est-il un corps ?

4) Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(M(a;b))^n = 2^{n-1} M(a^n;b^n)$$

Partie C :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit sur l'ensemble $E = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\alpha}\right\}$ une loi de composition interne $*$ comme suit :

$$(\forall (x;y) \in E^2) \quad x*y = x+y-\alpha xy$$

On considère l'application f définie de E sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1-\alpha x$$

1) a) Montrer que f est un isomorphisme de $(E;*)$ dans $(\mathbb{R}^*;*)$.

b) En déduire la structure de $(E;*)$ en déterminant son élément neutre e.

2) On note par x^{-1} le symétrique de x dans $(E;*)$.

On pose :

$$x^0 = e \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x^n = \underbrace{x*x*\ldots*x}_{n\ fois}$$

$$\text{et} \ (\forall n \in \mathbb{Z}^-) \quad x^n = (x^{-1})^{-n}$$

On admet qu'on a pour tout $(m;n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$x^n * x^m = x^{n+m} \quad \text{et} \quad (x*y)^n = x^n * y^n$$

On pose enfin : $G = \{x^n / n \in \mathbb{Z}\}$ où $x \in E$

a) Montrer que : $G = \left\{ \frac{1}{\alpha}\left(1-(1-\alpha x)^n\right) / n \in \mathbb{Z} \right\}$

b) Montrer que G est un sous-groupe de $(E;*)$.

DEVOIR 2

Les parties A) , B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

Pour tous $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ de $\mathbb{C}$ avec x, y, x' et y' de $\mathbb{R}$, on pose : $z \top z' = xx' + i(xy' + yx')$

1) Étudier les propriétés de de la loi de composition interne $*$ dans $\mathbb{C}$:
(commutativité – associativité – élément neutre)

2) a) Déterminer l'ensemble G des éléments symétrisables dans $(\mathbb{C};\top)$.
b) Montrer que G est une partie stable de $(\mathbb{C};\top)$ puis que $(G;\top)$ est un groupe commutatif.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z = x + iy$ un élément de $\mathbb{C}$.
a) Montrer que pour tout $\alpha \in]1;+\infty[$:
$$1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + ... + n\alpha^{n-1} = \frac{n\alpha^{n+1} - (n+1)\alpha^n + 1}{(\alpha-1)^2}$$
b) Écrire $u_n = \underbrace{z \top z \top ... \top z}_{n\ fois}$ en fonction de x, y et n puis calculer $\sum_{n=1}^{2012} u_n$.

4) On pose : $S = \{x + ix\ln x \ / \ x \in \mathbb{R}_+^*\}$
a) Montrer que $(S;\top)$ est un sous-groupe de $(G;\top)$.
b) Résoudre dans S l'équation :
$$z \top (2 + i(2\ln 2)) = 3 + i(3\ln 3)$$

5) On considère l'ensemble :
$$E = \left\{ M_z = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} / z = x + iy \in G \right\}$$
a) Montrer que E est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.
b) En utilisant un morphisme convenable, étudier les propriétés de $(E;\times)$.
c) Calculer M_z^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe pour lesquels :
$$z \in G \quad \text{et} \quad (z + 1 + i) \top 2i = 4i$$

Partie B :

Soit $(G;+)$ un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C};+)$ tel q
$$(\forall x \in [0;1]) \quad x + ix^2 \in G$$

1) Montrer que : $(\forall x \in [0;1]) \quad (2x-1)(1+i) \in G$
2) En déduire que : $(\forall x \in [0;1]) \quad x + ix \in G$
3) a) Montrer que : $(\forall x \in [0;1]) \quad x - x^2 \in G$
b) En déduire que : $\left[0;\frac{1}{4}\right] \subset G$
4) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z}) \ \frac{x}{n} \in \left[0;\frac{1}{4}\right]$
b) En déduire que : $\mathbb{R} \subset G$
5) Montrer que : $(\forall x \in [0;1]) \quad i(x - x^2) \in G$
6) Montrer que : $G = \mathbb{C}$

Partie C :

On considère l'ensemble suivant :
$$E = \left\{ M(a;b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \beta b & a + \alpha b \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
où α et β deux réels fixés.

1) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif
2) Montrer que si $\alpha^2 - 4\beta < 0$, alors $(E;+;\times)$ est un corps commutatif.
3) On suppose dans cette question que : $\alpha = 2$ et β:
a) On considère l'application d définie par :
$$\begin{array}{rccc} d : & E & \to & \mathbb{R}^* \\ & M(a;b) & \mapsto & \det(M(a;b)) \end{array}$$
Montrer que d est un morphisme de $(E;\times)$ dans $(\mathbb{R}^*;\times)$.
b) On considère l'ensemble :
$$F = \{M(a;b) \in E \ / \ \det(M(a;b)) = 1\}$$
Déterminer la structure de $(F;\times)$.
c) Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi[$:
$$\det\left(M\left(\frac{1}{2}\cos x ; \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\right) = \frac{3}{4}$$

DEVOIR 3

Partie A :

Pour tous $(a;b)$ et $(a';b')$ de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$, on pose :

$$(a;b)\top(a';b')=(aa';ab'+b)$$

1) Montrer que $\top$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

2) Justifier que $\top$ n'est pas commutative.

3) Montrer que $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*;\top)$ est un groupe.

4) Montrer que $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*;\top)$ est un groupe.

Partie B :

Pour tout $(a;b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$, on considère les applications $f_{(a;b)}$ et $g_{(a;b)}$ définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f_{(a;b)}(z)=az+b \quad \text{et} \quad g_{(a;b)}(z)=a\overline{z}+b$$

et on considère les ensembles :

$$F=\left\{f_{(a;b)}\ /\ (a;b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\right\}$$

$$G=\left\{g_{(a;b)}\ /\ (a;b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\right\} \quad \text{et} \quad H=F\cup G$$

1) a) Montrer que l'opération « composition des applications o » est une loi de composition interne dans l'ensemble F.

b) On considère l'application Φ de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ dans F qui, à tout élément $(a;b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$, associe l'application $f_{(a;b)}$ de F.

Montrer que l'application Φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*;\top)$ dans $(F;o)$.

c) Déterminer la structure de $(F;o)$ puis déterminer son élément neutre et $\left(f_{(a;b)}\right)^{-1}$ pour tout élément $(a;b)$ de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

d) On pose : $E=\left\{f_{(a;b)}\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\right\}$

Montrer que $(E;o)$ est un groupe.

2) Montrer que « o » n'est pas une loi de composition interne dans l'ensemble G.

3) a) Montrer que « o » est une loi de composition interne dans l'ensemble H.

b) Montrer que $(H;o)$ est un groupe non commutatif.

Partie C :

Pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on considère la fonction affine $h_{(a;b)}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $h_{(a;b)}(x)=ax+b$

et on considère l'ensemble :

$$A=\left\{h_{(a;b)}\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\right\}$$

1) Montrer que « o » est une loi de composition interne dans l'ensemble A.

2) Exhiber un isomorphisme de $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*;\top)$ dans $(A;o)$ puis en déduire la structure de $(A;o)$.

DEVOIR 4

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau de zéro $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Pour toute matrice $M=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, on pose :

$\det M=ad-bc$ (c'est le déterminant de M)

On considère les ensembles suivants :

$$G=\left\{M\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\ /\ \det M\neq 0\right\}$$

$$G^+=\left\{M\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\ /\ \det M>0\right\}$$

$$S=\left\{M\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\ /\ \det M=1\right\}$$

1) Montrer que l'application :

$$\det : \begin{array}{l}(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)\to(\mathbb{R};\times)\\ \quad M \quad\quad\ \ \mapsto \det M\end{array}$$

est un morphisme.

2) a) Montrer que $(G;\times)$ est un groupe.

b) Montrer que $(G^+;\times)$ est un sous-groupe de $(G;\times)$.

c) Montrer que $(S;\times)$ est un sous-groupe de $(G^+;\times)$.

3) On note M^{-1} l'inverse de M dans $(G;\times)$.

Montrer que : $(\forall M\in G)(\forall A\in G^+)\ MAM^{-1}\in G^+$

4) a) Vérifier que $(\{-1;1\};\times)$ est un groupe commutatif.

b) Montrer que l'application :

$$f:(G;\times)\to(\{-1;1\};\times)$$
$$M \mapsto f(M)=\frac{\det M}{|\det M|}$$

est un morphisme surjectif.

c) Déterminer l'ensemble :

$$K=\{M\in G/f(M)=1\}$$

5) On considère l'ensemble suivant :

$$E=\left\{M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} / \theta\in\mathbb{R}\right\}$$

a) Montrer que $(E;\times)$ est un sous-groupe de $(S;\times)$.

b) Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $(M(\theta))^n$ où :

$$(M(\theta))^n=\underbrace{M(\theta)\times M(\theta)\times\ldots\times M(\theta)}_{n\ fois}$$

6) Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

Montrer qu'il existe $r\in\mathbb{R}^+$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}$$

7) On pose : $F=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

et on considère l'application :

$$g:\ \mathbb{C}\ \to\ F$$
$$z=a+ib\mapsto M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$$

a) Calculer $g(1), g(i)$ et $g(\overline{z})$ avec : $z=a+ib$

b) Montrer que g est bijective.

c) Montrer que $(F;+)$ et $(F-\{0\};\times)$ sont des groupes commutatifs.

d) Calculer $\left(M_{(a;b)}\right)^n$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $(a;b)\in(\mathbb{R}^*)^2$.

e) Résoudre dans F l'équation d'inconnue M :

$$(M-I)(M-J)=O$$

avec : $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

DEVOIR 5

On considère dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Soit E l'ensemble :

$$E=\{M\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) / M=xI+yJ\ ;\ (x;y)\in\mathbb{R}^2\}$$

1) Montrer que $(E;+)$ est un groupe commutatif.

2) a) Montrer que E est une partie stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutat[if] non intègre.

3) a) Déterminer F l'ensemble des éléments de E qui admettent un inverse dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

b) Montrer que $(E;\times)$ est un groupe commutatif.

4) On définit sur l'ensemble $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ une loi de composition interne T comme suit :

Pour tous $(x;y)$ et $(a;b)$ de $(x;y)$:

$$(a;b)\top(x;y)=(ax;ay+bx)$$

Et on considère l'application φ de F dans G défini[e] par : $(\forall(xI+yJ)\in F)\quad \varphi(xI+yJ)=(x;y)$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(F;\times)$ dans $(G;\top)$.

b) Quelle est la structure de $(G;\top)$?

c) Soit $(x;y)\in G$. Déterminer le symétrique de $(x;y)$ dans $(G;\top)$.

5) Pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, on pose : $M=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$

a) Calculer M^2 et M^3.

b) En utilisant un raisonnement par récurrence, trouver une expression de M^n pour tout $n\geq 2$

c) Soit $(x;y)\in G$. Déterminer $(x;y)^n$ pour tout $n\geq 2$ avec : $(x;y)^n=\underbrace{(x;y)\top(x;y)\top\ldots\top(x;y)}_{n\ fois}$

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 1

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau de zéro $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif.

Pour tous a et b de $\mathbb{R}$, on pose :

$$M(a;b)=\begin{pmatrix}a&a-b\\b&a+b\end{pmatrix}$$

et on considère l'ensemble :

$$E=\{M(a;b)/(a;b)\in\mathbb{R}^2\}$$

1) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$.

2) Calculer $J^2=J\times J$ où $J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ puis en déduire que E n'est pas une partie stable de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

3) On définit sur l'ensemble $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ une loi de composition interne $*$ par : $A*B=A\times N\times B$

avec : $N=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et qui, à chaque nombre complexe non nul $a+ib$ (a et b deux réels), la matrice $M(a;b)$.

a) Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

b) On pose : $E^*=E-\{O\}$.

Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

c) Montrer que $(E^*;*)$ est un groupe commutatif.

4) Montrer que pour tout $(A;B;C)\in E^3$:

$$A*(B+C)=A*B+A*C$$

5) En déduire de ce qui précède que $(E;+;*)$ est un corps commutatifs.

Examen National 2014 (Session Normale)

PROBLÈME 2

On rappelle $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau non commutatif.

On considère l'ensemble :

$$E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}\right\}$$

1) Montrer que E est une partie stable de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

2) a) Montre que l'application φ qui, à tout réel x, associe la matrice $M(x)$ de E, est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(E;\times)$.

b) En déduire que $(E;\times)$ est un groupe commutatif.

c) Déterminer $(M(x))^{-1}$, la matrice inverse de $M(x)$.

d) Résoudre dans E l'équation $A^5X=B$ où : $A=M(2)$, $B=M(12)$ et $A^5=A\times A\times A\times A\times A$

3) Montrer que l'ensemble $F=\{M(\ln x)/x\in\mathbb{R}_+^*\}$ est sous-groupe de groupe $(E;\times)$.

Examen National 2010 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 3

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif.

Pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, on pose :

$$M(x;y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$$

et $E=\{M(x;y)/(x;y)\in\mathbb{R}^2\}$.

1) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+)$.

2) Vérifier que pour tous $(x;y)$ et $(x';y')$ de $\mathbb{R}^2$:

$$M(x;y)\times M(x';y')=M(xx'-yy';\,xy'+yx')$$

3) On pose $E^{*} = E - \{M(0;0)\}$ et on considère l'application $\varphi : \mathbb{C}^{*} \mapsto E$ qui, à chaque nombre complexe $x+iy$ (x et y deux réels), la matrice $M(x;y)$ de E.

a) Montrer que l'application φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^{*};\times)$ dans $(E;\times)$.

b) En déduire que $(E^{*};\times)$ est un groupe commutatif et que son élément neutre est la matrice $M(1;0)$.

4) Montrer que $(E;+;\times)$ est un corps commutatif.

5) On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A \times M(x;y)$ pour $M(x;y) \in E$.

b) En déduire qu'aucun élément de E n'est inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

Examen National 2016 (Session Normale)

PROBLÈME 4

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif.

Soit a un réel strictement positif.

Soit E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} a^{x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

1) Montrer que E est stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

2) Montrer que l'application φ définie par :

$$\varphi(x) = M(x)$$

est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(E;\times)$.

3) Montrer de deux façons différentes que $(E;\times)$ est un groupe commutatif.

Examen National 1997 (Session Normale)

PROBLÈME 5

Partie A :

Pour tout x et y de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose :

$$x * y = x + y - xy$$

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative

3) Montrer que $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}; *\right)$ est un groupe commutatif.

4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et pour tout entier $n \geq 2$: $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n\ fois} = \frac{1}{2}\left(1 - (1-2x)^{n}\right)$

Partie B :

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble : $\mathscr{E} = \left\{ A(x) / x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \right\}$

1) Montrer que $\mathscr{E}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$

2) On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathscr{E}$$
$$x \mapsto A(x)$$

a) Montrer que l'application f est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}; *\right)$ dans $(\mathscr{E};\times)$.

b) En déduire une structure de $(\mathscr{E};\times)$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^{*}$ et $B = A\left(-\frac{1}{2}\right)$. Montrer que :

$$B^{n} = A\left(\frac{1-2^{n}}{2}\right) \quad \text{et} \quad (B^{n})^{-1} = A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Examen National 2000 (Session Normale)

PROBLÈME 6

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Pour tout x et y de l'intervalle $G =]1;2[$, on pose :

$$x * y = \frac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$$

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur l'ensemble G.

2) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^* ; \times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application f de $\mathbb{R}_+^*$ dans G définie par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

a) Montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{R}_+^* ; \times)$ dans $(G;*)$.

b) En déduire que $(G;*)$ est un groupe commutatif et déterminer son élément neutre.

Partie B :

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) a) Vérifier que $A^3 = O$ puis en déduire que A est diviseur de zéro dans l'anneau $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$.

b) Vérifier que : $(A^2 - A + I)(A+I) = I$ puis en déduire que la matrice $A+I$ admet un inverse dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ que l'on déterminera.

2) Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $M(a;b) = aI + bA$ et on considère l'ensemble :

$$E = \{M(a;b) / (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel et déterminer une base

Examen National 2013 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 7

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Dans l'anneau $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$, on considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $I - A$ et A^2 .

2) En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

Partie B :

Pour tous a et b de l'intervalle $I =]1;+\infty[$, on pose :

$$a * b = \sqrt{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2}$$

1) Vérifier que pour tout $(x;y) \in I^2$:

$$x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2-1)(y^2-1)+1$$

2) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I.

3) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^* ; \times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}_+^* \to I$$
$$x \mapsto \sqrt{x+1}$$

a) Montrer que l'application φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^* ; \times)$ dans $(I;*)$.

b) En déduire la structure de $(I;*)$.

c) Montrer que l'ensemble $\Gamma = \left\{\sqrt{1+2^m} \ / \ m \in \mathbb{Z}\right\}$ est un sous-groupe de $(I;*)$.

Examen National 2012 (Session Normale)

PROBLÈME 8

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif.

Pour tout $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, on pose :

$$M(z)=\begin{pmatrix}x+2y&0&5y\\0&1&0\\-y&0&x-2y\end{pmatrix}$$

et on considère l'ensemble $E=\{M(z)/z\in\mathbb{C}\}$.

1) On munit E d'une loi de composition interne comme suit : Pour tout $(z;z')\in\mathbb{C}^2$:

$$M(z)*M(z')=M(z)+M(z')-M(0)$$

Montrer que $(E;*)$ est un groupe commutatif.

2) On considère l'application φ définie de $\mathbb{C}^*$ dans E et qui, à tout $z\in\mathbb{C}^*$, on associe la matrice $M(z)$.

a) Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(E;\times)$.

b) Montrer que $(E-\{M(0)\};*)$ est un groupe commutatif.

3) Montrer que $(E;*;\times)$ est un corps commutatif.

Examen National 2016 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 9

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif.

Pour tout réel x, on pose : $M(x)=\begin{pmatrix}1-x&x\\-2x&1+2x\end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble : $E=\{M(x)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$

On munit E d'une loi de composition interne $\top$ donnée par :

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad M(x)\top M(y)=M(x+y+1)$$

1) Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}$ dans E par :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad \varphi(x)=M(x-1)$$

a) Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(E;\top)$.

b) Montrer que $(E;\top)$ est un groupe commutatif.

2) a) Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$:

$$M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)$$

b) En déduire que E est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$ et que la loi « $\times$ » est commutatif dans E.

c) Montrer que la loi « $\times$ » est distributive par rapport à la loi « $\top$ » dans E.

d) Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans $(E;\top)$ et que I est l'élément neutre dans $(E;\times)$

3) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=I$$

b) Montrer que $(E;\top;\times)$ est un corps commutatif.

Examen National 2015 (Session Normale)

PROBLÈME 10

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Soit F l'ensemble des matrices $M(x;y)$ de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$M(x;y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}\quad\text{avec } (x;y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$$

1) a) Montrer que F est une partie stable de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

b) Montrer que $(F;\times)$ est un groupe non commutatif.

2) Soit G l'ensemble des matrices $M(x;0)$ de F tel que $x\in\mathbb{R}^*$.

Montrer que G est un sous-groupe de $(F;\times)$.

3) Soit $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. On munit l'ensemble E d'une loi de composition interne $\perp$ définie par :

Pour tous $(x;y)\in E$ et $(a;b)\in E$:

$$(x;y)\perp(a;b)=\left(xa;xb+\frac{y}{a}\right)$$

On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl}\varphi:(F;\times) & \to & (E;\perp)\\ M(x;y) & \mapsto & \varphi(M(x;y))=(x;y)\end{array}$$

a) Montrer que $(1;1)\perp(2;3)$ et $(2;3)\perp(1;1)$.

b) Montrer que φ est un isomorphisme.

c) En déduire la structure de $(E;\perp)$.

