AL MOUFID EN

MATHÉMATIQUES

2 SM A&B

Tome I : Analyse Mathématique

Hicham AJANA

Ahmed SANI

Abderrahman AGOURRAM

Sous l'egide de

Abdeslem HAKKANI

Mostafa FAHMI

Mohamed GHOUZAILI

Mostafa JYAD

DAR ATTAKAFA

Edition Diffusion

Scanné avec CamScanner

Chapitre

Comment j'utilise ce livre

Programme de mathématiques de la 2ème année du baccalauréat Sciences mathématiques

Limites et continuité

Suites numériques

Dérivation et étude des fonctions

Fonctions logarithmes

Fonctions exponentielles

Calcul intégral

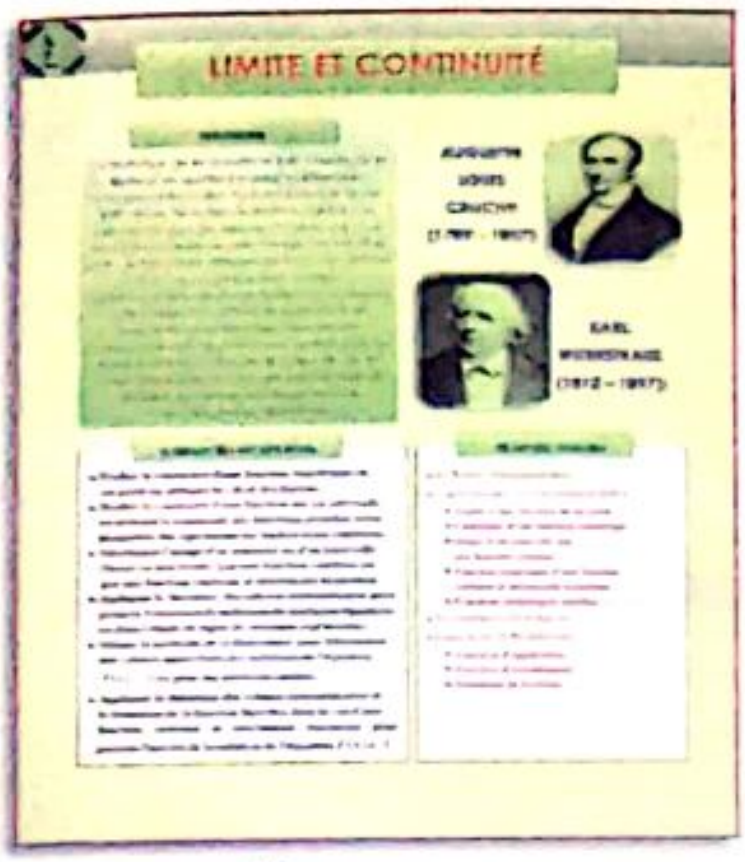
Équations différentielles

Formulaire

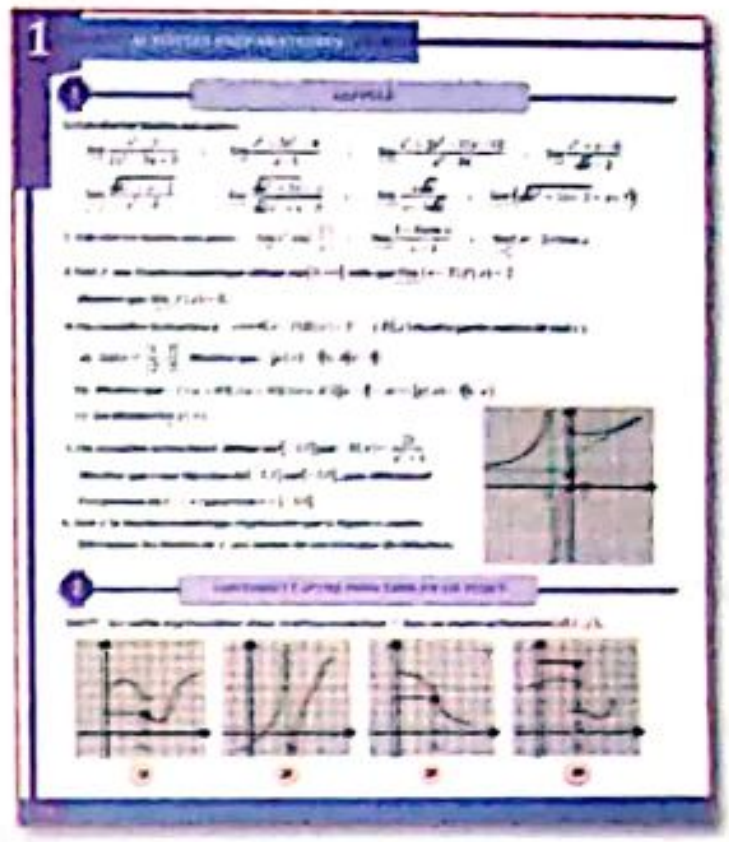
Références

Scanné avec CamScanner

COMMENT J'UTILISE CE LIVRE ?



Cette page présente les principaux titres, les capacités attendues et un aperçu historique sur des savants mathématiciens.

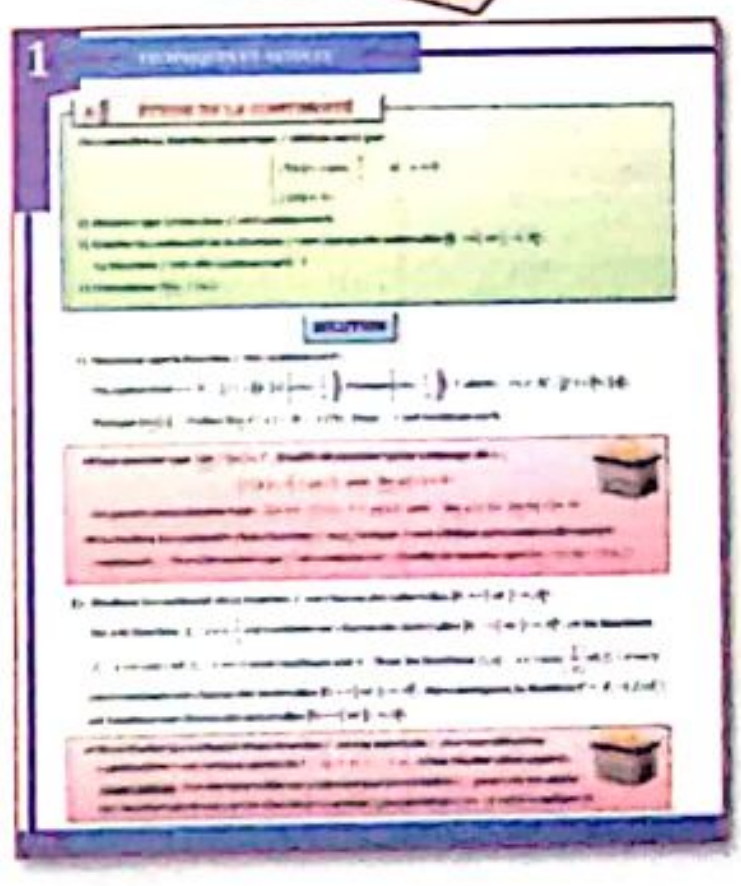


Ces activités facilitent la construction du savoir en se référant aux prérequis.

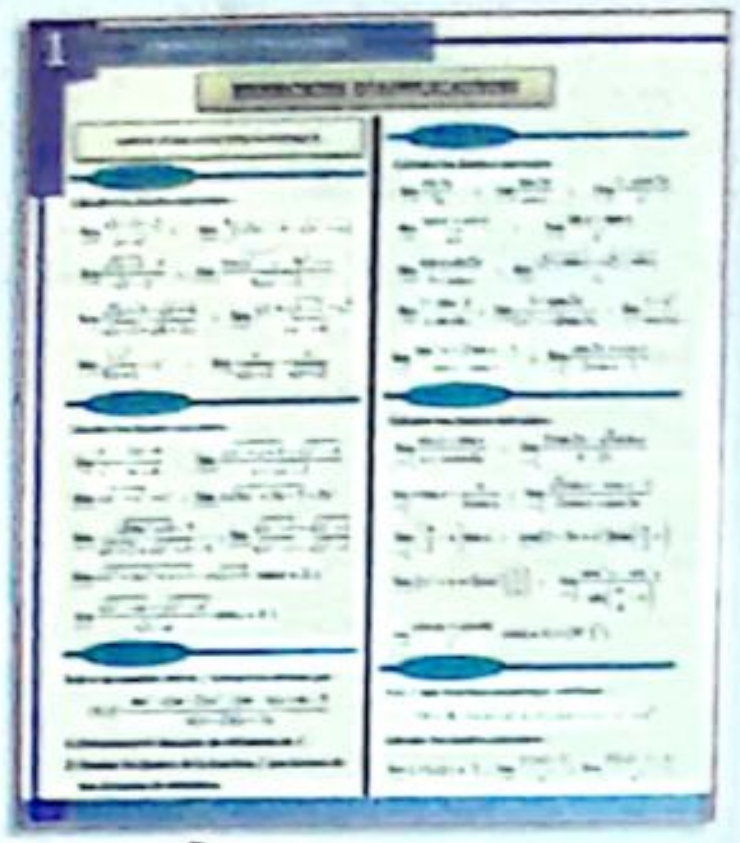
On trouve, à ce stade, les savoirs fondamentaux, les règles et les formules qui ont été établies.

Méthodes Et Astuces

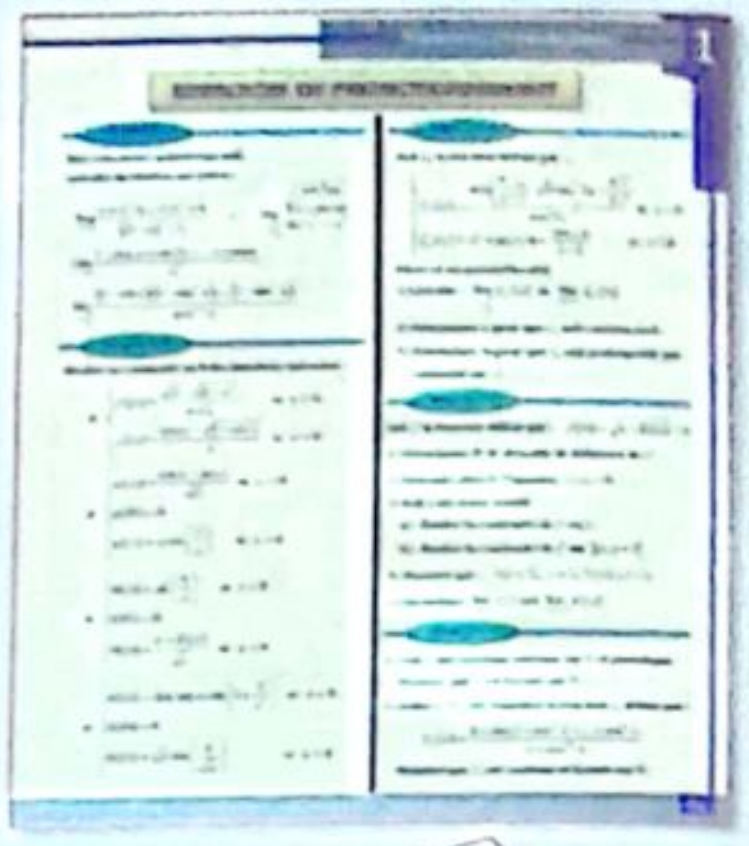
Ce type d'exercices permet de consolider le savoir, de l'investir et de s'exercer au raisonnement.



Scanné avec CamScanner



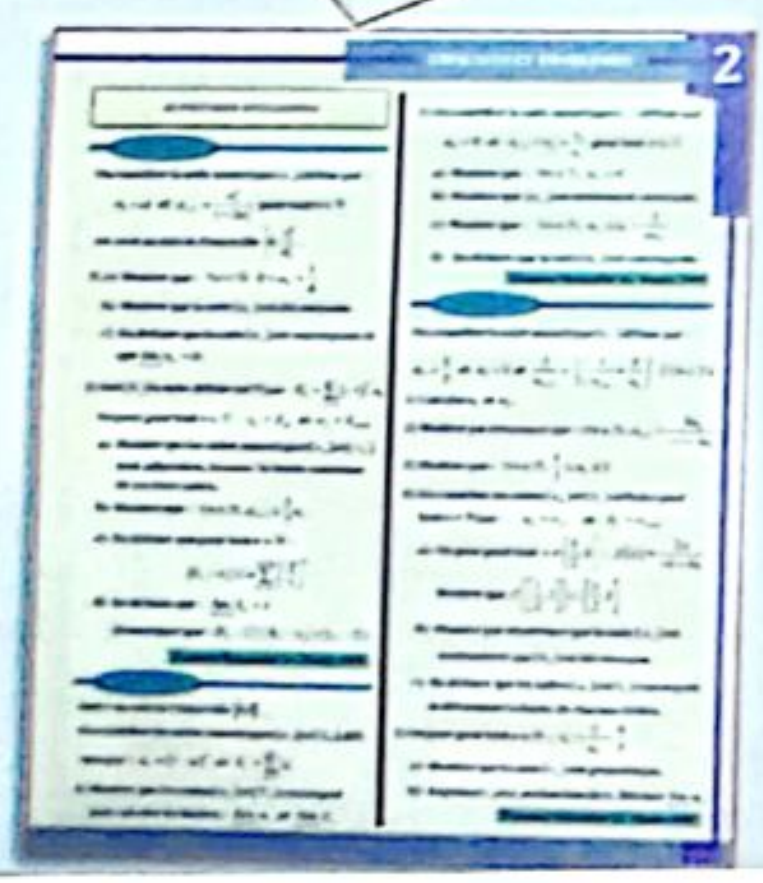
Exercices d'Applications
Exercices d'évaluation et d'application immédiate des apprentissages.

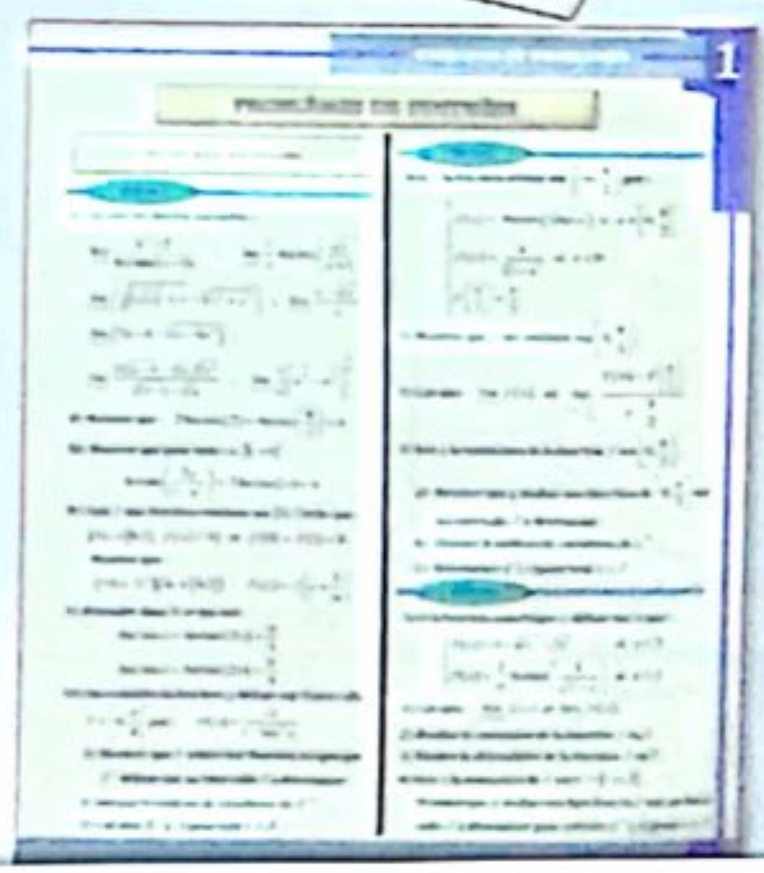


Exercices de Perfectionnement
Ces exercices permettent l'amélioration des apprentissages et leur évolution ver: la maîtrise, la perfection et l'enrichissement des acquis.

Se Préparer Aux Devoirs
Exercices d'évaluation qui nécessitent une organisation des acquis et la mobilisation des ressources.

Se Préparer Aux Examens
Problèmes de synthèse extraits des anciennes épreuves posées au bac. C'est la phase d'intégration des apprentissages et l'investissement du savoir sous ses différents aspects.





Scanné avec CamScanner

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE LA DEUXIEME ANNÉE DU CYCLE DU BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES (A ET B)

Contenu Du Programme	Capacités Attendues	Recommandations Pédagogiques
1 Suites Numériques		
• Limite d'une suite numérique ; • Limite d'une suite numérique de la forme : $(n^\alpha), \alpha \in \mathbb{Q}^*$ et $(a^n), a \in \mathbb{R}^*$ • Suite convergente ; Suite divergente ; • Opérations sur les limites de suites ; limites et ordre ; critères de convergence ; • Suites adjacentes ; convergence d'une suite croissante et majorée (ou décroissante minorée) ; cas d'une suite croissante non majorée ; • Etude des suites récurrentes de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I et $f(I) \subset I$; • Limite de la composée d'une suite et d'une fonction continue.	• Utiliser les suites arithmétiques et Les suites géométriques pour étudier des exemples de suites de la forme : $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ et d'autres suites récurrentes ; • Utiliser l'encadrement et les propriétés de l'ordre pour prouver la convergence ou la divergence d'une suite, en se basant sur la définition de la limite d'une suite dans des exemples particuliers ; • Utiliser les suites de référence et les critères de convergence pour déterminer les limites de suites numériques ; • Utiliser les suites numériques pour résoudre des problèmes variés de différents domaines ; • Étudier les suites récurrentes de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I et $f(I) \subset I$; Déterminer la limite de la composée d'une suite et d'une fonction	• On réalisera des activités mathématiques comme l'étude du comportement des suites usuelles : $((\sqrt{n})_{n\geq 0}, (n)_{n\geq 0}, \ldots, \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}, \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}, \ldots)$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour approcher la notion de limite d'une suite (finie ou infinie), en utilisant le logiciel Excel par exemple, et on présentera la définition de limite finie et de limite infinie en relation avec la limite d'une fonction numérique en $+\infty$; • On se limitera à utiliser la définition de la limite pour démontrer quelques activités d'initiation seulement (l'utilisation de la définition de la limite d'une suite n'est pas un objectif du programme) ; • On insistera davantage sur l'utilisation des limites des suites usuelles et des critères de convergence pour étudier les limites de suites ; Dire qu'une suite tend vers : ▪ ℓ revient à dire : « tout intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang » ;

Scanné avec CamScanner

continue (suite de la forme $v_n = f(u_n)$)

- Utiliser les suites adjacentes pour encadrer un nombre réel par des nombres décimaux ;
- Encadrer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle ou l'aire d'un domaine limité par la courbe d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ (en utilisant la méthode des rectangles par exemple).

- tend vers $+\infty$ revient à dire que : « tout intervalle ouvert de la forme $]a,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang »

- On démontrera ce qui suit :
  - Critères de convergence ;
  - Si $\forall n,\ u_n < a$ et si (u_n) est convergente de limite ℓ, alors $\ell \leq a$;
  - Théorème portant sur les suites suites adjacentes ;

  Étudier la limite de la suite $(a^n)_{n\geq 0}$ (où $a \in \mathbb{R}^*$) et de la suite $(n^r)_{n\geq 0}$ (où $r \in \mathbb{Q}^*$) et on les considérera comme des limites usuelles ;
- On traitera des problèmes dont la résolution se ramène à l'étude de :
  - Suites récurrentes de la forme : $u_{n+1} = au_n + b$, dans des cas particuliers ; $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$, dans des cas particuliers ;

    $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant une fonction continue sur un intervalle I et vérifiant $f(I) \subset I$.
- Suites de la forme : $v_n = f(u_n)$, dans des cas particuliers ;

  On présentera les deux propriétés :
- Si une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ (où f est une fonction continue sur un intervalle I et vérifiant $f(I) \subset I$ est convergente et sa limite est ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
- Si une suite (u_n) est convergente de limite ℓ et f est continue en ℓ, alors la suite $(v_n = f(u_n))$ est convergente et sa limite est $f(\ell)$.

Scanné avec CamScanner

2 Les Fonctions Numériques : Limites Et Continuité

• Continuité en un point ; continuité à droite ; continuité à gauche ; continuité sur un intervalle (cas de fonctions polynômes ; de fonctions rationnelles ; de fonctions trigonométriques et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$) ; • Prolongement par continuité en un point ; • Opérations sur les fonctions continues ; • Continuité de la composée de deux fonctions continues ; limite de la composée d'une fonction continue et d'une fonction qui admet une limite ; limite de la composée d'une suite et d'une fonction continue ; • Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue ; • Théorème des valeurs intermédiaires ; cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ; • Théorème des fonctions réciproques (théorème des fonctions bijectives) ; • Fonctions réciproques usuelles : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$ • Puissances rationnelles : x^r où $r \in \mathbb{Q}^*$, et propriétés des opérations sur les puissances rationnelles.	• Etudier la continuité d'une fonction numérique en un point en utilisant le calcul des limites ; • Etudier la continuité d'une fonction sur un intervalle en utilisant la continuité des fonctions usuelles et les propriétés des opérations sur les fonctions continues ; • Déterminer l'image d'un segment ou d'un intervalle (borné ou non borné) par une fonction continue ou par une fonction continue et strictement monotone ; • Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour prouver l'existence de solutions de quelques équations ou dans l'étude du signe de certaines expressions ; • Utiliser la méthode de la dichotomie pour déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ ou pour encadrer ses racines ; • Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la fonction bijective dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone.	• On adoptera la définition suivante : une fonction est continue en un point x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; • Cette partie sera l'occasion pour préciser la définition de la limite d'une fonction en un point à travers des activités et des exemples particuliers et pour rappeler les propriétés fondamentales (unicité de la limite si elle existe, opérations sur les limites,...), l'utilisation de la définition de la limite se limitera à la démonstration de quelques propriétés au programme et à la pratique de quelques activités pour s'initier davantage avec cette définition qui n'est pas un objectif du programme ; • On admettra que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment et que l'image d'un intervalle est aussi un intervalle et on déduira le théorème des valeurs intermédiaires ; • On développera chez les élèves l'utilisation du tableau de variations d'une fonction pour déduire ses propriétés ou quelques résultats la concernant ; • On présentera le théorème des fonctions réciproques et ses applications dans des cas particuliers et on l'adoptera pour présenter les fonctions : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$ On insistera surtout sur la fonction : $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$, les deux fonctions $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\cos x$ sont hors programme.

Scanné avec CamScanner

3 Dérivation Et Étude De Fonctions

I. Dérivabilité : • Continuité et dérivabilité ; • Dérivabilité de la composée de deux fonctions dérivables ; • Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle ; • Dérivées des fonctions : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$ **II. Fonctions primitives :** • Fonctions primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; Définition et propriétés. **III. Fonctions logarithmes et fonctions exponentielles** **III.1. Fonction logarithme népérien :** • Définition et propriétés algébriques ; • Le symbole ln et étude de la fonction $x \mapsto \ln x$; • Dérivée logarithmique d'une fonction ; • Les primitives de la fonction : $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ **III.2. Fonction logarithme de base *a* :** • Définition et propriétés ; • Fonction logarithme décimal. **III.3. Fonction exponentielle népérienne :** • Définition et propriétés algébriques ; • Le symbole exp et étude de la fonction $x \mapsto \exp(x)$;	• Maitriser le calcul des dérivées des fonctions usuelles ; • Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa représentation graphique ; • Etudier des fonctions irrationnelles et des fonctions trigonométriques et des fonctions composées et les représenter graphiquement ; • Déterminer la monotonie de la fonction réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle et la représenter graphiquement ; • Déterminer le nombre dérivé en un point de la fonction réciproque d'une fonction ; • Utiliser les formules de dérivation pour déterminer les fonctions primitives d'une fonction dans un intervalle ; • Maitriser le calcul sur les logarithmes ; • Maitriser la résolution d'équations et d'inéquations et de systèmes logarithmiques ; • Connaitre le logarithme décimal et ses applications (surtout dans la résolution d'équations de la forme $10^x = a$) ; • Maitriser et appliquer les limites logarithmiques fondamentales ; • Maitriser l'étude et la représentation de fonctions comportant la fonction logarithme népérien ;	• On rappellera la notion de dérivation et ses applications à travers des activités variées mettant en évidence son importance dans l'étude locale et globale des fonctions au programme, et surtout dans l'approximation locale d'une fonction , l'étude du sens de variation d'une fonction sur un intervalle , la détermination des extrema , l'étude du signe d'une fonction ou d'une inégalité algébrique sur un intervalle ou la concavité de la courbe d'une fonction numérique...,on rappellera à cette occasion la propriété caractéristique d'une fonction constante ou strictement monotone sur un intervalle ; • A partir de l'étude d'exemples de fonctions polynômes , de fonctions rationnelles, de fonctions irrationnelles et de fonctions trigonométriques, on fixera les acquis des élèves sur : la dérivation, le calcul des limites, des éléments de symétrie de la courbe d'une fonction, l'étude des branches infinies , la détermination des asymptotes d'une courbe, la résolution graphique de quelques équations et inéquations , l'approximation d'une fonction par une fonction affine ; on abordera à cette occasion les équations irrationnelles à partir du traitement de quelques modèles ; On introduira l'écriture différentielle $dy = f'(x)dx$, adoptée en physique; • L'étude des fonctions de la forme :

Scanné avec CamScanner

Le nombre e et l'écriture e^x

- Primitives de la fonction :

$$x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$$

III.4. Fonction exponentielle de base a :

- Définition et propriétés algébriques ;
- Dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$.

IV.Théorème des accroissements finis

- Théorème de Rolle ; Théorème des accroissements finis ;
- Inégalité des accroissements finis ;
- Propriété d'une fonction constante ou strictement croissante sur un intervalle.

V. Equations différentielles

- L'équation différentielle :

$$y' = ay + b$$

- L'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0$$

- Maitriser la résolution d'équations et d'inéquations et de systèmes comportant l'exponentielle népérienne ;
- Maitriser et appliquer les limites fondamentales de la fonction exponentielle népérienne ;
- Maitriser l'étude et la représentation des fonctions comportant la fonction exponentielle ;
- Maitriser l'étude et la représentation de fonctions comportant la fonction logarithme et la fonction exponentielle népérienne ;
- Maitriser l'interprétation graphique du théorème de Rolle, du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis ;
- Appliquer ces théorèmes aux suites numériques de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$ ou dans l'encadrement d'expressions et de formules algébriques ou de nombres réels ;
- Résoudre de l'équation :

$$y' = ay + b$$

- Résoudre de l'équation :

$$y'' + ay' + by = 0$$

$x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ avec $(n \geq 3)$ avec fonction positive est hors programme, on se limitera à la détermination de leurs dérivées.

- Les limites déjà citées concernant la fonction logarithme et la fonction exponentielle népérienne, en plus de : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x$ où $n \in \mathbb{N}^*$ sont considérées comme limites fondamentales ;
- On utilisera les fonctions logarithme et exponentielle dans la résolution de problèmes variés ;
- Pour tout nombre strictement positif on a $a^b = e^{b \ln a}$.
- On insistera sur les applications du théorème de Rolle, du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour encadrer, majorer et minorer des expressions algébriques et étudier les suites numériques ;
- On insistera sur l'interprétation géométrique des différents théorèmes et propriétés présentés dans ce paragraphe ;
- Résolution de l'équation $y' = ay + b$ et son utilisation dans des situations des disciplines de la spécialité ;
- Résolution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ et son utilisation dans des situations des disciplines de la spécialité ;
- On admettra la solution générale de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

Scanné avec CamScanner

4 Calcul Intégral

- Intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$; interprétation géométrique ;
- La fonction primitive :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

- L'intégrale et les opérations (linéarité, relation de Chasles..)
- Intégrale et ordre :
- L'intégrale et la valeur absolue; La valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment ;
- Théorème de la moyenne :

Il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

- Techniques du calcul intégral :
  - utilisation des fonctions primitives ;
  - intégration par partie ;
  - intégration par changement de variable .....;
- Applications : calcul d'aires ; calcul de volumes.

- Calcul des intégrales de fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques et irrationnelles simples;
- Appliquer les techniques du calcul intégral ;
- Maitriser le calcul de l'aire d'un domaine plan limité par deux courbes et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées ;
- Calculer le volume d'un solide engendré par sa rotation autour de l'axe des abscisses ;
- Appliquer le calcul intégral pour prouver certaines inégalités et donner des approximations ;
- Etudier les fonctions du type :

$$x \mapsto \int_a^{(x)} f(t)dt$$

- Encadrer une intégrale par deux suites en utilisant la méthode des rectangles (dans le cas de fonctions monotones) ;
- Déterminer les limites des deux suites :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right)$$

$$v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right)$$

(f étant une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$)

- Etudier des fonctions et des suites définies par des intégrales.

- On présentera l'intégrale d'une fonction sur un segment à partir de la notion de primitive d'une fonction continue ;
- On fera le lien entre l'intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle $[a,b]$ et l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de la fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x = a$ et $x = b$ à partir de l'étude des cas d'une fonction constante puis d'une fonction affine puis d'une fonction affine par morceaux et continue, pour enfin généraliser le résultat sur des fonctions continues et positives sur un intervalle ;
- On insistera sur les techniques du calcul intégral et les techniques d'encadrement d'une intégrale ... ;
- L'intégrale permet de démontrer l'existence de fonctions primitives des fonctions continues sur un intervalle et de présenter des techniques pour les déterminer ; réciproquement, la connaissance d'une fonction primitive d'une fonction continue permet le calcul de l'intégrale de cette fonction ; cela doit être mis en évidence aux élèves par la diversité des activités;
- Étude des fonctions du type :

$$x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)dt$$

- Les fonctions du type :

$$x \mapsto \int_a^x f(x,t)dt$$

sont hors programme.

Scanné avec CamScanner

HISTOIRE

La définition de la dérivée se fait à l'aide de la limite d'un quotient a priori indéterminé. Lorsque cette notion fut introduite à la fin du XVII[e] siècle, la notion de limite n'existait pas. Leibniz et Euler considéraient l'existence d'un état intermédiaire appelé infiniment petit situé entre le fait d'être différent de 0 et celui d'être nul. Ceci explique que certains mathématiciens aient combattu ces nouveaux outils malgré leur efficacité pour résoudre de nombreux problèmes jusque-là sans réponse. Jean le Rond d'Alembert chercha fort maladroitement à formuler une définition de la limite mais il faut attendre le milieu du siècle suivant pour que ce concept soit introduit de manière rigoureuse par Augustin-Louis Cauchy puis Karl Weierstrass.

Source : https://fr.wikipedia.org

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 – 1857)

KARL WEIERSTRASS (1812 – 1897)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Etudier la continuité d'une fonction numérique en un point en utilisant le calcul des limites ;
- Etudier la continuité d'une fonction sur un intervalle en utilisant la continuité des fonctions usuelles et les propriétés des opérations sur les fonctions continues ;
- Déterminer l'image d'un segment ou d'un intervalle (borné ou non borné) par une fonction continue ou par une fonction continue et strictement monotone ;
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour prouver l'existence de solutions de quelques équations ou dans l'étude du signe de certaines expressions ;
- Utiliser la méthode de la dichotomie pour déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ ou pour encadrer ses racines ;
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la fonction réciproque dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone pour prouver l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = \lambda$.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires..... 14
- Connaissances Fondamentales
  - Limite d'une fonction en un point 19
  - Continuité d'une fonction numérique..... 21
  - Image d'un intervalle par une fonction continue..... 28
  - Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone..... 34
  - Fonctions réciproques usuelles..... 36
- Techniques Et Astuces 41
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application..... 50
  - Exercices de perfectionnement..... 59
  - Problèmes de synthèse..... 64

Scanné avec CamScanner

1 RAPPELS

1. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-5x+3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+2x^2-11x-12}{x^4-81}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-x}{\sqrt{2x^2+x-5}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x-3\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+x+1\right)$

2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-4\cos x}{x+3}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$

3. Soit φ une fonction numérique définie sur $[1,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)\varphi(x)=2$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

4. On considère la fonction $g: x\mapsto 4(x-1)E(x)+3$ ($E(x)$ étant la partie entière de réel x)

a) Soit $x\in\left]\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right[$. Montrer que : $|g(x)-3|\le 4|x-1|$

b) Montrer que : $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in\mathbb{R})\left(|x-1|<\alpha\Rightarrow|g(x)-3|<\varepsilon\right)$

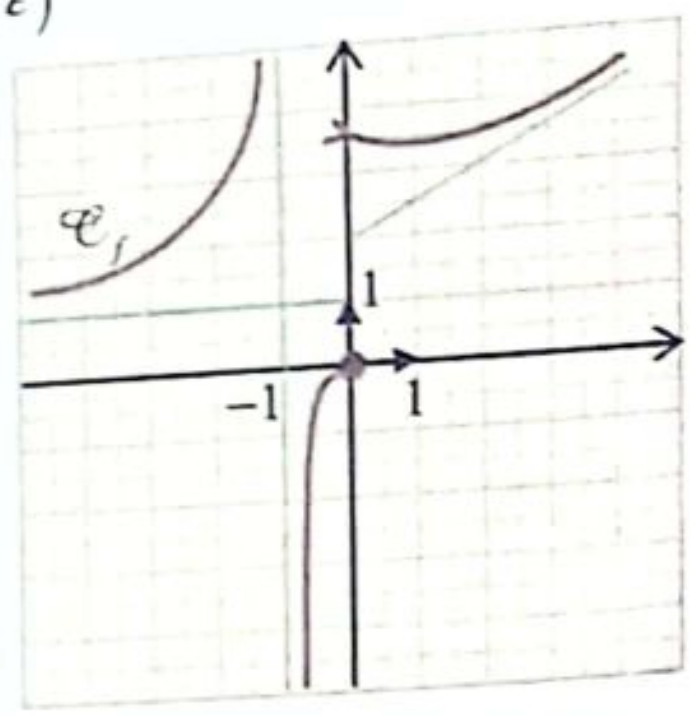
c) En déduire $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$.

5. On considère la fonction h définie sur $[-1,1]$ par : $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

Montrer que h une bijection de $[-1,1]$ sur $[-1,1]$, puis déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$ pour tout $x\in[-1,1]$.

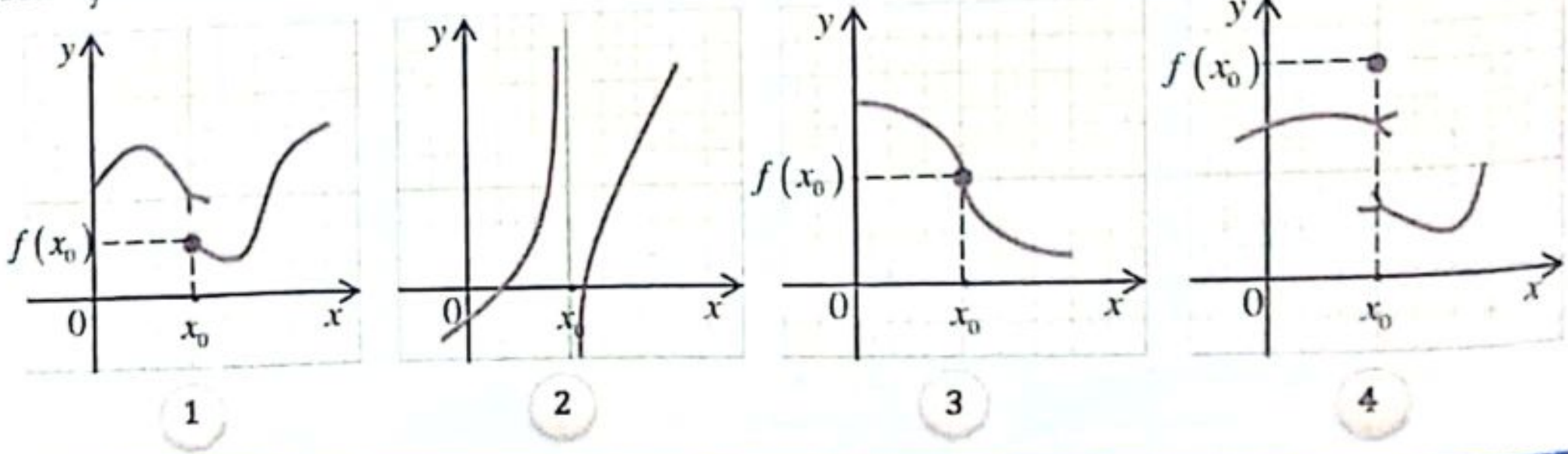
6. Soit f la fonction numérique représentée sur la figure ci-contre.

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.



2 CONTINUITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction numérique f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



Scanné avec CamScanner

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES 1

Dans chacun des cas (1) , (2), (3) et (4) comparer chacune des limites $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ avec le nombre $f(x_0)$ (s'il existe).

Que peut-on remarquer graphiquement sur la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage du point M_0 d'abscisse x_0 ?

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre x_0.

On dit que f est continue en x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

On dit que f est continue à droite de x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

On dit que f est continue à gauche de x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

CONTINUITE À GAUCHE ET À DROITE – PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

A) Soit f la fonction numérique définie sur $[-1,2]$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{7\sin(a(x-1))}{x-1} & \text{si } -1 \le x < 1 \\ f(x) = 6x + a & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

1. Calculer $f(1)$ puis montrer que f est continue à droite en 1 .

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ puis déterminer a pour que f soit continue en 1 .

Pour que la fonction f soit continue en x_0 il faut et il suffit qu'elle soit continue à gauche et à droite en x_0

B) Soit f la fonction de la variable x définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{|x-5| - 3}$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f .

2. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -2$.

b) Soit $\tilde{f}$ la fonction numérique définie sur $\mathcal{D} \cup \{2\}$ par : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 2 \\ \tilde{f}(2) = -2 \end{cases}$

Montrer que $\tilde{f}$ est continue au point 2 .

On dit alors que la fonction f est prolongeable par continuité en 2 . La fonction $\tilde{f}$ est appelée alors le prolongement par continuité de la fonction f au point 2 .

3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité au point 8 ? Justifier votre réponse.

GÉNÉRALISATION

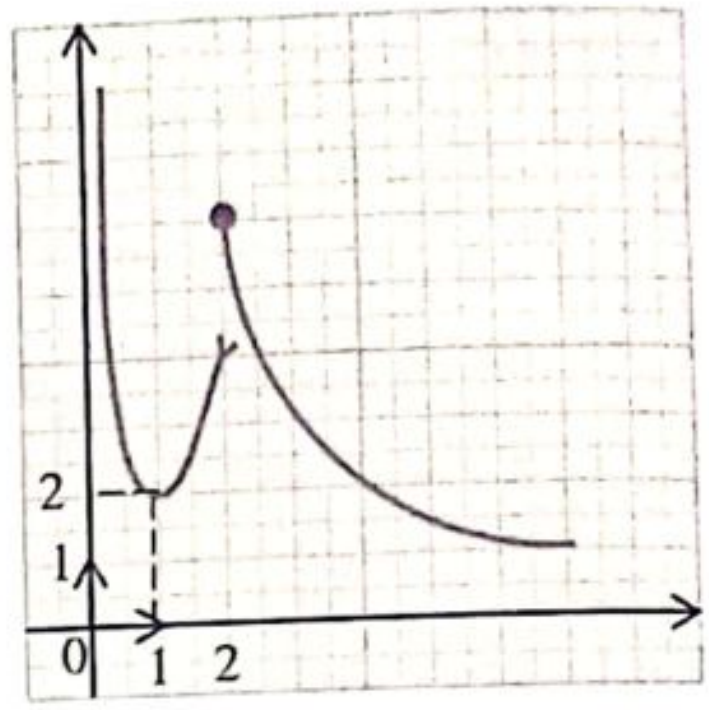
Soit f une fonction numérique et $x_0 \notin \mathcal{D}_f$. Supposons que f ait une limite finie ℓ au point x_0. On dit alors que f est prolongeable par continuité en x_0.

La fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathcal{D}_f \cup \{x_0\}$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$, si $x \neq x_0$, et $\tilde{f}(x_0) = \ell$ est appelée le prolongement par continuité de f au point x_0.

Scanné avec CamScanner

4 CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

1. La figure ci-contre présente la courbe représentative d'une fonction numérique f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.



a) La fonction f est elle-continue au point 2 ?

b) Parmi les intervalles suivants, déterminer ceux sur lesquels la fonction f est continue en chacun de ses points :

$$I=]0,1] \quad ; \quad J=[1,3] \quad ; \quad K=[2,4] \quad ; \quad L=]0,+\infty[$$

2. Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Vérifier que g est bien définie sur $]-1,1[$.

b) Soit $x_0 \in]-1,1[$. Montrer que g est continue en x_0.

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-x} & \text{si } x>1 \\ h(x)=x^2+ax & \text{si } x\leq 1 \end{cases} \qquad \text{où } a\in\mathbb{R}$$

a) Montrer que h est continue en tout point de $]-\infty,1[$ et en tout point de $]1,+\infty[$

b) Déterminer la valeur de a pour laquelle la fonction h est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

5 COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS CONTINUES

A) Soit f et g les deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+3 \qquad \text{et} \qquad g(x)=|x+3|$$

1. Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Comparer $gof(x_0)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} gof(x)$.

En déduire que la fonction gof est continue sur $\mathbb{R}$.

> De façon générale, si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0

B) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=-1$.

2. Soit $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de la fonction f au point π et g une fonction continue au point -1.

a) En utilisant le résultat de A), montrer que : $\lim\limits_{x\to\pi} go\tilde{f}(x)=g(-1)$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to\pi} gof(x)=g(-1)$

Scanné avec CamScanner

GÉNÉRALISATION

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$, et si g est continue en ℓ alors $\lim\limits_{x\to x_0} gof(x)=g(\ell)$

C) On considère les deux fonctions f et g définies par : $\begin{cases} f(x)=1 \text{ si } x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$ et $\begin{cases} g(x)=3 \text{ si } x\neq 1 \\ g(1)=4 \end{cases}$

1. Vérifier que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3$

2. Déterminer l'expression de $gof(x)$ puis calculer $\lim\limits_{x\to 0} gof(x)$.

⚠ Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to \ell} g(x)=m$ alors la limite de la fonction gof (si elle existe) quand x tend vers x_0 n'est pas nécessairement égale à m.

6 IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

A) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin x$ et $g(x)=(x-1)^2$

Les fonctions f et g sont évidemment continues sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$ et $f\left(\left[-\frac{\pi}{4},\pi\right]\right)$ puis vérifier qu'ils sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Remarquer bien que les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas en général de même nature.

2. Déterminer $g([1,+\infty[)$ et $g([1,2])$ et $g(]0,3[)$ puis vérifier qu'ils sont des intervalles.

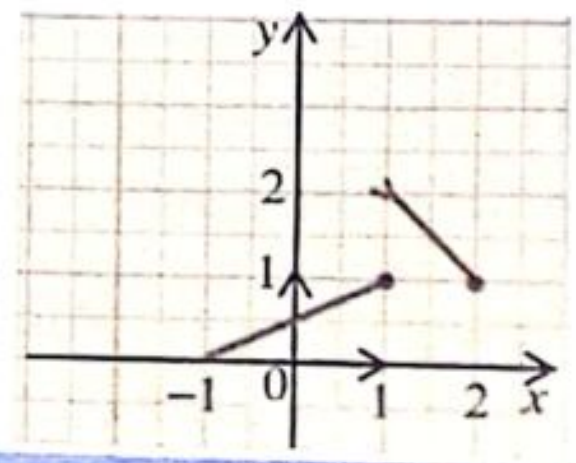
RÉSULTAT ADMIS

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Si f est continue sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[m,M]$ où m est le minimum de f sur $[a,b]$ et M est le maximum de f sur $[a,b]$

B) Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}_f$ représente la courbe d'une fonction f définie sur $[-1,2]$.

1. Définir f sur $[-1,2]$.
2. Vérifier que f n'est pas continue au point 1.
3. Déterminer $f([-1,2])$.
4. Est-ce que la condition « f continue sur un intervalle I » est nécessaire pour que $f(I)$ soit un intervalle ?

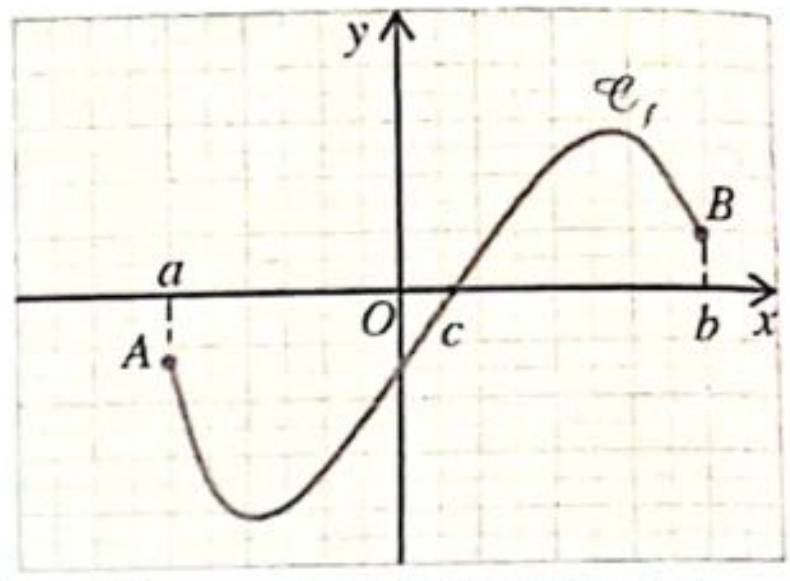


Scanné avec CamScanner

7 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

A) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

On suppose que $f(a).f(b) < 0$.



1. Montrer que $0 \in f(I)$.

2. En déduire qu'il existe au moins un élément c de l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

3. Montrer que l'équation $x^3 + 2x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1,1]$.

B) Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, et soit λ un nombre réel compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$. On pose $g(x) = f(x) - \lambda$.

1. Vérifier que $g(a) \times g(b) < 0$.

2. En déduire qu'il existe un nombre réel c de l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

> On a donc montré que si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.
>
> Ce résultat porte le nom de « théorème des valeurs intermédiaires ».

3. Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = x^4 - \dfrac{4}{x}$

Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1,2]$.

8 THÉORÈME DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$.

2. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que pour tout $y \in]-1,1[$, il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Si on pose $x = f^{-1}(y)$ alors f^{-1} est la fonction réciproque de f. De plus, f^{-1} est définie de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.

> Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur $f(I)$. Dans ce cas, f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $f(I)$ dans I.
>
> On a alors : $(\forall x \in I)(\forall y \in f(I))\ :\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
>
> et : $(\forall x \in I)\ f^{-1}of(x) = x$; $(\forall y \in f(I))\ fof^{-1}(y) = y$

Scanné avec CamScanner

1 LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Dans tout ce qui suit, x_0 est un nombre réel.

1.1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS

Définition 1

Soit f une fonction numérique telle que : $(\exists r>0)\ ;\ ]x_0-r, x_0+r[-\{x_0\}\subset D_f$ et $\ell\in\mathbb{R}$.

On dit que la limite de f en x_0 est ℓ, ou encore, $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0, si :

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)\ \ (0<|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon)$$

On écrit : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$

Exemple

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=2x^2+3x+1$$

Montrons en utilisant la définition que :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=6$$

Soit $I=\left]1-\frac{1}{2};1+\frac{1}{2}\right[=\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$. On a pour tout $x\in I$:

$$|f(x)-6|=|(x-1)(2x+5)|$$
$$=|x-1||2x+5|$$

On a $x\in\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$; d'où $|x-1|<\frac{1}{2}$ et $6<2x+5<8$

Et alors $|2x+5|<8$. Il s'ensuit donc que :

$$|x-1||2x+5|\le 8|x-1|$$

Soit $\varepsilon>0$. Pour que $|f(x)-6|<\varepsilon$ il suffit que $8|x-1|<\varepsilon$ et $|x-1|<\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que :

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{8}\quad\text{et}\quad|x-1|<\frac{1}{2}$$

En prenant $\alpha=\inf\left(\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{8}\right)$, on vérifie que : Pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\alpha=\inf\left(\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{8}\right)>0$ tel que :

$$(\forall x\in D_f)\ (0<|x-1|<\alpha\Rightarrow|f(x)-6|<\varepsilon)$$

Ce qui signifie que : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=6$

Application

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

1. Montrer que pour tout $x\in]0;2[$: $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right|\le\frac{1}{2}|x-1|$

2. En utilisant la définition, montrer que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{3}{2}$

1.2. UNICITÉ DE LA LIMITE

Proposition 1

Si la limite d'une fonction numérique f existe en un point, alors elle est unique.

Scanné avec CamScanner

Preuve

Soit f une fonction numérique admettant une limite finie au point x_0.

Par l'absurde, supposons que f admet deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2. En prenant $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$ on obtient :

$$(\exists \alpha_1 > 0)(\forall x \in D_f) \quad \left(0 < |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon\right)$$

$$(\exists \alpha_2 > 0)(\forall x \in D_f) \quad \left(0 < |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon\right)$$

Soit $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$. Il en résulte donc :

$$(\forall x \in D_f) \quad \left(0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon \text{ et } |f(x) - \ell_2| < \varepsilon\right)$$

Puisque $|\ell_1 - \ell_2| = |(\ell_1 - f(x)) + (f(x) - \ell_2)|$ alors :

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} + \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$$

Donc $|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2|$; ce qui est absurde. Par suite, $\ell_1 = \ell_2$.

1.3. LIMITES DES FONCTIONS USUELLES

Proposition 2

Soit P et Q deux fonctions polynomiales et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors :

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

(2) Si $Q(x_0) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$

(4) Si $x_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$

(5) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

(6) Si $x_0 \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

(7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

(9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

1.4. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Proposition 3

Soit f et g deux fonctions numériques et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ alors :

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \ell + \ell'$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = \ell\ell'$

(3) Si $\ell' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{\ell'}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\ell}{\ell'}$

Scanné avec CamScanner

2 CONTINUITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

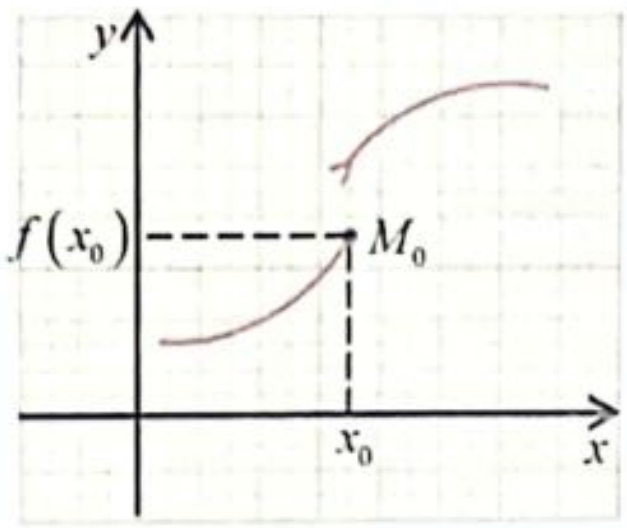
2.1. CONTINUITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

Définition 2

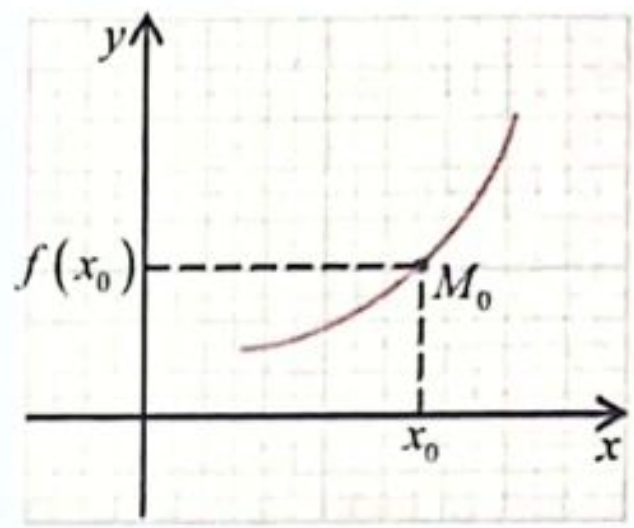
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert centré en un point x_0.

On dit que la fonction f est continue au point x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Interprétation Graphique



f est discontinue au point x_0 signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est discontinue au point $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$



f est continue au point x_0 signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est continue au point $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$

Remarques

- Si f est définie au point x_0 et n'admet pas de limite en x_0 ou sa limite est infinie en x_0, on dit que f est discontinue au point x_0.
- f est continue en x_0 si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)\ \ \left(0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ f(1) = -4 \end{cases}$$

Etudions la continuité de f au point $x_0 = 1$. On a :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x - 5) = -4$$

D'où $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Par suite f est continue au point $x_0 = 1$.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sin(x-2)}{x^2 - 2x} & \text{si} \quad x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \\ g(2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Etudions la continuité de g au point $x_0 = 2$.

On a :

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x} \times \frac{\sin(x-2)}{x-2} = \frac{1}{2} = g(2)$$

Ainsi, la fonction g est continue au point $x_0 = 2$.

Etudions la continuité de g au point $x_1 = 0$.

On a $0 \notin D_g$ donc g n'est pas continue en $x_1 = 0$.

3) Soit h la fonction numérique définie sur $[-1,2]$ par : $h(x) = E(x)$

On a alors :

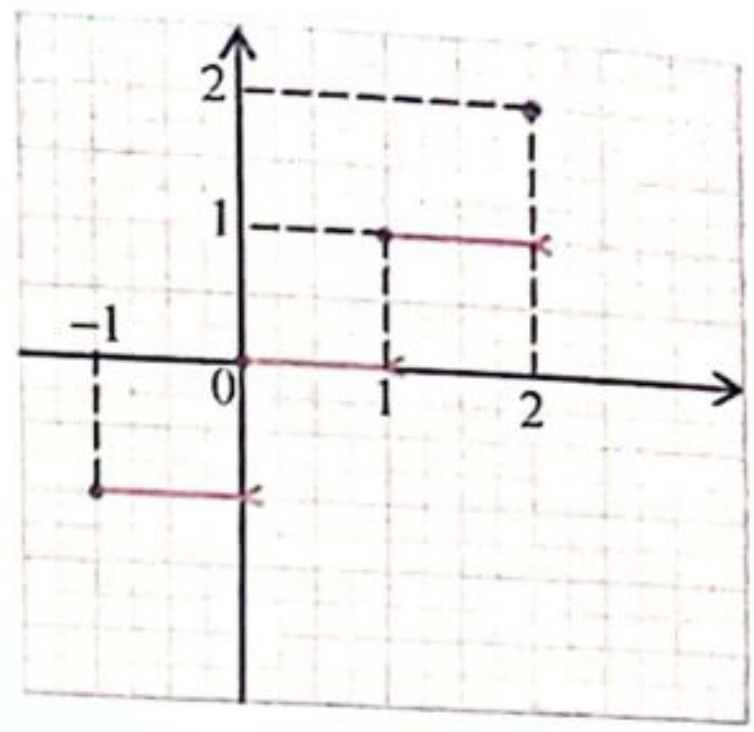
$$\forall x \in [-1,0[\ ,\ h(x) = -1$$

$$\forall x \in [0,1[\ ,\ h(x) = 0$$

$$\forall x \in [1,2[\ ,\ h(x) = 1$$

Et enfin : $h(2) = E(2) = 2$

Représentons la fonction h :



Remarquons bien que la courbe $\mathscr{C}_h$ présente des sauts aux points 0, 1 et 2. Par suite, la fonction h est discontinue aux points 0, 1 et 2.

Applications

1) Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-2x^2 - x + 1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = -1$.

2) Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x + \tan(2x)}{\sin(3x)} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

La fonction g est-elle continue au point $x_0 = 0$? Justifier la réponse.

2.2. CONTINUITÉ À DROITE - CONTINUITÉ À GAUCHE

Définition 3

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + \alpha[$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est continue à droite en x_0 si : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0]$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est continue à gauche en x_0 si : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Étudions la continuité à droite et à gauche de la fonction f au point $x_0 = 0$:

On a $f(0) = 3$ et de plus :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 - 3}{2x - 1} = 3 = f(0)$$

Donc f est continue à droite au point $x_0 = 0$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(3 - x^2\right) = 3 = f(0)$$

Donc f est continue à gauche au point $x_0 = 0$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0)$ alors f est continue au point $x_0 = 0$.

2) Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|} & \text{si } x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$$

Étudions la continuité à droite et à gauche de la fonction g au point $x_0 = 1$:

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x + 1) = 2$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = g(1)$ et la fonction g est continue à droite au point $x_0 = 1$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{x^2 - 1}{-(x - 1)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (-x - 1) = -2$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) \neq g(1)$ et la fonction g n'est pas continue à gauche au point $x_0 = 1$.

Proposition 4

Une fonction numérique f est continue au point x_0 si, et seulement si elle est continue à droite et à gauche au point x_0. En d'autres termes :

$$(f \text{ est continue au point } x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Applications

1) Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x + 3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction f en 0.

2) Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ g(x) = \dfrac{a \sin(x - 1)}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur du réel a pour que la fonction g soit continue au point $x_0 = 1$.

3) On considère la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{\left|\sqrt{2} - 2\cos x\right|}{4x - \pi} & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ h\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Montrer que la fonction h n'est pas continue au point $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

Scanné avec CamScanner

2.3. PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ EN UN POINT

Définition 4

Soit f une fonction numérique non définie en un point x_0 $\left(x_0 \notin D_f\right)$ et admettant une limite finie ℓ au point x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

La fonction $\tilde{f}$ définie sur $D_{\tilde{f}} = D_f \cup \{x_0\}$ par : $\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ \tilde{f}(x_0) = \ell \end{cases}$

est continue au point x_0, et est appelée le prolongement par continuité de f au point x_0.

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

On a $1 \notin D_f$ et de plus :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}{x - 1} = 3$$

Donc la fonction f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 1$. Ce prolongement est donné par :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} \text{ si } x \neq 1 \\ \tilde{f}(1) = 3 \end{cases}$$

On pourra remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x) = x^2 + x + 1$$

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x}$$

On a $0 \notin D_g$ et de plus :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Donc la fonction g admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$. Ce prolongement est donné par :

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) = \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \tilde{g}(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Applications

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point puis donner ce prolongement :

1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x + 6}{x + 1}$ et $x_0 = -1$

2) $f(x) = \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$ et $x_0 = a$ $\left(a \in \mathbb{R}\right)$

3) $f(x) = \dfrac{x \sin x}{\cos x - 1}$ et $x_0 = 0$

4) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{4x - x^3}$ et $x_0 = 2$

5) $f(x) = \dfrac{\left|x^2 + 4x\right| - 3}{x + 3}$ et $x_0 = -3$

6) $f(x) = (x-1)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ et $x_0 = 1$

Scanné avec CamScanner

2.4. CONTINUITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Définition 5

1) Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout point de I.
En particulier : f est continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout point de $]a,b[$.

2) Une fonction f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.

3) Une fonction f est continue sur $[a,b[$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a.

4) Une fonction f est continue sur $]a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à gauche en b.

Exemples

1) Toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Toute fonction polynomiale P est continue sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

3) Tout fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

4) Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

5) La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

6) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Application

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x - E(x)$

1. Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[1,2[$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction f est continue sur l'intervalle $[k,k+1[$.

2.5. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

Proposition 5

Soit f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et k un nombre réel. Alors :

(1) Les fonctions $f+g$, $k.f$ et $f.g$ sont continues sur I.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f^n : x \mapsto \left(f(x)\right)^n$ est continue sur I.

(3) Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

(4) La fonction $|f|$ est continue sur I.

(4) Si f est positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) La fonction f définie par $f(x)=x^2+5x+\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions continue sur $\mathbb{R}$ qui sont $x\mapsto x^2+5x$ et $x\mapsto \cos x$

2) La fonction g définie par $g(x)=\sqrt{x}\left(x^3+5x-7\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ qui sont $x\mapsto \sqrt{x}$ et $x\mapsto x^3+5x-7$

3) On considère la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{2|x+1|-5}$. Etudions la continuité de h sur D_h.

On a tout d'abord $D_h=\left]-\infty;-\frac{7}{2}\right[\cup\left]-\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$. Soit maintenant u et v les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=x^2-2x+3$ et $v(x)=2|x+1|-5$

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale.

La fonction v est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

De plus, la fonction v ne s'annule pas sur D_h. Par suite, la fonction h est continue sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur son domaine de définition :

a) $f(x)=\dfrac{4x+5}{x^2+3}.\sin x$ b) $f(x)=|2x-3|+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ c) $f(x)=x^2-\tan x-1$

2. Soit g la fonction numérique définie par $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{4-x}$. Montrer que g est continue sur l'intervalle $[2$

3. Etudier la continuité de la fonction $x\mapsto xE(x)$ sur l'intervalle $[0;2]$.

2.6. CONTINUITÉ DE LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

Proposition 6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I)\subset J$, et soit x_0 un élément de I.

Si f est continue au point x_0 et g est continue au point $f(x_0)$ alors la fonction gof est continue en x_0.

Corollaire

Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f(I)\subset J$ alors la fonction gof est continue sur l'intervalle I.

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \cos\left(2x^2 - 3x + 4\right)$

Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$:

Puisque les fonctions $f_1 : x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ et $f_2 : x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors la fonction $f = f_2 o f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+\sin^2 x}}$

Etudions la continuité de g sur $\mathbb{R}^*$:

La fonction $g_1 : x \mapsto \dfrac{x}{1+\sin^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $g_1\left(\mathbb{R}^*\right) \subset \mathbb{R}^*$, et la fonction $g_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il s'ensuit donc que la fonction $g = g_2 o g_1$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Applications

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f sur les intervalles de D_f.

1) $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2-1}\right)$ 2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$ 3) $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

4) $f(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ 5) $f(x) = \sqrt{1-\sin x}$ 6) $f(x) = \cos\left(\tan^2 x\right)$

2.5. COMPOSÉE D'UNE FONCTION CONTINUE ET D'UNE FONCTION ADMETTANT UNE LIMITE

Proposition 7

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $]x_0 - r, x_0 + r[$ $(r > 0)$ et g la fonction définie sur un intervalle ouvert J centré en ℓ tel que $f(I) \subset J$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et g est continue en ℓ alors : $\lim\limits_{x \to x_0} gof(x) = g(\ell)$

Remarque

La proposition 7 reste valable en x_0 à droite ou x_0 à gauche ou en $+\infty$ ou en $-\infty$ à condition de remplacer l'intervalle I par un intervalle convenable.

Exemples

1) Déterminons la limite : $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi\right)$

Scanné avec CamScanner

On a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi=\dfrac{\pi}{2}$. Puisque la fonction sin est continue en $\dfrac{\pi}{2}$ alors :

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

2) Déterminons la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\pi\sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}=\pi$. Puisque la fonction cos est continue en π alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\cos(\pi)=-1$$

Applications

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^3$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\tan\left(\dfrac{\pi\sin x}{3x}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

3 IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

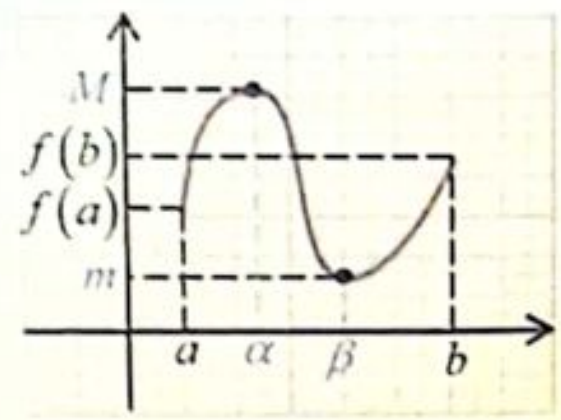
3.1. IMAGE D'UN SEGMENT PAR UNE FONCTION CONTINUE

Proposition 8

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Autrement dit :

$$(f \text{ continue sur } [a,b]) \Rightarrow f([a,b])=[m,M]$$



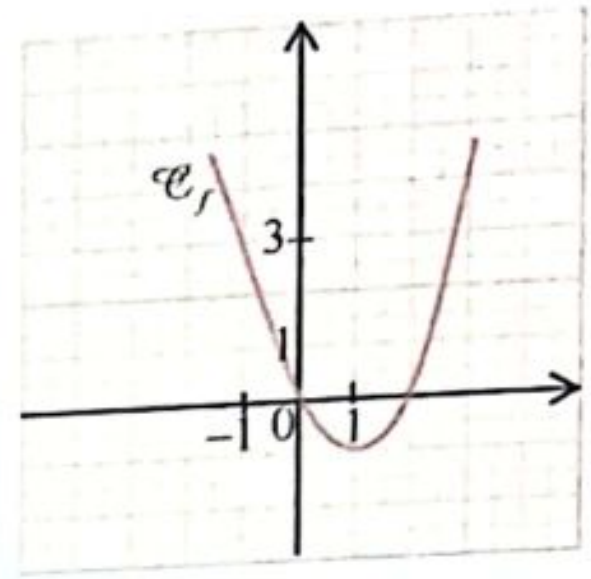
Remarque

Si f est continue sur un segment $[a,b]$ alors $M=f(\alpha)$ est le maximum de f sur $[a,b]$ et $m=f(\beta)$ est le minimum de f sur $[a,b]$. On a alors : $f([a,b])=[m,M]$ (voir la figure)

Scanné avec CamScanner

Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x$



A partir du graphe de la fonction f, on déduit que :

$f([-1;2]) = [-1;3]$; $f([0;2[) = [-1;0]$

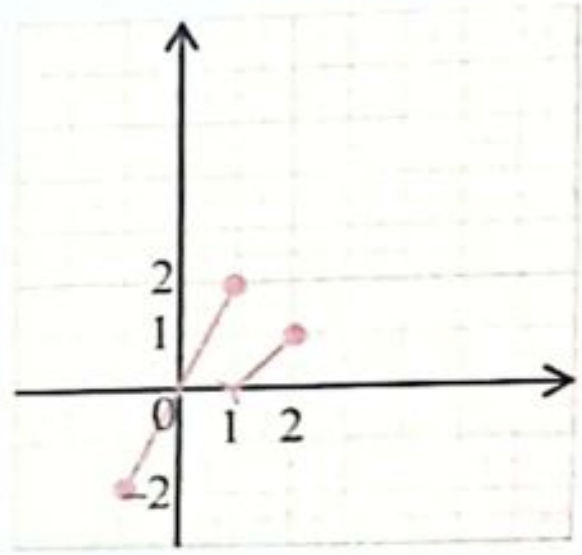
$f(]-1;0]) = [0;3[$; $f([2;+\infty[) = [0;+\infty[$

$f(]-\infty;1]) = [-1;+\infty[$; $f(\mathbb{R}) = [-1;+\infty[$

Remarques

- La continuité d'une fonction est une condition suffisante pour que l'image d'un intervalle soit un intervalle, mais cette condition n'est pas évidemment nécessaire. En effet, il se peut que l'image d'un intervalle par une fonction discontinue soit un intervalle comme le montre l'exemple suivant :

  Considérons la fonction f définie sur $[-1;2]$ par :



$$\begin{cases} f(x) = 2x \text{ si } x \in [-1;1] \\ f(x) = x - 1 \text{ si } x \in]1;2] \end{cases}$$

  L'image de l'intervalle $[-1;2]$ par la fonction f est l'intervalle $[-2;2]$ bien que la fonction f ne soit pas continue sur $[-1;2]$.

- Les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas toujours de même nature. A titre d'exemple, l'image de l'intervalle semi-ouvert $]-1;2]$ par la fonction $x \mapsto x^2$ est le segment $[0;4]$.

Applications

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I puis déterminer $f(I)$:

1) $f(x) = x^2 + 2$ et $I = [-1;3]$

2) $f(x) = \dfrac{x-4}{x-2}$ et $I = [5;8]$

3) $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$ et $I = [3;5]$

4) $f(x) = \tan x$ et $I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

5) $\begin{cases} f(x) = x + 3 \text{ si } x \le 2 \\ f(x) = x^2 + 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$ et $I = [-3;5]$

Scanné avec CamScanner

3.2. IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

On a alors les résultats suivants :

	L'image de l'intervalle I par la fonction f	
L'intervalle I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), f(a)\right]$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

Exemple

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$

On a $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ **et** $\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2+3=5>0$ **. La fonction f est donc continue et strictement croissante sur chacun des intervalles** $]-\infty;-1[$ **et** $]-1;+\infty[$ **. Il en découle donc les résultats suivants :**

$$f([0;1])=[f(0);f(1)]=\left[-3;-\frac{1}{2}\right] \quad , \quad f([-2;-1[)=\left[f(-2);\lim_{x\to -1^-} f(x)\right[=[7;+\infty[$$

$$f(]-1;1])=\left]\lim_{x\to -1^+} f(x);f(1)\right]=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \quad , \quad f([2;+\infty[)=\left[f(2);\lim_{x\to +\infty} f(x)\right[=\left[\frac{1}{3};2\right[$$

Application

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-2x+3$

Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction f :

$$I=]-\infty;0] \quad ; \quad J=[1;2] \quad ; \quad K=]-5;-1[\quad ; \quad L=\left[\sqrt{2};+\infty\right[$$

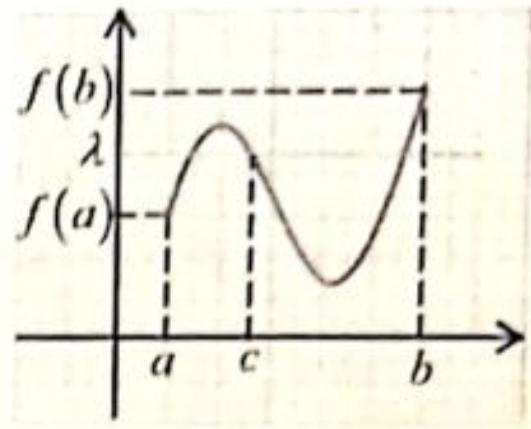
Scanné avec CamScanner

3.3. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Proposition 10

Si f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ alors, pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$.

En d'autres termes : l'équation $f(x)=\lambda$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a,b]$, pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.



Preuve

Comme f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ alors il existe deux réels m et M tels que $f([a,b])=[m,M]$.

Puisque les réels $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $[m,M]$ (en supposant par exemple que $f(a)\le f(b)$) alors $[f(a),f(b)]\subset[m,M]$, c'est-à-dire que $[f(a),f(b)]\subset f([a,b])$. Il s'ensuit donc que pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par : $f(x)=x+\cos x$

La fonction f est continue sur $[0;\pi]$ et de plus $f(0)=1$ et $f(\pi)=\pi-1$.

Puisque 2 est compris entre $f(0)$ et $f(\pi)$ alors il existe au moins un réel $c\in[0;\pi]$ tel que $f(c)=2$.

Cela signifie que l'équation $x+\cos x=2$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0;\pi]$.

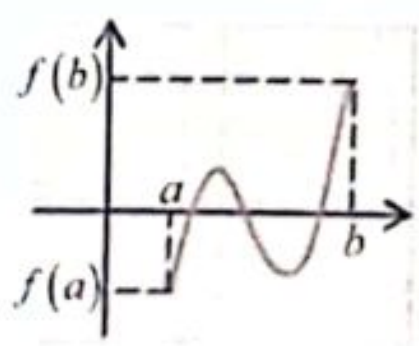
Corollaire

Si la fonction f est continue sur $[a,b]$ tel que $f(a).f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$. Si de plus, la fonction f est strictement monotone, cette solution est unique.

Remarque

On peut interpréter le résultat du corollaire précédent comme suit :

Si la fonction f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors le graphe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses, au moins une fois, en un point dont l'abscisse appartient à $[a,b]$.



Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Montrons que l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$ admet une solution dans chacun des intervalles $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$, $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$:

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 8x^3 - 6x - 1$

La fonction g est évidemment continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale.

- On a $g(-1) = -3$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, donc $g(-1).g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$.
- On a $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ et $g(0) = -1$, donc $g(0).g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};0\right[$.
- On a $g(1) = 1$ et $g(0) = -1$, donc $g(0).g(1) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]0;1[$.

D'où l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$ admet une solution dans chacun des intervalles $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$, $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ et

Comme de plus g est un polynôme de degré 3, ce sont les seules solutions sur $\mathbb{R}$.

2) Montrons que l'équation $x + \sin x - 1 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

On considère la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = x + \sin x - 1$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ en tant que somme des fonctions conti

et strictement croissantes sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. De plus $f(0) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, donc $f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. D'apr

le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Applications

1) Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution dans l'intervalle I :

a) $x^4 + x^2 + 4x - 1 = 0$ et $I = [0;1]$; b) $2\cos x - x = 0$ et $I = [0;\pi]$

c) $1 + \sin x = 4x$ et et $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; d) $\tan x + x^2 = 2$ et $I = \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right[$

2) Montrer que l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-2;0]$.

3) Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$

Montrer par l'absurde que la fonction f garde un signe constant sur l'intervalle I.

Scanné avec CamScanner

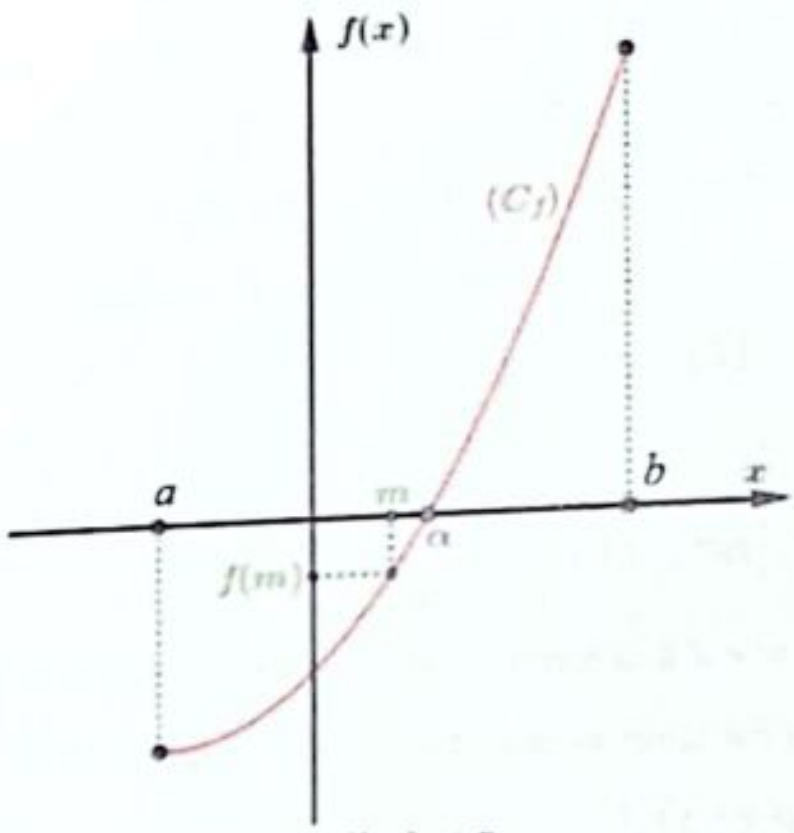
3.4. PRINCIPE DE LA MÉTHODE DE DICHOTOMIE

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ telle que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $[a,b]$.

pour déterminer un encadrement du nombre α, on démarre donc en ayant localisé la racine α entre a et b $(a<\alpha<b)$; et on sait par exemple que sur cet intervalle, la fonction f (continue) est strictement croissante.

On calcule alors le centre m du segment $[a,b]$ (à savoir $m=\dfrac{a+b}{2}$) puis son image par f : $f(m)$, et on la compare à 0.

Deux cas peuvent alors se produire :

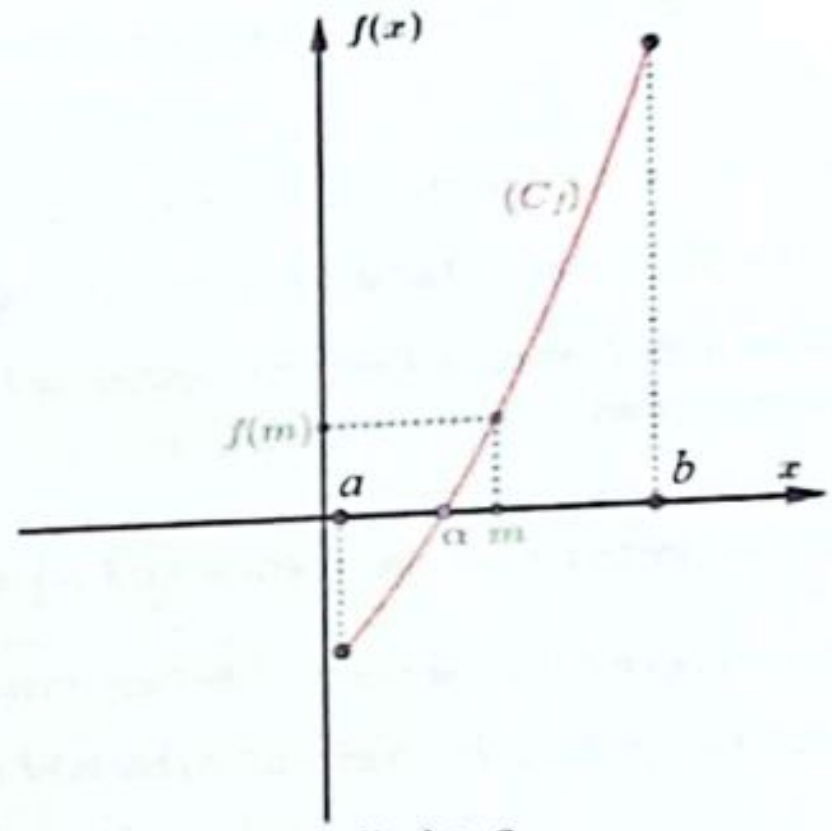


Cas où $f(m)<0$

On a alors $m<\alpha<b$. On reprend la bissection de l'intervalle en posant :

$a=m$ *et* $b=b$

puis on continue comme précédemment...



Cas où $f(m)>0$

On a alors $a<\alpha<m$. On reprend la bissection de l'intervalle en posant :

$a=a$ *et* $b=m$

puis on continue comme précédemment...

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3+x^2+x-2$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ et on a $f(0).f(1)<0$. Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que $0<\alpha<1$. Déterminons un encadrement de α de longueur $0,25$.

Le centre du $[0,1]$ est $\dfrac{1}{2}$ et on a $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{8}$. Donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\times f(1)<0$ et $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$. (Longueur : $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$)

Le centre du $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ est $\dfrac{3}{4}$ et on a $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{17}{64}$. Donc $f(1)\times f\left(\dfrac{3}{4}\right)<0$ et $\dfrac{3}{4}<\alpha<1$. (Longueur : $1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$)

Ainsi : $\dfrac{3}{4}<\alpha<1$

Scanné avec CamScanner

4 FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE

4.1. THÉORÈME DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

Proposition 11

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

Preuve

Puisque I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$. Donc :

$$\forall y \in f(I)\ ,\ \exists x \in I :\ y = f(x)$$

Soit a et b deux éléments distincts de I. Puisque f est strictement monotone sur I alors $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$, donc $f(a) \neq f(b)$. Par suite, pour tout $y \in f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans I, et donc f est une bijection de I sur $f(I)$.

Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur $I =]-\infty;-1]$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x-2}$

Montrons que f est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer et calculons $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

La fonction f étant continue et dérivable sur I car c'est la restriction d'une fonction rationnelle et on a pou

tout $x \in I$: $f'(x) = \dfrac{2x(x-2)-(x^2+5)}{(x-2)^2} = \dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$. Il s'ensuit donc que : $\forall x \in]-\infty;-1[$, $f'(x) >$

Puisque la fonction f est continue et strictement croissante sur I alors elle est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ avec : $J = f(I) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); f(-1)\right] =]-\infty;-2]$

Détermination de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$: Soit $x \in J$ et $y \in I$ tels que $y = f^{-1}(x)$. On a donc :

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow \frac{y^2+5}{y-2} = x \Leftrightarrow y^2 - xy + 2x + 5 = 0$$

Cette équation admet deux solutions réelles qui sont : $y_1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2-8x-20}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{x+\sqrt{x^2-8x-20}}{2}$

On a : $y_1 + 1 = \dfrac{x+2-\sqrt{x^2-8x-20}}{2} \leq 0$ (car $x \in J$ c'est-à-dire : $x+2 \leq 0$ et $-\sqrt{x^2-8x-20} \leq 0$)

En définitive : $(\forall x \in J)\ ,\ f^{-1}(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2-8x-20}}{2}$

Scanné avec CamScanner

Applications

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis déterminer une expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ et $I = [1; +\infty[$; 2) $f(x) = 4x - x^2$ et $I =]-\infty; 2[$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$ et $I =]-\infty; 0]$; 4) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ et $I = \left[0; \sqrt{2}\right]$

4.2. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

Proposition 12

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- **La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variation que la fonction f .**
- **Les courbes représentatives de f et de f^{-1} , dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation $y = x$)**

Preuve

Soit y_1 et y_2 deux éléments distincts de $f(I)$. Il existe deux réels distincts x_1 et x_2 de I tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ (car f est une bijection de I sur $f(I)$). Donc : $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$, et alors :

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

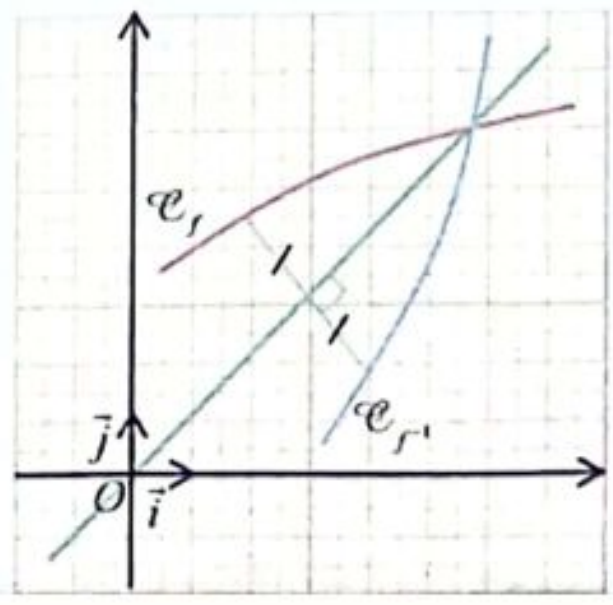
Cela signifie donc que les taux de variation des deux fonctions f et f^{-1} ont le même signe et par suite f et f^{-1} ont le même sens de variation.

Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ les graphes de f et f^{-1} respectivement dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(y, x)$ son symétrique par rapport à la première bissectrice. On a alors :

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow M'(y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$$

Il s'ensuit donc que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



Scanné avec CamScanner

5 FONCTIONS RÉCIPROQUES USUELLES

5.1. FONCTION ARCTANGENTE

Définition 6

La fonction $x \mapsto \tan x$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée fonction Arctangente et on la note Arctan .

Proposition 13

- La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On a de plus :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad (\operatorname{Arc}\tan x = y \Leftrightarrow x = \tan y)$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\tan(\operatorname{Arc}\tan x) = x$
- Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$
- La fonction Arc tan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

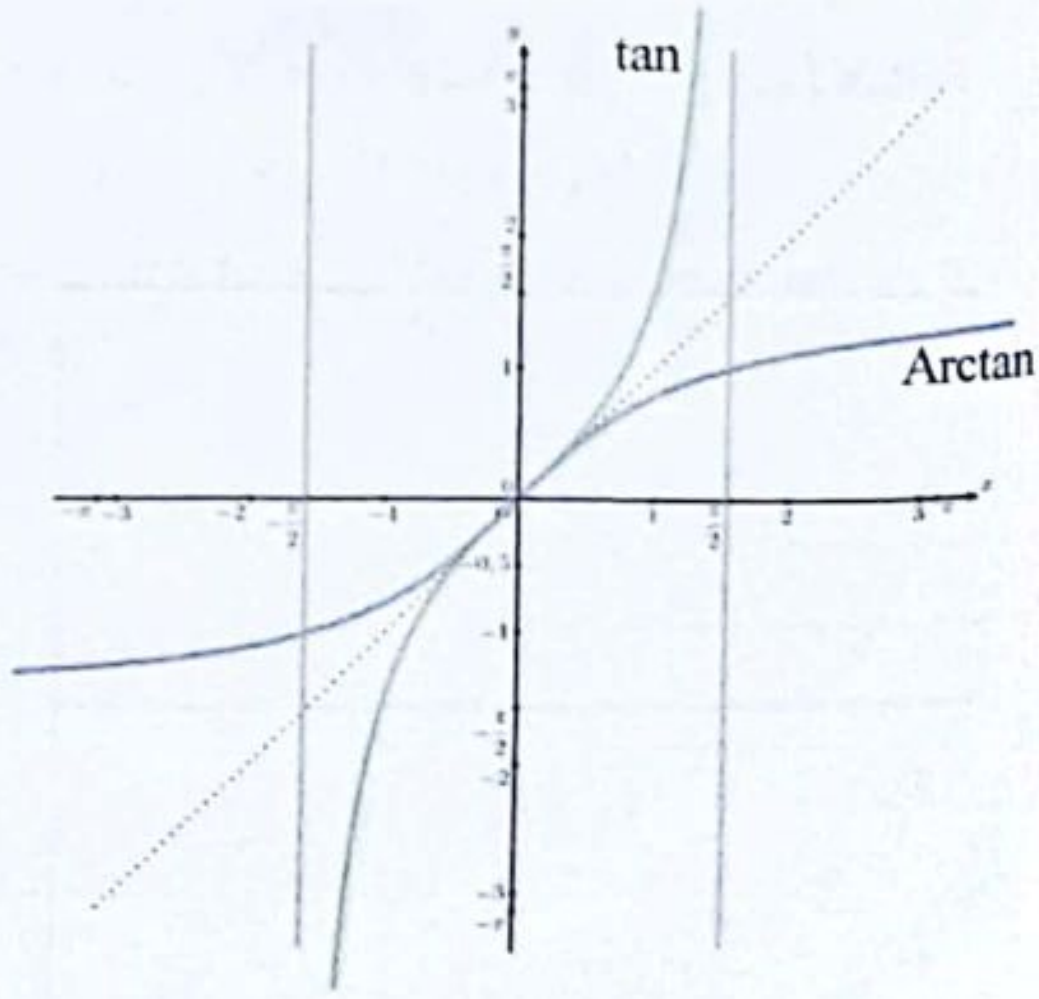
$$(\operatorname{Arc}\tan x_1 = \operatorname{Arc}\tan x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2) \quad \text{et} \quad (\operatorname{Arc}\tan x_1 < \operatorname{Arc}\tan x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2)$$

- La fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$ est impaire : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \operatorname{Arctan}(-x) = -\operatorname{Arc}\tan x$
- On a les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arc}\tan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{Arc}\tan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{Arc}\tan x}{x} = 1$

Tableau de quelques valeurs importantes

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Arctan x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

La courbe représentative de la fonction Arctan



Scanné avec CamScanner

Exemples

1. Calculons $\text{Arctan}\left(\tan\frac{101\pi}{4}\right)$: On sait que si $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\text{Arctan}(\tan x) = x$.

Puisque $\frac{101\pi}{4} = 25\pi + \frac{\pi}{4}$ et la fonction tan est périodique de période π et $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ alors :

$$\text{Arctan}\left(\tan\frac{101\pi}{4}\right) = \text{Arctan}\left(\tan\left(25\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \text{Arctan}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) : $\text{Arc}\tan x = \text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{3}$

On pose : $\text{Arctan}\frac{1}{2} = \alpha$ et $\text{Arctan}\frac{1}{3} = \beta$ donc : $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ et $\tan\beta = \frac{1}{3}$

L'équation (E) est donc équivalente à $\text{Arc}\tan x = \alpha + \beta$. Puisque $0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $0 < \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ alors

$0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$ et donc $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{3}$. Par conséquent :

$$(E) \Leftrightarrow x = \tan(\alpha+\beta) \Leftrightarrow x = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1$$

Par suite, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{1\}$

3. Calculons les limites de la fonction $f : x \mapsto (x+1)\text{Arctan}\frac{1}{x}$ aux bornes de son domaine de définition.

On a $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. On a donc :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)\text{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ car : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\text{Arc}\tan X = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)\text{Arctan}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ car : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\text{Arc}\tan X = -\frac{\pi}{2}$
- En posant $X = \text{Arctan}\frac{1}{x}$ on obtient : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to 0}\frac{X}{\tan X} + X = 1$

Applications

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \tan(2\text{Arc}\tan x)$ puis donner une expression simplifiée de $f(x)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit : $\text{Arc}\tan x + \text{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{3}$; $\text{Arc}\tan(2x) + \text{Arctan}(x-1) \le 0$

3. Simplifier les écritures des nombres suivants : $\text{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{35\pi}{6}\right)\right)$ et $\text{Arc}\tan\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{36\pi}{7}\right)}\right)$

Scanné avec CamScanner

4. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{Arctan}(x-2)}{x^2-4}$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{Arc}\tan x\right)$

5. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \tan x - \sqrt{\tan^2 x - \tan x}$ réalise une bijection de $I = \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à déterminer puis calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

5.2. FONCTION RACINE n$^{\text{ième}}$

Définition 7

Soit n un entier naturel non nul.

La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa fonction réciproque est appelée la fonction racine $n^{\text{ième}}$ et on la note $\sqrt[n]{\ }$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[n]{x}$ se lit « racine $n^{\text{ième}}$ de x ».

Proposition 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a alors pour tous x et y de $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x \quad ; \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y \quad ; \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$$

- On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de plus : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x} = +\infty$

Remarque

Soit a un réel non nul et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $x^n = a$ dépend de signe du nombre a et de la parité de l'entier n.

Le tableau ci-contre résume les cas possibles.

Signe de a \ Parité de n	n pair	n impair
$a > 0$	$S = \left\{-\sqrt[n]{a};\sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$
$a < 0$	$S = \varnothing$	$S = \left\{-\sqrt[n]{-a}\right\}$

Proposition 15

Soit a et b deux réels, et p et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

On a alors les propriétés suivantes :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad ; \quad \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \ (\text{avec } a \neq 0) \quad ; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (\text{avec } b \neq 0)$$

$$\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a} \quad ; \quad \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a} \quad ; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$$

Scanné avec CamScanner

Exemple

Simplifions le nombre : $A = \dfrac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt{\sqrt[4]{144}}}$

On a : $A = \dfrac{\sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[4]{2^2 \times 3^3}}{\sqrt[8]{2^4 \times 3^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^4 \times 2} \times \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[4]{2^2} \times \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[8]{2^4} \times \sqrt[8]{3^2}} = \dfrac{2\sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt{2} \times \sqrt[4]{3}} = 6\sqrt[4]{2}$

Applications

1. Simplifier les nombres suivants : $A = \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{256}} \times \sqrt[4]{64}}{\sqrt[5]{24300000} \times \sqrt[3]{1024}}$ et $B = \dfrac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}}}{\sqrt[5]{729}\sqrt{\sqrt{3}}}$

2. Comparer les nombres $\sqrt[4]{5}$ et $\sqrt[3]{4}$.

3. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}_+^*)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{Z}) : \sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

4. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) : \sqrt[n]{a} \times \sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{4x}$

Proposition 16

Soit u une fonction positive sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

- Si u est continue sur I alors la fonction $\sqrt[n]{u}$ est continue sur I.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{\ell}$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

Exemples

1. Etudions la continuité de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{\operatorname{Arc\,tan} x}$ sur $\mathbb{R}^*$:

La fonction Arctan est continue et positive sur $\mathbb{R}^*$. Il s'ensuit donc que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

2. Calculons la limite : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

En utilisant l'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$ on obtient :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3}$$

Applications

1. Étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[4]{\dfrac{x}{x-1}}$ sur chaque intervalle de son domaine de définition.

2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[4]{x+1} - 1}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x} - x\right)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}\right)$

Scanné avec CamScanner

1

5.3. PUISSANCE RATIONNELLE D'UN NOMBRE STRICTEMENT POSITIF

Définition 8

Soit a un réel strictement positif et r un nombre rationnel. On pose $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre a^r est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$. Ce nombre est appelé la puissance rationnelle de nombre a d'exposant r.

Remarque

Soit a un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

On a : $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$. De façon générale, on a l'égalité : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Proposition 17

Soit r et r' deux nombres rationnels, et a et b deux réels strictement positifs.

Alors on a les égalités suivantes :

$$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'} \quad ; \quad (ab)^r = a^r b^r \quad ; \quad \left(a^r\right)^{r'} = a^{rr'} \quad ; \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \quad ; \quad \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$$

Exemple

Simplifions le nombre $A = \dfrac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}}$:

On a : $A = \dfrac{\left(2^5\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(3^3\right)^{\frac{1}{6}} \times \left(2^2 \times 3^3\right)^{\frac{1}{4}}}{(2\times 3)^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{2^{\frac{5}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 3 = 6\sqrt{2}$

Applications

1) Simplifier les nombres suivants :

$$X = \frac{(125)^{\frac{2}{9}} \times (625)^{\frac{1}{4}} \times (25)^{\frac{5}{2}}}{5^{\frac{17}{3}}} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\left(7^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \times (21)^{\frac{3}{4}}}{\left(7^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \times (243)^{\frac{2}{3}} \times \left(63^{-2}\right)^{-\frac{1}{6}}}$$

2) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-1;0]$.

Montrer qu'il existe $c \in]-1;0[$ tel que : $f(c) = \dfrac{c}{4\operatorname{Arc}\tan c + \pi} + (-c)^{-\frac{1}{3}}$

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0;1[$: $x^{\frac{6}{7}} > x$

b) En déduire que pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $\sqrt[7]{x^6} + \sqrt[7]{y^6} > \sqrt[7]{(x+y)^6}$

Scanné avec CamScanner

A ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue en 0.

2) Étudier la continuité de la fonction f sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$.

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

SOLUTION

1) Montrons que la fonction f est continue en 0 :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| = |x|.\left|\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|$. Puisque $\left|\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*, |f(x)| \leq |x|$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc : f est continue en 0.

- Pour montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, il suffit de montrer qu'au voisinage de a :

$$|f(x) - \ell| \leq g(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

On pourra aussi montrer que : $h(x) \leq f(x) - \ell \leq g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$

- On étudiera la continuité d'une fonction f en x_0 lorsque f sera définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. Pour démontrer que f est continue en x_0 il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) Étudions la continuité de la fonction f sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$:

La fonction $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$, et les fonctions $f_2 : x \mapsto \cos x$ et $f_3 : x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc les fonctions $f_2 o f_1 : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $f_3 : x \mapsto x$ sont continues sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$. Par conséquent, la fonction $f = f_3 \times (f_2 o f_1)$ est continue sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$.

- Pour étudier la continuité d'une fonction f sur un intervalle I avec une définition « particulière » en certains points de I : $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, il faut étudier deux aspects :

Aspect global : Sur des intervalles ne contenant pas les nombres x_i, pour cela on utilise les résultats généraux sur les fonctions continues (propositions 5, 12 , 6 et son corollaire)

Scanné avec CamScanner

et la continuité des fonctions usuelles.

Aspect local: en chacun des points x_i : pour cela on étudie $\lim\limits_{x\to x_i} f(x)$.

2)- Déterminons la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et la fonction cos est continue en 0. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)=\cos(0)=1$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$

B OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$

1) Étudier la continuité de f au point $x_0=2$.

2) Étudier la continuité de f au point $x_1=\sqrt{2}$.

3) Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

SOLUTION

1) Étudions la continuité de f au point $x_0=2$:

Pour cela, il suffit de donner l'expression de $f(x)$ sur chacun des intervalles $[1;2[$ et $[2;3[$ (car la continuité en un point est une notion locale). On a $f(2)=2$ et :

- $\forall x\in[1;2[,\ f(x)=1+(x-1)^2$. Donc : $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(1+(x-1)^2\right)=2=f(2)$

  La fonction f est donc continue à gauche en $x_0=2$.

- $\forall x\in[2;3[,\ f(x)=2+(x-2)^2$. Donc : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(2+(x-2)^2\right)=2=f(2)$

  La fonction f est donc continue à droite en $x_0=2$.

  En résumé, la fonction f est continue au point $x_0=2$.

- Pour étudier la continuité d'une fonction f en un point x_0, il est parfois intéressant d'étudier la continuité à gauche et la continuité à droite puis appliquer le résultat :

$$(f \text{ est continue en } x_0)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

2) Étudions la continuité de f au point $x_1=\sqrt{2}$:

Puisque les fonctions $g:x\mapsto E(x)$ et $h:x\mapsto x$ sont continues en $x_1=\sqrt{2}$, alors la fonction $f=g+(h-g)^2$ est continue au point $x_1=\sqrt{2}$.

3) Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$:

- Puisque les fonctions $g:x\mapsto E(x)$ et $h:x\mapsto x$ sont continues sur chaque intervalle inclus dans

Scanné avec CamScanner

$\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, alors la fonction $f=g+(h-g)^2$ est continue sur chaque intervalle inclus dans $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

- Étudions maintenant la continuité de la fonction f en chaque point de l'ensemble $\mathbb{Z}$:

Soit $k\in\mathbb{Z}$. On a $f(k)=k$ et pour tout $x\in[k-1,k[$: $f(x)=k-1+(x-k+1)^2$ (car $E(x)=k-1$).

Il s'ensuit donc que $\lim\limits_{x\to k^-} f(x)=k=f(k)$. Ainsi, la fonction f est continue à gauche au point k.

De même, pour tout $x\in[k,k+1[$: $f(x)=k+(x-k)^2$ (car $E(x)=k$). Il s'ensuit donc que

$\lim\limits_{x\to k^+} f(x)=k=f(k)$. Ainsi, la fonction f est continue à droite au point k.

En définitive, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

C PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\sin\left(xE\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 que l'on déterminera.

SOLUTION

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\frac{\pi}{x}-1\le E\left(\frac{\pi}{x}\right)\le\frac{\pi}{x}$. Il en résulte alors que :

- Si $x>0$, $\pi-x\le xE\left(\frac{\pi}{x}\right)\le\pi$, et d'après le théorème de la limite par encadrement : $\lim\limits_{x\to0^+} xE\left(\frac{\pi}{x}\right)=\pi$.
- Si $x<0$, $\pi\le xE\left(\frac{\pi}{x}\right)\le\pi-x$, et d'après le théorème de la limite par encadrement : $\lim\limits_{x\to0^-} xE\left(\frac{\pi}{x}\right)=\pi$.

Comme $\lim\limits_{x\to0^-} xE\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+} xE\left(\frac{\pi}{x}\right)=\pi$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to0} xE\left(\frac{\pi}{x}\right)=\pi$; puis, par continuité de la fonction sinus on déduit que : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\sin\left(xE\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)=\sin\pi=0$.

Par suite, la fonction f admet un prolongement par continuité en 0 donné par :

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\sin\left(xE\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) & \text{si } x\neq0\\ \tilde{f}(0)=0\end{cases}$$

- Comme pour montrer la continuité en un point, on a ici calculé une limite pour conclure. Cependant, la fonction n'est pas définie en ce point. Il faut donc la prolonger en lui attribuant une valeur. Pour obtenir une fonction continue, on choisit de lui attribuer la valeur égale à la limite finie de $f(x)$ quand x tend vers ce point. On parle alors de prolongement par continuité.

- On étudie un prolongement par continuité d'une fonction f en x_0 lorsque f n'est pas définie en x_0 : f peut être prolongée par continuité en x_0 lorsque f admet donc une limite finie quand $x\to x_0$.

Scanné avec CamScanner

D THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

1) Soit f une fonction définie et continue de $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$ et a un réel tel que $a \geq 1$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = ac$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) Soit F une fonction définie et continue sur $[a,b]$ $(a < b)$, p et q deux réels positifs.

Montrer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $pF(a) + qF(b) = (p+q)F(c)$.

3) Soit f une fonction définie et continue de $[0;1]$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in [0;1]$ tel que : $f\left(c + \frac{1}{2}\right) - f(c) = 2$

4) Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a > 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b < 0$.

Montrer qu'il existe un réel c tel que : $f(c) = 0$.

SOLUTION

1) Le problème posé est équivalent au problème suivant :

« L'équation d'inconnue x : $f(x) - ax = 0$ admet au moins une solution sur $[0;1]$ »

Considérons alors la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g(x) = f(x) - ax$; g est une fonction continue sur $[0;1]$ comme somme de fonctions continues.

On a $g(0) = f(0)$ et f est à valeurs dans $[0;1]$ donc $g(0) = f(0) \geq 0$.

On a $g(1) = f(1) - a$ et f est à valeurs dans $[0;1]$. Comme $a \geq 1$ alors $g(1) \leq 0$. Ainsi, on a :

g est continue sur $[0;1]$ et $g(0).g(1) \leq 0$; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = 0$; donc : il existe un réel $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = ac$.

<u>Interprétation graphique :</u> Si une fonction f est définie et continue de $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$ et si $a \geq 1$, alors la droite d'équation $y = ax$ coupe la courbe représentative de f en au moins un point.

- Pour montrer qu'il existe au moins un réel $c \in I$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) tel que $F(c) = G(c)$ où F et G sont deux fonctions continues sur I, on peut :

- considérer la fonction $H : x \mapsto F(x) - G(x)$: fonction continue sur I.
- trouver deux réels distincts α et β tels que : $H(\alpha).H(\beta) \leq 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut en déduire qu'il existe $c \in I$ tel que $H(c) = 0$.

On peut alors conclure car : $H(c) = 0 \Leftrightarrow F(c) = G(c)$

Scanné avec CamScanner

G est continue sur $[a,b]$ comme combinaison linéaire de fonctions continues, de plus :

$$G(a) = q\big(F(b) - F(a)\big) \quad \text{et} \quad G(b) = p\big(F(b) - F(a)\big)$$

Comme p et q sont des réels positifs, on en déduit que : $G(a).G(b) = -pq\big(F(b) - F(a)\big)^2 \le 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins $c \in [a,b]$ tel que $G(c) = 0$, c'est-à-dire que : $pF(a) + qF(b) = (p+q)F(c)$, d'où le résultat.

3) Le problème posé est équivalent au problème suivant :

« L'équation d'inconnue x : $f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) - 2 = 0$ admet au moins une solution sur $[0;1]$ »

Considérons alors la fonction g définie sur par : $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) - 2$.

($g(x)$ existe) si et seulement si : $\begin{cases} 0 \le x + \frac{1}{2} \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{1}{2}$, donc g est définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

g est continue sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ comme composée et somme de fonctions continues. De plus :

$g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - 0 - 2 = f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 2 - f\left(\frac{1}{2}\right)$, donc $g(0).g\left(\frac{1}{2}\right) \le 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins $c \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ tel que $g(c) = 0$.

Or $g(c) = 0 \Leftrightarrow f\left(c + \frac{1}{2}\right) - f(c) = 2$.

Par suite : $(\exists c \in [0,1]);\ f\left(c + \frac{1}{2}\right) - f(c) = 2$

4) Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, on en déduit par définition que :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists A > 0)\,;\,(\forall x \in]A;+\infty[\,)\ |f(x) - a| \le \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$ alors : $(\exists A > 0)\,;\,(\forall x \in]A;+\infty[)\ |f(x) - a| \le \frac{a}{2}$.

Donc pour $x > A$, on a : $0 < \frac{a}{2} \le f(x) \le \frac{3a}{2}$. Donc en particulier $f(A+1) > 0$.

De même, pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$; on en déduit par définition que :

$$(\exists B > 0)\,;\ (\forall x \in]-\infty;-B[\,)\ |f(x) - b| \le -\frac{b}{2}$$

Donc pour $x < -B$, on a : $\frac{3b}{2} \le f(x) \le \frac{b}{2} < 0$. Donc en particulier $f(-B-1) < 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc est continue sur $[-B-1, A+1]$, de plus $f(A+1) > 0$ et $f(-B-1) < 0$.

Donc : il existe $c \in [-B-1, A+1]$ tel que $f(c) = 0$.

Scanné avec CamScanner

E THÉORÈME DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{Arc}\tan(3x) + 2x - 1$

a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Soit f^{-1} sa fonction réciproque.

b) Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ puis que $0 < \alpha < \frac{1}{3}$.

c) Vérifier que $\alpha = 1 - \text{Arc}\tan(3\alpha)$ et que : $1 - \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$

d) Montrer que pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $f^{-1}(x) < x$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2) Soit t un réel positif.

a) Montrer que : $\exists! a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ $\tan(a) = \sqrt{t}$ et en déduire que $\sqrt{t} + \sqrt{t+1} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$.

b) Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$, $\text{Arc}\tan\left(\sqrt{t} + \sqrt{t+1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{Arc}\tan\left(\sqrt{t}\right)$

c) En déduire que : $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$

SOLUTION

1) a) Les fonctions $x \mapsto \text{Arc}\tan(3x)$ et $x \mapsto 2x - 1$ sont continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ .D'après le théorème de la fonction réciproque, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$ car :

$\lim_{x\to-\infty} \text{Arc}\tan(3x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \text{Arc}\tan(3x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} 2x - 1 = -\infty$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation $f^{-1}(x) = x$ est équivalente à $f(x) = x$. On pose alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - x = \text{Arc}\tan(3x) + x - 1$$

Tout comme la fonction f , g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la fonction réciproque, la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Enfin, puisque $g(0) = -1 < 0$ et $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} > 0$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $0 < \alpha < \frac{1}{3}$.

c) Puisque $f(\alpha) = \alpha$ alors $\text{Arc}\tan(3\alpha) + 2\alpha - 1 = \alpha$ et donc : $\alpha = 1 - \text{Arc}\tan(3\alpha)$

d) Montrons que pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $f^{-1}(x) < x$:

On a d'après 1) b), la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit donc que pour tout $x > \alpha$, $g(x) > g(\alpha)$ et donc $f(x) - x > 0$. Par suite, pour tout $x > \alpha$: $f(x) > x$. Et puisque la fonction f^{-1} es

Scanné avec CamScanner

strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$ et $f(]\alpha;+\infty[)=]\alpha;+\infty[$ alors $f^{-1}(f(x))>f^{-1}(x)$ pour tout $x>\alpha$.

D'où, pour tout $x>\alpha$, $x>f^{-1}(x)$. Cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est en-dessous de la droite $(\Delta):y=x$.

- Pour montrer qu'une équation $f(x)=m$ admet une unique solution dans I, on peut montrer que f réalise une bijection de I sur J avec $m\in J$. La solution de cette équation est alors $f^{-1}(m)$.

- En général, on ne sait pas expliciter la bijection réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle, mais on connaît des propriétés sur cette fonction :
  monotonie, continuité, limites, graphe,.....
- Pour déterminer si une équation de la forme $f(x)=g(x)$ admet une solution, on peut toujours se ramener à une équation de la forme $h(x)=0$.

2) Soit t un réel positif.

a) La fonction $x\mapsto\tan x$ est une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}^+$. Or $\sqrt{t}\in\mathbb{R}^+$ donc : $\exists!a\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ $\tan(a)=\sqrt{t}$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}^+$ et pour tout $a\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\sqrt{t}=\tan a\Leftrightarrow t=\tan^2 a\Leftrightarrow\sqrt{1+t}=\frac{1}{\cos a}$

Par suite : $\sqrt{t}+\sqrt{t+1}=\tan a+\frac{1}{\cos a}=\frac{1+\sin a}{\cos a}=\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$

b) On a $a\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ et par suite :

$$\sqrt{t}+\sqrt{t+1}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\Leftrightarrow \operatorname{Arc}\tan\left(\sqrt{t}+\sqrt{t+1}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}$$

D'autre part on a $a=\operatorname{Arc}\tan\sqrt{t}$, donc : $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\operatorname{Arc}\tan\left(\sqrt{t}+\sqrt{t+1}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arc}\tan\sqrt{t}$.

c) En remplaçant t par 3 dans le résultat de la question précédente on trouve :

$\operatorname{Arc}\tan\left(\sqrt{3}+2\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arc}\tan\sqrt{3}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}$. Par suite : $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}$

F UTILISATION DE FONCTION IRRATIONNELLE

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[6]{9-x^2}$; $2x\sqrt{x}-3x.\sqrt[4]{\frac{1}{x}}=20$; $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1$; $\operatorname{Arc}\tan x+\operatorname{Arc}\tan(2x)=\frac{\pi}{4}$

2) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right)$

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) Résolution des équations :

• Pour l'équation : $\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[6]{9-x^2}$

Le domaine de définition de cette équation est $D_1=[-3;3]$.

En utilisant l'identité remarquable $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$, on a alors pour tout $x\in D_1$:

$$\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[6]{9-x^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}\right)^3=\sqrt{9-x^2}$$

$$\Leftrightarrow(3+x)-(3-x)-3\sqrt[3]{9-x^2}.\sqrt[6]{9-x^2}=\sqrt{9-x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x-3\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-x^2}\qquad(\text{car : }\sqrt[3]{a}.\sqrt[6]{a}=\sqrt{a})$$

$$\Leftrightarrow x=2\sqrt{9-x^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2=4\left(9-x^2\right)\ \ et\ \ x\in[0;3]\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Par suite, l'ensemble des solutions de cette équation est : $S_1=\left\{\frac{6\sqrt{5}}{5}\right\}$

• Pour l'équation : $2x\sqrt{x}-3x.\sqrt[4]{\frac{1}{x}}=20$

Le domaine de définition de cette équation est $D_2=\mathbb{R}_+^*$. On pose $t=\sqrt[4]{x}$. On a alors :

$$2x\sqrt{x}-3x.\sqrt[4]{\frac{1}{x}}=20\Leftrightarrow 2t^6-3t^3-20=0\Leftrightarrow 2T^2-3T-20=0\quad(\text{où } T=t^3)$$

La seule solution positive de l'équation $2T^2-3T-20=0$ est $T=4$. Donc $t^3=4$ ce qui donne $t=\sqrt[3]{4}$.

Et comme $x=t^4$ alors $x=4.\sqrt[3]{4}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est : $S_2=\left\{4.\sqrt[3]{4}\right\}$

• Pour l'équation : $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1$

Le domaine de définition de cette équation est $D_3=\mathbb{R}^*$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x+1}-1=\sqrt[3]{x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-1\right)^3=x\Leftrightarrow(x+1)\sqrt{x+1}-3(x+1)+3\sqrt{x+1}-1=x$$

ce qui donne : $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x+1}\left(x+4-4\sqrt{x+1}\right)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}=0\ ou\ x+4=4\sqrt{x+1}\right)$

Par conséquent : $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1\Leftrightarrow(x+4)^2=16(x+4)\Leftrightarrow x^2-8x=0\Leftrightarrow(x=0\ ou\ x=8)$

Par suite, l'ensemble des solutions de cette équation est : $S_3=\{0;8\}$

• Pour l'équation : $\operatorname{Arc}\tan x+\operatorname{Arc}\tan(2x)=\frac{\pi}{4}$

Le domaine de définition de cette équation est $D_4=\mathbb{R}$.

On sait que le signe de $\operatorname{Arc}\tan x$ est celui de x, et puisque $\frac{\pi}{4}>0$ alors nécessairement $x>0$.

Scanné avec CamScanner

Comme $x > 0$ alors $0 < \text{Arc tan}\, x < \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \text{Arc tan}\, x < \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\text{Arc tan}\, x + \text{Arc tan}(2x) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \text{Arc tan}\, x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{1-x}{1+x}$$

ceci est dû aux formules : $\tan(\text{Arc tan}\, x) = x$ et $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$.

Ainsi : $\text{Arc tan}\, x + \text{Arc tan}(2x) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{17}-3}{4}$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $S_4 = \left\{\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}\right\}$

- Pour résoudre une équation avec des fonctions racines n[ième] ou la fonction Arctan, l'idée générale va être d'appliquer les identités remarquables et les formules de trigonométrie. Souvent en pratique, on utilise les règles suivantes :

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a.\tan b}$; $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$; $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$; $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

2) Calculer des limites :

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2-1)\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1} = \dfrac{8}{3}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[12]{x^3}-\sqrt[12]{(x+1)^4}}{\sqrt[12]{x^6}-\sqrt[12]{(x+1)^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[12]{\dfrac{(x+1)^4}{x^6}} \times \dfrac{\sqrt[12]{\dfrac{x^3}{(x+1)^4}}-1}{1-\sqrt[12]{\dfrac{(x+1)^2}{x^6}}}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[12]{\dfrac{(x+1)^4}{x^6}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[12]{\dfrac{x^3}{(x+1)^4}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[12]{\dfrac{(x+1)^2}{x^6}} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}} = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x.\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} + 1} = \dfrac{1}{3}$

- Pour la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\left(\text{Arc tan}\dfrac{1}{x} - \dfrac{\pi}{2}\right)$: on pose $\text{Arc tan}\dfrac{1}{x} - \dfrac{\pi}{2} = t$ avec $x > 0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\text{Arc tan}\dfrac{1}{x} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0^-$ et $x = -\tan t$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\left(\text{Arc tan}\dfrac{1}{x} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{t\to 0^-} -\dfrac{t}{\tan t} = -1$

Scanné avec CamScanner

LIMITE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

EXERCICE 01

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x-x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\sqrt{x^2+x}-3x^2+x}{5\sqrt{x^2+3}}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{8-2x}}$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}-x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$

EXERCICE 02

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x^2-2x|-8}{x^2-5x+4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-4}}{x+\sqrt{x+2}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^4-x^3}-x^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{4x^2+3x-7}-2x^2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{10x^2+9}-7}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x^2+5}-5}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^3+\alpha x^2+x+1}-x\sqrt{x+1}$ (où $\alpha\in\mathbb{R}$)

$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x^2-ax}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x-a}}$ (où $a\in\mathbb{R}$)

EXERCICE 03

Soit m un nombre réel et f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{mx^3+(m-2)x^2+(m-1)x+m-3}{x(x-2)(x-3)}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

EXERCICE 04

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{7x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x.\sin 2x}{1-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x.\sin 4x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\left(x^2+x\right)\tan 3x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sin\pi x}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan^2 x+2\tan x-3}{\sin x-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos 2x+\cos x}{2\cos x-1}$

EXERCICE 05

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{x+x\cos 4x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\tan 2x-\sqrt{3}\cos x}{\pi-2x}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x-1}{2\cos x+\cos 3x}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(2-3x+x^2\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x+1\right)\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ (où $(a,b)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$)

EXERCICE 06

Soit f une fonction numérique vérifiant :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\ 1+x-x^2\le f(x)\le 1+x-x^2+x^4$$

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x^2\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1-x}{x^2}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 07

En utilisant les propriétés des limites et encadrement, calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{5-4\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos x}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\cos x\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-E(x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin\left(E(x)\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x.\sin x^7}{x^2-3}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\sqrt{5-x}}{2+\sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\cos^2 x}{(x+1)^2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-E(x)}{x^2}$

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

EXERCICE 08

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^5-x^4+x^3+3}{x+1} & \text{si } x\neq -1 \\ f(-1)=12 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en -1.

EXERCICE 09

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=-\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en 0.

EXERCICE 10

Déterminer le réel a pour que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\cos^3 x-1}{\sin^2 x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=a \end{cases}$$

soit continue en 0.

EXERCICE 11

Déterminer le réel a pour que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{\sin x}-1}{x-\dfrac{\pi}{2}} & \text{si } x\neq\dfrac{\pi}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a \end{cases}$$

soit continue au point $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 12

Soit a un réel strictement positif.

On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x} & \text{si } x\geq -a \text{ et } x\neq 0 \\ g(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}} \end{cases}$$

1) Montrer que g est continue en 0.

2) Préciser la limite de g quand x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 13

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point x_0 :

1) $f(x)=\dfrac{\left|x^2-5\right|+3}{\sqrt{x}+2}$ et $x_0=1$

2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x^2+5}-3} & \text{si } x\neq 2 \\ f(2)=18 \end{cases}$ et $x_0=2$

3) $\begin{cases} f(x)=\left(x^2-9\right).\sin\left(\dfrac{1}{x-3}\right) & \text{si } x\neq 3 \\ f(3)=0 \end{cases}$ et $x_0=3$

4) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\cos 4x} & \text{si } x\neq\dfrac{\pi}{4} \\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ et $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

Scanné avec CamScanner

CONTINUITÉ À GAUCHE – CONTINUITÉ À DROITE

EXERCICE 14

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche au point x_0 :

1) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x| + 3x}{x^2 - 2|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 4 \end{cases}$ et $x_0 = 0$

2) $f(x) = xE\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ et $x_0 = 0$

3) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x-4} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ f(4) = \dfrac{1}{2} & \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x-4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$ et $x_0 = 4$

4) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x^3} & \text{si } x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[\\ f(0) = 1 & \\ f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} & \text{si } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right[\end{cases}$ et $x_0 = 0$

EXERCICE 15

On considère la fonction numérique g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = (2x + \pi)\tan x & \text{si } x \in \left]-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g(x) = \dfrac{1 - \cos^3 x}{x.\tan x.\cos^2 x} & \text{si } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right[\\ g(x) = \dfrac{3\sqrt{1+x^4} - x}{2 + x} & \text{si } x \in [0; +\infty[\end{cases}$$

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\pi} g(x) \ , \ \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} g(x) \ , \ \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} g(x)$$

2) Établir la continuité de la fonction g en 0.

EXERCICE 16

Déterminer les deux réels a et b pour que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x - a}{x - 2} & \text{si } x > 2 \\ f(x) = \dfrac{2x + b}{3} & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

soit continue au point $x_0 = 2$.

EXERCICE 17

Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2 - 2bx + 1}{2x^2 + ax - a - 2} & \text{si } x < 1 \\ f(1) = \dfrac{2 + c}{3} & \\ f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit continue au point $x_0 = 1$.

EXERCICE 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie par:

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{(3-x)^n - a}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ f_n(x) = \dfrac{3x + b}{4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2)$$

Déterminer a et b pour que f_n soit continue en 2.

EXERCICE 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax^2 + bx - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = 3x + c & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Déterminer les réels a , b et c pour que les conditions suivantes soit vérifiées :

- ✓ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x)$
- ✓ f continue en $x_0 = 2$.

Scanné avec CamScanner

PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

EXERCICE 20

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en x_0 puis donner ce prolongement :

1) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}$ et $x_0=1$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+5}-3}{4-x^2}$ et $x_0=-2$

3) $f(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x+\sin x}$ et $x_0=0$

4) $f(x)=\dfrac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x}$ et $x_0=0$

EXERCICE 21

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{8x+1}}{2(x-1)}+\frac{3|x|}{1-x^2}$$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) f admet-elle un prolongement par continuité en 1 ?

EXERCICE 22

On considère la fonction g définie par :

$$g(x)=\frac{3x^2+5x+2}{|x^2-1|-|x+1|}$$

1) Déterminer D_g le domaine de définition de g.

2) g admet-elle un prolongement par continuité en -1 ?

EXERCICE 23

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x^2E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $x-x^2\le f(x)\le x$

2) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0 puis donner ce prolongement.

EXERCICE 24

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en x_0 puis donner ce prolongement :

1) $f(x)=\dfrac{2x^{17}-17x+15}{x-1}$ et $x_0=1$

2) $f(x)=\dfrac{1+\cos x.\cos 2x}{x-\pi}$ et $x_0=\pi$

3) $f(x)=\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ et $x_0=a$ (ici $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$)

4) $f(x)=\dfrac{x.\sin x-\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x+\pi}$ et $x_0=-\pi$

5) $f(x)=\dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{x}$ et $x_0=0$

6) $f(x)=\dfrac{x^{p+1}-(p+1)x+p}{(x-1)^2}$ et $x_0=1$ (ici $p\in\mathbb{N}^*$)

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{a^2+x}-a}{\tan x}$ et $x_0=0$ (ici $a\in\mathbb{R}_+^*$)

8) $f(x)=\dfrac{\tan x-1}{\sqrt{2}\cos x-1}$ et $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

9) $f(x)=\dfrac{\cos x+\cos 2x-2}{\cos 3x+\sin x-1}$ et $x_0=0$

10) $f(x)=\dfrac{1}{(5-x)^2}\left(1-\sin\left(\dfrac{\pi x}{10}\right)\right)$ et $x_0=5$

EXERCICE 25

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } |x|>1 \\ f(x)=x^2-3x+2 & \text{si } |x|<1 \end{cases}$$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

b) f admet-elle un prolongement par continuité en 1 ?

2) f admet-elle un prolongement par continuité en -1 ?

Scanné avec CamScanner

EXERCICES ET PROBLEMES

EXERCICE 26

Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x)=\frac{(1-\tan x)^2}{\cos 2x}$$

Est-ce-que la fonction f admet un prolongement par continuité en $\frac{\pi}{4}$? Justifier votre réponse.

EXERCICE 27

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{3x^2+6} \text{ si } x\geq 1 \\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) \text{ si } x<1 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de la fonction f en 1.

2) f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

EXERCICE 28

On considère la fonction g définie par :

$$g(x)=\frac{\tan(\pi x)}{x-E(x)}$$

1) Déterminer D_g, le domaine de définition de g.

2) g admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

LIMITE D'UNE COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

EXERCICE 29

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\tan\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{17} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\tan\left(\sqrt{x}.\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\cos\left(\frac{E(\sqrt{x})}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\tan\left(\pi\sqrt{\frac{x^2-1}{4x^2+1}}\right)$$

EXERCICE 30

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x-1} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\tan\left(\frac{\pi\sin x}{6\left|x-x^2\right|}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\tan(2\pi x)-\tan(6\pi x)}{3x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}E\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x^3+2x}{5-4x^3}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\sin\left(x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)-2x\right)$$

CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

EXERCICE 31

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur son domaine de définition :

1) $f(x)=-5x^3+7x^2-5$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{(x+2)(x-1)(2x-3)}$

3) $f(x)=x^3+3x^2+5x-\sin x$

4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{3x^2-5x+2}$

5) $f(x)=\sin^3 x-5\cos x+4$

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4-5x^2+6}}{(x-1)\left(x^2+1\right)}$

7) $f(x)=\sin\left(\sqrt{x}\right)+\dfrac{x^2+4x-5}{\sqrt{x}}$

EXERCICE 32

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+6}{3x-2} & \text{si } x\leq -1 \\ f(x)=\cos(\pi x) & \text{si } -1<x<1 \\ f(x)=-\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+3} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 33

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition puis étudier la continuité sur chaque sous-intervalle du domaine de définition :

$$f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2x-1}\right) \quad ; \quad g(x)=\sin\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)$$

$$h(x)=\frac{x^2-\sqrt{2-x}}{|x+1|-2} \quad ; \quad k(x)=\frac{1-\cos(2\pi x)}{x(x-1)}$$

$$\begin{cases} u(x)=\dfrac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} \text{ si } x\neq 0 \\ u(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad ; \quad v(x)=\frac{x}{\tan(\pi x)}$$

EXERCICE 34

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\alpha^2 x+3 & \text{si } x\leq 1 \\ g(x)=\dfrac{8-\beta^2 x}{2x-1} & \text{si } 1<x<3 \\ g(x)=\dfrac{2}{5}x^2-\dfrac{\beta^2}{5}x+\alpha\beta & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

Déterminer les réels α et β sachant que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 35

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-3x+1$$

Déterminer les images des intervalles suivants par f :

$$I=]0;+\infty[\quad ; \quad J=]0;1[\quad ; \quad K=]-\infty;-1]$$

EXERCICE 36

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 \text{ si } x<2 \\ x^2-3 \text{ si } x\geq 2 \end{cases}$$

1) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer : $f([-2;4])$ et $f(]-\infty;1])$

EXERCICE 37

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$

1) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $I=\left[-\frac{3}{2};-1\right[$

2) Déterminer l'image de I par la fonction f.

3) En déduire que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution dans l'intervalle I.

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

EXERCICE 38

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1) $x^3-2x^2-1=0$; $I=[2;3]$

2) $x^4-2x-\sqrt{x}+1=0$; $I=]0;1[$

3) $x^4+x^2+4x=1$; $I=[0;1]$

4) $x-2\sin x=0$; $I=\left]\frac{\pi}{3};\pi\right[$

5) $\sqrt{1+\frac{1}{x}}=x$; $I=\left[\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right]$

6) $6\cos x=x$; $I=[0;\pi]$

EXERCICE 39

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1) $2x^3+3x-3=0$; $I=[0;1]$

2) $\sin x=2-x$; $I=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

3) $\tan x+4x=5$; $I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$

4) $x^3+E\left(\frac{x}{3}\right)=x+1$; $I=[1;2]$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES et PROBLÈMES

EXERCICE 40

Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1) $x^3 - 3x^2 + 15x - 7 = 0$; $I = \mathbb{R}$

2) $1 + \sin x - x^2 = 0$; $I = \mathbb{R}$

3) $x^{17} = x^{11} + 1$; $I = \mathbb{R}^+$

4) $\sqrt{x^3 + 5x + 4} = 100$; $I = \mathbb{R}^+$

5) $\cos x = \dfrac{2}{(x+1)^2}$; $I = \mathbb{R}$

6) $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$; $I = \mathbb{R}^*$

EXERCICE 41

1) Montrer que l'équation $x^5 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ admet une unique solution dans $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$.

2) Montrer que la courbe de la fonction f, telle que $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$ coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse α est tel que $-1 < \alpha < 0$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 11$$

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$, notées x_1, x_2 et x_3.

(On adoptera l'ordre suivant $x_1 < x_2 < x_3$)

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 42

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \cos(\pi x)$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$.

2) Par la méthode de dichotomie, trouver un intervalle $[a,b]$ de longueur $0,25$ tel que $a < \alpha < b$.

EXERCICE 43

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que l'équation :

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = 0$$

admet au moins une solutions dans $[0;\pi]$.

2) Montrer que l'équation $\dfrac{2\sin^n x}{1+\cos x} = \dfrac{1}{4} - x$ admet une unique solution dans $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

THÉORÈME DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

EXERCICE 44

Dans chacun des cas suivants, montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer, puis déterminer une expression de $f^{-1}(x)$:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x - 2}$; $I = [5;+\infty[$

2) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; $I =]-\infty;3[$

3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $I = \mathbb{R}^*$

4) $f(x) = \left(\sqrt{3-x} + 1\right)^2$; $I =]-\infty;3]$

5) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$; $I = [1;+\infty[$

6) $f(x) = 2x - \sqrt{x}$; $I = \left[0;\dfrac{1}{16}\right]$

EXERCICE 45

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1}

3) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in$

Scanné avec CamScanner

FONCTION RACINE N^{ième} - PUISSANCE RATIONNELLE

EXERCICE 46

1) Simplifier les nombres suivants :

$$a=\frac{\sqrt{18}\times\sqrt{\sqrt[3]{256}}\times\sqrt[4]{64}}{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[8]{64\times10^6}}\quad;\quad b=\frac{\sqrt[15]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt{9}\right)^3}{\sqrt[4]{27}\times\sqrt{\sqrt{3}}}$$

$$c=\frac{\sqrt[4]{2048}\times\sqrt[4]{160000}}{\sqrt[8]{4096}\times\sqrt[3]{\sqrt{256}}\times\sqrt{512}}$$

2) Simplifier les nombres suivants :

$$x=(27)^{\frac{2}{3}}+(16)^{\frac{3}{4}}-\frac{2}{\sqrt[3]{8^{-2}}}+\frac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{2}{5}}}$$

$$y=\frac{(81)^{\frac{2}{6}}\times(27)^{\frac{1}{4}}\times9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{14}{3}}}$$

$$z=\frac{a^{\frac{5}{3}}\times\left(\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}}\right)^3\times b^{\frac{5}{2}}}{\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[4]{b^{-\frac{3}{4}}}}\quad(\text{ici}\,(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2)$$

3) Comparer les deux nombres : $\sqrt[5]{91}$ et $\sqrt[3]{15}$

4) Ordonner dans l'ordre croissant les nombres :

$$A=\sqrt{2}\quad;\quad B=\sqrt[3]{4}\quad;\quad C=\sqrt[6]{5}\quad;\quad D=\sqrt[4]{3}$$

5) Écrire les dénominateurs des nombres suivants sous la forme d'un nombre rationnel :

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}\;;\;\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}\;;\;\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}\;;\;\frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$$

EXERCICE 47

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^8-25=0$; 2) $x^3+8=0$

3) $x^7=\sqrt{3}$; 4) $\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{7}$

5) $x^4=16$; 6) $(3x-4)^5=32$

7) $\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}+4=0$; 8) $9x-7\sqrt[3]{x}-2=0$

EXERCICE 48

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^4-5x^2-24=0$; 2) $x^6+3x^3-4=0$

3) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$

4) $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x^2-1}=x$

5) $\sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}}+\sqrt[4]{\frac{3+x}{2-x}}=2$; 6) $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3-54=0$

7) $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{2}$; 8) $\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{27-x}=5$

9) $\sqrt[3]{x+8}-\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[6]{64-x^3}$

10) $\sqrt{3+\sqrt{x}}+\sqrt{3-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{2x}$

11) $5x-4\sqrt[3]{x}-1=0$; 12) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-12=0$

13) $\frac{\sqrt[3]{x+3}}{3}+\sqrt[3]{\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{2}$

EXERCICE 49

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\sqrt{x+2}<x$; 2) $\sqrt{2x+1}-3<\sqrt{x+2}$

3) $(2-x)^3\le x$; 4) $\sqrt[3]{x^2+8}-2<x$

5) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+x+1}\ge x-1$; $2\sqrt[3]{x^4}-\frac{3x}{\sqrt[3]{x}}\le20$

EXERCICE 50

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-\sqrt[3]{x+6}}{3-\sqrt{2x+5}}$

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt[4]{x}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt[3]{5-x}-1}{2-\sqrt[3]{x+4}}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x}-x$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-2x$; 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-x}-x-1$; 12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^4+5}+2x$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 51

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x}}$

2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{5}{2}}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^3-x}-\sqrt[3]{x^3+2x}}{x}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x<8}}\dfrac{(4-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{x-8}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x-3}}{5x}$; 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+x-3}}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}$; 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}.\sqrt[12]{x}$

EXERCICE 52

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\tan x}-\sqrt[3]{1+\sin x}}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt[3]{x+7}}{1-\tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\dfrac{1+8x}{x^4}}}$

LA FONCTION ARCTANGENTE

EXERCICE 53

Simplifier les expressions suivantes :

$\text{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{41\pi}{17}\right)\right)$; $\text{Arctan}\left(\tan\left(-\dfrac{79\pi}{3}\right)\right)$

$\text{Arctan}\left(\tan 5\left(\text{Arctan}\sqrt{3}\right)\right)$; $\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)}\right)$

$\tan\left(\text{Arctan}(2016)\right)$; $\tan\left(\text{Arctan}\dfrac{2}{3}-\text{Arctan}\dfrac{3}{7}\right)$

$\tan\left(-\text{Arctan}(5)\right)$; $\tan\left(2\text{Arctan}(3)\right)$

EXERCICE 54

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\text{Arctan}\,2+\text{Arctan}\,\frac{1}{2}$$

$$B=\text{Arctan}\left(1-\sqrt{2}\right)-\text{Arctan}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

2) Établir les égalités suivantes :

$$\text{Arctan}\,\frac{1}{2}+\text{Arctan}\,\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arctan}\,\frac{1}{2}+\text{Arctan}\,\frac{1}{5}+\text{Arctan}\,\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$4\text{Arctan}\,\frac{1}{5}-\text{Arctan}\,\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

3) On pose : $\alpha=2\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right)-\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{7}\right)$

a) Vérifier que $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$

b) Calculer $\tan\alpha$ puis en déduire la valeur de α.

EXERCICE 55

Résoudre les équations suivantes :

$\text{Arctan}(3x)=\dfrac{\pi}{8}$; $\text{Arc tan}\left(x^2+2\right)=\text{Arctan}(3$

$\text{Arctan}\left(x^2-x\right)=\dfrac{3\pi}{4}$; $\text{Arc tan}\,x=\dfrac{\pi}{4}+2\text{Arctan}$

$\text{Arc tan}\,x+\text{Arctan}(2x)=\dfrac{\pi}{3}$; $\text{Arc tan}\sqrt{x}=-\dfrac{\pi}{4}$

EXERCICE 56

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Arctan}(3x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Arctan}\left(x^2+4x\right)}{x}$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\text{Arctan}\left(x^4-x\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)\text{Arctan}\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\text{Arc tan}\,x-\dfrac{\pi}{2}x$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)+\dfrac{\pi}{2}}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2\sqrt{\text{Arc tan}\,x-\dfrac{\pi}{4}}-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\text{Arctan}\sqrt{x-1}}{x-1}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 57

Soit n un entier naturel non nul.

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{(2-x)^n-1} \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2n}}\frac{\sqrt{\dfrac{\sin 2nx}{1+\cos nx}}}{4n^2x^2-\pi^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\times\cos 2x\times\ldots\times\cos nx}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)\left(1-\sin^2 x\right)\ldots\left(1-\sin^n x\right)}{\cos^{2n} x}$$

EXERCICE 58

Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

- $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{x+1} & \text{si } x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x} & \text{si } x<0 \end{cases}$

- $\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sin x-\tan x}{\sqrt{x}} & \text{si } x>0 \\ g(0)=0 \\ g(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x<0 \end{cases}$

- $\begin{cases} h(x)=xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x<0 \\ h(0)=0 \\ h(x)=\dfrac{x-E(x)}{\sqrt{x}} & \text{si } x>0 \end{cases}$

- $\begin{cases} k(x)=\operatorname{Arc}\tan x.\sin\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right) & \text{si } x<0 \\ k(0)=0 \\ k(x)=\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$

EXERCICE 59

Soit f_m la fonction définie par :

$$\begin{cases} f_m(x)=\dfrac{\cos\left(\frac{2}{3}x\right)-\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2x} & \text{si } x>0 \\ f_m(x)=x^2+mx+m+\dfrac{2m+1}{x+1} & \text{si } x\leq 0 \text{ et } x\neq -1 \end{cases}$$

Où m est un paramètre réel.

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$

2) Déterminer m pour que f_m soit continue en 0.

3) Déterminer m pour que f_m soit prolongeable par continuité en -1.

EXERCICE 60

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x-E(x)}-x$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

3) Soit p un entier relatif.

a) Étudier la continuité de f en p.

b) Étudier la continuité de f sur $]p,p+1[$.

4) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ -x\leq f(x)\leq 1-x$

5) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE 61

1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique.

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x)=\frac{1+\cos x+\cos^2 x+\ldots+\cos^n x}{1+\cos^{2n} x}$$

Montrer que f_n est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 62

On considère la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x} & \text{si } 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\ \sin x\le x\le\tan x$

2) En déduire que pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$0<f(x)<\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

3) Étudier la continuité de f à droite de 0.

EXERCICE 63

On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{ax^2-ax}{x^2-5x+4} & \text{si } x>1 \\ g(x)=\dfrac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}+x-2} & \text{si } x<1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que la fonction g soit prolongeable par continuité en 1.

EXERCICE 64

On considère la fonction définie par :

$$f(x)=\tan x.E\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Montrer que : $\left(\forall x\in D_f\right)\ \left|f(x)-\dfrac{\tan x}{x}\right|\le|\tan x|$

3) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 puis donner ce prolongement.

EXERCICE 65

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et k un réel tel que :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right):\ |f(x)-f(y)|\le k|x-y|$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 66

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right):\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$

Montrer que si la fonction f est continue en 0 alors f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

EXERCICE 67

1) Montrer que l'équation $2x^3-4x+1=3\sqrt{x}+x^3$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

2) Montrer que l'équation $4x^5+x^3=27$ admet une solution unique dans $]1;2[$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{9x^5-x-2}{x^2+1}-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse appartient à $[0;1]$.

4) Soit u et v les deux fonctions définies par :

$$u(x)=\sqrt[3]{3x^2+7x+1}\quad\text{et}\quad v(x)=\sqrt{5-x^2}$$

Montrer que les courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ se coupent en un point dont l'abscisse appartient à $[0;2]$.

EXERCICE 68

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{x^2+2x}}{x}-1$$

1) Déterminer D le domaine de définition de f.

2) Calculer les limites de f aux bornes de D.

3) Montrer qu'il existe un couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\right)\quad \alpha x\le\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{x^2+2x}\le\beta x$$

4) Montrer qu'il existe un réel $c\in\left]\frac{1}{2};1\right[$ tel que :

$$\sqrt{1+\frac{1}{c}}-\sqrt{c^2+2c}=c$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 69

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2x}{x+1}}+\sqrt{2x-x^2}\right)$$

1) Déterminer D le domaine de définition de f.

2) Justifier la continuité de la fonction f sur D.

3) Montrer qu'il existe un couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]\right)\ 2\alpha\le\sqrt{\frac{2x}{x+1}}+\sqrt{2x-x^2}\le 2\beta$$

4) Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur $[0;1]$

5) Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $[0;1]$.

Montrer que : $(\exists c\in[a,b])\ f(c)=\dfrac{a-c}{a-2b+c}$

EXERCICE 70

Soit f une fonction définie de $[0;1]$ dans $[0;1]$ et continue sur $[0;1]$.

Établir que : $(\exists c\in[0;1])\ f(c)+f(1-c)=2c$

EXERCICE 71

Soit $f:[a,b]\to[a,b]$ une fonction continue sur $[a,b]$.

Montrer que f admet un point invariant.

EXERCICE 72

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que :

$$f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$$

Montrer qu'il existe $c\in\,]0;1[$ tel que : $f(c)=\dfrac{1-c}{1+c}$

EXERCICE 73

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que :

$$f(a)=f(b)$$

Montrer que l'équation $f(x)=f\left(x+\dfrac{b-a}{2}\right)$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.

EXERCICE 74

Soit f et g deux fonctions continues sur $[0;1]$ telles que : $(f(0)-g(0))(f(1)-g(1))\le 0$

1) Montrer qu'il existe $c\in[0;1]$ tel que $f(c)=g(c)$.

2) On suppose dans cette question que :

$$f(0)=g(1)=0\quad\text{et}\quad f(1)=g(0)=1$$

Montrer que :

$$(\forall\lambda\in\mathbb{R}^*)(\exists\alpha\in[0;1])\ f(\alpha)=\lambda g(\alpha)$$

EXERCICE 75

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et p et q deux réels strictement positifs.

Montrer qu'il existe un réel $c\in[a,b]$ tel que :

$$pf(a)+qf(b)=(p+q)f(c)$$

EXERCICE 76

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$(\exists a\in\mathbb{R})\ fof(a)=a$$

Montrer que : $(\exists c\in\mathbb{R})\ f(c)=c$

EXERCICE 77

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que f ne s'annule pas sur I.

Montrer que f garde un signe constant sur I.

EXERCICE 78

Soit f et g deux fonctions définies de $[0;1]$ dans $[0;1]$ et continues sur $[0;1]$ telles que $fog=gof$.

1) Montrer que si un réel a est solution de $f(x)=x$ alors $g(a)$ est aussi solution de cette solution.

2) Montrer qu'il existe un réel $\alpha\in[0;1]$ tel que :

$$f(\alpha)=g(\alpha)$$

(On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde)

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 79

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

et x_1, x_2, ... et x_n des éléments distincts de $[a,b]$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

EXERCICE 80

Soit f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ et $ab < 0$

1) Montrer que : $(\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2)\ \ f(x_0).f(y_0) < 0$

2) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 81

Soit P une fonction polynomiale de degré impair.

Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

EXERCICE 82

Soit f une fonction numérique continue sur $[0;1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction f_n définie sur $\left[0;1-\frac{1}{n}\right]$ par : $f_n(x) = f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)$

1) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right)$.

2) Montrer que : $(\exists x_0 \in]0;1[)\ \ f(x_0) = f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)$

EXERCICE 83

Soit f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}^*$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 84

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. On considère la fonction numériq

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$

1) Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{2n}{n+1}\right]$.

2) En déduire que $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$.

3) Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in \left]\frac{2n}{n+1};2\right.$ tel que $f(\alpha) = 0$.

4) Vérifier que : $\alpha^n = \frac{1}{2-\alpha}$

EXERCICE 85

Soit f une fonction numérique continue sur $[a,b]$ tell que $f(a) < ab$ et $b^2 < f(b)$.

Montrer que : $(\exists \alpha \in [a,b])\ \ f(\alpha) = \alpha b$

EXERCICE 86

1) Soit f une fonction continue et strictement positi sur un intervalle $[a,b]$.

Montrer que :

$$(\exists \alpha > 0);(\forall x \in [a,b])\ \ f(x) \geq \alpha$$

2) Soit g et h deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que : $(\forall x \in [a,b])\ \ g(x) > h(x)$

Montrer que :

$$(\exists \beta > 0);(\forall x \in [a,b])\ \ g(x) \geq h(x) + \beta$$

EXERCICE 87

Soit f une fonction numérique continue sur $[a,b]$.

Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel qu

$$f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 88

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3}-\sqrt[3]{x^2+3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x^3}-\sqrt[4]{x^4-1}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt[4]{x-1}-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x+63}-4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x+3}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}\times\sqrt[4]{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[15]{x^5}}{2\sqrt[9]{(x-1)^3}-\sqrt[3]{x}}$

EXERCICE 89

Résoudre les équations suivantes :

$\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}=\sqrt[6]{4-x^2}$; $\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{2}.\sqrt{x-1}$

$2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}=20$; $\left(\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3+125=0$

EXERCICE 90

1) Résoudre les équations suivantes :

$$\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x(x-1)}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=0$$

$$\sqrt[3]{(1+x)^2}+4\sqrt[3]{(1-x)^2}=4\sqrt[3]{1-x^2}$$

2) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)$; $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \sqrt[4]{x^4+x}-x-2$

3) Étudier selon les valeurs du paramètre m la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2+1}+mx$

EXERCICE 91

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+8}>3$; $\sqrt[3]{x^2-8}<x+2$

$x\sqrt[3]{x^4}\le 20+\dfrac{3x}{\sqrt[3]{x}}$; $\dfrac{x-\sqrt[3]{x}}{4}\ge\dfrac{\sqrt{x}-1}{3}$

$\sqrt[3]{x^3-3x^2+5x-6}>x-2$; $3\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\ge 20$

EXERCICE 92

Un marcheur parcourt $12km$ en une heure.