Examen National 2009 (Session Normale)

PROBLÈME 11

On pose $J=]-1;1[$.

Partie A :

Pour tous éléments a et b de l'intervalle J, on pose :

$$a*b=\frac{a+b}{1+ab}$$

1) Vérifier que pour tout $(a;b)\in J^2$: $1+ab>0$ puis en déduire que $*$ est une loi de composition interne dans J.

2) a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans J.

b) Montrer que $(J;*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

c) Montrer que $(J;*)$ est un groupe commutatif.

Partie B :

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

1) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans J.

2) Soit g l'application réciproque de l'application f (la détermination de g n'est pas demandée)

Pour tout $(x;y)\in J^2$, on pose :

$$x\perp y=f\left(g(x)\times g(y)\right)$$

$(J^*;\perp)$ où $J^*=J-\{0\}$.

3) On rappelle que $(\mathbb{R}^*;\times)$ est un groupe commutatif, et on admet que $\perp$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans J.

Montrer que $(J;*;\perp)$ est un corps commutatif.

Examen National 2014 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 12

Partie A :

Soit $E=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Pour tout $(a;b)\in E^2$, on pose :

$$a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$$

1) a) Vérifier que pour tout $(a;b)\in E^2$:

$$a\perp b=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$$

b) En déduire que $\perp$ est une loi de composition interne dans E.

2) Montrer que $(E;\perp)$ est un groupe commutatif.

Partie B :

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrivent sous la forme :

$$M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}\quad \text{avec } a\in\mathbb{R}$$

On pose : $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

1) a) Vérifier que : $A^2=-2A$ et $M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A$

b) Montrer que $\mathcal{F}$ est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

2) On considère l'application :

$$\varphi : (E;\perp) \to (\mathcal{F};\times)$$
$$a \mapsto \varphi(a) = M(a)$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme.

b) En déduire la structure de $(\mathcal{F};\times)$.

Examen National 2007 (Session Normale)

PROBLÈME 13

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne comme suit : $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)\quad x*y = x+y-3xy$

1) a) Vérifier que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$:

$$(1-3x)(1-3y) = 1-3(x*y)$$

b) Montrer que $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ est un anneau commutatif.

2) Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ dans $\mathbb{R}^*$:

$$\varphi(x) = 1-3x$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ dans $(\mathbb{R}^*;\times)$.

b) Montrer que : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$.

c) Montrer que $\left(\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[;*\right)$ est un sous-groupe de groupe $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$.

3) Pour tout $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$x^{(0)} = 0 \quad\text{et}\quad x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$$

a) Montrer que : $\varphi\left(x^{(n)}\right) = \left(\varphi(x)\right)^{(n)}$

b) En déduire $x^{(n)}$ en fonction de x et n.

4) On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne T comme suit :

$$(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)\quad x\,\mathrm{T}\,y = x+y-\frac{1}{3}$$

a) Montrer que $(\mathbb{R};\mathrm{T})$ est un groupe commutatif.

b) Montrer que $(\mathbb{R};\mathrm{T};*)$ est un corps commutatif.

Examen National 2008 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 14

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Dans l'anneau $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$, on considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad\text{et}\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose : $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = A\times A$

et $A^{n+1} = A^n \times A$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $(\forall k\in\mathbb{N})\quad A^{2k} = I$

2) Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

Partie B :

Soit a un nombre réel.

Pour tous x et y de l'intervalle $I =]a;+\infty[$, on pose :

$$x*y = (x-a)(y-a)+a$$

1) a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans l'intervalle I.

b) Montrer que $*$ est commutative et associative.

c) Montrer que $(I;*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

2) Montrer que $(I;*)$ est un groupe commutatif.

3) On considère l'application :

$$\varphi : I \to \mathbb{R}_+^*$$
$$x \mapsto \frac{1}{x-a}$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(I;*)$ dans $(\mathbb{R}_+^*;\times)$.

b) Résoudre dans I l'équation : $x*x*x = a^3+a$

Examen National 2011 (Session Normale)

ESPACES VECTORIELS RÉELS

HISTOIRE

Les espaces vectoriels ont été introduits par Cayley et Grassmann au milieu du XIXème siècle. Cependant, le premier ne proposait qu'un calcul sur des n-uplets et la formalisation du second était des plus obscures. Ce fut l'œuvre de Giuseppe Peano de déchiffrer le travail du mathématicien allemand et de donner le premier, en 1888, une définition satisfaisante d'un espace vectoriel. Il introduisit les applications linéaires et montra que cette théorie ne se réduit pas à la dimension finie en citant l'exemple des polynômes.
Giuseppe Peano est aussi connu pour son axiomatique des entiers naturels et pour avoir construit une courbe remplissant un carré. On lui doit d'astucieux contre-exemples qui ont remis en cause des assertions qui semblaient pourtant bien établies.
James Sylvester s'intéresse à des tableaux de nombres qu'il nomme matrices en 1850. Peu après, Cayley définit des opérations sur les matrices. Leur collaboration a fait faire de remarquables progrès à l'algèbre linéaire.

Source : https://fr.wikipedia.org

GIUSEPPE PEANO (1858 – 1932)

JAMES SYLVESTER (1814 – 1897)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Maitriser les techniques d'opérations sur les différentes structures usuelles ;
- Utiliser les structures des quelques ensembles usuels pour étudier les structures d'autres ensembles ;
- Comparer deux structures algébriques ; transposer une structure algébrique d'un ensemble à un autre en utilisant la notion d'homomorphisme et d'isomorphisme

PLAN DU COURS

1 RAPPELS

A) Résolution d'un système paramétrique :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x+my=2m-1 \\ mx+y=3m-2 \end{cases}$ (Discuter selon les valeurs du réel m)

B) Étude d'un ensemble de fonctions continues

On note $\mathscr{C}([0;1])$ l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[0;1]$. On considère l'ensemble :

$$G=\left\{f\in\mathscr{C}([0;1]) \ / \ \int_0^1 f(t)dt=0\right\}$$

1. Montrer que $G\neq\varnothing$.
2. Montrer que $(G;+)$ est un groupe commutatif.
3. Montrer que pour tout $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ et pour tout $(f;g)\in G^2$: $\alpha f+\beta g\in G$

C) Une fonction vérifiant des conditions linéaires :

On considère les fonctions numériques f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^x$; $g(x)=e^{2x}$; $h(x)=e^{3x}$

Montrer que : $(\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3)$ $af+bg+ch=0 \Rightarrow a=b=c=0$

D) Ensemble des solutions d'une équation différentielle :

On note $\mathscr{D}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble :

$$E=\left\{f\in\mathscr{D}^2(\mathbb{R}) \ / \ f''-2f'+f=0\right\}$$

1. Montrer que les fonctions suivantes : $g_0: x\mapsto e^x$; $g_1: x\mapsto xe^x$; $g: x\mapsto(ax+b)e^x$ (où $a,b\in\mathbb{R}$) appartiennent à l'ensemble E.
2. On considère la fonction $h: x\mapsto f(x).e^{-x}$ où $f\in E$.
   a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$ $h''(x)=0$.
   b) En déduire une expression de $h(x)$ puis celle de $f(x)$ en fonction de x.

2 LOI DE COMPOSITION EXTERNE

1. Parmi les propositions suivantes, déterminer celles qui sont vraies :

(P_1) : $(\forall\lambda\in\mathbb{R})$ $(\forall\vec{u}\in\mathcal{V}_2)$ $\lambda.\vec{u}\in\mathcal{V}_2$; (P_2) : $(\forall\alpha\in\mathbb{R})$ $(\forall x\in\mathbb{Q})$ $\alpha.x\in\mathbb{Q}$

(P_3) : $(\forall\alpha\in\mathbb{Q})$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\alpha.x\in\mathbb{R}$; (P_4) : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ $x^n\in\mathbb{R}$

(P_5) : $(\forall\alpha\in\mathbb{R})$ $(\forall f\in\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ $\alpha f\in\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$

2. Soit A et E deux ensembles non vides. Toute application :

$$\begin{aligned} f: A\times E &\to E \\ (\alpha,x) &\mapsto f(\alpha,x) \end{aligned}$$

s'appelle une loi de composition externe sur E à coefficients dans A, et on écrit : $f(\alpha,x)=\alpha.x$

3. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui définissent une loi de composition externe :

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \\ \left(\alpha ; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \end{array}$; b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times \mathcal{V}_2 & \to & \mathcal{V}_2 \\ (\alpha, \vec{u}) & \mapsto & \alpha.\vec{u} \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^*\times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (n;x) & \mapsto & x^n \end{array}$; d) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\alpha;(a,b,c)) & \mapsto & (0,0,0) \end{array}$

e) $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \\ (\alpha;f) & \mapsto & \alpha.f \end{array}$; f) $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ (\alpha;x) & \mapsto & \alpha.x \end{array}$

3 ESPACES VECTORIELS RÉELS

On considère l'ensemble : $P=\{f\in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \,/\, (\forall x\in\mathbb{R})\ f(-x)=f(x)\}$

On munit P de deux lois :

- Loi de composition interne : $(f;\, g)\mapsto f+g$;
- Loi de composition interne : $(\alpha;\, f)\mapsto \alpha.f$.

telles que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \begin{cases}(f+g)(x)=f(x)+g(x)\\(\alpha f)(x)=\alpha f(x)\end{cases}$

1. Montrer que $(P,+)$ est un groupe commutatif.
2. Pour tout $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$, et pour tous f et g de P, vérifier les quatre relations suivantes :

a) $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$; b) $(\alpha\beta).f=\alpha.(\beta.f)$; c) $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$; d) $1.f=f$

L'ensemble P, muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe $\bullet$, vérifie alors les conditions citées dans les questions 1 et 2. On dit alors que $(P;+;\bullet)$ est espace vectoriel réel.

GÉNÉRALISATION

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe à coefficients dans $\mathbb{R}$ notée $\bullet$. On dit que $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel si :

- $(E;+)$ est un groupe commutatif,
- Pour tout $(x;y)\in E^2$, et pour tout $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$:

$1\bullet x=x$; $\alpha\bullet(x+y)=\alpha\bullet x+\alpha\bullet y$; $(\alpha+\beta)\bullet x=\alpha\bullet x+\beta\bullet x$; $\alpha\bullet(\beta\bullet x)=(\alpha\beta)\bullet x$

3. On considère les ensembles : $A=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \,/\, f(5)=f(1)\}$ et $A=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \,/\, f\geq 0\}$

a) Montrer que $(A;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

b) Est-ce-que $(B;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel ? Justifier.

Le tableau suivant résume les espaces vectoriels réels les plus importants et utilisés dans la pratique :

L'ensemble	La loi externe	La structure
$\mathbb{R}^2$ ou $\mathcal{V}_2$	$\alpha\bullet(a;b)=(\alpha a;\alpha b)$	$(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel
$\mathbb{R}^3$ ou $\mathcal{V}_3$	$\alpha\bullet(a;b;c)=(\alpha a;\alpha b;\alpha c)$	$(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel
$\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$	$(\forall x\in I)\ \ (\alpha\bullet f)(x)=\alpha f(x)$	$(\mathcal{F}(I;\mathbb{R});+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel
$M_2(\mathbb{R})$	$\alpha\bullet\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d \end{pmatrix}$	$(M_2(\mathbb{R});+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel
$M_3(\mathbb{R})$	$\alpha\bullet\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 \\ \alpha c_1 & \alpha c_2 & \alpha c_3 \end{pmatrix}$	$(M_3(\mathbb{R});+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel

4 COMBINAISONS LINÉAIRES – FAMILLE GÉNÉRATRICE

Dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$ muni des lois usuelles, on considère les vecteurs :

$$\vec{u}=(1;-4;0) \quad ; \quad \vec{v}=(0;5;-1) \quad ; \quad \vec{s}=(3;-37;5)$$

1. Vérifier que $\vec{s}=3\vec{u}-5\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{s}$ est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

GÉNÉRALISATION

Soit $(E;+;\bullet)$ un espace vectoriel réel.

Soit $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n$ des vecteurs de E, et $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ des nombres réels.

- Le vecteur $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\vec{x}_i$ est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n$. On dit aussi que la famille $B=(\vec{x}_1;\vec{x}_2;\dots;\vec{x}_n)$ engendre $\vec{x}$.
- On dit que la famille $B=(\vec{x}_1;\vec{x}_2;\dots;\vec{x}_n)$ engendre l'espace E si tout élément $\vec{x}\in E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n$.

2. a) Montrer que $\vec{w}_1=(-4;-11;22)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1=(1;-4;5)$ et $\vec{v}_1=(2;1;-4)$.

b) Le vecteur $\vec{w}_2=(3;2;-3)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs :

$$\vec{u}_2=(1;1;1) \quad \text{et} \quad \vec{v}_2=(3;1;2) \quad \text{et} \quad \vec{t}_2=(1;-3;-1)\ ?$$

3. Montrer que la matrice $M=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des matrices $J=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $K=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

5 DÉPENDANCE ET INDÉPENDANCE LINÉAIRE

Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$, on considère les vecteurs :

$$\vec{u}_1=(1;2) \quad ; \quad \vec{v}_1=(-4;3) \quad ; \quad \vec{u}_2=(2;-4) \quad ; \quad \vec{v}_2=(-3;6)$$

1. a) Pour tous réels α_1 et β_1, montrer que : $\alpha_1\vec{u}_1+\beta_1\vec{v}_1=\vec{0} \Rightarrow \alpha_1=\beta_1=0$.

On dit que la famille $(\vec{u}_1;\vec{v}_1)$ est libre ou linéairement indépendante.

b) Montrer qu'il existe $(\alpha_2;\beta_2)\in\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}$ tel que $\alpha_2\vec{u}_2+\beta_2\vec{v}_2=\vec{0}$.

On dit que la famille $(\vec{u}_2;\vec{v}_2)$ est liée ou linéairement dépendante.

2. Dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$, on considère la famille $B=(f_1;f_2)$ définie par :

$$f_1 : x \mapsto \sin x \qquad \text{et} \qquad f_2 : x \mapsto \cos x$$

Montrer que la famille B est libre.

3. Dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{V}_3;+;\cdot)$, on considère les vecteurs :

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}\cos a\\ \cos b\\ \cos c\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}\sin a\\ \sin b\\ \sin c\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{w}=\begin{pmatrix}\cos(x+a)\\ \cos(x+b)\\ \cos(x+c)\end{pmatrix}$$

où $(a;b;c;x)\in\mathbb{R}^4$.

Montrer que la famille $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est liée.

4. On pose : $\vec{e}_1=(1;0;0) \quad ; \quad \vec{e}_2=(0;1;0) \quad ; \quad \vec{e}_3=(0;0;1)$

Montrer que la famille $B_1=(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ engendre l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$.

On dit aussi que $B_1=(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$.

5. Déterminer une famille génératrice de l'espace vectoriel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$.

6 BASES D'UN ESPACE VECTORIEL - DIMENSION

Dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$, on considère la famille $B=(\vec{u};\vec{v})$ telle que :

$$\vec{u}=(1;3) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}=(-2;1)$$

1. Montrer que : $(\forall\, \vec{w}\in\mathbb{R}^2)\ (\exists!(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\quad \vec{w}=\alpha\vec{u}+b\vec{v}$

On dit que B est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$.

2. Montrer que la famille B est libre et génératrice de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$.

GÉNÉRALISATION

Soit $(E;+;\cdot)$ un espace vectoriel réel, et $B=(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

Dire que la famille $B=(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est une base de E signifie qu'elle est à la fois libre et génératrice dans E. Ce qui est est équivalent de dire :

$$(\forall \vec{x}\in E)\ \left(\exists!(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\right)\quad \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\vec{x}_i$$

Les réels $\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n$ sont appelés alors les composants du vecteur $\vec{x}$ dans la base B.

Enfin, le nombre n des éléments de B est appelé la dimension de E, et on note : $\dim E=n$.

3. Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$, on considère la famille $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ telle que :

$$\vec{e}_1=(1;0;0)\quad;\quad \vec{e}_2=(0;1;0)\quad;\quad \vec{e}_3=(0;0;1)$$

a) Montrer que B est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$.

b) On considère les vecteurs : $\vec{x}_1=(1;2;3)$; $\vec{x}_2=(1;-1;1)$; $\vec{x}_3=(1;1;1)$

b₁) Montrer que $B'=(\vec{x}_1;\vec{x}_2;\vec{x}_3)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$.

b₂) On considère le vecteur $\vec{x}=(3;4;5)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

- Déterminer les composants du vecteur $\vec{x}$ dans la base B.
- Déterminer les composants du vecteur $\vec{x}$ dans la base B'.

7 SOUS-ESPACE VECTORIEL

Soit : $\mathbb{F}=\left\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})\ /\ \exists(a;b;c)\in\mathbb{R}^3;\ (\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)=(ax^2+bx+c)e^{3x}\right\}$

1. a) Montrer que $\mathbb{F}\neq\varnothing$, et que : $\left(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(f;g)\in\mathbb{F}^2\right)\quad \alpha f+\beta g\in\mathbb{F}$.

b) En déduire que $(\mathbb{F};+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On a $\mathbb{F}\subset\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $(\mathbb{F};+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On dit que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$.

2. On considère la famille $B=(f_0;f_1;f_2)$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f_0(x)=e^{3x}\quad;\quad f_1(x)=xe^{3x}\quad;\quad f_2(x)=x^2e^{3x}$$

Montrer que B est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{F};+;\cdot)$.

3. Soit f un élément de $\mathbb{F}$.

Montrer que la fonction dérivée f' est aussi un élément de $\mathbb{F}$.

4. Déterminer les coordonnées de f' dans la base B.

1 ESPACE VECTORIEL RÉEL

1.1. LOI DE COMPOSITION EXTERNE

Définition 1

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble.

On appelle loi de composition externe de $\mathbb{K}$ sur E, toute application de $\mathbb{K} \times E$ dans E.

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on note en général $\alpha \cdot x$ ou αx l'image de $(\alpha; x)$ par cette application.

Remarques

- Dans la définition précédente, on peut avoir $E = \mathbb{K}$; et dans ce cas, on parle d'une loi de composition interne. Ainsi, toute loi de composition interne sur E peut être considérée comme une loi de composition externe sur E à coefficients dans E.
- Au cours de ce chapitre, on prendra $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ comme corps de référence.

Exemples

1) L'ensemble $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et pour tout réel α, on appelle produit de α par M, et on le note αM,

la matrice $\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$. On a alors obtenu une loi de composition externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Cette loi s'appelle multiplication d'une matrice par un réel.

2) L'ensemble $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) : ensemble des n-uplets.

Pour tout $X = (x_1; x_2; ...; x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout réel α, on appelle produit de X par α, et on le note αX, le n-uplet $\alpha X = (\alpha x_1; \alpha x_2; ...; \alpha x_n)$. On a alors obtenu une loi de composition externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$.

Dans l'usage pratique, on prend souvent $\mathbb{R}^2$ (ensemble des couples) et $\mathbb{R}^3$ (ensemble des triplets)

3) L'ensembles $\mathcal{V}_2$: ensemble des vecteurs du plan.

Pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathcal{V}_2$ et pour tout réel α, Le produit de α par $\vec{u}$, noté $\alpha\vec{u}$, est un élément de $\mathcal{V}_2$.

On a alors obtenu une loi de composition externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{V}_2$. Cette loi s'appelle multiplication d'un vecteur par un réel.

La multiplication d'un vecteur de $\mathcal{V}_3$ par un réel est aussi une loi de composition externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{V}_3$.

4) L'ensemble $\mathcal{P}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) : ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à n.