Montrer qu'il existe au moins un intervalle de 30 min pendant lequel il parcourt exactement $6km$.

EXERCICE 93

Discuter suivant les valeurs des paramètres réels a, b, c et m l'existence et la valeur des limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}+mx\sqrt{x+2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+mx\right)$

EXERCICE 94

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$. On suppose que :

$$(\forall x\in[0;1])\quad fof(x)=x \quad\text{et}\quad f(0)=0$$

1) Montrer que f est injective.

2) Montrer que f est strictement monotone sur $[0;1]$.

3) En déduire que f est strictement croissante sur $[0;1]$ puis que : $(\forall x\in[0;1])\ f(x)=x$

EXERCICE 95

On considère la fonction h définie par :

$$h(x)=\text{Arc}\tan\left(\frac{x^2-4x+2}{x^2-2}\right)$$

1) Déterminer D_h le domaine de définition de h.

2) Calculer les limites de h aux bornes du D_h.

3) Montrer que h réalise une bijection de $K=\left]\sqrt{2};+\infty\right[$ à valeurs dans un intervalle L à déterminer.

4) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=\left]\sqrt{2}-1;+\infty\right[$ par : $f(x)=h(x+1)$

Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Scanné avec CamScanner

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

I) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{\operatorname{Arc\,tan}(x-1)} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x\operatorname{Arc\,tan}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{\pi}{2}x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\right)^3+x}-\sqrt[6]{x^3+x^2}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1-\sqrt[3]{x-8x^3}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[5]{x}.\sqrt[15]{x^2}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

II) Montrer que : $2\operatorname{Arctan}(2)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)=\pi$

III) Montrer que pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$:

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=2\operatorname{Arctan}(x)-\pi$$

IV) Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que :

$$\left(\forall x\in[0;1]\ \ f(x)\le 0\right) \text{ et } f(0)=f(1)=0$$

Montrer que :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\exists c\in[0;1]\right)\ \ f(c)=f\left(c+\frac{1}{n}\right)$$

V) Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit :

$$\operatorname{Arc\,tan}x+\operatorname{Arctan}(2x)=\frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{Arc\,tan}x+\operatorname{Arctan}(2x)>\frac{\pi}{3}$$

VI) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I=\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ par : $f(x)=\frac{-1}{1-\tan^3 x}$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2) Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

3) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

DEVOIR 2

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\operatorname{Arctan}\left(\sqrt[3]{\tan x}\right) \text{ si } x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\\ f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} \text{ si } x<0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Calculer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$

3) Soit g la restriction de la fonction f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Dresser le tableau de variations de g^{-1}.

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

DEVOIR 3

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=1+\sqrt[3]{x^3-2x^2} & \text{si } x\ge 2 \\ f(x)=\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & \text{si } x<2 \end{cases}$$

1) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Étudier la continuité de la fonction f en 2.

3) Soit g la restriction de f sur $I=]-\infty;2[$.

Montrer que g réalise une bijection de I sur un in-

valle J à déterminer puis calculer $g^{-1}(x)$ pour t

Scanné avec CamScanner

I) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{2\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)-\pi}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[6]{x+1}-\sqrt{x+1}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}.\text{Arc tan}\,x-\frac{\pi}{2}x\right) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

II) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{1-x^3} & \text{si } x\le 1 \\ f(x)=2\text{Arctan}\left(\frac{2}{x+1}-1\right) & \text{si } x>1 \end{cases}$$

1) Déterminer les limites : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4) a)- Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.

b)- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

III) On considère la fonction numérique g définie sur $[0;1]$ par : $g(x)=\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{x}$

1) Montrer qu'il existe au moins un réel $c\in]0;1[$ tel que : $\sqrt[3]{1-c}=\sqrt[3]{c}+c^3$

2) Résoudre dans $[0;1]$ l'équation : $g(x)=\sqrt[3]{1-x}$

3) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4) Calculer la limite : $\lim_{x\to 0}\dfrac{g^{-1}(x)-\frac{1}{2}}{x}$

IV) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $a_1, a_2, ..., a_n$ des réels de l'intervalle $[0;1]$.

Montrer que : $(\exists\alpha\in[0;1])\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}|\alpha-a_k|=\frac{1}{2}$

I)

1) Montrer que :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\ ;\ \frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2) a)- Montrer que pour tout $a\in[0,+\infty[$:

$$\text{Arctan}\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\text{Arctan}\left(\sqrt{a}\right)$$

b)- En déduire que : $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}$

II) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1-\sqrt[3]{x^{-2}}\right)\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{Arc tan}\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)-\frac{\pi}{4}}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{2-x}-\sqrt[6]{2-x}}{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right)\text{Arctan}\left(\sqrt{x^2+2x}+x+1\right)$$

III) Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty,\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{1-x}+x-1 & \text{si } x<0 \\ f(x)=\text{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}+\tan x\right) & \text{si } x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue en 0.

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} \ ; \ \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} \ ; \ \lim_{x\to-\infty}f(x) \ ; \ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$$

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que g est strictement croissante sur I.

b) Montrer que g est une bijection de I sur I.

On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

c) Résoudre dans I l'équation : $g^{-1}(x)=x$

d) Montrer que : $(\forall x\in I)\ g^{-1}(x)\le x$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES ET PROBLEMES

DEVOIR 6

1) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E): x^3 + 3x - 4 = 0$$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

2) On pose : $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Établir que α est une solution de (E) puis en déduire que $\alpha = 1$.

II) On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = \frac{2}{3}.\frac{\text{Arctan}\left(\sqrt[4]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$$

1) Déterminer D_g, le domaine de définition de g.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

3) Montrer que g admet un prolongement par continuité en 1 qu'on déterminera.

III) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)E\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f en 1.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

DEVOIR 7

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} = 1$ (On pourra poser : $t = \sqrt[3]{x}$)

2) Soit h une fonction continue sur $[0;2]$ telle que $h(0) = h(2)$.

Montrer que l'équation $h(x+1) = h(x)$ admet au moins une solutions dans l'intervalle $[0;1]$.

3) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}}-1\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[4]{x^4+x^2+1}+x-2$

DEVOIR 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\text{Arctan}\left(\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f en 0.

2) Étudier la parité de la fonction f.

3)a)- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2}\text{Arc tan}\,x$$

(On pourra poser $x = \tan\alpha$ avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$)

b)- En déduire une expression simple de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

4) On considère dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation suivante :

$$(E): \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12}$$

a)- Montrer que : $(E) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x}$

b)- En déduire les solutions de l'équation (E).

DEVOIR 9

I) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^-$:

$$f(x) = 5 - \left(\frac{1}{1+\sqrt{-x}} - 1\right)^3$$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^-$.

2) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

3) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur un intervalle J à déterminer.

4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

II) On considère la fonction g définie sur l'intervalle

$I = \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \sqrt[4]{1+\dfrac{15}{\tan^4 x}} - 2$

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis calculer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$

Scanné avec CamScanner

HISTOIRE

Au début du XIII[e] siècle le mathématicien italien Leonard de Pisae connu sous le nom de Fibonacci, introduit une suite sous la forme amusante suivante : Partant d'un couple de lapins, combien en obtiendra-t-on après un nombre donné de mois, sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois. Si on note F_n le nombre de couples au bout de n mois, on aboutit à la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Le rapport F_{n+1}/F_n tend vers le nombre d'or $(1+\sqrt{5})/2$.

Source : https://fr.wikipedia.org

LEONARDO FIBONACCI (1180 – 1250)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Utiliser les suites arithmétiques et les suites géométriques pour étudier des exemples de suites de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

et d'autres suites récurrentes simples.

- Utiliser l'encadrement et les propriétés de l'ordre pour prouver la convergence ou la divergence d'une suite, en se basant sur la définition de la limite d'une suite dans des exemples particuliers.
- Utiliser les suites de référence et les critères de convergence pour déterminer les limites de suites numériques
- Utiliser les suites numériques pour résoudre des problèmes variés de différents domaines.
- Étudier les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur un intervalle I et $f(I) \subset I$.
- Déterminer la limite de la composée d'une suite et d'une fonction continue (suite de la forme $v_n = f(u_n)$).
- Utiliser les suites adjacentes pour encadrer des nombres réels.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires 68
- Connaissances Fondamentales
  - Généralités sur les suites (Rappel) 74
  - Limite d'une suite numérique 75
  - Critères de convergence 84
  - Suites de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_n = f(u_n)$ 86
  - Suites adjacentes 88
- Techniques Et Astuces 90
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application 99
  - Exercices de perfectionnement 102
  - Problèmes de synthèse 107

Scanné avec CamScanner

2 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

RAPPELS

A) On considère les suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) définies comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 6 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 + 2n + 3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases} ; \quad \begin{cases} w_0 = 3 \\ w_{n+1} = w_n + 2 \times 3^{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 8 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

2. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique puis exprimer v_n en fonction de n.

3. Montrer que la suite (w_n) est géométrique puis exprimer w_n en fonction de n.

B) Soit (a_n) et (b_n) les suites numérique définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = 2\sqrt{n+1} - 5$ et $b_n = \frac{5}{4} + \frac{3}{5n+3}$

Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.

C) On considère la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ définie par : $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

2. Justifier que pour tout $x \in [2; +\infty[$: $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$

3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est majorée.

D) On considère les suites (α_n) et (β_n) définie par :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 2 \\ \alpha_{n+1} = \sqrt{6 + \alpha_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \beta_0 = 4 \\ \beta_{n+1} = \sqrt{6 + \beta_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. En utilisant les variations de de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{6+x}$ et le raisonnement par récurrence, établir que la suite (α_n) est croissante et la suite (β_n) est décroissante.

2. Montrer que la suite (α_n) est majorée et que la suite (β_n) est minorée.

E) Soit (r_n) et (t_n) les suites récurrentes définies par :

$$\begin{cases} r_0 = 2 \\ r_{n+1} = \frac{1}{5}r_n + 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} t_0 = 3 \\ t_{n+1} = \frac{1}{5}t_n + 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = r_n - t_n$ et $c_n = r_n + t_n$

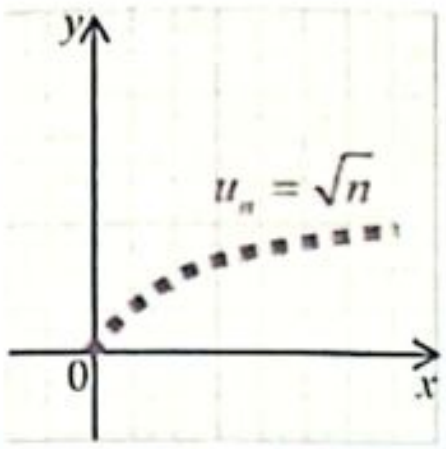
1. Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

2. Montrer que (c_n) est une suite constante puis en déduire les expressions de r_n et t_n en fonction de n.

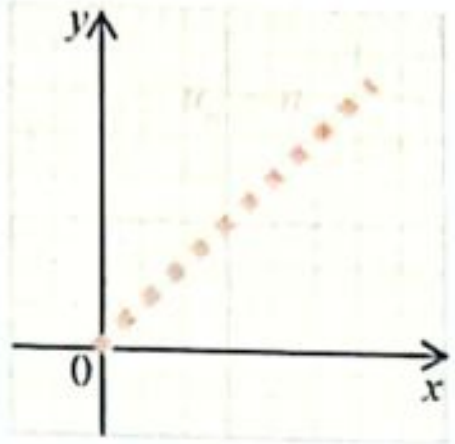
Scanné avec CamScanner

A) ÉTUDE GRAPHIQUE :

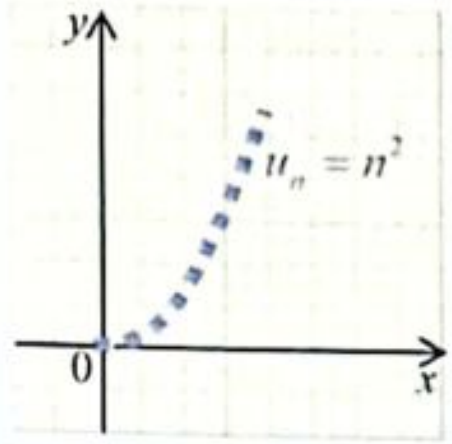
Les figures suivantes (1) , (2) , (3) et (4) présentent successivement les graphes des suites numériques $\left(\sqrt{n}\right)$, (n) , $\left(n^2\right)$ et $\left(n^3\right)$



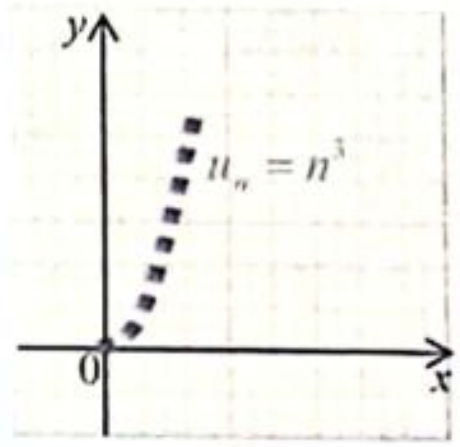
1



2



3



4

1. a) En s'inspirant des graphes ci-dessus, quelle remarque peut-on tirer sur les termes de ces suites quand n prend des valeurs assez grandes ?

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leq n \leq n^2 \leq n^3$, et en déduire que si n est supérieur à 10^{12} alors les suites $\left(\sqrt{n}\right)$, (n) , $\left(n^2\right)$ et $\left(n^3\right)$ prennent de plus en plus des grandes valeurs.

2. Montrer que si $n \geq 10^{12}$ alors $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, et en déduire que si $n \geq 10^{12}$ alors les suites $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prennent de plus en plus des petites valeurs.

B) ÉTUDE THÉORIQUE :

1. a) En utilisant la définition de la limite de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ quand x tend vers $+\infty$, montrer que :

$$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\ ;\ (\forall x \in \mathbb{R})\left(x > B \Rightarrow \sqrt{x} > A\right)$$

   b) Soit $A > 0$. On considère le nombre B définie en 1.a) et on pose $N = E(B)+1$ ($E(B)$ étant la parie entière de B). Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \left(n \geq N \Rightarrow \sqrt{n} > A\right)$

   On peut dire donc qu'à partir du rang N , tous les termes de la suite $\left(\sqrt{n}\right)$ sont strictement supérieurs à A .

   On dit aussi que la suite $\left(\sqrt{n}\right)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

   c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $n^p > \sqrt{n}$

   Montrer que : $(\forall A > 0)\,(\exists N' \in \mathbb{N})\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geq N' \Rightarrow n^p > A\right)$

   On dit que la suite $\left(n^p\right)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$

Scanné avec CamScanner

2. a) Déterminer un entier n_0 de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$: $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-3}$

b) Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,;\,(\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geq N \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon\right)$

On dit aussi que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'inégalité $n^p \geq n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N' \in \mathbb{N})\,:\,(\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geq N' \Rightarrow 0 < \frac{1}{n^p} < \varepsilon\right)$$

On dit aussi que la suite $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

3 LIMITE FINIE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

1. Étudier les variations de la fonction f puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = 2 + \frac{1}{n}$
   a) Placer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $M_n(n, u_n)$ pour $n \in \{1,2,3,4\}$.
   b) Le tableau ci-contre donne les valeurs de u_n.
   Quelle remarque peut-on tirer sur les termes de la suite (u_n) pour des valeurs de n assez grandes ?
4. On considère l'intervalle ouvert I de centre 2 et de rayon 10^{-2} : $I =]1,99;2,01[$
   Montrer qu'à partir d'un rang N_1 à déterminer, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ appartiennent à I.
5. Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'intervalle I_ε de centre 2 et de rayon ε : $I_\varepsilon =]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[$
   a) Montrer qu'à partir d'un rang N_ε dépendant de ε, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ appartiennent à I_ε.
   b) En déduire que : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\,;\,(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon)$

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ ou $\lim u_n = 2$

n	u_n
1	3
2	2,5
3	2,33333333
4	2,25
5	2,2
6	2,16666667
7	2,14285714
8	2,125
9	2,11111111
10	2,1
11	2,09090909
12	2,08333333
13	2,07692308

100	2,01
101	2,00990099
102	2,00980392
103	2,00970874
104	2,00961538
105	2,00952381
106	2,00943396
107	2,00934579
108	2,00925926
109	2,00917431
110	2,00909091
111	2,00900901
112	2,00892857
113	2,00884956

Scanné avec CamScanner

4 LES SUITES CONVERGENTES

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{3n + 5(-1)^n}{2n}$

1. Calculer les termes u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

2. Déterminer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$: $u_n \in \left[\dfrac{7}{5};\dfrac{8}{5}\right]$

3. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(n \geq N \Rightarrow u_n \in \left]\dfrac{3}{2} - \varepsilon, \dfrac{3}{2} + \varepsilon\right[\right)$

- On dit qu'une suite (u_n) est convergente de limite ℓ, si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf, peut-être, un nombre fini d'entre eux. On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$
- Toute suite admettant une limite finie est dite convergente. Plus précisément :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(n \geq N \Rightarrow u_n \in \left]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right[\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\right)\right]$$

5 LES SUITES DIVERGENTES

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x}$

1. Étudier les variations de f puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $u_n = \dfrac{n^2 + 2}{n}$

   a) Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

   b) Placer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les points $M_n(n,u_n)$ pour $n \in \{1,2,3,4\}$.

4. On considère l'intervalle ouvert $I =]10;+\infty[$. Montrer qu'à partir d'un certain rang N à déterminer, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appartiennent à l'intervalle I.

   Il s'ensuit donc que tout intervalle ouvert $]A,+\infty[$, avec $A > 0$, contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$

En d'autres termes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq N \Rightarrow u_n > A)\right]$

On définit de même : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq N \Rightarrow u_n < -A)\right]$

Scanné avec CamScanner

6 CONVERGENCE ET ORDRE

I - LA CONVERGENCE :

A) On considère la suite numérique (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \dfrac{3n + \sin n}{n}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|a_n - 3| \leq \dfrac{1}{n}$

2. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 3$

De façon générale on a l'implication suivante :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq u_n \leq y_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \left[(u_n) \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \right]$$

B) Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, et ℓ un nombre réel.

On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq v_n$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

C) On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{n + \cos 3n}{n+1}$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $1 - \dfrac{2}{n+1} \leq u_n \leq 1$

2. En déduire en utilisant la définition que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

II – LA DIVERGENCE :

A) Soit (a_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = 1 + \sqrt{n} + \sin n$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq \sqrt{n}$

2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

B) Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites numériques telles que : $(\forall n \geq n_0)\ \ u_n \leq v_n$

1. Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

2. Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

7 LIMITE D'UNE SUITE RÉCURRENTE DE LA FORME $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x}$

1. a) Vérifier que f est continue et strictement croissante sur $I = [3;4]$ puis montrer que $f(I) \subset I$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in I$

   c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée.

2. a) Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Scanné avec CamScanner

b) Tracer dans le même repère la droite Δ d'équation $y = x$ après avoir étudié la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

c) En utilisant $\mathscr{C}$ et Δ, représenter les cinq premiers termes de la suite (u_n). Conjecturer alors la limite de (u_n).

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2^n \geq n$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{n}$.

Que peut-en déduire alors sur la convergence de la suite (u_n) ? Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

SUITES ADJACENTES

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite Δ, on définit les points :

A_1 milieu du segment $[A_0B_0]$ et B_1 barycentre du système pondéré $\{(A_0,1);(B_0,2)\}$

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n,1);(B_n,2)\}$

1. Placer les points A_1, B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12cm$.

Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?

2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $(A_0;\vec{i})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$

Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n.

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

3. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 0$, $v_0 = 12$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

a) Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.

c) Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

d) On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$.

Montrer qu'elle est constante.

4. À partir des résultats obtenus dans les questions 2 et 3, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers plus l'infini.

Si (u_n) croissante et (v_n) décroissante, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, on dit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Scanné avec CamScanner

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES (RAPPEL)

Soit n_0 un entier naturel. On pose $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ et on considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq n_0}$.

1.1. SUITE MAJORÉE – SUITE MINORÉE – SUITE BORNÉE

Définition 1

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I)\ u_n \leq M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I)\ u_n \geq m$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

1.2. MONOTONIE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Définition 2

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si : $(\forall n \in I)\ u_{n+1} - u_n \geq 0$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si : $(\forall n \in I)\ u_{n+1} - u_n \leq 0$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante si : $(\forall n \in I)\ u_{n+1} = u_n$

Remarque

- Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante alors : $(\forall n \in I)\ u_n \geq u_{n_0}$
- Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante alors : $(\forall n \in I)\ u_n \leq u_{n_0}$

1.3. SUITE ARITHMÉTIQUE

Définition 3

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique s'il existe un réel r (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in I)\ u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Propriété 1

Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $(n, p) \in I^2$:

$$u_n = u_p + (n-p)r \qquad \text{et} \qquad u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

Scanné avec CamScanner

1.4. SUITE GÉOMÉTRIQUE

Définition 4

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique s'il existe un réel q (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in I)\ u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Propriété 2

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ alors pour tout $(n, p) \in I^2$:

$$u_n = u_p.q^{n-p} \qquad \text{et} \qquad u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p.\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \qquad (n \geq p)$$

2 LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

2.1. SUITE DE LIMITE INFINIE

Définition 5

- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ a pour limite $+\infty$ si tout intervalle de type $]A, +\infty[$, où $A > 0$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ; ce qui revient à dire que :

$$(\forall A > 0)\,(\exists n \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N)\ \ u_n \in]A, +\infty[$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ diverge vers $+\infty$ et on notera :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim u_n = +\infty$$

- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ a pour limite $-\infty$ si tout intervalle de type $]-\infty, -A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ; ce qui revient à dire que :

$$(\forall A > 0)\,(\exists n \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N)\ \ u_n \in]-\infty, -A[$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ diverge vers $-\infty$ et on notera :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim u_n = -\infty$$

Remarques

- Si $k \in \mathbb{R}_+^*$ alors on a l'implication : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} ku_n = +\infty$
- On a les équivalences suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$$

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = n^2$

Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Soit $A > 0$. On a alors :

$u_n \in]A,+\infty[\Leftrightarrow u_n > A \Leftrightarrow n^2 > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$

Posons $N = E\left(\sqrt{A}\right)+1$, d'où $N > \sqrt{A}$ et $N \in \mathbb{N}$.

On a donc :

$n \geq N \Rightarrow n > \sqrt{A} \Rightarrow n^2 > A \Rightarrow u_n \in]A,+\infty[$

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = 3-2n$

Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Soit $A > 0$. On a alors :

$v_n \in]-\infty,-A[\Leftrightarrow 3-2n < -A \Leftrightarrow n > \dfrac{A+3}{2}$

Posons $N = E\left(\dfrac{A+3}{2}\right)+1$, d'où $N > \dfrac{A+3}{2}$ et $N \in \mathbb{N}$

On a donc :

$n \geq N \Rightarrow n > \dfrac{A+3}{2} \Rightarrow v_n < -A \Rightarrow v_n \in]-\infty,-A[$

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

2.2. LIMITE INFINIE DES SUITES USUELLES

Proposition 1

Les suites $\left(\sqrt{n}\right)_n$, $(n)_n$, $\left(n^2\right)_n$ et $\left(n^3\right)_n$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 2

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques telles que pour tout $n \geq n_0$: $u_n \leq v_n$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_n = \sqrt[3]{n^6+1+\sin n}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n^6+1+\sin n \geq n^6$

Donc : $u_n \geq n^2$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$v_n = E\left(\sqrt{n}\right)+1$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{n}-1 \leq E\left(\sqrt{n}\right)$

Donc : $\sqrt{n} \leq v_n$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

3) Soit (w_n) la suite numérique définie par :

$$w_n = \text{Arctan}(\cos n) - n$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\text{Arctan}(\cos n) \leq \dfrac{\pi}{2}$

Donc : $w_n \leq \dfrac{\pi}{2} - n$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2} - n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$

Scanné avec CamScanner

Proposition 3

Soit a un réel quelconque.

- Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
- Si $p \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.

Preuve

- Soit $a > 1$. On pose $\alpha = a - 1$, c'est-à-dire $a = \alpha + 1$ et $\alpha > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli à savoir : « $\left(\forall (x,n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}\right)\ (1+x)^n \geq 1 + nx$ », on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n \geq 1 + n\alpha$ et donc $a^n > n\alpha$.

  Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $n \leq n^p$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$

Exemples

1) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{4}\right)^n = +\infty$ car $\frac{7}{4} > 1$.

2) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$ car $5 \in \mathbb{N}^*$.

Applications

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2017}{2016}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^n$; 3) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{2017}$; 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^3 + 2^n\right)$; 5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^n + 2^n}{3^n}$

2.3. CONVERGENCE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Définition 6

Étant donné une suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers ℓ, ou encore converge vers ℓ, si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à partir d'un certain rang. En d'autres termes :

$$\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists N \in \mathbb{N}\right); \left(\forall n \geq N\right)\ \left|u_n - \ell\right| < \varepsilon$$

Et on écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$

Définition 7

On dit qu'une suite numérique est convergente si elle admet une limite réelle. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

Scanné avec CamScanner

Exemple

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$. Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

Soit $\varepsilon > 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - 3| = \left|\dfrac{3n-1}{n+1} - 3\right| = \dfrac{4}{n+1}$

Pour avoir $|u_n - 3| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $\dfrac{4}{n+1} < \varepsilon$, c'est-à-dire que $\dfrac{4}{\varepsilon} < n+1$, et donc $\dfrac{4}{\varepsilon} - 1 < n$.

On pose $N = E\left(\left|\dfrac{4}{\varepsilon} - 1\right|\right) + 1$. On a alors pour tout $n \geq N$: $n > \left|\dfrac{4}{\varepsilon} - 1\right|$, et donc $n > \dfrac{4}{\varepsilon} - 1$.

On a montré donc que : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,\left(n \geq N \Rightarrow |u_n - 3| < \varepsilon\right)$. Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

Applications

1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. Montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) On considère les deux suites (v_n) et (w_n) définies par : $v_n = \dfrac{7n-2}{3n+4}$ et $w_n = \dfrac{2n^2 - \sin n}{n^2+3}$

Montrer en utilisation la définition que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{7}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$

2.4. CONVERGENCE DES SUITES USUELLES

Proposition 4

Les suites $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2.5. UNICITÉ DE LA LIMITE

Proposition 5

La limite d'une suite numérique, lorsqu'elle existe, est unique.

Preuve

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ possède deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2.

En posant $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} > 0$, on obtient par la définition de la limite :

$\left[(\exists N_1 \in \mathbb{N});(\forall n \in \mathbb{N})\,\left(n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| < \varepsilon\right)\right]$ et $(\exists N_2 \in \mathbb{N})\,;(\forall n \in \mathbb{N})\,\left(n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - \ell_2| < \varepsilon\right)$

Scanné avec CamScanner

Soit $N = \sup(N_1, N_2)$. On a d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$:

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leq 2\varepsilon$$

On obtient alors $|\ell_1 - \ell_2| \leq \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$, ce qui est absurde. D'où le résultat.

Proposition 6

Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

Preuve

- Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite convergeant vers un réel ℓ. La définition de la convergence appliquée par exemple pour $\varepsilon = 1$, nous permet de fixer un rang N tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < 1$$
$$\Rightarrow \ell - 1 < u_n < \ell + 1$$

On constate alors que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée par le réel $M = \max\{u_{n_0}, ..., u_{N-1}, \ell + 1\}$ et minorée par le réel $m = \min\{u_{n_0}, ..., u_{N-1}, \ell - 1\}$. Il s'ensuit donc la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée.

- La réciproque est fausse : par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée mais non convergente.

2.6. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Proposition 7

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites numériques convergentes. Alors :

- La suite $(u_n + v_n)_{n \geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim(u_n + v_n) = \lim(u_n) + \lim(v_n)$.
- La suite $(u_n v_n)_{n \geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim(u_n v_n) = \lim(u_n) \times \lim(v_n)$.
- Si $\lim(v_n) \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim(u_n)}{\lim(v_n)}$.

Preuve

Supposons que $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ sont convergentes et posons $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$ où $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$.

- Montrons que la suite $(u_n + v_n)_{n \geq n_0}$ est convergente vers $\ell + \ell'$:

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$ alors :

$$\left[(\exists N_1 \in \mathbb{N}); (\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \text{ et } \left[(\exists N_2 \in \mathbb{N}); (\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

En choisissant $N = \sup(N_1, N_2)$ on obtient : $n \geq N \Rightarrow |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \varepsilon$

Scanné avec CamScanner

Par conséquent, la suite $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $\ell + \ell'$.

- Montrons que la suite $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente vers $\ell\ell'$:

Comme la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente alors elle est bornée. Donc, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$ alors :

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N});(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2M} \right)$$

$$(\exists N_2 \in \mathbb{N});(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)} \right)$$

En choisissant $N = \sup(N_1, N_2)$, on obtient : $n \geq N \Rightarrow |u_n v_n - \ell.\ell'| \leq |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')|$

Par conséquent : $n \geq N \Rightarrow |u_n v_n - \ell.\ell'| \leq |v_n||u_n - \ell| + |\ell||v_n - \ell'|$

C'est-à-dire : $n \geq N \Rightarrow |u_n v_n - \ell.\ell'| \leq M|u_n - \ell| + (|\ell|+1)|v_n - \ell'|$

Par suite : $n \geq N \Rightarrow |u_n v_n - \ell.\ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |u_n v_n - \ell.\ell'| < \varepsilon$

Ainsi, la suite $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $\ell\ell'$.

- Montrons que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ est convergente vers $\frac{\ell}{\ell'}$: (on suppose ici que $v_n \neq 0$ et $\ell' \neq 0$)

Puisque $\frac{|\ell'|}{2} > 0$ alors : $(\exists N_1 \in \mathbb{N});(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq N_1 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \frac{|\ell'|}{2} \right)$

Puisque $\big||v_n| - |\ell'|\big| \leq |v_n - \ell'|$ alors : $(\exists N_1 \in \mathbb{N}); \left(n \geq N_1 \Rightarrow \big||v_n| - |\ell'|\big| < \frac{|\ell'|}{2} \right)$

Donc pour tout $n \geq N_1$: $|v_n| > \frac{|\ell'|}{2}$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim v_n = \ell'$ alors : $(\exists N_2 \in \mathbb{N}) ; (\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon.\ell'^2}{2} \right)$

En choisissant $N = \sup(N_1, N_2)$, on obtient : $n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \frac{|v_n - \ell'|}{|v_n||\ell'|} < \frac{\varepsilon\ell'^2}{|\ell'^2|}$

C'est-à-dire : $n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| < \varepsilon$. Par conséquent : $\lim \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell'}$

Enfin : $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim u_n \times \frac{1}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$, ce qui achève la démonstration.

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = 3 - \frac{1}{n} + \frac{4}{\sqrt{n}}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3 - \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 3$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 0$)

2) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \frac{2\sqrt{n}+7}{3n-2}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left(2+\frac{7}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{2+\frac{7}{\sqrt{n}}}{3-\frac{2}{n}}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{\sqrt{n}} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Applications

Calculer la limite de chacune des suites suivantes définies par :

$u_n = \frac{2\sqrt{n}-7}{7\sqrt{n}+3}$; $v_n = \frac{n^2-3n+4}{n^2+5n+7}$; $w_n = \frac{2n-3}{n^3+3n^2+1}$; $x_n = \frac{(n+4)(-3n^2+1)}{5n^3+8n}$

2.7. EXTENSION DES OPÉRATIONS SUR LA LIMITE DE SUITE

On admet que les résultats sur les limites des fonctions restent valables pour les limites des suites :

- Limite d'une somme :

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

- Limite d'un produit :

$\lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim(u_n \times v_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

Scanné avec CamScanner

➢ **Limite d'une inverse :**

$\lim u_n$	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$\lim \frac{1}{\lvert u_n \rvert} = +\infty$

2.8. LIMITES ET ORDRE

Proposition 8

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques convergentes. Alors :

- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est positive alors $\lim u_n \geq 0$.
- Si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$ alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Preuve

Supposons que les suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ convergent et posons $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$ où $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$

- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est positive alors on a $u_n = |u_n|$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ converge vers $|\ell|$ (cela revient en fait de l'inégalité $\big||u_n| - |\ell|\big| \leq |u_n - \ell|$ et de la définition de convergence d'une suite), et par unicité de la limite, on en déduit que $|\ell| = \ell$, c'est-à-dire que $\ell \geq 0$.
- Si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors en posant $w_n = v_n - u_n$, la suite $(w_n)_{n\geq n_0}$ est positive et convergente. Comme $\lim w_n \geq 0$ et $\lim w_n = \lim v_n - \lim u_n$ alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Remarque

- Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite convergente dont on souhaite montrer que sa limite est strictement positive, alors il suffit de chercher un réel $m > 0$ tel que $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang.

2.9. MONOTONIE ET CONVERGENCE

Théorème 1

- **Toute suite croissante majorée est convergente.**
- **Toute suite décroissante minorée est convergente.**

Ce résultat porte le nom de « Théorème de la convergence monotone »

Remarque

- **Le théorème ci-dessus assure la convergence de la suite mais ne détermine pas sa limite.**

Scanné avec CamScanner

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \le u_n \le 2$

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$; donc $0 \le u_0 \le 2$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \le u_n \le 2$ et montrons que $0 \le u_{n+1} \le 2$.

On a : $0 \le u_n \le 2 \Rightarrow 2 \le 2+u_n \le 4 \Rightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{2+u_n} \le 2 \Rightarrow 0 \le u_{n+1} \le 2$

• Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \le u_n \le 2$

Étudions maintenant la monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = \dfrac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n} = \dfrac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}$

Comme $0 \le u_n \le 2$ alors $\dfrac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n} \ge 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $u_{n+1} - u_n \ge 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante majorée par 2, donc elle est convergente.

Applications

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4u_n}$

est décroissante et minorée par $\dfrac{3}{2}$. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (u_n) ?

2. Soit $(v_n)_{n\ge1}$ la suite numérique définie par : $v_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$

a) Montrer que pour tout entier $k \ge 2$, $k! \ge 2^{k-1}$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\ge1}$ est majorée.

b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\ge1}$ est croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

Proposition 9

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Preuve

• Soit $(u_n)_{n\ge n_0}$ une suite croissante.

Si elle est non majorée alors : $(\forall A > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ ;\ u_N > A$. Comme $(u_n)_{n\ge n_0}$ est croissante alors pour tout entier $n \ge N$, $u_n \ge u_N > A$. Par conséquent : $(\exists N \in \mathbb{N});(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > A$

Par définition de la limite d'une suite tendant vers $+\infty$, on en déduit que $\lim u_n = +\infty$.

• Si $(u_n)_{n\ge n_0}$ est une suite décroissante non minorée alors $(-u_n)_{n\ge n_0}$ est une suite croissante non majorée.

Comme $\lim(-u_n) = +\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$. Ce qui achève la démonstration.

Scanné avec CamScanner

3 CRITÈRES DE CONVERGENCE

3.1. EXISTENCE DE LA LIMITE PAR ENCADREMENT

Théorème 2

Soit $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques convergeant vers une limite commune ℓ.

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite vérifiant l'encadrement $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge et sa limite vaut ℓ. Ce résultat est appelé « Théorème des gendarmes »

Preuve

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites numériques. Supposons que $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ convergent vers une même limite ℓ et qu'à partir d'un certain rang N_1, $v_n \leq u_n \leq w_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la convergence d'une suite :

$$\left[(\exists N_2 \in \mathbb{N});\left(n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon\right)\right] \quad \text{et} \quad \left[(\exists N_3 \in \mathbb{N});\left(n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - \ell| < \varepsilon\right)\right]$$

Par conséquent, à partir du rang $\max(N_2, N_3)$: $\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon$ et $\ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon$

Comme $v_n \leq u_n \leq w_n$, à partir du rang N_1, alors à partir du rang $N = \max(N_1, N_2, N_3)$:

$$\ell - \varepsilon < v_n \leq u_n \leq w_n < \ell + \varepsilon$$

Par conséquent : $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ ; (\forall n \in \mathbb{N})\ \left(n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\right)$

Ce qui revient à dire que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge et sa limite vaut ℓ.

Exemple

Montrons que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$ converge, et déterminons sa limite :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $\frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}$

En sommant ces n encadrements, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}$

ce qui donne $\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}} = 1$ alors la suite (u_n) est convergente, et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Scanné avec CamScanner

Applications

1. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\sin(n)}{n+1}$

   Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Calculer les limites des suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par : $v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{n^2+k}$ et $w_n = \sum_{k=1}^{3n+1} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}$

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique et ℓ un nombre réel. S'il existe une suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ tendant vers 0 telle que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq v_n$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge et sa limite vaut ℓ.

Proposition 10

Soit r un nombre rationnel non nul.

- Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = +\infty$.
- Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = 0$.

Exemples

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{6}} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{7}} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{2}{3}} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{20}{17}} = 0$

3.2. LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Proposition 11

Soit q un nombre réel non nul.

- Si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$.
- Si $q \leq -1$ alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Exemples

1) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$. De même : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < -\dfrac{1}{4} < 1$.

2) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{3}{2} > 1$. Par contre, la suite $\left(\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

Scanné avec CamScanner

4 SUITES DE LA FORME $U_{n+1}=f(U_n)$ ET $V_n=f(U_n)$

4.1. SUITE DE LA FORME $U_{n+1}=f(U_n)$

Proposition 12

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I)\subset I$.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle définie par $u_{n_0}\in I$ et $(\forall n\geq n_0)\ u_{n+1}=f(u_n)$.

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente de limite ℓ et $\ell\in I$, alors ℓ est solution dans I de l'équation $f(x)=x$.

Preuve

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$. Soit ε un nombre strictement positif.

Puisque f est continue en ℓ alors : $(\exists\alpha>0);(\forall x\in I)\left(|x-\ell|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(\ell)|<\varepsilon\right)$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ alors : $(\exists n_0\in\mathbb{N});(\forall n\geq n_0)\ \left(|u_n-\ell|<\alpha\right)$

Il est aisément facile de montrer par récurrence que pour tout entier $n\geq n_0$, $u_n\in I$.

On a : $(\exists n_0\in\mathbb{N});(\forall n\geq n_0)\ \left(|f(u_n)-f(\ell)|<\varepsilon\right)$. Ce dernier résultat est valable pour tout $\varepsilon>0$.

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(\ell)$. Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$ alors $f(\ell)=\ell$. D'où le résultat.

Exemple

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

Étudions la convergence de la suite (u_n).

On considère la fonction numérique f définie sur $I=[0;1]$ par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

- La fonction f est continue et croissante sur I, donc : $f(I)=[f(0);f(1)]=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]$.

  Par conséquent, $f(I)\subset I$.

- Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq 1$:

  Initialisation: Pour $n=0$, on a $u_0=1$ donc $0\leq u_0\leq 1$.

  Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $0\leq u_n\leq 1$ et montrons que $0\leq u_{n+1}\leq 1$

  On a $0\leq u_n\leq 1$, c'est-à-dire $u_n\in I$, donc $f(u_n)\in f(I)$. Et comme $f(I)\subset I$ alors $u_{n+1}\in I$, d'où $0\leq u_{n+1}\leq 1$.

  Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq 1$

Scanné avec CamScanner

- Étudions la monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - u_n = \left(\frac{1+u_n}{2} - u_n^2\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n} = \frac{1+u_n-2u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)} = -\frac{(2u_n+1)(1-u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)}$$

Puisque $0 \le u_n \le 1$ alors $-\dfrac{(2u_n+1)(1-u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n\right)} \le 0$, et donc $u_{n+1} - u_n \le 0$. La suite (u_n) est décroissante.

- Puisque la suite (u_n) est décroissante minorée par 0 alors elle est convergente. Soit ℓ sa limite.

D'après la proposition 12, la limite ℓ vérifie : $f(\ell) = \ell$ et $0 \le \ell \le 1$

On a : $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+\ell}{2}} = \ell \Leftrightarrow 2\ell^2 - \ell - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\ell = 0 \text{ ou } \ell = -\frac{1}{2}\right)$

Et comme $0 \le \ell \le 1$ alors $\ell = 0$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

Application

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{5}{2}u_n(1-u_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

4.2. LIMITE D'UNE SUITE DE LA FORME $V_n = f(U_n)$

Proposition 13

Si une suite (u_n) est convergente vers ℓ et f est une fonction continue en ℓ alors la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente et sa limite est $f(\ell)$.

Exemple

Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \tan\left(\frac{\pi n+1}{3n+2}\right)$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{\pi n+1}{3n+2}$. On a donc $v_n = f(u_n)$ avec $f(x) = \tan x$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi n+1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi + \frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{\pi}{3}$. Puisque la fonction f est continue en $\frac{\pi}{3}$ alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

En résumé : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{3}$.

Scanné avec CamScanner

Applications

Déterminer les limites des suites définies par :

$$u_n = \sqrt[3]{\frac{24n^4 - n + 1}{3n^4 - n^2 - 7}} \quad ; \quad v_n = \sqrt[4]{\frac{16n^3 - 3n + 1}{2n^2 + 1}} \quad ; \quad w_n = \cos\left(\frac{n\pi - 2}{n^2 + 1}\right) \quad ; \quad t_n = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

5 SUITES ADJACENTES

Définition 8

On dit que deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont adjacentes si une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites numériques définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{-2}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

On a $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante, $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n} = 0$.

Par conséquent, les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Applications

On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Proposition 14

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes alors elles sont convergentes et ont la même limite.

Preuve

Soit (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. Supposons que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

Comme (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, la suite $(u_n - v_n)$ est croissante. Comme de plus elle tend vers 0, elle est à valeurs négatives, ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.

On en déduit que la suite (u_n) est majorée par v_0 puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq v_0$.

Comme elle est croissante alors elle convergente.

De même, la suite (v_n) étant décroissante et minorée par u_0, elle converge.

Enfin, l'écriture $v_n = u_n + (v_n - u_n)$ permet de prouver que (v_n) converge et nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n \quad (\text{car } \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0)$$

Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Scanné avec CamScanner

Exemple

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites numériques définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$$

On montre facilement que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. On a de plus :

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

Il s'ensuit donc que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, donc elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite.

Applications

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a<b$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \end{cases},\ \forall n\in\mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\leq v_n$
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(v_n-u_n)$
4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Montrer que la suite (u_nv_n) est constante, et en déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Scanné avec CamScanner

A MONOTONIE D'UNE SUITE

Dans les cas suivants, étudier la monotonie de la suite (u_n) :

a) $u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n \quad (n \in \mathbb{N})$; **b)** $u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$; **c)** $u_n = \frac{n^2}{3^n} \quad (n \geq 2)$

d) $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ avec $\theta \in]0;\pi[\quad (n \in \mathbb{N})$

SOLUTION

a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} - (n+1)\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - n\right) = \frac{1}{2^{n+1}} - 1$. Puisque $2^{n+1} \geq 1$ alors $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 1$ et donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. on peut donc en déduire que (u_n) est une suite décroissante.

b) Pour étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

1ère méthode : On a pour tout entier $n \geq 1$,

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-n-2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}$; d'où $u_{n+1} - u_n < 0$.

On en déduit donc que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

2ème méthode : On pose $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ alors : $\forall n \geq 1,\ u_n = f(n)$. On étudie alors la monotonie de la fonction f sur $[1;+\infty[$.

f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f'(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} < 0$. Donc la fonction f est décroissante sur $[1,+\infty[$.

Considérons $n \geq 1$, alors $1 \leq n \leq n+1$ donc $f(n) \geq f(n+1)$ d'où $u_n \geq u_{n+1}$.

On en déduit donc que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

c) On a pour tout $n \geq 2$, $u_n > 0$. Étudions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On a pour tout $n \geq 2$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

Puisque $n \geq 2$ alors $1 + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$ et donc $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{3}{4}$. Il s'ensuit donc que : $\forall n \geq 2, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

On en déduit donc que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

d) On a pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) - 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 2^n\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$$

Scanné avec CamScanner

Or $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)=\sin\left(2\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)=2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$, ce qui donne :

$$u_{n+1}-u_n=2^{n+1}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)-\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right)=2^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\left(1-\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right)$$

De plus, sachant que $\theta\in\left]0,\pi\right[$ alors $\frac{\theta}{2^{n+1}}\in\left]0,\pi\right[$ donc $\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\geq 0$ et $1-\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\geq 0$.

Il s'ensuit donc que $u_{n+1}-u_n\geq 0$. Ainsi, la suite $\left(u_n\right)$ est croissante.

Remarque : On pourra aussi étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. En effet, on montre facilement que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$

et de plus : $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}=\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}\geq 1$$

Ce qui montre que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante.

- Pour étudier la monotonie d'une suite $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$, on dispose de plusieurs méthodes selon l'expression des termes de la suite $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$:

Méthode 1 : On étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$: cette méthode est particulièrement intéressante lorsque u_n s'écrit avec des sommes.

Méthode 2 : Si la suite $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ est strictement positive, on peut alors étudier la position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1. On a alors : $\left[\left(u_n\right)_{n\geq n_0}\text{ est croissante }\right]\Leftrightarrow\forall n\geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$

Cette méthode est particulièrement intéressante lorsque u_n s'écrit avec des produits, factorielles, ...

Méthode 3 : Si $u_n=f\left(n\right)$, alors on étudie la monotonie de la fonction f sur $\left[n_0,+\infty\right[$.

Si f est croissante sur $\left[n_0,+\infty\right[$ on montre facilement que $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ est croissante.

Si f est décroissante sur $\left[n_0,+\infty\right[$ on montre facilement que $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ est décroissante.

B CRITÈRES DE CONVERGENCE

1) Dans chacun des exemples suivants, montrer que la suite, dont le terme générale u_n converge et calculer sa limite :

a) $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$; b) $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\left(kx\right)\ \left(x\in\mathbb{R}^*\right)$; c) $u_n=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^{-1}\ \left(n\geq 5\right)$

2) On considère la suite la suite $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

Démontrer que la suite $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ est monotone puis démontrer que cette suite converge.

Scanné avec CamScanner

3) On considère la suite (w_n) définie par : $w_0 = \frac{1}{2}$ et $w_{n+1} = w_n + \frac{1}{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que (w_n) est croissante puis montrer qu'elle est divergente.

4) On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $S_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$

a) Justifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 1.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$: $\sum_{k=1}^{n-1} k! \leq (2n-3).(n-2)!$

c) En déduire que pour tout $n \geq 3$, $S_n \leq 1 + \frac{2n-3}{n(n-1)}$. Déterminer alors la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

SOLUTION

1) a) Soit $k \in \{1,2,....,n\}$. De $1 \leq k \leq n$, on en déduit les implications suivantes :

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow 0 < n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n \Rightarrow \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

Et alors : $1 \leq k \leq n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

Or : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$. D'après le théorème de la limite par encadrement (appelé aussi théorèmes des gendarmes), on en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

b) Puisque : $(\forall t \in \mathbb{R})\ t-1 < E(t) \leq t$, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < u_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx)$

c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{n+1}{2n}x$

On conclut, par le théorème de la limite par encadrement : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}$

c) On a pour tout entier $n \geq 5$:

$$u_n = (C_n^0)^{-1} + (C_n^1)^{-1} + \sum_{k=2}^{n-2}(C_n^k)^{-1} + (C_n^{n-1})^{-1} + (C_n^n)^{-1} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=2}^{n-2}(C_n^k)^{-1}$$

Comme : $k \in \{2,....,n-2\}$, $C_n^k \geq C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$; alors : $0 \leq \sum_{k=2}^{n-2}(C_n^k)^{-1} \leq \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{2(n-3)}{n(n-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n-1} = 0$, alors d'après le théorème de la limite par encadrement

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n-2}(C_n^k)^{-1} = 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

Scanné avec CamScanner

- Pour montrer qu'une suite (u_n) converge et trouver sa limite, on essaie d'exprimer le terme général u_n de façon à pouvoir appliquer les théorèmes généraux comme :
  - Les théorèmes d'encadrement :

$$\begin{cases} v_n \le u_n \le w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad ; \quad \begin{cases} |u_n - \ell| \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

  - Les opérations sur les limites :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell' \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell\ell' \end{cases} ; \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{v_n} = \sqrt{\ell'} \end{cases}$$

  - Utilisation des limites des fonctions numériques : $\begin{cases} u_n = f(n) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

- Pour encadrer un produit, il suffit parfois d'encadrer chacun des facteurs du produit.
- On retiendra que lorsque l'on « passe » aux limites dans des inégalités, on perd les inégalités strictes.
- Il ne faut pas « passer » à la limite dans des inégalités avant de prouver que toutes les suites concernées convergent.

2) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+$

Il s'ensuit donc : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(2n+1)+(2n+2)-2(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)} \ge 0$

On en déduit donc que la suite $(v_n)_{n\ge1}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \le k \le n$. On a $0 < n+1 \le 2n$. Alors $\dfrac{1}{2n} \le \dfrac{1}{n+k} \le \dfrac{1}{n+1}$, donc : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} \le v_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \le \dfrac{n}{n+1} \le 1$. La suite $(v_n)_{n\ge1}$ est croissante majorée par 1, donc elle est convergente.

- Pour encadrer une somme, il suffit parfois d'encadrer chacun des termes de la somme.
- Lorsque l'on sait qu'une suite (u_n) est croissante (respectivement décroissante) pour démontrer qu'elle est convergente, il suffit de montrer qu'elle est majorée (respectivement minorée).

3) Une démonstration par récurrence permet de montrer facilement que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{w_n} > 0$. Par conséquent, la suite (w_n) est croissante.

Supposons que la suite (w_n) converge vers une valeur α.

Comme la suite (w_n) est croissante et $w_0 = 0,5$ on a $\alpha \ge 0,5$.

Scanné avec CamScanner

TECHNIQUES ET ASTUCES

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = f(w_n)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{n+1} = \alpha$, de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(w_n) = f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$. On en déd

que α est solution de l'équation $\alpha = \alpha + \frac{1}{\alpha}$, or cette équation n'a pas de solution. Donc la suite (w_n) ne converge pas, de plus elle croissante, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

- Pour montrer qu'une suite (u_n) diverge, on essaye d'exprimer le terme général u_n de façon à pouvoir appliquer les théorèmes généraux comme :
  - Les théorèmes d'encadrement :

$$\begin{cases} v_n \le u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad ; \quad \begin{cases} u_n \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

  - Les opérations sur les limites : (A titre d'exemple)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \pm\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \pm\infty \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = +\infty \end{cases}$$

  - Utilisation des limites des fonctions numériques : $\begin{cases} u_n = f(n) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$

- On peut aussi utiliser le raisonnement par l'absurde en supposant que la suite (u_n) est convergente et amener à une contradiction. Cette méthode est praticable pour les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où (u_n) est strictement monotone et l'équation $x = f(x)$ n'admet pas de solutions réelles dans un intervalle I tel que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$.
- Signalons enfin un résultat intéressant pour les suites monotones qui affirme :
  - Si la suite (u_n) est croissante non majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  - Si la suite (u_n) est décroissante non minorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Scanné avec CamScanner

$1!+2!+\ldots+(n-2)!+(n-1)!\leq(n-2+n-1).(n-2)!$ et par suite : $\sum_{k=1}^{n-1}k!\leq(2n-3).(n-2)!$

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On a : $S_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}k!+1$

Puisque : $\sum_{k=1}^{n-1}k!\leq(2n-3)(n-2)!$ alors $\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}k!\leq\frac{2n-3}{n(n-1)}$. Par suite : $S_n\leq1+\frac{2n-3}{n(n-1)}$

Calculons maintenant $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$: On a pour tout entier $n\geq3$, $1\leq S_n\leq1+\frac{2n-3}{n(n-1)}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{2n-3}{n(n-1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{2-\frac{3}{n}}{n-1}=1$ alors on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$.

C ÉTUDE D'UNE SUITE DÉFINIE IMPLICITEMENT

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère l'équation : $(F_n):x^n+5x-1=0$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation (F_n) admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}^*$.

On note β_n cette solution.

2) a) Calculer β_0, β_1 et β_2.

b) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq\beta_n\leq\frac{1}{5}$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\beta_n)^n=0$.

d) En utilisant l'équation satisfait par β_n, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$.

3) On souhaite maintenant déterminer la monotonie de la suite (β_n).

Pour cela, on considère la fonction f_n définie sur $[0;1[$ par : $f_n(x)=x^n+5x-1$

a) Montrer que pour tout $x\in[0;1[$: $f_{n+1}(x)<f_n(x)$

b) En évaluant cette inégalité en $x=\beta_n$, déterminer le signe de $f_{n+1}(\beta_n)$.

c) Que vaut $f_{n+1}(\beta_{n+1})$? Déduire de cette question et de la précédente que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$f_{n+1}(\beta_n)<f_{n+1}(\beta_{n+1})$

d) Quelle est la monotonie de la suite (β_n) ?

SOLUTION

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère l'équation : $(F_n):x^n+5x-1=0$

1) Pour chaque $n\in\mathbb{N}$ fixé, la fonction polynomiale g_n définie par $g_n(x)=x^n+5x-1$, est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ car pour tout $(a,b)\in(\mathbb{R}^+)^2$ tel que $a<b$ alors :

$a^n+5a-1<b^n+5b-1$, et donc $g_n(a)<g_n(b)$.

Scanné avec CamScanner

Il s'ensuit alors, d'après le théorème de la bijection que g_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur l'intervalle $g_n(\mathbb{R}^+) = \left[g_n(0); \lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) \right[= [-1; +\infty[$. Puisque $0 \in [-1; +\infty[$, alors l'équation $g_n(x) = 0$, c'est-à-dire l'équation (F_n), admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}^+$, notée β_n.

2) a) Calcul de β_0, β_1 et β_2 :

β_0 est l'unique solution dans $\mathbb{R}^+$ de $(F_0) : x^0 + 5x - 1 = 0$, c'est-à-dire $(F_0) : 5x = 0$, ce qui donne $\beta_0 = 0$

β_1 est l'unique solution dans $\mathbb{R}^+$ de $(F_1) : x^1 + 5x - 1 = 0$, c'est-à-dire $(F_1) : 6x - 1 = 0$, ce qui donne $\beta_1 = \frac{1}{6}$

β_2 est l'unique solution dans $\mathbb{R}^+$ de $(F_2) : x^2 + 5x - 1 = 0$, ce qui donne $\beta_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{29}}{2}$.

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta_n \leq \frac{1}{5}$.

On sait que β_n est l'unique solution de l'équation (F_n), donc $\beta_n^n + 5\beta_n - 1 = 0$ e $\beta_n \geq 0$.

On en déduit donc que $(\beta_n)^n = 1 - 5\beta_n$, et alors $1 - 5\beta_n \geq 0$, d'où $0 \leq \beta_n \leq \frac{1}{5}$.

c) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta_n \leq \frac{1}{5}$, ce qui entraîne que $0 \leq (\beta_n)^n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Mais comme $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\beta_n)^n = 0$.

d) On a déjà remarqué dans 2)b) que $(\beta_n)^n = 1 - 5\beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (\beta_n)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - 5\beta_n) = 0$, et alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = \frac{1}{5}$.

3) On considère la fonction f_n définie sur $[0,1[$ par : $f_n(x) = x^n + 5x - 1$

a) On a pour tout $x \in [0;1[$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$

Puisque $x^n(x-1) < 0$ alors $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$, d'où $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ pour tout $x \in [0;1[$.

b) En évaluant cette inégalité en $x = \beta_n$, on obtient $f_{n+1}(\beta_n) < f_n(\beta_n)$. Comme $f_n(\beta_n) = 0$ alors $f_{n+1}(\beta_n) < 0$.

c) Puisque β_{n+1} est solution de $f_{n+1}(x) = 0$ alors $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$.

Puisqu'on a déjà montré que $f_{n+1}(\beta_n) < 0$ et $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$ alors $f_{n+1}(\beta_n) < f_{n+1}(\beta_{n+1})$.

d) On sait que pour la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[0;1[$, il s'ensuit donc que $\beta_n < \beta_{n+1}$.

On peut en déduire donc que la suite (β_n) est strictement croissante.

- Pour comparer deux éléments d'un intervalle I, on peut comparer leurs images par une fonction f strictement monotone sur I. Plus précisément : soient $(x, y) \in I^2$.

  Si f est strictement croissante sur I avec $f(x) \leq f(y)$ alors $x \leq y$.

  Si f est strictement décroissante sur I avec $f(x) \leq f(y)$ alors $x \geq y$.

Scanné avec CamScanner

D GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES RÉCURRENTES

On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to I$ continue sur I.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \in I$

2) On suppose dans cette question que f est croissante sur I.

a) Démontrer que (u_n) est monotone (Étudier deux cas selon la position relative de u_0 et u_1)

b) On suppose que I est un segment, $I = [a,b]$. Démontrer que la suite (u_n) est convergente déterminer une équation satisfaite par sa limite α.

3) On suppose dans cette question que f est décroissante sur I. On pose : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont monotones et qu'elles ont des sens de variations contraires.

SOLUTION

1) Démontrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})u_n \in I$. Posons $P(n) : u_n \in I$

Par hypothèse $u_0 \in I$, $P(0)$ est vraie. Supposons que pour un entier n fixé avec $n \geq 0$, $u_n \in I$.

Par définition $f(u_n) \in f(I)$. Or, par hypothèse $f(I) \subset I$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in I$, ce qui prouve que $P(n+1)$ est vraie. On peut donc conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

2) a) Nous allons démontrer que si $u_0 \leq u_1$ alors la suite (u_n) est croissante.

et si $u_0 \geq u_1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

- Supposons $u_0 \leq u_1$:

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq u_{n+1}$. Notons : $P(n) : u_n \leq u_{n+1}$

Par hypothèse $u_0 \leq u_1$; donc $P(0)$ vraie.

Supposons que $P(n)$ vraie pour un entier n fixé. On a $u_n \leq u_{n+1}$ et f est croissante sur I donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$; d'où par définition $u_{n+1} \leq u_{n+2}$; donc $P(n+1)$ est vraie.

On peut donc en conclure que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq u_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

- Supposons $u_0 \geq u_1$:

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq u_{n+1}$. Notons : $P(n) : u_n \geq u_{n+1}$

Par hypothèse $u_0 \geq u_1$; donc $P(0)$ vraie.

Supposons que $P(n)$ vraie pour un entier n fixé. On a $u_n \geq u_{n+1}$ et f est croissante sur I ; donc $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$; d'où par définition $u_{n+1} \geq u_{n+2}$; donc $P(n+1)$ est vraie.

On peut donc en conclure que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq u_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

b) D'après la question précédente la suite (u_n) est monotone. De plus : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \in [a,b]$. donc la suite

Scanné avec CamScanner

(u_n) est bornée. La suite (u_n) est monotone et bornée (donc soit croissante majorée par b, soit décroissante minorée par a) ce qui prouve que la suite (u_n) est convergente.

Par définition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \alpha$, de plus $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ car f est continue sur I donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\alpha)$ et sachant que par définition $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit que $\alpha = f(\alpha)$.

Donc : α est solution de l'équation $f(x) = x$.

3) Supposons que $u_0 \leq u_2$.

Démontrons que (v_n) est une suite croissante et (w_n) est une suite décroissante.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$. Notons : $P(n)$: $v_n \leq v_{n+1}$

Par hypothèse $u_0 \leq u_2$; donc $v_0 \leq v_1$ et alors $P(0)$ vraie.

Supposons que $P(n)$ vraie pour un entier n fixé. Donc $v_n \leq v_{n+1}$ et f est décroissante sur I ; donc $f(v_n) \geq f(v_{n+1})$ et en composant à nouveau par f, on obtient : $f(f(v_n)) \leq f(f(v_{n+1}))$; ce qui donne $v_{n+1} \leq v_{n+2}$. on peut donc en conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$. La suite (v_n) est donc croissante.

On montre de même que la suite (w_n) est décroissante.

Si maintenant on suppose $u_0 \geq u_2$, on montre avec une méthode similaire que (v_n) est décroissante et que (w_n) est croissante.

On peut conclure : les suites (v_n) et (w_n) sont monotones et qu'elles ont des sens de variations contraires.

- Si aucune indication n'est donnée et si les deux suites ont un véritable lien, on peut espérer prouver que ce sont deux suites adjacentes et par conséquent, deux suites convergeant vers la même limite.

- Soit donc (u_n) et (v_n) deux suites à étudier. La situation la plus fréquente, statistiquement parlant, est celle où l'on arrive à montrer que :

  <u>1ère étape :</u> (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante (ou le contraire)

  <u>2ème étape :</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

  Pour prouver que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, il y a deux façons de faire :

  - Ou bien on étudie cette suite et on montre qu'elle tend vers 0 par calcul de limites ou encadrements, etc.
  - Ou bien on appelle ℓ_1 et ℓ_2 les limites de ces suites et en passant aux limites dans les relations de définitions, on montre que $\ell_1 = \ell_2$.

- Là encore, on obtient uniquement le caractère qualitatif du problème : la convergence des deux suites étudiées. La valeur de la limite commune – qui ne peut d'ailleurs pas toujours se déterminer explicitement- est à étudier dans un deuxième temps seulement. L'unique résultat immédiat est l'encadrement de la limite commune ℓ de (u_n) et (v_n) :

  « Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \ell \leq v_n$ »

Scanné avec CamScanner

EXERCICES D'APPLICA

LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

EXERCICE 01

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) les suites définies par :

$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2+n}}$ et $v_n = \dfrac{3n+1}{n-1}$ et $w_n = n\sqrt{n}$

Montrer en utilisant la définition que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

EXERCICE 02

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3 - 5n^2 - 6n + 7\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2 - 6n^4}{2n^2 + 5}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 2}{4 - n^3}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2 - 8n^2 + 5n^3}{7n^3 - 3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 2}{4 - n^3}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2 - 8n^2 + 5n^3}{7n^3 - 3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3 - n + 4} - n\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Arctan}\sqrt[3]{n+6}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2 - n - \sqrt[3]{n} + 1\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{\frac{3}{5}} + n^{\frac{6}{7}}}{n^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{4}{9}}}$

EXERCICE 03

Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

$a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$; $b_n = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n + \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$

$c_n = \dfrac{7^n - 5^n}{3^n}$; $d_n = \dfrac{2^n - 1}{7^n + 1}$; $e_n = \dfrac{2^n - 5^n}{4^n + 9^n}$

$u_n = \left(\dfrac{7}{3}\right)^n - (2017)^n$; $v_n = \dfrac{4^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$

$w_n = \sqrt[3]{2^n} - \sqrt[3]{2^n}$; $x_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{2n-1}}$

UTILISATION DES CRITÈRES DE CO

EXERCICE 04

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n + (-1)^n}$$

1) Établir que pour tout $n \geq 2$: $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$

2) En déduire $\lim u_n$.

EXERCICE 05

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{\cos(3n)}{\sqrt{n}}$

1) Vérifier que : $(\forall n \geq 1)\ ,\ |u_n| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

EXERCICE 06

Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

$a_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \sin(n)$; $b_n = \dfrac{n - \sin n}{n + \sin n}$

$c_n = n + 1 - \sin(2n)$; $d_n = 2(-1)^n + 4n^2 + 3$

$u_n = \dfrac{3n}{5 + \cos n}$; $v_n = \dfrac{n - \cos n}{n^2 + 2n}$

$w_n = \sqrt[3]{2^n} - \sqrt[3]{2^n}$; $x_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{2n-1}}$

$y_n = \dfrac{3n + E(n)}{n + 5}$; $z_n = \dfrac{1}{n(3 - \sin n)}$

EXERCICE 07

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \dfrac{n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$

2) En déduire $\lim u_n$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 08

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$1 \leq u_n \leq 2$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

EXERCICE 09

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

Préciser alors la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 10

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

EXERCICE 11

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 1$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

SUITES DE TYPE $U_{n+1} = a\,U_n + b$

EXERCICE 12

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On pose : $v_n = 2 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que (v_n) est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

2) a) Déterminer v_n et u_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Exprimer S_n en fonction de n. Préciser $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

SUITES DE TYPE $V_n = f(U_n)$

EXERCICE 13

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

$a_n = \sqrt{\frac{3n-4}{2n+1}}$; $b_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$; $c_n = \sqrt{3^n - 2}$

$u_n = \cos\left(\frac{n\pi - 3}{2n+1}\right)$; $v_n = 4^n\left(1 - \cos\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$w_n = \pi 2^{n-1} - 2^n \operatorname{Arctan}(2^n)$; $x_n = \sqrt[3]{\frac{|-2n+1|}{n+1}}$

EXERCICE 14

1) Montre que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

2) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$u_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

a) Calculer $\lim u_n$.

b) Exprimer S_n en fonction de n. Préciser $\lim S_n$

Scanné avec CamScanner

SUITES DE TYPE $U_{n+1}=f(U_n)$

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur $I=\left[0;\frac{1}{4}\right]$ par :

$$f(x)=x^2+\frac{3}{4}x$$

1) Déterminer $f(I)$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=\frac{1}{5} \text{ et } u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\le u_n\le\frac{1}{4}$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que (u_n) est convergente.

d) Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 14

Soit g la fonction définie sur $I=]1;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}$$

1) Montrer que pour tout $x\in I$: $g(x)\ge 3$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=5 \text{ et } u_{n+1}=g(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n\ge 3$

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

EXERCICE 15

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=1 \text{ et } u_{n+1}=u_n+u_n^2 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) Montrer par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

SUITES ADJACENTES

EXERCICE 16

Dans chacun des cas suivants, montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes :

1) $u_n=\frac{2n}{n+2}$ et $v_n=2+\frac{1}{n!}$

2) $u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n.n!}$

3) $u_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{3n^2}$

EXERCICE 17

On considère les suites $(u_n)_{n\ge1}$ et $(v_n)_{n\ge1}$ définies par :

$$u_n=1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n=u_n+\frac{1}{n}$$

Montrer que $(u_n)_{n\ge1}$ et $(v_n)_{n\ge1}$ sont convergentes et ont la même limite.

EXERCICE 18

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases}u_0=a\\ u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}\ ,\ n\in\mathbb{N}\end{cases} \text{ et } \begin{cases}v_0=2a\\ v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}\ ,\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

où a est un réel strictement positif.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0<u_n<v_n$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXERCICE 19

Soit $(u_n)_{n\ge2}$ et $(v_n)_{n\ge2}$ les suites définies par :

$$u_n=2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad v_n=2^{n+1}\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Montrer que $(u_n)_{n\ge2}$ et $(v_n)_{n\ge2}$ sont adjacentes.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 22

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = \frac{2n - \cos\frac{\pi}{n}}{7n + \sin\frac{2\pi}{n}}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left|u_n - \frac{2}{7}\right| \leq \frac{9}{49n-7}$

2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

EXERCICE 23

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq \sqrt{n}$

2) Préciser la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

EXERCICE 24

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

1) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$

2) a) Vérifier que pour tout entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad \text{et que} \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 - \frac{1}{n} < u_n < 2$

c) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

EXERCICE 25

Soit a et b deux réels tels que $b \neq -a$.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$

Déterminer la limite de la suite (u_n) selon les valeurs des réels a et b.

EXERCICE 26

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 4$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(4 - u_n)$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 27

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - n - \frac{8}{3} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $v_n = u_n + \alpha n - 1$ où $\alpha \in$

Déterminer la valeur de α pour laquelle la suite (v_n) est géométrique.

Dans la suite, on prend pour α la valeur trouvée en

2) Calculer v_n et u_n en fonction de n.

3) Exprimer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

4) Exprimer $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

EXERCICE 28

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 2}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq \sqrt{3}$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 29

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 \in [0;1] \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \le u_n \le 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3) On pose : $u_0 = \cos\theta$ avec $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

a) Établir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 30

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = -2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n+5}{u_n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n < \sqrt{5}$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 31

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer u_n en fonction de n puis donner $\lim u_n$.

EXERCICE 32

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2 < u_n < 4$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4 - u_{n+1} \le \frac{4}{5}(4-u_n)$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4 - u_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$

a) Établir que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

Exprimer S_n en fonction de n puis conclure $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EXERCICE 33

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 2 \text{ et } \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = u_{n+1} + u_n$

Montrer que la suite (S_n) est géométrique puis en déduire l'expression de S_n en fonction de n.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = (-1)^n u_n \quad \text{et} \quad t_n = v_{n+1} - v_n$$

Exprimer t_n en fonction de S_n

3) a) Déterminer la somme $t_0 + t_1 + \ldots + t_{n-1}$ en fonction de n puis en déduire v_n et u_n en fonction de n.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2^n}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 34

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n = \sqrt{1 + v_n}$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \sqrt{3}$

et que (u_n) est convergente.

4) a) Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geq 3$: $2^{k+1} \geq (k+1)^2$

b) En déduire que : $(\forall k \geq 3)$, $u_{k+1}^2 - u_k^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$

c) En déduire que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie les inégalités : $\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \ell \leq \sqrt{3}$

EXERCICE 35

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 . On suppose que f vérifie : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) = f(2x)$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$

2) En déduire que f est une fonction constante.

EXERCICE 36

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \geq n+1$

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n.2^n}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent et ont la même limite.

EXERCICE 37

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2\pi \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} + \cos\left(\frac{\pi^2}{u_n}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

2) Montrer que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est arithmétique.

3) En déduire u_n en fonction n puis déterminer $\lim_{n\to+\infty}$

EXERCICE 38

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \quad \left(\alpha > \sqrt[3]{a} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}\right) \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{a}{u_n^2}\right) \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n > 0$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - \sqrt[3]{a} = \frac{2u_n + \sqrt[3]{a}}{3u_n^2}\left(u_n - \sqrt[3]{a}\right)^2$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > \sqrt[3]{a}$

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} - \sqrt[3]{a} \leq \frac{2}{3}\left(u_n - \sqrt[3]{a}\right)$

b) En déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} - \sqrt[3]{a} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(u_0 - \sqrt[3]{a}\right)$$

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 39

Soit (u_n) une suite croissante et majorée.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$

Montrer que la suite (v_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

Scanné avec CamScanner

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^3 + nx - 1$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique x_n dans l'intervalle $]0;1[$.

2) a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < \frac{1}{n}$. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

EXERCICE 41

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \text{ et } v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \text{ et } u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < v_n$

b) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2) a) Déterminer deux réels α et β pour lesquels les suites numérique (t_n) et (s_n) définies par :

$$t_n = u_n + \alpha v_n \text{ et } s_n = u_n + \beta v_n$$

sont géométriques.

b) Exprimer t_n et s_n en fonction de n.

3) Déterminer la limite commune de (u_n) et (v_n).

EXERCICE 42

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose :

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1$$

1) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha_n \in]0;+\infty[$.

2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$

EXERCICE 43

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4}|u_n - u_{n-1}|$

4) On considère les suites (α_n) et (β_n) définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \alpha_n = u_{2n} \text{ et } \beta_n = u_{2n+1}$$

a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \beta_n = 1 + \frac{1}{1+\alpha_n}$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \alpha_n \leq \beta_n$

c) Montrer que la suite (α_n) est croissante et la suite (β_n) est décroissante.

d) Monter que les suites (α_n) et (β_n) convergent et vers la même limite.