Pour tout polynôme $P \in \mathcal{P}_n$ et pour tout réel α, Le produit de P par α, noté αP, est un élément de $\mathcal{P}_n$.

On a alors obtenu une loi de composition externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{P}_n$.

1.2. STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL RÉEL

Au secondaire, que ce soit en Mathématiques ou en Physique, nous avons utilisé les vecteurs du plan ou de l'espace : nous avons déjà additionné deux vecteurs et effectué le produit d'un vecteur par un réel. Par des démonstrations élémentaires de géométrie, on peut constater certaines propriétés de ces deux opérations parmi lesquelles la commutativité et l'associativité de l'addition.

En se plaçant dans une base $(\vec{i}\,;\vec{j})$, on peut aussi :

- associer, à tout vecteur $\vec{u}$, le couple de ses composants réels ;
- traduire les opérations précédentes sur ces couples de coordonnées et ainsi obtenir, sur les éléments de $\mathbb{R}^2$, des opérations d'addition, et de multiplication par un réel.

Enfin, aux chapitres 4 et 5 de cet ouvrage, nous avons vu l'ensemble $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ des fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, dans lequel, l'addition de deux fonctions et le produit d'une fonction par un réel ont les mêmes propriétés que les opérations précédentes.

La structure d'espace vectoriel, que nous allons introduire et qui est très importante en Mathématique, pourra paraître abstraite au prime abord ; c'est pourquoi, pour l'assimiler plus facilement, il est bon, tout au long de ce qui va suivre, de garder à l'esprit les trois exemples précédents et de ne pas hésiter à les manipuler.

Définition 2

Un **espace vectoriel réel** (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est un triplet $(\mathrm{E};+;\cdot)$ dans lequel E est un ensemble non vide muni :

(1) d'une loi de composition interne, notée $+$, telle que $(\mathrm{E};+)$ est un groupe commutatif,

◦ cette loi est **l'addition** de E ; ◦ son élément neutre est noté 0_{E}

(2) d'une loi de composition externe, application de $\mathbb{R}\times\mathrm{E}$ dans E, appelée **produit externe** ou **produit par un scalaire**, notée $(\alpha;x)\mapsto\alpha\cdot x$, et possédant les propriétés suivantes :

- $(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall x\in\mathrm{E})\quad(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$;
- $(\forall\alpha\in\mathbb{R})\ (\forall(x;y)\in\mathrm{E}^2)\quad\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$;
- $(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall x\in\mathrm{E})\quad(\alpha\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$;
- $(\forall x\in\mathrm{E})\quad 1\cdot x=x$.

On appelle alors **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** les éléments de $\mathbb{R}$.

Exemples

1) Le corps $(\mathbb{R};+;\times)$ est un espace vectoriel réel.

2) L'ensemble $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel si on le munit de son addition « + » et de la loi externe « · »

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\\ (\alpha;x) & \mapsto & \alpha x\end{array}$$

3) $(M_2(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

4) $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$ et $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$ sont des espaces vectoriels réels.

5) $(\mathcal{V}_2;+;\cdot)$ et $(\mathcal{V}_3;+;\cdot)$ sont des espaces vectoriels réels.

6) L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel réel si on le munit de son addition « + » et de la loi externe « · »

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathcal{P}_n &\to \mathcal{P}_n \\ (\alpha;P) &\mapsto \alpha P \end{aligned}$$

7) L'ensemble $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel si on le munit de son addition « + » et de la loi externe « · »

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathcal{F}(I;\mathbb{R}) &\to \mathcal{F}(I;\mathbb{R}) \\ (\alpha;f) &\mapsto \alpha f \end{aligned}$$

Notations

- Dans tout ce qui suit, on adopte les conventions et les symboles suivants :
  - ✓ En l'absence d'informations sur la nature des éléments de E, un élément de E sera noté généralement $\vec{x}$.
  - ✓ On utilise l'écriture $\alpha\vec{x}$ au lieu $\alpha\cdot\vec{x}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\vec{x}\in E$.
  - ✓ L'élément neutre de $(E;+)$ sera noté $\vec{0}$. C'est le vecteur nul de l'espace vectoriel E.
  - ✓ Si $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et $\vec{x}\in E$, on peut « diviser $\vec{x}$ par α » : cela revient à multiplier le vecteur $\vec{x}$ par le scalaire α^{-1}. Ainsi $\frac{1}{\alpha}\vec{x}$ se note aussi $\frac{\vec{x}}{\alpha}$.
  - ✓ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de E, le vecteur $\vec{u}+(-\vec{v})$ s'écrit $\vec{u}-\vec{v}$.

    Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ s'appelle la différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre.
- En pratique, les opérations « + » et « · » sont le plus souvent utilisées sans ambiguïté.
  En conséquence, l'espace vectoriel réel $(E;+;\cdot)$ sera plus simplement noté E, et on dira que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

En tenant compte de ces nouvelles notations, on aboutit à la définition suivante d'un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

Définition 3

$(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) lorsque :

(1) $(E;+)$ est un groupe commutatif.

(2) $(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall\vec{x}\in E)\quad (\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$.

(3) $(\forall\alpha\in\mathbb{R})\ (\forall(\vec{x};\vec{y})\in E^2)\quad \alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$.

(4) $(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall\vec{x}\in E)\quad (\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$.

(5) $(\forall\vec{x}\in E)\quad 1\vec{x}=\vec{x}$.

1.3. RÈGLES DE CALCUL DANS UN ESPACE VECTORIEL RÉEL

Proposition 1

Soit $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel. Alors :

1) Tout vecteur de E est un élément régulier dans $(E;+)$

2) Pour tout $\vec{x} \in E$: $0\vec{x} = \vec{0}$.

3) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha.\vec{0} = \vec{0}$.

4) Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{x} \in E$: $\alpha\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\alpha = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}\right)$.

Preuve

1) Puisque $(E;+)$ est un groupe commutatif alors tout vecteur de E est régulier pour l'addition.

2) On a pour tout $\vec{x} \in E$: $0\vec{x} + \vec{0} = 0\vec{x} \Leftrightarrow 0\vec{x} + \vec{0} = (0+0)\vec{x} \Leftrightarrow 0\vec{x} + \vec{0} = 0\vec{x} + 0\vec{x} \Leftrightarrow 0\vec{x} = \vec{0}$

3) On a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha\vec{0} = \alpha\left(\vec{0} + \vec{0}\right) \Leftrightarrow \vec{0} + \alpha\vec{0} = \alpha\vec{0} + \alpha\vec{0} \Leftrightarrow \alpha\vec{0} = \vec{0}$

4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} \in E$.

- $(\Leftarrow)$: déjà montré en 1) et 2).
- $(\Rightarrow)$: Supposons que $\alpha\vec{x} = \vec{0}$. Si $\alpha \neq 0$ alors : $\frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{x}) = \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)\vec{x} = \vec{0}$ (d'après la définition 3) ;

  il s'ensuit $1\vec{x} = \vec{0}$ et donc $\vec{x} = \vec{0}$. D'où le résultat.

Proposition 2

Soit $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel. Alors :

1) Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{x} \in E$: $(-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x}) = -(\alpha\vec{x})$

2) Pour tout $(\vec{u};\vec{v}) \in E^2$, l'équation $\vec{x} + \vec{u} = \vec{v}$ admet une solution unique dans E . Cette solution est $\vec{x} = \vec{v} + (-\vec{u}) = \vec{v} - \vec{u}$. ($\vec{v} - \vec{u}$ étant la différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre).

3) Pour tous $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\vec{x};\vec{y}) \in E^2$: $\alpha(\vec{x} - \vec{y}) = \alpha\vec{x} - \alpha\vec{y}$ et $(\alpha - \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{x}$.

Preuve

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} \in E$. On a : $(\alpha + (-\alpha))\vec{x} = \alpha\vec{x} + (-\alpha)\vec{x}$, et donc $0\vec{x} = \alpha\vec{x} + (-\alpha)\vec{x}$, d'où $\alpha(-\vec{x}) = -(\alpha$

L'égalité $(-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x})$ provient immédiatement de la définition 3 (prendre $\beta = -1$ dans 3). Ainsi :

$$(-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x}) = -(\alpha\vec{x})$$

2) Puisque $(E;+)$ est un groupe commutatif alors tout élément de E est symétrisable pour la loi « + ».

Ainsi : $\vec{x} + \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{x} + \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{v} + (-\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{x} + \vec{0} = \vec{v} - \vec{u} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{v} - \vec{u}$

3) C'est une conséquence immédiate du 1), en utilisant la définition 3.

Exemple

Dans l'espace vectorie $M_3(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \quad ; \quad O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad ; \quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

a) Vérifier que : $A^2-A-2I_3=O_3$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $xI_3=(3x+5)(A+3I_3)(A-4I_3)$ (E)

Réponse :

a) On a :

$$A^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} \text{ et } A^2-A-2I_3=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$$

Ainsi : $A^2-A-2I_3=O_3$

b) Résolvons l'équation : $xI_3=(3x+5)(A+3I_3)(A-4I_3)$ (E)

On a $A^2-A-2I_3=O_3$ et donc $A^2-A=2I_3$; il s'ensuit alors :

$$\begin{aligned}(E)&\Leftrightarrow xI_3=(3x+5)(A+3I_3)(A-4I_3)\\&\Leftrightarrow xI_3=(3x+5)(A^2-A-12I_3)\\&\Leftrightarrow xI_3=(3x+5)(-2I_3-12I_3)\\&\Leftrightarrow xI_3=-14(3x+5)I_3\\&\Leftrightarrow (42x+71)I_3=O_3\end{aligned}$$

Comme $I_3\neq O_3$: $(E)\Leftrightarrow 42x+71=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{71}{42}$

Par suite, l'ensemble solution de l'équation (E) est : $S=\left\{-\dfrac{71}{42}\right\}$.

Applications

1. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ une loi de composition externe « $\cdot$ » à coefficients réels par :

$$(\forall\alpha\in\mathbb{R})\,(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\quad \alpha\cdot x=x^\alpha$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*\,;\times;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

2. On munit $\mathbb{R}^2$ de deux lois :
   - d'une loi interne : $(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$
   - d'une loi externe : $(\forall\lambda\in\mathbb{R})\quad \lambda\cdot(x;y)=(0;\lambda y)$

$(\mathbb{R}^2\,;+;\cdot)$ est-il un espace vectoriel réel ? Justifier.

2 SOUS-ESPACE VECTORIEL

2.1 . DÉFINITION ET EXEMPLES

Définition 4

Étant donné un espace vectoriel réel $(\mathrm{E};+;\cdot)$, une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

(1) $F \neq \varnothing$,

(2) F est stable pour l'addition : $(\forall(\vec{x};\vec{y}) \in F^2)\ \ \vec{x}+\vec{y} \in F$,

(3) F est stable pour le produit externe : $(\forall(\alpha;\vec{x}) \in \mathbb{R}\times F)\ \ \alpha\cdot\vec{x} \in F$,

(4) $(F;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Remarques

- Attention ! pour prouver que F est un sous-espace vectoriel de E, ne pas oublier de vérifier que $F \neq \varnothing$ et $F \subset \mathrm{E}$. Le plus fréquent pour montrer que $F \neq \varnothing$ est de justifier que $\vec{0} \in F$.
- E et $\{\vec{0}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E, $\{\vec{0}\}$ est appelé le sous-espace nul.
- Avec $\vec{u} \in \mathrm{E}-\{\vec{0}\}$, le sous-ensemble $\mathbb{R}\vec{u}=\{\alpha\vec{u}\,/\,\alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}$.

Exemples

1) Dans $(\mathcal{V}_2;+;\cdot)$, l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}=(2;1)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{V}_2;+;\cdot)$. C'est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire $\mathbb{R}\vec{u}$.

2) L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et l'ensemble $i\mathbb{R}$ des imaginaires purs sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $(\mathbb{C};+;\times)$.

3) On note $\mathscr{C}(I;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, $\mathscr{C}(I;\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$. De même, l'ensemble $\mathscr{D}(I;\mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$.

4) L'ensemble $\mathscr{P}_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$: ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

5) Dans l'espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$, l'ensemble F des solutions d'une équation différentielle linéaire de la forme $ay''+by'+cy=0$ (avec $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$) est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$.
En effet, F n'est pas vide car il contient au moins la fonction nulle. Si deux fonctions f_1 et f_2 sont solutions de l'équation différentielle, il en est de même de la fonction somme f_1+f_2. Enfin, si f_1 est une solution et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la fonction αf_1 est solution.

6) L'ensemble $F=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+z=1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel du $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$ car il ne contient pas le vecteur nul $\vec{0}=(0;0;0)$.

7) L'ensemble $G=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / xy=0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel du $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$ car il n'est stable pour l'addition. Contre-exemple : $(1;0)\in G$ et $(0;1)\in G$, mais $(1;0)+(0;1)=(1;1)\notin G$.

2.2. CARACTÉRISATION D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

Proposition 3

Soit $(\mathrm{E};+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel et F une partie de E . On a l'équivalence :

$$(F \text{ est un sous-espace vectoriel de E}) \Leftrightarrow \begin{cases} F\neq\varnothing \\ (\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall(\vec{x};\vec{y})\in F^2)\quad \alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in F \end{cases}$$

Preuve

$(\Rightarrow)$ Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E . Alors, $F\neq\varnothing$. Soit maintenant $(\vec{x};\vec{y})\in F^2$ et $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$. Par définition d'un sous-espace vectoriel, on peut affirmer successivement que $\alpha\vec{x}\in F$ et $\beta\vec{y}\in F$ puis que $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in F$.

$(\Leftarrow)$ La réciproque est facile en prenant successivement $\alpha=\beta=1$, puis $\beta=0$.

Remarques

- Dans un contexte de sous-espaces vectoriels, on étudie l'appartenance de $\vec{0}$ à F :
  - $\vec{0}\in F$ donne $F\neq\varnothing$,
  - $\vec{0}\notin F$, alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E .
- Lorsqu'on souhaite montrer qu'un ensemble F est un sous-vectoriel d'un espace vectoriel E , on aura le choix, ou bien d'utiliser la définition ou bien de se ramener à la proposition 3.
- Dans la pratique, pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel réel, il peut être beaucoup plus facile de démontrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel réel connu. C'est pour cette raison qu'il faut connaître quelques espaces vectoriels réels les plus familiers, à savoir :

  $(\mathbb{R};+;\times)$; $(\mathbb{C};+;\cdot)$; $(\mathbb{R}^n;+;\cdot)$; $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$; $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R});+;\cdot)$; $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$, ...

Exemples

1) On considère l'ensemble : $\mathrm{E}=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=2x\}$

Montrons que $(\mathrm{E};+;\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$:

On a $(0;0)\in\mathrm{E}$ (car $0=2\times0$) et donc $\mathrm{E}\neq\varnothing$.

Soit $\vec{u}_1=(x_1;y_1)$ et $\vec{u}_2=(x_2;y_2)$ deux éléments de E et $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

On a $y_1 = 2x_1$ et $y_2 = 2x_2$, par conséquent :

$$\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 = \alpha(x_1;y_1) + \beta(x_2;y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2)$$

On a : $\alpha y_1 + \beta y_2 = 2\alpha x_1 + 2\beta x_2 = 2(\alpha x_1 + \beta x_2)$, ce qui montre que : $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 \in \mathrm{E}$.

Par suite, $(\mathrm{E};+;\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$.

2) On considère l'ensemble : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Montrons que $(F;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel :

Puisque $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel et $F \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, alors il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$. On pose pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$: $M(a;b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$

On a $F \neq \varnothing$ car $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$ (remarquer bien que $O_2 = M(0;0)$). Soit maintenant $M(a_1;b_1)$ et $M(a_2;b_2)$ deux éléments de F et $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\alpha M(a_1;b_1) + \beta M(a_2;b_2) &= \alpha\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1-b_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_2+b_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2-b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(a_1+b_1)+\beta(a_2+b_2) & \alpha b_1+\beta b_2 \\ -\alpha b_1 - \beta b_2 & \alpha(a_1-b_1)+\beta(a_2-b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\alpha a_1+\beta a_2)+(\alpha b_1+\beta b_2) & \alpha b_1+\beta b_2 \\ -(\alpha b_1+\beta b_2) & (\alpha a_1+\beta a_2)-(\alpha b_1+\beta b_2) \end{pmatrix} \\
&= M(\alpha a_1+\beta a_2;\, \alpha b_1+\beta b_2)
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\alpha M(a_1;b_1) + \beta M(a_2;b_2) \in F$. Ainsi, $(F;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Applications

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$:

$\mathrm{E} = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x+2y+3z=0\}$; $F = \{(x+y;\, 2x-y; -3x+2y) / x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$

$G = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \text{ et } 2x-5y+z=0\}$; $H = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x = 3y = -z\}$

2. Justifier pourquoi les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$\mathrm{E}_1 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x-y+z=5\}$; $\mathrm{E}_2 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z \leq 1\}$

$\mathrm{E}_3 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x^2-y^2=0\}$; $\mathrm{E}_4 = \{(x;1;z) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\}$

3. Soit $\mathbb{S}$ l'ensemble des suites numériques, muni de l'addition « + » et de la multiplication par un réel « · ».

a) Montrer que $(\mathbb{S};+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

b) Est-ce que les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de l'espace $\mathbb{S}$?

$S_1 = \{(u_n) \in \mathbb{S} / (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = 3u_n\}$; $S_2 = \{(u_n) \in \mathbb{S} / \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty\}$

3 FAMILLES LIBRES OU GÉNÉRATRICES - BASES

3.1. COMBINAISONS LINÉAIRES

Définition 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,...., $\vec{x}_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E;+;\cdot)$.

On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,...., $\vec{x}_n$, ou encore combinaison linéaire de la famille $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$, tout vecteur de la forme :

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n.\vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{x}_i \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$$

Les réels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{x}_i$.

Remarques

- Il s'agit évidemment d'une généralisation de la définition d'une combinaison linéaire de deux vecteurs vue dans la proposition 3. De plus, un vecteur $\vec{x}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,...., $\vec{x}_n$ si, et seulement si, il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tels que : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{x}_i$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de $(E;+;\cdot)$ contenant les vecteurs $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,...., $\vec{x}_n$, alors toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient encore à F.

Exemples

1) Les combinaisons linéaires de la famille à un seul élément $(\vec{u})$ sont les vecteurs $\alpha\vec{u}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, celles de la famille à deux éléments $(\vec{u};\vec{v})$ sont les vecteurs $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

2) Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$, on considère les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de M_1 et M_2 car :

$$3M_1 + 2M_2 = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = M$$

3) Dans l'espace vectoriel $(\mathcal{P}_3;+;\cdot)$ des polynômes de degré inférieur ou égale à 3, on considère les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 définis sur $\mathbb{R}$ par : $P_0(x) = 1$; $P_1(x) = x$; $P_2(x) = x^2$; $P_3(x) = x^3$

Tout élément P de $\mathcal{P}_3$ peut s'écrire sous la forme : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, c'est-à-dire $P(x) = a.P_3(x) + b.P_2(x) + c.P_1(x) + d.P_0(x)$. Ainsi, tout élément de $\mathcal{P}_3$ est combinaison linéaire de la famille des polynômes $(P_0;P_1;P_2;P_3)$.

4) Dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\times)$, tout nombre complexe z peut être considéré comme combinaison des nombres 1 et i car : $(\forall z\in\mathbb{C})\ (\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2)\ z=a+ib$.