5) a) Monter que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4}|u_n - \sqrt{2}|$

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

c) Déterminer un entier naturel N à partir duquel :

$$(\forall n \geq N)\ |u_n - \sqrt{2}| < 10^{-2}$$

EXERCICE 44

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ , \ v_n = u_n - 2\sqrt{n+1} \ , \ w_n = u_n - 2\sqrt{n}$$

1) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

2) Montrer que les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

3) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 44

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

1) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ u_{2n}\geq\frac{1}{2}+u_n$

2) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

3) Montrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

EXERCICE 46

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puis en déduire qu'il existe un entier $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{3}{4}$

2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n\geq n_0$:

$$u_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0}u_{n_0}$$

b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

EXERCICE 47

Soit (u_n) une suite positive vérifiant pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq\frac{1}{2^n}$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$

Montrer que la suite (S_n) est convergente.

EXERCICE 48

Soit (ϕ_n) la suite réelle définie par $\phi_0=0$, $\phi_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\phi_{n+2}=\phi_{n+1}+\phi_n$

1) Montrer par récurrence que :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ \phi_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

2) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ \phi_{n+1}^2-\phi_n\phi_{n+2}=(-1)^n$

3) Etablir que la suite numérique $\left(\frac{\phi_{n+1}}{\phi_n}\right)_{n\geq 1}$ converge et trouver sa limite.

4) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\phi_k=\phi_{2n}\quad\text{et}\quad\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\phi_k=-\phi_n$$

EXERCICE 49

Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et (x_n) la suite numérique définie par :

$$x_0=a\ \text{et pour tout}\ n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}=\frac{x_n}{1+(n+1)x_n^2}$$

1) On suppose dans cette question que $a=1$.

Montrer par récurrence que :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ x_n=\frac{1}{n+1}$$

2) On suppose maintenant que $a>1$.

a) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et minorée.

b) En déduire que la suite (x_n) est convergente puis déterminer sa limite.

3) On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x)=\frac{x}{1+(n+1)x^2}$$

a) Montrer que la fonction f_n est croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$.

b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ 0<x_n\leq\frac{1}{n+1}$

c) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{x_{k+1}}-\frac{1}{x_k}=(k+1)x_k$$

d) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n-1+\frac{1}{x_1}}\leq x_n\leq\frac{1}{n+1}$$

e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$.

Scanné avec CamScanner

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

1) Pour $x \in]0;1[$, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k.x^k$$

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+1)!}$$

3) Soit (u_n) une suite bornée, vérifiant la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2u_n \le u_{n-1} + u_{n+1}$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

4) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n}{n\sqrt{n}} = 0$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n}{n\sqrt{n}} = 0$

5) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le u_n \le 2 \text{ et } 0 \le v_n \le 3$$

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n.v_n = 6$.

Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?

6) Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2\right) = 0$$

Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

7) On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 0$,

$u_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \frac{1}{3}\left(1 + u_{n+1} + u_n^3\right)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Etablir que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

DEVOIR 2

Le paradoxe suivant a été imaginé par Zénon d'Elée (490– 430 avant J.C) . Achille fait une course avec la tortue. Il part 100 *mètres* derrière la tortue, mais il va dix fois plus vite qu'elle. Quand Achille arrive au point de départ de la tortue, la tortue a parcouru 10 *mètres* . Pendant qu'Achille parcourt ces mètres, la tourte a avancé de $10\,cm$ ... Puisqu'on peut réitérer ce raisonnement à l'infini, Zénon conclut qu'Achille ne peut pas dépasser la tortue.

Avec des outils plus modernes que ceux dont disposait Zénon, calculer le temps nécessaire à Achille pour dépasser la tortue en notant v sa vitesse supposée constante.

DEVOIR 3

Soit $(u_n)_{n\ge1}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

1) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que , pour tout $n \ge n_0$, on a $|u_n| \le \varepsilon$.

a) Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \ge n_0$, on a : $|S_n| \le \frac{M(n_0 - 1)}{n} + \varepsilon$

b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$.

2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$.

Que dire de $(S_n)_{n\ge1}$? Qu'en déduisez-vous ?

3) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$.

4) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Scanné avec CamScanner

DEVOIR 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + n^2 - n$

1) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a $u_n > n$.

2) En déduire la limite de la suite (u_n).

3) On donne les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

DEVOIR 6

Le but de ce problème est l'étude de quelques exemples de suites adjacentes.

Les parties A, B, C et D sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Partie A : **étude de suites adjacentes et détermination de leur limite commune**

On pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - 1} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1) Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?

2) En remarquant que pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

donner une expression simplifiée de u_n.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Partie B : **étude de suites adjacentes et caractérisation de la limite d'une suite**

Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

On note pour tout entier $n \geq 1$: $a_n = S_{2n}$ et $b_n = S_{2n+1}$

1) Montrer que les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

2) Conclure sur la nature de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

Partie C : **étude de suites croisées**

On se propose d'étudier les deux suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = a$, $y_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{px_n + qy_n}{p+q} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{qx_n + py_n}{p+q}$$

Où a, b, p, q sont des réels strictement positifs tels que $0 < a < b$ et $0 < q < p$

1) a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n - y_n$ et $x_{n+1} - y_{n+1}$ et en déduire une expression de x_n et y_n en fonction de a, b, p, q et n.

b) Déduire du 1)a) que les suites (x_n) et (y_n) convergent vers une limite commune $\ell = \frac{a+b}{2}$

2) Retrouver le résultat du 1)b) en établissant que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

Partie D : **Calcul de la limite d'une somme à l'aide des suites adjacentes**

On se propose de calculer la limite de $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ lorsque $n \to +\infty$. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad U_n = 2\sqrt{n} - S_n \quad \text{et} \quad V_n = 2\sqrt{n+1} - S_n$$

1) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

2) Montrer que les suites $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes, de limite commune $L \geq 1$.

3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

4) Déduire de ce qui précède la valeur de :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$$

Scanné avec CamScanner

PROBLÈME 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1-2u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

où a est un réel de l'intervalle $\left]0;\dfrac{1}{4}\right[$.

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < \dfrac{1}{4}$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = S_{2n}$ et $w_n = S_{2n+1}$

a) Montrer que les suites numériques (v_n) et (w_n) sont adjacentes. On note ℓ la limite commune de ces deux suites.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \le \dfrac{2}{7} u_n$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|S_n - v_n| \le a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k$$

d) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$

(Remarquer que : $|S_n - \ell| \le |S_n - v_n| + |v_n - \ell|$)

Examen Normalisé Sc. Maths 1998

PROBLÈME 2

Soit α un réel de l'intervalle $]0;1[$.

On considère les suites numériques (a_n) et (S_n) définies par : $a_n = (1-\alpha)^n$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$

1) Montrer que les suites (a_n) et (S_n) convergent puis calculer les limites : $\lim a_n$ et $\lim S_n$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \le u_0 + \dfrac{1}{\alpha u_0}$

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Examen Normalisé Sc. Maths 1999

PROBLÈME 3

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = 1$ et $\dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n}\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{4u_n - 1}$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \dfrac{1}{2} \le u_n \le 1$

4) On considère les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$

a) On pose pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$: $f(x) = \dfrac{2x}{-1+4x}$

Montrer que $f\left(\left[\dfrac{1}{2};1\right]\right) \subset \left[\dfrac{1}{2};1\right]$

b) Montrer par récurrence que la suite (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

c) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent et déterminer la limite de chacune d'elles.

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{4}{3}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n. Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Examen Normalisé Sc. Maths 1997

Scanné avec CamScanner

HISTOIRE

Le mathematicien français d'origine italienne Joseph Lagrange a consacré de nombreux travaux à l'étude de fonctions. C'est à lui que l'on doit les termes de dérivée et de primitives. Il considérait en effet que la première dérivait de la seconde considérée elle-même comme la fonction première, donc la primitive. Lagrange s'est penché sur presque tous les domaines des mathematiques. Citons seulement ses travaux en mécanique céleste et ceux sur les équations différentielles

Source : https://fr.wikipedia.org

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Maitriser le calcul des dérivées des fonctions.
- Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa représentation graphique.
- Etudier des fonctions irrationnelles et des fonctions trigonométriques et des fonctions composées et les représenter graphiquement.
- Déterminer la monotonie de la fonction réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle et la représenter graphiquement.
- Déterminer le nombre dérivé en un point de la fonction réciproque d'une fonction.
- Utiliser les formules de dérivation pour déterminer les fonctions primitives d'une fonction dans un intervalle.
- Maitriser l'interprétation graphique du théorème de Rolle, du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis.
- Appliquer ces théorèmes aux suites numériques de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$ ou dans l'encadrement d'expressions et de formules algébriques ou de nombres réels.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires 111
- Connaissances Fondamentales
  - Dérivabilité d'une fonction en un point (Rappels) 113
  - Compléments sur la dérivation 118
  - Théorèmes de Rolle et des accroissements finis 123
  - Étude des fonctions numériques (Rappels) 129
  - Les fonctions primitives 131
- Techniques Et Astuces 139
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application 146
  - Exercices de perfectionnement 159
  - Problèmes de synthèse 162

Scanné avec CamScanner

RAPPELS

A) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 4x & \text{si } x \le 1 \\ f(x) = x^2 - 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$(\mathscr{C}_f)$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Étudier la dérivabilité de la fonction f au point $x_0 = -1$.

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = -1$.

2. a) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f au point $x_1 = 1$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

B) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{x|x-2|}$

Étudier la dérivabilité de la fonction g en 1 et en 2 puis interpréter les résultats obtenus.

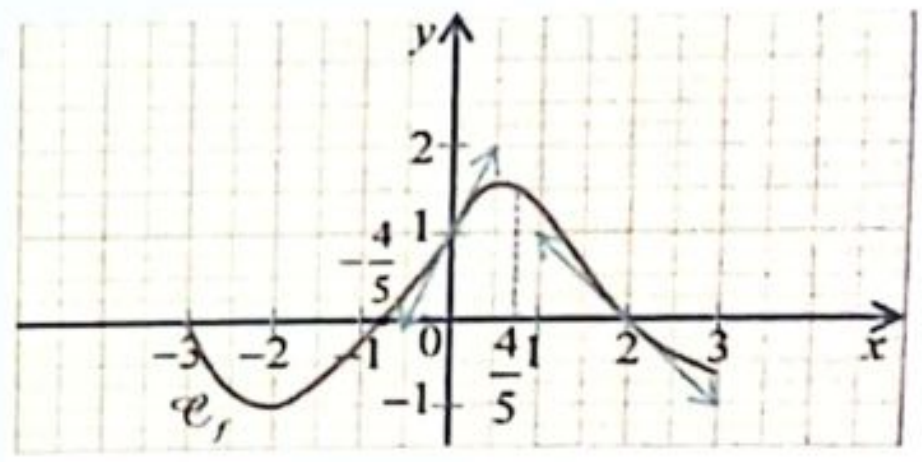
C) Soit f la fonction numérique définie sur $[-3;3]$ et représentée dans la figure ci-contre :

1. a) Calculer les limites $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-1}{h}$ et $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$.

b) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. On pose : $f(x) = 1 + 2x + x\varphi(x)$

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$ et déterminer le signe de $\varphi(x)$ sur $[-3;3] - \{0\}$ selon les valeurs de x.



D) Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction f et les intervalles où elle est dérivable puis calculer $f'(x)$:

$f(x) = x^5 - 4x^3 + 3x + 2$; $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + \dfrac{3}{x}$; $f(x) = \dfrac{2}{3}(x^2 - 4x + 3)^6$

$f(x) = x\sqrt{x^2 + x + 5}$; $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^2+2}$; $f(x) = \sin(2x) - 5\cos(3x) + 8\tan x$

E) Sur l'intervalle $I = \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, on considère les fonctions f, g et h définies par :

$f(x) = \tan x - x$; $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{3}x^3$; $h(x) = f(x) - \dfrac{4}{3}x^3$

1. Étudier les variations des fonctions f, g et h.

2. En déduire que pour tout $x \in I$: $x + \dfrac{1}{3}x^3 \le \tan x \le x + \dfrac{4}{3}x^3$

3. En utilisant ce qui précède, déterminer la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x - x}{x^2}$

Scanné avec CamScanner

3 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

2 DÉRIVABILITÉ ET CONTINUITÉ

1. Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f'(0)=2$ et $f(0)=\frac{1}{2}$.

a) Montrer qu'il existe une fonction ε définie sur un intervalle ouvert I centré en 0 telle que :

$$(\forall h \in I)\ \ f(h)=\frac{1}{2}+2h+h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

b) En déduire que f est continue en 0.

2. Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=|x-1|$

La fonction g est-elle continue en 1 ? dérivable en 1 ?

3. Soit h la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{1-\cos x}{x} \text{ si } x\neq 0 \\ h(0)=0 \end{cases}$$

a) Montrer que h est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction h en 0.

3 DÉRIVABILITÉ ET EXTREMA D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

On suppose que f admet un extremum en a.

En utilisant la définition de nombre dérivé de la fonction f, montrer que $f'(a)=0$.

2. Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=(x-a)^3$ où a un réel donné.

Déterminer la fonction g' puis calculer $g'(a)$. La fonction g admet-elle un extremum en a ? Justifier.

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=|x^3-x^2|$

a) Étudier la dérivabilité de la fonction h en 0 et en 1.

b) Étudier les variations de la fonction h puis déterminer ses extremums.

4 DÉRIVÉE DE LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

A) Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=(x^7+1)^8$

1. Calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2. Déterminer deux fonctions f et g telles que $F=gof$.

3. Comparer $F'(x)$ et $g'(f(x))\times f'(x)$.

Scanné avec CamScanner

B) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$, et soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a et que g est dérivable en $b = f(a)$.

On considère la fonction G définie sur J par : $G(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} & \text{si } x \neq b \\ G(b) = g'(b) \end{cases}$

1. Montrer que G est continue en a.

2. Soit x un élément de I distinct de a.

a) Montrer que si $f(x) \neq f(a)$, alors : $\dfrac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = G(f(x)) \times \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to a} G(f(x)) = g'(f(a))$.

c) En déduire que gof est dérivable en a et que : $(gof)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$

5 DÉRIVÉE DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

Soit f la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{5}{2}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $[2;+\infty[$.

2. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [2;+\infty[$.

3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]2;+\infty[$ puis déterminer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in]2;+\infty[$.

4. Vérifier que pour tout $x \in]2;+\infty[$: $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

6 THÉORÈME DE ROLLE – THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

A) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par : $f(x) = 5 + x\sqrt{2x - x^2}$

1. Justifier que f est continue sur $[0;2]$ et dérivable sur $]0;2[$ puis comparer $f(0)$ et $f(2)$.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;2[$.

3. Montrer qu'il existe $c \in]0;2[$ tel que $f'(c) = 0$.

B) On considère la fonction g définie sur $I = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \sqrt{x\cos x}$

1. a) Vérifier que $g(0) = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Montrer que g est continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. a) Montrer que 0 est le minimum de g sur I.

Scanné avec CamScanner

b) Soit M le maximum de g sur I.

Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g(\alpha) = M$ et $g'(\alpha) = 0$

C) Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = \frac{x-1}{2x+1}$.

1. Montrer que h est continue sur $[0;2]$ et dérivable sur $]0;2[$.

2. a) Vérifier que $h(0) = h(1)$.

b) Montrer qu'il existe un réel $c \in]0;2[$ tel que : $h(2) - h(0) = 2h'(c)$

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les points $A(0,f(0))$ et $B(2,f(2))$

a) Déterminer m le coefficient directeur de la droite (AB).

b) Comparer $f'(c)$ et m. Quelle conclusion graphique peut-on déduire ?

7 BRANCHES INFINIES - CONVEXITÉ

A) Dans chacun des cas suivants, déterminer les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f :

$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-1}$; $f(x) = x + \frac{|x-1|}{x+1}$; $f(x) = 3x - 2 + \frac{\text{Arctan}\, x}{x}$; $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$

$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2-x} & \text{si } x \in [0,1] \\ f(x) = x - \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\end{cases}$; $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[3]{x}-2} & \text{si } x > 2 \\ f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & \text{si } x < 2 \end{cases}$

B) Dans chacun des cas suivants, étudier la convexité de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f :

$f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x$; $f(x) = \cos x - \sin x$; $f(x) = 2 - |x^5 - 1|$; $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}$

$f(x) = 3x + 5 + \frac{x+1}{x^2+2x+2}$; $f(x) = \frac{x^2+2x}{|x|+1}$; $f(x) = \sin(2x) + 4\cos x - 7$

C) On considère la fonction g définie sur $[0;\pi]$ par : $g(x) = x^2 + \cos x$

$(\mathscr{C}_g)$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que la fonction g est convexe.

2. Écrire l'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_g)$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$.

3. En déduire que pour tout $x \in [0;\pi]$: $x^2 + (1-\pi)x + \cos x \geq \frac{2\pi - \pi^2}{4}$

Scanné avec CamScanner

DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE (RAPPELS)

1.1. DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

Définition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$

Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f en x_0. Il est noté $f'(x_0)$.

Remarques

- On trouve parfois, notamment en physique, la notation $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ pour le nombre dérivé de f en x_0.

  On trouve également, la notation $\dot{f}(x_0)$, lorsque la variable désigne le temps.

- Un simple changement d'écriture montre, en s'appuyant sur la composition des limites, que f est dérivable en x_0 si la fonction $h \mapsto \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite finie en 0 et alors :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- La notion de dérivabilité, étant définie à l'aide d'une limite, est une notion locale.

Définition 2

Soit f une fonction dérivable en x_0.

La droite (T) d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est appelée la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse x_0.

La fonction $x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de x_0.

On écrit alors :

$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ au voisinage de x_0 ou $f(x_0 + h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$ au voisinage de 0

Proposition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$(\forall x \in I)\ f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

Dans ces conditions : $f'(x_0) = \ell$

Scanné avec CamScanner

1.2. DÉRIVABILITÉ À DROITE - DÉRIVABILITÉ À GAUCHE

Définition 3

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, x_0 + r[$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est dérivable à droite de x_0 s'il existe un réel ℓ_1 tel que : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1$

Le nombre ℓ_1 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0. Il est noté $f'_d(x_0)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0 - r, x_0]$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est dérivable à gauche de x_0 s'il existe un réel ℓ_2 tel que : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2$

Le nombre ℓ_2 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0. Il est noté $f'_g(x_0)$.

Proposition 2

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en x_0, avec $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$, et alors : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right) & \text{si } x > -1 \\ f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{-x-1} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

- Dérivabilité à droite en $x_0 = -1$:

On a : $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} (x+1)\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$. On sait que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\right| \leq$

Il s'ensuit donc que $\left|(x+1)\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\right| \leq |x+1|$. Comme $\lim\limits_{x \to -1^+} |x+1| = 0$ alors $\lim\limits_{x \to -1^+} (x+1)\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right) =$

Donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 0$. D'où, la fonction f est dérivable à droite en $x_0 = -1$ et $f'_d(-1) = 0$

On peut interpréter ce résultat graphiquement comme suit :

« La courbe représentative de f admet une demi-tangente horizontale à droite en son point d'absci

- Dérivabilité à gauche en $x_0 = -1$:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{-x-1}}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} -\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{-x-1}}{\sqrt{-x-1}} \times \frac{1}{\sqrt{-x-1}} = -\infty$$

Scanné avec CamScanner

Car : $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{-x-1}}{\sqrt{-x-1}} = \lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{\operatorname{Arc\,tan} X}{X} = 1$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-1}{\sqrt{-x-1}} = -\infty$

Par conséquent, la fonction f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = -1$.

On peut interpréter ce résultat graphiquement comme suit :

« La courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale à gauche en son point d'abscisse -1, dirigée vers le haut »

En résumé, la fonction f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$.

1.3. DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Définition 4

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I. On note f' la fonction qui à $x \in I$ associe le nombre dérivée de f en x. On l'appelle la fonction dérivée de f, ou plus simplement la dérivée de f. On écrit aussi : $f' = \dfrac{df}{dx}$

TABLEAU DES DÉRIVÉES USUELLES

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \sin(ax+b) \quad (a,b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b) \quad (a,b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

Scanné avec CamScanner

1.4. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Proposition 3

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(f+g)' = f' + g' \quad ; \quad (\alpha f)' = \alpha f' \quad ; \quad (f.g)' = f'.g + g'.f \quad ; \quad (f^n)' = n.f'.f^{n-1}$$

Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$

Enfin, si f est strictement positive sur I alors : $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

2 COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION

2.1. DÉRIVABILITÉ ET CONTINUITÉ

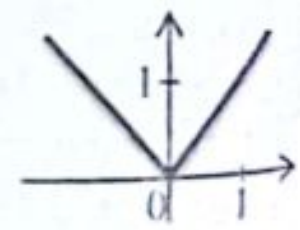
Proposition 4

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Remarques

- Une conséquence immédiate de la proposition 4 est la suivante : toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.
- La réciproque de la proposition 4 est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. (Figure ci-contre)



2.2. DÉRIVÉE DE LA FONCTION COMPOSÉE

Proposition 5

Soit I et J deux intervalles ouverts, et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques, avec $f(I) \subset J$. Soit x_0 un élément de I. Si :

- la fonction f est dérivable en x_0,
- la fonction g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$,

alors la fonction gof est dérivable en x_0 et de plus :

$$(gof)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Scanné avec CamScanner

Corollaire

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors la gof est dérivable sur I et de plus, pour tout $x \in I$: $(gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

Exemples

1) On considère la fonction U définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$U(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+5}\right)$$

En posant : $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ et $g(x) = \cos x$

On aura pour $x \in \mathbb{R}$:

$$U(x) = gof(x)$$

Puisque f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors la fonction $U = gof$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$U'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \frac{x \sin\left(\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+5}}$$

2) On considère la fonction V définie sur $]1,2[$ par :

$$V(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

En posant : $f(x) = \frac{\pi}{x}$ et $g(x) = \tan x$

On aura pour $x \in]1;2[$: $V(x) = gof(x)$

f étant dérivable sur $]1;2[$ et $f(]1;2[) \subset \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

Donc g est dérivable sur $f(]1;2[)$. Par suite, V est dérivable sur $]1;2[$ et de plus, pour tout $x \in]1;2[$:

$$V'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = -\frac{\pi}{x^2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

Applications

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x\cos x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer sa dérivée.

2. Etudier la dérivabilité de la fonction $g : x \mapsto \sin\left(x\sqrt{x}\right) + \cos\left(x^3\right)$ puis définir sa fonction dérivée.

2.3. DÉRIVÉE DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

Proposition 6

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et de plus :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si f est dérivable sur I telle que la fonction f' ne s'annule pas sur I alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$. De plus, on a pour tout $x \in J$: $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Scanné avec CamScanner

Exemples

Soit f la fonction numérique définie sur $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=x\sin x$

La fonction f est dérivable sur I en tant que produit de deux fonctions dérivables sur I. De plus, on a pour $x\in I$, $f'(x)=\sin x+x\cos x$. Puisque $f'(x)>0$ pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors f est strictement croissante sur I. Par suite, f réalise une bijection de I sur $f(I)=I$.

On a $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{12}$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{6+\pi\sqrt{3}}{12}$. Or $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\neq 0$ donc la fonction f^{-1} est dérivable en $\frac{\pi}{12}$ et on a:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{12}{6+\pi\sqrt{3}}$$

Applications

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

   Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

2. Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x)=x^3-3x-3$

   a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque puis déterminer son ensemble de définition.

   b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$.

   c) Montrer que $\left(g^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{3\left(\alpha^2-1\right)}$.

2.4. DÉRIVÉE DE LA FONCTION ARCTANGENTE

Proposition 7

- La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\text{Arctan}'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x\mapsto \text{Arctan}\left(u(x)\right)$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par : $x\mapsto\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

Preuve

On sait que la fonction Arctan est la fonction réciproque de la fonction f définie sur l'intervalle $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\tan x$. Puisque f est dérivable sur I et sa dérivée $f':x\mapsto 1+\tan^2 x$ ne s'annule pas sur I, alors sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)=\mathbb{R}$. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\text{Arctan}'(x)=\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{1+\tan^2\left(\text{Arc}\tan x\right)}=\frac{1}{1+x^2}$$

Scanné avec CamScanner

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \text{Arctan}\left(u(x)\right)$ est dérivable sur I en tant que composée de deux fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \in I$:

$$\left(\text{Arctan}\left(u(x)\right)\right)' = \text{Arctan}'\left(u(x)\right) \times u'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

Puisque la fonction $u : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est rationnelle alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction $f = \text{Arc tan}\, u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'}{1+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2} = \frac{\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}}{1+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2} = \frac{1-x^2}{x^4+3x^2+1}$$

Applications

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$u(x) = x.\text{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)$; $v(x) = \sqrt{x^2 + \text{Arc tan}\, x}$; $w(x) = \left(\text{Arctan}\left(\cos x\right)\right)^3$

2. Étudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{x^2-1}\right)$

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \text{Arc tan}\, x - \text{Arctan}\left(x+1\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 0$

2.5. DÉRIVÉE DE LA FONCTION RACINE N^{ème}

Proposition 8

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{1}{n}u'(x)\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$$

Scanné avec CamScanner

Preuve

On sait que la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la fonction réciproque de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^n$.

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée $f' : x \mapsto nx^{n-1}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, alors sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I en tant que composée de deux fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \in I$:

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = f'\left(u(x)\right) \times u'(x) = \frac{1}{n}\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}-1} u'(x) = \frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$$

Exemples

1) La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$

2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt[3]{8x-5}$

La fonction $u : x \mapsto 8x - 5$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $\left]\frac{5}{8}; +\infty\right[$. Par conséquent

La fonction f est dérivable sur $\left]\frac{5}{8}; +\infty\right[$ et on a pour tout $x \in \left]\frac{5}{8}; +\infty\right[$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}u'(x)\left(u(x)\right)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{8}{3}(8x-5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{8}{3.\sqrt[3]{(8x-5)^2}}$$

Applications

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt[4]{3+\cos^2 x}$; $g(x) = x.\sqrt[3]{x^2 - x}$; $h(x) = \sin\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1}\right)$; $k(x) = \sqrt[3]{\left(x^3 - 1\right)^4}$

Proposition 9

Soit r un nombre rationnel non nul.

- La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto r.x^{r-1}$.
- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto \left(u(x)\right)^r$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\left(\left(u(x)\right)^r\right)' = r.u'(x).\left(u(x)\right)^{r-1}$$

Scanné avec CamScanner

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left(x^2-x+5\right)^{-\frac{7}{8}}$

La fonction $x \mapsto x^2-x+5$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\left(x^2-x+5\right)^{-\frac{7}{8}}\right)'=-\frac{7}{8}(2x-1)\left(x^2-x+5\right)^{-\frac{7}{8}-1}=\frac{-7(2x-1)}{8\sqrt[8]{\left(x^2-x+5\right)^{15}}}$$

Applications

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les intervalles où elles sont dérivables puis donner les fonctions dérivées :

$f(x)=(3-\cos 2x)^{\frac{4}{3}}$; $g(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{3}{5}}$; $h(x)=\left(\operatorname{Arc}\tan\left(x^2+1\right)\right)^{\frac{5}{8}}$

3 THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS

3.1. THÉORÈME DE ROLLE

THÉORÈME 1

Soit a et b deux réels, avec $a<b$, et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a)=f(b)$.

Alors il existe au moins un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Preuve

Puisque f est continue sur le segment $[a,b]$, elle admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$.

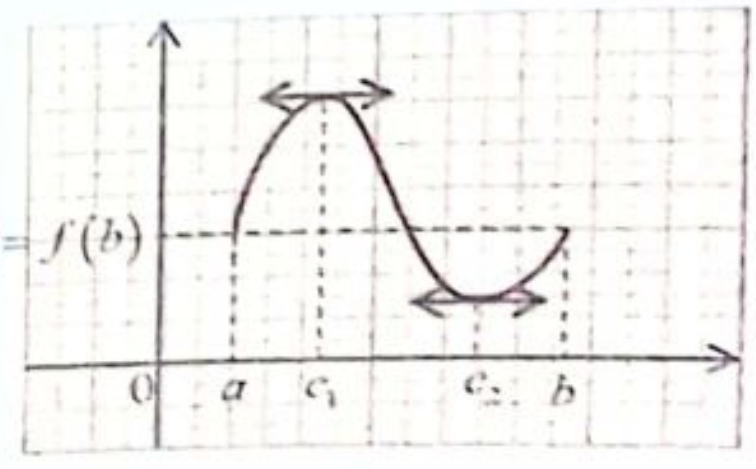
- S'ils sont tous les deux en a ou b, la fonction f est constante et donc dans ce cas $f'=0$.
- Sinon, soit le maximum M, soit le minimum m est atteint dans $]a,b[$. Il existe donc un réel $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=m$ ou $f(c)=M$. Puisque f est dérivable et présente un extremum en c alors $f'(c)=0$.

Interprétation géométrique

Considèrerons le graphe d'une fonction numérique continue sur un segment $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

Si le graphe comporte deux points distincts de même ordonnée, alors il existe au moins une tangente au graphe qui soit parallèle à l'axe des abscisses.

Bien noter que le théorème de Rolle fournit l'existence d'un réel c tel que $f'(c)=0$, mais ne garantit pas l'unicité.



Scanné avec CamScanner

Interprétation cinématique

Considérons un marcheur qui se promène le long d'une route rectiligne et qui revient à son point de départ. En supposant que la position du marcheur soit une fonction dérivable du temps, hypothèse physiquement raisonnable, le théorème de Rolle affirme qu'il existe au moins un moment où la vitesse instantanée du marcheur est nulle.

Exemple

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\sin(2x)$. Il est clair que f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et telle que $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. D'après le théorème de Rolle, il existe au moins un réel $c\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f'(c)=0$, c'est-à-dire que $2\cos(2c)=0$. (Pour cet exemple, on peut prendre $c=\frac{\pi}{4}$)

Applications

1. Vérifier que les conditions du théorème de Rolle sont vérifiées pour la fonction f sur l'intervalle I :

   a) $f(x)=x^2-3x+2$ et $I=[1;2]$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+6}$ et $I=[2;3]$

2. Soit g une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe un élément $x_0\in]a,b[$ tel que $g(b)=\frac{g(a)+g(x_0)}{2}$. Montrer qu'il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$

3. Soit P une fonction polynomiale admettant trois racines réelles distinctes.
   Montrer que la fonction polynomiale P' admet au moins deux racines réelles distinctes.

3.2. THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

THÉORÈME 2

Soit a et b deux réels, avec $a<b$, et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Il existe alors au moins un réel $c\in]a,b[$ tel que : $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Preuve

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On considère la fonction g définie sur $[a,b]$ par :

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On a $g(a)=g(b)=0$ et, pour tout $x\in]a,b[$, on a par ailleurs :

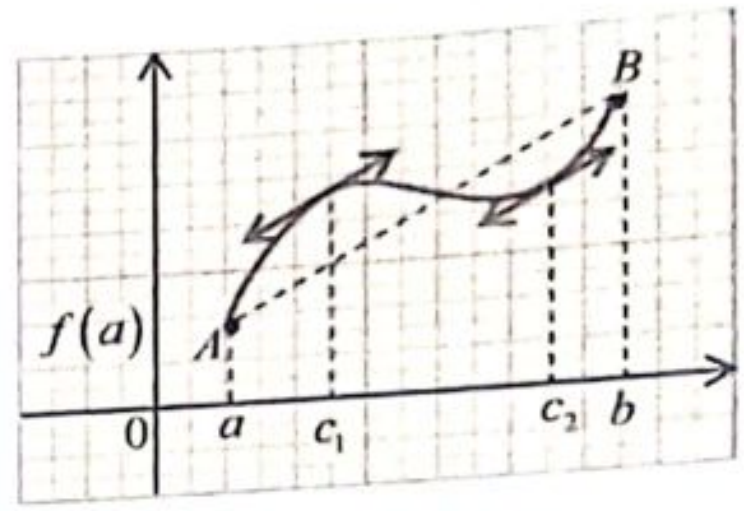
$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Scanné avec CamScanner

D'après le théorème de Rolle, il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$, ce qui entraîne que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. D'où le résultat.

Interprétation géométrique

Le théorème des accroissements finis signifie que si f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors il existe (au moins) une tangente à son graphe qui soit parallèle à la corde (AB), où $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$.



Interprétation cinématique

Considèrerons une randonneuse qui marche cinq kilomètres en une heure le long d'un sentier rectiligne. En supposant que sa position soit une fonction dérivable du temps, il existe un moment où la vitesse instantanée est de $5\,km/h$.

Exemple

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x^3-3x+12$

La fonction f est continue sur $[1;2]$ et dérivable sur $]1;2[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe au moins un réel $c \in]1,2[$ tel que $f(2)-f(1)=(2-1)f'(c)$, c'est-à-dire $f'(c)=4$.

Pour la vérification : $f'(c)=4 \Leftrightarrow 3c^2-3=4 \Leftrightarrow c^2=\dfrac{7}{3} \Leftrightarrow c=\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ (on a bien $\sqrt{\dfrac{7}{3}} \in]1;2[$).

Applications

1. Vérifier que les conditions du théorème des accroissements finis sont vérifiées pour la fonction f sur l'intervalle I :

a) $f(x)=2\sqrt{x}+\sin x$ et $I=[0;\pi]$; b) $\begin{cases} f(x)=\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)^2 & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ f(x)=\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)^2 & \text{si } \dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ et $I=\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$

2. Montrer que : $\dfrac{1}{26} < \text{Arctan } 5 - \text{Arctan } 4 < \dfrac{1}{17}$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x-\cos x$

a) Établir que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right[$.

b) Montrer qu'il existe un réel $c \in \left]\alpha;\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que : $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)f'(c)$

Scanné avec CamScanner

3.3. INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS

THÉORÈME 3

Soit a et b deux réels, avec $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in]a,b[$: $m \le f'(x) \le M$

Alors : $$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$$

Preuve

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Comme $m \le f'(c) \le M$ alors $m \le \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \le M$ et par suite : $m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$

Corollaire

Soit a et b deux réels, avec $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in]a,b[$: $|f'(x)| \le k$

Alors pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$: $$|f(x) - f(y)| \le k|x-y|$$

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \le 1$

D'après le corollaire 3, on a pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $|\sin b - \sin a| \le |b-a|$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \le |x|$ (Ici on a pris $b = x$ et $a = 0$)

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \operatorname{Arc}\tan x$

Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$. La fonction g étant continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

De plus, on a pour tout $x \in]a,b[$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Comme $x \in]a,b[$ alors $\dfrac{1}{1+b^2} \le g'(x) \le \dfrac{1}{1+a^2}$.

Il résulte de l'inégalité des accroissements finis que : $\dfrac{b-a}{1+b^2} \le g(b) - g(a) \le \dfrac{b-a}{1+a^2}$

Par suite, pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $a < b$:

$$\frac{b-a}{1+b^2} \le \operatorname{Arc}\tan b - \operatorname{Arc}\tan a \le \frac{b-a}{1+a^2}$$

Scanné avec CamScanner

Applications

1. Montrer que pour tous a et b de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$: $|\tan a - \tan b| \leq 4|a-b|$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sin x$

Montrer que pour tous x et y de l'intervalle $[-4;4]$: $|f(x) - f(y)| \leq 5|x-y|$

ÉTUDE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES (RAPPELS)

4.1. MONOTONIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Proposition 10

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est constante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I),\ f'(x) = 0$
- La fonction f est croissante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I),\ f'(x) \geq 0$
- La fonction f est décroissante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I),\ f'(x) \leq 0$

Remarques

- Les résultats de la proposition 10 ne sont valables que sur un intervalle.
- Si f' est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Exemple

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\operatorname{Arc}\tan x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \operatorname{Arc}\tan x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \left(\operatorname{Arc}\tan x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f(1) = \operatorname{Arc}\tan 1 + \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\operatorname{Arc}\tan x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

Scanné avec CamScanner

4.2. AXE DE SYMÉTRIE – CENTRE DE SYMÉTRIE

Proposition 11

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour que la droite Δ d'équation $x = a$ soit un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$: $\quad (2a-x) \in D_f \quad$ et $\quad f(2a-x) = f(x)$

Exemple

On considère la fonction f définie par : $\quad f(x) = \sqrt{x^2+6x+5}$

$\mathscr{C}_f$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Montrons que la droite Δ d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

Le domaine de définition de f est $D_f =]-\infty;-5] \cup [-1;+\infty[$. On a d'une part :

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x \leq -5 \text{ ou } x \geq -1) \Leftrightarrow (-6-x \geq -1 \text{ ou } -6-x \leq -5) \Leftrightarrow (-6-x) \in D_f$$

D'autre part, pour tout $x \in D_f$:

$$f(-6-x) = \sqrt{(-6-x)^2+6(-6-x)+5} = \sqrt{x^2+12x+36-36-6x+5} = \sqrt{x^2+6x+5} = f(x)$$

Par suite, la droite Δ d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Proposition 12

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère donné.

Pour que le point $\Omega(a,b)$ soit un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$: $\quad (2a-x) \in D_f \quad$ et $\quad f(2a-x)+f(x) = 2b$

Exemple

On considère la fonction f définie par : $\quad f(x) = \dfrac{\cos x}{2-\sin x}$

Montrons que $\Omega\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ est un point de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$. Donc, pour tout $x \in D_f$, $(\pi-x) \in D_f$.

On a maintenant pour tout $x \in D_f$:

$$f(\pi-x)+f(x) = \frac{\cos(\pi-x)}{2-\sin(\pi-x)} + \frac{\cos x}{2-\sin x} = -\frac{\cos x}{2-\sin x} + \frac{\cos x}{2-\sin x} = 0$$

Par conséquent, le point $\Omega\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Scanné avec CamScanner

Remarques

- Si f est une fonction paire alors sa courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Si f est une fonction impaire alors $\mathscr{C}_f$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- Si la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie ou admet le point de coordonnées (a,b) comme centre de symétrie alors on peut restreindre l'étude de la fonction f sur l'ensemble $D_{étude} = D_f \cap [a,+\infty[$.

4.3. LES FONCTIONS PÉRIODIQUES

Définition 5

Soit f une fonction numérique de domaine de définition D_f.

On dit que f est périodique s'il existe un réel non nul T tel que pour tout $x \in D_f$:

$$(x+T) \in D_f \quad \text{et} \quad (x-T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Le nombre réel T est appelé alors une période de f. La plus petite période strictement positive de la fonction f est appelée la période de la fonction f.

Exemples

1) Si ω_0 est un réel strictement positif alors les fonctions $t \mapsto \sin(\omega_0 t + \varphi)$ et $t \mapsto \cos(\omega_0 t + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

2) Si a est un réel non nul alors la fonction $x \mapsto \tan(ax+b)$ est périodique de période $T = \dfrac{\pi}{a}$.

3) La fonction $x \mapsto x - E(x)$ est périodique de période $T = 1$.

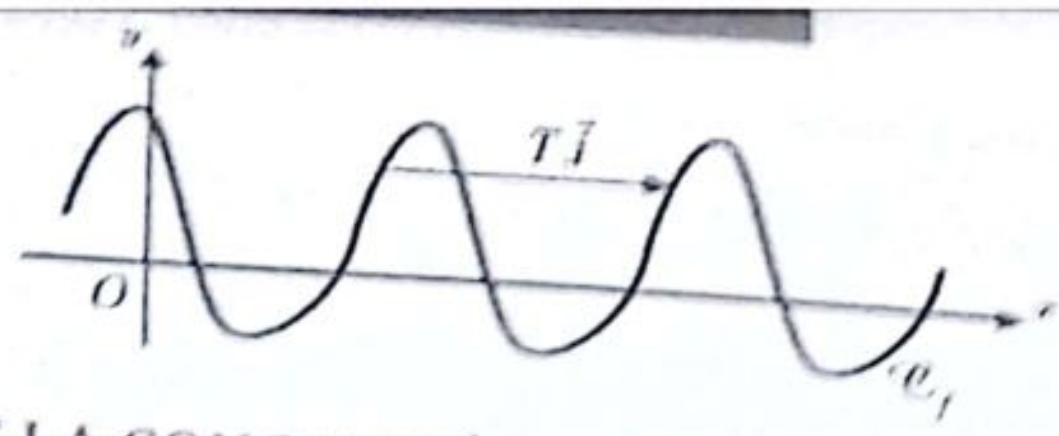
Proposition 13

Soit f une fonction périodique de période T et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre nT est aussi une période de la fonction f.
- La courbe de $\mathscr{C}_f$ est invariante par toute translation de vecteur $nT.\vec{i}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
- Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est un réel donné, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est la réunion des images de l'ensemble $\{M(x,f(x)) / x \in D_f \cap [x_0, x_0+T[\}$ par toutes les translations de vecteur $nT.\vec{i}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, pour étudier une fonction périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur T. (Très souvent, on choisit un des deux intervalles $[0,T[$ ou $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right[$.

Scanné avec CamScanner



4.4. ÉTUDE DE LA CONCAVITÉ D'UNE COURBE

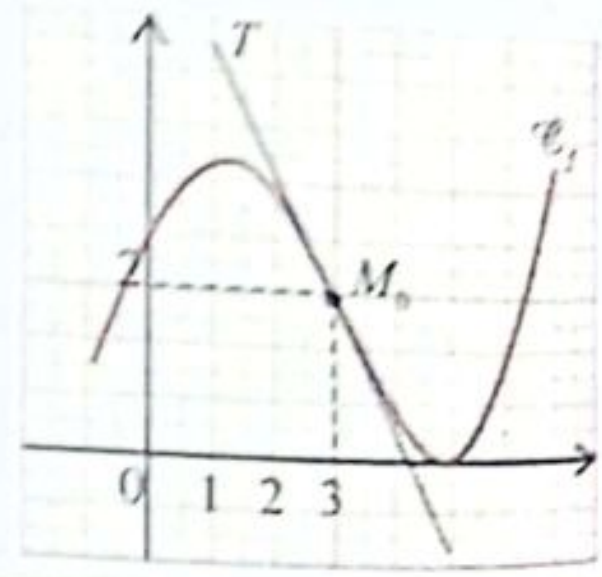
Définition 6

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

- On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, et on dit qu'elle est concave si elle est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.
- On dit que le point $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ si, en M_0, la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente.

Exemple

On considère la figure ci-contre qui présente le graphe d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.



La courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe sur $[3;+\infty[$ et concave sur $]-\infty;3]$.

Le point $M_0(3,2)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

La tangente T traverse la courbe $\mathscr{C}_f$ en $M_0(3,2)$.

Proposition 14

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f soit convexe sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I)$, $f''(x) \geq 0$
- Pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f soit concave sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I)$, $f''(x) \leq 0$
- Pour que le point $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ soit un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre de x_0.

Applications

Pour chacun des cas suivants, étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ et déterminer ses points d'inflexion (sous réserve d'existence) :

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; $f(x)=3x-\operatorname{Arc}\tan x$; $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos 2x}$; $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x-1}$

Scanné avec CamScanner

4.5. ÉTUDE DES BRANCHES INFINIES (RAPPEL)

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \pm\infty$ → La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}_f$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ → La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}_f$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ → La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées.
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ → La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses.
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$
  - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - ax\big) = b$ → La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$
  - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - ax\big) = \pm\infty$ → La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \big[f(x) - (ax + b)\big] = 0$ → La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$

5 LES FONCTIONS PRIMITIVES

5.1. PRIMITIVE D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Définition 7

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur I si :

F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $F'(x) = f(x)$

Exemple

On considère les fonctions f et F définies sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

Scanné avec CamScanner

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1} \quad \text{et} \quad F(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\operatorname{Arc}\tan x$$

La fonction F est une primitive de la fonction f sur I car F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$F'(x)=\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\operatorname{Arc}\tan x\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}=f(x)$$

Proposition 15

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive définie sur cet intervalle.

5.2. PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE

Proposition 16

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si F est une primitive de la fonction f sur I alors les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x)+c$ où c est une constante réelle.
- Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I vérifiant : $G(x_0)=y_0$

Exemple

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1}$

On a déjà vu que la fonction F définie sur I par : $F(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\operatorname{Arc}\tan x$ est une primitive de f sur I.

Donc les primitives de la fonction f sur l'intervalle I sont les fonctions $x \mapsto 2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\operatorname{Arc}\tan x+c$ où c est une constante réelle.

Soit G la primitive de la fonction f sur I qui s'annule en 1. On a donc $G(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\operatorname{Arc}\tan x+c$ avec $G(1)=0$.

On a alors : $G(1)=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1}+\frac{1}{1}+\operatorname{Arc}\tan 1+c=0 \Leftrightarrow 3+\frac{\pi}{4}+c=0 \Leftrightarrow c=-3-\frac{\pi}{4}$

Ainsi : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ G(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\operatorname{Arc}\tan x-3-\frac{\pi}{4}$

5.3. OPÉRATIONS SUR LES PRIMITIVES

Proposition 17

Si F et G sont respectivement des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :

- $F+G$ est une primitive de la fonction $f+g$ sur I.
- Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$ sur I.

Scanné avec CamScanner

TABLEAU DES PRIMITIVES USUELLES

La fonction f	Les primitives F de f	L'intervalle I
0	$c \quad (c \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$x \mapsto \dfrac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto x^r \quad (r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	$x \mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + c$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \sin(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x + c$	$\mathbb{R}$
$u'v + uv'$	$uv + c$	Intervalle où u et v sont dérivables
$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{u} + c$	Intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas
$u'u^r \quad (r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1} + c$	Intervalle où u est dérivable et u^r est définie
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{Arc}\tan u + c$	Intervalle où u est dérivable
$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\dfrac{u}{v} + c$	Intervalle où u et v sont dérivables et v ne s'annule pas

Scanné avec CamScanner

A UTILISATION DE LA DÉRIVATION

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tan} x + \operatorname{Arc\,tan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{4}$

2) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$: $(1+x)\operatorname{Arc\,tan}\sqrt{x} - \sqrt{x} \geq 0$

3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $0 \leq t - \operatorname{Arc\,tan} t \leq \frac{1}{3}t^3$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - x\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x}\right)$.

SOLUTION

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tan} x + \operatorname{Arc\,tan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$

On va montrer que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$ et que sa valeur est $\frac{\pi}{4}$.

Les fonctions $u : x \mapsto \sqrt{1+x^2} - x$ et Arc tan sont dérivable sur $\mathbb{R}$, donc il en est de même pour la fonction f et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{1+\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^2} = \frac{1}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1+x^2}\left(2+2x^2 - 2x\sqrt{1+x^2}\right)}$$

Il en résulte donc que : $f'(x) = \frac{1}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{1}{2\left(1+x^2\right)} = 0$, d'où : $(\exists c \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = c$

Pour $x = 0$ on trouve $f(0) = c = \frac{\pi}{4}$. Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = \frac{\pi}{4}$

2) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $g(x) = (1+x)\operatorname{Arc\,tan}\sqrt{x} - \sqrt{x}$

Les fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$, $v : x \mapsto 1+x$ et Arc tan sont dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $g = v \times \operatorname{Arc\,tan}$ ou $-u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = \operatorname{Arc\,tan}\sqrt{x} + (1+x)\frac{1}{2\sqrt{x}.(x+1)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \operatorname{Arc\,tan}\left(\sqrt{x}\right)$$

Comme $x > 0$ alors $\operatorname{Arc\,tan}\left(\sqrt{x}\right) > 0$ et donc $g'(x) > 0$. Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Puisque $x \geq 0$ alors $g(x) \geq g(0)$ et donc : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right) g(x) \geq 0$

3) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $f(t) = t - \operatorname{Arc\,tan} t$ et $g(t) = \frac{1}{3}t^3 - t + \operatorname{Arc\,tan} t$.

On a pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$ et $g'(t) = t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^4}{1+t^2}$

Puisque $f'(t) \geq 0$ et $g'(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ alors f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$. Donc si $t \geq 0$ alors $f(t) \geq f(0)$ et $g(t) \geq g(0)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $f(t) \geq 0$ et $g(t) \geq 0$.

Scanné avec CamScanner

On conclut donc que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $0 \leq t - \text{Arc}\tan t \leq \frac{1}{3}t^3$

Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - x\text{Arc}\tan\frac{1}{x}\right)$: On pose $t = \frac{1}{x}$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - x\text{Arc}\tan\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t - \text{Arc}\tan t}{t^2}$$

Puisque pour tout $t > 0$, $0 \leq \frac{t - \text{Arc}\tan t}{t^2} \leq \frac{1}{3}t$ et que $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{3}t = 0$, alors $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{t - \text{Arc}\tan t}{t^2} = 0$.

Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - x\text{Arc}\tan\frac{1}{x}\right) = 0$

- Pour étudier le sens de variation d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition, on étudie le signe de $f'(x)$ sur cet ensemble. En pratique, on étudie le sens de variation d'une fonction dérivable sur un ensemble en prenant les recommandations suivantes :
  - Avant de dériver une fonction, on justifie (même brièvement) sa dérivabilité.
  - On ne parle de monotonie que sur un intervalle, pas sur une réunion d'intervalles.
  - Pour étudier le signe de $f'(x)$, il peut être utile d'étudier une fonction auxiliaire.
  - Pour étudier les extrema locaux d'une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert $]a,b[$, il suffit de calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]a,b[$: f admet alors un extremum local en x_0 si et seulement si f' s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre en x_0.
- Si la dérivée d'une fonction sur un intervalle I est strictement positive, alors la fonction est strictement croissante sur I, mais la réciproque n'est pas vraie. Cependant, on dispose du résultat suivant : Si la dérivée est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur un intervalle I, alors la fonction est strictement croissante sur I.

B ÉTUDE D'UNE FONCTION DÉFINIE SUR DES INTERVALLES

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = (x-1)\left(1 + \text{Arc}\tan\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$\mathscr{C}_f$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que la fonction f est continue au point $x_0 = 1$.

b) Étudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 1$ et interpréter les résultats obtenus.

2) a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c) Étudier la nature de la branche infinie au voisinage de $-\infty$.

Scanné avec CamScanner

3) a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty;1]$.

b) Donner le tableau de variations de la fonction f' sur $K =]1;+\infty[$ puis en déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle K.

4) Soit g la restriction de la fonction f sur $J =]-\infty;0]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de J sur un intervalle L à déterminer.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $t^3 - 3t - 2 = 0$ puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'(-2)$.

c) Tracer dans le même repère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{g^{-1}}$.

SOLUTION

1) a) Montrons que : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1)$

On a : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\left(x-1+3.\sqrt[3]{1-x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\left(1+\text{Arc tan}\dfrac{1}{x}\right) = 0$

Il s'ensuit donc que $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1) = 0$. Donc : f est continue au point $x_0 = 1$.

b) Dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0 = 1$:

On a : $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\left(1+\text{Arc tan}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = 1+\dfrac{\pi}{4}$. Donc la fonction f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 1+\dfrac{\pi}{4}$ et $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente à droite au point $A(1,0)$ définie par le système :

$$(T_d): \begin{cases} y = \left(1+\dfrac{\pi}{4}\right)(x-1) \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Dérivabilité à gauche de la fonction f au point $x_0 = 1$:

On a : $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\left(1+3\dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to1^-}\left(1-3.\sqrt[3]{\dfrac{1}{(1-x)^2}}\right) = -\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche au point $x_0 = 1$ et $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale à gauche au point $A(1,0)$ dirigée vers le haut.

2) a) On a pour tout $x < 0$, $-x = \sqrt[3]{-x^3}$. Il s'ensuit donc que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -1+x\left(1-3.\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{-x^3}}\right) = -\infty$

car : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-3.\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{-x^3}}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\left(1+\text{Arc tan}\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\text{Arc tan}\dfrac{1}{x} = 1$

Scanné avec CamScanner

b) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x}-1-\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x}\right)$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}x\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x}=\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\alpha}{\tan\alpha}=1$

(on a posé $\alpha=\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x}$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$.

c) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$: On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}-3\sqrt[3]{\frac{1-x}{-x^3}}=1$

Calculons maintenant $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+3\sqrt[3]{1-x}\right)=+\infty$

D'où la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ de direction la droite $(\Delta): y=x$.

3) a) On a pour tout $x<1$, $f(x)=x-1+3(1-x)^{\frac{1}{3}}$. La fonction f est dérivable sur $]-\infty;1[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et on a pour tout $x\in]-\infty;1[$:

$$f'(x)=1+3\times(1-x)'(1-x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}-1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

Puisque $\sqrt[3]{(1-x)^2}>0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt[3]{(1-x)^2}-1$ et aussi le signe de $(1-x)^2-1$.

or pour tout $x\in]-\infty;1[$, $(1-x)^2-1=x(x-2)$, d'où le tableau de variations de f sur $I=]-\infty;1]$ est :

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0

b) On a f est dérivable sur $K=]1;+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur K et on a pour tout $x\in K$: $f'(x)=1+\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x}+(x-1)\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=1+\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2+1}$

De même la fonction f' est dérivable sur K en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et on a pour tout $x\in K$: $f''(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)}{(x^2+1)^2}$

Puisque $f''(x)>0$ pour tout $x\in K$ alors f' est strictement décroissante sur K, et comme f' est continue sur K alors $f'(K)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x);\lim\limits_{x\to1^+}f'\right[=\left]1;1+\frac{\pi}{4}\right[$. Il s'ensuit donc que $f'(x)>0$ pour tout $x\in K$, et par suite f est strictement croissante sur K. D'où le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

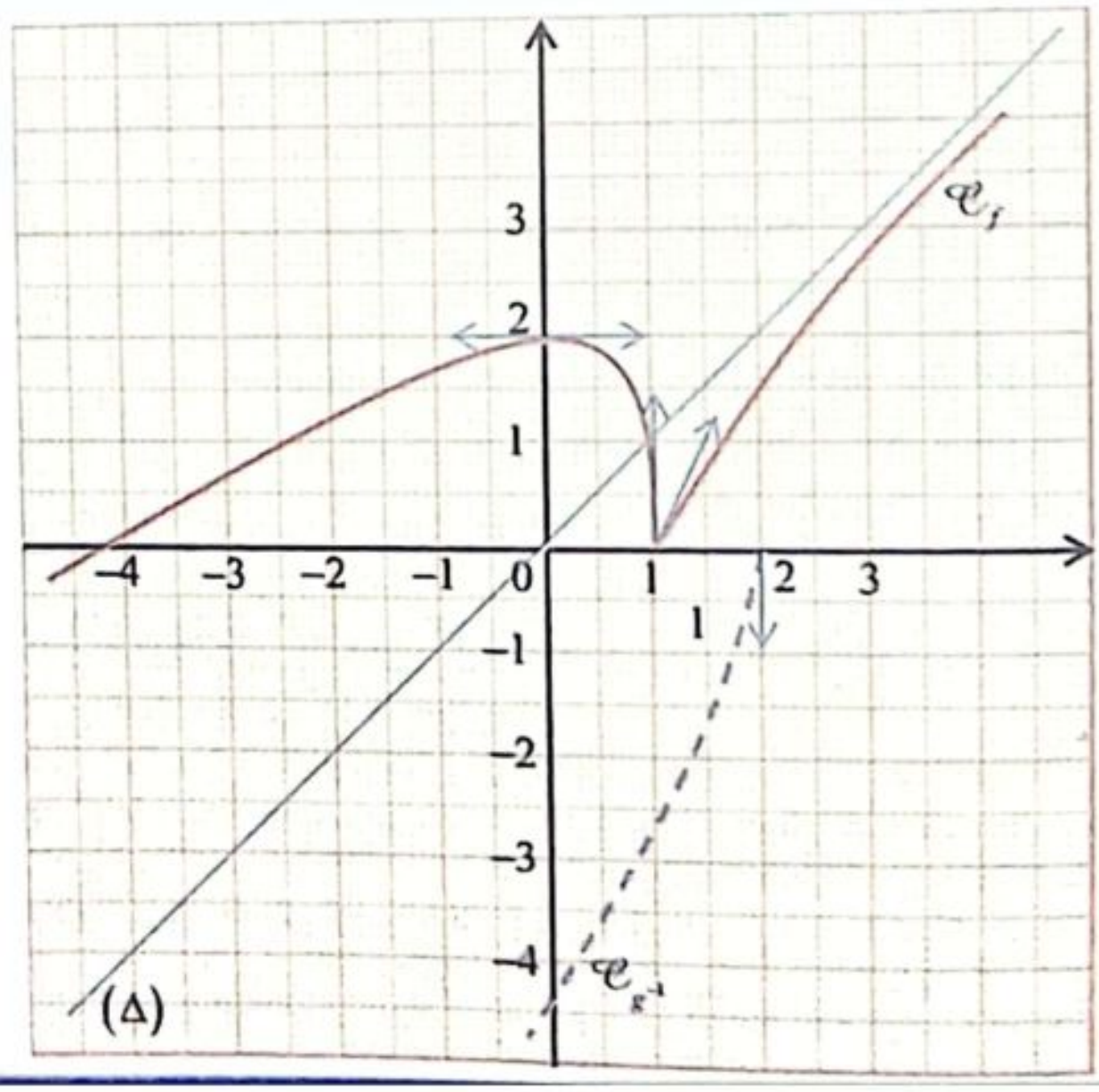
4) a) On a pour tout $x \in J$, $g(x) = f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}$. D'après les questions précédentes, la fonction g est continue et strictement croissante sur J. D'après le théorème de la bijection, la fonction g réalise une bijection de J sur $L = g(J) = \left]\lim\limits_{x \to -\infty} g(x); g(0)\right]$, ce qui donne : $L =]-\infty; 2]$.

b) Remarquons que le nombre $t = 2$ est une solution de l'équation $t^3 - 3t - 2 = 0$, et en effectuant la division euclidienne de $P(t) = t^3 - 3t - 2$ par $t - 2$, on trouve $P(t) = (t-2)(t+1)^2$. Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}^+$ est $P(t) = 0$ est $S = \{2\}$.

On pose $g^{-1}(-2) = x$. On a alors $g(x) = -2$ et $x \in J$, d'où $x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} = -2$ et $x \in J$.

On pose $t = \sqrt[3]{1-x}$ et donc : $t^3 - 3t - 2 = 0$ et $t \geq 1$. D'après ce qui précède, on trouve $t = 2$ et donc $x = 1 - t^3 = -7$, et par suite $g^{-1}(-2) = -7$.

Comme $g'(-7) \neq 0$ alors : $\left(g^{-1}\right)'(-2) = \dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(-2)\right)} = \dfrac{1}{g'(-7)}$. Et puisque $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$ pour tout $x \in J$ alors $g'(-7) = \dfrac{3}{4}$ et par conséquent : $\left(g^{-1}\right)'(-2) = \dfrac{4}{3}$



Scanné avec CamScanner

• Pour montrer qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I et calculer sa dérivée, il suffit d'utiliser les théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables.

Pratiquement : il s'agit de considérer que la fonction f est une somme, un produit, un quotient, une composée,...et d'appliquer le théorème et la formule qui correspondent.

Attention à bien vérifier que les conditions d'application sont satisfaites ; si ce n'est pas le cas, il faut revenir à l'une des deux méthodes précédentes.

Il va sans dire qu'il faut par conséquent connaître sur le bout des doigts les dérivées des fonctions classiques, ainsi que les formules de dérivation.

• On suppose maintenant que la fonction f est dérivable et strictement monotone sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$, c'est-à-dire $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

  ◦ Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et de plus : $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$

  ◦ Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et la courbe représentative de f^{-1} admet au point d'abscisse y_0 une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

C ÉTUDE D'UNE FONCTION IRRATIONNELLE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4.\sqrt[4]{(x-1)^2} - 3.\sqrt[3]{(x-1)^2}$

$\mathscr{C}_f$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I :

1) Montrer que la droite $(\Delta) : x = 1$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) a) Étudier la dérivabilité à droite au point $x_0 = 1$ (on pourra poser $t = \sqrt[6]{x-1}$)

b) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et que pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2\left(\sqrt[6]{(x-1)^2} - \sqrt[6]{(x-1)^3}\right)}{\sqrt[6]{(x-1)^5}}$$ Puis déterminer les variations de la fonction f sur $[1;+\infty[$.

3) a) Vérifier que : $(\forall x \in]1;+\infty[) \quad f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}.\left(4.\sqrt[6]{\dfrac{1}{x-1}} - 3\right)$

b) Étudier la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α tel que $0 < \alpha < 1$ et étudier le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $[0;1]$.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

Scanné avec CamScanner

Partie II:

On considère la suite numérique définie par : $0 < u_0 < \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 1$

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = fof(v_n)$ et $w_{n+1} = fof(w_n)$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n < \alpha < w_n$

3) Dans cette question seulement, on pose : $u_0 = \frac{1}{8}$

a) Étudier la monotonie de chacune des suites (v_n) et (w_n).

b) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer la limite de chacune d'elles.

Les suites (v_n) et (w_n) sont-elles adjacentes ?

c) En utilisant la définition de la limite d'une suite numérique, montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

SOLUTION

Partie I:

1) Puisque $(x-1)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi : $D_f = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(2-x) = 4.\sqrt[4]{(2-x-1)^2} - 3.\sqrt[3]{(2-x-1)^2} = 4.\sqrt[4]{(x-1)^2} - 3.\sqrt[3]{(x-1)^2} = f(x)$

(car : $(1-x)^2 = (x-1)^2$). Donc la droite $(\Delta) : x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Remarquons alors qu'on peut restreindre l'étude de la fonction f à $D_E = [1;+\infty[$.

2) a) Rappelons que pour tout réel $a > 0$, $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$. En posant $t = \sqrt[6]{x-1}$ on obtient :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{4.\sqrt{x-1} - 3.\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1} = \lim_{t \to 0^+} \frac{4t^3 - 3t^4}{t^6} = \lim_{t \to 0^+} \frac{4-3t}{t^3} = +\infty$$

Donc f n'est dérivable à droite au point 1 et donc $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale à droite au point $A(1,0)$, dirigée vers le haut.

b) On a pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f(x) = 4(x-1)^{\frac{1}{2}} - 3(x-1)^{\frac{2}{3}}$. Puisque la fonction $x \mapsto x-1$ est dérivable et strictement positive sur $I =]1;+\infty[$ alors les fonctions $x \mapsto 4(x-1)^{\frac{1}{2}}$ et $x \mapsto -3(x-1)^{\frac{2}{3}}$ sont aussi dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = 4 \times \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} - 3 \times \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{x-1}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{2\left(\sqrt[6]{(x-1)^3} - \sqrt[6]{(x-1)^2}\right)}{\sqrt[6]{(x-1)^5}}$$

Puisque $\sqrt[6]{(x-1)^5} > 0$ pour tout $x \in I$ alors le signe de $f'(x)$ sur I est celui de $\sqrt[6]{(x-1)^3} - \sqrt[6]{(x-1)^2}$

Scanné avec CamScanner

est aussi le signe de $(x-1)^2-(x-1)^3$ et on a de plus : $(x-1)^2-(x-1)^3=(x-1)^2(2-x)$

On obtient alors les résultats suivants :

- Pour tout $x\in]1;2[$: $f'(x)>0$ et donc f est strictement croissante sur $[1;2]$.
- Pour tout $x\in]2;+\infty[$: $f'(x)<0$ et donc f est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.
- $f'(2)=0$ et donc f admet un extremum en 2 (car f' change de signe en ce point)

3) a) On a pour tout $x>1$:

$$f(x)=4\sqrt{x-1}-3.\sqrt[3]{(x-1)^2}=\sqrt[3]{(x-1)^2}\left(4\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}-3\right)=\sqrt[3]{(x-1)^2}\left(4.\sqrt[6]{\frac{1}{x-1}}-3\right)$$

b) On a pour tout $x>1$, $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}\left(4.\sqrt[6]{\frac{1}{x-1}}-3\right)$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x-1)^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4.\sqrt[6]{\frac{1}{x-1}}-3\right)=-3$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^3}}\left(4.\sqrt[6]{\frac{1}{x-1}}-3\right)=0\times(-3)=0$. Par conséquent, $\mathscr{C}_f$ admet une

une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dirigée vers l'axe des abscisses.

c) On a $f(0)=1$ donc $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point $B(0,1)$.

Les abscisses des points d'intersections de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont (s'ils existent) les solutions de l'équation $f(x)=0$. Puisque $(x-1)^2=|x-1|^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ alors :

$$f(x)=0\Leftrightarrow 4\sqrt{|x-1|}-3\sqrt[3]{|x-1|^2}=0\Leftrightarrow 4.\sqrt[6]{|x-1|^3}-3\sqrt[6]{|x-1|^4}=0$$

En posant $t=\sqrt[6]{|x-1|}$ on obtient :

$$f(x)=0\Leftrightarrow 4t^3-3t^4=0\Leftrightarrow t^3(4-3t)=0\Leftrightarrow\left(t=0\ ou\ t=\frac{4}{3}\right)\Leftrightarrow\left[x=1\ ou\ x=1+\left(\frac{4}{3}\right)^6\ ou\ x=1-\left(\frac{4}{3}\right)^6\right]$$

Par suite, $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en trois points dont les abscisses : 1 et $1+\left(\frac{4}{3}\right)^6$ et $1-\left(\frac{4}{3}\right)^6$

d) On pose pour tout $x\in[0,1]$: $g(x)=f(x)-x$

D'après la question 1) on a $f(x)=f(2-x)$, et donc : $\forall x\in[0,1]$: $g(x)=f(2-x)-x$

On a la fonction $u: x\mapsto 2-x$ est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$ et $u([0;1])=[1;2]$ et f continue sur $[1;2]$ donc la fonction $fou: x\mapsto f(2-x)$ est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$, et on sait que $v: x\mapsto -x$ est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$ donc $g=gou+v$ est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$ et par suite g réalise une bijection de $[0;1]$ sur $g([0;1])=[-1;1]$.

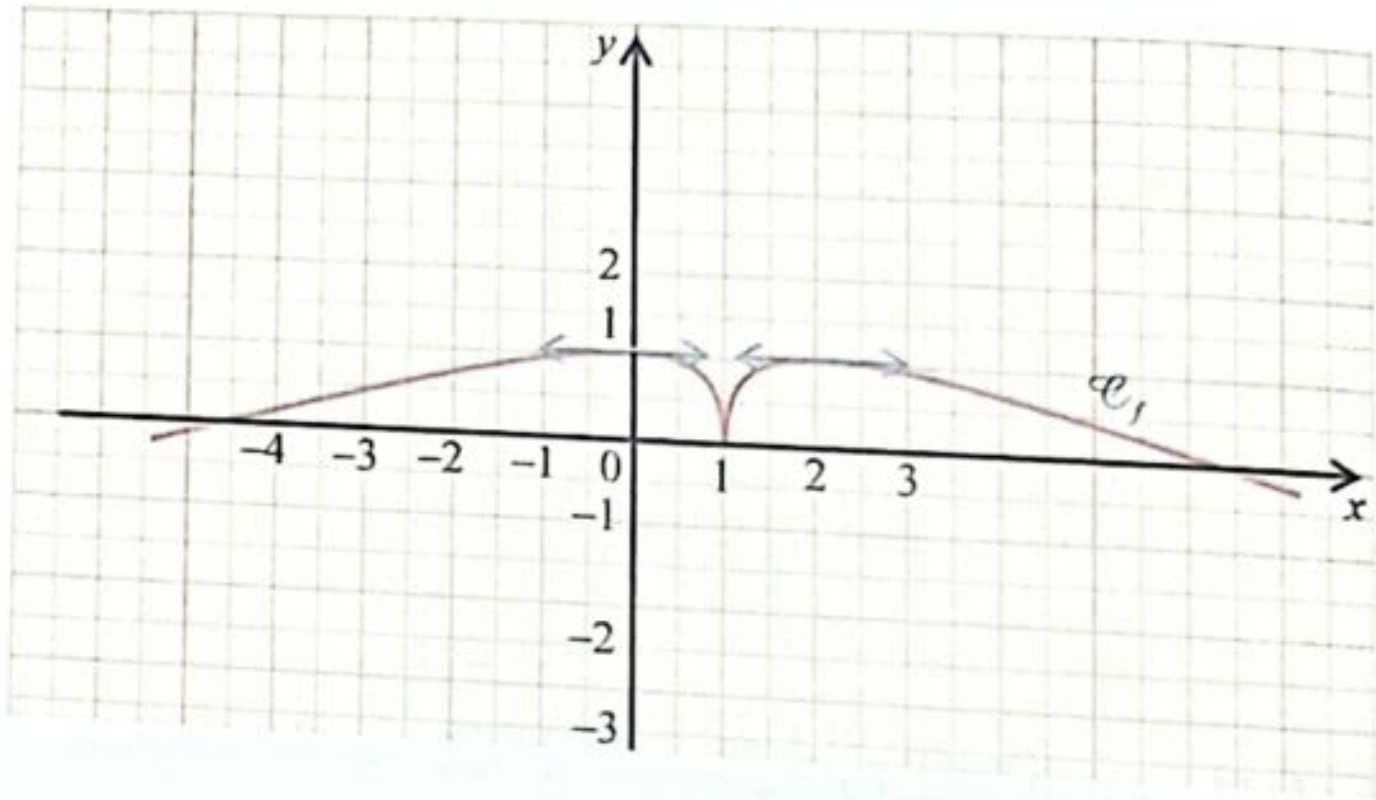
Or $0\in]-1;1[$ donc il existe un unique réel $\alpha\in]0;1[$ tel que $g(\alpha)=0$. Par suite : $\exists!\alpha\in]0;1[\ /\ f(\alpha)=\alpha$

Scanné avec CamScanner

Le signe de $f(x)-x$ sur $[0;1]$ est celui de $g(x)$ sur $[0;1]$ et puisque g est strictement décroissante sur $[0;1]$ alors :

- Si $0 \le x \le \alpha$ alors $g(x) \ge g(\alpha)$ c'est-à-dire que $g(x) \ge 0$.
- Si $\alpha \le x \le 1$ alors $g(x) \le g(\alpha)$ c'est-à-dire que $g(x) \le 0$.

4) La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f :



Partie II :

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$

Initialisation : On a $0 < u_0 < \alpha$ et puisque $0 < \alpha < 1$ alors $0 < u_0 < 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 < u_n < 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 1$.

On sait que la fonction f est strictement décroissante sur $[0;1]$ et puisque $0 < u_n < 1$ alors $f(1) < f(u_n) < f(0)$ et donc : $0 < u_{n+1} < 1$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$

2) a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = fof(u_{2n}) = fof(v_n)$

$w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = fof(u_{2n+1}) = fof(w_n)$

b) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n < \alpha$

Initialisation : On a $v_0 = u_0$, et puisque $0 < u_0 < \alpha$ alors $v_0 < \alpha$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n < \alpha$ et montrons que $v_{n+1} < \alpha$.

On a par hypothèse et d'après ce qui précède $0 < v_n < \alpha < 1$ et on sait que la fonction f est strictement décroissante sur $[0;1]$ et que $f([0;1]) = [0;1]$. Donc la fonction fof est strictement croissante sur $[0;1]$, et alors $fof(v_n) < fof(\alpha)$, d'où $v_{n+1} < \alpha$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n < \alpha$.