Applications

1. On munit $\mathbb{R}^3$ des lois d'addition et de multiplication par un réel comme suit :

$$(x;y;z)+(x';y';z')=(x+x';y+y';z+z') \quad \text{et} \quad \alpha(x;y;z)=(\alpha x;\alpha y;\alpha z) \text{ pour tout } \alpha\in\mathbb{R}.$$

On considère les vecteurs : $\vec{u}=(1;-4;5)$ et $\vec{v}=(1;2;-4)$

a) Montrer que le vecteur $\vec{w}=(3;18;-30)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Le vecteur $\vec{p}=(-7;1;4)$ peut-il s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$? Justifier.

2. Dans l'espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$, on considère les fonctions suivantes :

$$\omega_1 : x\mapsto e^{-2x}\cos x \quad ; \quad \omega_2 : x\mapsto e^{-2x}\sin x$$

Et l'ensemble : $E=\{\alpha\omega_1+\beta\omega_2 \ / \ (\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\}$

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$.

b) Montrer que si $f\in E$ alors $f'\in E$. (f' étant la dérivée de la fonction f).

c) Soit $a\in\mathbb{R}$ et on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x)=e^{-2x}\cos(x+a)$

Montrer que f_a est une combinaison linéaire de ω_1 et ω_2.

3. Soit σ un nombre complexe non réel (c'est-à-dire $\sigma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$).

Montrer que tout nombre complexe est combinaison linéaire de 1 et σ.

3.2. FAMILLES LIBRES - FAMILLES LIÉES

Définition 6

Soit E un espace vectoriel réel, $n\in\mathbb{N}^*$ et $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est une famille libre de E, si :

$$(\forall(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n) \ ; \ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i=\vec{0} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$$

On dit encore dans ce cas-là que les vecteurs $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,..., $\vec{x}_n$ sont linéairement indépendants.

- On dit que la famille $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est une famille liée de E, si elle n'est pas libre. Cela signifie donc qu'il existe une famille $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)$ de réels **non tous nuls** vérifiant $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i=\vec{0}$:

On dit encore dans ce cas-là que les vecteurs $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,..., $\vec{x}_n$ sont linéairement dépendants.

Remarque

Dans la pratique, lorsque qu'on s'intéresse à la liberté éventuelle d'une famille $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$, on considère $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n.\vec{x}_n=\vec{0}$. Si cette égalité nous conduit forcément vers $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, alors, la famille $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est libre. Dans le cas contraire, elle est liée.

Exemples

1) Plaçons-nous dans $E=\mathbb{R}^3$ et considérons les trois vecteurs :

$$\vec{u}_1=(2;-1;3) \quad ; \quad \vec{u}_2=(1;-3;-1) \quad ; \quad \vec{u}_3=(0;1;1)$$

La famille $(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ est liée car $\frac{1}{5}\vec{u}_1-\frac{2}{5}\vec{u}_2-\vec{u}_3=\vec{0}$.

2) Plaçons-nous maintenant dans $E=\mathcal{P}_3$ et intéressons-nous aux polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 définis sur $\mathbb{R}$ par : $P_1(x)=x^3-1$; $P_2(x)=x^3+x$; $P_3(x)=x^2-x$; $P_4(x)=-1+x^2$

La famille $(P_1;P_2;P_3;P_4)$ est libre. En effet, si $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4)\in\mathbb{R}^4$ vérifie $\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3+\alpha_4P_4=0$,

Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $(\alpha_1+\alpha_2)x^3+(\alpha_3+\alpha_4)x^2+(\alpha_2-\alpha_3)x+(-\alpha_1-\alpha_4)=0$.

Un polynôme n'est nul que lorsque tous ses coefficients sont nuls. Cela conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_3+\alpha_4=0\\ \alpha_2-\alpha_3=0\\ -\alpha_1-\alpha_4=0\end{cases} ; \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases}\alpha_2=-\alpha_1\\ \alpha_4=-\alpha_3\\ -\alpha_1-\alpha_3=0\\ -\alpha_1+\alpha_3=0\end{cases} ; \text{ d'où : } \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\\ \alpha_4=0\end{cases}.$$

Ainsi, la famille $(P_1;P_2;P_3;P_4)$ est libre.

3) Toute famille de vecteurs $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ contenant le vecteur nul est liée : en effet, si $\vec{x}_j=\vec{0}$, alors en prenant $\alpha_i=0$ pour $i\neq j$, et $\alpha_j=1$, on a $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i=\vec{x}_j=\vec{0}$.

4) Soit $\sigma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Montrons que la famille $(1;\sigma)$ est libre dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\times)$:

Puisque $\sigma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ alors sa forme algébrique est $\sigma=\mathrm{Re}(\sigma)+i\,\mathrm{Im}(\sigma)$ avec $\mathrm{Im}(\sigma)\neq0$.

Soit maintenant $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha\times1+\beta\times\sigma=0$. On a alors :

$$\alpha+\beta\sigma=0\Rightarrow\alpha+\beta(\mathrm{Re}(\sigma)+i\,\mathrm{Im}(\sigma))=0\Rightarrow\alpha+\beta\,\mathrm{Re}(\sigma)+i\beta\,\mathrm{Im}(\sigma)=0$$

Un nombre complexe est nul si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles. On obtient alors le système : $\begin{cases}\alpha+\beta\,\mathrm{Re}(\sigma)=0\\ \beta\,\mathrm{Im}(\sigma)=0\end{cases}$

Comme $\mathrm{Im}(\sigma)\neq0$ alors nécessairement $\beta=0$ et donc, d'après $\alpha+\beta\,\mathrm{Re}(\sigma)=0$, $\alpha=0$.

Par suite, la famille $(1;\sigma)$ est libre dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\times)$.

5) Plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}^3$ et considérons les trois vecteurs :

$$\vec{u} = (\cos a;\ \cos b; \cos c) \quad ; \quad \vec{v} = (\sin a;\ \sin b; \sin c) \quad ; \quad \vec{w} = (\sin(x+a);\ \sin(x+b); \sin(x+c))$$

où $(a;b;c;x) \in \mathbb{R}^4$.

Montrons que la famille $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est liée :

On a pour tout $(a;b;c;x) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} \sin(x+a) = \sin x.\cos a + \cos x.\sin a \\ \sin(x+b) = \sin x.\cos b + \cos x.\sin b \\ \sin(x+c) = \sin x.\cos c + \cos x.\sin c \end{cases}$$

Il s'ensuit donc : $\vec{w} = \sin x(\cos a; \cos b; \cos c) + \cos x(\sin a; \sin b; \sin c)$, d'où : $\vec{w} = (\sin x)\vec{u} + (\cos x)\vec{v}$

Par suite, la famille $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est liée.

Applications

1. Dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$, on considère les fonctions :

$$f : x \mapsto x+1 \quad ; \quad g : x \mapsto x^2 \quad ; \quad h : x \mapsto x^2 - x + 3$$

Montrer que la famille $(f;g;h)$ est libre.

2. Dans l'espace vectoriel $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la famille $(D;J)$ est libre et que la famille $(A;D;J)$ est liée.

b) La famille $(A;D)$ est-elle libre ? Justifier.

3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, déterminer si les familles de vecteurs suivants sont libres ou liées :

a) $\vec{u} = (1;2;3)$ et $\vec{v} = (3;2;1)$. ; b) $\vec{u} = (-1;0;2)$, $\vec{v} = (0;1;-2)$ et $\vec{w} = (2;1;0)$.

c) $\vec{u} = (7;2;-1)$, $\vec{v} = (1;-3;2)$, $\vec{w} = (5;1;1)$ et $\vec{t} = (-2;1;3)$.

Proposition 4

Soit E un espace vectoriel réel.

1) Une famille $(\vec{x})$ constituée d'un seul vecteur est libre si, et seulement si, $\vec{x} \neq \vec{0}$.

2) Les éléments d'une famille libre sont deux à deux distincts.

3) Si une famille $B = (\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est libre, alors toute famille contenue dans B est aussi libre.

4) Si une famille $B = (\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est liée, alors toute famille contenant B est aussi liée.

5) Une famille $B = (\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs de B est une combinaison linéaire des $n-1$ autres.

Preuve

1) Supposons que la famille $(\vec{x})$ est libre. Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ était nul, on aurait $1\,\vec{x} = \vec{0}$ ce qui entraînerait $(\vec{x})$ liée.
Réciproquement, si $\vec{x} \neq \vec{0}$, l'égalité $\alpha\vec{x} = \vec{0}$ entraîne $\alpha = 0$, ce qui prouve la liberté de $(\vec{x})$.

2) Supposons que la famille $B = (\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ contient deux vecteurs égaux. Supposons par exemple que $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$. Alors : $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 0\vec{x}_3 + ... + 0\vec{x}_n = \vec{0}$, ce qui est en contradiction avec le fait que la famille $B = (\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est libre. D'où le résultat.

3) Supposons que la famille $B = (\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est libre. Considérons une sous-famille, par exemple $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_p)$ et supposons que $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_p\vec{x}_p = \vec{0}$. On peut encore écrire cette égalité :
$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_p\vec{x}_p + 0\vec{x}_{p+1} + 0\vec{x}_{p+2} + ... + 0\vec{x}_n = \vec{0}$, ce qui entraîne la nullité des α_i.

4) Supposons que la famille $B = (\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est liée. Soit $(\vec{y}_1;\vec{y}_2;...;\vec{y}_p) \in E^p$. Si la famille de vecteurs $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n;\vec{y}_1;\vec{y}_2;...;\vec{y}_p)$ était libre, sa sous-famille $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ serait aussi libre d'après 3), ce qui est faux.

5) Supposons que la famille $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est liée. Par définition, il existe $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n - \{0;0;...;0\}$ tel que $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0}$. L'un des α_i est non nul. Supposons qu'il s'agit de α_1. On peut donc écrire : $\vec{x}_1 = -\sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\vec{x}_k$, ce qui montre que l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
Réciproquement, supposons que l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des $n-1$ autres. On a, par exemple $\vec{x}_1 = \sum_{k=2}^{n} \beta_k\vec{x}_k$, d'où $\vec{x}_1 - \sum_{k=2}^{n} \beta_k\vec{x}_k = \vec{0}$. Nous avons donc une combinaison linéaire nulle des vecteurs $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,..., $\vec{x}_n$ avec au moins un coefficient non nul $(1 \neq 0)$, donc la famille est liée.

3.3. FAMILLES GÉNÉRATRICES

Définition 7

Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit qu'un vecteur $\vec{x}$ est **engendré** par la famille $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs cette famille. Autrement dit :

$$(\exists(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n) \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{x}_i$$

- On dit que la famille $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ est une **famille génératrice** de E, si :

$$(\forall \vec{x} \in \mathrm{E}) \; (\exists(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n) \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{x}_i$$

On dit encore dans ce cas-là que la famille $(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ **engendre** l'espace vectoriel E.

Exemples

1) La famille $(1;i)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\cdot)$ car tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = a + ib$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

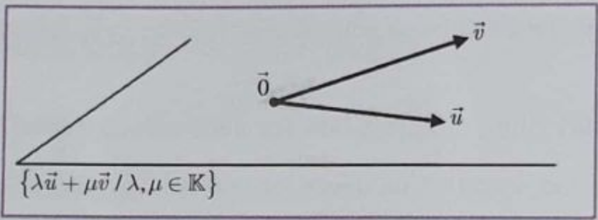
2) Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors la famille des vecteurs $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;...;\vec{e}_n)$ définie par :

$$\vec{e}_1 = (1;0;...;0) \quad ; \quad \vec{e}_2 = (0;1;0...;0) \quad ; \quad \vec{e}_3 = (0;0;1;0;...;0) \quad ; \quad . \; . \; . \quad ; \quad \vec{e}_n = (0;...;0;1)$$

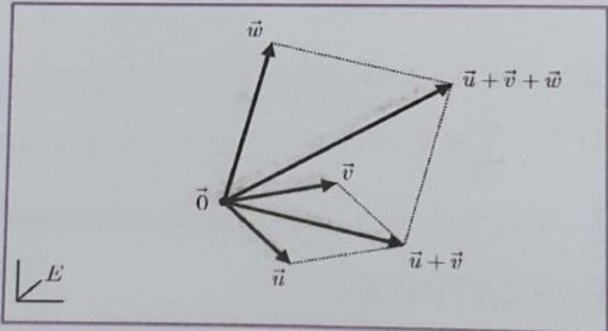
est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^n;+;\cdot)$, puisque, pour tout vecteur $\vec{x} = (x_1;x_2;...;x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$

En pratique, on se contente souvent de $n \in \{2;3;4\}$. Géométriquement, on « voit » que :

- deux vecteurs non colinéaires du plan en forment une partie génératrice :



- trois vecteurs non coplanaires de l'espace en forment une partie génératrice.



3) Désignons par E l'espace vectoriel réel constitué par les suites arithmétiques. Considérons les deux suites $U = (u_n)$ et $V = (v_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n$ et $v_n = 1$

La famille $(U;V)$ est génératrice de E car si $W = (w_n)$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + nr$, ce qui peut encore s'écrire $W = w_0V + rU$.

Applications

1. Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$, on considère les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la famille $\mathrm{B} = (M_1;M_2;M_3)$ engendre la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$.

2. On rappelle que $(\mathcal{P}_3;+,\cdot)$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On considère la famille $B=(f_1;f_2;f_3;f_4)$ formée par les fonctions :

$f_1: x \mapsto x^2-4x+1$; $f_2: x \mapsto -x^2+2$; $f_3: x \mapsto 3x-4$; $f_4: x \mapsto 4x^3+x$

Dans chacun des cas suivants, la fonction f est-elle engendrée par la famille B ?

a) $f: x \mapsto -4x^3+5x^2-13x-1$; b) $f: x \mapsto 5x+7$; c) $f: x \mapsto 0$

3. Montrer que la famille $B=((1;2);(-1;1);(2;1))$ est génératrice de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$.

4. On pose $\vec{u}=(-5;3)$ et $\vec{v}=(a;9)$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la famille $B=(\vec{u};\vec{v})$ engendre l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$.

3.4. BASES D'UN ESPACE VECTORIEL RÉEL

Définition 8

Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $B=(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

On dit que la famille B est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E, ce qui revient à écrire :

$$(\forall \vec{x} \in E)\ (\exists!\,(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n) \quad \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$$

Dans ces conditions, les nombres α_1 ; α_2 ; ... ; α_n s'appellent les composantes (ou coordonnées) du vecteur $\vec{x}$ dans la base B, et on écrit $\vec{x}(\alpha_1;...;\alpha_n)_{(B)}$ ou tout simplement $\vec{x}(\alpha_1;...;\alpha_n)$.

Le réel α_k s'appelle la $k^{\text{ème}}$ composant (ou coordonnée) de $\vec{x}$ dans la base B.

Remarques

- Plaçons-nous dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^n;+;\cdot)$. On a déjà vu que la famille de vecteurs $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2;...;\vec{e}_n)$ définie par :

  $\vec{e}_1=(1;0;...;0)$; $\vec{e}_2=(0;1;0...;0)$; $\vec{e}_3=(0;0;1;0;...;0)$; . . . ; $\vec{e}_n=(0;...;0;1)$

  est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel. Par ailleurs, si $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_n\vec{e}_n=\vec{0}$, alors $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)=(0;0;...;0)$, d'où $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, ce qui montre que la famille B est libre. C'est donc une base, appelée base canonique de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^n;+;\cdot)$. C'est la base la plus naturelle et la plus simple de $\mathbb{R}^n$.
- Une fois choisie une base $B=(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ de E, il arrive souvent que l'on identifie chaque vecteur $\vec{x} \in E$ avec le n-uplet de ses composantes. C'est pourquoi, une base doit être une famille (ordonnée) et non un ensemble. Par exemple, si $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est une base de E, alors le vecteur de composantes $(1;2;3)$ dans la base B est $\vec{e}_1+2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$ et non pas $\vec{e}_2+2\vec{e}_1+3\vec{e}_3$.

Exemples

1) Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$, la famille $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1=(1;0)$ et $\vec{e}_2=(0;1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
C'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2) Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$, la famille $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_1=(1;0;0),\vec{e}_2=(0;1;0)$ et $\vec{e}_3=(0;0;1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. C'est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Comme il a été déjà signalé dans la remarque précédente, cette base avec la base canonique de $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$ vue dans l'exemple précédent sont les plus naturelles et les plus simples pour modéliser les problèmes, que ça soit en mathématiques, en physique, en chimie, en astronomie, en économie ou en sciences industrielles.

3) La famille $(1;i)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\times)$, puisqu'elle est libre et qu'elle est génératrice de $\mathbb{C}$ comme on l'a vu précédemment. Les coordonnées d'un nombre complexe dans cette base sont ses partie réelle et imaginaire.
Plus généralement, si $\sigma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, alors la famille $(1;\sigma)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\times)$.
En effet, on a déjà vu que $(1;\sigma)$ est une famille libre de $(\mathbb{C};+;\times)$. Montrons qu'elle est génératrice :
Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $z=x+\sigma y$.
On a : $z=x+\sigma y\Leftrightarrow a+ib=x+y(\mathrm{Re}(\sigma)+i\,\mathrm{Im}(\sigma))\Leftrightarrow a+ib=x+y\,\mathrm{Re}(\sigma)+i\,y\,\mathrm{Im}(\sigma)$
ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases}x+y\,\mathrm{Re}(\sigma)=a\\ b=y\,\mathrm{Im}(\sigma)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a-y\,\mathrm{Re}(\sigma)=a-\dfrac{\mathrm{Re}(\sigma)}{\mathrm{Im}(\sigma)}b\\ y=\dfrac{b}{\mathrm{Im}(\sigma)}\end{cases}\qquad(\text{car }\mathrm{Im}(\sigma)\neq 0)$$

Ainsi, la famille $(1;\sigma)$ est libre et génératrice de $\mathbb{C}$, donc c'est une base de cet espace vectoriel.

4) Posons $E=\mathcal{P}_n$ où $n\in\mathbb{N}^*$. Considérons les polynômes suivants :

$$P_0:x\mapsto 1\quad;\quad P_1:x\mapsto x\quad;\quad P_2:x\mapsto x^2\quad;\quad P_3:x\mapsto x^3\quad;\quad\ldots\quad;\quad P_n:x\mapsto x^n$$

Montrons que la famille $B=(P_0;P_1;\ldots;P_n)$ est une base de l'espace vectoriel réel $\mathcal{P}_n$:
On sait que tout polynôme $P:x\mapsto\alpha_nx^n+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$ est par définition une combinaison linéaire des polynômes $P_0,\ldots,P_n$. La famille B est donc génératrice de $\mathcal{P}_n$. Par ailleurs, si $\alpha_nx^n+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0=0$, alors, par définition d'un polynôme nul, tous les coefficients α_i sont nuls, ce qui montre que B est libre.
Cette famille de polynômes est donc une base, appelée base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n$.

5) La famille $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$.

Applications

1. On considère l'ensemble : $E = \{(a;a;b) / (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$

a) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est espace vectoriel réel.

b) Déterminer une base de $(E;+;\cdot)$.

2. On considère l'ensemble suivant : $E = \{f : x \mapsto (ax+b)e^{2x} / (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$

a) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est espace vectoriel réel.

b) Soit f_1 et f_2 les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$

Montrer que la famille $B = (f_1; f_2)$ est une base de l'espace vectoriel E.

c) Montrer que la fonction $u : x \mapsto \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}\right)e^{2t}dt$ est un élément de E puis déterminer ses coordonnées dans la base B.

3. Soit E l'ensemble des fonctions numériques f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = P(x)\cos x + Q(x)\sin x$ où P et Q sont des fonctions affines. (C'est-à-dire de la forme $x \mapsto ax+b$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$)

a) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est espace vectoriel réel.

b) On considère la famille $B = (f_1; f_2; f_3; f_4)$ telle que :

$f_1(x) = \cos x$; $f_2(x) = \sin x$; $f_3(x) = x\cos x$; $f_4(x) = x\sin x$

Montrer que B est une base de l'espace vectoriel E.

c) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \cos(x+a)$ avec $a \in \mathbb{R}$ est un élément de E puis déterminer ses coordonnées dans la base B.

Proposition 5

Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (\vec{x}_1; \vec{x}_2; ...; \vec{x}_n)$ une base de E. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E tels que : $\vec{x}(\alpha_1; ...; \alpha_n)_{(B)}$ et $\vec{y}(\beta_1; ...; \beta_n)_{(B)}$. Alors :

$\vec{x} + \vec{y}(\alpha_1 + \beta_1; ...; \alpha_n + \beta_n)_{(B)}$ et $\lambda\vec{x}(\lambda\alpha_1; ...; \lambda\alpha_n)_{(B)}$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$)

3.5. DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

Proposition 6

Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (\vec{x}_1; \vec{x}_2; ...; \vec{x}_n)$ une base de E. Alors, toutes les bases de E ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé la dimension de E et noté dim E, et on écrit $\dim E = n$.

Exemples

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dim \mathbb{R}^n = n$. En particulier :

- L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}$ est de dimension 1. Il admet pour base (1) et plus généralement toute famille formée d'un unique élément non nul.
- L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. Il admet pour base $B = ((1;0);(0;1))$.
- L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. Il admet pour base $B = ((1;0;0);(0;1;0);(0;0;1))$.

Ainsi : $\dim \mathbb{R} = 1$; $\dim \mathbb{R}^2 = 2$; $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

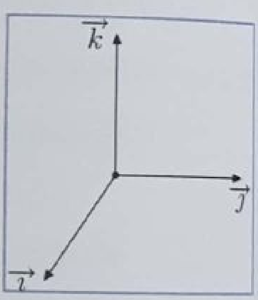
2) L'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\times)$ est de dimension 2 : $\dim \mathbb{C} = 2$.

3) L'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R});+;\cdot)$ est de dimension 4 : $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$. Il admet pour base $B = (A_1;A_2;A_3;A_4)$ avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Plaçons-nous dans l'espace vectoriel $(\mathcal{V}_3;+;\cdot)$ constitué par les vecteurs de l'espace ordinaire.

On a déjà vu dans le cours de géométrie de l'espace (1ère année du bac) que $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est une base de $\mathcal{V}_3$ avec : $\vec{i} = (1;0;0)$; $\vec{j} = (0;1;0)$; $\vec{k} = (0;0;1)$



Il s'ensuit donc : $\dim \mathcal{V}_3 = 3$.

Soit maintenant F un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{V}_3;+;\cdot)$ différent de $\{\vec{0}\}$.

- Si $\dim F = 1$, alors F est un espace vectoriel engendré par un vecteur non nul $\vec{u}$. On dit alors que F est la droite vectorielle de direction $\vec{u}$.
- Si $\dim F = 2$, alors F est un espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On dit alors que F est le plan vectorielle dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

A titre d'exemple, considérons le sous-ensemble F de $(\mathcal{V}_3;+;\cdot)$ définie par :

$$F = \{\vec{u} = (x;y;z) \in \mathcal{V}_3 \;/\; x - y + 3z = 0\}$$

On montre facilement que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{V}_3;+;\cdot)$. Déterminons une base de F.

On a pour tout $\vec{u} = (x;y;z) \in F$, $y = x + 3z$. il s'ensuit donc :

$$\vec{u} = (x;x+3z;z) = (x;x;0) + (0;3z;z) = x(1;1;0) + z(0;3;1)$$

On pose : $\vec{v} = (1;1;0)$ et $\vec{w} = (0;3;1)$. Il s'ensuit donc que $B = (\vec{v};\vec{w})$ est une famille génératrice de F.

Il est facile de montrer que $B = (\vec{v};\vec{w})$ est libre. Ainsi, $B = (\vec{v};\vec{w})$ est une base de F et que $\dim F = 2$.

5) Posons $E = \mathcal{P}_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les polynômes suivants :

$$P_0 : x \mapsto 1 \quad ; \quad P_1 : x \mapsto x \quad ; \quad P_2 : x \mapsto x^2 \quad ; \quad P_3 : x \mapsto x^3 \quad ; \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \quad ; \quad P_n : x \mapsto x^n$$

On a déjà vu que $B = (P_0;P_1;\ldots;P_n)$ est une base de l'espace vectoriel réel $\mathcal{P}_n$. Par suite : $\dim \mathcal{P}_n = n+1$.

Scanné avec CamScanner

Applications

1. On considère l'ensemble $E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y-z=0\}$.

On munit E de l'addition « + » et la multiplication par un réel définies sur $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $(E;+;\cdot)$ est espace vectoriel réel puis déterminer sa dimension.

2. On considère l'ensemble : $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que $(K;+;\cdot)$ est espace vectoriel réel puis déterminer sa dimension.

3. Soit E l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (a\sin x + b\cos x)e^{3x} \quad \text{où} \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

a) Montrer que E, muni de l'addition des fonctions et la multiplication par un réel, est un espace vectoriel réel.

b) On considère la famille $B = (f_1;f_2)$ telle que : $f_1(x) = e^{3x}\cos x$ et $f_2(x) = e^{3x}\sin x$

Montrer que B est une base de E.

c) Soit f un élément de E.

Montrer que f' est un élément de E et déterminer les coordonnées de f' dans la base B.

Proposition 7

1) Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $B = (\vec{i};\vec{j})$ un base de E.

Soit $B' = (\vec{u};\vec{v})$ une famille de vecteurs de E tels que $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ dans la base B. Alors :

(B′ est une base de E) ⇔ (B′ est génératrice de E) ⇔ (B′ est libre dans E) ⇔ $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$

2) Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $B = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un base de E.

Soit $B' = (\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ une famille de vecteurs de E tels que $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ et $\vec{w}(a'';b'';c'')$ dans la base B. Alors :

(B′ est une base de E) ⇔ (B′ est génératrice de E) ⇔ (B′ est libre dans E) ⇔ $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$

Remarque

La proposition 7 est d'une importance pratique capitale. Elle affirme qu'une famille de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel devient une base dès qu'elle est libre ou génératrice. En pratique, il est plus facile de vérifier qu'elle est libre soit en calculant le déterminant soit par un calcul direct.

A EXEMPLE D'UNE FAMILLE LIBRE

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ; \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ; \quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin(x) \qquad\quad x \mapsto \sin(x^2) \qquad\quad x \mapsto \sin(x^3)$$

Dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{F};+;\cdot)$, on considère la famille $B=(f_1;f_2;f_3)$.

Montrer que la famille B est libre.

SOLUTION

Soit α_1, α_2 et α_3 des réels tels que $\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3=0$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\alpha_1\sin(x)+\alpha_2\sin(x^2)+\alpha_3\sin(x^3)=0 \qquad (*)$$

En dérivant cette dernière égalité on obtient : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \alpha_1\cos(x)+2\alpha_2 x\cos(x^2)+3\alpha_3 x^2\cos(x^3)=0$.

En prenant $x=0$ on obtient $\alpha_1=0$. En prenant $x=\sqrt[3]{\pi}$ dans la relation $(*)$ on obtient :

$\alpha_2\sin(\sqrt[3]{\pi})+\alpha_3\sin(\pi)=0$, ce qui donne $\alpha_2=0$. En prenant $x=\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ dans la relation $(*)$ on obtient $\alpha_3=0$

En résumé : $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Ainsi, la famille B est libre.

B ESPACE VECTORIEL DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose : $e_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $e_2(x)=\cos x$; $e_3(x)=\sin x$.

1) Soit E l'ensemble des fonctions numériques f tels que : $(\exists(a;b;c)\in\mathbb{R}^3)\ f=ae_1+be_2+ce_3$

a) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

b) Montrer que $B=(e_1;e_2;e_3)$ est une base de l'espace vectoriel $(E;+;\cdot)$.

c) Soit $f\in E$ et f' sa fonction dérivée.

Montrer que $f'\in E$ puis déterminer les coordonnées de f' dans la base B en fonction de celles de f.

2) Soit $g=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3$ un élément de E et $t\in\mathbb{R}$.

On considère la fonction g_t définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_t(x)=g(t-x)$.

Montrer que $g_t\in E$ et déterminer les coordonnées de g_t dans la base B en fonction de α, β, γ et t.

3) Soit f et g deux éléments de E. On considère le nombre réel $f\top g$ tel que : $f\top g=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)g(t)dt$.

On pose : $f=ae_1+be_2+ce_3$ et $g=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3$

Calculer $f \top g$ en fonction des coordonnées de f et g.

4) Soit f et g deux éléments de E. On pose : $(\forall t \in \mathbb{R})\ (f * g)(t) = f \top g_t$

Montrer que $f * g \in E$ puis déterminer les coordonnées de $f * g$ dans la base B en fonction de celles de f et g.

SOLUTION

1) a) Montrons que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel :

Puisque $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel, alors il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$.

- La fonction nulle θ appartient à E, donc $E \neq \varnothing$.
- Soit $(\mu;\lambda) \in \mathbb{R}^2$ et $f = ae_1 + be_2 + ce_3$ et $g = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ deux élément de E. On a :

$\lambda f + \mu g = (\lambda a + \mu\alpha)e_1 + (\lambda b + \mu\beta)e_2 + (\lambda c + \mu\gamma)e_3$. Par conséquent : $\lambda f + \mu g \in E$

En résumé, $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

b) Montrons que B base de E :

Par définition de E, la famille B engendre l'espace vectoriel E. Montrons maintenant que B est libre :

Soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = \theta$. Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \dfrac{a}{\sqrt{2}} + b\cos x + c\sin x = 0$

en prenant $x = 0$ puis $x = \pi$ puis $x = \dfrac{\pi}{2}$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{2}} + b = 0 \\ \dfrac{a}{\sqrt{2}} - b = 0 \\ \dfrac{a}{\sqrt{2}} + c = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $a = b = c = 0$. Ainsi, la famille B est libre et donc c'est une base de E.

c) Soit $f = ae_1 + be_2 + ce_3$ un élément de E. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \dfrac{a}{\sqrt{2}} + b\cos x + c\sin x$, donc $f'(x) = c\cos x - b\sin x$, c'est-à-dire que $f' = ce_2 - be_3$. Par suite, $f' \in E$ et le système de coordonnées de f' dans la base B est donnée par $(0;c;-b)$.

2) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g_t(x) = g(t-x) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} + \beta\cos(x-t) + \gamma\sin(x-t)$

Il s'ensuit donc :

$$g_t(x)=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}+\beta(\cos t\cos x+\sin t\sin x)+\gamma(-\sin t\cos x+\cos t\sin x)$$
$$=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}+(\beta\cos t-\gamma\sin t)\cos x+(\beta\sin t+\gamma\cos t)\sin x$$

Donc : $g_t=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}e_1+(\beta\cos t-\gamma\sin t)e_2+(\beta\sin t+\gamma\cos t)e_3$. Par suite, $g_t\in E$ et le système de coordonnées de g_t dans la base B est donnée par $(\alpha;\beta\cos t-\gamma\sin t\,;\beta\sin t+\gamma\cos t)$.

3) On a : $\int_0^{2\pi}\cos^2 x dx=\int_0^{2\pi}\sin^2 x dx=\pi$ et $\int_0^{2\pi}\cos x dx=\int_0^{2\pi}\sin x dx=0$ et $\int_0^{2\pi}(\sin x-\cos x)dx=0$

Donc : $e_i \top e_i=1$ et $e_i \top e_j=0$ pour tout $i\neq j$. Ainsi on trouve : $f\top g=a\alpha+b\beta+c\gamma$

4) D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$f*g(x)=f\top g_x=a\alpha+b(\beta\cos x-\gamma\sin x)+c(\beta\sin x+\gamma\cos x)$$

D'où : $f*g(x)=a\alpha+(b\beta+c\gamma)\cos x+(-b\gamma+c\beta)\sin x$. Ainsi :

$$f*g=\sqrt{2}a\alpha e_1+(b\beta+c\gamma)e_2-(b\gamma-c\beta)e_3$$

Ce qui montre que $f*g\in E$ et les coordonnées de $f*g$ dans la base B est : $(\sqrt{2}a\alpha\,;b\beta+c\gamma\,;-b\gamma+c\beta)$.

C ESPACE VECTORIEL ET MATRICES

Pour tout réel p, on pose : $E_p=\left\{M_p(a;b)=\begin{pmatrix} a & b\\ pb & a\end{pmatrix} \;/\; (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau de zéro $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. On rappelle aussi que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Partie A :

1) Montrer que $(E_p\,;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel et déterminer une base et sa dimension.

2) Montrer que E_p est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\,;\times)$ et en déduire que $(E_p\,;+;\times)$ est un anneau commutatif.

3) Montrer l'équivalence suivante : $p<0 \Leftrightarrow (E_p\,;+;\times)$ est un corps commutatif.

Partie B : On suppose dans cette partie que $p<0$.

1) Montrer que la famille $(1;i\sqrt{-p})$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\cdot)$.

2) On considère l'application f définie de $\mathbb{C}$ dans E_p par : $f(a+i\sqrt{-p}\,b)=M_p(a;b)$ (où $(a;b)\in\mathbb{R}^2$)

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C};\times)$ dans $(E_p\,;\times)$.

b) En déduire encore une fois que $(E_p\,;+;\times)$ est un corps commutatif.

SOLUTION

Partie A :

1) Montrons d'abord que $(E_p\,;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel :

Il suffit de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$.

On a $E_p \neq \varnothing$ car $O \in E_p$. Soit $M_p(a;b)$ et $M_p(c;d)$ deux éléments de E_p avec $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$.

On a alors pour tout $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$: $\alpha M_p(a;b) + \beta M_p(c;d) = M_p(\alpha a + \beta c; \alpha b + \beta d)$

Il s'ensuit donc que : $\alpha M_p(a;b) + \beta M_p(c;d) \in E_p$, ce qui montre que $(E_p\,;+;\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$. Ainsi, $(E_p\,;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Déterminons ensuite une base de $(E_p\,;+;\cdot)$:

On a pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$:

$$M_p(a;b) = \begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ pb & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1 \end{pmatrix} = aI + bJ \quad \text{où } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$

ce qui montre que $(I;J)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel $(E_p\,;+;\cdot)$. Montrons maintenant la liberté de cette famille. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aI + bJ = O$. On aura alors :

$$aI + bJ = O \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Puisque la famille $(I;J)$ est libre et génératrice de $(E_p\,;+;\cdot)$, alors c'est une base de E_p. Ainsi : $\dim E_p = 2$.

2) Montrons que E_p est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\,;\times)$:

On a pour tout $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$:

$$M_p(a;b) \times M_p(c;d) = \begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ pd & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + pbd & ad + bc \\ p(ad + bc) & ac + pbd \end{pmatrix} = M_p(ac + pbd\,; ad + bc)$$

Comme $M_p(ac + pbd\,; ad + bc) \in E_p$ alors E_p est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\,;\times)$.

Conclusion :

D'après la question 1), $(E_p\,;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel, donc $(E_p\,;+)$ est un groupe commutatif ;

Puisque E_p est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\,;\times)$ et la loi $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$ dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ alors il en est de même dans l'ensemble E_p. Enfin, on a I est l'élément neutre dans $(E_p\,;\times)$.

Par conséquent, $(E_p\,;+;\times)$ est un anneau. La commutativité de la loi $\times$ résulte du fait que :

$$M_p(a;b) \times M_p(c;d) = M_p(ac + pbd\,; ad + bc) = M_p(ca + pdb\,; da + cb) = M_p(c;d) \times M_p(a;b)$$

Ainsi, $(E_p\,;+;\times)$ est un anneau commutatif.

3) Montrons l'équivalence suivante : $p<0 \Leftrightarrow (E_p;+;\times)$ est un corps commutatif.

On sait que $(E_p;+;\times)$ est un anneau commutatif. Pour que $(E_p;+;\times)$ soit un corps commutatif, il faut et il suffit que tout élément non nul soit inversible dans $(E_p;+;\times)$. Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}$, on a :

$$\det M_p(a;b)=\begin{vmatrix} a & b \\ pb & a \end{vmatrix}=a^2-pb^2$$

La matrice $M_p(a;b)$ est inversible si $a^2-pb^2\neq 0$; et son inverse est la matrice :

$$(M_p(a;b))^{-1}=\frac{1}{a^2-pb^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -pb & a \end{pmatrix}=M_p\left(\frac{a}{a^2-pb^2};-\frac{b}{a^2-pb^2}\right)$$ qui est un élément de E_p.

Il s'ensuit donc que $(E_p;+;\times)$ est un corps commutatif si : $(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2-\{(0;0)\})\ a^2-pb^2\neq 0$

Si $p\geq 0$ alors l'élément non nul $M_p(\sqrt{p};1)$ n'est pas inversible dans $(E_p;+;\times)$; et si $p<0$ alors $a^2-pb^2>0$ et en particulier $a^2-pb^2\neq 0$. En résumé : $p<0 \Leftrightarrow (E_p;+;\times)$ est un corps commutatif.

<u>Partie B :</u> On suppose dans cette partie que $p<0$.

1) On sait que $(1;i)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\cdot)$. On a dans cette base :

- Le couple de coordonnées de 1 est : $(1;0)$.
- Le couple de coordonnées de $i\sqrt{-p}$ est : $(0;\sqrt{-p})$.

Donc : $\det(1;i\sqrt{-p})=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-p} \end{vmatrix}=\sqrt{-p}$. Comme $\det(1;i\sqrt{-p})\neq 0$ alors c'est une base de $(\mathbb{C};+;\cdot)$.

Remarque : On pourra aussi montrer que la famille $(1;i\sqrt{-p})$ est à la fois libre et génératrice.

2) On considère l'application f définie de $\mathbb{C}$ dans E_p par : $f(a+i\sqrt{-p}\,b)=M_p(a;b)$ (où $(a;b)\in\mathbb{R}^2$)

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C};\times)$ dans $(E_p;\times)$:

- Tout d'abord, f est un morphisme de $(\mathbb{C};\times)$ dans $(E_p;\times)$. En effet, pour tout $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} f\left((a+i\sqrt{-p}\,b)\times(c+i\sqrt{-p}\,d)\right) &= f\left(ac+pbd+i\sqrt{-p}(ad+bc)\right) \\ &= M_p(ac+pbd;ad+bc) \\ &= M_p(a;b)\times M_p(c;d) \\ &= f(a+i\sqrt{-p}\,b)\times f(c+i\sqrt{-p}\,d) \end{aligned}$$

- Ensuite f est injective car, pour tout $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$:

$$f(a+i\sqrt{-p}\,b)=f(c+i\sqrt{-p}\,d)\Rightarrow M_p(a;b)=M_p(c;d)\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ pd & c \end{pmatrix}$$

D'où : $f\left(a+i\sqrt{-p}\,b\right)=f\left(c+i\sqrt{-p}\,d\right)\Rightarrow(a;b)=(c;d)\Rightarrow a+i\sqrt{-p}\,b=c+i\sqrt{-p}\,d$

De plus, f est surjective d'après sa construction.

Par suite, f est un isomorphisme de $(\mathbb{C};\times)$ dans $(E_p;\times)$.

b) On sait que $(E_p;+;\times)$ est un anneau commutatif et $f(0)=O$. Puisque, f est un isomorphisme de $(\mathbb{C};\times)$ dans $(E_p;\times)$ et $(\mathbb{C}^*;\times)$ est un groupe commutatif, alors $(E_p-\{O\};\times)$ est un groupe commutatif.