On montre de la même façon (par récurrence) que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ w_n > \alpha$. Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n < \alpha < w_n$

Scanné avec CamScanner

3) a) Montrons que la suite (v_n) est croissante et la suite (w_n) est décroissante :

Pour cela, on va montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_{n+1} \geq v_n$ *et* $w_{n+1} \leq w_n$

Initialisation : On vérifie bien que $v_0 \leq v_1$ et $w_1 \leq w_0$

Hérédité : Supposons que $v_{n+1} \geq v_n$ et $w_{n+1} \leq w_n$ et montrons que $v_{n+2} \geq v_{n+1}$ et $w_{n+2} \leq w_{n+1}$.

Puisque $1 > v_{n+1} \geq v_n > 0$ et $0 < w_{n+1} \leq w_n < 1$ et la fonction fof est strictement croissante sur $[0;1]$,

alors $fof(v_{n+1}) \geq fof(v_n)$ et $fof(w_{n+1}) \leq fof(w_n)$, ce qui entraîne $v_{n+2} \geq v_{n+1}$ et $w_{n+2} \leq w_{n+1}$.

Conclusion : la suite (v_n) est croissante et la suite (w_n) est décroissante.

b) Puisque la suite (v_n) est croissante et majorée par α alors elle est convergente. De même, la suite (w_n) est décroissante minorée par α, donc elle est convergente.

On a $v_{n+1} = fof(v_n)$, fof est continue sur $I = [0;1]$, $fof(I) \subset I$ et (v_n) est convergente. Il s'ensuit donc que la limite ℓ de la suite (v_n) est solution de l'équation $fof(x) = x$ avec $x \in I$. On vérifie aisément que α est l'unique solution de cette équation. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \alpha$

On montre de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \alpha$. Par suite, les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

c) Montrons en utilisant la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$:

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \alpha$ alors :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})\ ; (n \geq N_1 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$ et $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N})\ ; (n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - \ell| < \varepsilon)$

En posant $N = Max(N_1, N_2)$ on en déduit que : $(\forall n \geq N)\ (|v_n - \ell| < \varepsilon$ et $|w_n - \ell| < \varepsilon)$

On a donc montré que : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ ;\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$

ce qui prouve bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

D INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sin x$

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$

3) a) Montrer que pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$: $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n - \alpha|$

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$:

On considère la fonction g définie sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f(x) - x$

La fonction g est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ et on a pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$: $g'(x) = f'(x) - 1 = -\cos x - 1 < 0$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$. D'après le théorème de la bijection, la fonction g réalise une bijection de $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ sur l'intervalle $g\left(\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]-1;\frac{2\pi-3}{6}\right[$. Et puisque $0 \in \left]-1;\frac{2\pi-3}{6}\right[$ alors il existe un unique antécédent $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$

2) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$

Initialisation : On a pour $n = 0$, $\frac{\pi}{6} < u_0 < \frac{\pi}{2}$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$ et montrons que $\frac{\pi}{6} < u_{n+1} < \frac{\pi}{2}$.

Puisque $\frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$ et la fonction f est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ alors :

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) < f(u_n) < \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} f(x)$ ce qui donne $\frac{\pi}{2} - 1 < u_{n+1} < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$. Et comme $\frac{\pi}{2} - 1 < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

alors $\frac{\pi}{6} < u_{n+1} < \frac{\pi}{2}$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$

3) a) Montrons que pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$, $|f'(x)| < \frac{\sqrt{3}}{2}$:

Soit $x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$. On a $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sin x$ et $f'(x) = -\cos x$. Puisque la fonction $x \mapsto \cos x$ est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos\frac{\pi}{2} < \cos x < \cos\frac{\pi}{6}$, c'est-à-dire que $0 < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Par conséquent $-\frac{\sqrt{3}}{2} < -\cos x < 0 < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Il s'ensuit donc que $|f'(x)| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n - \alpha|$

Puisque f est continue et dérivable sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ alors elle continue et dérivable sur chaque segment $[a;b]$

Scanné avec CamScanner

inclus dans $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$. Puisque pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$, $|f'(x)| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $|f(b)-f(a)| \le \frac{\sqrt{3}}{2}|b-a|$. En prenant : $b = u_n$ et $a = \alpha$. On obtient alors :

$|f(u_n)-f(\alpha)| \le \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n-\alpha|$. Comme $f(\alpha)=\alpha$ et $f(u_n)=u_{n+1}$ alors : $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n-\alpha|$.

4) Déterminons la limite de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n-\alpha|$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n-\alpha| \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

Initialisation : On a pour $n=0$, $|u_0-\alpha| \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 |u_0-\alpha|$.

Hérédité : Supposons que $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$ et montrons que $|u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$

On a d'après la question précédente : $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n-\alpha|$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}|u_n-\alpha| \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$

Donc : $|u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$. Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

Comme $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$. Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

- On rappelle que si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et telle que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \le M$ alors $|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$.

- Pour appliquer l'une des inégalités des accroissements finis à la fonction f entre a et b, il suffit, soit d'encadrer $f'(x)$ sur $[a,b]$, avec $a<b$, soit de majorer $|f'(x)|$ sur un intervalle I contenant a et b, avec a et b quelconques dans I.
- La correspondance entre $(a,b) \in I^2$ et le nombre $c \in]a,b[$ vérifiant $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ n'est pas fonctionnelle, c'est le cas par exemple de la fonction numérique $f:[0;4\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=\cos x$. Cela explique partiellement l'intérêt accordé à l'inégalité des accroissements finis. D'ailleurs l'égalité n'a lieu que par les fonctions à valeurs réelles.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES D'APPLICATION

DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

EXERCICE 01

En utilisant la définition, montrer que la fonction f est dérivable en x_0 en déterminant le nombre dérivé $f'(x_0)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; $x_0=0$

2) $f(x)=2x-\sqrt[3]{x}$; $x_0=1$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$; $x_0=-2$

4) $f(x)=x|x|$; $x_0=0$

5) $f(x)=2x-\text{Arctan}\sqrt{x+1}$; $x_0=0$

6) $f(x)=\cos x-\sin^2 x+\tan(4x)$; $x_0=0$

7) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$; $x_0=0$

8) $\begin{cases} f(x)=x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$; $x_0=0$

9) $f(x)=\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$; $x_0=-1$

EXERCICE 02

Étudier la dérivabilité à droite et à gauche en x_0 de chacune des fonctions suivantes puis préciser si la fonction est dérivable en x_0 ou non :

1) $f(x)=|x^2-1|$; $x_0=1$

2) $g(x)=\sqrt{|x^2-4|}$; $x_0=-2$

3) $\begin{cases} h(x)=4x^3-3 & \text{si } x\geq 1 \\ h(x)=2x^2-1 & \text{si } x<1 \end{cases}$; $x_0=1$

EXERCICE 03

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)\sqrt{x-1} & \text{si } x\geq 1 \\ f(x)=x^3-x & \text{si } x<1 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue en 1.

2) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche en 1 de la fonction f puis interpréter les résultats obtenus

EXERCICE 04

Étudier la dérivabilité à droite en x_0 de la fonction f puis interpréter le résultat obtenu :

1) $f(x)=\sqrt[4]{x-2}$; $x_0=2$

2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; $x_0=-1$

3) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$; $x_0=1$

4) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}+5}$; $x_0=0$

5) $f(x)=\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)$; $x_0=0$

6) $f(x)=\left(\text{Arctan}\sqrt{x-3}\right)^2$; $x_0=3$

EXERCICE 05

Étudier la dérivabilité à gauche en x_0 de la fonction f puis interpréter le résultat obtenu :

1) $f(x)=x+\sqrt[3]{1-x}$; $x_0=1$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$; $x_0=1$

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$; $x_0=0$

4) $f(x)=\sqrt{\pi-3\text{Arc}\tan x}$; $x_0=\sqrt{3}$

5) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$; $x_0=-2$

6) $f(x)=\sqrt{1-x^3}$; $x_0=1$

7) $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-x^2}$; $x_0=1$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 05

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{|x-2|-2}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f au point $x_0=2$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

EXERCICE 07

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{4\}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x-\sqrt[3]{1-x} & \text{si } x<1 \\ f(x)=\dfrac{1}{2-\sqrt{x}} & \text{si } x\geq 1 \text{ et } x\neq 4 \end{cases}$$

1) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f au point $x_0=1$.

2) Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

EXERCICE 08

Pour chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f puis interpréter géométriquement les résultats obtenus :

1) $\begin{cases} f(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2} & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-x} & \text{si } x>1 \end{cases}$; $x_0=1$

2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\tan x}{\sqrt{x}} & \text{si } 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{1-x}} & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$; $x_0=0$

3) $\begin{cases} f(x)=1+\sqrt[3]{x^3-2x^2} & \text{si } x\geq 2 \\ f(x)=\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{\sqrt{2-x}} & \text{si } x<2 \end{cases}$; $x_0=2$

4) $\begin{cases} f(x)=\operatorname{Arctan}\left(x\sqrt{x}\right) & \text{si } x\geq 0 \\ f(x)=\sqrt{|x|}\sin x^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$; $x_0=0$

5) $\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{\operatorname{Arctan}(1-x)} & \text{si } x\leq 1 \\ f(x)=(x^2-1)^{\frac{3}{4}}+2(x-1)^{\frac{4}{3}} & \text{si } x>1 \end{cases}$; $x_0=1$

DÉRIVATION ET APPROXIMATION

EXERCICE 09

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt[3]{x^3+8}$

1) Justifier que f est dérivable en 0.

2) En déduire une approximation affine de l'expression $\sqrt[3]{x^3+8}$ au voisinage de 0.

3) Déterminer une valeur approchée des nombres :

$$\sqrt[3]{8,004} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{7,9995}$$

EXERCICE 10

1) Donner une approximation affine de la fonction $x\mapsto \cos x$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$ puis déterminer une valeur approchée au nombre $\cos(46^\circ)$.

2) Déterminer une valeur approchée à chacun des nombres $\sin(46^\circ)$ et $\tan(46^\circ)$.

EXERCICE 11

1) Donner une approximation affine à chacune des expressions : $(1+x)^{10}$ et $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ et $\sin x$ au voisinage de 0.

2) Donne une valeur approchée à chacun des nombres :

$$(1,004)^{10} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1,02)^2} \quad \text{et} \quad \sin(0,1^\circ)$$

CALCUL DE LA FONCTION DÉRIVÉE

EXERCICE 12

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x)=4x^5+8x^2-13x+7$; $g(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x^4+1}}$

$h(x)=\left(x^2+5x+4\cos x\right)^7$; $k(x)=\dfrac{2x^3+x+2}{x^2+x}$

$u(x)=\left(x^4+x+2\right)\sin(8x)$; $v(x)=\sqrt[3]{x^2+x+4}$

Scanné avec CamScanner

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 13

Pour chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur son domaine de définition puis déterminer une expression de sa dérivée :

1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x + 55$

2) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$

3) $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{x}{x-1}$; 4)- $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

5) $f(x) = \left(\sqrt{x-1} + x\right)^3$; 6)- $f(x) = \cos^4 x$

7) $f(x) = \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

8) $f(x) = \cos(3x) - \sin(6x)$

9) $f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$; 10)- $f(x) = |x^3 - x|$

11) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 4} & \text{si } x > 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \le 2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} f(x) = x\sin x & \text{si } x \ge 0 \\ f(x) = 1 - \cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

EXERCICE 14

Pour chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur son domaine de définition puis déterminer une expression de sa dérivée :

1) $f(x) = \left(x^2 + 3x\right)\sqrt[3]{2x}$; 2) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 5\right)^7$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 4}$; 4) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x}{x-1}}$

5) $f(x) = -x + \sqrt[3]{2x+1}$; 6) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^4}$

7) $f(x) = \frac{4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x} + 1}$; 8) $f(x) = x\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$

9) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$; 10) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{x^2 + 3}}$

EXERCICE 15

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; $g(x) = \sqrt[3]{x^4} + (x-1)^{\frac{5}{3}}$

$h(x) = |4x - 2|^{\frac{5}{3}}$; $k(x) = x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[4]{x^2 + 1}$

EXERCICE 16

1) **Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :**

$$f(x) = \sin\left(x\sqrt{x}\right)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puis déterminer sa dérivée.

2) **Étudier la dérivabilité de la fonction g définie par $g(x) = \cos\left(\sqrt{x^2 - x}\right)$ sur son domaine de définition puis déterminer sa dérivée.**

EXERCICE 17

Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir déterminé leurs domaines de définition :

1) $f(x) = \cos\left(3x + 4\sqrt{x}\right)$; 2) $f(x) = \frac{3\sin x - 1}{\sin x - 1}$

3) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x^2 + 3x + 7}\right)^3$; 4) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$

5) $f(x) = \cos\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)$; 6) $f(x) = \sin\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)$

7) $f(x) = \cos(3x+1).\sin(2x-1)$

8) $f(x) = \sin(\cos x)$; 9) $f(x) = x^2 \tan\left(\frac{1}{x}\right)$

EXERCICE 18

Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir déterminé leurs domaines de définition :

1) $f(x) = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)$

2) $f(x) = \sqrt{2 + \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{1 + \tan^4\left(\sqrt[3]{x}\right)}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 19

Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir déterminé leurs domaines de définition :

1) $f(x) = x^4 \operatorname{Arc\,tan} x$; 2) $f(x) = x\operatorname{Arctan}\sqrt{x}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{Arc\,tan} x}$; 4) $f(x) = \sqrt{x + \operatorname{Arc\,tan} x}$

5) $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arc\,tan} x}{\sqrt{x}}$; 6) $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

7) $f(x) = \left(\operatorname{Arctan}(\sin x)\right)^4 + \left(\operatorname{Arc\,tan} x - x\right)^3$

8) $f(x) = 3\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) + 2x\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

EXERCICE 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(2x^3 - 1\right)^4$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) En utilisant la formule donnant la dérivée de la fonction composée, en déduire les dérivées des fonctions suivantes :

$g(x) = f(\cos x)$; $h(x) = f\left(\sqrt[3]{6x+1}\right)$

$k(x) = f\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$; $s(x) = f\left(\tan\dfrac{\pi}{x}\right)$

$u(x) = f\left(\sqrt[4]{x}\right)$; $v(x) = f\left(\left(\operatorname{Arc\,tan} x\right)^4\right)$

DÉRIVATION ET CALCUL DES LIMITES

EXERCICE 21

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto (2x-1)^{15}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer la limite :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)^{15}-1}{x-1}$$

2) On considère la fonction $g : x \mapsto 3\cos^2 x - \sin^2 x$.

Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis calculer la limite : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{3\cos^2 x - \sin^2 x}{3x-\pi}$

EXERCICE 22

En utilisant le nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^4-625}{x-5}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{10}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$

$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{4x+3}}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x+\sin^2 x-\pi}{x-\pi}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{4\cos^2 x-1}{x-\frac{\pi}{3}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt[3]{7-4\sin x}-\sqrt[3]{5}}{x-\frac{\pi}{6}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\tan x - x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{\tan x+1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sin(x-1)}{(2-x)^6-1}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^{12}+1}-\cos(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{\tan^2 x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}$

EXERCICE 23

Soit n un entier naturel non nul. En utilisant le nombre dérivé, calculer les limites suivantes : $(a \in \mathbb{R}^*)$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^n x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[n]{x+a}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$; $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{x-a}$

EXERCICE 24

Soit a un réel quelconque.

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{Arc\,tan} x-\operatorname{Arc\,tan} a}{x-a}=\dfrac{1}{1+a^2}$

2) En déduire les valeurs des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{Arc\,tan} x-\frac{\pi}{4}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{\operatorname{Arc\,tan} x-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}$

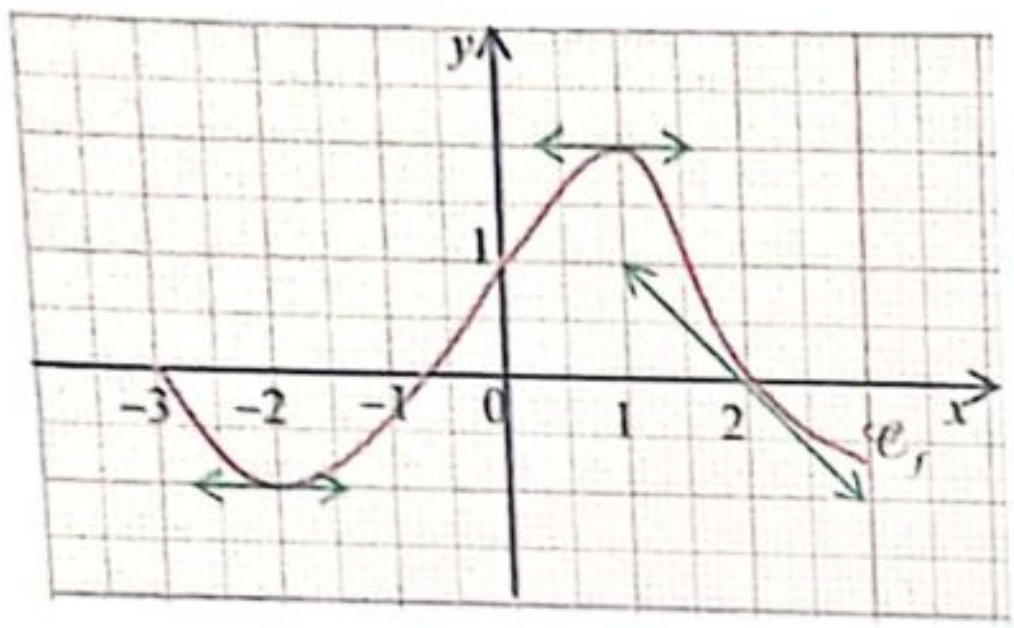
$\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{\operatorname{Arc\,tan} x+\frac{\pi}{6}}{3x+\sqrt{3}}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4\operatorname{Arc\,tan} x+\pi}{x+1}$

Scanné avec CamScanner

DÉRIVATION ET MONOTONIE

EXERCICE 24

Le dessin suivant présente la courbe d'une fonction f sur l'intervalle $[-3;3]$:



1) Résoudre l'équation $f'(x)=0$.

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} \quad ; \quad \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$$

3) a) Résoudre dans $[-3;3]$ l'inéquation : $f'(x)\geq 0$

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 1 et 2.

EXERCICE 25

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations sur I :

1) $f(x)=x^4-4x$; $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$; $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$; $I=\mathbb{R}^*$

4) $f(x)=6x-4x\sqrt[3]{x}+1$; $I=\mathbb{R}^*$

5) $f(x)=2\sin x+\cos(2x)$; $I=]-\pi;\pi]$

6) $f(x)=\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1}$; $I=\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[$

7) $f(x)=\text{Arctan}\left(x-2\sqrt{x}\right)$; $I=\mathbb{R}_+^*$

EXERCICE 27

On considère la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\sqrt[3]{x+1}$$

1) Vérifier que $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{9}-1\right)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{9}-1$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Étudier la dérivabilité à droite de f en -1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]-1;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de f.

DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

EXERCICE 28

Soit f la fonction définie sur $I=]-\infty;2]$ par :

$$f(x)=\sqrt{2-x}-x$$

1) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

2) Soit f^{-1} la fonction réciproque de la fonction f.

Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-2;+\infty[$ puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

EXERCICE 29

On considère la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-3+\sqrt{x^2-x}$$

1) Étudier la dérivabilité de la fonction g à droite en 1 puis interpréter le résultat géométriquement.

2) Étudier les variations de la fonction g.

3) a) Montrer que g admet une fonction réciproque dont on déterminera le domaine de définition.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\left(\sqrt{2}-1\right)$ puis calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Scanné avec CamScanner

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\cos(2x)$

1) Montrer que f est une bijection de I sur $J=[-1;1]$.

2) Montrer que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$ puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

3) Montrer que : $\left(\forall x\in\,]-1;1[\right)\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

EXERCICE 31

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-3x-3$$

1) Étudier les variations de la fonction f.

2) Soit g la restriction de f sur $[1,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α et que $2<\alpha<3$.

c) Montrer que : $\left(g^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{3(\alpha^2-1)}$

EXERCICE 32

Soit f la fonction définie sur $I=\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$ par :

$$f(x)=1+\frac{1}{\sin x}$$

1) Étudier les variations de la fonction f.

2) En déduire que la fonction f admet une fonction réciproque sur un intervalle J à déterminer.

3) Montrer que pour tout $x\in I$:

$$f'(x)=(f(x)-1)\sqrt{(f(x))^2-2f(x)}$$

4) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]2;+\infty[$ et que :

$$\left(\forall x\in\,]2;+\infty[\right)\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$$

EXERCICE 33

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose que f est strictement monotone sur I.

Montrer que si $x_0\in I$ et $y_0=f(x_0)$ avec $f'(x_0)\neq 0$, alors l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ de f^{-1} au point d'abscisse $M(y_0,x_0)$ est donnée par :

$$y=\frac{1}{f'(x_0)}x+x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

EXERCICE 34

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=4x\sqrt[3]{x} & \text{si } x>0 \\ g(x)=-\dfrac{2x}{\sqrt[3]{1-x}} & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$$

1) Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de la fonction g au point $x_0=0$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Étudier les variations de la fonction g.

3) Soit h la restriction de g sur $\mathbb{R}^-$.

a) Montrer que h est une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur un intervalle I à déterminer.

b) Étudier la dérivabilité de la fonction h^{-1} sur I puis calculer $\left(h^{-1}\right)'(7)$.

THÉORÈME DE ROLLE ET ACCROISSEMENTS FINIS

EXERCICE 35

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f vérifie les conditions du théorème de Rolle sur I puis déterminer un nombre réel c de I vérifiant $f'(c)=0$:

1) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$; $I=[1;3]$

2) $f(x)=x-\sqrt[3]{4x}+2017$; $I=[0;2]$

3) $f(x)=\pi x-3\sqrt{3}\operatorname{Arc}\tan x+1$; $I=\left[0;\sqrt{3}\right]$

Scanné avec CamScanner

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 36

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 4x$

On considère les points $A(1,-3)$ et $B(4,0)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f. Déterminer le point $M(\alpha, f(\alpha))$ tel que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M soit parallèle à la droite (AB).

EXERCICE 37

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = |x| - 2\sqrt{|x|}$$

1) Justifier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer $g'(x)$ sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

3) Vérifier que : $g\left(-\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right)$

4) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}\right)\ g'(x) \neq 0$

5) Montrer que : $\left(\exists c \in \left]-\frac{1}{4};2\right[\right);\ g'(c) = 0$

EXERCICE 38

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2-1)(x-2)^4(x+3)^2(x+4)^7$$

Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins quatre solutions dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 39

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \in]0;1] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Soit n un entier naturel non nul.

Montre qu'il existe un élément $c_n \in \left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right[$ tel que : $f'(c_n) = 0$

2) En déduire que l'équation $\tan x = x$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 40

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin x - x^2$

1) Montrer que : $\left(\exists \alpha \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\right);\ f(\alpha) = 0$

2) En déduire que l'équation $\cos(x) - 2x = 0$ admet une solution sur $\mathbb{R}$.

Cette solution est-elle unique ? Justifier.

EXERCICE 41

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soit x_1, x_2 et x_3 trois éléments distincts de I tels que :

$$2f(x_2) = f(x_1) + f(x_3)$$

Montrer que : $(\exists c \in I);\ f'(c) = 0$

EXERCICE 42

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$ tel que :

$f(a) = f(b) = 0$ et $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

Montrer par l'absurde que : $(\forall x \in]a,b[)\ f(x) \neq 0$

EXERCICE 43

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in]0;1[\cap \mathbb{Q}$ on a :

$$\frac{r}{(n+1)^{1-r}} \leq (n+1)^r - n^r \leq \frac{r}{n^{1-r}}$$

Indication : On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f : x \mapsto x^r$

EXERCICE 44

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

1) $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ \frac{x}{1+x^2} < \text{Arc}\tan x < x$

3) $(\forall (x,y) \in [0;10]^2)\ |x\sin x - y\sin y| \leq 11|x-y|$

4) $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right)\ \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}x$

Scanné avec CamScanner

1) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.

Montrer que : $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$

2) Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty;\frac{5}{3}\right]$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{5-3x} + x - 2$$

Montrer que pour tout $a, b \in \left]-1;\frac{4}{3}\right[$:

$$|f(b) - f(a)| < \frac{3}{4}|b-a|$$

3) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x \operatorname{Arc\,tan} x$

Montrer que :

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2)\ |g(b) - g(a)| \leq 3|b-a|$$

4) Établir l'inégalité suivante :

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2)\ |\operatorname{Arc\,tan} a - \operatorname{Arc\,tan} b| \leq |b-a|$$

EXERCICE 46

En utilisant le théorème des accroissements finis,

établir les inégalités suivantes :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 50^\circ < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{36} \quad ; \quad |\sin 80^\circ - 1| \leq \frac{\pi}{36}$$

EXERCICE 47

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt[3]{x}$

1) Montrer que pour tout $x \in [1000;1001]$:

$$\frac{1}{3\times(10,1)^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3\times 10^2}$$

2) En déduire que : $10,0032 < \sqrt[3]{1001} < 10,0034$

EXERCICE 48

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]0;1[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

EXERCICE 49

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(t) = \sqrt{t}$

1) Soit x un réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout $t \in [x, x+1]$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est divergente.

EXERCICE 50

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b[$ telle que : $f(b) = 0$ et $f'_d(a) = 0$

En considérant la fonction g définie sur $[a,b]$ par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x-a} \text{ si } x \neq a \text{ , et } g(a) = 0$$

Montrer que : $(\exists c \in]a,b[)\ ;\ \frac{f(c)}{c-a} = f'(c)$

CONCAVITÉ ET POINTS D'INFLEXION

EXERCICE 51

Dans chacun des cas suivants, étudier la concavité de de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f en déterminant ses éventuels points d'inflexion :

1) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; 2) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2-x^2}$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}$; 4) $f(x) = 3x + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

5) $f(x) = -\cos^2 x - 2\sin x$; 6) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos(2x)}$

7) $f(x) = x - \operatorname{Arc\,tan} x$; 8) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$

Scanné avec CamScanner

AXE DE SYMÉTRIE – CENTRE DE SYMÉTRIE

EXERCICE 52

Dans chacun des cas suivants, montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f :

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4x+1}$ et $(\Delta): x=2$

2) $f(x)=\sin^4 x-5\cos^2 x+7$ et $(\Delta): x=\dfrac{\pi}{2}$

3) $f(x)=\text{Arctan}\left(\sqrt{x^2+4x}\right)$ et $(\Delta): x=-2$

4) $f(x)=\dfrac{2-\sin^4 x}{\cos x+3}$ et $(\Delta): x=0$

EXERCICE 53

Dans chacun des cas suivants, montrer que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f :

1) $f(x)=\dfrac{3x^2+8x+4}{x+1}$ et $\Omega(-1,2)$

2) $f(x)=\sqrt{3}\cos(2x)+\sin(2x)$ et $\Omega\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$

3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ et $\Omega\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

ÉTUDE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

EXERCICE 54

Étudier puis représenter graphiquement la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$; 2) $f(x)=\text{Arctan}(2x)-x$

3) $f(x)=\dfrac{\sin x.\cos x}{1-\cos(4x)}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$

5) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-x$; 6) $f(x)=\sqrt[3]{1-x}-1$

7) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-1}$; 8) $f(x)=\sqrt{x^2-|x|+1}$

9) $f(x)=\tan x-\dfrac{1}{\cos x}$; 10) $f(x)=(4-x)^{\frac{1}{2}}$

LES FONCTIONS PRIMITIVES

EXERCICE 55

Dans chacun des cas suivants, Déterminer une primitive de la fonction f ainsi les intervalles où elle est définie :

1) $f(x)=x^2+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$

3) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 4) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^3$; 6) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

7) $f(x)=x\sqrt[3]{x^2-1}$; 8) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$

9) $f(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\sqrt[3]{x^2-3x+8}$

10) $f(x)=\sin x.\cos^3 x$; 11) $f(x)=\sin x.\sin 2x$

12) $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}+\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

13) $f(x)=\sin x.\cos x.\sqrt{1-\cos 2x}$

14) $f(x)=\sin x.\cos 2x$; 15) $f(x)=\cos^4 x$

16) $f(x)=\sin^5 x$; 17) $f(x)=\tan^2 x$

18) $f(x)=\dfrac{5}{x^2+6x+10}$; 19) $f(x)=1+\dfrac{1}{\tan^2 x}$

20) $f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)^2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+7\right)^2}$

21) $f(x)=\dfrac{\text{Arc}\tan x}{1+x^2}$; 22) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

23) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{\left(1+x^2\right)^2}$; 24) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

25) $f(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2}$; 26) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

27) $f(x)=3\cos\dfrac{x}{2}-5\sin\dfrac{2x}{3}+\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 56

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

1) Étudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter les résultats obtenus graphiquement.

2) a) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

b) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $J = \left[\frac{1}{2}; 1\right[$ et $J' =]1; +\infty[$ et étudier les variations de f sur chacun des intervalles J et J'.

c) Montrer que le point I est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

3) a) Déterminer la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

EXERCICE 57

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x^2} - 2x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = x + \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

c) Étudier la dérivabilité à gauche de la fonction f en 0 (On pourra poser : $t = \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{x}$)

d) f est-elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

3) Étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $[0; +\infty[$.

4) Soit g la restriction de f à $I = [0; +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(-1)$ puis tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{g^{-1}}$.

EXERCICE 58

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \text{Arc tan } x - \frac{1}{\text{Arc tan } x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \\ f(x) = \frac{\sqrt[3]{1-6x} + x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) f est-elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.

2) Étudier la dérivabilité à gauche de la fonction f en 0 puis interpréter le résultat obtenu.

3) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

b) Étudier les variations de la fonction f.

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

5) Soit g la restriction de f sur $I =]0; +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis tracer $\mathcal{C}_{g^{-1}}$.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE 59

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{\tan x}{1 - 2\sin x}$$

1) Déterminer D le domaine de définition de f.

2) a) Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de

Scanné avec CamScanner

symétrie de la courbe $\mathscr{C}$, et qu'il suffit d'étudier la fonction f sur $E = \left]\frac{3}{2}; 3\right[\cup \left]3; +\infty\right[$.

b) Calculer les limites de f aux bornes de E.

c) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles de E.

3) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur $]-\pi;\pi[\cup]3;+\infty[$.

EXERCICE 65

Première partie :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$$

1) Étudier les variations de la fonction g.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α puis vérifier que $\frac{5}{2} < \alpha < 3$.

3) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Deuxième partie :

On considère la fonction h définie sur $]-\infty;0[$ par :

$$h(x) = 2\text{Arctan}\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$$

1) Donner le tableau de variations de h.

2) Déterminer le signe de $h(x)$ sur $]-\infty;0[$.

3) a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^*_-)\ t \leq \text{Arc tan}\, t \leq \frac{t}{1+t^2}$

b) En déduire que : $\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{\text{Arc tan}\, t - t}{t} = 0$

Troisième partie :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2\ \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{x}{x-1}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } x \neq -1 \end{cases}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Montrer que la fonction f est continue en 0

3) Etudier la dérivabilité à droite de la fonction f en 0 et interpréter le résultat géométriquement.

4) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \pi - 1$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

5) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*_+)\quad f'(x) = \frac{g(x)}{3(x-1)^2\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*_-)\quad f'(x) = (x-1)h(x)$$

b) Dresser le tableau de variations de f.

6) a) En posant $t = \frac{1}{x}$, montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - \left(x - 2 + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0$$

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

7) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ (On prend : $f(\alpha) = 3{,}2$)

8) Soit u la restriction de f à $\mathbb{R}^*_-$.

a) Montrer que u réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que u^{-1} est dérivable sur J et déterminer $\left(u^{-1}\right)'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

EXERCICE 66

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -2x\text{Arc tan}\, x & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2-1}\ \text{Arc tan}\, x + \text{Arctan}\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) a) Montrer que la fonction f est continue en 1.

b) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f en 1 puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

2) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et $f'(0)$ puis donner le

Scanné avec CamScanner

tableau de variation de la fonction f'.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty;1[$.

Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et donner le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) Vérifier que :

$(\forall x>0)$ $\operatorname{Arc\tan} x + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

$(\forall x<0)$ $\operatorname{Arc\tan} x + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

b) Montrer que la droite $(\Delta): y=\dfrac{\pi}{2}x-1$ est une asymptote de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, et la droite $(\Delta'): y=\pi x+2$ est une asymptote de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

On considère l'équation $f(x)=x$. Déterminer la solution α de cette équation dans $\mathbb{R}_-^*$.

On considère une suite (u_n) définie par :

$\alpha<u_0<0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \alpha<u_n<0$

b) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 62

On considère la fonction f définie sur $I=[0;8]$ par :

$$f(x)=\sqrt{\left(4-\sqrt[3]{x^2}\right)^3}$$

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-8}{x}=-\infty$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est strictement décroissante sur I.

c) Montrer que f est bijective de I vers I.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe de f et $\mathscr{C}'$ celle de f^{-1} dans un repère orthonormé

a) Montrer que la droite $(\Lambda): y=x$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

b) En déduire une expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x puis calculer $\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{f(x)}{x-8}$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Tracer dans le même repère les courbe $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Soit (x_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} x_0=2\sqrt{2} \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{si } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2\sqrt{2}\le x_n\le 8$

b) Étudier la monotonie de (x_n) et sa convergence.

c) Déterminer la limite de la suite (x_n).

EXERCICE 63

Soit f la fonction numérique définie sur $I=]\sqrt{3};+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+x\right)$$

a) Montrer que f est strictement croissante sur I.

b) En déduire que : $(\forall x\in I)\ f(x)\ge\sqrt{3}$

a) Montrer que : $(\forall x\in I)\ 0\le f'(x)\le\dfrac{1}{2}$

b) En déduire que pour tout $x\in I$:

$$0\le f(x)-\sqrt{3}\le\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{3}\right)$$

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0=4$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\ge\sqrt{3}$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$0\le u_{n+1}-\sqrt{3}\le\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{3}\right)$$

c) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$0\le u_n-\sqrt{3}\le\frac{1}{2^n}\left(4-\sqrt{3}\right)$$

puis en déduire que la suite (u_n) est convergente.

Scanné avec CamScanner

Montrer géométriquement ce qui suit :

1) $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\ \frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$

2) $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)\ 1-\frac{2}{\pi}x \le \cos x \le \frac{\pi}{2}-x$

3) $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)\ x \le \tan x \le \frac{4}{\pi}x$

EXERCICE 65

1) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\ \sin x \le x \le \tan x$

2) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\ x \le \tan x \le \frac{x}{\cos^2 x}$

4) Montrer que :

$$\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\ \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x}$$

5) On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, et $g(0)=1$

Montrer que g est dérivable en 0 puis donner $g'(0)$.

EXERCICE 66

Soit $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\sqrt{\sin x}+x$

1) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à préciser.

2) Montrer que la fonction réciproque f^{-1} est continue sur J et dérivable sur $J-\{0\}$.

3) Montrer que : $\left(\exists c \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\ \frac{\cos c}{\sqrt{\sin c}}=\frac{4}{\pi}$

EXERCICE 67

Soit f la fonction numérique définie sur $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\sqrt{\frac{2}{1+\sin x}}$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in I)\ f'(x)=-\frac{\cos x}{\sqrt{2}(1+\sin x)^{\frac{1}{2}}}$

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique λ dans l'intervalle I.

c) Montrer que : $(\forall x \in I)\ |f'(x)| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Vérifier que $f(I) \subset I$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \in I$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1}-\lambda| \le \frac{\sqrt{2}}{2}|u_n-\lambda|$

puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 68

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

1) Montrer que f est dérivable sur $[0;1]$ et que :

$$(\forall x \in [0;1])\ |f'(x)| < \frac{1}{4\cos^2 1}$$

2) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que : $f(\alpha)=\alpha$

3) On considère une suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n-\alpha| < \left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n |u_0-\alpha|$$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente en précisant sa limite.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 69

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

1) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_-^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$f(a) > f(0)+1 \quad \text{et} \quad f(b) > f(0)+1$$

2) En déduire qu'il existe $\alpha \in]a,0[$ et $\beta \in]0,b[$ tels que : $f(\alpha) = f(\beta)$

3) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $f'(c) = 0$

EXERCICE 70

Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I telle que f' soit bornée sur I.

Montrer que la fonction f est aussi bornée sur I.

EXERCICE 71

Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que :

$$f(a) = f(b) = 0 \quad \text{et} \quad f'(a) > 0 \quad \text{et} \quad f'(b) < 0$$

1) Montrer que :

$$(\exists x_1 \in]a,b[)\ f(x_1) > 0 \text{ et } (\exists x_2 \in]a,b[)\ f(x_2) < 0$$

2) En déduire qu'il existe des réels c_1, c_2 et c_3 de $]a,b[$ tels que :

$$f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0 \quad \text{et} \quad c_1 < c_2 < c_3$$

EXERCICE 72

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que : $\lim_{x\to a} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$

Montrer f est dérivable à droite en a et que $f'(a) = \lambda$.

La réciproque est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 73

1) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}$

2) Soit x et y deux réels strictement positifs tels que :

$$x + y = 1$$

Déterminer la valeur maximale de l'expression :

$$\sqrt[3]{x^2 y}$$

EXERCICE 74

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \sqrt[3]{x} - \sin\sqrt[3]{x}$$

1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, il existe au moins $c_1 \in]0,t^3[$ tel que : $t - \sin t = \frac{1}{3}t^3\left(\frac{1-\cos\sqrt[3]{c_1}}{\sqrt[3]{c_1^2}}\right)$

2) En déduire la valeur de la limite : $\lim_{t\to 0^+} \frac{t-\sin t}{t^3}$

EXERCICE 75

1) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x) = \frac{1}{x} - 2\operatorname{Arc}\tan x$$

a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1$.

b) Étudier le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\operatorname{Arc}\tan x}{1+x^2}$$

a) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

b) Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha^2)}$

c) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ 0 \le f(x) < \frac{3\sqrt{3}}{8}$

3) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $(x,x_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $x > x_0$:

$$(\operatorname{Arc}\tan x)^2 - (\operatorname{Arc}\tan x_0)^2 \le \frac{3\sqrt{3}}{4}(x - x_0)$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On considère la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n(x) = \sum_{p=0}^{n}\left(\operatorname{Arctan}\frac{x}{2^p}\right)^2$

Montrer que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{3\sqrt{3}}{2}x$.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on pose : $C(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$

a) Montrer que pour tout $(x,x_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$:

Scanné avec CamScanner

$$\left|u_n(x)-u_n(x_0)\right| \le \frac{3\sqrt{3}}{4}\left|x-x_0\right|\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2^p}$$

b) En déduire que la fonction C est continue sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICE 76

Première partie :

1) Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right)\ 0 < \dfrac{t-\operatorname{Arc\,tan} t}{t^2} < \dfrac{t}{3}$

Puis calculer la limite : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t-\operatorname{Arc\,tan} t}{t^2}$

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\operatorname{Arctan}|x| + \operatorname{Arctan}\frac{1}{|x|} = \frac{\pi}{2}$$

b) En déduire que :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)^2\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2}}{x} = -1-\pi$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-(x-1)^2\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2}}{x} = 1-\pi$$

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2\left|\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right| \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{\pi}{2}$$

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0 puis interpréter géométriquement les résultats.

c) Montrer que : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g(x) = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$$

a) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}^*$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

c) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x) = (x-1)g(x) & \text{si } x > 0 \\ f'(x) = (1-x)g(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

d) Dresser le tableau de variations de f.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, et posons $t = \dfrac{1}{x}$.

a) Vérifier que :

$$f(x)-(x-2) = (t-2).\frac{\operatorname{Arc\,tan} t}{t} + \frac{\operatorname{Arc\,tan} t - t}{t^2}$$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

EXERCICE 77

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt[3]{x-1} & \text{si } x \ge 1 \\ f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 1.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f.

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1 puis interpréter géométriquement le résultat.

4) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$u(t) = t - \operatorname{Arc\,tan} t \text{ et } v(t) = t^3$$

a) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{u(t)}{v(t)}$

b) On pose : $g(x) = u(t)v(x) - u(x)v(t)$

Montrer que : $\left(\exists c \in]0,t[\right)\ g'(c) = 0$

c) En déduire que $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{u(t)}{v(t)} = \dfrac{1}{3}$ et que f est dérivable à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

5) a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]1;+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \in]-\infty;1[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}\left(\operatorname{Arctan}\sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{1-x}}{2-x}\right.$$

Scanné avec CamScanner

c) Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}^*\right)$ $\operatorname{Arc}\tan t - \dfrac{t}{1+t^2} \geq 0$

d) En déduire que f est croissante sur $]-\infty;1]$.

6) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $]3;4[$.

b) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

EXERCICE 78

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{12}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1-\sin(2x)}$

1) Montrer que f réalise une bijection de I sur $J = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$. On pose $g = f^{-1}$ et $K = [1;2]$

2) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α dans K et que $g(K) \subset K$.

3) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $\left(\forall (x,t) \in K^2\right) |g(x)-g(t)| \leq \dfrac{1}{2}|x-t|$

4) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $u_{n+1} = g(u_n)$

a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $u_n \in K$

b) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) |u_{n+1}-\alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

EXERCICE 79

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$

1) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

b) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$ $g'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x^2+2}}$

c) En déduire que : $\left(\forall x \in]0;1[\right)$ $0 < g(x) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d) Dresser le tableau de variations de g.

2) On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $u_{n+1} = g(u_n)$

a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $0 \leq u_n < 1$

b) Établir que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) |u_{n+1}-1| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u_n-1|$

c) En déduire que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

EXERCICE 80

On considère la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$f(x) = \dfrac{x}{1+x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Montrer que f est dérivable sur $[0;1]$, strictement croissante mais que l'équation $f'(x) = 0$ admet une infinité de solutions dans l'intervalle $[0;1]$.

EXERCICE 81

La Terre possède un champ magnétique intrinsèque, appelé champ géomagnétique, provenant du mouvement des particules chargées dans son noyau fluide. En première approximation, ce champ est celui d'un dipôle placé au centre O de la Terre. Le champ magnétique B à la surface de la terre est de la forme :

$$B(\lambda) = k\frac{\sqrt{1+3\sin^2(\lambda)}}{\cos^6(\lambda)}$$

Où λ est la latitude géomagnétique et k une constante positive.

Etudier la fonction B pour $\lambda \in \left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

EXERCICE 82

Soit un filtre analogique composé d'une résistance et d'un condensateur. Le déphasage du signal à la sortie du filtre par rapport au signal à l'entrée du filtre est égale à : $\varphi(f) = -\arctan(2\pi\tau f)$

Où τ est une constante de temps du filtre et f indique la fréquence.

Calculer $\varphi'(f)$ pour tout $f \in [0;+\infty[$ puis dresser le tableau complet de variations de φ.

Scanné avec CamScanner

3

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

EXERCICE 1

1) On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{x}{(x-1)^2+1}$$

a) Déterminer D_g, le domaine de définition de g.

2) Montrer que : $(\forall x \in D_g)\ g'(x) = \dfrac{2x-4}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}$.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction g en déterminant ses limites aux bornes de D_g.

4) Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1,2[$ tel que : $g(\alpha) = 0$

(On donne : $\text{Arctan}(2,5) \approx 1,19$ et $\text{Arctan}(3) \approx 1,37$)

5) En déduire le signe de $g(x)$ sur D_g.

II) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = x\,\text{Arctan}\frac{1}{x-1}$$

1) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

3) Dresser le tableau de variations de f (sans calculer la valeur de $f(\alpha)$).

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x - \text{Arctan}\,x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \text{Arctan}\,x \leq x$

3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \text{Arctan}\,x \leq \frac{x^3}{3}$$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \text{Arctan}\,x}{x^3} = \dfrac{1}{3}$

c) Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

4) Etudier les variations de la fonction f

5) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$

b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ (On donne : $\sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,7$)

6) Soit g la restriction de la fonction f sur $I = \mathbb{R}^+$.

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

7) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - \text{Arctan}(u_n)} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer que (u_n) est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{\frac{1}{3}}\,u_n$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \sqrt{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{4}{\pi}\text{Arctan}\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) < 0$

b) Dresser le tableau de variation de f. On déterminera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$

3) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère

Scanné avec CamScanner

orthonormé (Unité : $2cm$)

4) On pose $I=\left[\frac{1}{4};1\right]$. Montrer que $f(I)\subset I$.

5) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $x\in I$: $|f'(x)|\le\frac{4}{5}$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|u_{n+1}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|\le\frac{4}{5}\left|u_n-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|$$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

d) Montrer que :

$$\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\ f\left(\frac{1}{\tan x}\right)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

e) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $a_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$

Vérifier que $a_0=1$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_{n+1}=2^{n+1}-a_n$$

f) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n=\tan\left(\frac{\pi a_n}{2^{n+2}}\right)$

DEVOIR 4

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=x^3+4x^2+6x-1$

1) Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ puis dresser le tableau de variations de f.

3) Prouver que f s'annule une fois et une seule sur $[0;+\infty[$ en un point α et que $\alpha\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

4) Déterminer le signe de f sur $[0,\alpha[$ et sur $]\alpha,+\infty[$.

Partie B : Détermination d'une valeur approchée de α

On considère la fonction g définie pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\frac{1}{x^2+4x+6}$

1) Déterminer un encadrement de x^2+4x+6 pour $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et en déduire que : $0\le g(x)\le\frac{1}{2}$

2) Montrer que pour tout $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$: $|g'(x)|\le\frac{5}{36}$

3) On considère maintenant la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=g(u_n)$

a) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$

b) Prouver que $g(\alpha)=\alpha$ et déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{5}{36}|u_n-\alpha|$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

e) Justifier que $u_0\le\alpha\le u_1$ puis en déduire, par récurrence, que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{2n}\le\alpha\le u_{2n+1}$

DEVOIR 5

1) Soit f une fonction dérivable en un point x_0.

a) Montrer que :

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$$

b) Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que f est dérivable en x_0 ?

2) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to0}\frac{g(2x)-g(x)}{x}=\ell$$

Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0)=\ell$.

3) Etudier puis représenter la fonction numérique h définie par :

$$h(x)=xE\left(\frac{1}{x}\right)$$

Scanné avec CamScanner

HISTOIRE

C'est un Écossais John Napier souvent francisé en Neper, qui inventa les logarithmes. Pour le faire, il considéra deux véhicules : l'un allant à une vitesse uniforme et l'autre à une vitesse proportionnelle à la distance restant à parcourir. Il considère que la distance parcourue par la seconde est le logarithme de celle restant à parcourir par le premier. John Neper est aussi l'auteur d'écrits théologiques qui eurent à son époque une grande diffusion.

Source : https://fr.wikipedia.org

JOHN NAPIER (1550 – 1617)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Maîtriser le calcul sur les logarithmes.
- Maîtriser la résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes logarithmiques.
- Connaître le logarithme décimal et ses applications (surtout dans la résolution des équations de la forme $10^x = a$).
- Maîtriser et appliquer les limites logarithmiques fondamentales.
- Maîtriser l'étude et la représentation de fonctions comportant la fonction logarithme népérien.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires 165
- Connaissances Fondamentales
  - Fonction logarithme népérien 168
  - Fonction logarithme de base a 177
- Techniques Et Astuces 179
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application 188
  - Exercices de perfectionnement 193
  - Problèmes de synthèse 199

Scanné avec CamScanner

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

1 RAPPELS

1. Déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=x^3$ sur $I=\mathbb{R}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$ où $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

c) $f(x)=2x\left(x^2-3\right)^{2017}$ sur $I=\mathbb{R}$; d) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{\left(x^4+2x^2+5\right)^2}$ sur $I=\mathbb{R}$

2. Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=]-1;1[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Justifier que la fonction g admet une primitive définie sur I.

Dans la suite, on note G la primitive de la fonction g s'annulant en 0.

b) Montrer que la fonction G est impaire.

c) Montrer que G est continue et strictement croissante sur I.

d) En déduire le signe de G sur I.

2 FONCTION TRANSFROMANT UN PRODUIT EN UNE SOMME

A) <u>Première Partie :</u>

1. Montrer que la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ admet une primitive sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

La primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée la fonction logarithme népérienne et on la note ln.

Il en résulte alors de cette définition que :

- Le domaine de définition de la fonction ln est $D_{\ln}=]0;+\infty[$.
- $\ln(1)=0$
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right)\ (\ln)'(x)=\dfrac{1}{x}$

2. a) Montrer que la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) En déduire le signe de chacun des nombres $\ln 2$ et $\ln\dfrac{1}{2}$.

3. Soit a un élément de $]0;+\infty[$. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(ax)$

a) Montrer que f est une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) En déduire que pour tout $x\in]0;+\infty[$: $f(x)=\ln(x)+\ln(a)$

Puis écrire les nombres $\ln(6)$, $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$ et $\ln(72)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

Scanné avec CamScanner

4. a) En utilisant la calculatrice, vérifier que $\ln(2,71) < 1 < \ln(2,72)$ puis en déduire qu'il existe un unique nombre strictement positif e tel que $\ln e = 1$. Donner un encadrement de e.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\ln(e^n) = n$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes : $\ln x = 2$ et $\ln x = -1$

B) Deuxième Partie :

1. Montrer que si a et b sont des réels strictement positifs alors le signe de $\ln(a) - \ln(b)$ est celui de $a - b$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x) = \ln(e^2)$; b) $\ln(x+1) = \ln(3-x)$; c) $\frac{1}{2}\ln(x+2) = \ln(x)$; d) $\ln^2(x) = 2\ln(x)$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x) > 2$; b) $\ln(x+1) > \ln(3-x)$; c) $\ln(x) + \ln(x+4) > \ln(2x-1)$

d) $\ln(2) + 2\ln(x) > \ln(3x-8)$; e) $\ln(x^2+1) > \ln(x+5) + \ln(x-2)$

3 LIMITES DE LA FONCTION ln ET SA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

1.a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln(20^n) = n\ln(20)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln\left(\frac{1}{20^n}\right) = -n\ln(20)$

c) Sachant que $\ln(2) \approx 0,69$ et $\ln(5) \approx 1,61$, donner une valeur approchée du nombre $\ln(20)$.

d) Remplir le tableau suivant :

x	20^{10}	20^{10^2}	20^{10^3}	20^{10^4}	20^{10^5}	20^{10^6}	20^{10^7}	20^{10^8}	20^{10^9}	$20^{10^{10}}$	$20^{10^{11}}$
$\ln(x)$											
$\frac{\ln(x)}{x}$											
$\ln\left(\frac{1}{x}\right)$											

e) A partir des résultats du tableau ci-dessus, deviner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$ puis interpréter graphiquement ces limites.

2. Soit (L) la courbe de la fonction ln dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (L) aux points d'abscisses 1 et e.

b) Tracer l'allure de la courbe (L).

Scanné avec CamScanner

LE LOGARITHME DÉCIMAL ET SES APPLICATIONS

A) On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$

La fonction f est appelée la fonction logarithme décimal et on la note log .

1. Calculer : $\log(1)$, $\log(10)$, $\log(100)$, $\log(0,1)$, $\log(0,01)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\log\left(10^n\right)=n$

3. Étudier les variations de la fonction log puis dresser son tableau de variations.

B) Applications du logarithme décimal :

1. Autour de la convergence des suites numériques :

En utilisant la calculatrice, déterminer tous les entiers naturels n vérifiant chacune des inégalités suivantes :

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-12}$; b) $(1,02)^n \geq 10^9$; c) $\left(\dfrac{1}{0,015}\right)^n \geq 10^{1407}$

2. Nombre de chiffres d'un entier naturel :

a) Montrer que le nombre de chiffres d'un entier naturel non nul x est : $N(x)=1+E(\log x)$

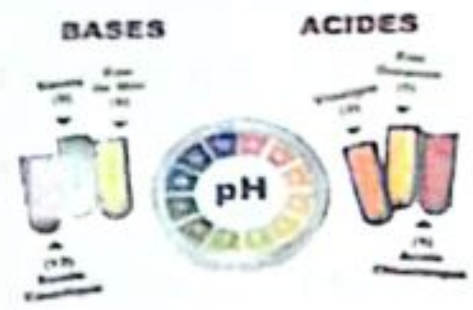
b) Le plus grand nombre premier découvert en 2013 est : $P=2^{57885161}-1$

Quel est le nombre de chiffres de P ?

3. En chimie :

La relation liant le pH d'une solution aqueuse et la concentration $\left[H_3O^+\right]$

est donnée par la formule : $pH=-\log\left[H_3O^+\right]$



a) Calculer le pH d'une solution aqueuse sachant que : $\left[H_3O^+\right]=6.10^{-5}\ mol/l$

b) Calculer la concentration $\left[H_3O^+\right]$ dans une solution aqueuse sachant que $pH=7$.

4. En séismologie :

La magnitude d'un tremblement de terre est une mesure de quantité de l'énergie libérée au foyer d'un séisme.

Elle se calcule à l'aide de la formule : $M=\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ (Sur l'échelle de Richter)

où I_0 est une intensité de référence et I l'intensité du séisme.

Calculer la valeur de M dans chacun des cas suivants :

a) Al Hoceima (2003) : $I_1=1,995\times10^8\ I_0$

b) El Salvador (2001) : $I_2=3,98\times10^7\ I_0$

c) Californie (1992) : $I_2=3,98\times10^7\ I_0$

Scanné avec CamScanner

1 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1.1. DÉFINITION DE LA FONCTION ln

Définition 1

La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ et qui s'annule en 1 est appelée la fonction logarithme népérienne, et on la note ln.

Remarques

- Le domaine de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$ et $\ln(1)=0$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et de plus :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \quad \ln'(x)=\frac{1}{x}$$

On rappelle que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive définie sur cet intervalle.

Exemples

On considère les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=\ln x+\ln(x-1) \quad ; \quad g(x)=\ln(x^2-x) \quad ; \quad h(x)=\ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$$

Déterminons leurs domaines de définition :

- L'expression $f(x)$ a un sens si $x>0$ et $x-1>0$, c'est-à-dire si $x>1$. Par suite : $D_f=]1;+\infty[$
- L'expression $g(x)$ a un sens si $x^2-x>0$. Donc : $D_g=]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.
- L'expression $h(x)$ a un sens si $\frac{x-4}{x+1}>0$. Donc : $D_h=]-\infty;-1[\cup]4;+\infty[$.

Applications

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=\ln(x+4)-\ln(25-x^2) \quad ; \quad g(x)=\ln(x^2-8x+7) \quad ; \quad h(x)=\ln\left|\frac{2x-|x|}{x-5}\right|$$

1.2. MONOTONIE DE LA FONCTION ln

Proposition 1

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. On a alors :

- Pour tout $(x,y)\in(]0;+\infty[)^2$: $\ln x<\ln y \Leftrightarrow x<y$ et $\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$
- Pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ et $\ln x>0 \Leftrightarrow x>1$ et $\ln x<0 \Leftrightarrow x<1$

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x^2-x)=\ln(4x-6)$

Cette équation est définie si $x^2-x>0$ et $4x-6>0$, c'est-à-dire si $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

On a maintenant pour tout $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$:

$$\ln(x^2-x)=\ln(4x-6)\Leftrightarrow x^2-x=4x-6\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

Les solutions de l'équation $x^2-5x+6=0$ sont 2 et 3. Comme $2\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ et $3\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ alors $S=\{2;3\}$.

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(14-x)>\ln(10+7x-3x^2)$

Cette inéquation est définie si $14-x>0$ et $10+7x-3x^2>0$, c'est-à-dire si $x\in\left]-1;\frac{10}{3}\right[$.

On a maintenant pour tout $x\in\left]-1;\frac{10}{3}\right[$:

$$\ln(14-x)>\ln(10+7x-3x^2)\Leftrightarrow 14-x>10+7x-3x^2\Leftrightarrow 3x^2-8x+4>0\Leftrightarrow (x-2)(3x-2)>0$$

L'ensemble solution de l'inéquation $(x-2)(3x-2)>0$ dans $\mathbb{R}$ est $S_1=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[\cup]2;+\infty[$. Par suite,

l'ensemble solution de l'inéquation $\ln(14-x)>\ln(10+7x-3x^2)$ est :

$$S=S_1\cap\left]-1;\frac{10}{3}\right[=\left]-1;\frac{2}{3}\right[\cup\left]2;\frac{10}{3}\right[$$

Applications

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$\ln(2x-3)=\ln(4-x)$; $\ln(x^2+x)=\ln(-2x-2)$; $\ln(3x^2+4x+2)=0$

$\ln(4x-5)>\ln(2x+3)$; $\ln(x^2+3x)-\ln(x+2)\geq 0$; $\ln(|3x^2+7x+2|)\geq 0$

2) Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x)=\sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}\quad ;\quad g(x)=\frac{1}{\ln(|x-2|-1)}\quad ;\quad h(x)=\frac{1}{(\ln x)^3}+\frac{x}{\ln(x+2)}$$

1.3. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Proposition 2

Pour deux réels strictement positifs x et y on a : $\ln(xy)=\ln x+\ln y$ (Propriété fondamentale)

De cette propriété fondamentale on peut déduire les propriétés algébriques suivantes :

Scanné avec CamScanner

Proposition 3

- Pour tout réel strictement positif x, on a : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- Pour tout $(x, y) \in \left(]0, +\infty[\right)^2$ on a : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs x_1, x_2, ..., x_n, on a :

$$\ln(x_1 . x_2 ..... x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + ... + \ln(x_n)\text{, c'est-à-dire : } \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a : $\ln(x^r) = r \ln x$

Preuve

1) Soit x un réel strictement positif. D'après la proposition 2 on a : $\ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x . \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$

Il s'ensuit donc que : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

2) Soit x et y deux réels strictement positifs. D'après la proposition 2, on a :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln x - \ln y \text{ , d'où le résultat.}$$

3) La relation $\ln(x_1 . x_2 ..... x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + ... + \ln(x_n)$ s'établie simplement à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

4) De la relation 3), on peut tirer la relation $\ln(x^n) = n \ln(x)$, et ceci pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On a de même les relations : $\ln(x^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\ln(x^n) = -n \ln x$ et $\ln(x^0) = \ln 1 = 0$.

Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^p) = p \ln(x)$.

Soit maintenant $r = \frac{p}{q}$ un rationnel de $\mathbb{Q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On donc :

$$q \ln(x^r) = q \ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \ln(x^p) = p \ln(x)\text{, et alors } \ln(x^r) = \frac{p}{q} \ln(x)\text{. Ainsi : } \ln(x^r) = r \ln x$$

Remarques

- Soit a et b deux réels strictement négatifs. On a alors $ab > 0$ et $\frac{a}{b} > 0$. Il s'ensuit donc :

$$\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b| \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$$

- On a pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout entier $n \geq 2$: $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2} \ln(x)$ et $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \ln(x)$.

Scanné avec CamScanner

Exemple

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose : $\alpha = \ln(a)$ et $b = \ln(b)$

Exprimons $\ln\left(a^2b^5\right)$ et $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}\right)$ en fonction de α et β :

$\ln\left(a^2b^5\right) = \ln\left(a^2\right) + \ln\left(b^5\right) = 2\ln(a) + 5\ln(b) = 2\alpha + 5\beta$

$\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}\right) = \ln\left(a^{-\frac{7}{6}}b^{-\frac{1}{6}}\right) = \ln\left(a^{-\frac{7}{6}}\right) + \ln\left(b^{-\frac{1}{6}}\right) = -\dfrac{7}{6}\alpha - \dfrac{1}{6}\beta$

1.4. LES LIMITES USUELLES

Proposition 4

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Preuve

Soit $A > 0$. On sait qu'il existe une infinité des nombres naturels n tels que $\ln\left(2^n\right) > A$, il suffit de choisir $n > \dfrac{A}{\ln 2}$. Le plus petit de ces nombres est $n_0 = E\left(\dfrac{A}{\ln 2}\right) + 1$. On a alors : $\ln\left(2^{n_0}\right) > A$

Il est clair que si x est un réel vérifiant $x > 2^{n_0}$, alors $\ln x > A$ car $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a alors montré que : $(\forall A > 0)\ (\exists B > 0) : \left(x > B \Rightarrow \ln(x) > A\right)$. Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$, on pose $y = \dfrac{1}{x}$. On trouve alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = \lim\limits_{y\to+\infty} (-\ln y) = -\infty$

Il s'ensuit donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

1.5. TABLEAU DE VARIATIONS DE LA FONCTION ln

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$		$+$	
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Proposition 5

- La fonction ln est une bijection de l'intervalle $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
- L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. On la note e : $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E) : 3(\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$

Le domaine de définition de cette équation est $\mathbb{R}_+^*$. En posant $t = \ln x$, l'équation devient $3t^2 + 2t - 1 = 0$.

les solutions de l'équation $3t^2 + 2t - 1 = 0$ sont -1 et $\frac{1}{3}$. Par conséquent :

$$(E) \Leftrightarrow \left(\ln x = -1 \ ou \ \ln x = \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow \left(x = e^{-1} \ ou \ x = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e} \right)$$

Par suite, l'ensemble solution de l'équation (E) est : $S = \left\{ e^{-1}; \sqrt[3]{e} \right\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(I) : \frac{\ln(x)+3}{\ln(x)-1} \geq -1$

L'équation est définie pour $x > 0$ et $\ln x \neq 1$, c'est-à-dire pour $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$.

On a maintenant pour tout $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$: $(I) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)+3}{\ln(x)-1} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1} \geq 0$

En dressant le tableau de signes de $\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$ sur $]0; e[\cup]e; +\infty[$ on en déduit que l'ensemble solution de (I) : $S =]0, e^{-1}[\cup]e, +\infty[$

Applications

1) Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln x)} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{1 - \ln(e - x)} \quad ; \quad h(x) = \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(\ln x)^2 - 5\ln x + 4 = 0 \quad ; \quad (\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + 3 = 0 \quad ; \quad (\ln x)^3 - 6(\ln x)^2 + 11\ln x - 6 = 0$$

Proposition 6

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé. Alors :

- La courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote.
- La courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- La courbe $\mathscr{C}$ est concave sur $]0; +\infty[$.

Scanné avec CamScanner

Preuve

Le premier résultat découle immédiatement du fait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Montrons maintenant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Pour cela, considérons la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par :

$f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$. Cette fonction est dérivable sur $[1;+\infty[$ et on a pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(2\sqrt{x} - \ln x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

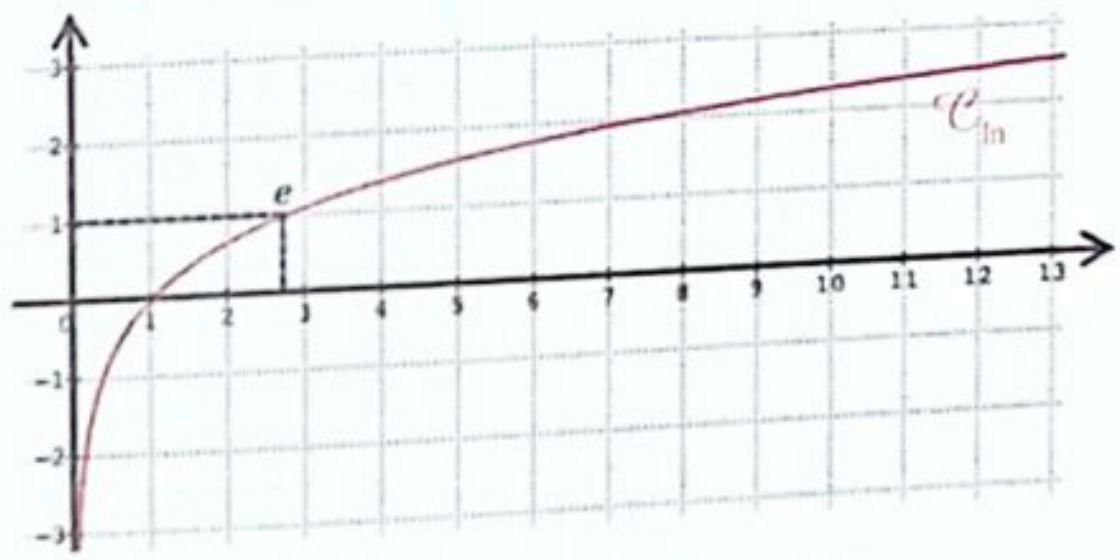
Puisque $x \in [1;+\infty[$ alors $f'(x) \geq 0$, donc la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$ et on a pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) \geq f(1)$, c'est-à-dire que $f(x) \geq 2$. Par conséquent, Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$.

Les inégalités $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ donnent $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

La concavité de la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction $x \mapsto \ln x$ vient du fait que la fonction ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $-\dfrac{1}{x^2} < 0$.

1.6. LA COURBE DE LA FONCTION ln



1.7. LIMITES FONDAMENTALES

Proposition 7

- On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- On a pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^r} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln(x) = 0$

Exemples

1) Calculons les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\sin x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2(\ln x)^5$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x} = \lim\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\left(2\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$. En posant $X = \sqrt{x}$ on obtient :

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=\lim_{t\to+\infty}4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=0 \quad (\text{Car}:\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0)$$

On a : $\lim_{x\to 0}x\ln(\sin x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\times\sin x\ln(\sin x)$. On sait que $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=1$. D'autre part, en posant $X=\sin x$ on obtient : $\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln(\sin x)=\lim_{X\to 0^+}X\ln(X)=0$. Par suite : $\lim_{x\to 0^+}x\ln(\sin x)=1\times 0=0$

On a : $\lim_{x\to 0^+}x^2(\ln x)^2=\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\frac{1}{2}}\ln x\right)^4=0$

On a : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\cos x-1}\times\frac{\cos x-1}{x^2}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ car :

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\cos x-1}=\lim_{X\to 1}\frac{\ln(X)}{X-1}=1$ (Ici on a posé $X=\cos x$)

2) Soit a un réel non nul. Calculons $\lim_{|x|\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$:

On a : $\lim_{|x|\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\lim_{|x|\to+\infty}a\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}}=\lim_{X\to 0}a\frac{\ln(1+X)}{X}=a$ (On a posé : $X=\frac{a}{x}$)

Ainsi : $\lim_{|x|\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=a$

Applications

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}\ln x$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; $\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{2017}+x+1\right)}{x}$; $\lim_{x\to e^+}\frac{\ln x}{\ln x-3}$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln|x^2-1|}$; $\lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-3}\ln\left(\frac{x}{3}\right)$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln\left(x^2+3\right)}}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

1.8. DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE

Proposition 8

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall x\in I),\ u(x)\neq 0$

Alors la fonction $x\mapsto\ln|u(x)|$ est dérivable sur I et on a : $\left(\ln|u(x)|\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

Preuve

Pour tout $x\in I$, on pose : $f(x)=\ln|u(x)|$

Puisque u est continue sur I (car elle est dérivable) et ne s'annule pas sur I alors u est soit strictement

Scanné avec CamScanner

positive ou soit strictement négative sur I .

Si u est strictement positive sur I alors pour tout $x \in I$, $f(x) = \ln\big(u(x)\big)$, c'est-à-dire que : $f = \ln o\, u$

Par application de la proposition de la dérivabilité de la composée de deux fonctions (proposition...page ...), on en déduit que la fonction f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = (\ln' ou)(x) \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Si u est strictement négative sur I alors pour tout $x \in I$, $f(x) = \ln\big(-u(x)\big)$, c'est-à-dire que : $f = \ln o(-u)$

Par application de la proposition de la dérivabilité de la composée de deux fonctions (proposition...page ...), on en déduit que la fonction f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \big(\ln' o(-u)\big)(x) \times (-u)'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemples

On considère les fonctions f et g définie par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ et $g(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$.

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$. Il s'ensuit donc que pour $x \in \mathbb{R}$, $-x \le |x| < \sqrt{x^2+1}$. Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

D'après la proposition précédente, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)'}{x + \sqrt{x^2+1}} = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

La fonction g est définie pour les réels x tels que $\frac{x-2}{x+1} \neq 0$ et $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire que $x \in \mathbb{R} - \{2, -1\}$.

Sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;2[$ et $]2;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{x-2}{x+1}$ est dérivable et ne s'annule pas.

Il en résulte alors que la fonction g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;2[$ et $]2;+\infty[$.

De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2;-1\}$:

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)'}{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{\frac{3}{(x+1)^2}}{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{3}{(x+1)(x-2)}$$

Applications

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \ln|\ln x|$; $g(x) = x.\sqrt[3]{\ln x - 2}$; $h(x) = (x^2+2x)\ln(x^2-4)$; $k(x) = \ln|\cos x|$

$u(x) = \ln\left|\frac{2x-\sqrt{x}}{x-3}\right|$; $v(x) = \ln\left(\frac{x^2-5x+4}{|2x^2+3x+1|}\right)$; $w(x) = \ln\left(\frac{1}{2-\ln x}\right)$

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) Les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur l'intervalle $]-\infty;1[$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(1-x)+\lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right[$ sont les fonctions $x \mapsto \ln|\sin x|+\lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) On considère la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x^3+8}}{(x^2+1)^3}$

Calculons la dérivée de la fonction f en utilisant la dérivée logarithmique :

On a pour tout $x \in]-2;+\infty[$: $\ln(f(x))=\ln\left(\sqrt[4]{x^3+8}\right)-\ln\left((x^2+1)^3\right)=\dfrac{1}{4}\ln(x^3+8)-3\ln(x^2+1)$

Il s'ensuit donc : $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{-3x(7x^3-x+64)}{4(x^2+1)(x^3+8)}$

Par suite : $(\forall x \in]-2;+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{-3x(7x^3-x+64)}{4\sqrt[4]{(x^3+8)^3}\,(x^2+1)^4}$

Applications

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

a) $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{5+\sin^2 x}$ sur $I=\mathbb{R}$; b) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-6x}$ sur $I=\mathbb{R}_-^*$

c) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x(\ln^2(x)-1)}$ sur $I=]e;+\infty[$; d) $f(x)=\dfrac{5x+7}{2x-4}$ sur $I=]2;+\infty[$

2) Calculer la dérivée logarithmique de la fonction g définie par :

$$g(x)=\frac{x^{17}.\sqrt[3]{x^6-5x^3+7}}{\sqrt[32]{x^{32}-32x+1}}$$

Scanné avec CamScanner

FONCTION LOGARITHME DE BASE a

2.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Définition 3

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction logarithme de base a est la fonction numérique, notée par $\log_a$, définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Remarques

- La fonction logarithme de base e est la fonction logarithme népérien car pour tout réel x strictement positif : $\log_e(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$
- On a : $\log_a(a) = 1$ et $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a^r) = r$ pour $r \in \mathbb{Q}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
  - Si $a > 1$ alors la fonction $\log_a$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
  - Si $0 < a < 1$ alors la fonction $\log_a$ est strictement décroissante $]0;+\infty[$.

Proposition 10

- Pour tous réels strictement positifs x et y, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ; \quad \log_a(x^r) = r\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \quad ; \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :

$$\log_a(x_1 x_2 \ldots x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + \ldots + \log_a(x_n)$$

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On considère les nombres réels suivants : $\alpha = \log_{40}(100)$ et $\beta = \log_{16}(25)$

Déterminons β en fonction de α :

On a : $\alpha = \dfrac{\ln(100)}{\ln(40)} = \dfrac{\ln(2^2 \times 5^2)}{\ln(2^3 \times 5)} = \dfrac{2\ln(2)+2\ln(5)}{3\ln(2)+\ln(5)}$ et $\beta = \dfrac{\ln(25)}{\ln(16)} = \dfrac{2\ln(5)}{4\ln(2)} = \dfrac{\ln(5)}{2\ln(2)}$

Il s'ensuit donc : $\alpha = \dfrac{2+2\dfrac{\ln(5)}{\ln(2)}}{3+\dfrac{\ln(5)}{\ln(2)}} = \dfrac{2+4\beta}{3+2\beta}$. Ainsi : $\beta = \dfrac{2-3\alpha}{2(\alpha-2)}$

2) Résolvons l'équation suivante : $\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4$

L'équation est définie si $x > 0$, $2x \neq 1$ et $4x \neq 1$, c'est-à-dire si $x \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right\}$.

On a maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right\}$:

$$\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4 \Leftrightarrow \log_{2x}(2) + \log_{2x}(2x) + \log_{4x}(4) + \log_{4x}(4x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{\ln(2x)} + \frac{\ln 4}{\ln(4x)} = 2 \quad (\text{car: } \log_{2x}(2x) = \log_{4x}(4x) = 1)$$

Ce qui donne $\dfrac{1}{1+\log_2(x)} + \dfrac{2}{2+\log_2(x)} = 2$, c'est-à-dire $2(\log_2(x))^2 + 3\log_2(x) = 0$. Ainsi :

$\log_2(x) = 0$ *ou* $\log_2(x) = -\dfrac{3}{2}$. Par suite, l'ensemble solution est : $S = \left\{1;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

2.3. LOGARITHME DÉCIMAL

Définition 4

La fonction logarithme de base 10 est appelée la fonction logarithme décimal. On la note $\log$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\log(x) = \log_{10}(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Applications

1) Calculer : $\log 1000$; $\log 100000$; $\log(0,01)$; $\log(0,00001)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit :

$\log(x+11) + \log(x-4) = 2$; $\log(x) + 1 = \log(x+3)$; $(\log(x+2))^2 - \log(x+2) - 2 \geq 2$

3) Résoudre les systèmes suivants : $\begin{cases} x+y = 25 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} xy = 100 \\ 2\log^2(x) + 2\log^2(y) = 5 \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

A MANIPULATION DES LOGARITHMES

1) Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Simplifier le réel : $X=\ln(ab^2)-\ln\sqrt[3]{a^2b^5}+\ln\dfrac{a}{\sqrt{b}}-\ln\sqrt[4]{a^2b^6}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$2\ln x=1$; $(\ln x)^2-4=0$; $\ln x^2=5$; $\ln(2x-1)+\ln(x-4)=2\ln 2$

$\ln(x^2-3x+2)=0$; $\ln(3x^2-x)\le\ln x+\ln 2$; $-(\ln x)^2-\ln x+6\le 0$; $(\ln|x|)^2+\dfrac{30}{\ln|x|}<19$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes : $\begin{cases}\ln(x).\ln(y)=-10\\ \ln x+\ln y=3\end{cases}$; $\begin{cases}\ln x^2+\ln y^5=16\\ \ln x^3+\ln y^3=6\end{cases}$; $\begin{cases}xy=2\\ \ln x+\ln y=a\end{cases}$ $(a\in\mathbb{R})$

SOLUTION

1) Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. On a :

$$X=\ln a+2\ln b-\frac{1}{3}(\ln a^2+\ln b^5)+\ln a-\ln\sqrt{b}-\frac{1}{4}(\ln a^2+\ln b^6)$$

$$=\ln a+2\ln b-\frac{1}{3}(2\ln a+5\ln b)+\ln a-\frac{1}{2}\ln b-\frac{1}{4}(2\ln a+6\ln b)$$

$$=\frac{5}{6}\ln a-\frac{5}{3}\ln b$$

2) Résolution des équations et inéquations :

• Pour l'équation $2\ln x=1$:

L'équation $2\ln x=1$ signifie $\ln x=\dfrac{1}{2}$, ce qui donne $x=\sqrt{e}$. Par suite : $S=\left\{\sqrt{e}\right\}$

• Pour l'équation $(\ln x)^2-4=0$:

L'équation $(\ln x)^2-4=0$ signifie $\ln x=2$ ou $\ln x=-2$, ce qui donne $x=e^2$ ou $x=e^{-2}$. D'où : $S=\left\{e^2;e^{-2}\right\}$

• Pour l'équation $\ln x^2=5$:

L'équation $\ln x^2=5$ signifie $x^2=e^5$, ce qui donne $x=e^2\sqrt{e}$ ou $x=-e^2\sqrt{e}$. D'où : $S=\left\{e^2\sqrt{e};-e^2\sqrt{e}\right\}$

• Pour l'équation $\ln(2x-1)+\ln(x-4)=2\ln 2$:

Cette équation a un sens si $2x-1>0$ et $x-4>0$, c'est-à-dire si $x\in\left]4,+\infty\right[$. On a pour tout $x>4$:

$$\ln(2x-1)+\ln(x-4)=2\ln 2\Leftrightarrow\ln(2x-1)(x-4)=\ln 4\Leftrightarrow 2x^2-9x=0\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$$

Par suite : $S=\left\{\dfrac{9}{2}\right\}$

• Pour l'équation $\ln(x^2-3x+2)=0$:

Cette équation a un sens si $x^2-3x+2>0$, c'est-à-dire si $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$.

Scanné avec CamScanner

On a alors pour tout $x \in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$: $\ln(x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$. Cette dernière équation a pour solutions $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Comme $x \in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ alors : $S=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

- Pour l'inéquation $\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$:

Cette inéquation a un sens si $x>0$ et $3x^2-x>0$, c'est-à-dire $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$. On a pour tout $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$:

$$\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2 \Leftrightarrow \ln(3x^2-x) \leq \ln(2x) \Leftrightarrow 3x^2-x \leq 2x \Leftrightarrow 3x^2 \leq 3x$$

Comme $x>0$ alors $3x^2 \leq 3x$ est équivalente à $x \leq 1$. Enfin : $S=\left]\frac{1}{3};1\right]$

- Pour l'inéquation $-(\ln x)^2 - \ln x + 6 \leq 0$:

Cette inéquation a un sens si $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $X=\ln x$. L'inéquation devient $-X^2-X+6 \leq 0$.

En dressant le tableau de signes de $-X^2-X+6$, on en déduit que $-X^2-X+6 \leq 0$ est valable si et seulement si $X \in [-3;2]$. Donc $\ln x \in [-3;2]$. Puisque la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ alors l'ensemble solution de cette inéquation est $S=\left[e^{-3};e^2\right]$.

- Pour l'inéquation $(\ln|x|)^2 + \frac{30}{\ln|x|} < 19$:

Cette inéquation a un sens si $|x|>0$ et $|x| \neq 1$, c'est que $x \in \mathbb{R}^* - \{1;-1\}$. En posant $t=\ln|x|$, l'inéquation devient $t^2+\frac{30}{t}<19$, c'est-à-dire $\frac{t^3-19t+30}{t}<0$. Il est évident que le réel 2 est racine du polynôme $t^3-19t+30$, et on a de plus : $t^3-19t+30=(t-2)(t^2+2t-15)$. Ainsi, on a :

$$\frac{t^3-19t+30}{t}<0 \Leftrightarrow \frac{(t-2)(t^2+2t-15)}{t}<0 \Leftrightarrow t \in]-5;0[\cup]2;3[$$

Il s'ensuit donc que $2<\ln|x|<3$ ou $-5<\ln|x|<0$, c'est-à-dire $e^2<|x|<e^3$ ou $e^{-5}<|x|<1$.

En définitive, l'ensemble solution est : $S=\left]-e^3;-e^2\right[\cup\left]-1;-e^{-5}\right[\cup\left]e^{-5};1\right[\cup\left]e^2;e^3\right[$

3) Résolution des systèmes :

- Pour le système $\begin{cases}\ln(x).\ln(y)=-10\\ \ln x+\ln y=3\end{cases}$:

Posons $X=\ln(x)$ et $Y=\ln(y)$. Le système devient $\begin{cases}X.Y=-10\\ X+Y=3\end{cases}$. On en déduit alors que X et Y sont les solutions de l'équation $t^2-3t-10=0$. Cette dernière équation a pour solutions $t=-2$ et $t=5$.

Il s'ensuit donc que $(X,Y)=(-2,5)$ ou $(X,Y)=(5,-2)$, et alors $(x,y)=(e^{-2},e^5)$ ou $(x,y)=(e^5,e^{-2})$

L'ensemble solution est $S=\left\{(e^{-2},e^5),(e^5,e^{-2})\right\}$.

Scanné avec CamScanner

• Pour le système $\begin{cases} \ln x^2 + \ln y^5 = 16 \\ \ln x^3 + \ln y^3 = 6 \end{cases}$:

Ce système a un sens si les nombres x^2, x^3, y^3 et y^5 sont strictement positifs. Donc le système a un sens si $x>0$ et $y>0$. On a pour $x>0$ et $y>0$, le système donné est équivalent à :

$$\begin{cases} 2\ln x + 5\ln y = 16 \\ 3\ln x + 3\ln y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ln x + 5\ln y = 16 \\ \ln x + \ln y = 2 \end{cases}$$

En posant $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$, ce système devient $\begin{cases} 2X + 5Y = 16 \\ X + Y = 2 \end{cases}$, ce qui donne $(X,Y) = (-2,4)$.

Par conséquent $(x,y) = \left(e^{-2}, e^4\right)$. L'ensemble des solutions du système est $S = \left\{\left(e^{-2}, e^4\right)\right\}$.

• Pour le système $\begin{cases} xy = 2 \\ \ln x + \ln y = a \end{cases}$:

Ce système a un sens si $x>0$ et $y>0$. On a pour $x>0$ et $y>0$:

$$\begin{cases} xy = 2 \\ \ln x + \ln y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 2 \\ \ln x + \ln y = a \end{cases}$$

On a alors la discussion suivante : (selon les valeurs du réel a)

• Si $a \neq \ln 2$, alors l'ensemble des solutions de ce système est vide : $S = \varnothing$.

• Si $a = \ln 2$, alors le système $\begin{cases} xy = 2 \\ \ln x + \ln y = a \end{cases}$ est équivalent à l'équation $xy = 2$. Par conséquent :

$$\begin{cases} xy = 2 \\ \ln x + \ln y = a \end{cases} \Leftrightarrow \left(x>0 \text{ et } y = \frac{2}{x} \right)$$

Par suite, alors l'ensemble des solutions de ce système est : $S = \left\{ \left(x; \frac{2}{x} \right) / \, x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$

• On n'écrit $\ln x$ que si le réel x est strictement positif.

• On retiendra que la fonction logarithme transforme les produits en somme.

• Parmi les erreurs fatales qu'il faut éviter lors des calculs avec la fonction $\ln$:

$$\frac{\ln a}{\ln b} = \ln(a-b) \quad ; \quad (\ln a)(\ln b) = \ln(a+b) \quad ; \quad (\ln a)^n = n \ln a \quad ; \quad \frac{1}{\ln a} = -\ln a$$

• Pour résoudre une équation de genre $\ln\left(f(x)\right) = \ln\left(g(x)\right)$, on détermine d'abord le domaine de définition de cette équation puis on utilise les propriétés algébrique de la fonction $\ln$.

• Pour tout $m \in \mathbb{Q}$, l'équation $\ln x = m$ a pour unique solution $x = e^m$.

• La formule $\ln\left(x^n\right) = n \ln x$ n'est pas valable que si $x>0$. On a en général : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right) \ln\left(x^n\right) = n \ln|x|$

• Pour résoudre des inéquations contenant $x \mapsto \ln x$, on utilise le fait que la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Une échelle logarithmique permet de représenter sur un même graphique des nombres dont les ordres de grandeurs sont très différents.

Scanné avec CamScanner

8 CALCUL DES LIMITES

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x^2\ln x} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\left(x+\ln\left(x^4+5\right)\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-1} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\left(x^2+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$$

2) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $x-\frac{x^2}{2}\le \ln(x+1)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

b) En déduire la limite : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$

SOLUTION

1) Calcul des limites :

$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x^2\ln x}=-\infty$ (car $\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2$ et $\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x=0^-$)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left(x^4+5\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left(x^4\left(1+\frac{5}{x^4}\right)\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+4\ln(-x)+\ln\left(1+\frac{5}{x^4}\right)\right)$$

Et donc : $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left(x^4+5\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(1-4\frac{\ln(-x)}{-x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{5}{x^4}\right)\right)=-\infty$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3}\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}=0\times 1=0$$

2) a) On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(x+1)$$

On vérifie aisément que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}^+$:

$$f'(x)=x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1} \quad \text{et} \quad g'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{x+1}=\frac{x^3}{x+1}$$

On a donc pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f'(x)\ge 0$ et $g'(x)\ge 0$. Il s'ensuit donc que f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$.

Il en résulte donc que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)\ge f(0)$ et $g(x)\ge g(0)$, d'où $f(x)\ge 0$ et $g(x)\ge 0$.

Conclusion :

Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(x+1)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction ln est continue sur $[k, k+1]$, dérivable sur $]k, k+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]k, k+1[$ tel que : $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln'(c) = \frac{1}{c}$

Puisque $c \in]k, k+1[$ alors $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{k}$ et par suite, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

b) On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$. Donc pour tout entier $n \geq 2$:

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. On en déduit alors que : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

Ce qui entraîne pour tout entier $n \geq 2$: $S_n - 1 \leq \ln n \leq S_{n-1}$

2) a) D'après le résultat précédent, on a pour tout entier $n \geq 2$, $S_n - 1 \leq \ln n$ et $\ln n \leq S_n$. Il s'ensuit que $S_n \leq \ln(n) + 1$ et $\ln(n+1) \leq S_n$ (décalage d'indice). D'où : $(\forall n \geq 2)\ \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$

b) On a montré à la question précédente que pour tout $n \geq 2$, $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$. On en déduit alors que $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$. De plus, on a d'une part : $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right) = 1$ et d'autre part :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) = 1$$

Par suite : $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$. (Remarque : Ce résultat entraîne aussi que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$)

3) a) Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

D'après la question 1) a), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

Par conséquent, $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ et alors $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

b) Montrons que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes :

On a tout d'abord la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Or $\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

On a ensuite la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Scanné avec CamScanner

On a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ et donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$. Conclusion : les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

D ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]-1;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(1+x) + 1 - x$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.

2) Etudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) a) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$

b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f'.

c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]-1;+\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

d) Vérifier que $0 < \alpha < 1$ puis préciser le signe de $f'(x)$ sur $]-1;+\infty[$.

e) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction inverse f^{-1}.

c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 2)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère.

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1;+\infty[$, notée x_n.

b) Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

c) Etablir que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Scanné avec CamScanner

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(x\ln(1+x)+1-x\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$

2) Etude des branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$:

On a $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.

Au voisinage de $+\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, on doit donc calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln(1+x)+1-x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln(1+x)+\dfrac{1}{x}-1\right) = +\infty$

Par suite, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a) La fonction f est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ car les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto \ln(1+x)$ le sont.

De plus, on a pour tout $x\in\,]-1;+\infty[$: $f'(x) = \left(x\ln(1+x)+1-x\right)' = \ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}-1$

Et donc pour tout $x\in\,]-1;+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{2+x}{(1+x)^2}$

b) On a pour tout $x\in\,]-1;+\infty[$, $\dfrac{2+x}{(1+x)^2}>0$, c'est-à-dire que $f''(x)>0$, d'où le tableau de variation de f' :

x	-1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	
$f'(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

($\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(1+x)\ln(1+x)-1}{1+x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to -1^+} (1+x)\ln(1+x) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$)

c) La fonction f' est continue et strictement croissante sur $]-1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, la fonction f' réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $f'(]-1;+\infty[) = \mathbb{R}$. Puisque $0\in\mathbb{R}$ alors il existe un unique réel $\alpha\in\,]-1;+\infty[$ tel que $f'(\alpha)=0$.

d) La fonction f' est continue et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. De plus :

$$f'(0) = -1 \quad , \quad f'(\alpha) = 0 \quad , \quad f'(1) = \ln(2)-\frac{1}{2} \qquad \left(\ln(2)-\frac{1}{2}\approx 0,2\right)$$

Comme $f'(0)<f'(\alpha)<f'(1)$, alors $0<\alpha<1$. Le signe de $f'(x)$ sur $]-1;+\infty[$:

- Pour $x\in\,]-1;\alpha[$: $f'(x)<0$
- Pour $x\in\,]\alpha;+\infty[$: $f'(x)>0$

Scanné avec CamScanner

c) Tableau de variation de f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $J = f([1;+\infty[)$ avec : $J = \left[f(1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [\ln 2;+\infty[$

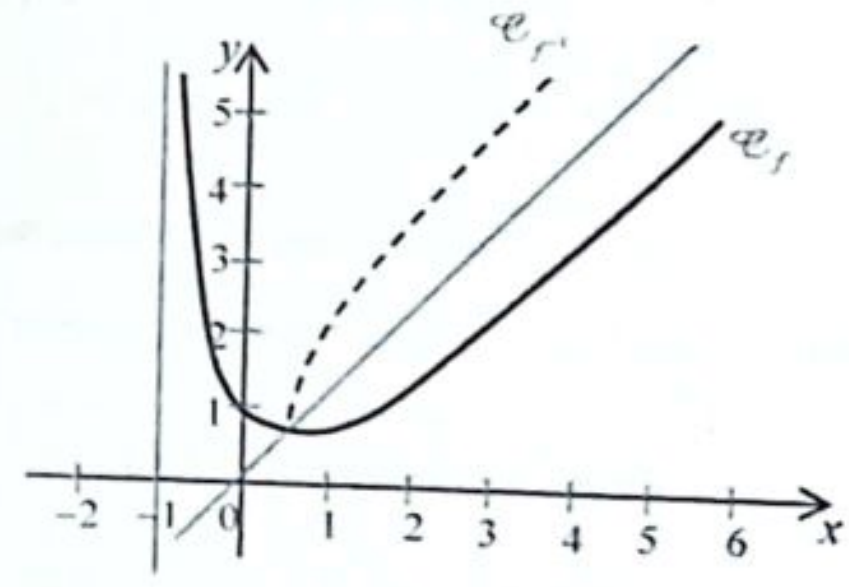
b) Tableau de variations de f^{-1} :

x	$\ln 2$		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c) On a $f(1) = \ln 2$ et $f'(1) = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$. Puisque $f'(1) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $\ln 2$, et de plus :

$$\left(f^{-1}\right)'(\ln 2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\ln 2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\ln(4) - 1}$$

d) Représentation graphique :



5) a) On a déjà montré dans la question 4) a) que la fonction f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $[\ln 2;+\infty[$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n \in [\ln 2;+\infty[$,

et par suite, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $[1;+\infty[$. On note cette solution x_n.

b) La monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$:

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$. Il s'ensuit donc que $f(x_n) \leq f(x_{n+1})$.

Comme la fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ alors $x_n \leq x_{n+1}$.

Conclusion : La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

c) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$:

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) = n$, et donc $x_n = f^{-1}(n)$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$, d'où le résultat.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES D'APPLICATION

CALCUL SUR LES LOGHARITHMES

EXERCICE 01

Déterminer le domaine de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\ln(x+2)$; 2) $f(x)=\ln(x^2-5x)$

3) $f(x)=\ln|x+1|$; 4) $f(x)=\ln^2 x-3\ln x$

5) $f(x)=\ln\left((x-1)^2\right)$; 6) $f(x)=x.\sqrt[3]{2-\ln x}$

7) $f(x)=\ln(x+2)+\ln(x-1)$

8) $f(x)=\ln\left((x+2)(x-1)\right)$; 9) $f(x)=\ln(\ln x)$

10) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{3-x}\right)$; 11) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+4)}{x}$

12) $f(x)=\dfrac{x}{\ln^2 x}+\dfrac{2}{\ln(x-3)}-\dfrac{1}{1+\ln|x|}$

EXERCICE 02

Calculer en fonction de $a=\ln 5$ et $b=\ln 4$ ce qui suit :

$\alpha=\ln 2$; $\beta=\ln(100)$; $\gamma=\ln(1000)$

$\lambda=\ln\left(\dfrac{8}{125}\right)$; $\mu=\ln(0,64)$

EXERCICE 03

Soit a, b et c trois réels strictement positifs. On pose :

$A=\ln a$ et $B=\ln b$ et $C=\ln c$

Exprimer ce qui suit en fonction de a, b et c :

$X=\ln\left(a^8b^9c^{-\frac{3}{2}}\right)$; $Y=\ln\left(\dfrac{a}{b^7}\right)+\ln\left(\dfrac{a^{-1}}{c^3}\right)$

$Z=\ln\left(\sqrt{abc}.\sqrt[5]{a}.\sqrt[4]{b}\right)$; $T=\ln\left(\sqrt[5]{\sqrt{a}.\sqrt[3]{b^{-2}}.c\sqrt{c}}\right)$

EXERCICE 04

Simplifier les écritures suivantes :

$A=\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)^{15}+\ln\left(7-4\sqrt{3}\right)^{15}$

$B=\ln 2+\ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

EXERCICE 05

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln x=0$; 2) $\ln x=1$; 3) $\ln x=5$

4) $\ln x=3\ln 2$; 5) $2\ln x=\ln 3+\ln 27$

6) $7\ln x=-3$; 7) $2\ln x=\ln\left(x^2\right)$; 8) $\ln^2 x=4$

EXERCICE 06

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln\left(x^2-x\right)=\ln(x+1)$; 2) $\ln(7x-1)=\ln(5x+1)$

3) $3(\ln x)^2-7\ln x+10=0$; 4) $\dfrac{8+\ln x}{1+2\ln x}=\ln x$

5) $\ln(x-1)+\ln(x+3)=\ln\left(x^2+4x+9\right)$

6) $2\ln(2x-3)-3\ln(2-x)=0$

7) $\ln\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)+2\ln(x+2)=\ln(3x+9)$

8) $\sqrt[3]{\ln^2 x}-5\sqrt[3]{\ln x}+6=0$; 9) $\left(\ln(x+3)\right)^2=25$

10) $\ln\left(\sqrt{2x+1}\right)=-\dfrac{1}{2}\ln x$

EXERCICE 07

Soit g la fonction définie par : $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de g.

2) Montrer que la fonction g est impaire.

EXERCICE 08

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1) Montrer que : $\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)\le\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

2) On suppose dans cette question que :

$\ln\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)$, et on pose $\lambda=\dfrac{a}{b}$.

Montrer que $\lambda-3\sqrt{\lambda}+2=0$ puis déterminer les valeurs du réel λ.

Scanné avec CamScanner

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} x+y=10 \\ \ln x+\ln y=4\ln 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x+5y=8 \\ \ln x+\ln y=2\ln 2-\ln 5 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln x-\ln y=1 \\ \ln^2 x+\ln^2 y=13 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x\times\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=3 \\ \ln x-\ln y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln(xy)=-5 \\ \ln x.\ln y+14=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=e \\ \ln x+\ln y=2+\ln 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \ln x+\ln y=2\ln 2+\ln 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\ln x-\ln y=5 \\ \ln x+\ln y=7 \end{cases}$

$\begin{cases} xy=2 \\ \ln^2 x+\ln^2 y=\dfrac{5}{9}\ln^2 2 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln\left(x^5\right)+\ln\left(y^2\right)=16 \\ \ln\left(x^3\right)+\ln\left(y^3\right)=15 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln x^2+\ln y=11 \\ \ln^2 x-2\ln(xy)=6 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln\left(xy^2\sqrt{x}\right)=10 \\ \ln\left(\dfrac{x}{y\sqrt{y}}\right)=1 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln\left(x^3y^2\right)=5 \\ \ln x-4\ln\sqrt{y}=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=52 \\ \ln(-x)+\ln(-y)=\ln 24 \end{cases}$

EXERCICE 20

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\ln\left(\sqrt{x-1}\right)=\ln(3-x)-\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$

$\ln^3 x-3\ln^2 x-6\ln x+8=0$

$\ln|x-1|+\ln|x+2|=\ln\left|4x^2+3x-7\right|$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

$\ln\left(x^2-2x\right)\le\ln x$; $\ln^2 x+\ln x-2>0$

$\ln\left(\dfrac{3x-7}{4x+5}\right)\ge 0$; $\dfrac{\ln|x-2|}{3+\ln x}>0$

$\ln\left|3x^2+7x+3\right|\ge 0$; $\ln|x|<-\ln|3x+2|$

3) Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité suivante : $25\left(1+\dfrac{7}{100}\right)^n\ge 4$

CALCUL DES LIMITES

EXERCICE 21

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{2x-3}$; 2) $f(x)=\ln\left(\dfrac{3x^4+5}{x^2+4}\right)$

3) $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x^2+3}$; 4) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

5) $f(x)=3x-5\ln x$; 6) $f(x)=\ln x-5x^2$

7) $f(x)=\ln(2x+3)-\ln x$; 8) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{1-\ln x}$

9) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-3x$; 10) $f(x)=x\ln\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)$

EXERCICE 22

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^3 x}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln^3 x-\sqrt{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln^2 x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^3+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}.\ln^2 x$; $\lim\limits_{x\to 0^+}x\sqrt{|\ln x|}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-5x-\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-3x+7\right)}{2x+3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(5x+3)}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{2-3x}{2+5x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{3x}{x-2}+\ln(x-2)\right)$

$\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)\ln\left(x^2+x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x-4\ln x}{1+5\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(2x-3)}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+x+\sqrt{x+4}\right)}{3x}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 11

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-3\ln x}{2x+5\ln x}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{x-2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^4-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(2x+\sqrt{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{Arc}\tan x}{\ln(1+x)}$; $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\ln\left(x^3-8\right)$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+5\sin x}{1+3\tan x}\right)$

$\lim\limits_{x\to2^-}\ln(2-x).\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln\left(x^2\right)}}{x}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right)^3.\ln\left(x^2-1\right)$; $\lim\limits_{x\to1^-}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right).\ln(1-x)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\left(2\tan x.\sqrt[3]{\tan x}-1\right)}{\tan x-1}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{1-\ln(e-x)}$

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1-2\ln x}{1-\ln x}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et donner ce prolongement.

3) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to e^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to e^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

EXERCICE 13

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=2x-x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2(x-1)$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 14

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{\ln^2 x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis interpréter le résultat obtenu graphiquement.

3) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, puis interpréter graphiquement les résultat obtenus.

CALCUL DES FONCTIONS DÉRIVÉES

EXERCICE 17

Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable et calculer sa fonction dérivée dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x\ln x$; 2) $f(x)=\ln|x-1|+\ln x$

3) $f(x)=\ln\left(x^2-2x\right)$; 4) $f(x)=\ln\left|x^2-8x+12\right|$

5) $f(x)=\ln(\ln x)$; 6) $f(x)=x^3\sqrt{|\ln x|}$

7) $f(x)=\dfrac{\ln^5 x}{x}$; 8) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2+3x+1}\right)$

9) $f(x)=\ln|\cos x|$; 10) $f(x)=\sqrt{1-\ln(x-3)}$

11) $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{1}{\ln^2 x}}$; 12) $f(x)=x^2\left(2-\dfrac{3}{\ln x}\right)^4$

13) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; 14) $f(x)=\sqrt{1-\ln^2 x}$

15) $f(x)=\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right)$

16) $f(x)=\ln\left(\sqrt{e+x}+\sqrt{e-x}\right)$

17) $f(x)=\ln\left|\dfrac{x^2-4x}{x+4}\right|$

Scanné avec CamScanner

CALCUL DES PRIMITIVES

EXERCICE 18

Pour chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

1) $f(x)=-\dfrac{5}{x}$; $I=]0;+\infty[$

2) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$; $I=]-\infty;0[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$; $I=]-2;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{3x-5}{2x+1}$; $I=[0;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{2x}{4+x^2}$; $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+4}$; $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-5}$; $I=]2;5[$

8) $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2+x-7}{x}$; $I=]-\infty;0[$

EXERCICE 19

Pour chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction g sur l'intervalle I :

1) $g(x)=x^2-2+\dfrac{4}{5x+1}$; $I=[0;+\infty[$

2) $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x\ln x}$; $I=]1;+\infty[$

3) $g(x)=\dfrac{5}{x\sqrt{1-\ln x}}$; $I=]0;e[$

4) $g(x)=\tan x$; $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

5) $g(x)=\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)\operatorname{Arc}\tan x}$; $I=]0;+\infty[$

6) $g(x)=\dfrac{1}{\sin(2x)}$; $I=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

7) $g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$; $I=]0;+\infty[$

VARIATIONS ET ÉTUDE DES FONCTIONS

EXERCICE 20

Étudier les variations des fonctions définies par :

$f(x)=\ln(-3x+2)$; $g(x)=\ln\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)$

$h(x)=\ln\left|x^2-9\right|$; $k(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$

$u(x)=x^2-2x+3\ln\left(x^2-1\right)$; $v(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

EXERCICE 21

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2}x-1$ et $g(x)=x^2+5-2\ln x$

1) a) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_*^+$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

2) Étudier les variations de la fonction f.

EXERCICE 22

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x$$

1) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)\ x^3f'(x)=2\ln x+x^2-1$

2) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

EXERCICE 23

1) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x)=\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)$$

et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x\ln(1+x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Calculer : $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

c) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

d) Étudier les variations de la fonction f.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 24

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{2-\ln^2 x}}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer D_f, le domaine de définition de f.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$ puis étudier les variations de la fonction f.

3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e.

4) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ d'équation $y=x$.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE 25

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2.\sqrt{-\ln x} & ;\ 0<x\le 1 \\ f(x)=(x-1)\ln(x-1) & ;\ x>1 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

2) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) Étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE 26

Soit n un entier naturel non nul.

1) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=x^n-\ln x$

2) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ \ln x\neq x^n$

FONCTION LOGARITHME DE BASE a

EXERCICE 27

Simplifier les expressions suivantes :

$\log_4(2)+\log_2(16)+\log_8(4)$

$\log_2(8)-\log_2\left(\sqrt[3]{32}\right)+\log_2(9)-\log_2(3)$

$\log_3\left(\frac{15}{4}\right)+\log_2\left(\frac{1}{27}\right)+\log_2\left(\frac{4}{5}\right)$

$\log 100-\log\left(10^{2017}\right)+\log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$

$\frac{\log(0,008)-4\log(0,3)}{\log 9-\log 8}$

EXERCICE 28

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$5(\log_2 x)^2-\log_2 x-4=0$; $(\log x)^2-2\log x=0$

$-3\left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)^2+\log_{\frac{1}{4}} x+10=0$

2) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \log_3\left(\frac{1}{x^2}\right)-\log_3 y^4=-4 \\ \log_3\left(x^3y^5\right)=3 \end{cases}$$

EXERCICE 29

1) Résoudre les équations suivantes :

$(\log x)^3+3(\log x)^2-25\log x+21=0$

$\left(\log_{\sqrt{2}} x\right).\left(\log_2 x\right).\left(\log_{2\sqrt{2}} x\right).\left(\log_4 x\right)=54$

$\log_2 x=1-(x-2)^2$; $\log_2 x=\frac{1}{2}+\log_4(4x+10)$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

$\log_2 x\le\log_8(5x-4)$; $\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)>4$

3) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} xy=256 \\ 7\left(\log_4(y)+\log_y(x)\right)=50 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

1) Résoudre dans R l'équation :

$$10X^3 - 7X^2 - 4X + 1 = 0$$

2) En déduire dans R les solutions de ce qui suit :

$$10(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 4\ln x + 1 = 0$$

$$10(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 4\ln x + 1 > 0$$

EXERCICE 11

1) Résoudre dans R les équations suivantes :

$$(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 = \ln x - 2$$

$$\ln(4x-1) + \ln(x-1) - \ln(3x^2 + 6x + 2) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x+5}{4}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 5)$$

2) Résoudre dans R les équations suivantes :

$$\log(x^2 - 125) = 2 \quad ; \quad (\log x)^2 - 3\log x - 4 = 0$$

$$(\log x)^3 - 8(\log x)^2 - 105\log x = 0$$

3) Discuter, selon les valeurs du réel strictement positif a, les solutions de l'équation :

$$x^2 - x\ln a + 1 = 0$$

EXERCICE 12

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\ln(2x-3) + 2\ln(x-2) \geq \ln(-2x^2 + 19x - 24)$$

$$\ln|2x-1| + \ln|x-2| < \ln 3 \quad ; \quad \ln^2 x - 2\ln x < 3$$

EXERCICE 13

1) Résoudre dans R l'équation : $|\sin x| = 1$

2) Résoudre dans R l'équation : $\log_{\frac{1}{3}}(|\sin x|) = 0$

3) Résoudre dans R l'inéquation :

$$\frac{\ln(x^2 - 14x + 73)}{\ln|\sin x|} > \frac{2}{\log_{\frac{1}{3}}(|\sin x|)}$$

EXERCICE 14

Soit a, b et c des réels strictement supérieurs à 1.

1) Montrer les égalités suivantes :

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a(b) \; ; \; \log_{\frac{1}{a}}(b) = \log_a\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)} \; ; \; \log_c(a) = \log_c(b).\log_b(a)$$

2) a) Montrer que : $\dfrac{a^4 + b^4}{a+b} \geq (ab)^{\frac{3}{2}}$

b) En déduire que :

$$\log_a\left(\frac{b^4 + c^4}{b+c}\right) + \log_b\left(\frac{c^4 + a^4}{c+a}\right) + \log_c\left(\frac{a^4 + b^4}{a+b}\right) \geq 9$$

EXERCICE 15

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $u_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

Exprimer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EXERCICE 16

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

1) Montrer que : $(\forall n \geq 2)\; u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 2$

2) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

EXERCICE 17

1) Montrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

2) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\; u_n > \ln(1+n)$

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 38

Soit $(x_n)_{n\geq 2}$ la suite numérique définie par :

$$x_n = \sum_{k=2}^{n} \log_{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)$$

1) Montrer que pour tout $x \in [2,+\infty[$:

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{x(x+1)}\right) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) - \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$$

2) En déduire une simplification de l'expression de x_n puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

EXERCICE 39

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x^2+1)}}{x}$$

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

2) f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

EXERCICE 40

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \ln(x).\ln(1-x) \text{ si } x \in]0;1[\\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue à droite en 0 et à gauche en 1.

EXERCICE 41

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{t\to 1}\frac{\ln\left(2t.\sqrt[3]{t}-1\right)}{t-1} \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\left(2\tan x.\sqrt[3]{\tan x}-1\right)}{\tan x-1}$$

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = a$

b) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)$$

EXERCICE 42

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(2x))}{\tan x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{1-\ln(e-x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\ln\left(x\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-x}$$

EXERCICE 43

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = \frac{3x-2}{(2x-1)^2}$

1) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x différent de $\frac{1}{2}$: $f(x) = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{(2x-1)^2}$

2) Déterminer les primitives de f sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

3) Déterminer la primitive F de f sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ telle que : $F(1) = 1$

EXERCICE 44

On considère la fonction f définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)$

1) Montrer que f est dérivable sur I puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.

2) Déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ sur l'intervalle I.

EXERCICE 45

1) Montrer que pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1 \qquad (1)$$

2) En appliquant (1) pour $x = \sqrt[n]{e}$, montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$

En déduire que $e < 3$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 45

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(\ln x)$$

1) Étudier les variations de la fonction f.

2) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$0\le f(k+1)-f(k)\le\frac{1}{k\ln k}$$

3) On pose pour tout entier $n\ge 2$: $S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$

Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\ge 2}$.

EXERCICE 47

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\ln\left|\sqrt{x}-1\right|$$

Et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer D_f le domaine de définie de f.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

3) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f-\{0\}$ puis dresser le tableau de variations de f.

5) Montrer que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

6) Déterminer A le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses et différent de O.

7) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$.

8) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

EXERCICE 48

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(0)=0 \quad\text{et}\quad f(x)=x\sqrt{|\ln x|}\ \text{ si }\ x>0$$

1) Étudier la dérivabilité à droite de la fonction f en 0.

2) Étudier les variations de la fonction f.

3) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.

EXERCICE 49

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x)=x-n\ln x$

1) a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$

b) Étudier les variations de la fonction f_n.

c) En déduire que pour tout entier $n\ge 3$, l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n, et que $0<u_n<n<v_n$.

2) a) Montrer que : $(\forall n\ge 3)\ 1<u_n<e$

b) Montrer que : $(\forall n\ge 3)\ f_n(u_{n-1})=\ln(u_{n-1})$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge 3}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

d) En encadrant $\ln u_n$, déterminer la limite de $(u_n)_{n\ge 3}$.

e) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln u_n}{u_n-1}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n-1)=1$

3) a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b) Calculer $f_n(n\ln n)$ puis en déduire que :

$$(\forall n\ge 3)\ n\ln(n)<v_n$$

c) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ x>2\ln x$

et en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ n>2\ln n$

d) Déterminer le signe de $f_n(2n\ln(n))$ puis montrer que : $(\forall n\ge 3)\ n\ln n<v_n<2n\ln n$

e) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n\ln n}=1$

EXERCICE 50

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$

2) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}<\ln P_n<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

b) En déduire la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

Scanné avec CamScanner

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1) Étudier les variations de la fonction f_n .

2) a) Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif α_n tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1 \le \alpha_n < e^2$

c) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$

3) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et n puis en déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

4) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\ge 1}$ est convergente.

5) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = 2$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln^2 x + \ln x + 1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que f est continue à droite en 0.

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) Étudier les variations de la fonction f.

5) Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

6) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

7) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[\frac{1}{e};e\right]$.

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

8) Montrer que g^{-1} est dérivable en 0 puis déterminer $(g^{-1})'(0)$.

Première partie :

On considère la fonction numérique g définie sur $I = [-1;0[\cup]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(x+1)^2}{x(x+2)} - \ln|x(x+2)|$$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur I.

Deuxième partie :

On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} - \{0;-2\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln|x(x+2)|}{(x+1)^2} & \text{si } x \ne -1 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$$

Et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.

2) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^*} f(x)$

b) Montrer que f est continue en -1.

3) a) Montrer que pour tout $t \in \left]0;\frac{1}{4}\right[$:

$$-\frac{t^2}{2} - t^3 \le \ln(1-t) + t \le -\frac{t^2}{2}$$

b) Montrer que f est dérivable à droite en -1.

4) a) Montrer que : $(\forall x \in I - \{-1\})\ f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(x+1)^3}$

b) Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}$ puis dresser le tableau de variations de f sur D.

5) a) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

(On prend : $\alpha \approx 1{,}14$ et $f(\alpha) \approx 0{,}28$)

Scanné avec CamScanner

Première partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x\ln|x| - (x-1)\ln|x-1| \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ g(0) = g(1) = 0 \end{cases}$$

Et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la droite D d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe Γ.

(On restreindra alors l'étude de g à $E = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$)

2) Étudier la continuité et la dérivabilité de g en 1.

3) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = -1$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

4) a) Montrer que :

$$\left(\forall x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\right) \quad g'(x) = \ln\left(\frac{x}{|x-1|}\right)$$

b) Étudier les variations de la fonction g.

5) Écrire l'équation de la tangente à la courbe Γ au point d'abscisse 2 puis tracer la courbe Γ.

6) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Deuxième partie :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1;-1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln|x-1|}{\ln|x|} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{-1;0;1\} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2) Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition

3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1;0;1\}$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)(\ln|x|)^2}$$

b) Étudier les variations de la fonction f.

4) a) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisse.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Étudier la fonction f dans chacun des cas suivants :

- Domaine de définition D_f ;
- Limites aux bornes de D_f ;
- Tableau de variations ;
- Branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$;
- Construction de la courbe $\mathscr{C}_f$.

1) $f(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2x$; 2) $f(x) = x + 1 - \frac{1}{\ln x}$

3) $f(x) = \ln\left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)$

5) $f(x) = (2x-1)(2\ln(x)-1)$; 6) $f(x) = \frac{1}{x\ln(2$

7) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + 2\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$; 8) $f(x) = \ln\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{}}\right.$

9) $f(x) = \sqrt{(x-1)\ln x}$; 10) $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$

11) $f(x) = 3x + 2\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$

12) $\begin{cases} f(x) = x(\ln(2x)-1)^2 \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} f(x) = (x+1)(2x\ln(x) - x - 1) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln(ax)} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ (avec $a \in \mathbb{R}_+^*$)

Scanné avec CamScanner

15) $f(x)=\frac{m}{x}+\ln x$ (avec $m\in\mathbb{R}^*$)

16) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x}\ln(x+1) & \text{si } x>-1 \text{ et } x\neq 0 \\ f(-1)=0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2} & \text{si } x>0 \text{ et } x\neq e^{-1} \\ f(0)=0 \end{cases}$

18) $\begin{cases} f(x)=x\left(\dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x)+1}\right) & \text{si } x>0 \text{ et } x\neq e^{-1} \\ f(0)=0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} f(x)=x^2\sqrt{|\ln x|} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

20) $\begin{cases} f(x)=x^2\left(1-\dfrac{2}{\ln x}\right) & \text{si } x>0 \text{ et } x\neq 1 \\ f(0)=0 \end{cases}$

EXERCICE 56

Soit f la fonction définie sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \text{ et } f(x)=\frac{x}{\ln(x)} \text{ si } x\neq 0$$

1) a) f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

b) Dresser le tableau de variation de f

2) On définit la suite numérique (v_n) définie par :

$$v_0=3 \text{ et } v_{n+1}=f(v_n)$$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n\geq e$

b) Justifier que la suite numérique (v_n) converge et déterminer sa limite.

c) Montrer que pour tout $x\geq e$: $0\leq f'(x)\leq\frac{1}{4}$

d) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ |v_n-e|\leq\frac{1}{4^n}$

f) Sachant que $4^5>1000$, déterminer un entier naturel n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\text{Arctan}\left(\ln(-x)\right)+\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x<0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=(x\ln x-x)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier la continuité de f en 0.

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \ ; \ \lim_{x\to+\infty} f(x) \ ; \ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} \ ; \ \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$$

Puis interpréter les résultats graphiquement.

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) a) Montrer que :

$$\begin{cases} f''(x)=-\dfrac{\left(1+\ln(-x)\right)^2}{x^2\left(1+\ln^2(-x)\right)^2} & \text{si } x<0 \\ f''(x)=2\left(\ln^2 x+\ln x-1\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$$

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\mathbb{R}^-$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I à déterminer.

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

d) Tracer la courbe de la fonction g^{-1}.

EXERCICE 58

Etudier puis représenter la fonction suivante :

$$f(x)=x+\ln\left(\frac{4x^2}{|x^2+x-6|}\right)$$

Scanné avec CamScanner

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Première Partie :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par :

$$g(x)=\ln|x-2|-\frac{x-1}{x-2}$$

1) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

2) Étudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variations.

3) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2;+\infty[$ et que $\alpha\in]4;6[$.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}-\{2\}$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{\ln|x-2|} & \text{si } x\neq 1 \text{ et } x\neq 2 \\ f(1)=-1 \text{ et } f(2)=0 \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Étudier la continuité de la fonction f en 1 et en 2.

3) a) Montrer que pour tout $t\in]0;+\infty[$:

$$t-\frac{t^2}{2}\le\ln(1+t)\le t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$$

b) En déduire que pour tout $x\in]0;1[$:

$$\frac{1-x}{2}-\frac{(1-x)^2}{3}\le\frac{x-1+\ln(2-x)}{x-1}\le\frac{1-x}{2}$$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{\ln(2-x)}$ puis en déduire la dérivabilité de f à gauche en 1 et donner $f'_g(1)$.

On admet que f est dérivable à droite en 1.

Donner alors les interprétations géométriques des résultats obtenus.

d) Étudier la dérivabilité de f en 2 puis interpréter les résultats obtenus.

4) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1;2\}$.

5) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

b) Montrer que $f(\alpha)=\alpha-2$ puis tracer $\mathscr{C}$.

(On donne : $\alpha\approx 5{,}6$ et $f(\alpha)\approx 3{,}6$)

DEVOIR 2

On considère, pour chaque entier $n\in\mathbb{N}$, l'équation :

$$x+\ln x=n$$

1) Montrer que cette équation admet une solution unique x_n dans $]0;+\infty[$.

2) Montrer que la suite (x_n) est croissante non majorée. Quelle est sa limite ?

DEVOIR 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=x\ln x$

1) Etudier les variations de la fonction f.

2) Montrer qu'il existe une fonction numérique g et une seule définie sur l'intervalle $\left[-e^{-1};+\infty\right[$ telle que : $\left(\forall x\in\left[-e^{-1},+\infty\right[\right)\ g(x).\ln\left[g(x)\right]=x$.

3) Etudier les variations de la fonction g.

4) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(g(x))}=1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x).\ln x}{x}$.

5) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un même repère.

Scanné avec CamScanner

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation sur $\mathbb{R}^+$:

$$(E_n) : x^n + x - 1 = 0$$

On étudiera (E_n) à l'aide de la fonction auxiliaire f :

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$

1) *Existence et unicité d'une racine positive x de (E_n)* :

a) Résoudre l'équation pour $n = 1$ et $n = 2$.

b) Etudier les variations de la fonction numérique $x \mapsto x^n + x - 1$ sur $[0;+\infty[$ pour $n \geq 1$.

En déduire que l'équation (E_n) admet une et une seule racine positive qu'on notera x_n, et montrer que $0 < x_n < 1$ et en déduire le tableau de variations de f.

2) *Etude de la fonction auxiliaire f* :

a) Déterminer le domaine de définition de f et les limites de f aux extrémités de celui-ci.

b) Calculer alors $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

3) *Etude de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$* :

a) Montrer que $f(x_n) = n$ pour tout $n \geq 1$.

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

c) En déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

d) Préciser la valeur de la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

DEVOIR 5

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]-\infty;1[$ par :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1$$

1) Montrer que f est continue sur $]-\infty;1[$.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*_-$ et sur $]0;1[$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;1[$.

c) Déterminer le signe de $\ln(1-x) + x$, lorsque $x \in]-\infty;0[$, puis en déduire les variations de f.

d) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

e) On admet que f est dérivable en 0 et que l'on a $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Dresser le tableau complet de variations de f.

3) a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0;1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$

b) Donner la valeur de u_1.

c) Montrer que la suite (u_n) converge en précisant sa limite.

DEVOIR 6

Soit f_m la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_m(x) = 1 + x - mx\ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ f_m(0) = 1 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel non nul.

On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier la continuité de la fonction f_m en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f_m en 0.

3) Montrer que le point $A(0;1)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_m$.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_m$ selon les valeurs de m.

5) Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par trois points fixes, qu'on déterminera, lorsque m varie sur $\mathbb{R}^*$.

6) Étudier les variations de la fonction f_m.

7) a) Dresser le tableau de variation de f_m.

b) Montrer que $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α tel que $\alpha \in]3;4[$.

c) Tracer $\mathcal{C}_1$.

Scanné avec CamScanner

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 2

I) Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{4\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer les deux branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f'(x)=4\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)$$

b) Donner le tableau de variation de la fonction f.

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions différentes α et β telles que :

$$1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$$

4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

II)

1) Montrer que : $\left(\forall t\in[0;+\infty[\right)\ 1-t\le\frac{1}{1+t}\le 1$

2) En déduire que pour tout $a\in[0,+\infty[$:

$$a-\frac{a^2}{2}\le\ln(1+a)\le a$$

III) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f_n(x)=\frac{n\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$

Et soit $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier les variations de la fonction f_n.

2) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_n$ et montrer qu'elle admet un point d'inflexion d'abscisse $e^{\frac{5}{6}}$.

3) a) Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ selon les valeurs de la variable x.

b) En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

4) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions différentes u_n et v_n telles que :

$$1<u_n<\sqrt{e}<v_n<3$$

5) En utilisant le résultat de la question 3), montrer que la suite $(u_n)_{n\ge4}$ est strictement décroissante.

6) a) En utilisant II) 2), montrer que pour tout $n\ge4$:

$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\le\ln(u_n)\le u_n-1$$

b) En déduire que pour tout $n\ge4$:

$$\frac{(u_n)^2}{2n}\le u_n-1\le\frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$$

c) Montrer que : $(\forall n\ge4)\ \frac{1}{2n}\le u_n-1\le\frac{e}{n}$

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\ge4}$ est convergente en déterminant sa limite.

7) a) Montrer que : $(\forall n\ge4)\ v_n>e^{\frac{5}{6}}$

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

Examen National 2003 (Session Normale)

PROBLÈME 2

Première Partie :

Dans cette partie, on veut étudier les solutions positives de l'équation $(E): e^x=x^n$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

On considère la fonction f définie sur $D=[0;1[\cup]1;+\infty$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln x} & \text{si } x\ne0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Vérifier que pour tout $x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$ on a :

$$e^x=x^n\Leftrightarrow n=f(x)$$

Scanné avec CamScanner

c) Montrer que f est dérivable à droite en 0

d) Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Puis interpréter géométriquement les résultats obtenus

e) Etudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $]-\infty;1]$ et $[1;+\infty[$ puis donner son tableau de variations

f) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

g) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

h) Montrer que si $n \geq 3$, alors l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que :

$$1 < a_n < e < b_n$$

Deuxième Partie :

Dans cette partie, on se propose d'étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\geq 3}$ et $(b_n)_{n\geq 3}$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 3$: $b_n \geq n$

puis en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n\geq 3}$.

2)a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $n \geq 3$: $\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$

puis en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 3}$.

c) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} a_n^n = e$.

Examen National 2011 (Session Normale)

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \left(\frac{\text{Arc tan}(n)}{\text{Arc tan}(n+1)}\right)^{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n)$$

1) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_n = n^2\left(\ln\left(\text{Arctan}(n)\right) - \ln\left(\text{Arctan}(n+1)\right)\right)$$

2) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

3) Montrer que $\frac{n^2}{\left(1+n^2\right)\text{Arctan}(n)} < v_n < \frac{-\left(1+(n+1)^2\right)}{\left(1+n^2\right)\text{Arctan}(n)}$

4) Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Examen National 2013 (Session De Rattrapage)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (On prend : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

1) Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to 0} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right)$

2)a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer, puis dresser le tableau de variations de sa fonction réciproque f^{-1}.

3) Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'équation :

$$(E_n) : \; x + \ln x = n$$

a) Montrer que (E_n) admet une unique solution x_n.

b) Préciser x_1 puis montrer que $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

5)a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) f(x_n) \leq f(n)$

Puis en déduire que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \; x_n \leq n$

b) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \; n - \ln(n) \leq x_n$

c) Calculer les deux limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n - n}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)}$$

Examen National 2013 (Session De Rattrapage)

Scanné avec CamScanner

HISTOIRE

Leonhard Euler a donné le titre du père de l'analyse mathématique. En effet ce brillant mathématicien a développé de nombreuses notations. Il choisit en 1728 l'initiale du mot exponentiel pour désigner le nombre e : en 1748 il introduit dans une somme infinie de fonctions réelles de la variable et il l'étend aux fonctions complexes. Sa formule préférée est $e^{i\pi} + 1 = 0$ car elle relie les cinq nombres remarquables des mathématiques.

Source : https://fr.wikipedia.org

LEONHARD EULER
(1707 – 1783)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Maîtriser la résolution des équations et des inéquations et des systèmes comportant l'exponentielle népérienne.
- Maîtriser et appliquer les limites fondamentales de la fonction exponentielle népérienne.
- Maîtriser l'étude et la représentation des fonctions comportant la fonction exponentielle.
- Maîtriser l'étude et la représentation de fonctions comportant la fonction logarithme et la fonction exponentielle népérienne.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires 204
- Connaissances Fondamentales
  - Fonction exponentielle népérienne 207
  - Fonction exponentielle de base a 213
- Techniques Et Astuces 217
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application 224
  - Exercices de perfectionnement 229
  - Problèmes de synthèse 234

Scanné avec CamScanner

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

RAPPELS

A) À Propos des puissances :

1. Soit r un nombre rationnel et $(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Simplifier les expressions suivantes :

$$E=\frac{3\times 8^{r-\frac{1}{3}}+4^{r+1}.\left(\sqrt{3}\right)^{2r+4}}{8^r-(16)^{r+\frac{1}{2}}\times 2^{-r-4}} \quad \text{et} \quad F=\frac{\left(x^{-4}y^{\frac{1}{3}}\right)^2\sqrt[3]{x^2.\sqrt[3]{y}}}{y.x^{-2}\sqrt[6]{x^3y^{-2}}}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation suivante : $10^{(x-2)(3-x)}=\frac{1}{100}$

3. Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité : $3^n>(2016)^{40}$

4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\sqrt{2^{2n}+2^{n+1}+1}-\sqrt{2^{2n}-2^{n+1}+1}=2$

B) Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien :

1. Simplifier l'écriture du nombre : $a=\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)-2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\ln(2x-1)+\ln(2x+5)=\ln 7$; $3(\ln x)^2-5\ln x+2=0$; $|5-2\ln x|=|3+\ln x^4|$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$2(\ln x)^2-\ln x-3\geq 0$; $\ln(7x+6)-\ln(2x-3)\geq\ln(x-2)$; $\ln(2x).\ln\left(\frac{2}{x}\right)\geq 2\ln(2)-1$

C) Étude d'une fonction numérique :

1. Soit φ la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $\varphi(t)=\frac{2t}{1+t}-\ln(1+t)$

Étudier les variations de φ sur $[0;+\infty[$ et en déduire qu'il existe un unique réel $\alpha\in]3;4[$ tel que $\varphi(\alpha)=0$.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right)\ f'(x)=\frac{\varphi\left(x^2\right)}{x^2}$

d) Étudier les variations de la fonction f puis tracer $\mathscr{C}_f$.

Scanné avec CamScanner

A) Première Partie :

1. Montrer que la fonction logarithme népérienne est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

La fonction ln admet alors une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$.

La fonction réciproque de la fonction logarithme népérienne est appelée la fonction exponentielle népérienne ou la fonction exponentielle de base e, et on la note exp.

2. Calculer : $\exp(0)$, $\exp(1)$, $\exp(2)$, $\exp\left(\frac{1}{2}\right)$

3. Montrer que la fonction exp est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.

4. Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*)\ \exp(\ln(t)) = t$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ln(\exp(x)) = x$

5. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \exp(n) = e^n$

- Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\beta = \ln(\alpha)$
- exp est une abréviation du mot « exponentielle »

Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors :

$$\beta = \ln\alpha \Leftrightarrow \alpha = \exp(\beta)$$

- Le nombre e est l'unique réel tel que : $\ln(e) = 1$

B) Deuxième Partie :

On considère les deux nombres :

$$x = \frac{1}{3} \text{ et } y = \frac{1}{6}$$

On pose : $a = \exp(x)$ et $b = \exp(y)$

1. Calculer $\ln a$, $\ln b$ et $\ln(ab)$.

2. En déduire que : $\exp(x).\exp(y) = \exp(x+y)$

C) Troisième Partie :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $a = \exp(x)$ et $b = \exp(-x)$

Calculer $\ln a + \ln b$ puis écrire b en fonction de a.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\exp(x) - 2\exp(-x) + 1 = 0$

D) Quatrième Partie :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $a = \exp(2x)$ et $b = \exp(x)$

Montrer que $a = b^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\exp(2x) + \exp(x) - 6 \geq 0$

E) Cinquième Partie :

1. En utilisant la représentation graphique de la fonction ln, construire la courbe représentative de la fonction exp dans un repère orthonormé.

2. En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x}$$

Puis donner les interprétations graphiques que l'on peut tirer.

Scanné avec CamScanner

3 DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

1. Montrer que la fonction exp est dérivable en 0 et que : $(\exp)'(0) = 1$

2. a) Calculer la limite : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\exp(t)-1}{t}$

   b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe exp au point d'abscisse 0 .

3. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \exp(\sin x)$ et soit $x_0 = \dfrac{2017\pi}{2}$

   Montrer que la fonction f est dérivable en x_0 et déterminer $f'(x_0)$.

4 FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE 10

1. Montrer que la fonction logarithme décimal $x \mapsto \log$ est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, et que **log** admet une fonction réciproque définie de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$.

   La fonction réciproque de la fonction logarithme décimal est appelée la fonction exponentielle de base 10, et on la note $\exp_{10}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\exp_{10}(n) = 10^n$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp_{10}(x) = \exp(x \ln 10)$

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp_{10}(2x) = (\exp_{10}(x))^2$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\exp_{10}(2x) - 11\exp_{10}(x) + 10 = 0$

6. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_{10}(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_{10}(x)$.

Scanned with CamScanner

Scanné avec CamScanner

FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

Définition 1

La fonction réciproque de la fonction logarithme népérienne est appelée la fonction exponentielle népérienne (ou la fonction exponentielle), et on la note exp.

Remarques

- La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$: $(\forall \beta \in \mathbb{R})(\exists! \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \quad \beta = \ln(\alpha)$
- Par définition de la fonction exp : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}_+^*) \quad (y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y))$
- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$ car : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Proposition 1

- La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) > 0$ et $\ln(\exp(x)) = x$
- On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\exp(\ln x) = x$

Corollaire

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $(\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y)$ et $(\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0)$ et $(\exp(x) < 1 \Leftrightarrow x < 0)$ et $(\exp(x) > 1 \Leftrightarrow x > 0)$

Exemples

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$

Cette équation est définie pour les réels x tels que $2x+3 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R} - \left\{1; \frac{-3}{2}\right\}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{1; \frac{-3}{2}\right\}$:

$$\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \Leftrightarrow \frac{x+5}{2x+3} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x+5)(x-1) = 2x+3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

Les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$ sont -4 et 2, qui sont dans $\mathbb{R} - \left\{1; \frac{-3}{2}\right\}$.

Par suite, l'ensemble solution de l'équation est : $S = \{2; -4\}$

Scanné avec CamScanner

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$

Cette inéquation est définie pour tout réel non nul. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right) \Leftrightarrow 2x+1 \leq \frac{6}{x} \Leftrightarrow \frac{2x^2+x-6}{x} \leq 0$$

En étudiant le signe de $\frac{x^2+x-6}{x}$ on obtient comme ensemble solutions : $S =]-\infty;-2] \cup \left]0;\frac{3}{2}\right]$

Applications

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$\exp(-x^2) = \exp\left(\frac{3x+1}{x-5}\right)$; $\exp\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = e^2$; $\exp(-x^2) > \exp(-x)$

$\exp(5x^2-7x+2) \leq 1$; $\exp\left(\frac{1}{x+7}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{(x+7)^2}-12\right)$

1.2. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Proposition 2

Pour tous réels x et y on a : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Preuve

Posons $\exp(x) = t$ et $\exp(y) = s$. On a alors : $x = \ln(t)$ et $y = \ln(s)$

On sait que $\ln(t) + \ln(s) = \ln(st)$, donc $x+y = \ln(ts)$ et alors $\exp(x+y) = ts = \exp(x).\exp(y)$.

On peut dire donc que la fonction exp transforme les sommes en produits, et en utilisant un raisonnement par récurrence on peut montrer la propriété suivante :

Proposition 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels $x_1, x_2, ..., x_n$, on a :

$\exp(x_1+x_2+....+x_n) = \exp(x_1).\exp(x_2)...\exp(x_n)$, c'est-à-dire : $\exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(x_k)$

De la proposition 2, on déduit les résultats suivants :

Proposition 4

Soit x et y deux nombres réels, et r un nombre rationnel. Alors :

$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$; $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$; $\exp(rx) = (\exp(x))^r$

Scanné avec CamScanner

1.3. UNE AUTRE ÉCRITURE DE LA FONCTION exp

On a $\exp(1) = e$. On a déjà vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\exp(rx) = (\exp(x))^r$

En particulier pour $x = 1$: $\exp(r) = (\exp(1))^r = e^r$

On prolongera cette écriture en notant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = e^x$

Remarquons enfin que cette nouvelle notation est compatible avec les notations des puissances connues.

Avec cette nouvelle notation, on résumera les résultats vus précédemment comme suit :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)\ \ y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x > 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ln(e^x) = x$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ e^{\ln x} = x$
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $(e^x = e^y \Leftrightarrow x = y)$ et $(e^x < e^y \Leftrightarrow x < y)$
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$:

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad ; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad ; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad ; \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

Exemples

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2}.(e^x)^3 = (e^{-x})^2.e^{-7}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{x^2}.(e^x)^3 = (e^{-x})^2.e^{-7} \Leftrightarrow e^{x^2}.e^{3x} = e^{-5x}.e^{-7} \Leftrightarrow e^{x^2+3x} = e^{-5x-7} \Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$$

Les solutions de l'équation $x^2 + 8x + 7 = 0$ sont -7 et -1. D'où l'ensemble solution est $S = \{-7; -1\}$.

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0 \Leftrightarrow e^{-3}\left(e^{2x} - (e+1)e^{x+1} + e^3\right) < 0 \Leftrightarrow e^{2x} - (e+1)e^{x+1} + e^3 < 0$$

En posant $t = e^x$ on obtient :

$$e^{2x} - (e+1)e^{x+1} + e^3 < 0 \Leftrightarrow (e^x - e)(e^x - e^2) < 0 \Leftrightarrow e < e^x < e^2 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Par suite, l'ensemble solution de l'inéquation est : $S =]1; 2[$

Applications

1) On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) + f(-x) = 2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{\frac{3x}{x-1}} - e^{\frac{x}{x-1}} = 2e^{\frac{x}{x-1}} - 2$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{(e^{2x}-16)(e^x-1)}{e^{x+1}-e} \geq 0$

Scanné avec CamScanner

1.4. DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

Proposition 5

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \exp'(x) = \exp(x)$

Ce qui s'écrit aussi : $(\forall x \in \mathbb{R})\left(e^x\right)' = e^x$

Preuve

Posons $f(x) = \ln x$ où $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc : $f^{-1}(x) = e^x$ et $x \in \mathbb{R}$.

Puisque $f'(x) = \dfrac{1}{x} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\left(e^x\right)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

En utilisant la composée de deux fonctions dérivables, on montre la proposition suivante :

Proposition 6

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$(\forall x \in I)\quad \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$$

Exemples

Déterminons les dérivées des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = e^{\sqrt{2x+1}} \quad ; \quad g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1} \quad ; \quad h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$$

- La fonction $x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Donc la fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et on a pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$: $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}$
- Les fonctions polynomiales $x \mapsto -2x^2$ et $x \mapsto 3x+1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et leurs dérivées sont $x \mapsto -4x$ et $x \mapsto 3$ respectivement. Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -4xe^{-2x^2} - 9e^{3x+1}$$

- La fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x+1}{-x+3}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]3;+\infty[$ et $]-\infty;3[$, et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{4}{(x-3)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$. Donc la fonction h est dérivable sur chacun des intervalles $]3;+\infty[$ et $]-\infty;3[$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$: $h'(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

Scanné avec CamScanner

Exemples

Déterminons les primitives des fonctions f , g et h définies par :

$$f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad ; \quad g(x)=\frac{e^{\operatorname{Arc}\tan x}}{1+x^2} \quad ; \quad h(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}e^{\sqrt[3]{x}}$$

• Posons : $u(x)=\sqrt{x}$; donc $f'(x)=2u'(x)e^{u(x)}$. Par suite, les primitives de la fonction f sont :

$x\mapsto 2e^{\sqrt{x}}+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

• Posons : $v(x)=\operatorname{Arc}\tan x$; donc $g'(x)=v'(x)e^{v(x)}$. Par suite, les primitives de la fonction g sont :

$x\mapsto e^{\operatorname{Arc}\tan x}+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

• Posons : $w(x)=\sqrt[3]{x}$; donc $h(x)=3w'(x)e^{w(x)}$. Par suite, les primitives de la fonction h sont :

$x\mapsto 3e^{\sqrt[3]{x}}+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Applications

1) Déterminer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f(x)=e^{\sqrt{2x^2-x+5}} \quad ; \quad g(x)=e^{\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} \quad ; \quad h(x)=xe^{\frac{2x}{x^2-1}} \quad ; \quad k(x)=\frac{\sin(x)}{e^{\cos(2x)}}$$

2) Déterminer les primitives des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$u(x)=\left(4-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^{2x-\sqrt{x}} \quad ; \quad v(x)=-\frac{\ln^2 x}{x}e^{(\ln x)^3} \quad ; \quad w(x)=\frac{e^{\frac{\sin x}{1+\cos x}}}{1+\cos x}$$

1.5. LIMITES FONDAMENTALES

Proposition 7

• On a les limites fondamentales suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}xe^x=0 \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

• Si a est un réel non nul alors : $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$ et $\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=e^a$

Preuve

Tous ces résultats se déduisent des limites de la fonction logarithme népérienne.

Les résultats $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$ et $\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=e^a$ peuvent être démontrés en utilisant le nombre dérivé.

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

Preuve

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n \text{, et donc : } \frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \text{. En posant } t = \frac{x}{n} \text{ on obtient : } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{n^n}\left(\frac{e^t}{t}\right)^n$$

Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty$. De plus, on a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$

- On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim\limits_{X\to+\infty}(-X)^n e^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{(-1)^n X^n}{e^X}$ (Ici on a posé $X = -x$)

Puisque $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X^n} = +\infty$ alors $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X^n}{e^X} = 0$. Par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Exemples

1) Calculons les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3x+4}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2+5x\right)e^x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3x+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}} = +\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2+5x\right)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3e^x - x^2e^x + 5xe^x\right) = 0$ car : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

2) Calculons la limite $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 e^{-x^2}$:

On a en posant $t = \sqrt{|x|}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 e^{-x^2} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-t^{10}.e^{-t}\right) = 0$

3) Calculons les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}$. Puisque $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} = \lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$ alors :

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x} = 1\times1 = 1$.

On a : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{\sqrt[3]{x}}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{t} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[3]{x^2} = 0^+$.

Scanned with CamScanner

Applications

1) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^4\ln x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x+1\right)-x\right)$

2) Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-e^{-2x}}$ à droite au point 0.

3) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+1$ est une asymptote oblique de la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = (x-1)e^{\frac{2}{x}}$

4) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x>\pi}}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)^4 e^{\frac{1}{\pi-x}}$

2 FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a

2.1. DÉFINITION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a

Définition 2

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$. On la note $\exp_a$.

Remarques

- D'après la définition 2, on a : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}_+^*)\ (y=\exp_a(x)\Leftrightarrow x=\log_a(y))$
- Soit x un réel positif et y un réel strictement positif. On a alors :

$$y=\exp_a(x)\Leftrightarrow x=\log_a(y)=\frac{\ln y}{\ln a}\Leftrightarrow \ln y = x\ln a\Leftrightarrow y=e^{x\ln a}$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\exp_a(x)=e^{x\ln a}$

2.2. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Proposition 9

Soit x et y deux réels et r un nombre rationnel $(r\in\mathbb{Q})$. Alors :

$$\exp_a(x+y)=\exp_a(x).\exp_a(y)\quad ;\quad \exp_a(x-y)=\frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}\quad ;\quad \exp_a(rx)=\left(\exp_a(x)\right)^r$$

2.3. UNE AUTRE ÉCRITURE DE LA FONCTION $\exp_a$

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On a : $\exp_a(1)=e^{\ln(a)}=a$

Et puisque pour tout $r\in\mathbb{Q}$: $\exp_a(r)=\left(\exp_a(1)\right)^r=a^r$

On prolonge cette écriture sur l'ensemble des nombres réels en écrivant pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\exp_a(x)=a^x$

Scanné avec CamScanner

Proposition 10

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. Alors :

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}_+^*)\quad y = a^x \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln y}{\ln a}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\quad \log_a\left(a^x\right) = x \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\quad a^{\log_a(x)} = x$
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\quad a^{x+y} = a^x \times a^y \quad$ et $\quad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

Remarque

Dans ce paragraphe, on a supposé que $a > 0$ et $a \neq 1$, et après avoir prolongé l'écriture $\exp_a$ sous la forme d'une puissance de a, on a obtenu : $(\forall x \in \mathbb{R})\ a^x = e^{x \ln a}$

Le fait que $e^0 = 1$ nous conduit à poser « par convention » : $1^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On a donc : $(\forall a \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ a^x = e^{x \ln a}$

Proposition 11

Soit a et b deux réels strictement positifs. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a^{x+y} = a^x \times a^y \ ; \ a^{-x} = \frac{1}{a^x} \ ; \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \ ; \ \left(a^x\right)^y = a^{xy} \ ; \ (ab)^x = a^x b^x \ ; \ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Exemples

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $5^x = 15$

Cette équation s'écrit $e^{x \ln 5} = 15$, ce qui est équivaut à $x \ln 5 = \ln 15$, c'est-à-dire à $x = \dfrac{\ln 15}{\ln 5}$.

Par suite, l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \left\{\dfrac{\ln 15}{\ln 5}\right\}$

2) Soit a un réel de l'intervalle $]1; +\infty[$, et soit x et y deux réels strictement positifs.

Simplifions les expressions suivantes : $\alpha = a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$ et $\beta = \log_a\left(\log_a a^{a^a}\right)$ et $\lambda = \dfrac{x^{\log_a(y)}}{y^{\log_a(x)}}$

Pour α : $\alpha = a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}} = a^{\log_a(\log a)} = \log a$

Pour β : $\beta = \log_a\left(\log_a a^{a^a}\right) = \log_a\left(a^a\right) = a \log_a(a) = a$

Pour λ : $\lambda = \dfrac{x^{\log_a(y)}}{y^{\log_a(x)}} = \dfrac{e^{\frac{\ln(x)\ln(y)}{\ln(a)}}}{e^{\frac{\ln(x)\ln(y)}{\ln(a)}}} = 1$

Scanné avec CamScanner

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3^{2x} \geq 5^{1-x}$

Cette inéquation est équivalente à $2x\ln 3 \geq (1-x)\ln 5$, c'est-à-dire que $(2\ln 3 + \ln 5)x \geq \ln 5$. Par suite, l'ensemble solution de cette inéquation est : $S = \left[\dfrac{\ln 5}{2\ln 3 + \ln 5}; +\infty\right[$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $7^{x+1} - 7^{-x} < 6$

Cette inéquation est équivalente à $7.7^x - \dfrac{1}{7^x} - 6 < 0$, c'est-à-dire à $7.7^{2x} - 6.7^x - 1 < 0$. Or, on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $7t^2 - 6t - 1 = (7t+1)(t-1)$. il s'ensuit donc que l'inéquation $7.7^{2x} - 6.7^x - 1 < 0$ est équivalente à $\left(7^{x+1}+1\right)\left(7^x - 1\right) < 0$, c'est-à-dire que $7^x < 1$ (ceci car $7^{x+1} + 1 > 0$). Ainsi, l'ensemble solution de cette inéquation est : $S = \mathbb{R}_-^*$

Applications

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$-5\times 4^{x+1} + 2\times 4^{-x} = 3$; $3^x - 5\sqrt{3^x} + 4 = 0$; $9^{2x+1} = \dfrac{36}{6^x}$; $16^x - 3^{2x-\frac{1}{2}} = 3^{2x-\frac{1}{2}} - 2^{4x-1}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\log 2 + \log\left(4^{x-2} + 9\right) \leq 1 + \log\left(2^{x-2} + 1\right)$

3) Montrer que pour tout $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$: $a^{\ln\frac{b}{c}}.b^{\ln\frac{c}{a}}.c^{\ln\frac{a}{b}} = 1$

2.4. ÉTUDE DE LA FONCTION $\exp_a$

Proposition 12

La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left(\exp_a\right)'(x) = \left(a^x\right)' = (\ln a)a^x$

Exemples

Calculons la dérivée de chacune des fonctions définies par :

$f(x) = 4^x + 4^{-4x}$; $g(x) = 5^{\sqrt{x+1}}$; $h(x) = 2^{\frac{x}{x^2+1}}$

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = 4^x.\ln 4 - 4\times 4^{-4x}\ln 4 = \left(4^x - 4^{-4x+1}\right)\ln 4$
- On a pour tout $x \in [-1,+\infty[$, $g(x) = e^{\sqrt{x+1}\ln(5)}$. Donc la fonction g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et on a pour tout $x \in]-1;+\infty[$: $g'(x) = \left(e^{\sqrt{x+1}\ln(5)}\right)' = \left(\sqrt{x+1}\ln(5)\right)' e^{\sqrt{x+1}\ln(5)} = \dfrac{\ln 5}{2\sqrt{x+1}}.5^{\sqrt{x+1}}$
- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}\ln(2)}$. Donc la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = \left(e^{\frac{x}{x^2+1}\ln(2)}\right)' = \left(\frac{x}{x^2+1}\ln(2)\right)' e^{\frac{x}{x^2+1}\ln(2)} = \frac{\left(1-x^2\right)\ln 2}{\left(x^2+1\right)^2}.2^{\frac{x}{x^2+1}}$$

Scanné avec CamScanner

Proposition 13

- Si $a > 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \quad x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$$

- Si $0 < a < 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

$$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \quad x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$$

Applications

1) Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies par :

$$g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad h(x) = \left(3^x + 2^x - 5^x\right)^4 \quad ; \quad k(x) = 5^{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$$

2) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 2^x + 2^{\frac{6}{x}}$

a)- Calculer $f'(x)$ puis montrer que f est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{6}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{6};+\infty[$.

b)- En déduire que l'équation $f(x) = 12$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$ que l'on déterminera.