Par suite : $(E_p;+;\times)$ est un corps commutatif.

- Montrer que E est un espace vectoriel est une question très classique des sujets du bac ; elle n'utilise en fait jamais la définition d'un espace vectoriel. En effet, tous les espaces vectoriels rencontrés dans les sujets sont des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels de référence. Pour cela, on utilise le théorème de caractérisation qui dit :
  F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E si, et seulement si, il vérifie les trois conditions suivantes :
  - ✓ $F\subset E$ et $F\neq\varnothing$;
  - ✓ $\left(\forall(\vec{u};\vec{v})\in F^2\right)(\forall\alpha\in\mathbb{R})$: $\vec{u}+\vec{v}\in F$ et $\alpha\vec{u}\in F$
- Soit $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On considère n réels $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ tels que : $a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+\dots+a_n\vec{u}_n=\vec{0}$
  - Si l'équation ci-dessus d'inconnues $a_1,\dots,a_n$ possède comme unique solution : $a_1=\dots=a_n=0$
    Alors la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$ est libre.
  - S'il existe des réels non tous nuls $a_1,\dots,a_n$ tels que $a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+\dots+a_n\vec{u}_n=\vec{0}$, alors la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$ est liée.
- Une famille de vecteurs contenant le vecteur nul, deux vecteurs égaux ou, plus généralement, un des vecteurs qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille est liée.
- Soit $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. La famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$ est génératrice si, et seulement si, tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$.
  Cette combinaison n'est pas unique.
- Une famille à la fois libre et génératrice est une base.
- Une autre méthode pour montrer que la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$ est une base de E consiste à montrer que tout vecteur de E s'écrit de <u>manière unique</u> comme combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$.
- Dans la pratique, la méthode suivante est la plus fréquemment utilisée pour montrer qu'une famille est une base de l'espace vectoriel E :
  - Si $\dim E=2$ et $(\vec{u}_1;\vec{u}_2)\in E^2$ alors : $(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ est une base de E $\Leftrightarrow\det(\vec{u}_1;\vec{u}_2)\neq0$.
  - Si $\dim E=3$ et $(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)\in E^3$ alors : $(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ est une base de E $\Leftrightarrow\det(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)\neq0$.

C'est d'ailleurs le dernier résultat vu dans le cours.

EXERCICES D'APPLICATION

ESPACE VECTORIEL RÉEL

EXERCICE 01

On munit $\mathbb{R}_+^*$ d'une loi de composition interne $\times$ et d'une loi de composition externe $\bullet$ comme suit :

- La loi $\times$ est la multiplication usuelle dans $\mathbb{R}_+^*$.
- $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\quad \lambda \bullet x = x^{\lambda}$

$(\mathbb{R}_+^*\,;\times\,;\bullet)$ est-il un espace vectoriel réel ?

EXERCICE 02

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y = 2z\}$$

1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tous $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$:

$$(x;y;z) + (x';y';z') \in E \quad \text{et} \quad \lambda \bullet (x;y;z) \in E$$

2) Montrer que $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

3) Trouver un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$(\forall \vec{x} \in E)\ (\exists \lambda \in \mathbb{R})\quad \vec{x} = \lambda \vec{u}$$

EXERCICE 03

On considère dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble :

$$E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a+b & -5b \\ b & a+3b \end{pmatrix} \,/\, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que pour tous M et M' de E et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$M + M' \in E \quad \text{et} \quad \alpha M \in E$$

2) Montrer que $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

EXERCICE 04

Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$, montrer que le vecteur $\vec{x} = (-13;12;5)$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs : $\vec{u} = (5;-2;3)$ et $\vec{v} = (1;3;7)$

EXERCICE 05

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \,/\, f(5) = f(1) \}$$

Montrer que $(\mathscr{E};+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

EXERCICE 06

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Montrer qu'il existe trois vecteurs uniques $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{u} \\ \vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c} = \vec{v} \\ \vec{a} + 9\vec{b} + 16\vec{c} = \vec{w} \end{cases}$$

FAMILLE LIBRE – FAMILLE GÉNÉRATRICE - BASE

EXERCICE 07

Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$, déterminer si les familles de vecteurs sont libres ou liées, génératrices ou pas et si ce sont des bases de $\mathbb{R}^3$:

1) $\vec{u} = (1;2;3)$ et $\vec{v} = (3;2;1)$.

2) $\vec{u} = (-1;0;2)$, $\vec{v} = (0;1;-2)$ et $\vec{w} = (2;1;0)$.

3) $\vec{u} = (1;-1;-1)$, $\vec{v} = (3;3;1)$ et $\vec{w} = (1;2;1)$.

4) $\vec{u} = (7;2;-1)$, $\vec{v} = (1;-3;2)$, $\vec{w} = (5;1;1)$ et $\vec{t} = (-2;1;3)$.

EXERCICE 08

Dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\bullet)$, on considère les fonctions :

$f : x \mapsto 1$; $g : x \mapsto \cos^2 x$; $h : x \mapsto \cos(2x)$

Montrer que la famille $(f;g;h)$ est liée.

EXERCICE 09

Dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\bullet)$, on considère les fonctions :

$f : x \mapsto x$; $g : x \mapsto \sin x$; $h : x \mapsto \cos(2x)$

Montrer que la famille $(f\,;g\,;h)$ est libre.

EXERCICE 10

Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\bullet)$, on considère les matrices suivantes :

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que la famille $B = (I;J;K;L)$ est libre dans l'espace vectoriel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\bullet)$.

2) Écrire la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des éléments de la famille B.

EXERCICE 11

On considère l'ensemble :

$$E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z=0\}$$

1) Montrer que pour tous $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ de E et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:
$(x;y;z)+(x';y';z') \in E$ et $\alpha\bullet(x;y;z) \in E$

2) Montrer que $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

3) Montrer qu'il existe deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ de $\mathbb{R}^3$ tels que la famille $(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ engendre l'espace E.

EXERCICE 12

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$\vec{e}_1 = (1;0;0)$; $\vec{e}_2 = (0;1;0)$; $\vec{e}_3 = (0;0;1)$

1) Montrer que la famille $B = (\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

2) On considère les vecteurs suivants écrits dans la base B : $\vec{u}_1 = (1;1;1)$; $\vec{u}_2 = (1;-1;1)$; $\vec{u}_3 = (1;2;3)$ et la famille $B' = (\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$.

a) Montrer que la famille $B' = (\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Calculer les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base B'.

EXERCICE 13

Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$\vec{u} = (1;1;1;1)$; $\vec{v} = (1;2;3;4)$; $\vec{w} = (1;2;8;16)$

1) Montrer que est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

2) La famille $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$? Justifier

3) Déterminer un vecteur $\vec{t}$ pour que la famille $(\vec{u};\vec{v};\vec{w};\vec{t})$ soit une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

EXERCICE 14

Soit $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
Montrer que la famille $(\vec{e}_1;\vec{e}_2+2\vec{e}_3;2\vec{e}_2+\vec{e}_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 16

Dans un espace vectoriel E de dimension 3, on considère une base $B_1 = (\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ et une famille $B_2 = (\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ telle que :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ \vec{e}_2 = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3 \\ \vec{e}_3 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \end{cases}$$

1) Montrer B_2 est une base de E.

2) On considère le vecteur $\vec{u} = (1;2;3)$ dans la base B_1.
Trouver les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base B_2.

EXERCICE 17

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$\vec{u} = (1;2;-1)$ et $\vec{v} = (0;1;1)$

Montrer que les vecteurs sont linéairement indépendants puis déterminer un vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

SOUS-ESPACES VECTORIEL

EXERCICE 19

Est-ce que les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$?

$E_1 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+2y+z=0\}$

$E_2 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y+z=5\}$

$E_3 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2-y^2=0\}$

$E_4 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z \le 1\}$

$E_5 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+3y=0 \text{ et } 2x-y+z=0\}$

$E_6 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z=0\}$

$E_7 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y+2z=2 \text{ et } x+z \ge 0\}$

$E_8 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z=1\}$

EXERCICE 21

Montrer que les ensembles suivants, muni des opérations habituelles définies dans $\mathbb{R}^3$, sont des espaces vectoriels réels :

$E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+2y+3z=0\}$

$F = \{(x+y;\, 2x-y; -3x+2y) \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$

$G = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0 \text{ et } 2x-5y+z=0\}$

EXERCICE 23

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. Les ensembles définis ci-après sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

1) F_1 est l'ensemble des fonctions paires.

2) F_2 est l'ensemble des fonctions impaires.

3) F_3 est l'ensemble des polynômes de degré égal à 1.

4) F_4 est l'ensemble des fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x)-f''(x)=0$

5) F_5 est l'ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.

6) F_6 est l'ensemble des fonctions telles que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

7) F_7 est l'ensemble des fonctions telles que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

8) F_8 est l'ensemble des fonctions telles que :

$$f(0)=f(1)$$

9) F_9 est l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ continues sur $[0,1]$ telles que : $\int_0^1 f(t)\,dt=0$

EXERCICE 25

Soit $(U;+;\cdot)$ l'espace vectoriel des suites réelles, les ensembles ci-après sont-ils des sous-espaces vectoriels de U ?

1) L'ensemble U_1 des suites croissantes.

2) L'ensemble U_2 des suites décroissantes.

3) L'ensemble U_3 des suites convergentes.

4) L'ensemble U_4 des suites réelles (u_n) vérifiant $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

5) L'ensemble U_5 des suites réelles (u_n) vérifiant la relation de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$

EXERCICE 28

On considère les ensembles suivants :

$E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x=y=z\}$

$F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-2y+z=0\}$

$G = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\}$

1) Montrer que $(E;+;\cdot)$, $(F;+;\cdot)$ et $(G;+;\cdot)$ sont des espaces vectoriels réels.

2) Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces vectoriels E, F et G.

3) Montrer que $E \cap F = \{\vec{0}\}$.

4) On pose : $H = F \cap G$ et $K = E \cup F$

a) Justifier pourquoi K n'est pas un espace vectoriel réel.

b) Montrer que $(H;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel de dimension 1.

On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $E=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) / a+d=b+c\right\}$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R});+;\bullet)$.

2) Donner une base et la dimension de l'espace vectoriel E.

On considère les ensembles suivants :

$E=\{(x;0;x)/x\in\mathbb{R}\}$; $F=\{(-x;2x;0)/x\in\mathbb{R}\}$

$H=\{(-x+2y\ ;\ 2x-3y;\ x+y)/(x;y)\in\mathbb{R}^2\}$

$K=\{(-x+2y;x+z;\ x+y)/(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\}$

1) Montrer que chacun des ensembles ci-dessus, muni des opérations habituelles définies dans $\mathbb{R}^3$, sont des espaces vectoriels réels.

2) Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces vectoriels montrés dans la question 1).

On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$F=\{\alpha(1;1;1)+\beta(1;0;-1)/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $\vec{u}=(x;y;z)$ un élément de E.

Quelle relation lie les composantes de vecteur $\vec{u}$?

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$A(x)=xe^x$; $B(x)=e^x$; $C(x)=e^{-x}$

et soit E l'ensemble des fonctions f telles que : $(\exists(\alpha;\beta;\gamma)\in\mathbb{R}^3)\ f=\alpha A+\beta B+\gamma C$

1) a) Montrer que $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

b) Montrer que $(A;B;C)$ est une base de E.

2) Soit $f\in E$ et f' sa fonction dérivée.

Montrer que $f'\in E$ puis déterminer les coordonnées de f' dans la base $(A;B;C)$.

3) Soit $f=\alpha A+\beta B+\gamma C$ un élément de E.

Montrer que si $\alpha\gamma\neq 0$ alors $(f;f';f'')$ est une base de l'espace vectoriel réel E.

EXERCICE 33

Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$E=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3/x^2+2y^2+z^2+2xy+2yz=0\}$$

Est- ce que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$? Justifier.

EXERCICE 34

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions polynômiales : $f:x\mapsto ax^2+bx+c$ telles que : $\int_0^1 x^n f(x)dx=0$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$.

1) On considère les deux fonctions polynômiales u et v définies par :

$$u(x)=x-\frac{n+1}{n+2} \quad \text{et} \quad v(x)=x^2-\frac{n+1}{n+3}$$

a) Montrer que la famille $(u;v)$ est libre dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\bullet)$.

b) Montrer que :

$$(\forall f\in\mathscr{E})(\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\ f=\alpha u+\beta v$$

c) Montrer que $(\mathscr{E};+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel de dimension 2.

EXERCICE 35

On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\mathscr{E}=\left\{M(x;y)=\begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x\end{pmatrix}/(x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Montrer que $(\mathscr{E};+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel puis déterminer sa dimension.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 36

Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E;+;\bullet)$. Démontrer l'équivalence :

$$(\vec{x};\vec{y}) \text{ est libre } \Leftrightarrow (\vec{x}+\vec{y};\vec{y}) \text{ est libre}$$

EXERCICE 37

Dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$, on considère les vecteurs : $\vec{u}=(1;2;-1)$; $\vec{v}=(2;-1;1)$

$\vec{w}=(3;0;-1)$; $\vec{f}=(1;-2;3)$

1) Montrer que la famille $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

2) a) Montrer qu'il existe un couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{f}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$

b) Que peut-on en déduire concernant la famille $(\vec{u};\vec{v};\vec{f})$? Justifier.

EXERCICE 38

Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ xf''(x)-(x+1)f'(x)+f(x)=0$$

1) Montrer que $(\mathscr{D};+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

2) Soit u et v les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $u(x)=x+1$ et $v(x)=e^x$

a) Vérifier que u et v sont des éléments de $\mathscr{D}$.

b) Montrer que la famille $(u;v)$ est libre dans $\mathscr{D}$.

3) Soit f une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $f\in\mathscr{D}$, alors :

$$(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f'''(x)=f''(x)$$

4) Montrer que $\mathscr{D}$ est l'ensemble des fonctions f telles : $(\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2)\ f(x)=ae^x+bx+b$

5) Montrer que $(u;v)$ est une base de de $\mathscr{D}$.

EXERCICE 39

On considère l'ensemble suivant :

$$E=\left\{M=\begin{pmatrix}x&y&z\\0&x&y\\0&0&x\end{pmatrix}/(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

1) Montrer que $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

2) Déterminer une base de $(E;+;\bullet)$ et sa dimension.

3) On considère les matrices :

$$X=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\ ;\quad Y=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$Z=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

La famille $(X;Y;Z)$ est-elle une base de l'espace vectoriel $(E;+;\bullet)$? Justifier.

EXERCICE 40

On note $f_{(a;b)}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_{(a;b)}(x)=\dfrac{ax}{e^x}+\dfrac{be^x}{1+e^x}$

On considère l'ensemble : $E=\left\{f_{(a;b)}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1) Montrer que $(E;+;\bullet)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\bullet)$.

2) Montrer que la famille $B=\left(f_{(1;0)};f_{(0;1)}\right)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(E;+;\bullet)$.

3) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\frac{e^{2x}+xe^x+x}{e^{2x}+e^x}$$

a) Montrer que $g\in E$.

b) Déterminer les coordonnées de g dans la base B

EXERCICE 41

On considère l'ensemble suivant :

$$E=\left\{M=\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} / (a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

On pose :

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ K=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que :

$$J^2=K \ ; \ K^2=J+K \ ; \ JK=KJ=I+J$$

2) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel et déterminer sa dimension.

3) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif.

4) Vérifier que $J^2=I+J$ puis déterminer J^{-1}.

EXERCICE 42

Soit S une matrice non nulle de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. On pose :

$E=\{M\in\mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M\times S=O\}$

$F=\{M+I \ / \ M\in E\}$ (I est la matrice identité).

1) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

2) a) Montrer que pour tout $A\in\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A\in F \Leftrightarrow A\times S=S$$

b) Montrer que F est stable dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

3) Soit $A\in F$. Montrer que si A est inversible dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$ alors $A^{-1}\in F$.

EXERCICE 43

On considère dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ les deux matrices :

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Calculer J^2 et J^3 et en déduire que :

$$J^3-3J^2+3J=I$$

b) En déduire que J admet un inverse J^{-1} dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$ qu'on déterminera.

2) On considère l'ensemble :

$$E=\left\{M=\begin{pmatrix} a+b & a & a \\ 0 & a+b & a \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

a) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

b) Établir que $(I;J)$ est une base de E.

EXERCICE 44

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha\in\mathbb{R}^*$. On désigne par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$P_k(x)=x^k$ et $Q_k(x)=(x-\alpha)^k$ avec $k\in\{0;1;..;n\}$.

1) Montrer que $(\mathcal{P}_n;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

2) Montrer que la famille $(P_0;P_1;...;P_n)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{P}_n;+;\cdot)$.

3) a) Montrer que pour tout $k\in\{0;1;..;n\}$:

$$P_k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\alpha^{k-i}Q_i$$

b) En déduire que la famille $B'=(Q_0;Q_1;...;Q_n)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{P}_n;+;\cdot)$.

4) Pour tout $k\in\{0;1;..;n\}$, on considère la fonction numérique G_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} G_k(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x}P_k(t)\,dt & \text{si } x\in\mathbb{R}^* \\ G_k(0)=0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $k\in\{0;1;..;n\}$: $G_k\in\mathcal{P}_n$

b) Pour tout $k\in\{0;1;..;n\}$, déterminer les coordonnées de G_k dans la base B'.

EXERCICE 45

On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $I=[a;b]$ tel que : $ab<0$

On considère l'ensemble suivant :

$$E=\{f\in\mathscr{C}/(\exists\varepsilon>0)(\forall x\in I)\,|f(x)|\leq\varepsilon|x|\}$$

1) Montrer que pour tout $f\in E$: $f(0)=0$

2) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

3) Montrer que les fonctions sin et Arctan sont des éléments de E.

EXERCICE 46

Soit I et J les deux matrices de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble suivant :

$$E=\{M(a;b)=aI+bJ\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^2\}$$

1) a) Montrer que la famille $(I;J)$ est libre dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$.

b) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 2.

2) a) Vérifier que : $J^2=\sqrt{3}J-I$

b) Montrer que E est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

c) Montrer que $(E;+;\times)$ est un corps commutatif.

3) Soit α un nombre complexe non réel.

a) Montrer que la famille $(1;\alpha)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\cdot)$.

b) On considère l'application f_α définie de E dans $\mathbb{C}$ par : $(\forall M(a;b)\in E)\ f_\alpha(M(a;b))=a+\alpha b$

Montrer que f_α est un isomorphisme de $(E;+)$ dans $(\mathbb{C};+)$.

c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α est un morphisme de $(E;\times)$ dans $(\mathbb{C};\times)$.

4) On prend : $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

a) Déterminer f_α^{-1}, l'application réciproque de f_α.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer J^n en fonction de n puis en déduire que : $J^n=I\Leftrightarrow n\equiv0\,[12]$

EXERCICE 47

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_1;a_2;...;a_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que $a_1<...<a_n$

La famille des fonctions $(f_{a_1};f_{a_2};...;f_{a_n})$ est-elle libre ou est-elle liée, dans les cas suivants :

1) $f_{a_i}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto|x-a_i|$.

2) $f_{a_i}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto e^{a_ix}$.

3) $f_{a_i}:\mathbb{R}-\{a_1;...;a_n\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x-a_i}$.

EXERCICE 48

Soit I et A les deux matrices de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ définies par

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-1\end{pmatrix}$$

1) Résoudre dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation :

$A\times M=M\times A$ (M étant l'inconnue)

2) Soit S l'ensemble solution de l'équation précédente

a) Montrer que :

$$(\forall M\in S)(\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\ /\ M=\alpha A+\beta I$$

b) Établir que $(S;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel et déterminer sa dimension.