Proposition 14

- Si $a > 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.
- Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

Exemples

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3^x - e^x\right) = \lim_{x \to +\infty} 3^x \left(1 - \left(\frac{e}{3}\right)^x\right) = +\infty \quad \text{car : } \lim_{x \to +\infty} 3^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^x = 0$$

Application

On considère la fonction numérique définie par : $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.

2) Calculer les limites de la fonction f aux bornes du domaine de définition.

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse 0.

5) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) Calcul des limites :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+5x^2-e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(x^3e^{-x}+5x^2e^{-x}-1\right)=-\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x\left(1-e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}\times\dfrac{1}{1-e^{-x}}=0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-e^{-x}}=1$)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x^2}}=0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x^2}}=e^0=1$)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln\left(\frac{x^5}{5^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{5\ln x-x\ln 5}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\left(5\frac{\ln x}{x}-\ln 5\right)}=0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$)

- $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^1=e$ (car $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$)

2) a) On a immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$.

b) Continuité de f sur $]0;+\infty[$:

On a pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=e^{x\ln x}$. Puisque les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto\ln x$ sont continues sur $]0;+\infty[$ alors $x\mapsto x\ln x$ est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions continues sur cet intervalle. Il s'ensuit que $x\mapsto e^{x\ln x}$ (c'est-à-dire f) est continue sur $]0;+\infty[$.

Continuité de f sur $]-\infty;0[$:

Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto e^x$ sont continues sur $]-\infty;0[$; il en résulte que la fonction $x\mapsto xe^x$ est continue sur $]-\infty;0[$ en tant que produit de deux fonctions continues sur cet intervalle. Il s'ensuit que

Scanné avec CamScanner

la fonction f est continue sur $]-\infty;0[$ en tant que quotient de deux fonctions continues sur cet interva

à dénominateur ne s'annulant pas. Conclusion : f est continue sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$.

c) Etudions la continuité de f au point $x_0 = 0$:

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1 = f(0)$ (car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$)

Il s'ensuit que la fonction f est continue à droite en 0.

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{xe^x}{1-e^x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{x}{e^x-1}\times e^x = -1\times 1 = -1$ (car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$)

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$ alors la fonction f n'est pas continue à gauche en 0.

Conclusion : La fonction f n'est pas continue en $x_0 = 0$.

- On retiendra que si a et b sont deux réels strictement positifs :

  $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \exp\big(f(x)\ln a\big) = \exp\big(g(x)\ln b\big) \Leftrightarrow f(x)\ln a = g(x)\ln b$

- Dès que l'on rencontre une expression du type X^Y avec Y non entier alors on commence par écrire $X^Y = e^{Y\ln X}$ (définition d'une puissance réelle), ce qui montre que cette écriture n'a un sens que pour $X > 0$.

- Pour tout $m \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'équivalence suivante : $e^x = m \Leftrightarrow x = \ln m$

- Soit α un réel strictement positif et β un réel quelconque. Il faut savoir et savoir démontrer les résultats suivants, très utiles en pratique :

  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$
  - Si $a \in]1,+\infty[$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0$
  - Si $a \in]0,1[$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha a^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a^x}{|x|^\alpha} = +\infty$

On retiendra ces formules en disant que, lorsqu'il s'agit d'une forme indéterminée :

La puissance l'emporte sur le logarithme

L'exponentielle l'emporte sur la puissance

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{e^{u(x)}-1}{u(x)} = 1$. En pratique, on pose $t = u(x)$ et la limite devient : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} = 1$

- Parfois un changement de variable simple permet d'aboutir à une limite de référence. Par exemple, pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$, on pourra poser $t = \dfrac{1}{x}$ et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} = 1$

- Il faut savoir et savoir démontrer quelques inégalités classiques relatives aux fonctions $x \mapsto \exp x$ et $x \mapsto \ln x$. A titre d'exemple : $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x \geq x+1$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ \ln x \leq x-1$; ....

Scanné avec CamScanner

B ÉTUDE D'UNE FONCTION A UN PARAMÈTRE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$

1) a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.

b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 puis interpréter le résultat obtenu.

2) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^-} f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}(f_n(x)-x)$

3) a) Justifier brièvement que f_n est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

b) Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

c) Dresser le tableau complet de variations de f_n.

SOLUTION

1) a) Montrons que la fonction f_n est continue à droite en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} xe^{-\frac{n}{x}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{n}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$ alors f_n est continue à droite en 0.

b) Montrons que la fonction f_n est dérivable à droite en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0$

D'où la fonction f_n est dérivable à droite en 0 et de plus $(f_n)'_d(0) = 0$.

Interprétation : La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet une tangente horizontale à droite au point O.

2) Calcul des limites :

$\lim\limits_{x\to 0^-} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} xe^{-\frac{n}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-\frac{n}{x}}}{-\frac{n}{x}} \times (-n) = \lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{e^X}{X} \times (-n) = -\infty$ (on a posé $X = -\frac{n}{x}$)

$\lim\limits_{x\to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} xe^{-\frac{n}{x}} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-\frac{n}{x}} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(f_n(x)-x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(xe^{-\frac{n}{x}} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{-\frac{n}{x}} - 1\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-\frac{n}{x}} - 1}{-\frac{n}{x}} \times (-n) = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} \times (-n) = -n$

Résumé : $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f_n(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty}(f_n(x)-x) = -n$

3) a) La fonction $x \mapsto -\dfrac{n}{x}$ est une fonction rationnelle donc dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Par conséquent,

Scanné avec CamScanner

la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{n}{x}\right)$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. La fonction f_n est donc dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

b) On a immédiatement, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f_n'(x) = \left(xe^{-\frac{n}{x}}\right)' = e^{-\frac{n}{x}} + \frac{n}{x^2}e^{-\frac{n}{x}} = \left(1+\frac{n}{x^2}\right)e^{-\frac{n}{x}}$

c) Tableau de variations de f_n :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | 0	$\nearrow$	$+\infty$

C ÈTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(0)=1$ et $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ si $x>0$

$\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\frac{x^2}{2} \le e^x - 1 - x \le \frac{x^2}{2}e^x$

b) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f_d'(0) = -\frac{1}{2}$.

3) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$

a) Étudier les variations de la fonction g puis en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x)>0$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$.

Que peut-on en déduire sur la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$?

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis dresser le tableau complet de variations de la fonction f.

d) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) On considère maintenant la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $0 \le f(x) \le 1$

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) a) Puisque les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que quotient de deux fonctions continues sur cet intervalle.

On a au point $x_0 = 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1 = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0

Conclusion : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right)' = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\dfrac{x^2}{2} \le e^x - 1 - x \le \dfrac{x^2}{2} e^x$.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $u(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2} e^x - e^x + 1 + x$

Les deux fonctions u et v sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et de plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$u'(x) = e^x - 1 - x$, $u''(x) = e^x - 1$, $v'(x) = xe^x - \dfrac{x^2}{2} e^x - e^x + 1$, $v''(x) = xe^x + xe^x + \dfrac{x^2}{2} e^x$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $u''(x) \ge 0$ et $v''(x) \ge 0$, il s'ensuit donc que les fonctions u' et v' sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $u'(x) \ge u'(0)$ et $v'(x) \ge v'(0)$, c'est-à-dire que $u'(x) \ge 0$ et $v'(x) \ge 0$.

Les fonctions u et v sont alors croissantes sur $\mathbb{R}^+$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $u(x) \ge u(0)$ et $v(x) \ge v(0)$,

c'est-à-dire que $u(x) \ge 0$ et $v(x) \ge 0$. En résumé : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{x^2}{2} \le e^x - 1 - x \le \dfrac{x^2}{2} e^x$

b) On a d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{x}{2} \le \dfrac{e^x - 1}{x} - 1 \le \dfrac{x}{2} e^x$

Or : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\dfrac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \dfrac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit donc que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$-\frac{e^x}{2} \times \frac{x}{e^x - 1} \le \frac{f(x) - f(0)}{x} \le -\frac{1}{2} \times \frac{x}{e^x - 1}$$

Puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{e^x}{2} \times \dfrac{x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{x}{e^x - 1} = -\dfrac{1}{2}$ (car $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$) alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\dfrac{1}{2}$

Scanné avec CamScanner

Par suite, la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.

3) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$

a) La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme des fonctions deux fois dérivables sur cet intervalle. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $g'(x) = xe^x - e^x + 1$ et $g''(x) = xe^x$.

Puisque g'' est positive sur $\mathbb{R}^+$ alors la fonction g' est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et donc $g'(x) \geq g'(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors $g(x) > g(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) > 0$.

b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{e^x - 1 - xe^x}{\left(e^x - 1\right)^2}\right)' = \frac{\left(-xe^x\right)\left(e^x - 1\right)^2 - 2e^x\left(e^x - 1 - xe^x\right)\left(e^x - 1\right)}{\left(e^x - 1\right)^4}$$

D'où : $f''(x) = \frac{\left(-xe^x\right)\left(e^x - 1\right) - 2e^x\left(e^x - 1 - xe^x\right)}{\left(e^x - 1\right)^3} = \frac{e^x}{\left(e^x - 1\right)^3}\left(xe^x - 2e^x + x + 2\right) = \frac{e^x g(x)}{\left(e^x - 1\right)^3}$

Par suite : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f''(x) = \frac{e^x g(x)}{\left(e^x - 1\right)^3}$.

D'après la question précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) > 0$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe.

c) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Remarquons ensuite que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{g'(x)}{\left(e^x - 1\right)^2}$. Comme $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $f'(x) < 0$, et la fonction f est alors strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

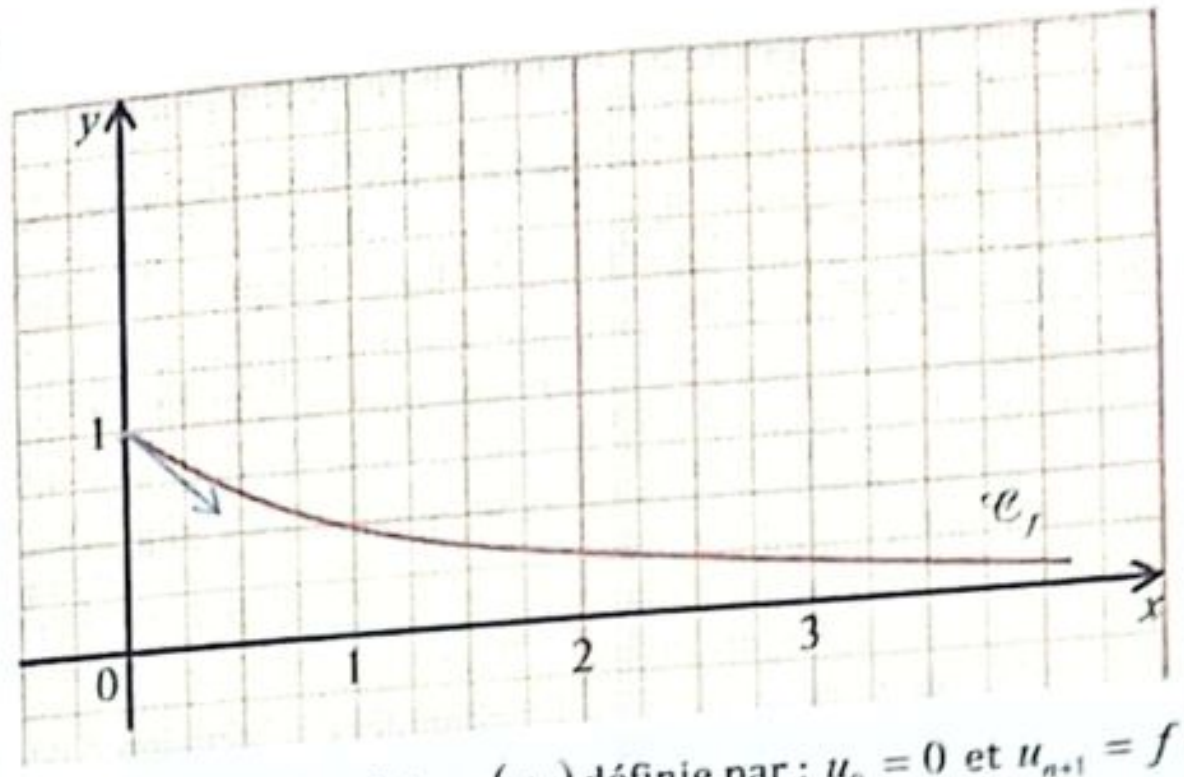
Tableau de variations de la fonction f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

d) La courbe $\mathscr{C}_f$:



4) On considère maintenant la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Puisque f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ alors $f(\mathbb{R}^*) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x); f(0)\right] =]0;1]$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $0 \le f(x) \le 1$

b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x}{e^x - 1} = x \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$ est $S = \{\ln 2\}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ln 2| \le \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2|$:

Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in [0;1]$

On a bien $u_0 \in [0,1]$. Supposons que $u_n \in [0;1]$ et montrons que $u_{n+1} \in [0;1]$.

d'après la question 4) a), $u_n \in [0;1]$ entraîne que $f(u_n) \in [0;1]$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \in [0;1]$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in [0;1]$.

on a f est continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et pour tout $x \in]0;1[$, $|f'(x)| \le \dfrac{1}{2}$. Puisque $u_n \in [0;1]$

et $\ln 2 \in [0;1]$ alors, d'après l'inégalité des accroissements finis : $|f(u_n) - f(\ln 2)| \le \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2|$

c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \ln 2| \le \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2|$

d) De l'inégalité $|u_{n+1} - \ln 2| \le \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2|$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ln 2| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ln 2$ (à faire). Puisque $\dfrac{1}{2} \in]-1;1[$ alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ln 2 = 0$ et donc, d'après les théorèmes des limites et encadrement, on en déduit que la suite (u_n) est convergente et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

EXERCICES D'APPLICATION

SIMPLIFICATION DES EXPRESSIONS

EXERCICE 01

Simplifier les expressions suivantes :

$a_1 = e^{\ln 13}$; $a_2 = e^{4\ln 5}$; $a_3 = e^{-\ln 7}$

$b_1 = e^{\frac{1}{3}\ln 27}$; $b_2 = e^{\frac{1}{2}\ln 4}$; $b_3 = e^{\ln 3 - \ln 5}$

$c_1 = \dfrac{e^{\ln 216}}{e^{3\ln 6}}$; $c_2 = \dfrac{e^{8+\ln 7}}{e^{9+\ln 14}}$; $c_3 = -e^{-\ln\frac{1}{3}}$

EXERCICE 02

Simplifier les écritures des nombres suivantes :

$A_1 = \ln\left(e^{-5}\right)$; $A_2 = \ln\left(\dfrac{1}{e^3}\right)$; $A_3 = \ln\left(\sqrt{e^{-\ln(e^3)}}\right)$

$A_4 = \ln\left(\sqrt{e^6}\right) - \ln\left(\sqrt{e^4}\right)$; $A_5 = \exp\left(-\dfrac{1}{5}\ln\left(e^{-5}\right)\right)$

EXERCICE 03

Si on a $X = 3\left(e^{-7+\ln(10^3)} - 1\right)$ alors a-t-on l'égalité :

$$\ln X = \ln 3 + \ln\left(1000 - e^7\right) - 7$$

EXERCICE 04

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \left(e^x\right)^7 \left(e^{-3x}\right)^2$; $B = \dfrac{e^{4x+5}}{e^{4x-3}}$; $C = \dfrac{e^{3x} + e^{-2x}}{e^{-x}}$

$D = \dfrac{e^{2x}\sqrt{e^{x+2}}}{e^{1,2x}\sqrt[3]{e^{2x}}}$; $E = \ln\left(1+e^{2x}\right) - \ln\left(1+e^{-2x}\right)$

$F = e^{\ln(x+1)} - e^{\ln x}$; $G = \sqrt[3]{e^{4x}}\left(\sqrt[3]{e^x}\right)^2$

EXERCICE 05

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(e^{-2x} - e^x\right)\left(1+e^{3x}\right) = \left(e^{-3x}+1\right)\left(1-e^{3x}\right)e^x$$

$$\ln\left(e^{2x} + e^x + 1\right) = 2x + \ln\left(e^{-2x} + e^{-x} + 1\right)$$

EXERCICE 06

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$e^{\ln(3x+1)} - \ln\left(5e^{3x}\right) - \ln\left(\frac{1}{5}\right) = 1$$

2) Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R})\ \dfrac{1}{e^{-2t}+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1-e^{2t}}{2\left(1+e^{2t}\right)}$

EXERCICE 07

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{-\ln(2x)} - \ln\left(e^{\frac{2x+1}{2x}}\right)$$

1) Déterminer D, le domaine de définition de f.

2) Montrer que f est constante sur D.

EXERCICE 08

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $(a \in \mathbb{R}^*)$

$$f(x) = \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{e^{ax}} - e^{\frac{ax}{2}}$$

Montrer que les fonctions f et g sont impaires.

ÉQUATIONS - INÉQUATIONS - SYSTÈMES

EXERCICE 09

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^{x-1} = 3$; $e^{x-4} = e$; $e^{2x} = e^{x^2}$; $e^2 e^x = 1$

$e^{(x-1)(x-2)} = 1$; $e^{x^2-3x} = \dfrac{1}{e^2}$; $e^{x^2} = \dfrac{1}{16}$; $\left(e^x\right)^2 = \dfrac{1}{16}$

EXERCICE 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^{2x+3} = \sqrt{e}$; $\left(e^x - 1\right)\left(e^x - 3\right) = 0$; $e^x = \sqrt{e^{2x-1}}$

$\sqrt[3]{e} \times e^{2x} = \left(e^{x^2}\right)^9$; $e^{-2x} e^{x+\ln 3} = e^{2x-\ln 9}$; $e^{\frac{2x-1}{x-3}} = e$

$\sqrt{1-e^{-2x}} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{e^{-x}-7}{e^{-x}+7} = 2$; $e^{x^2-4} = 81$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 11

Résoudre dans R les équations suivantes :

$e^{2x}+e^{x}-12=0$; $3e^{x}+4e^{-x}=7$

$e^{2x}-3e^{x}-4=0$; $e^{x-2}+e^{3-x}=1+e$

$e^{x+\ln 2}+e^{\ln 3-x}=0$; $e^{\frac{3}{2}x}-3e^{x}+3e^{\frac{x}{2}}-2=0$

$\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}-2}=\dfrac{-2}{1+e^{-x}}$; $\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{3}+\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{3}=7e^{x}$

EXERCICE 12

Résoudre dans R les équations suivantes :

$e^{x}\left(e^{x^2}\right)^{3}=e^{2}$; $e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}+2=0$

$e^{\frac{4x}{2x-1}}-2e^{\frac{2x}{2x-1}}-e^{\frac{2x}{2x-1}}+2$; $e^{\frac{2}{x}}+e^{\frac{1}{x}}-6=0$

EXERCICE 13

Résoudre dans R les équations suivantes :

$10^{2x-1}=100$; $10^{x^2-2}=5$; $7^{x}=21$; $5^{-x}=3$

$2^{x^2-3x}=11$; $(1,2)^{x-3}=e$; $7^{x}=\left(\sqrt{7}\right)^{3-x^2}$

$3^{x-1}+3^{x-2}=12\sqrt{3}$; $2^{2x-1}+3^{x}+4^{x+\frac{1}{2}}-9^{\frac{x}{2}+1}=0$

EXERCICE 14

Résoudre dans R les inéquations suivantes :

$e^{2x}<1$; $e^{-x}\geq -3$; $e^{\frac{x}{3}}<e^{2}$; $e^{3x-1}>\sqrt[5]{e^{3}}$

$3\leq 4-e^{x^2}$; $e^{-x+7}>e^{x}$; $e^{-4x^2+2x}\geq 1$

$e^{x^2+2x-7}\geq\dfrac{1}{e^{4x}}$; $\dfrac{1}{e^{2-x}}\leq\dfrac{3}{e^{2x}}$; $\left(e^{x}\right)^{2}>e^{x^2}$

EXERCICE 15

Résoudre dans R les inéquations suivantes :

$\ln\left(4-e^{x}\right)\geq 2$; $\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-5\right)>0$; $e^{x}-\dfrac{9}{e^{x}}<0$

$\dfrac{2-3e^{-x}}{1-3e^{-x}}<\dfrac{1}{2}$; $e^{\frac{16x}{2x+9}}\geq 2$; $\dfrac{e^{\frac{8}{3}x}}{e^{4x+\frac{1}{2}}}\geq e^{-x}$

$\left(e^{x}-2\right)\left(e^{x}-4\right)<0$; $-1<\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}<1$

EXERCICE 16

Résoudre dans R les inéquations suivantes :

$7e^{2x}-4e^{x}-3>0$; $e^{3x}-6e^{2x}+3e^{x}\leq 0$

$1-2e^{x}\leq 2e^{x}\left(1-2e^{x}\right)$; $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}+1>0$

$e^{2x}+e^{2(\ln(2)-x)}\leq 5$; $e^{2x}-e^{x+2}-e^{2-x}+1\leq 0$

EXERCICE 17

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} e^{x-y}=12e^{-2} \\ e^{x+y}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} e^{x}+e^{-y+1}=e+1 \\ e^{x-1}+e^{-y}=2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2e^{x+\ln 2}-e^{y}=15 \\ e^{x}+e^{y}=20 \end{cases}$; $\begin{cases} e^{2x+1}=7e^{y}-10 \\ 2(x-y)+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=1 \\ 3e^{x-3}-e^{y+2}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 4e^{-x}+3e^{-y}=1 \\ 3e^{x-y}=4 \end{cases}$

CALCUL DES LIMITES

EXERCICE 18

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^{3x}+e^{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-e^{3x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-e^{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(e^{3x}-e^{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{x^2}-e^{3x}+x^{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x+3}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to0^{+}}e^{\frac{1-x}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-2}{x}$; $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{4x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^{1-2x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x^{2}-x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-2x}+1}{e^{x}+e^{-x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-2}{x^{2}+3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}-1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2}\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^{+}}(\sin x)e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to0^{+}}xe^{\frac{1}{\tan x}}$

Scanné avec CamScanner

CALCUL DES DÉRIVÉES

EXERCICE 19

Étudier la dérivabilité de la fonction f puis calculer sa dérivée dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=e^{2x-1}$; 2) $f(x)=e^{-3x^2+2x-7}$

3) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$; 4) $f(x)=e^{\sqrt{2x-1}}$

5) $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x}$; 6) $f(x)=e^{\cos x}-e^{-\cos x}$

7) $f(x)=\ln\left(4+e^{5x}\right)$; 8) $f(x)=xe^{\operatorname{Arctan} x}$

9) $f(x)=xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$; 10) $f(x)=\ln\left(\left|e^{2x}-1\right|\right)$

DÉTERMINATION DES PRIMITIVES

EXERCICE 20

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur un intervalle convenable :

1) $f(x)=e^{-2x+5}$; 2) $f(x)=\sqrt{e^{3x}}$

3) $f(x)=xe^{x^2+1}$; 4) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{2e^{2x}+3}}$

5) $f(x)=\dfrac{e^{-\operatorname{Arctan} x}}{1+x^2}$; 6) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

7) $f(x)=\cos x.e^{\sin x}$; 8) $f(x)=\dfrac{e^{4x}+e^x}{e^{4x}+4e^x+3}$

9) $f(x)=\left(1+\tan^2 x\right)e^{-\tan x}$; 10) $f(x)=2^x$

EXERCICE 21

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x}\cos x$

1) Montrer qu'il existe deux réels α et β à déterminer tels que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)-\alpha f'(x)+\beta f''(x)=0$

2) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

FONCTIONS PUISSANCES

EXERCICE 22

a et b étant deux réels strictement positifs et différents de 1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\frac{\left(\dfrac{a^2}{b^2}\right)^{x-1,5}\times\left(b^3\right)^{x-\frac{1}{3}}\times\left(a^{-1}\right)^{2x}}{b^{-2x}\times\left(a^3\right)^{-x}\times(ab)^{3x}}$$

$$B=\frac{\left(4a^{-3}\right)^{-\sqrt{2}}}{\left(\sqrt[3]{b^{-2}}\right)^{\frac{3}{2}}}\times\frac{\sqrt[3]{27a^{-\sqrt{2}}}\times\sqrt{b^2}}{2^{-2\sqrt{2}}\times a^4}$$

$$C=\frac{a\times a^{\frac{2}{1+\sqrt{2}}}+a^{2\sqrt{2}+1}}{a^{2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{a^{\frac{6}{1-\sqrt{2}}}}}$$

EXERCICE 23

Ecrire sous la forme d'une puissance de e :

$D=\left(e^{12}.e^{-5+4\sqrt{3}}\right)^{7-4\sqrt{3}}$ et $E=\left(\dfrac{e^{\sqrt{200}}}{e^{17}}\right)^{\sqrt{200}+17}$

EXERCICE 24

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$3^{x+1}=5^x$; $2^{\frac{x}{2}+1}=3^{x-3}$; $2^{x+1}.3^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}.6^{2x}$

$\left(\dfrac{1}{13}\right)^{x^2-3x}=169$; $7^x=3^{x^2}$; $9^x-3^{x+1}-54=0$

$5^{2x+2}-126\times5^{x+1}+125=0$; $4^{x-1}+2\times4^{-x}=7$

$100^{x-\frac{1}{2}}-12\times10^{x-1}+2=0$; $7^{x+2}-7^{-x-1}=6$

$100^{2x}-10^{2x+1}+9=0$; $2^{2x}-6^x=2\times3^{2x}$

EXERCICE 25

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$2\times3^{-2x+1}+\sqrt{3}\times3^{-x+1}=2$; $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$

$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$; $x^{x+1}=x^{\frac{6}{x}}$

$2^{2x-1}+3^x+4^{x-\frac{1}{2}}-9^{\frac{x}{2}+1}=0$; $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt[\sqrt{x}]{x}\right)^{1+\sqrt{x}}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 26

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2^{\sin^2 x} = \cos x$

2) Soit a le nombre : $a = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

Montrer que l'équation $a^{2x} - 3a^x + 1 = 0$ admet deux solutions réels α et β telles que : $\alpha\beta = -1$

3) On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) : 15\times 4^x + 8\left(5^x + 6^x - 7^x\right) = 0$$

Vérifier que 4 est une solution de (E) puis la résoudre.

EXERCICE 27

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\log(2) + \log\left(4^{x-1}+9\right) \le 1 + \log\left(2^{x-1}+1\right)$; $2^x < \dfrac{1}{2}$

$\left(2^{1-\frac{1}{x}}\right)^3 - 2^{2+\frac{2}{x}} - 2^{2+\frac{1}{x}} + 2 > 0$; $\left(\sqrt{7}\right)^x \ge 125$

$\ln\left(e^{x^2-4} - 6e^{4-x^2}\right) \ge 0$; $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^x > 3$; $11^{-x} < 11^{2x}$

$\left(\dfrac{1}{13}\right)^{5x} \le \dfrac{5}{4}$; $2^x + 2^{-x} \ge \dfrac{5}{2}$; $3^{2x} + 3^x - 2 \le 0$

$\left(5^x - 2\right)\left(3^{x+1} - 9^{x-1} - 18\right) \le 0$; $\dfrac{2^x}{2^x + 2^{-x}} < \dfrac{1}{3}$

EXERCICE 28

Calculer les limites suivantes : $(m \in \mathbb{R}_+^*)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\sqrt{x}}-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\tan x)^{\cos x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\right)^{\frac{1}{\ln^2 x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+15}{4x+7}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-m}\right)^x$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^x - x}{\ln\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\left(m+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

EXERCICE 29

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} 3^x + 7^y = 16 \\ 3^x - 7^y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{x-2}.2^{y-1} = 1 \\ 2^y + 2^y = 5\sqrt{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 4^x \times 5^y = 5^{2x+1} \\ 20^x + 25^y = 5^{2y+1} \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{x+y} = 16\sqrt{2} \\ 2^x + 2^{x-y} = 12\sqrt{2} \end{cases}$

$\begin{cases} e^{\frac{x}{x-1}} + e^{\frac{y}{y+1}} = 13 \\ e^{\frac{2xy+x-y}{(x-1)(y+1)}} = 42 \end{cases}$; $\begin{cases} 5^x.5^{2y} = 25 \\ \log_3 x + \log_3(2y+3) = 1 \end{cases}$

ÉTUDE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

EXERCICE 30

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

1) Montrer que la fonction f est impaire.

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}$

3) Montrer que :

$$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)\ f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

EXERCICE 31

Pour tout entier $n \ge 3$ on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{e^x - 1} \text{ si } x \ne 0 \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0$$

1) Montrer que la fonction f_n est continue en 0.

2) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0.

3) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

EXERCICE 32

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Discuter selon les valeurs de réel a, le nombre de solutions de l'équation :

$$(E) : a^{(a^x)} = x$$

Scanné avec CamScanner

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + e^{-x}$$

1) Calculer les limites $\lim_{-\infty} f(x)$ et $\lim_{+\infty} f(x)$

2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = (x-1)(1-e^{-x})$

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormé.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

$\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; i, j)$.

1) a) Calculer $\lim_{-\infty} f(x)$, $\lim_{+\infty} f(x)$ et $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Dresser le tableau complet de variation de f.

4) Ecrire l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5) Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; i, j)$.

1) Justifier que le domaine de définition de la fonction f est $\mathscr{D} =]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

2) a) Calculer les limites aux bornes de $\mathscr{D}$.

b) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

En -1 ?

3) Justifier soigneusement la continuité de la fonction f en tout point de $\mathscr{D}$.

4) a) Justifier la dérivabilité de la fonction f sur chacun des intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}$:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^{\frac{1}{x}}\left[x - (x+1)\ln(x+1)\right]}{x^2(x+1)}$$

c) Dresser le tableau de variations de f. Tracer $\mathscr{C}$

EXERCICE 5

La résistance R d'une thermistance varie avec la température Kelvin T selon la loi : $R(T) = R_1 e^{a\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{300}\right)}$

Avec : $a = 4 \times 10^3 K$ et $R_1 = 10^3 \Omega$ à $T = 300K$.

1) Déterminer le coefficient de température :

$k(T) = \frac{1}{R(T)} \cdot \frac{dR}{dT}(T)$ et le calculer à $300K$.

2) Sachant que nous mesurons la résistance avec une précision de $0,1\%$, quelle variation de température pouvons-nous détecter au voisinage de $300K$?

(Indication : utiliser la formule que $\Delta T = \left|\frac{1}{k}\right| \frac{\Delta R}{R}$)

EXERCICE 6

1) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ si $t \geq 0$ et $u(t) = 0$ si $t < 0$

a) Déterminer l'équation de la demi-tangente à droite en 0 à la courbe $\mathscr{C}_u$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de cette demi-tangente et de l'asymptote horizontale à $\mathscr{C}_u$.

2) Soit i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ si $t \geq 0$ et $i(t) = 0$ si $t < 0$

a) Donner l'équation de la demi-tangente à droite en 0 à la courbe $\mathscr{C}_i$.

b) Donner les coordonnées du point d'intersection B de cette demi-tangente et l'axe des abscisses.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE N° 39

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} + e^{x} + 1\right) - x$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \ln\left(e^{x} + e^{-x} + 1\right)$$

et en déduire que la fonction f est paire.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Montrer que les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$ sont des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

4) Étudier les variations de la fonction f.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

6) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-f(x)}$

Étudier les variations de g et tracer sa courbe Γ.

EXERCICE N° 40

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{x}}{\sqrt{e^{2x} - 2e^{x} + 2}}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = 3cm$.

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Étudier les variations de la fonction f.

3) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite (Δ) d'équation $y = 1$.

4) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^{x}\left(e^{x} - 1\right)}{\left(e^{2x} - 2e^{x} + 2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\left(e^{x} - 1\right)^{2} - 5\right)$$

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}$ en déterminant ses points d'inflexion.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE N° 41

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a) Montrer que pour tout $x \in D - \{0\}$:

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{2}{x}\left(\frac{e^{-2x} - 1}{-2x}\right)}$$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^{+}} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

6) a) Montrer que pour tout $x \in D - \{0\}$:

$$f(x) = f'(x)\left(-1 + \frac{1}{2\left(1 + f(x)\right)} + \frac{1}{2\left(1 - f(x)\right)}\right)$$

b) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

EXERCICE N° 42

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^{3}} e^{1 - \frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1) a) Étudier la continuité de f en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2) Étudier les variations de la fonction f.

3) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé.

4) Déterminer les réels a et b pour que la fonction F définie par : $F(x) = \left(a + \frac{b}{x}\right) e^{1 - \frac{1}{x}}$ soit une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 44

On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 + x - e^x \quad \text{et} \quad h(x) = (1 - x)e^x$$

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \leq 0 \qquad \text{et} \qquad h(x) \leq 1$$

b) En déduire que : $(\forall x \in]-\infty; 1[)\ 1 + x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ \dfrac{x}{x-1} \leq x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \leq 1$

II) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2) a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ \dfrac{1}{x-1} \leq e^{\frac{1}{x}} - x - 1 \leq 0$

c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet une asymptote oblique (Δ) à déterminer, puis étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et (Δ) sur $\mathbb{R}^*_+$.

3) Etudier l'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $(\mathscr{D}) : y = x$, puis tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère.

EXERCICE 45

Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la fonction u puis étudier son signe. Étudier ensuite la fonction f (les limites et les variations)

1) $f(x) = e^{-x} + \ln(1+x)$ et $u(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$

2) $f(x) = \dfrac{x+1}{2e^x - 1}$ et $u(x) = 1 + 2xe^x$

3) $f(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{e^x + 1}$ et $u(x) = e^x + x - 1$

EXERCICE 46

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (\ln x)^{\ln x} = e^{\ln(\ln x)\ln x} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

1) Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Montrer que f est continue sur $[1; +\infty[$.

3) Déterminer la limite : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

f est-elle dérivable à droite en zéro ? Justifier.

4) a) Etudier les variations de la fonction φ définie sur $]1; +\infty[$ par : $\varphi(x) = 1 + \ln(x).\ln(\ln x)$

b) En déduire que f est croissante sur $[1; +\infty[$.

5) a) Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right) = x\ln(\ln x) - \ln(x)$$

b) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\ln(\ln x) - \ln(x)\right)$

c) En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

6) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.

EXERCICE 47

Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e$

EXERCICE 48

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^x - n$

1) Montrer que f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique u_n dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

3) Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

4) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$:

$$\ln(n) - \ln(\ln n) \leq u_n \leq \ln(n)$$

5) Déterminer alors la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{\ln n}$

Scanned with CamScanner

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 47

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

1) Étudier la fonction f : (limites et variations)

2) a) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n}$ si $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x \geq x+1$

b) En déduire que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ x^2 f(x) \leq \dfrac{x}{1+x}$

4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + \ldots + u_{n-1}$

a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) v_n = -\ln(u_n)$

b) Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE 48

A) Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2e^x - 2 - xe^x$

1) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont une α telle que $1,5 < \alpha < 1,6$.

B) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = 2 - 2e^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) On pose pour tout $x \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$: $g(x) = 2 - 2e^{-x}$

a) Étudier les variations de g puis justifier que :

$g(I) \subset I$ et $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \in I$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

c) Montrer que (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

b) Retrouver encore une fois que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

EXERCICE 49

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$u_1 = 1 + \dfrac{1}{e}$ et $u_{n+1} = u_n\left(1 + \dfrac{1}{e^{n+1}}\right)$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < \ln\left(1 + e^{-x}\right) < e^{-x}$$

2) a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

b) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ \ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + e^{-k}\right)$

c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$R_n = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e^2} + \ldots + \dfrac{1}{e^n}$ et $S_n = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e^2} + \ldots + \dfrac{1}{e^{2n}}$

En utilisant les résultats de la question 1) et 2)b),

Montrer que : $R_n - \dfrac{1}{2}S_n < \ln(u_n) < R_n$

3)a) Soit a un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$.

Calculer la somme : $T_n = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} + \ldots + \dfrac{1}{a^n}$

puis déterminer la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée et en déduire qu'elle est convergente. On note ℓ sa limite.

c) Montrer que : $e^{\frac{2e+1}{2(e^2-1)}} \leq \ell \leq e^{\frac{1}{e-1}}$

EXERCICE 50

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$

et soit F_n la primitive de f_n sur $\mathbb{R}^*$ telle que $F_n(0) = 0$.

1) a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\left(\forall t \in \mathbb{R}^*\right) 0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{t^n}{n}$

b) En déduire que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)\ 0 \leq F_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

2) a) Montrer par récurrence que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \dfrac{1}{n!} \leq \left(\dfrac{e}{n}\right.$

b) En déduire que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right) \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 51

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^x - nx$

Première Partie : On considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = (x+1)e^x - n$

1) Étudier les variations de la fonction g_n.

2) a) Montrer qu'il existe un unique réel α_n tel que $g_n(\alpha_n) = 0$ et que $0 \le \alpha_n \le \ln(n)$.

b) Justifier l'égalité : $\alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1+\alpha_n}\right)$

3) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ \ln x \le x - 1$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \frac{1}{2}\ln(n) \le \alpha_n$

c) Déterminer les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n}$

Deuxième Partie : Soit $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Étudier les variations de la fonction f_n.

b) Montrer que : $f_n(\alpha_n) = -\frac{n\alpha_n^2}{1+\alpha_n}$

2) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_n$ admet une asymptote oblique D_n qu'on déterminera.

3) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_n$ et de l'axe des abscisses.

4) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$.

5) a) Montrer que $\frac{7}{20} \le \alpha_2 \le \frac{2}{5}$ puis en déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

b) Construire $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dans un même repère.

EXERCICE 52

A) Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x \text{ et } v(x) = 1 + x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)e^x$$

1) a) Étudier les variations de la fonction u' et en déduire son signe.

b) Étudier les variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$.

2) a) Étudier les variations de la fonction v' et en déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ v'(x) \ge 0$

b) Étudier les variations de la fonction v sur $\mathbb{R}$.

3) Déduire de ce qui précède que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^-)\ \frac{x^2}{2}e^x \le e^x - 1 - x \le \frac{x^2}{2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^-)\ \frac{x^2}{2} \le e^x - 1 - x \le \frac{x^2}{2}e^x$$

4) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} - \dfrac{1}{2} \text{ si } x \ne 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 f(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

B) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{x} \text{ si } x \ne 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 1$$

$\mathcal{C}_g$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que g est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_g$.

3) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.

4) Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$.

C) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \sqrt{e^x - 1 - x}$

1) Déterminer D_h le domaine de définition de h.

2) Étudier la dérivabilité de h en 0.

D) Soit F la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$F(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} \text{ si } t \ne 0 \quad \text{et} \quad F(0) = 1$$

En utilisant le résultat de A)4), montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

Scanné avec CamScanner

Partie A :

1) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x-1}{x}-\ln|x|$

a) Etudier les variations de la fonction g.

b) Montrer qu'il existe un réel négatif unique α tel que $g(\alpha)=0$

c) En déduire le signe de $g(x)$.

2) Soit h la fonction numérique définie sur $]1,+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{\ln(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$

a) Montrer que $h'(x)=\dfrac{u(x)}{(x-1)^3}$ où u est une fonction définie sur $]1;+\infty[$.

b) Etudier les variations de la fonction u et en déduire le signe de $u(x)$ et celui de $h'(x)$ sur $]1;+\infty[$.

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=|x|^{\frac{1}{x-1}}$$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f et les limites de f aux bornes de D_f.

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en $x_0=1$ et donner son prolongement.

3) Etudier les variations de f sur D_f.

4) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité $2cm$).

(On donne $\alpha\approx-3,6$)

5) Montrer qu'il existe un unique réel $\ell\geq\dfrac{3}{2}$ tel que $f(\ell)=\ell$.

Partie C :

On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$u_0=4$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer qu'il existe un réel $q\in]0;1[$ tel que :

$$\left(\forall x\geq\frac{3}{2}\right)\ |f'(x)|\leq q$$

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_{n+1}-\ell|\leq q|u_n-\ell|$

3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

EXERCICE 54

Etudier puis représenter les fonctions suivantes :

$$f:\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & ,\ x\neq0\\ f(0)=0\end{cases}$$

$$g:\begin{cases}g(x)=e^{x^2\ln|x|} & ,\ x\neq0\\ g(0)=1\end{cases}$$

$$h:\begin{cases}h(x)=\left|1+\dfrac{1}{x}\right|^x & ,\ x\in\mathbb{R}-\{0;-1\}\\ h(0)=1\end{cases}$$

EXERCICE 55

On considère les fonctions numériques f, g et h définies sur $\mathbb{R}-\{1;-1\}$ par :

$$f(x)=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \quad ; \quad g(x)=\frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

1) a) Dresser le tableau des variations de f et g.

b) Étudier le signe de $h(x)$ sur $]-1;1[$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction n :

$$(2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right) \text{ et } (2n+1)g\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

3) On considère les suites numériques $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ définies par : $u_n=\dfrac{n^{\frac{2n+1}{n}}}{n!}e^{-n}$ et $v_n=u_n e^{\frac{1}{12n}}$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ sont adjacentes.

Scanné avec CamScanner

1) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(1+x)\right)^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

2) Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Etudier les variations des fonctions f_α définies sur $]0;+\infty[$ par : $f_\alpha(x)=\left(1+x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

3) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

4) Soit f la fonction définie par : $f(x)=e^{x\sqrt{3}}\sin x$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x)=2^n e^{x\sqrt{3}}\sin\left(x+\frac{n\pi}{6}\right)$$

5) A l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$

6) Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T sont animées d'une vitesse de $v\,cm.s^{-1}$. Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de Maxwell-Boltzmann : $F(v)=cv^2\exp\left(-\dfrac{mv^2}{2kT}\right)$

Où T est la température (en Kelvin), m la masse d'une molécule et c et k des constantes strictement positives. Montrer que la valeur maximale de F a lieu en $v=\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$.

DEVOIR 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$

1) a) Étudier les variations de la fonction f.

b) En déduire que : $f([0;1])\subset[0;1]$

2) Montrer que : $\left(\forall x\in[0;1]\right)\ |f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$

3) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ u_n\in[0;1]$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ |u_{n+1}-1|\le\dfrac{1}{2}|u_n-1|$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite.

DEVOIR 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1) a) Montrer que f est paire.

b) Etudier les variations de f et tracer l'allure de sa courbe.

c) Montrer qu'il existe un unique réel positif ℓ tel que $f(\ell)=\ell$, puis justifier que $0\le\ell\le\dfrac{1}{2}$

d) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $|f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$|u_{n+1}-\ell|\le\frac{1}{2}|u_n-\ell|$$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Scanné avec CamScanner

DEVOIR 4

Partie I: On considère la fonction g définie par :

$$g(t)=\frac{t}{t+1}-\ln(1+t)$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Donner $\mathscr{D}_g$, l'ensemble de définition de g.

2) Montrer que $\lim\limits_{t\to-1^+} g(t)=-\infty$. Qu'en déduit-on ?

3) Étudier la nature de la branche infinie en $+\infty$.

4) Dresser le tableau complet de variations de g

5) Préciser le signe de g sur $\mathscr{D}_g$.

Partie II: On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$$

1) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{-x}g(e^{x})$

4) En déduire le tableau de variation complet de f.

5) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $0\le f(x)\le 1$

6) On introduit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=f(x)-x$$

a) Montrer que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution, que l'on notera α.

c) Vérifier que $\alpha\in[0;1]$.

Partie III : On introduit la suite (u_n) définie par :

$u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\in[0;1]$

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_{n+1}-\alpha|\le 0,6|u_n-\alpha|$

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

DEVOIR 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x^2+1)e^{-x}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

2) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=-(1-x)^2e^{-x}$

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5) On considère maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=f(x)-x$

a) Montrer que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) Etablir que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution, notée α. Vérifier que $\alpha\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

6) a) Justifier que : $f\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right)\subset\left[\frac{1}{2};1\right]$.

b) Montrer que : $\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\right)\ |f'(x)|\le\frac{1}{4}$:

7) On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

DEVOIR 6

La fonction *cosinus hyperbolique*, notée ch, est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par : $\operatorname{ch}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

La fonction *sinus hyperbolique*, notée sh, est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par : $\operatorname{sh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

1) a)- Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

Scanné avec CamScanner

$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ et $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

b)- Etudier la parité des fonctions ch et sh .

2) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions ch et sh (aussi les limites en $+\infty$ et $-\infty$)

3) Tracer les graphes des fonctions ch et sh dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Montrer que la fonction sh admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction réciproque de sh est appelée fonction *argument sinus hyperbolique*, et est notée Argsh .

5) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\operatorname{Argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

6) Soit g la restriction de la fonction ch sur $[0;+\infty[$.

Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque définie sur $[1;+\infty[$. La fonction g est appelée fonction *argument cosinus hyperbolique*, et est notée Argch .

7) a) Montrer que pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$(\operatorname{Argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

b) En déduire que pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

8) On définit la fonction *tangente hyperbolique*, notée th , par : $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

a) Etudier la fonction th (domaine de définition, parité, branches infinies, tableau de variations)

b) On note Argth la fonction réciproque de la fonction th . Montrer que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

EXERCICE 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2xe^x$

On note $\mathscr{C}_f$ le graphe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité $4\,cm$).

1) a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) Montrer que f réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ sur un ensemble que l'on déterminera.

Déterminer les variations de f^{-1} et tracer la représentation graphique de la fonction f^{-1}.

3) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $\alpha.e^{\alpha} = 1$. Vérifier que $\alpha \in [0;1]$.

4) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$.

a) Montrer que : $u_n \in [0,1]$ existe.

b) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) \geq x$.

c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$

6) a) Montrer que $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) En déduire que la suite (S_n) est majorée par 2.

c) Montrer alors que (S_n) est convergente.

d) On note $L = \lim_{n\to+\infty} S_n$. Montrer que : $\alpha \leq L \leq 2$

Scanné avec CamScanner

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 1

I) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction g_n définie par : $g_n(x) = x + e^{-nx}$

Et soit $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Étudier les variations de la fonction g_n.

b) Montrer que g_n admet un minimum absolu en un réel u_n qu'on exprimera en fonction de n.

2)a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$

b) Déterminer les branches infinies de $\mathscr{C}_n$.

3)a) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

b) Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. (On prend : $\|\vec{i}\| = 2cm$)

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = g_n(u_n)$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et déterminer leur limites.

II) On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x + e^{nx}$$

Et soit Γ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier les variations de la fonction f_n.

2) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n.

3) a) Montrer que $\alpha_1 \in \left]-\ln 2; -\frac{1}{2}\right[$.

b) Montrer que les quantités $(x-\alpha_1)$ et $(e^x+\alpha_1)$ ont le même signe.

4) On considère la fonction φ définie sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ par : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

a)- Montrer que la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

b)- En déduire que pour tout $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$:

$$\left|e^x + \alpha_1\right| \le \frac{1}{\sqrt{e}}\left|x - \alpha_1\right|$$

5) On considère la suite (β_n) définie par :

$\beta_0 = -\frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$

a) Montrer qu'il existe un réel α tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \left|\beta_{n+1} - \alpha_1\right| \le \alpha\left|\beta_n - \alpha_1\right|$$

b) Montrer que la suite (β_n) est convergente et déterminer sa limite.

Examen National 2003 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 2

Première Partie :

Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g_n(x) = nx + 2\ln x$$

1) Dresser le tableau de variations de g_n.

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ \sqrt{x} > \ln x$

3) a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Deuxième Partie :

I) Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.e^{-x}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3cm$

1) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.

Scanné avec CamScanner

3) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = \dfrac{1-3x}{3x} f(x)$

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Construire $\mathscr{C}$ (On prend : $f\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 0{,}5$)

II) Posons : $I = \left[\dfrac{1}{3};1\right]$

1) a) Montrer que $f(I) \subset I$.

b) En utilisant le résultat de la question 3)a), montrer que : $(\forall x \in I)\ |f'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$

c) Montrer que : $[f(x) = x \text{ et } x > 0] \Leftrightarrow x = \alpha_3$

où α_3 est la solution de l'équation $g_3(x) = 0$.

2) Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \in I$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$

c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - \alpha_3| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite.

Examen National 2006 (Session Normale)

PROBLÈME 3

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + \dfrac{e^{-x}}{n}$

Et soit $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$

2) a) Étudier la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_n$ au voisinage de $-\infty$.

b) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote de la courbe $\mathscr{C}_n$ au voisinage de $+\infty$, et déterminer la position relative de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{D}$.

3) Étudier les variations de la fonction f_n puis dresser le tableau de variations de f_n.

4) Construire la courbe $\mathscr{C}_3$.

(On prend : $f_3(-1{,}5) \approx 0$, $f_3(-0{,}6) \approx 0$, $\ln 3 \approx 1{,}1$)

5)a) Montrer que si $n \geq 3$ alors $\dfrac{e}{n} < \ln n$.

b) Montrer que si $n \geq 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x_n \leq -\ln n$ et $-\dfrac{e}{n} \leq y_n \leq 0$

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

6) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \text{ si } x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue à droite de 0.

b) Vérifier que pour tout $n \geq 3$: $g\left(\dfrac{-1}{x_n}\right) = \dfrac{\ln n}{x_n}$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{x_n}$.

Examen National 2012 (Session Normale)

PROBLÈME 4

I) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 4xe^{-x^2}$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer la limite de f en $+\infty$.

2) Étudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

3) Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe $\mathscr{C}$ à l'origine du repère puis tracer la courbe $\mathscr{C}$.

(On pend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$, et on admet que le point d'abscisse $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$).

II) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par :

Scanné avec CamScanner

$$f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$$

1) a)- Montrer que : $(\forall x > 1)\ \ e^{-x^2} < e^{-x}$

b)- En déduire la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$.

2) Étudier les variations de la fonction f_n sur $[0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

3) Montrer qu'il existe un unique réel u_n de l'intervalle tel que : $f_n(u_n) = 1$

4) a) Vérifier que : $(\forall n \geq 2)\ \ f_{n+1}(u_n) = u_n$

b) Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

5) On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

a) Montrer que : $0 < \ell \leq 1$

b) Montrer que : $(\forall n \geq 2)\ -\dfrac{\ln 4}{n} < u_n < \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln 4}{n}$

Examen National 2010 (Session Normale)

PROBLÈME 5

I) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

1) Étudier les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$.

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f'(x) = e^x g(e^{-x})$

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f, et $\mathscr{C}'$ celle de la fonction $(-f)$.

Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (On admet que $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $x_0 \approx -0,7$).

5) Montrer que : $(\forall x \in [-1;0])\ \ 0 < f'(x) \leq g(e)$

6) Montrer que l'équation $f(x) + x = 0$ admet une solution α dans $\mathbb{R}$ et que $-1 < \alpha < 0$.

7) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ -1 \leq u_n \leq 0$

b) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$$

c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$

8) Sachant que $g(e) < 0,6$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Examen National 2012 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 6

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$$

Et soit $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que le point $I_n\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_n$.

b- Construire la courbe $\mathscr{C}_1$.

3) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $]0;n[$.

b) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante puis qu'elle est convergente.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Examen National 2015 (Session De Rattrapage)

Scanned with CamScanner

Scanné avec CamScanner

PROBLÈME 7

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$$

Et soit $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_n$.

2) Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f_n.

3)a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq x+1$ puis en déduire que $f_n(1) > 0$.

d) Montrer que : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ (On donne : $\alpha_2 \approx 0,6$)

5)a) Montrer que :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$$

b) En déduire que : $(\forall n \geq 2)\ f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

6)a) En utilisant le résultat de la question 3)d), montrer que : $(\forall n \geq 2)\ \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

b) En déduire que : $(\forall n \geq 2)\ \frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln n}{n}$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Examen National 2006 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 8

Première Partie :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = (x+2)e^{\frac{2}{x}} \quad \text{si} \quad x > 0$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

c) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^+)\ 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$

c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ \frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

d) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ qu'on déterminera par une équation cartésienne.

3) Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

Deuxième Partie : n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{\frac{2}{x}} \quad \text{si} \quad x > 0$$

1) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0.

2) Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$.

3) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une unique solution a_n dans $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que :

$$(\forall x > 0)\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puis qu'elle est convergente. On note : $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

d) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$

e) Montrer que $a = 0$.

Examen National 2005 (Session Normale)

Scanné avec CamScanner

Première Partie :

1) En appliquant le théorème des accroissements finis sur la fonction $t \mapsto e^{-t}$, montrer que pour tout réel x strictement positif, il existe un réel $\theta \in]0, x[$ tel que : $e^{-\theta} = \dfrac{1}{1+e^{x}}$

2) En déduire que :

a) $(\forall x > 0)\ \ 1 - x < e^{-x}$

b) $(\forall x > 0)\ \ x + 1 < e^{x}$

c) $(\forall x > 0)\ \ 0 < \ln\left(\dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right) < x$

Deuxième Partie :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1}$ si $x > 0$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = 0$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $(\forall x \geq 0)\ \ x - \dfrac{x^{2}}{2} \leq -e^{-x} + 1$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) a) de la première partie).

b) En déduire que :

$$(\forall x \geq 0)\ \ \frac{x^{2}}{2} - \frac{x^{3}}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^{2}}{2}$$

3) a) Vérifier que :

$$(\forall x \geq 0)\ \ \frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^{2}} f(x)$$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{1}{2}$

Puis interpréter le résultat obtenu.

4) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in [0, +\infty[)\ \ f'(x) = \frac{e^{x}(e^{x} - 1 - x)}{(e^{x}-1)^{2}}$$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) b) de la première partie)

Troisième Partie :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln\left(f(u_n)\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$

2) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante puis en déduire qu'elle est convergente

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) c) de la première partie).

3) Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation $\ln\left(f(x)\right) = x$ puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Examen National 2016 (Session Normale)

PROBLÈME 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*}$ par : $f(x) = 2x - e^{-x^{2}}$

Et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x\right)$ puis interpréter le résultat graphiquement.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{*}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ et que $0 < \alpha < 1$.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

Examen National 2008 (Session Normale)

Scanné avec CamScanner

HISTOIRE

Au XVI[e], deux problèmes, apparemment différents, requièrent l'attention des mathématiciens. Les uns cherchent une méthode générale pour calculer l'aire située sous une courbe ; c'est le cas de John Wallis. D'autres, comme Pierre de Fermat, tentent de trouver un lien entre l'équation d'une courbe et de sa tangente. Isaac Newton, dans les années 1660, et Gottfried Leibniz, la décennie suivante, se rendent compte que les deux problèmes sont liés et établissent, semble-t-il indépendamment l'un de l'autre, une méthode générale. C'est ce qu'on appelle le calcul différentiel et intégral.

Source : https://fr.wikipedia.org

ISAAC NEWTON
(1643 – 1727)

GOTTFRIED LEIBNIZ
(1646 – 1716)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Utiliser les techniques du calcul intégral pour le calcul de l'intégrale d'une fonction.
- Maitriser le calcul de l'aire d'un domaine plan limité par deux courbes et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées.
- Calculer le volume d'un solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses.
- Appliquer le calcul intégral pour prouver certaines inégalités et donner des approximations.
- Etudier les fonctions du type : $x \mapsto \int_a^{v(x)} f(t)\,dt$
- Encadrer une intégrale par deux suites en utilisant la méthode des rectangles (dans le cas de fonctions monotones).
- Déterminer les limites des deux suites :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right),\ v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)$$

(f étant une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$)

- Etudier des fonctions et des suites définies par des intégrales.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires..... 243
- Connaissances Fondamentales
  - Intégrale d'une fonction continue sur un segment 250
  - Techniques de calcul d'intégrales 253
  - Intégration et ordre 257
  - Applications du calcul intégral 260
- Techniques Et Astuces 266
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application..... 274
  - Exercices de perfectionnement.....281
  - Problèmes de synthèse..... 289

Scanné avec CamScanner

1 RAPPELS

A) Rappels sur les primitives :

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

a) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ et $I=]-\infty;-1[$; b) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$ et $I=]-\infty;1[$

c) $f(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2}$ et $I=[0;+\infty[$; d) $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ et $I=\mathbb{R}$

e) $f(x)=(x+1)e^{x^2+2x}$ et $I=\mathbb{R}$; f) $f(x)=\dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$ et $I=]0;+\infty[$

g) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ et $I=\mathbb{R}$; h) $f(x)=e^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$ et $I=]0;+\infty[$

2. On considère les fonctions numériques f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2\text{Arc}\tan x \quad \text{et} \quad F(x)=2x\text{Arc}\tan x-\ln\left(1+x^2\right)$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

B) Autour de la notation différentielle :

1. Dans chacun des cas suivants, calculer $\dfrac{dy}{dx}$:

a) $y=3x^2-2x$; b) $y=xe^x$; c) $y=\cos^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$; d) $y=x+\sqrt{x^2+1}$

2. On pose : $dy=5x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$ et $u=1-x^3$. Montrer que : $dy=-\dfrac{5}{3}\sqrt{u}\,du$

3. On pose : $dy=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$ et $u=\sin x$.

Déterminer dy en fonction de u et du.

2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

A) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit a et b deux éléments de I.

Soit F et G deux primitives de la fonction f. Montrer alors que : $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$

On remarque alors que le nombre $F(b)-F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive de f.

Le nombre $F(b)-F(a)$ est appelé l'intégrale de f de a à b et, est notée $\int_a^b f(x)dx$ et on lit :

« Intégrale (ou somme) de $f(x)dx$ de a à b ». $F(b)-F(a)$ est noté $\left[F(x)\right]_a^b$. Donc :

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

Scanné avec CamScanner

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

B) Soit f , g et h les fonctions numériques définies sur $[0;2]$ par :

$$f(x) = -3 \quad ; \quad g(x) = 6x - 7 \quad ; \quad \begin{cases} h(x) = 2 - x \text{ si } x \in [0;1] \\ h(x) = 3x - 2 \text{ si } x \in]1;2] \end{cases}$$

1. Montrer que f , g et h sont continues sur $[0;2]$ et déterminer les primitives de chacune d'elles sur $[0;2]$.

2. Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^2 f(x)dx$; $\int_0^2 g(x)dx$: $\int_0^2 h(x)dx$

3 PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

A) Soit f la fonction numérique définie sur $[0;2]$ par : $f(x) = 2|x-1|$

1. Montrer que : $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x)dx$.

De façon générale : Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors pour tous a , b et c de I : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Cette égalité s'appelle la relation de Chasles pour les intégrales.

3. Application : Calculer l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin x|dx$.

B) On considère les fonctions g et h définies sur l'intervalle $[1;5]$ par : $g(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$ et $h(x) = \sqrt{x-1}$

1. Déterminer les primitives des fonctions g et h sur l'intervalle $[1;5]$.

2. Calculer $\int_1^5 g(x)dx$ et $\int_1^5 h(x)dx$.

3. Calculer $\int_1^5 (g(x)+h(x))dx$ et $\int_1^5 3g(x)dx$. Que remarque-t-on ?

De façon générale : Si g et h sont deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tous a et b de I : $\int_a^b (g(x)+h(x))dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx$ et $\int_a^b \lambda g(x)dx = \lambda \int_a^b g(x)dx$

4. Application : Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\tan^2 x\,dx$.

4 INTÉGRATION ET DÉRIVATION

A) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$.

On considère la fonction φ définie pour tout $x \in I$ par : $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$

1. Vérifier que $\varphi(a) = 0$.

2. Montrer que φ est une primitive de la fonction f sur I . On obtient alors le résultat suivant

Scanné avec CamScanner

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de la fonction f sur I qui s'annule en a.

g) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \int_e^x \frac{1}{\ln t}dt$ est dérivable sur $[e^2, +\infty[$ puis déterminer $g'(x)$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE L'INTÉGRALE

5

A) Soit f_1, f_2 et f_3 des fonctions numériques définies sur l'intervalle $[-1;3]$ par :

$f_1(x) = 2$ et $f_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ et $\begin{cases} f_1(x) = x+2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ f_1(x) = -\frac{1}{2}x+2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ f_1(x) = 2x-3 & \text{si } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

Soit $\mathcal{C}_k$ ($k \in \{1,2,3\}$) la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = 1cm$

1. Vérifier que f_1, f_2 et f_3 sont continues et positives sur $[-1;3]$.

2. Soit Δ_k ($k \in \{1,2,3\}$) le domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}_k$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$. On a donc : $\Delta_k = \{M(x,y) / -1 \le x \le 3 \text{ et } 0 \le y \le f_k(x)\}$

Soit $\sigma(\Delta_k)$ l'aire en cm^2 du domaine Δ_k.

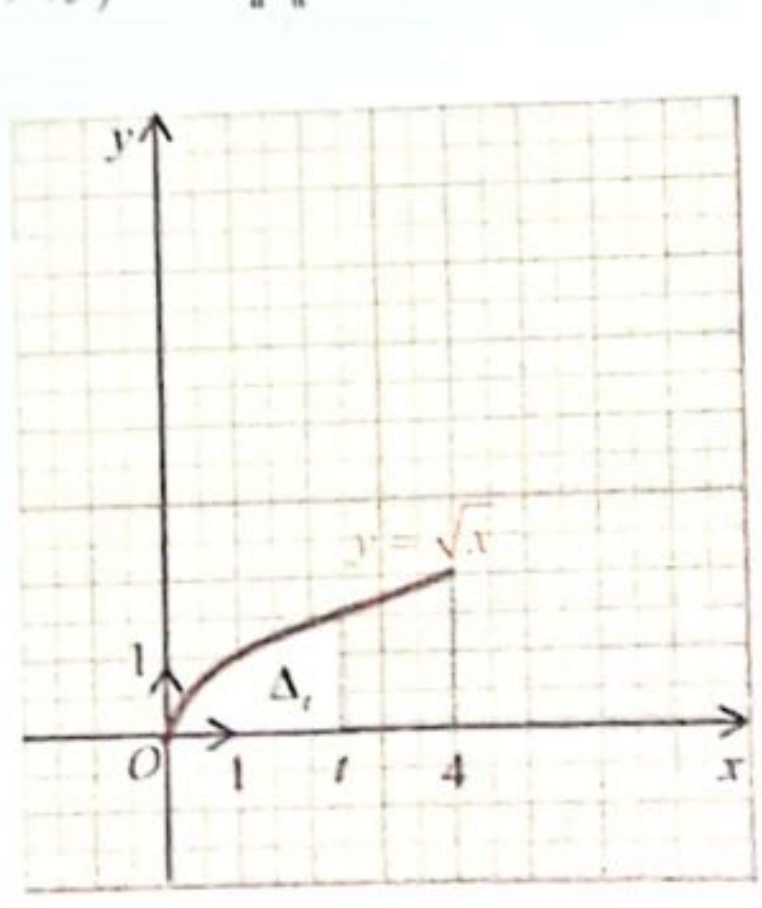
a) Calculer $\sigma(\Delta_k)$ pour $k \in \{1,2,3\}$.

b) Montrer que $\sigma(\Delta_k) = \int_{-1}^{3} f_k(x)dx$ pour tout $k \in \{1,2,3\}$.

B) Soit f la fonction définie sur $[0;4]$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = 1cm$

Pour tout $t \in [0,4]$ on note Δ_t le domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$. Soit $\sigma(t)$ l'aire du domaine Δ_t en cm^2.



1. Soit h un réel positif tel que : $1 < t + h < 4$

a) Que représente le nombre $\sigma(t+h) - \sigma(t)$?

b) Montrer que : $h\sqrt{t} \le \sigma(t+h) - \sigma(t) \le h\sqrt{t+h}$

c) En déduire que $t \mapsto \sigma(t)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.

2. Montrer que pour tout $t \in [0;4]$: $\sigma(t) = \int_0^t f(x)dx$

3. Calculer $\sigma(t)$ en fonction de t et en déduire l'aire $\sigma(4)$

Scanné avec CamScanner

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

16 TECHNIQUE D'INTÉGRATION PAR PARTIES

A) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x\sin x$

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = \sin x + x\cos x$

2. En déduire la valeur de l'intégrale : $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx$

B) Soit h la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = x\ln x$

1. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $L = \int_1^e \ln(x)\,dx$.

C) Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' soient continues sur I.

Montrer que pour tous a et b de I : $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

Cette technique est appelée « intégration par parties »

D) En utilisant une intégration par parties sur l'intégrale $\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$, montrer que : $\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{\ln^2 t}\right)dt = \frac{e(e-2)}{2}$

17 TECHNIQUE D'INTÉGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;3]$ par : $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$

On considère l'intégrale $K = \int_0^3 x^2\sqrt{1+x}\,dx$ et la fonction $u : t \mapsto t^2 - 1$.

1. Vérifier que : $K = \int_{u(0)}^{u(3)} f(x)\,dx$.

2. En utilisant une primitive F de la fonction f sur le segment $[0;3]$, montrer que : $K = \int_1^2 f\left(u(t)\right)u'(t)\,dt$

puis déterminer la valeur de K.

3. Montrer que pour tous α et β de l'intervalle $[1;+\infty[$ on a : $\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left(u(t)\right)u'(t)\,dt$

Cette technique est appelée « intégration par changement de variable ».

18 INTÉGRATION ET ORDRE – VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION

A) Soit φ la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};e\right]$ par : $\varphi(x) = e^x\ln x$

1. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ sur $\left[\frac{1}{2};e\right]$.

2. Déterminer le signe de chacune des intégrales : $\int_1^e \varphi(x)\,dx$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(x)\,dx$

De façon générale : Si φ est continue et positive sur le segment $[a;b]$, alors $\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 0$

Scanné avec CamScanner

B) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. On pose : $a=\dfrac{\pi}{2}$ et $b=\dfrac{5\pi}{6}$ et $I=[a;b]$.

1. Montrer que pour tout $x\in I$, $\dfrac{3}{5\pi}\le f(x)\le\dfrac{2}{\pi}$. En déduire que : $\dfrac{1}{5}\le\int_a^b f(x)dx\le\dfrac{2}{3}$

2. Montrer qu'il existe un réel $c\in[a;b]$ tel que : $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)$

Le nombre $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ s'appelle la valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$.

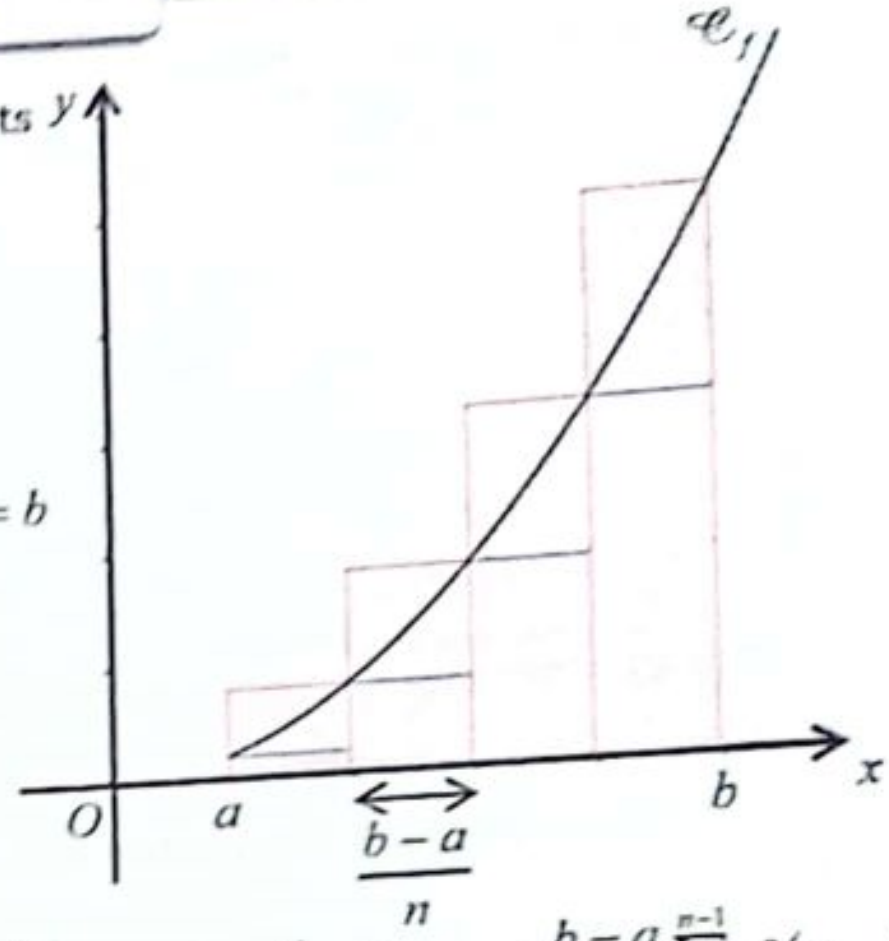
SOMMES DE RIEMANN

9

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux éléments de I tels que $a<b$. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On suppose que la fonction f est croissante sur $[a;b]$. On divise le segment $[a;b]$ en des segments $[x_i,x_{i+1}]$ de même longueur avec :

$$x_0=a\ ;\ x_1=a+\frac{b-a}{n}\ ;\ \dots\ ;\ x_k=a+k\frac{b-a}{n}\ ;\ \dots\ ;\ x_n=a+n\frac{b-a}{n}=b$$



1. Soit k un entier naturel tel que $0\le k\le n-1$

a) Montrer que : $(\forall x\in[x_k,x_{k+1}])\ \ f(x_k)\le f(x)\le f(x_{k+1})$.

b) En déduire que : $\dfrac{b-a}{n}f(x_k)\le\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx\le\dfrac{b-a}{n}f(x_{k+1})$

2. En additionnant les encadrements précédents, montrer que : $\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\le\int_a^b f(x)dx\le\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1})$

3. On pose : $s_n=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)$ et $S_n=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1})$

Montrer que : $0\le S_n-s_n\le\dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$ et en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-s_n)=0$

4. On pose : $r_n=\int_a^b f(x)dx-s_n$ et $R_n=S_n-\int_a^b f(x)dx$

a) Montrer que : $0\le r_n\le S_n-s_n$ et $0\le R_n\le S_n-s_n$

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\int_a^b f(x)dx$. On admet le résultat suivant :

Si f est une fonction continue sur un segment $[a;b]$ alors les suites $(s_n)_{n\ge1}$ et $(S_n)_{n\ge1}$ définies par :

$$s_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\quad\text{et}\quad S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

convergent vers une limite commune qui est $\int_a^b f(x)dx$.