3) a) Montrer que S est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

b) Montrer que $(S;+;\times)$ est un corps commutatif.

c) Résoudre dans S l'équation : $M^3=M$

4) Soit n un entier naturel.

a) Calculer A^n en fonction de n avec :

$$A^n=\underbrace{A\times...\times A}_{n\text{ fois}}\quad\text{et}\quad A^0=I$$

b) En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer l'expression de $(A+I)^n$ en fonction de n.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Partie A :

On définit dans $\mathbb{C}$ une loi de composition interne $*$ comme suit : Pour tout $(a;b;x;y) \in \mathbb{R}^4$,

$$(a+ib)*(x+iy) = ax + i(ay+bx)$$

1) Montrer que la loi $*$ est commutative, associative et admettant un élément neutre qu'on déterminera.

2) Déterminer G, ensemble des éléments symétrisables pour la loi $*$ et montrer que $(G;*)$ est un groupe commutatitif.

3) Soit H une partie de $\mathbb{C}$ telle que $H \neq \{0\}$.
Montrer que si $(H;*)$ est groupe alors $H \subset G$.

4) Montrer que l'ensemble E définie par :

$$E = \{e^t + ite^t \ / \ t \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-groupe de $(G;*)$.

5) a) Montrer que : $(\forall z \in G) \quad \overline{z} \in G$

b) Montrer que l'application $f : z \mapsto \overline{z}$ est un automorphisme de $(G;*)$.

6) a) Montrer que $*$ est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$.

b) Montrer que $(\mathbb{C};*;+)$ est un anneau non intègre.

7) Déterminer les diviseurs de zéro dans l'anneau $(\mathbb{C};*;+)$.

Partie B :

On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ suivant :

$$\mathscr{E} = \left\{ M(a;b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que $(\mathscr{E};+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel et en déterminer une base.

2) a) Montrer que $\mathscr{E}$ est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

b) Montrer que l'application :

$$f : z = a+ib \mapsto M(a;b)$$

est un isomorphisme de $(\mathbb{C};*)$ dans $(\mathscr{E};\times)$.

c) En déduire l'ensemble des matrices admettant un inverse dans $(\mathscr{E};\times)$.

DEVOIR 2

Les parties A), B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

Soit E l'ensemble des fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2) \ f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

1) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

2) Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions affines définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\mathscr{A} \subset E$ et que $(\mathscr{A};+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Partie B :

Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f_{(\alpha;\beta)}(x) = \alpha e^x \cos(ax) + \beta e^x \sin(bx)$$

avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'ensemble suivant :

$$E_{(a;b)} = \left\{ f_{(\alpha;\beta)} \ / \ (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que $\left(E_{(a;b)};+;\cdot\right)$ est un espace vectoriel réel.

2) Déterminer, selon les valeurs des réels a et b, la dimension de l'espace vectoriel $E_{(a;b)}$.

Partie C :

Dans cette partie, $(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*);+;\cdot)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f_{(a;b)}(x) = x^a e^{bx} \quad \text{et} \quad \varphi_{(a;b)}(x) = \ln\left(f_{(a;b)}(x)\right)$$

On considère l'ensemble : $\mathscr{L} = \left\{\varphi_{(a;b)} / (a;b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

1) Montrer que $(\mathscr{L};+)$ est un sous-groupe du groupe $\left(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*);+\right)$.

2) a) Vérifier que pour tout $\varphi_{(a;b)} \in \mathscr{L}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \bullet \varphi_{(a;b)} \in \mathscr{L}$

b) En déduire que $(\mathscr{L};+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

c) Montrer que $\left(\varphi_{(1;0)} ; \varphi_{(0;1)}\right)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$ puis déterminer sa dimension.

DEVOIR 3

Les parties A), B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

Soit E l'ensemble suivant :

$$\mathscr{E} = \left\{f : x \mapsto (ax+b)e^{2x} \;/\; (a;b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

1) Montrer que $(\mathscr{E};+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

2) Soit f_1 et f_2 les deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$

Montrer que la famille $B = (f_1; f_2)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$.

3) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}\right)e^{2t}dt$ est appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$ en déterminant ses coordonnées dans la base B.

Partie B :

On définit sur l'ensemble $\mathrm{H} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ une loi de composition interne « + » comme suit :

Pour tous $(x;y)$ et $(x';y')$ de H :

$$(x;y) + (x';y') = (x + x'; y + y')$$

et une loi de composition externe à coefficients réels « • » comme suit :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall (x;y) \in \mathrm{H})\; \alpha \bullet (x;y) = (x^\alpha ; \alpha y)$$

1) On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}^2$ dans H par : $\varphi((x;y)) = (e^x ; y)$

(En considérant $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$ l'espace vectoriel usu

a) Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{R}^2;+)$ da $(\mathrm{H};+)$.

b) En déduire que $(\mathrm{H};+)$ est un groupe commutati

c) Déterminer l'élément neutre dans $(\mathrm{H};+)$.

Quelle est le symétrique de $(x;y)$ dans $(\mathrm{H};+)$.

2) Montrer que $(\mathrm{H};+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel

Partie C :

On considère dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble défini par :

$$E = \left\{M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) / M = xI + yA \;;\; (x;y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

1) a) Montrer que $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel ré

b) Montrer que : $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\;\; A \neq \alpha I$

puis en déduire que la famille $(I;A)$ est une base de l'espace vectoriel E.

2) Vérifier que $A^2 = A + 2I$ puis en déduire que A admet un inverse A^{-1} appartenant à E.

3) a) Montrer que E est stable dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutati

4) a) Montrer que l'équation : $(X \in E)\;;\; X^2 = X$ admet quatre solutions :

La matrice nulle, la matrice identité et deux matrices que nous les noterons P et Q.

b) Calculer le produit $P \times Q$. Les matrices P et Q admettent-elles un inverse dans $(E;\times)$? Justifier

c) Déterminer les coordonnées de P et Q dans la base $(I;A)$.

d) En déduire que la famille $(P;Q)$ est une base de l'espace vectoriel E.

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 1

Partie A :

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne comme suit : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 \quad x*y=x+y-e^{xy}+1$

1) a) Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

2) Sachant que l'équation : $(E): 3+x-e^{2x}=0$ admet deux solutions réelles distinctes α et β, montrer que la loi $*$ n'est pas associative.

Partie B :

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau non commutatif d'élément unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{C}^*;\times)$ est un groupe commutatif.

Pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, on pose : $M(x;y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\ \frac{y}{2}&x\end{pmatrix}$

et soit : $F=\{M(x;y)/(x;y)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$.

2) Montrer que F est une partie stable de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

3) On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ dans F est qui, à tout nombre complexe $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, associe la matrice $M(x;y)$.

a) Montrer que l'application φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(F;\times)$.

b) On pose : $F^*=F-\{M(0;0)\}$.
Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*)=F^*$.

c) Montrer que $(F^*;\times)$ est un groupe commutatif.

4) Montrer que $(F;+;\times)$ est un corps commutatif.

Examen National 2015 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 2

Partie A :

Pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^2$, on considère dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice : $M(a;b)=\begin{pmatrix}a+b&-b\\b&a\end{pmatrix}$

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices :

$$\mathscr{E}=\{M(a;b)/(a;b)\in\mathbb{R}^2\}$$

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau non commutatif d'élément unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathscr{E}$ est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$ et dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

2) Montrer que $(\mathscr{E};+;\times)$ est un anneau commutatif.

3) a) Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$x^2+xy+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$$

b) Déterminer les éléments inversibles dans l'anneau $(\mathscr{E};+;\times)$.

c) En déduire que $(\mathscr{E};+;\times)$ est un corps commutatif.

Partie B :

Soit σ un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $(1;\sigma)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\cdot)$.

2) On considère l'application ψ définie de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{C}$ par : $\psi(M(a;b))=a+\sigma b$

Montrer que ψ est un isomorphisme de $(\mathscr{E};+)$ dans $(\mathbb{C};+)$.

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-z+1=0$.

Résoudre l'équation (E) puis écrire les solutions sous forme trigonométrique.

4) On suppose dans cette question que : $\sigma=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Montrer que ψ est un morphisme de $(\mathscr{E};\times)$ dans $(\mathbb{C};\times)$.

Examen National 2003 (Session Normale)

PROBLÈME 3

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau de zéro $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. On rappelle aussi que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Soit V l'ensemble des matrices $M(a;b)=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que V est un sous- espace vectoriel de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$ et déterminer en une base.

2) a) Montrer que V est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

b) Montrer que $(V;+;\times)$ est un anneau commutatif.

3) a) Calculer $M\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)\times M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

b) L'anneau $(V;+;\times)$ est-il un corps ? Justifier.

4) Soit X une matrice de V telle que :

$$X=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad (a;b)\in\mathbb{R}^2$$

a) Montre que : $X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=O$

b) On suppose que $a^2-4b^2\neq 0$.

Montrer que X est inversible dans $(V;+;\times)$ et déterminer sa matrice inverse.

Examen National 2009 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 4

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau de zéro $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble :

$$\mathscr{E}=\{M\in\mathbb{M}_3(\mathbb{R})\ /\ MA=AM\}$$

1) a) Montrer que $(\mathscr{E};+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

b) Montrer que la famille $(I;A;A^2)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathscr{E};+;\cdot)$.

2) Montrer que $(\mathscr{E};+;\times)$ est un anneau commutatif.

3) On considère l'ensemble :

$$\mathscr{F}=\{M\in\mathscr{E}\ /\det M\neq 0\}$$

Montrer que $(\mathscr{F};\times)$ est un groupe commutatif.

4) On pose : $B=I+A+A^2$

a) Déterminer l'ensemble des matrices M qui appartiennent à $\mathscr{E}$ et qui vérifie $M\times B=O$.

b) Montrer que pour tout $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$\det(aI+bA+cA^2)=a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

c) Déterminer l'ensemble des diviseurs de zéro dans l'anneau $(\mathscr{E};+;\times)$.

Examen National 2002 (Session Normale)

PROBLÈME 5

On rappelle aussi que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^2$, on pose :

$$M(a;b)=\begin{pmatrix}a+b&-b\\5b&a-3b\end{pmatrix}$$

et on considère l'ensemble :

$$\mathscr{F}=\{M(a;b)\ /(a;b)\in\mathbb{R}\}$$

On note : $O=M(0;0)$ et $J=M(0;1)$ et $I=M(1;0)$

1) a) Montrer que $(\mathscr{F};+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

b) Montrer que $(I;J)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathscr{F};+;\cdot)$ et donner sa dimension.

2) Soit α un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}$.

Montrer que la famille $(1;\alpha)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\cdot)$.

3) On considère l'application ψ de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{F}$ définie par :
$$\psi(z) = M(a;b)$$
avec : $z = a + b\alpha$ et $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

a) Vérifier que : $J^2 = -2(I+J)$ et $\psi(\alpha) = J$

b) Déterminer les deux valeurs de α pour lesquelles l'application ψ est un isomorphisme de $(\mathbb{C};\times)$ dans $(\mathcal{F};\times)$.

4) On prend dans cette question : $\alpha = -1+i$

Écrire dans la base $(I;J)$ la matrice J^{2007}.

Examen National 2007 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 6

On rappelle aussi que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$, on pose :
$$M(a;b;c) = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

et on considère l'ensemble :
$$E = \{M(a;b;c) \;/\; (a;b;c) \in \mathbb{R}^3\}$$

On note :

$I = M(0;0;0)$; $A = M(0;1;0)$; $B = M(0;0;1)$

1) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

2) Montrer que la famille $(I;A;B)$ est une base de l'espace vectoriel E.

3) a) Vérifier que :
$$A^2 = B \quad \text{et} \quad B^2 = -A \quad \text{et} \quad AB = BA = -I$$

b) Montrer que pour tous X et Y de E :
$$XY \in E \quad \text{et} \quad XY = YX$$

4) On considère la matrice : $D = M(0;-1;1)$

a) Montrer que D est une matrice inversible.

b) Montrer que : $D^2 - D - 2I = O$

c) Déterminer D^{-1} puis montrer que $D^{-1} \in E$.

Examen National 2002 (Session Normale)

PROBLÈME 7

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, on pose :
$$M(a;b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \quad \text{avec } (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

et on considère l'ensemble :
$$V = \{M(a;b) \;/\; (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note : $I = M(1;0)$ et $I = M(0;1)$.

1) a) Montrer que $(V;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

b) Montrer que $(I;J)$ est une base de V puis déterminer les coordonnées d'un élément $M \in V$ dans cette base.

2) a) Calculer J^2.

b) Montrer que $(V;+;\times)$ est un anneau.

c) L'anneau $(V;+;\times)$ est-elle commutatif ?

d) L'anneau $(V;+;\times)$ est-elle intègre ?

3) Déterminer les éléments inversibles dans $(V;+;\times)$.

4) Soit $M \in V$. On pose :
$$M^1 = M \text{ et } M^{n+1} = M^n \times M \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

Montrer que le système de coordonnées de M^n dans la base $(I;J)$ sont $(a^n; na^{n-1}b)$.

5) Déterminer le couples des coordonnées de la matrice $M + M^2 + \ldots + M^n$ dans la base $(I;J)$ en fonction de a, b et n.

Examen National 2005 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 8

On considère l'espace vectoriel réel $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$ des fonctions numériques définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions polynomiales P de degré inférieur ou égal à 2 et vérifiant l'égalité :
$$\int_0^1 xP(x)\,dx = 0$$

1) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_1(x) = x - \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

a) Montrer que $(P_1; P_2)$ est une famille libre dans l'espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\cdot)$.

b) Montrer que :

$$(\forall P \in \mathscr{A})\left(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2\right) \; P = \alpha P_1 + \beta P_2$$

2) Montrer que $(\mathscr{A};+;\cdot)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Examen National 1998 (Session Normale)

PROBLÈME 9

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$M(a;b;c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(a;b;c) \,/\, (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

2) Montrer que $(I;J;K)$ est une base de $(E;+;\cdot)$.

3) a) Vérifier que :

$$J^2 = I + K \quad \text{et} \quad K = I^2 \quad \text{et} \quad KJ = JK = J$$

b) En déduire que E est stable dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

c) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif.

4) $(E;+;\times)$ es-il un corps ? (On pourra utiliser le résultat de la question 3) a).

5) On pose : $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}} J$

a) Montrer que $X^2 = \dfrac{1}{2}(I+K)$ puis que : $X^3 = X$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X^{2n-1} = X$

Examen National 2001 (Session Normale)

PROBLÈME 10

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble E définie par :

$$E = \left\{ M(a;b) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \,/\, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

2) Montrer que $(I;J)$ est une base de l'espace E.

3) On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer J^2 puis déterminer J^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Déterminer les coordonnées de la matrice $A = I + J + J^2 + \ldots + J^{2n}$ en fonction de n dans la base $(I;J)$.

4) On considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \; E & \to & \mathbb{C} \\ M(a;b) & \mapsto & a + ib\sqrt{2} \end{array}$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(E;\times)$ dans $(\mathbb{C};\times)$.

b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un corps commutatif.

c) Résoudre dans E l'équation :

$$M^3(a;b) = -\sqrt{2}I + J$$

Examen National 1999 (Session Normale)

LES NOMBRES COMPLEXES

DIFFÉRENTES ÉCRITURES

Soit z un nombre complexe non nul.

- z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. Cette forme s'appelle la forme algébrique de z.
- Il existe un réel θ et un unique réel $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cette forme est la forme trigonométrique de z.
- En conservant les mêmes notations : $z = re^{i\theta}$ est la forme exponentielle de z.

CONJUGUÉ ET MODULE

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$. On définit :

- Le conjugué de z : $\overline{z} = x - iy$
- Le module de z : $|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe de forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Le réel θ s'appelle un argument de z et on note $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$.

Si M est l'image du nombre z dans un repere orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, alors :

$$|z| = r = OM \quad \text{et} \quad \left(\vec{e}_1;\overrightarrow{OM}\right) \equiv \arg z\ [2\pi]$$

PROPRIÉTÉS DU MODULE

Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|z|^2 = z.\overline{z}\ ;\ |z^n| = |z|^n\ ;\ \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}\ (\text{si } z \neq 0)$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|\ ;\ \big||z| - |z'|\big| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

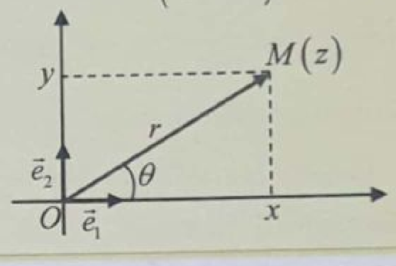
AFFIXE D'UN POINT – AFFIXE D'UN VECTEUR

Dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, si M est un point (resp. $\vec{u}$ un vecteur) du plan de plan de coordonnées $(x;y)$, on appelle affixe de M (resp.de $\vec{u}$) le nombre complexe $z = x + iy$.

On écrit $M(z)$ (resp.de $\vec{u}(z)$).

Si l'affixe du point M a pour forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors :

$$r = OM \quad \text{et} \quad \left(\vec{e}_1;\overrightarrow{OM}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$$



PROPRIÉTÉS DE LA CONJUGAISON

Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}\ ;\ \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}\ ;\ \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}\ ;\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}\ (\text{si } z \neq 0)\ ;\ \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}\ (\text{si } z \neq 0)$$

PROPRIÉTÉS D'ARGUMENT

Pour $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$$

$$\arg(z^n) \equiv n\arg z\ [2\pi]\ ;\ \arg(\overline{z}) \equiv -\arg z\ [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z\ [2\pi]$$

OPÉRATIONS SUR LA FORME EXPONENTIELLE

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ avec $(r;r') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta\,[2\pi]$.
- $z = z' \Leftrightarrow (r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta'\,[2\pi])$
- $z.z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$; $z^n = r^n e^{in\theta}$; $\overline{z} = re^{-i\theta}$

  $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$; $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$; $-z = re^{i(\theta+\pi)}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0\,[\pi]$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$
- $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = e^{i\theta}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$)
- Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

  $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- Formules d'Euler :

  $$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$
- Formules d'angle moitié :

  $$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

  $$e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$
- Formules utiles :
  - $e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$; $ie^{i\theta} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$
  - $e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$; $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
  - $|z| = 1 \Leftrightarrow z = e^{i\arg z}$; $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- Le nombre j : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

  $1 + j + j^2 = 0$; $\overline{j} = j^2 = \frac{1}{j}$; $j^3 = 1$

GÉOMÉTRIE DES NOMBRES COMPLEXES

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$, $D(z_D)$ et $M(z)$ des points distincts du plan complexe. Alors :

- $AB = |z_B - z_A|$ et $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$
- $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C$
- $(AB)//(CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- $(AB)\perp(CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.
- $M \in (AB) \Leftrightarrow \frac{z - z_A}{z - z_B} \in \mathbb{R}$.
- Si M est le barycentre du $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$:

  $$z_M = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$
- Si M est le milieu du $[AB]$: $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$
- Les points A, B, C et D sont cocycliques si, et seulement si : $\frac{z_D - z_A}{z_D - z_B} \div \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}$
- $|z - z_A| = |z - z_B|$ si, et seulement si, M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.
- $|z - z_A| = R$ si, et seulement si, M appartient au cercle de centre A et de rayon R. $(R > 0)$
- Le triangle ABC et rectangle isocèle en A si, et seulement si : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$.
- Le triangle ABC et équilatéral si, et seulement si : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

- Tout nombre complexe non nul u admet deux racines carrées opposées dans $\mathbb{C}$. Ce sont les solutions de l'équation $z^2 = u$ dans $\mathbb{C}$.
- Si $a > 0$ alors :
  - Les racines carrées de a sont : $\pm\sqrt{a}$ et celles de $-a$ sont : $\pm i\sqrt{a}$.
  - Les racines carrées de ai sont : $\pm\sqrt{\frac{a}{2}}(1+i)$ et celle de $-ai$ sont : $\pm\sqrt{\frac{a}{2}}(1-i)$
- En posant $\delta = x+iy$ et $u = \alpha + i\beta$ avec $(\alpha;\beta;x;y) \in \mathbb{R}^4$ on obtient :

$$u = \delta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \\ 2xy = \beta \\ y^2 = \dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \end{cases}$$

LES TRANSFORMATIONS USUELLES DU PLAN

Soit T une transformation du plan dont l'écriture complexe est donnée par :

$$z' = az + b \quad \text{avec } (a;b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

- Si $a = 1$: T est la translation du vecteur $\vec{u}(b)$.
- Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$: T est l'homothétie H de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et de rapport a.
- Si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = 1$: T est la rotation R de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\arg a$.
- Si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$: T est la composée de la rotation R et de l'homothétie H définie plus haut. De plus : $T = R \circ H = H \circ R$

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ avec } (a;b;c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$ son discriminant.

- Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation admet deux racines données par : $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$.

  De plus, on a la factorisation :

  $$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une racine double donnée par : $z = \frac{-b}{2a}$. De plus, on a la factorisation : $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$
- Les solutions z_1 et z_2 vérifient :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$

RACINES N^ièmes D'UN NOMBRE COMPLEXE

- Tout nombre complexe non nul u admet n racines d'ordre n (où $n \in \mathbb{N}^*$). Ce sont les solutions de l'équation $z^n = u$ dans $\mathbb{C}$.
- Si $|u| = r$ et $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$, alors les racines n^ièmes du nombre u sont données par unes des formules suivantes : $k \in \{0;1;\ldots;n-1\}$

$$z_k = \left[\sqrt[n]{r};\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right] = \sqrt[n]{r}.e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

- Les racines n^ièmes de l'unité sont : $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

On a les formules : $\omega_k + \frac{1}{\omega_k} = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$$\omega_k - \frac{1}{\omega_k} = 2i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k = 0$$

ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{Z}$

DIVISIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}$

Soit $(a;b;d;\alpha;\beta)\in\mathbb{Z}^5$.

- a divise $b \Leftrightarrow \left[(\exists k\in\mathbb{Z})\ b=ka\right]$.
- $(a/b \text{ et } b/a) \Leftrightarrow |a|=|b|$.
- $(d/a \text{ et } d/b) \Rightarrow d/\alpha a+\beta b$

CONGRUENCE MODULO

Soit $(a;b;c;d)\in\mathbb{Z}^4$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

- $a\equiv b\ [n] \Leftrightarrow n/b-a$.
- $a\equiv b\ [n] \Leftrightarrow a+c\equiv b+c\ [n]$.
- $a\equiv b\ [n] \Rightarrow ac\equiv bc\ [n]$ (avec $c\neq 0$).
- $\begin{cases} a\equiv b\ [n] \\ c\equiv d\ [n]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c\equiv b+d\ [n] \\ ac\equiv bd\ [n]\end{cases}$.
- $a\equiv b\ [n] \Rightarrow a^k\equiv b^k\ [n]$ (avec $k\in\mathbb{Z}^*$).

PROPRIÉTÉS DU P.G.C.D

Soit $(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$ et $(n;m)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

- $(a\wedge b=1 \text{ et } a\wedge c=1) \Leftrightarrow a\wedge(bc)=1$
- $a\wedge b=1 \Leftrightarrow a^n\wedge b^m=1$.
- $a^n\wedge b^n=(a\wedge b)^n$.
- $(a=bq+r \text{ et } 0\le r<b) \Rightarrow a\wedge b=b\wedge r$.
- $(\forall\alpha\in\mathbb{Z}^*)\ (\alpha a)\wedge(\alpha b)=|\alpha|(a\wedge b)$.

LE THÉORÈME FONDAMENTAL D'ARITHMÉTIQUE

Tout élément de $\mathbb{Z}^*-\{1;-1\}$ admet une décomposition en produit de nombres premiers, unique à l'ordre près des facteurs.

NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

Soit $(a;b;d)\in\mathbb{Z}^3$.

- a et b sont dits premiers entre eux si leur plus grand commun diviseur vaut 1 : $a\wedge b=1$.
- $a\wedge b=d \Leftrightarrow \left(\exists(a';b')\in\mathbb{Z}^2\right) \begin{cases} a=a'd \\ b=b'd \\ a'\wedge b'=1\end{cases}$
- $a\wedge b=d \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2\right)\ d=au+bv \\ d/a \text{ et } d/b\end{cases}$

PROPRIÉTÉS DU P.P.C.M

Soit $(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$ et $(n;m)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

- $m=a\vee b \Rightarrow (a/m \text{ et } b/m)$
- $(a/c \text{ et } b/c) \Rightarrow (a\vee b)/c$.
- $a^n\vee b^n=(a\vee b)^n$.
- $(a\wedge b)(a\vee b)=|ab|$.
- $(\forall\alpha\in\mathbb{Z}^*)\ (\alpha a)\vee(\alpha b)=|\alpha|(a\vee b)$.

PROPRIÉTÉS DU P.G.C.D

Soit $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$.

- Un nombre p est premier s'il admet deux diviseurs positifs qui sont 1 et $|p|$.
- L'ensemble des nombres premiers est infini.
- Soit p un nombre premier et $n\in\mathbb{N}^*$:
  - $p/ab \Leftrightarrow (p/a \text{ et } p/b)$.
  - $p/a^n \Leftrightarrow p/a$.
  - $p/a \Leftrightarrow p\wedge a=p$
  - $p\nmid a \Leftrightarrow p\wedge a=1$
  - Pour tout $k\in\{1;2;\ldots;p-1\}$: $p\wedge k=1$

LES GRANDS THÉORÈMES

Soit $(a;b;c;d) \in \mathbb{Z}^4$ et p un nombre premier.

- Théorème de Bezout :

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \left[\left(\exists(u;v) \in \mathbb{Z}^2\right) au + bv = 1\right]$$

- Théorème de Gauss :

$$(d / ab \text{ et } d \wedge a = 1) \Rightarrow d / b$$

- Théorèmes :
  - $(a / c$ et b / c et $a \wedge b) \Rightarrow ab / c$.
  - $(a \wedge c = 1$ et $b \wedge c = 1) \Rightarrow (ab) \wedge c = 1$.
  - $\begin{cases} ac \equiv bc\ [n] \\ c \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b\ [n]$. (où $n \in \mathbb{N}^*$)
  - Si $d = c \wedge n$ alors :

$$ac \equiv bc\ [n] \Leftrightarrow a \equiv b \left[\frac{n}{d}\right]$$

- Théorème de Fermat :
  - $a^p \equiv a\ [p]$.
  - Si $p \nmid a$ alors : $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$

ÉQUATION DIOPHANTIENE

Soit $(a;b;c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $ab \neq 0$.

- L'équation $ax + by = c$ d'inconnue $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ a des solutions si, et seulement si, $c / a \wedge b$.
- Si le couple $(x_0;y_0)$ est une solution de l'équation (E) : $ax + by = c$, alors l'ensemble solution de (E) s'écrit sous la forme :

$$S = \left\{\left(x_0 + \frac{bk}{a \wedge b}; y_0 - \frac{ak}{a \wedge b}\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ENSEMBLE $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv a\ [n]\} = \{a + kn / k \in \mathbb{Z}\}$
- $(\exists! r \in \{0;1;\ldots;n-1\})\ \ \overline{a} = \overline{r}$
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\ldots;\overline{n-1}\}$
- $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ et $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b}$
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ;+;\times)$ est un corps $\Leftrightarrow$ n est premier.

CALCUL DES PROBABILITÉS

RÈGLES DE CALCUL

Soit $(\Omega;P)$ un espace probabilisé.

Soit A et B deux événements de Ω. Alors :

- $P(\Omega) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$ et $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A)$.
- Si $A \subset B$: $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A)$

CAS D'ÉQUIPROBABILITÉ

Soit $\Omega = \{\omega_1;\ldots;\omega_n\}$ l'univers lié à une expérience aléatoire, et P une probabilité définie sur Ω.
Dans le cas d'équiprobabilité, on a les formules suivantes :

- Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{Card}\,\Omega}$$

- Pour tout événement A de Ω :

$$P(A) = \frac{\text{Card}\,A}{n} = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega}$$

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Soit $(\Omega;P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A)\neq 0$. Pour tout événement B, on pose : $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

P_A est une probabilité définie sur Ω, appelée probabilité conditionnelle relative à A ou probabilité sachant A.

VARIABLES ALÉATOIRES

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega;P)$, et $X(\Omega)$ son support.

On appelle loi de probabilité de X, l'ensemble des couples (x_i,p_i) où : $i\in\{1,2,...,n\}$

$$x_i\in X(\Omega) \quad \text{et} \quad p_i=P(X=x_i)$$

- Espérance mathématique de X :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$$

- Variance mathématique de X :

$$V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-E(X))^2$$
$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2-(E(X))^2$$

- L'écart-type de X : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

FONCTION DE RÉPARTITION

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega;P)$. La fonction F_X définie par : $(\forall x\in\mathbb{R})\ F_X(x)=P(X\leq x)$

est appelée la fonction de répartition de X.

LES BELLES FORMULES DE PROBABILITÉS

Soit $(\Omega;P)$ un espace probabilisé.

Soit A, B et C des événements de Ω.

- Formules des probabilités composées :
  - $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$
    $=P(B)\times P_B(A)$
  - $P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P_A(B)\times P_{A\cap B}(C)$
- Formules des probabilités totales :
  - $P(B)=P(A)\times P_A(B)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B).$
    $=P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})$
  - Si $(A_1,A_2,...,A_n)$ est un système complet d'événements de Ω, Alors :

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P_{A_i}(B)P(A_i)$$

- Formule des probabilités des causes : (BAYES)

$$P_A(B)=\frac{P(B)\times P_B(A)}{P(A)}$$

INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÉNEMENTS

Soit $(\Omega;P)$ un espace probabilisé. On dit que deux événements A et B de Ω sont indépendants si on a : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

ou $P_B(A)=P(A)$ ou $P_A(B)=P(B)$

RÉPÉTITION D'UNE ÉPREUVE

Soit A un événement de probabilité p lors d'une épreuve aléatoire, et soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Lorsqu'on répète cette épreuve n fois de manières identiques et indépendantes, alors la probabilité que l'événement A soit réalisé k fois exactement est : $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ où $k\in\{0;1;2;...;n\}$.

LA LOI BINOMIALE

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega;P)$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p si on a :

$X(\Omega) = \{0;1;...;n\}$ et pour tout $k \in X(\Omega)$: $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

L'espérance et la variance de X sont données par : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

STRUCTURES ALGÉBRIQUES

LOI DE COMPOSITION INTERNE

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne, c'est-à-dire :

$$(\forall (x;y) \in E^2) \quad x*y \in E$$

- La loi $*$ est commutative si :
  $$(\forall (x;y) \in E^2) \quad x*y = y*x$$
- La loi $*$ est associative si :
  $$(\forall (x;y;z) \in E^2) \quad (x*y)*z = x*(y*z)$$
- La loi $*$ admet e comme élément neutre si :
  $$(\forall x \in E) \quad x*e = e*x = x$$
- Un élément $x \in E$ admet un symétrique dans E : $(\exists x' \in E) \quad x*x' = x'*x = e$

  (e étant l'élément neutre de $(E;*)$)
- Un élément $a \in E$ est régulier si :
  $$(\forall (x;y) \in E^2) \quad \begin{cases} a*x = a*y \Rightarrow x = y \\ x*a = y*a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

GROUPE

Soit $(G;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne. On dit que $(G;*)$ est un groupe si la loi $*$ est associative, admet un élément neutre et tout élément de G admet un symétrique dans $(G;*)$. Si de plus, la loi $*$ est commutative, on dit que le groupe $(G;*)$ est commutatif.

PARTIE STABLE

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et F une partie de E.

On dit que F est stable par $*$ si :

$$(\forall (x;y) \in F^2) \quad x*y \in F$$

MORPHISME

Soit $(E;*)$ et $(F;\top)$ deux ensembles munis de lois de composition internes et soit f une application de E dans F. On dit que f est un morphisme de $(E;*)$ dans $(F;\top)$ lorsque :

$$(\forall (x;y) \in E^2) \quad f(x*y) = f(x) \top f(y)$$

En particulier :

- Un endomorphisme de $(E;*)$ est un morphisme de $(E;*)$ dans lui-même.
- Un isomorphisme est un morphisme bijectif.
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Si f un isomorphisme de $(E;*)$ dans $(F;\top)$, alors f transfère les propriétés de la loi $*$ dans $(E;*)$ vers la loi $\top$ de $(F;\top)$, et va ainsi conserver toutes les propriétés liées à cette loi.

On exprime ce résultat en disant que $(E;*)$ et $(F;\top)$ ont la même structure.

SOUS-GROUPE D'UN GROUPE

Soit $(G;*)$ un groupe et H une partie non vide de G. On dit que H est un sous-groupe de $(G;*)$ lorsque :

- ✓ H est stable par la loi $*$, c'est-à-dire : $$(\forall(x;y)\in H^2)\quad x*y\in H$$
- ✓ H contient les symétriques de tous ses éléments, c'est-à-dire : $(\forall x\in H)\ x'\in H$

MORPHISME DE GROUPES

Soit f un morphisme d'un groupe $(G;*)$ dans un groupe $(F;\top)$. Alors : L'image de groupe $(G;*)$ est le groupe $(f(G);\top)$.

DIVISEUR DE ZÉRO – ANNEAU INTÈGRE

Soit $(A;+;\bullet)$ un anneau et $a\in A-\{0_A\}$.

- On dit que a est un diviseur de zéro dans A si : $$(\exists b\in A-\{0_A\}) :\ a\bullet b=0_A \text{ ou } b\bullet a=0_A$$
- On dit que $(A;+;\bullet)$ est intègre s'il n'est pas réduit à zéro et n'admet aucun diviseur de zéro.

FAMILLE LIBRE – GÉNÉRATRICE - BASE

Soit E un espace vectoriel réel, $n\in\mathbb{N}^*$ et $B=(\vec{x}_1;\vec{x}_2;...;\vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que B est libre si pour tout $(\alpha_1;...;\alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$: $$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i=\vec{0}\Rightarrow \alpha_1=...=\alpha_n=0$$
- On dit que B est génératrice si : $$(\forall\vec{x}\in \mathrm{E})\ (\exists(\alpha_1;...;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n)\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$$
- On dit que B est une base de E si : $$(\forall\vec{x}\in \mathrm{E})\ (\exists!(\alpha_1;...;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n)\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$$

L'entier n est la dimension de E : $\dim E=n$

CARACTÉRISATION D'UN SOUS-GROUPE

Soit $(G;*)$ un groupe d'élément neutre e, et H une partie de G. H est un sous-groupe de $(G;*)$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} H\neq\varnothing \\ (\forall(x;y)\in H^2)\quad x*y'\in H\end{cases}$$

où y' est le symétrique de y dans $(G;*)$.

STRUCTURE D'ANNEAU

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition interne $\oplus$ et $\otimes$.

On dit que $(A;\oplus;\otimes)$ est un anneau lorsque :

- ✓ $(A;\oplus)$ est un groupe commutatif.
- ✓ La loi $\otimes$ est associative et distributive par rapport à la loi $\oplus$.

On dit que l'anneau $(A;\oplus;\otimes)$ est commutatif si la loi $\otimes$ est commutative. On dit que A est unitaire s'il possède un élément neutre pour la loi $\otimes$.

STRUCTURE DE CORPS

On appelle corps tout anneau $(K;+;\bullet)$ non réduit à $\{0_k\}$ tel que tout élément autre que 0_k est inversible pour la loi $\bullet$. Un corps est dit commutatif si sa multiplication $\bullet$ est commutative.

CARACTÉRISATION D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

Soit $(\mathrm{E};+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel et F une partie de E.

Pour que F soit un sous-espace vectoriel de E, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} F\neq\varnothing \\ (\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)(\forall(\vec{x};\vec{y})\in F^2)\ \alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in F\end{cases}$$

RÉFÉRENCES

BIBLIOGRAPHIE

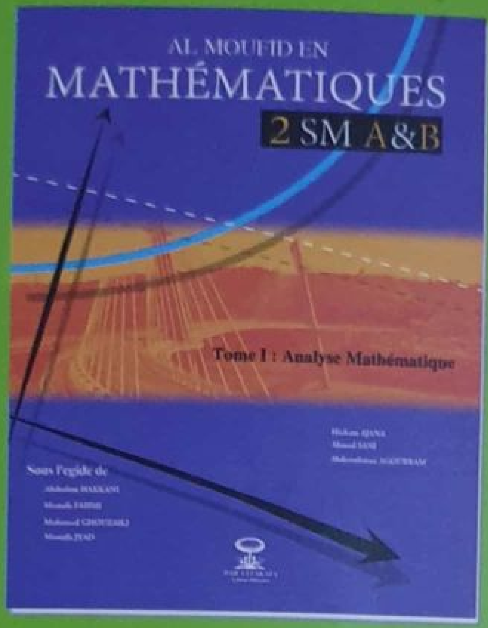
- Mathématiques tout-en-un MPSI (édition Dunod,17 juin 2015) ,
  Auteurs : Claude Deschamps, André Warusfel.
- Tout-en-un Mathématiques MPSI (édition Bréal, 16 août 2013),
  Auteurs : Daniel Guinin et E. Ladame.
- Dictionnaire des mathématiques (édition 21 février 2013),
  Auteurs : Alain Bouvier et Michel George.
- Math'X Tle S spécifique (édition 2016) ,
  Auteurs : Elisabeth Beauvois et Joël Berhouet.
- Maths Repères Tle S spécifique (édition 2012),
  Auteurs : Agnès Choquer et Boris Hanouch.
- Maths - Visa pour la prépa 2016-2017 - MPSI-PCSI-PTSI-BCPST-ECS (6 mai 2009),
  Auteur : Guillaume Connan.
- Arithmétique dans Z et dans K(X) Cours Complet avec Exercices (7 juin 2016).
  Auteur : François Liret
- Algèbre MPSI . Auteur : Nicolas Basbois (9 décembre 2015).
- Calcul des probabilités - Dunod - Cours, exercices et problèmes corrigés (2 mai 2012).
- Collection DIMA DIMA auteurs. Abdeslem HAKKANI - Mohamed GHOUZAILI - Mostafa FAHMI

WEBOGRAPHIE

- www.fr.wikipedia.org (Janvier 2016)
- www.xmaths.free.fr (Janvier 2016)
- www.apmep.fr (Décembre 2015)
- www.mp.cpgedupuydelome.fr (Décembre 2015)
- www.lavau.pagesperso-orange.fr (Octobre 2015)
- www.abdellah.bechata.free.fr (2009)
- www.pagesperso-orange.fr/gilles.costantini (2010)

TABLE DES MATIÈRES

Existe en cette collection :



DAR ATTAKAFA
Edition Diffusion
32 / 34 Bd Victor Hugo - Casablanca
Tél : 05 22 30 23 75 / 30 25 14 - Fax : 05 22 30 65 11
www.darattakafa.com

Prix de vente public
140,00 Dh

MM 2SM A&BT2