Scanné avec CamScanner

1 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT

1.1. L'INTÉGRALE ET LES PRIMITIVES

Définition 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit a et b deux éléments de I.

Le nombre $F(b)-F(a)$, où F est une primitive de f, est appelé l'intégrale de la fonction f de a à b, et on le note $\int_a^b f(x)dx$. On écrit alors : $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

Remarque

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit « somme de $f(x)dx$ de a à b » ou « intégrale de $f(x)dx$ de a à b »

  Les nombres a et b s'appellent les bornes de cette intégrale.
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, la lettre x peut être remplacée par une autre lettre. Ainsi, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

Exemples

Calculons les intégrales suivantes : $\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln x}{x}dx$; $\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{e^t+1}dt$; $\int_2^6 \sqrt{2+x}\,dx$

En utilisant les primitives, on obtient les résultats suivants :

$$\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_{e^2}^{e^4} = \frac{1}{2}\ln^2\left(e^4\right)-\frac{1}{2}\ln^2\left(e^2\right) = 6 \quad ; \quad \int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{e^t+1}dt = \left[\ln\left(e^t+1\right)\right]_0^{\ln 2} = \ln 3-\ln 2$$

$$\int_2^6 \sqrt{2+x}\,dx = \int_2^6 (2+x)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^6 = \frac{2}{3}\left(8^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{16}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

Applications

1. Déterminer la dérivée de la fonction $F : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis calculer $L = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

2. Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; $J = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln^3 x}{x}dx$; $K = \int_{-2}^{-1} x.2^{-x^2}dx$

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors on a pour tous a, b et c de I :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (C'est la relation de Chasles pour les intégrales).

Scanned with CamScanner

Scanné avec CamScanner

Exemple

Considérons l'intégrale $I = \int_{-2}^{0} |x(x+1)|\,dx$. Le tableau de signe de l'expression $x(x+1)$ sur $[-2;0]$ est :

x	-2		-1		0
$x(x+1)$		$-$	0	$+$	

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$I = \int_{-2}^{-1} |x(x+1)|\,dx + \int_{-1}^{0} |x(x+1)|\,dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 + x)\,dx + \int_{-1}^{0} (-x^2 - x)\,dx$$

D'où : $I = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = \left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{6}\right)\right) = 1$. Ainsi : $I = 1$

Applications

1. Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^2 |3x-4|\,dx$; $\int_{-3}^{2} |x^2 - 3x - 4|\,dx$; $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} |\sin 2x|\,dx$

2. Soit f la fonction numérique définie sur $[0;4]$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{4-x} & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ f(x) = \dfrac{4-x}{x} & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}$

Vérifier que la fonction f est continue sur $[0;4]$ puis calculer l'intégrale : $K = \int_0^4 f(x)\,dx$

Propriété 2

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

Pour tout $(a,b) \in I^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

Preuve

Soit F une primitive de f sur I et G celle de g sur I. On sait que $F + G$ est une primitive de $f + g$ et λF est une primitive de λf. Il s'ensuit que :

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = (F+G)(b) - (F+G)(a) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$. D'où le résultat.

On peut regrouper les deux formules de la propriété 2 dans la formule suivante : « dite de linéarité »

$$(\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2) \quad \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

Scanned with CamScanner

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On a : $A = \int_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \frac{dx}{x-2} - \int_0^1 \frac{dx}{x+2}\right) = \frac{1}{4}\left(\left[\ln|x-2|\right]_0^1 + \left[\ln|x+2|\right]_0^1\right) = -\frac{1}{4}\ln 3$

2) On considère les intégrales : $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$ et $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$

On a : $K + L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx = \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

Et : $K - L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \left[\ln|\cos x + \sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln 2$

Il s'ensuit donc que : $2K = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$ et $2L = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$. D'où : $K = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$ et $L = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$

Applications

1. Soit $n \in N^*$. Montrer que : $\int_0^1 \frac{1+x^{2n+1}}{1+x}dx = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n+1}$

2. Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_1^e \ln x\,dx + \int_1^e \left(\frac{2\ln x}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)dx$

3. On pose : $K = \int_0^{\ln 2} \frac{e^t - 1}{e^t + 1}dt$ et $L = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^t + 1}dt$.

Calculer $K + L$ et $K + 2L$ puis en déduire les valeurs de K et L.

1.2. EXPRESSION D'UNE PRIMITIVE À L'AIDE D'UNE INTÉGRALE

Proposition 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.

La fonction φ définie sur I par : $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I s'annulant en a.

Remarques

- *La fonction φ citée dans la proposition 1 est dérivable sur I et de plus : $(\forall x \in I)\ \varphi'(x) = f(x)$*

Il s'ensuit donc que pour tout $x_0 \in I$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0) = f(x_0)$$

On a aussi : $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_0)$

- *Puisque ln est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 alors :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

Scanné avec CamScanner

Exemples

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

On sait que la fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit donc que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{-x^2}$

2) Étudions les variations de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x)=\int_0^x e^{t^2}\left(t^2-4\right)dt$

La fonction G étant une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g(x)=e^{x^2}\left(x^2-4\right)$. Il s'ensuit donc que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $G'(x)=e^{x^2}\left(x^2-4\right)$

Le signe de $G'(x)$ sur $\mathbb{R}$ étant celui de x^2-4. Par suite :

- La fonction G est croissante sur chacun des intervalles $[2;+\infty[$ et $]-\infty;-2]$.
- La fonction G est décroissante sur l'intervalle $[-2;2]$.

Applications

1. Soit F la fonction numérique définie sur $]-1;1[$ par : $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]-1;1[$ puis déterminer $F'(x)$ pour tout $x\in]-1;1[$.

b) Pour tout $u\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ on pose : $G(u)=F(\sin(u))$. Montrer que la fonction G est linéaire.

2. Déterminer la fonction h continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \int_1^x h(t)\,dt=\ln\left(\frac{1+e^{3x}}{4}\right)$

Proposition 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $v(J)\subset I$. Alors pour tout $a\in I$:

La fonction $F:x\mapsto\int_a^{v(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur J et de plus : $(\forall x\in J)\ F'(x)=v'(x)f(v(x))$

Preuve

On a pour tout $x\in J$: $F(x)=\varphi(v(x))=\varphi\circ v(x)$ où $\varphi:x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt$. Donc : $F=\varphi\circ v$

Puisque v est dérivable sur J avec $v(J)\subset I$, et φ est dérivable sur I avec $\varphi'=f$, alors la fonction F est dérivable sur J et on a pour tout $x\in J$: $F'(x)=v'(x)\varphi'(v(x))=v'(x)f(v(x))$

Exemples

1) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^{x^2+2x}\sqrt{1+t}\,dt$

La fonction $f:t\mapsto\sqrt{1+t}$ est continue sur $[-1;+\infty[$ et la fonction $v:x\mapsto x^2+2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

Scanné avec CamScanner

avec $v(\mathbb{R}) = [-1;+\infty[$. Par suite, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = v'(x) f(v(x)) = 2(x+1)\sqrt{(x+1)^2} = 2(x+1)|x+1|$$

2) Soit G la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \int_{1x}^{5x} e^{t^2} dt$

Étudions les variations de la fonction G sur $\mathbb{R}$:

La fonction $f : t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, les fonctions $u : x \mapsto 3x$ et $v : x \mapsto 5x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a : $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 5$

Selon la relation de Chasles : $G(x) = \int_0^{5x} e^{t^2} dt - \int_0^{3x} e^{t^2} dt$

D'après la proposition 2, la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = (5x)' f(5x) - (3x)' f(3x) = 5e^{25x^2} - 3e^{9x^2} = 5e^{9x^2}\left(e^{16x^2} - \frac{3}{5}\right)$$

Puisque $e^{16x^2} \geq 1$ alors $G'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Applications

1. Montrer que les fonctions F et G définies par : $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\, dt$ et $G(x) = \int_{-x}^{2x} \ln(e^t + 1) dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer leurs fonctions dérivées.

2. Soit H la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $H(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$

Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\ln(1+x^2)\ln(1+4x^2)H'(x) = \ln\left(\frac{(1+x^2)^2}{1+4x^2}\right)$

Puis étudier les variations de H sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Étudier les variations des fonctions suivantes : $u : x \mapsto \int_{2x}^{4x} \frac{dt}{1+t^4}$ et $v : x \mapsto \int_0^{x^2} \frac{e^t}{1+t^4} dt$

1.3. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE INTÉGRALE

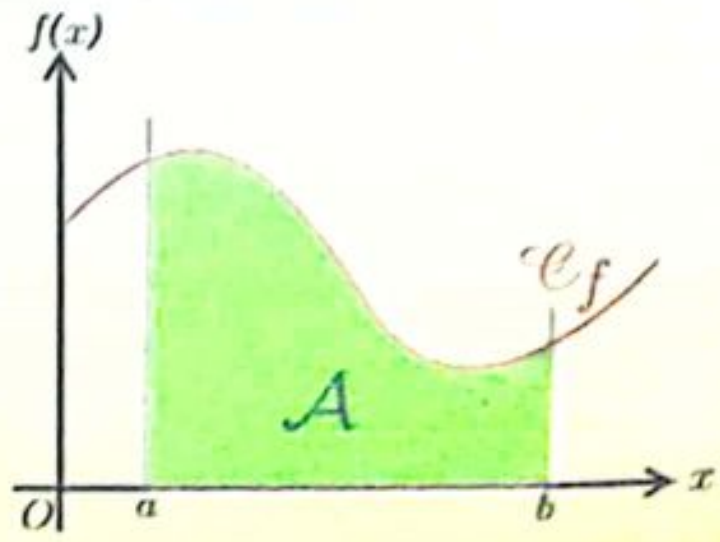
Proposition 3

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a;b]$ $(a < b)$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$$

(exprimée en unités d'aire)

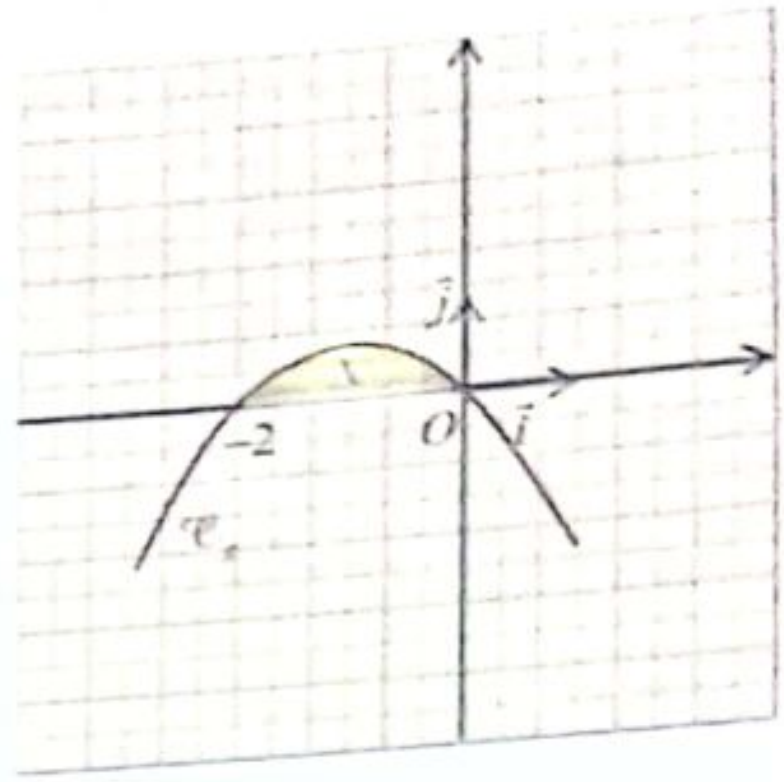


Scanné avec CamScanner

Exemple

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$

Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1,5cm$.



Puisque $g(x) \geq 0$ sur le segment $[-2;0]$ alors l'aire du domaine coloré Δ est donnée par :

$\mathscr{A}(\Delta) = \int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)dx$ en unités d'aire (ici $2,25cm^2$)

Or : $\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} = \frac{2}{3}$

Il s'ensuit donc que : $\mathscr{A}(\Delta) = \frac{2}{3} \times 2,25cm^2 = 1,5cm^2$

Applications

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 6 + 5e^x - e^{2x}$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq 0$ puis déterminer l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, les axes du repère et la droite d'équation $x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

et $\mathscr{C}_g$ son graphe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$. Déterminer l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -\frac{\pi}{12}$ et $x = \frac{\pi}{6}$.

2 TECHNIQUES DE CALCUL D'INTÉGRALES

2.1. UTILISATION DES PRIMITIVES

Pour calculer une intégrale, on envisage en premier temps d'utiliser le tableau des primitives des fonctions usuelles et leurs propriétés. Ainsi, et avant d'entamer le calcul d'une intégrale d'une fonction f, on doit vérifier la continuité de f sur l'intervalle d'intégration puis voir si f s'écrit sous la forme $u'.(v'ou)$ (car une primitive de f est donc vou) ou bien voir si le problème demande de transformer l'expression de la fonction f en une somme des fonctions faciles à intégrer.

Maintenant que le lien entre recherche de primitives et calcul d'intégrales a été rappelé, nous allons donner deux méthodes permettant de simplifier le calcul d'intégrales et donc la recherche des primitives, à savoir :

Intégration par parties et intégration par changement de variable

Scanned with CamScanner

Scanné avec CamScanner

2.2. INTÉGRATION PAR PARTIES

Proposition 4

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que ses dérivées u' et v' soient continues sur I. Alors pour tout $(a;b) \in I^2$ on a : $\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

Exemples

1) Calculons l'intégrale $I = \int_0^{\frac{3}{4}} \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)dt$ par intégration par parties :

Posons : $u = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \rightarrow u' = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ et $v' = 1 \rightarrow v = t$

Il s'ensuit donc : $I = \left[t\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}} - \int_0^{\frac{3}{4}} \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \dfrac{3}{4}\ln(2) - \left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^{\frac{3}{4}} = \dfrac{3}{4}\ln(2) - \dfrac{1}{4}$

2) Calculons l'intégrale $J = \int_1^{\sqrt{3}} t\,\text{Arc}\tan(t)dt$ par intégration par parties :

Posons : $u = \text{Arc}\tan t \rightarrow u' = \dfrac{1}{t^2+1}$ et $v' = t \rightarrow v = \dfrac{t^2}{2}$

Il s'ensuit donc : $J = \left[\dfrac{t^2}{2}Arc\tan t\right]_1^{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{t^2}{t^2+1}dt = \dfrac{3\pi}{8} - \dfrac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{t^2}{t^2+1}dt$

D'autre part : $\dfrac{t^2}{t^2+1} = \dfrac{t^2+1-1}{t^2+1} = 1 - \dfrac{1}{t^2+1}$. Il s'ensuit donc :

$$J = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[t - \text{Arc}\tan t\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) On considère l'intégrale : $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)dx$

La formule d'intégration par parties donne : (en posant : $u = e^x \rightarrow u' = e^x$ et $v' = \cos x \rightarrow v = -\sin x$)

$$K = \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

En réappliquant la formule d'intégration par parties sur l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ en posant :

$u = e^x \rightarrow u' = e^x$ et $v' = \sin x \rightarrow v = \cos x$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - K$$

Il s'ensuit donc : $K = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - K$. Ainsi : $K = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$

Scanné avec CamScanner

Applications

1. En appliquant la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{\ln 2} xe^x dx \quad ; \quad I_2 = \int_{-2}^{1} x\sqrt{2-x}\,dx \quad ; \quad I_3 = \int_1^3 \ln\left(t^2+1\right)dt \quad ; \quad I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$$

$$I_5 = \int_2^3 \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|dx \quad ; \quad I_6 = \int_1^e \frac{\ln t}{t^2}dt \quad ; \quad I_7 = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \operatorname{Arc}\tan(t)\,dt$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $J_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$ et $K_n = \int_0^1 t^n e^t dt$

En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_{n+1} + (n+1)J_n = e \quad \text{et} \quad K_{n+1} + (n+1)K_n = e$$

3. En utilisant la technique d'intégration par parties, déterminer toutes les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^2}\ln x$.

4. En utilisant deux fois l'intégration par parties, calculer $K(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2.3. INTÉGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

Proposition 5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle E telle que : u' est continue sur E et $u(E) \subset I$.

On a alors pour tout $(\alpha,\beta) \in E^2$: $\int_\alpha^\beta f\left(u(t)\right)u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$

Si u est une bijection de E vers I, alors pour tout $(a,b) \in I^2$: $\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f\left(u(t)\right)u'(t)dt$

Preuve

Soit F une primitive de la fonction f sur I. On a alors :

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = F\left(u(\beta)\right) - F\left(u(\alpha)\right) = Fou(\beta) - Fou(\alpha)$$

On pose $G = Fou$. Puisque u est dérivable sur E et $u(E) \subset I$ et F est dérivable sur I, alors G est dérivable sur E et on a : $G' = \left(F'ou\right)\times u' = \left(fou\right)\times u'$. Par suite, Fou est une primitive de $\left(fou\right)\times u'$ sur E.

Ainsi : $\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(u(t)\right)u'(t)dt$

Si u est une bijection de E vers I alors pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u\left(u^{-1}(a)\right)}^{u\left(u^{-1}(b)\right)} f(x)dx \text{ et donc : } \int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f\left(u(t)\right)u'(t)dt$$

Scanné avec CamScanner

Remarque

- Pratiquement et en posant $x = u(t)$, on trouve $\frac{dx}{dt} = u'(t)$ c'est-à-dire que $dx = u'(t)dt$, de sorte que l'expression $f(u(t))u'(t)dt$ soit égale à l'expression $f(x)dx$, et on a :

$$t = \alpha \Rightarrow x = u(\alpha) \quad \text{et} \quad t = \beta \Rightarrow x = u(\beta)$$

On dit qu'on a effectué un changement de variable en posant $x = u(t)$.

Exemples

1) Calculons l'intégrale : $I = \int_{e^{-1}}^{e} \frac{dt}{\sqrt{3 + \ln t}}$

En posant $x = \ln t$, on obtient $dx = \frac{dt}{t}$. On a de plus : $t = e^{-2} \Rightarrow x = -2$ et $t = e \Rightarrow x = 1$

Il s'ensuit donc : $I = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3 + x}} = \left[2\sqrt{3 + x}\right]_{-2}^{1} = 2$

2) Calculons l'intégrale : $J = \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{x + 1} dx$

En posant $t = \sqrt{x}$, on obtient $x = t^2$ et $dx = 2t.dt$. Ainsi :

$$J = \int_{0}^{1} \frac{2t^2}{1 + t^2} dt = 2\int_{0}^{1} \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right) dt = 2\left[t - \operatorname{Arc}\tan t\right]_{0}^{1} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

3) Calculons l'intégrale : $K = \int_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$

En posant $x = \sin t$, on obtient $dx = \cos t\, dt$. On a de plus : $x = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Ainsi : $K = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}.\cos t\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Applications

1. Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} dx$ (poser $x = \cos t$) ; $I_2 = \int_{0}^{1} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x}} dx$ (poser $t = 1 + \sqrt{1 + x}$)

$I_3 = \int_{2\sqrt{3}}^{2} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}$ (poser $t = \frac{1}{\sin x}$) ; $I_4 = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{3x^2 + 2x + 1}$ (poser $t = \frac{3x + 1}{\sqrt{2}}$)

$I_5 = \int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x + 1}\, dx$ (poser $t = e^x$) ; $I_6 = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$ (poser $u = \frac{1}{x}$)

2. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_{2x}^{4x} \frac{t}{t^4 + t^2 + 1} dt$ est paire.

Scanné avec CamScanner

Preuve

Soit F une primitive de la fonction f sur $[a;b]$. Donc : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Puisque f est positive sur $[a;b]$, alors la fonction F est croissante sur $[a;b]$, donc $F(b) - F(a) \geq 0$, d'où $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$, et donc $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exemple

1) Encadrons l'intégrale : $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$

On a pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\frac{\pi}{4} \leq \sin x \leq \sin\frac{\pi}{2}$ car sin est croissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. Il s'ensuit donc que $1 \leq \frac{1}{\sin x} \leq \sqrt{2}$ pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, d'où : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\,dx$. Ainsi : $\frac{\pi}{4} \leq A \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

2) Comparons les intégrales : $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\sqrt{x}\right)dx$

On a pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $x \leq \sqrt{x}$. Puisque la fonction cos est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ alors pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\cos x \geq \cos\sqrt{x}$, et donc $\ln(\cos x) \geq \ln\left(\cos\sqrt{x}\right)$ car ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit donc que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\sqrt{x}\right)dx$, c'est-à-dire que $K \leq L$.

Applications

1. Montrer que : $0 \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}dt \leq \frac{\pi}{2} - 1$ et $\frac{\pi}{3} \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+t}{\cos t}dt \leq \frac{\pi^2}{9} + \frac{2\pi}{3}$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $0 \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \leq \frac{1}{x}$

Scanné avec CamScanner

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \cos(3x)\,dx$

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3.2. INTÉGRALE ET VALEUR ABSOLUE

Proposition 7

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $(a;b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.

On a alors : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Exemple

Encadrons le nombre : $A = \left|\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{2t+1}\,dt\right|$

On a : $A \leq \int_0^1 \left|\frac{\sin(\pi t)}{2t+1}\right| dt$. On sait que pour tout $t \in [0;1]$, $|\sin(\pi t)| \leq 1$, donc $\left|\frac{\sin(\pi t)}{2t+1}\right| \leq \frac{1}{2t+1}$ pour tout $t \in [0;1]$, et alors $A \leq \int_0^1 \frac{1}{2t+1}\,dt$. Comme $\int_0^1 \frac{1}{2t+1}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln(2t+1)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$ alors : $0 \leq A \leq \frac{\ln 3}{2}$

Applications

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left|\int_{2x-1}^{x^2} t\sqrt{3+\cos t}\,dt\right| \leq x^4 + (2x-1)^2$

3.3. VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT

Proposition 8

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $(a;b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.

- S'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

- S'il existe un réel M tels que pour tout $x \in [a;b]$, $|f(x)| \leq M$, alors : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a)$

Définition 2

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ $(a < b)$.

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Scanné avec CamScanner

Remarques

- Très souvent dans la pratique, m et M représentent le minimum et le maximum de la fonction f sur le segment $[a,b]$.
- Si on a $m \leq f \leq M$ sur $[a,b]$ $(a<b)$, alors $m \leq \mu \leq M$. C'est pourquoi la proposition 8 porte le nom de « inégalité de la moyenne »
- La formule $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est une généralisation de la formule $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$ donnant la moyenne arithmétique d'une série statistique.

Proposition 9

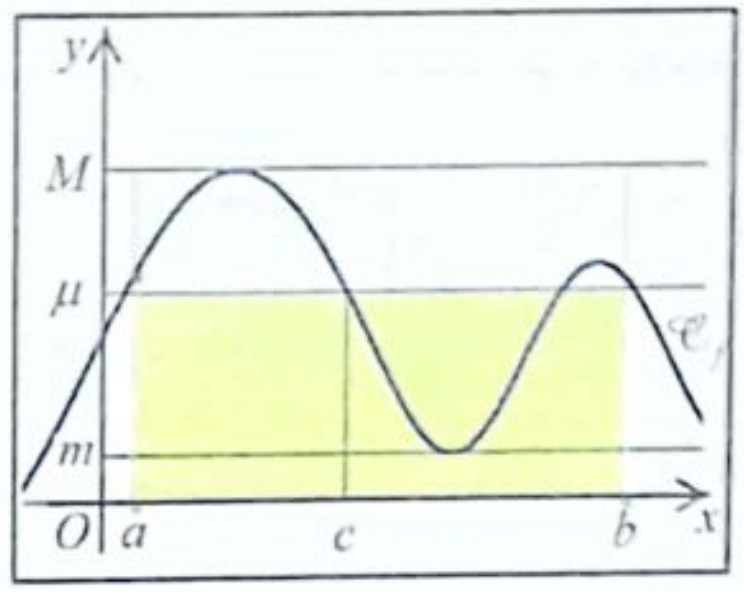
Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ $(a<b)$.

Il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que : $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$

Ce résultat porte le nom de « Théorème de la moyenne »

Remarques

- Si $f([a;b]) = [m;M]$ et F désigne une primitive de la fonction f sur $[a;b]$, alors la formule $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ est équivalente à $F(b)-F(a) = (b-a)F'(c)$, et cette formule n'est qu'une copie de la formule du théorème des accroissements finis appliquée à la fonction F.
- Graphiquement, une interprétation de ce théorème est que l'aire algébrique sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est égale à celle d'un rectangle de base $[a;b]$, et de hauteur l'ordonnée d'un point moyen de la courbe.



Exemples

) La valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $[1,e]$ est $\mu = \dfrac{1}{e-1}\int_1^e \ln(x)dx$. Une intégration par parties appliquée à l'intégrale $\int_1^e \ln(x)dx$ donne : $\int_1^e \ln(x)dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - [x]_1^e = 1$, donc $\mu = \dfrac{1}{e-1}$.

Scanné avec CamScanner

2) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$. Pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$, on pose : $H(x)=\int_x^{x^2}\dfrac{dt}{\ln t}$

D'après le théorème de la moyenne, il existe un réel $c_x\in\left[x;x^2\right]$ tel que :

$$H(x)=\left(x^2-x\right)f(c_x)+\left[\ln(t-1)\right]_x^{x^2}=\left(x^2-x\right)f(c_x)+\ln(x+1)$$

Ce résultat permet de calculer par exemple $\lim\limits_{x\to 1^+}H(x)$ (on trouve : $\lim\limits_{x\to 1^+}H(x)=\ln 2$)

Applications

1. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{2e^{2x}}{2e^x-1}$ sur le segment $\left[0,\ln 2\right]$.

2. Soit a un réel strictement positif, et soit g une fonction continue sur $\left[0,a\right]$. Pour tout $n\in N$ on pose : $u_n=\int_0^a\dfrac{g(x)}{1+nx}dx$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Soit h une fonction continue sur $\left[0,1\right]$ telle que $\int_0^1 h(x)dx=\dfrac{\pi}{4}$. En appliquant le théorème de la moyenne à la fonction $x\mapsto h(x)-\dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\left[0,1\right]$, montrer que : $\left(\exists c\in\left]0,1\right[\right)\ \dfrac{1}{1+c}\le h(c)\le\dfrac{1}{2c}$

4 APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL

4.1. CALCUL DES AIRES

Proposition 10

Soit f une fonction continue sur un segment $\left[a;b\right]$ $(a<b)$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b\left|f(x)\right|dx$ (en unité d'aire).

Preuve

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

f une fonction définie et continue sur le segment $\left[a;b\right]$ $(a<b)$. $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

on rappelle que l'unité de mesure d'aire est l'aire du rectangle de dimensions $\left\|\vec{i}\right\|$ et $\left\|\vec{j}\right\|$.

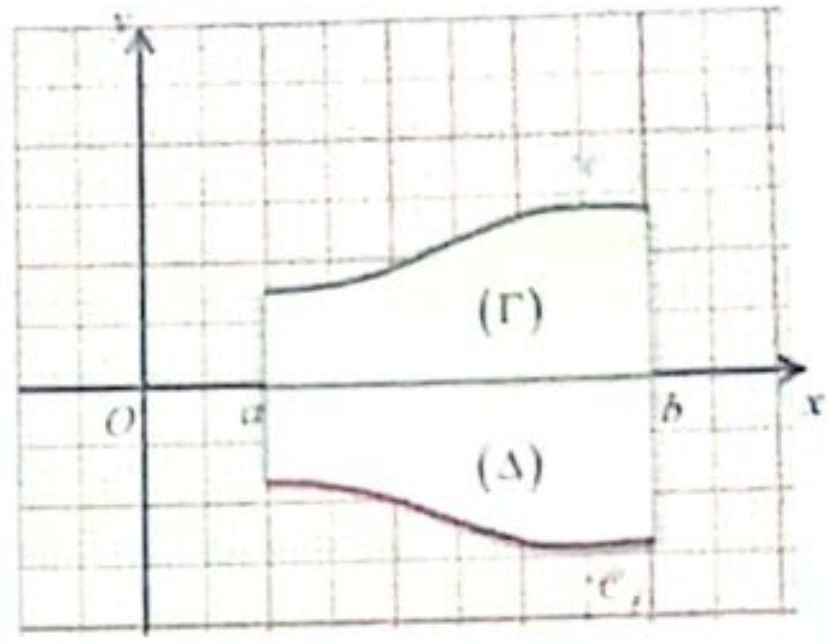
Soit (Δ) le domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. On note $\sigma(\Delta)$ ou $\sigma(f)$ l'aire du domaine (Δ).

- Le nombre positif $\int_a^b\left|f(x)\right|dx$ est appelé l'aire géométrique du domaine (Δ).
- Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ est appelé l'aire algébrique du domaine (Δ).

Scanné avec CamScanner

• Dans le cas où la fonction f est positive sur $[a;b]$, on a déjà vu du paragraphe 1.3, qui concerne l'interprétation géométrique de l'intégrale, que : $\sigma(\Delta) = \int_a^b f(x)dx$ (unité de mesure).

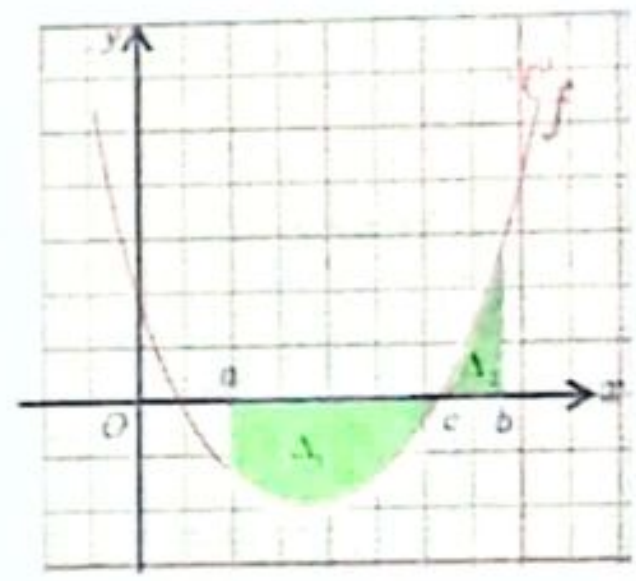
• Dans le cas où la fonction f est négative sur $[a;b]$, alors $(\Delta) = \{M(x,y) / f(x) \leq y \leq 0\}$. En utilisant la symétrie axiale d'axe (Ox) (axe des abscisses), on remarque bien que l'aire du domaine $\sigma(\Delta)$ est égale à l'aire du domaine (Γ) délimité par $\mathscr{C}_{-f}$ (courbe de $-f$), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Donc : $\sigma(\Delta) = \sigma(\Gamma) = \int_a^b -f(x)dx$

Comme $|f| = -f$, alors $\sigma(\Delta) = \int_a^b |f(x)|dx$ (unité de mesure).

• Si la fonction f change de signe sur $[a;b]$, par exemple il existe $c \in [a;b]$ tel que f soit positive sur $[c;b]$ et négative sur $[a;c]$ alors : $\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_1) + \sigma(\Delta_2)$ avec $\sigma(\Delta_1) = \int_a^c -f(x)dx$ et $\sigma(\Delta_2) = \int_c^b f(x)dx$ et donc :



$$\sigma(\Delta) = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

(unité d'aire).

Exemple

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, déterminons l'aire du domaine (Δ) délimité par la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sin x$ et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

On remarque que la fonction f change de signe sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ en π. Donc l'aire demandée est : $\sigma(\Delta) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx$ (unités d'aire).

$$\sigma(\Delta) = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin x)dx = [-\cos x]_0^{\pi} + [-\cos x]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = 3$$

Ainsi : $\sigma(\Delta) = 3u$ où u est l'unité d'aire.

Scanné avec CamScanner

Applications

Soit g la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = x - 2\sqrt{x}$

Étudier le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$ puis calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de g et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 5$ et $y = 0$

Proposition 11

Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$.

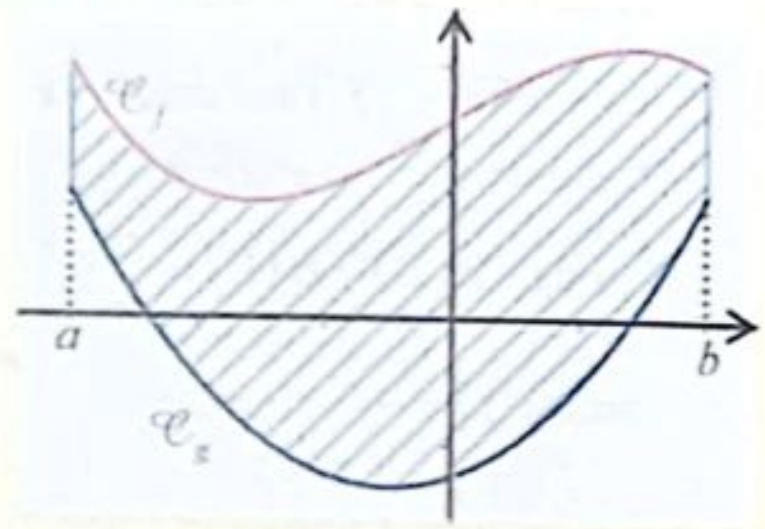
Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g.

Soit (Δ) le domaine délimité par les courbes

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Alors :

L'aire du domaine (Δ) en unités d'aire est donnée par :

$$\sigma(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



4.2. CALCUL DES VOLUMES

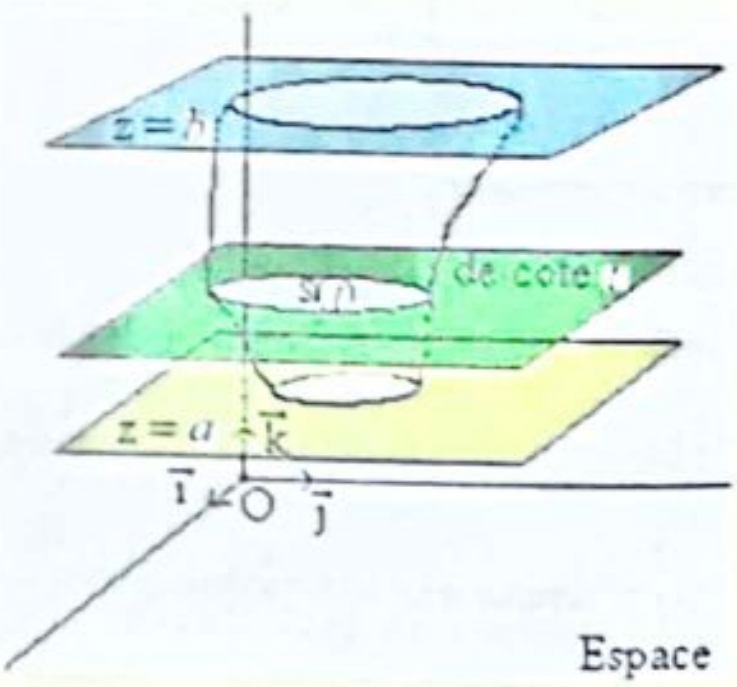
Proposition 12

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

On considère un solide (S) limité par deux plans parallèles au plan $(O;\vec{i},\vec{j})$:

- le plan de cote a d'équation $z = a$
- le plan de cote b d'équation $z = b$

Si $S(t)$ est l'aire de l'intersection du solide (S) avec tout plan parallèle à $(O,\vec{i},\vec{j})$ de cote t alors le volume de ce solide est (en unités de volume) : $v(S) = \int_a^b S(t)\,dt$



Espace

Preuve

Soit $v(t)$ le volume de l'ensemble des points appartenant à (S) et qui sont compris entre les plans d'équations $z = a$ et $z = t$. Et soit $t_0 \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $t_0 + h \in [a;b]$.

le volume de l'ensemble des points de (S) et qui sont compris entre les plans d'équations $z = t_0$ et $z = t_0 + h$ est $v(t_0 + h) - v(t_0)$. Ce volume est encadré par les volumes des cylindres de hauteur h et d'aires de bases

Scanné avec CamScanner

respectives $S(t_0)$ et $S(t_0+h)$.

Si $S(t_0) \le S(t_0+h)$, on obtient : $hS(t_0) \le v(t_0+h)-v(t_0) \le hS(t_0+h)$

Si $S(t_0+h) \le S(t_0)$, on obtient : $hS(t_0+h) \le v(t_0+h)-v(t_0) \le hS(t_0)$

Dans les deux cas on a : $\left|\dfrac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h} - S(t_0)\right| \le \left|S(t_0+h)-S(t_0)\right|$

Et puisqu'on a supposé que la fonction S est continue sur $[a,b]$ alors $\lim\limits_{h\to 0} S(t_0+h) = S(t_0)$ et donc :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h} = S(t_0)$. On montre de même que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h} = S(t_0)$.

Il s'ensuit que v est dérivable sur $[a,b]$ et pour tout $t \in [a;b]$, $v'(t) = S(t)$. Cela signifie donc que v est la primitive de S qui s'annule en a. Donc, pour tout $t \in [a;b]$: $v(t) = \int_a^t S(x)dx$

Par suite, le volume du solide (S) est : $v(S) = v(b) = \int_a^b S(x)dx$ ou encore $v(S) = \int_a^b S(t)dt$.

Proposition 13

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$,

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}_f$ autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par la formule : $V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$ (en unités de volume)

Exemple

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction $f : x \mapsto e^{2x}$ sur $[0,1]$ autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par :

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{2x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{4x} dx = \frac{\pi}{4}\left[e^{4x}\right]_0^1 = \frac{\pi\left(e^4-1\right)}{4} \quad \text{(en unité de volume)}$$

Applications

1. Soit g la fonction numérique définie sur $[0;\pi]$ par : $g(x) = \sin x$. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}_g$ autour de l'axe des abscisses un tour complet.
2. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de cercle $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 + (y-2)^2 = 1$ autour de l'axe des abscisses.

Scanné avec CamScanner

Proposition 14

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a;b]$ $(a<b)$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}_f$ autour de l'axe des ordonnées un tour complet est donné la formule : $V=\pi\left|\int_{f(a)}^{f(b)}\left(f^{-1}(x)\right)^2 dx\right|$ (en unité de volume)

Si de plus, f est dérivable sur $[a;b]$ alors : $V=\pi\int_a^b x^2\left|f'(x)\right|dx$ (en unité de volume)

4.3. ENCADREMENT D'UNE INTÉGRALE PAR DEUX SUITES. MÉTHODE DES RECTANGLES

Proposition 15

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ $(a<b)$. Pour tout entier $n\geq 2$ on pose :

$$x_0=a \quad ; \quad x_1=a+\frac{b-a}{n} \quad ; \ldots \quad ; \quad x_k=a+k\frac{b-a}{n} \quad ; \ldots \quad ; \quad x_n=a+n\frac{b-a}{n}=b$$

Pour tout $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, on note M_k la valeur maximale et m_k la valeur minimale de f sur le segment $[x_k;x_{k+1}]$. On pose enfin : $\lambda_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}M_k$ et $\mu_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}m_k$

On a alors pour tout entier $n\geq 2$: $\mu_n\leq\int_a^b f(x)dx\leq\lambda_n$

Preuve

Pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\forall x\in[x_k;x_{k+1}],\ m_k\leq f(x)\leq M_k$$

Il s'ensuit donc que : $\int_{x_k}^{x_{k+1}}m_k dx\leq\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx\leq\int_{x_k}^{x_{k+1}}M_k dx$

C'est-à-dire que :

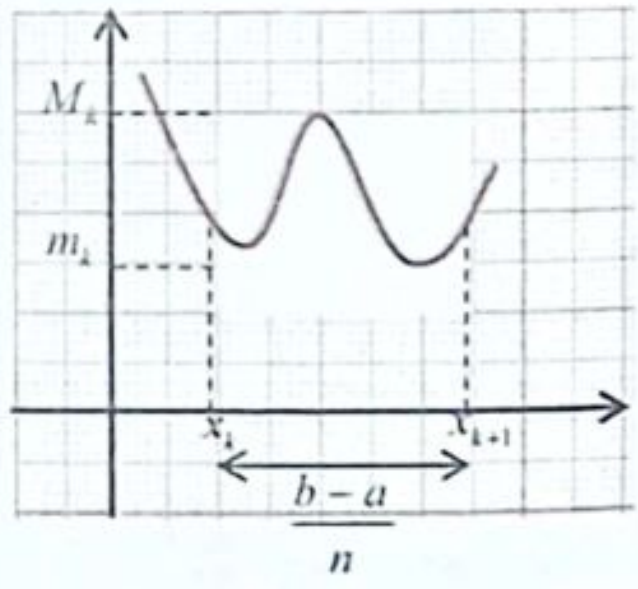
$$m_k(x_{k+1}-x_k)\leq\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx\leq M_k(x_{k+1}-x_k)$$

Et puisque $x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n}$ alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}m_k\leq\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx\leq\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}M_k$$

D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a : $\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

Et par suite, pour tout $n\geq 2$: $\mu_n\leq\int_a^b f(x)dx\leq\lambda_n$.



Scanné avec CamScanner

Proposition 4.6

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;A]\ (a<A)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n=\frac{A-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(a+k\frac{A-a}{n}\right)\quad\text{et}\quad S'_n=\frac{A-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{A-a}{n}\right)$$

Alors les deux suites $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(S'_n)_{n\geq 1}$ convergent et admettent $\int_a^A f(x)\,dx$ comme limite commune.

Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{A-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(a+k\frac{A-a}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{A-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{A-a}{n}\right)=\int_a^A f(x)\,dx$

Exemple

Déterminons les limites des suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\quad ;\quad v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\quad ;\quad w_n=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\quad\text{où}\quad f(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\quad\text{où}\quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$w_n=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}h\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\quad\text{où}\quad h(x)=\cos^2 x$$

Les fonctions f et g sont continues sur $[0;1]$ et h est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. D'après la proposition précédente,

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\left[\ln(1+x)\right]_0^1=\ln 2$$

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=\left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1=2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}w_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}h\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

Applications

1. Calculer les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+k}\right)^2$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$

2. Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}f\left(\sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)\right)-n\right]$.

Scanné avec CamScanner

A TECHNIQUES DE CALCUL DES INTÉGRALES

1) Calculer les intégrales suivantes en utilisant les primitives :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}\quad ;\quad J=\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}\quad ;\quad K=\int_1^4\sqrt{x}(4-x)dx\quad ;\quad L=\int_0^1 x^2.\sqrt{1+x}\,dx$$

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(2x)\sin^3 x\,dx\quad ;\quad N=\int_0^1 2^x.4^{x+2}.6^{x+3}dx\quad ;\quad P=\int_1^e\frac{x+1}{x}\left(\ln(x)+x\right)^3dx$$

2) En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I'=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^3}dx\ ;\ J'=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx\ ;\ K'=\int_1^e\frac{(\ln x)^3}{x^2}dx\ ;\ L'=\int_{-1}^1 x2^x dx\ ;\ M'=\int_0^1 x^3e^{x^2}dx$$

3) Par la formule d'intégration par changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx\quad (\text{Poser } x=\sin t)\qquad ;\qquad B=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}\quad (\text{Poser } x=\sin^2 t)$$

$$C=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}\quad (\text{Poser } t=\tan\frac{x}{2})\qquad ;\qquad D=\int_1^4\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx\quad (\text{Poser } t=\sqrt{x})$$

SOLUTION

1) Calculons les intégrales suivantes en utilisant les primitives :

- $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)\left(\tan x\right)'dx=\left[\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3}$

- $J=\int_0^1\frac{1}{e^t+1}dt=\int_0^1\frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}dt=\left[-\ln\left(e^{-t}+1\right)\right]_0^1=1+\ln\frac{2}{1+e}$

- $K=\int_1^4\sqrt{x}(4-x)dx=\int_1^4\left(4\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)dx=\int_1^4\left(4x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\left[\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^4=\frac{94}{15}$

- $L=\int_0^1 x^2.\sqrt{1+x}dx=\int_0^1\left[(x+1)^2-2(x+1)+1\right].\sqrt{1+x}dx=\int_0^1\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}-2(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]dx$

  Par suite : $L=\left[\frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{105}\left(11\sqrt{2}-4\right)$

- Pour le calcul de $M=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(2x)\sin^3(x)dx$, on peut linéariser l'expression $\cos(2x)\sin^3 x$.

  La linéarisation de $\cos(2x)\sin^3 x$ donne : $\cos(2x)\sin^3 x=-\frac{1}{8}\left(\sin(5x)-3\sin(3x)+4\sin x\right)$

  D'où : $M=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(-\sin(5x)+3\sin(3x)-4\sin x\right)dx=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{5}\cos(5x)-\cos(3x)+4\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{80}$

- $N=\int_0^1 2^x.4^{x+2}.6^{x+3}dx=3456\int_0^1 48^x dx=3456\int_0^1 e^{x\ln 48}dx=3456\left[\frac{1}{\ln 48}48^x\right]_0^1=\frac{162432}{\ln 48}$

Scanned with CamScanner

Scanné avec CamScanner

• $I' = \int_1^e \frac{x+1}{x}\left(\ln(x)+x\right)^3 dx = \int_1^e \left(\ln(x)+1\right)'\left(\ln(x)+x\right)^3 dx = \left[\frac{\left(\ln(x)+x\right)^4}{4}\right]_1^e = \frac{(1+e)^4-1}{4}$

2) Calculons les intégrales suivantes en utilisant la formule d'intégration par parties :

• Pour l'intégrale I' : $u = \ln(1+x)$, $v' = \frac{1}{(1+x)^3} = (1+x)^{-3} \rightarrow u' = \frac{1}{x+1}$, $v = -\frac{1}{2}(1+x)^{-2}$

$$I' = \left[-\frac{\ln(1+x)}{2(1+x)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x)^{-3}\,dx = -\frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x)^{-2}}{-2}\right]_0^1 = \frac{3-2\ln 2}{16}$$

• Pour l'intégrale J' : $u = x$, $v' = \frac{\sin x}{\cos^5 x} \rightarrow u' = 1$, $v = \frac{1}{4\cos^4 x}$

$$J' = \left[\frac{x}{4\cos^4 x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)'\left(1+\tan^2 x\right)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left[\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Par suite : $J' = \pi - \frac{1}{3}$

• Pour l'intégrale K' : $u = (\ln x)^3$, $v' = \frac{1}{x^2} \rightarrow u' = \frac{3(\ln x)^2}{x}$, $v = -\frac{1}{x}$

$$K' = \left[-\frac{(\ln x)^3}{x}\right]_1^e + 3\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx = -\frac{1}{e} + 3\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx$$

• Pour l'intégrale $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx$: $u = (\ln x)^2$, $v' = \frac{1}{x^2} \rightarrow u' = \frac{2\ln x}{x}$, $v = -\frac{1}{x}$

Donc : $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{(\ln x)^2}{x}\right]_1^e + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{e} + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

Il en résulte donc que : $K' = -\frac{1}{e} + 3\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx = -\frac{1}{e} - \frac{3}{e} + 6\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{4}{e} + 6\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

• Pour l'intégrale $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$: $u = \ln x$, $v' = \frac{1}{x^2} \rightarrow u' = \frac{1}{x}$, $v = -\frac{1}{x}$

Donc : $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}$. Ainsi : $K' = -\frac{4}{e} + 6\left(1-\frac{2}{e}\right) = 6 - \frac{16}{e}$

• Pour l'intégrale L' : $u = x$, $v' = 2^x \rightarrow u' = 1$, $v = \frac{2^x}{\ln 2}$

$$L' = \left[\frac{2^x x}{\ln 2}\right]_{-1}^1 - \frac{1}{\ln 2}\int_{-1}^1 2^x\,dx = \frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-1}^1 = \frac{5}{2\ln 2} - \frac{3}{2(\ln 2)^2}$$

• Pour l'intégrale M' : $u = x^2$, $v' = xe^{x^2} \rightarrow u' = 2x$, $v = \frac{e^{x^2}}{2}$

Scanné avec CamScanner

$$M' = \left[\frac{x^2 e^{x^2}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{e}{2} - \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

3) Par changement de variable, calculons les intégrales A , B , C et D :

- Pour l'intégrale A : Posons $x = \sin t$, alors $dx = \cos(t)dt$. Donc :

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos(2t)\right)dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

- Pour l'intégrale B : Posons $x = \sin^2 t$, alors $dx = 2\sin(t)\cos(t)dt$. Donc :

$$B = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{\sin(t)\cos(t)}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2dt = \frac{\pi}{6}$$

- Pour l'intégrale C : Posons $t = \tan\frac{x}{2}$, alors $x = 2\text{Arctan}\, t$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. On a de plus $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,

donc : $C = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1+t^2}{2} \times \frac{2dt}{1+t^2} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dt}{t} = \left[\ln|t|\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} = \frac{1}{2}\ln 3$.

- Pour l'intégrale D : Posons $t = \sqrt{x}$, alors $x = t^2$ et $dx = 2t\,dt$. Donc :

$$D = \int_1^4 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{1+t^2}{1+t}2t\,dt = 2\int_1^2 \frac{t^3+t}{1+t}dt$$

La division euclidienne de $t^3 + t$ par $t+1$ donne : $t^3 + t = \left(t^2 - t + 2\right)(t+1) - 2$

Par conséquent : $\int_1^2 \frac{t^3+t}{1+t}dt = \int_1^2 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|t+1|\right]_1^2 = \frac{17}{6} + 2\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Et par suite : $D = \frac{17}{3} + 4\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

- Pour calculer $\int_a^b P(x)\cos(x)dx$, $\int_a^b P(x)\sin(x)dx$ ou $\int_a^b P(x)e^{\alpha x+\beta}dx$, où $P(x)$ est un polynôme, Il faut appliquer une intégration par parties, et dériver $P(x)$ de façon à abaisser son degré.

- La méthode des ***A.L.P.E.S*** est une méthode souvent fructueuse quand on est amené à intégrer par parties.

Principe : le choix de la fonction u (fonction à dériver) se fait selon l'ordre en allant de A vers S

A	*L*	*P*	*E*	*S*
Arc tan x	ln x , log x	Polynômes , x^n	$\exp(x)$, a^x	sin x , cos x , tan x

- Pour effectuer le changement de variable $x = \phi(t)$ dans l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$: On cherche deux valeurs α et β telles que $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$. Dans l'intégrale I : On remplace a par α , b par β , x par $\phi(t)$ et dx par $\phi'(t)dt$. Donc : $I = \int_\alpha^\beta f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)dt$

Scanné avec CamScanner

B SUITE D'INTÉGRALES

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Trouver une relation récurrente entre I_n et I_{n+1}.

3) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

4) On définit une suite (u_n) en posant pour tout entier n : $I_n = \frac{n!}{e}(e - u_n)$

a) Trouver une relation récurrente entre u_n et u_{n+1}.

b) Calculer u_0 puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

5) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$.

SOLUTION

1) Calcul de I_0 et I_1 :

- $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - e^{-1}$
- Pour le calcul de I_1, une intégration par parties donne : $I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + 1 - e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$

2) Une intégration par parties sur $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx$ donne :

$I_{n+1} = \left[-x^{n+1} e^{-x}\right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$. D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$

3) On a pour tout $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$: $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$ et $x^n e^{-1} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$

Donc : $\int_0^1 x^n e^{-1} dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

4) On considère la suite (u_n) en posant pour tout entier n : $I_n = \frac{n!}{e}(e - u_n)$

a) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$. On en déduit alors que :

$\frac{(n+1)!}{e}(e - u_{n+1}) = (n+1)\frac{n!}{e}(e - u_n) - \frac{1}{e}$, C'est-à-dire : $-\frac{(n+1)!}{e} u_{n+1} = -\frac{(n+1)!}{e} u_n - \frac{1}{e}$

D'où : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$

b) L'égalité $I_0 = \frac{1}{e}(e - u_0)$ donne $1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}(e - u_0)$. Par conséquent : $u_0 = 1$

Scanné avec CamScanner

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$. En particulier :

$$u_1 = u_0 + \frac{1}{1!}$$

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{2!}$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n!}$$

Par sommation, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$

5) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)$:

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{I_n}{n!}\right)e$

D'après le résultat de 3), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{e(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{n+1}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{e(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$

- L'intégrale étant un outil de calcul comme les autres, il n'est pas rare que des suites soient définies directement *via* des intégrales.
  L'étude des problèmes classiques relatifs à l'étude des suites (majoration, minoration, monotonie, convergence) s'impose aussi pour les suites définies par des intégrales.

- On s'intéresse dans ce qui suit aux suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \int_a^b f_n(x)\,dx$

  où les fonctions f_n sont des fonctions continues sur le segment $[a,b]$.

Plusieurs techniques à savoir pour l'étude de la suite (u_n) :

- Pour justifier l'existence de u_n, il suffit de justifier que la fonction f_n est continue sur $[a,b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci se fait généralement en une ou deux lignes.
- Pour étudier le signe de u_n, on étudie le signe de f_n sur le segment $[a,b]$.
  - Si pour tout $x \in [a;b]$, $f_n(x) \ge 0$, alors $u_n \ge 0$.
  - Si pour tout $x \in [a;b]$, $f_n(x) \le 0$, alors $u_n \le 0$.

  Bien sûr, ces conditions sont des conditions suffisantes et pas nécessaires.
- Pour étudier la monotonie de la suite (u_n), on utilise la linéarité de l'intégrale et on étudie le signe de la différence : $u_{n+1} - u_n = \int_a^b \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)dx$

Scanné avec CamScanner

- Si pour tout $x \in [a;b]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$, alors $u_{n+1} - u_n \geq 0$. D'où : (u_n) est croissante.
- Si pour tout $x \in [a;b]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$, alors $u_{n+1} - u_n \leq 0$. D'où : (u_n) est décroissante.

Encore une fois, ces conditions sont des conditions suffisantes et pas nécessaires. Mais de toute façon, le cas le plus fréquemment posé est que $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ garde un signe constant sur $[a;b]$.

- Pour montrer un encadrement de u_n de la forme : $v_n \leq u_n \leq w_n$ on cherchera un « bon encadrement » de la fonction f_n sur $[a;b]$, puis on utilisera la propriété suivante :

  Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n(x) \leq f_n(x) \leq g_n(x)$, alors : $\int_a^b h_n(x)dx \leq \int_a^b f_n(x)dx \leq \int_a^b g_n(x)dx$

- Pour établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} ou u_{n+2}, on utilisera dans la majorité des cas une intégration par parties.

C ÉTUDE D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

I) Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$

Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

II) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(t) = \frac{t-1}{t \ln t}$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 1$.

1) Montrer que f est continue sur $]0;+\infty[$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \int_x^{x^2} f(t)dt$.

3) En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x \to 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$

SOLUTION

I) La fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(t) = \frac{e^{-t^2}}{t}$ est continue sur cet intervalle. Elle admet donc une primitive G dérivable sur $]0;+\infty[$. De plus, les fonctions u et v définies sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = x$ et $v(x) = x^2$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$. On a donc pour tout $x \in]0;+\infty[$: $F(x) = G(x^2) - G(x) = G \circ v(x) - G \circ u(x)$

Cela entraine la dérivabilité de la fonction F sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$F'(x) = (x^2)' G'(x^2) - G'(x) = \frac{2e^{-x^4} - e^{-x^2}}{x}$$

II) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(t) = \frac{t-1}{t \ln t}$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 1$.

Scanné avec CamScanner

1) Montrons que f est continue sur $]0;+\infty[$:

La fonction f est continue sur les intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur ces deux intervalles qui sont $t \mapsto t-1$ et $t \mapsto t\ln t$.

Reste à montrer la continuité de f au point 1. On a :

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{t\ln t} = \lim_{t\to 1} \frac{1}{t} \times \frac{t-1}{\ln t} = 1\times 1 = 1 = f(1)$$

Par conséquent, la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 1} \int_x^{x^2} f(t)\,dt$:

Puisque la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$, alors elle admet une primitive F, continue et dérivable sur cet intervalle. On a donc : $\lim\limits_{x\to 1} \int_x^{x^2} f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to 1}\left(F\left(x^2\right)-F(x)\right) = F(1)-F(1) = 0$

3) La valeur de la limite $\lim\limits_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur chaque segment d'extrémité x et x^2. Cela provient du fait que si $x>1$ alors $\left[x;x^2\right] \subset]1;+\infty[$ et si $x<1$ alors $\left[x^2;x\right] \subset]0;1[$. On a donc :

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_x^{x^2} \left(f(t)+\frac{1}{t\ln t}\right)dt = \int_x^{x^2} f(t)\,dt + \left[\ln\left|\ln t\right|\right]_x^{x^2} = \int_x^{x^2} f(t)\,dt + \ln\left|\frac{\ln x^2}{\ln x}\right| = \int_x^{x^2} f(t)\,dt + \ln 2$$

Par passage à la limite, on obtient : $\lim\limits_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \ln 2$

- Pour étudier la dérivabilité de la fonction F définie par l'expression : $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$

On peut vérifier que les fonctions u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle E et à valeurs dans un intervalle I sur lequel la fonction f est continue puis dériver la fonction F en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées :

$$F'(x) = \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right)' = v'(x)\,f\left(v(x)\right) - u'(x)\,f\left(u(x)\right)$$

D SOMMES DE RIEMANN

1) Calculer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 \quad ; \quad \ell_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad ; \quad \ell_3 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$$

2) Calculer les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} \quad ; \quad L_2 = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Scanné avec CamScanner

SOLUTION

1) Calcul de $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3$: Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3$

On a alors : $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

Calcul de $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$:

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos(\pi x)$

On a alors : $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \cos(\pi x)dx = \left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^1 = 0$

Calcul de $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$: On a d'abord $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$

On a alors : $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

Et par suite : $\ell_3 = \left[\text{Arctan } x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$

2) Calcul de L_1 : On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}$

On reconnait une somme de Riemann.

La fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ est continue sur $[0;1]$, donc : $L_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1$

Calcul de L_2 : Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

On a $u_n>0$ et $\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$. On reconnait une somme de Riemann.

La fonction $x\mapsto\ln\left(1+x^2\right)$ est continue sur $[0;1]$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$.

Une intégration par parties appliquée à $I = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$ donne :

$I = \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \ln 2 - 2 + 2\left[\text{Arctan } x\right]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

Enfin, comme l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, on conclut : $L_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES D'APPLICATION

INTÉGRATION PAR PRIMITIVATION

EXERCICE 01

Calculer les intégrales suivantes :

$$A_1 = \int_{-2}^{3} t\left(t^2+2\right)^7 dt \quad ; \quad A_2 = \int_1^4 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 dt$$

$$A_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \quad ; \quad A_4 = \int_1^0 \frac{dx}{(2x+1)^{2018}}$$

$$A_5 = \int_0^1 x^{20}\sqrt{x}\,dx \quad ; \quad A_6 = \int_0^2 (x+2)\sqrt{x^2+4x}\,dx$$

$$A_7 = \int_7^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}} \quad ; \quad A_8 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$$

EXERCICE 02

Calculer les intégrales suivantes :

$$B_1 = \int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx \quad ; \quad B_2 = \int_2^5 \frac{t}{\sqrt{t-1}}dt$$

$$B_3 = \int_0^3 \frac{x}{(x-1)\sqrt{x+1}}dx \quad ; \quad B_4 = \int_4^9 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$$

$$B_5 = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \quad ; \quad B_4 = \int_2^3 \frac{2x}{(x-1)(x+2)}dx$$

EXERCICE 03

Calculer les intégrales suivantes :

$$C_1 = \int_0^{\pi}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin 3x\right)dx \quad ; \quad C_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(2x)\,dx$$

$$C_3 = \int_0^{\pi} \sin^3 x\cos x\,dx \quad ; \quad C_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sin x}dx$$

$$C_5 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\sin(3x)\,dx \quad ; \quad C_6 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \tan(2x)\,dx$$

$$C_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^3 x + \tan x\right)dx \quad ; \quad C_8 = \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$C_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx \quad ; \quad C_9 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(2x)}{(2+\sin 2x)^4}dx$$

EXERCICE 04

Calculer les intégrales suivantes :

$$D_1 = \int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx \quad ; \quad D_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^{\sin^2 x}dx$$

$$D_3 = \int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t}dt \quad ; \quad D_4 = \int_0^1 \left(2^x + 3^x\right)dx$$

$$D_5 = \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(x + \frac{1}{x}(1+\ln x)\right)dx \quad ; \quad D_6 = \int_{e^2}^{e^3} \frac{dt}{t\ln t}$$

$$D_7 = \int_1^{e^{\pi}} \frac{\cos(\ln x)}{x}dx \quad ; \quad D_8 = \int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x+\sqrt{x}}dx$$

$$D_9 = \int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{dt}{t\ln^2 t} \quad ; \quad D_{10} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\left(e^x+1\right)\left(e^x+2\right)}{e^x}dx$$

EXERCICE 05

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx \quad ; \quad I_2 = \int_2^3 (2-x)e^{x^2-4x}dx$$

$$I_3 = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)} \quad ; \quad I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{(3\tan x+2)\cos^2 x}$$

$$I_5 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\ln(\cos x)}dx \quad ; \quad I_6 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\ln^3(\cos x)}dx$$

$$I_7 = \int_1^3 \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right)dx \quad ; \quad I_8 = \int_0^1 \frac{(\text{Arc}\tan x)^2}{x^2+1}dx$$

$$I_9 = \int_0^{\pi} e^x\left(\sin x + \cos x\right)dx \quad ; \quad I_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$$

EXERCICE 06

On considère l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin(2x)}$

1) Montrer que pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$:

$$\frac{1}{1+\sin(2x)} = \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale I .

Scanné avec CamScanner

LINÉARITÉ – RELATION DE CHASLES

EXERCICE 07

On considère les intégrales :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx \quad \text{et} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

Calculer $I+J$ et $I-J$ puis en déduire I et J

EXERCICE 08

On considère les intégrales :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2(x)\cos^2(x)dx$$

1) Calculer : $I-J$ et $I+J+K$

2) a)- Calculer $2\sin^2(x)\cos^2(x)$ en fonction de

$\sin^2(2x)$ et $\cos(4x)$

b)- Calculer K puis en déduire les valeurs de I et J.

EXERCICE 09

Soit f la fonction numérique sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=-\frac{1}{4}x+6 & \text{si} \quad x<3 \\ f(x)=x+\frac{9}{4} & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases}$$

Vérifier que f est continue en 3 puis calculer $\int_1^5 f(x)dx$.

EXERCICE 10

Calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_{-1}^{3}\left|3x^2-6x\right|dx \quad ; \quad B=\int_2^5\left|x^2-7x+12\right|dx$$

$$I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|\ln x\right|dx \quad ; \quad J=\int_0^{2\pi}\left(\left|\sin x\right|+\left|\cos x\right|\right)dx$$

$$K=\int_{-1}^{1}\left|e^x-1\right|dx \quad ; \quad L=\int_0^{\pi}\sin x\left|\cos x\right|dx$$

$$M=\int_{-1}^{4}\frac{\left|x-1\right|+\left|x-2\right|}{\left|x^2-9\right|+x^2+16}dx \quad ; \quad \int_{-1}^{2}\left(\left|x\right|+\left|x^2-1\right|\right)dx$$

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{\left(x^2+3x+2\right)^3}$

1) Déterminer les réels a,b,c,d,α et β tels que pour tout $x\in[2;3]$:

$$f(x)=\frac{a}{(x+1)^3}+\frac{b}{(x+2)^3}+\frac{c}{(x+1)^2}+\frac{d}{(x+2)^2}+\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x+2}$$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_n=\int_0^n f(x)dx$$

Calculer u_n en fonction de n puis montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln(64)-\frac{33}{8}$$

INTÉGRATION PAR PARTIES

EXERCICE 12

En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx \quad ; \quad B=\int_1^e x\ln x\,dx$$

$$C=\int_0^1(x+3)e^{-x}dx \quad ; \quad D=\int_0^{\frac{1}{3}}(4x-1)e^{3x}dx$$

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos^2(2x)dx \quad ; \quad F=\int_0^{\sqrt{3}}x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$$G=\int_{-1}^{4}\frac{x+2}{\sqrt{x+5}}dx \quad ; \quad H=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\cos x\,dx$$

EXERCICE 13

En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x^2-x\right)\cos x\,dx \quad ; \quad J=\int_0^{\pi}(3x+4)\cos^2 x\,dx$$

$$K=\int_1^2 x^2\sin(\ln x)dx \quad ; \quad L=\int_1^e \ln^2 x\,dx$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 16

En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx \quad ; \quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \quad ; \quad I_4 = \int_0^1 \text{Arc}\tan x dx$$

$$I_6 = \int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx \quad ; \quad I_8 = \int_1^e \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

EXERCICE 15

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^n \ln\left(x\right)dx$

1) En utilisant une intégration par parties, calculer pour tout $r \in \mathbb{Q}-\{-1\}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ l'intégrale : $I_r(a) = \int_1^a x^r \ln\left(x\right)dx$

2) Étudier la limite de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 16

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right) = \frac{xe^x}{e^x+1}$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'\left(x\right) = \frac{e^x\left(e^x+x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

2) En utilisant la formule d'intégration parties, calculer l'intégrale : $I = \int_1^2 \frac{e^x\left(e^x+x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}\ln\left(x\right)dx$

EXERCICE 17

1)- En utilisant deux fois la formule d'intégration par parties, montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos\left(2t\right)dt = \frac{1}{4}$

2)- On considère les intégrales E et F telles que :

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos^2\left(t\right)dt \text{ et } F = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\sin^2\left(t\right)dt$$

Calculer $E+F$ et $E-F$ puis en déduire les valeurs des intégrales E et F.

EXERCICE 18

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$

1) Calculer I_0.

2) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\left(2n+5\right)I_{n+1} = \left(2n+2\right)I_n$

b) En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

EXERCICE 19

1) Vérifier que : $\left(\forall t\in\mathbb{R}_+^*\right)\frac{1}{\left(t+1\right)^2} = 1-\frac{t}{t+1}-\frac{t}{\left(t+1\right)^2}$

2) Calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\left(e^x+1\right)^2}$

3) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale suivante : $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^3}dx$

EXERCICE 20

En utilisant une intégration par parties, déterminer le réel a tel que : $\int_0^1\left(x+a\right)e^x dx = e$

EXERCICE 21

En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\ln a}\left(1+e^x\right)\ln\left(x+e^x\right)dx \quad (\text{où } a\in\left]1;+\infty\right[)$$

$$J = \int_{\ln\frac{\pi}{4}}^{\ln\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin\left(e^x\right)dx \quad ; \quad K = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\ln\left(1+\cos x\right)dx \quad ; \quad M = \int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx$$

$$N = \int_0^{2\pi} \frac{\ln\left(1+x\right)}{\sqrt{1+x}}dx \quad ; \quad P = \int_0^{\pi} e^{-2x}\sin^2 x dx$$

EXERCICE 22

On pose : $\left(\forall x\in\left]0;1\right[\right)\ I\left(x\right) = \int_x^1 t.\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)dt$

1) En utilisant la formule d'intégration par parties, exprimer $I\left(x\right)$ en fonction de x.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} I\left(x\right)$.

Scanné avec CamScanner

INTEGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

EXERCICE 25

En utilisant la technique de changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^3 \frac{dx}{x + \sqrt{x-1}}$ (poser : $t = \sqrt{x-1}$)

$B = \int_0^7 x\sqrt[3]{x+1}\,dx$ (poser : $t = \sqrt[3]{x+1}$)

$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\,dx$ (poser : $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$)

$D = \int_0^1 \frac{dx}{4x^2+9}$ (poser : $t = \frac{2x}{3}$)

$E = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ (poser : $x = \cos t$)

$F = \int_0^{-\ln(\sqrt{3})} \frac{dx}{e^x\left(1+e^{2x}\right)}$ (poser : $x = -\ln t$)

EXERCICE 26

En utilisant la technique de changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ (poser : $t = \sqrt{x}$)

$I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{1-\cos x}dx$ (poser : $t = \tan\frac{x}{2}$)

$I_3 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ (poser : $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$)

$I_4 = \int_0^{10} \frac{1+\sqrt{x-1}}{x-2}dx$ (poser : $t = \sqrt{x-1}$)

$I_5 = \int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx$ (poser : $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$)

$I_6 = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{2x}{\cos^2\left(x^2\right)}dx$ (poser : $x = t^2$)

$I_7 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (poser : $x = \frac{t^2-1}{2t}$ et $t > 0$)

$I_8 = \int_4^9 \frac{dt}{\sqrt{t}\left(t - 4\sqrt{t} + 5\right)}$ (poser : $x = \sqrt{t} - 2$)

EXERCICE 27

1) Déterminer deux réels α et β tels que pour tout $t \neq -1$: $\frac{t}{(t+1)^2} = \frac{\alpha}{t+1} + \frac{\beta}{(t+1)^2}$

2) En utilisant une intégration par changement de variable et en posant $x = t^2$, calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}+1\right)^2}$$

EXERCICE 28

1) Vérifier que : $\left(\forall t \in \mathbb{R} - \{-1\}\right) \frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 + \frac{1}{t+1}$

2) Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^3}{1+t}dt$

3) En posant $t = \sqrt{e^x}$, calculer : $J = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^{\frac{x}{2}}}dx$

EXERCICE 29

En posant $t = 2x + 1$, calculer l'intégrale :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$$

EXERCICE 30

Montrer que : $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

EXERCICE 31

Pour tout $x \in]-1;0[$, on pose : $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$

1) Calculer $F(x)$ en fonction de x.

2) Calculer $\lim_{x \to 0} F(x)$ et $\lim_{x \to -1} F(x)$.

EXERCICE 32

En utilisant l'intégration par changement de variable, Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\ln 3} \sqrt{e^x - 1}\,dx$; $J = \int_1^0 \frac{x+2}{\sqrt{x+4}}dx$

$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,dx$; $L = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}\ln\left(1+e^x\right)dx$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 31

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on pose : $f(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^3}}dt$

1) Calculer la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$\varphi : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

2) En utilisant une intégration par changement de variable, calculer $f(x)$.

EXERCICE 32

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$I_n(a) = \int_1^a \frac{\sqrt{1+x^{2n}}}{x}dx$$

1) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$:

$$\frac{t^2}{t^2-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$$

2) En utilisant une intégration par changement de variable en posant $t = \sqrt{1+x^{2n}}$, calculer $I_n(a)$ en fonction de n et a.

INTÉGRATION ET ORDRE

EXERCICE 33

On considère l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx$

1) a) Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}^+\right)\ 1 - t \le e^{-t} \le 1$

b) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$:

$$1 - x \le e^{-x} \le 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

2) a) Vérifier que pour tout $x \in [0;1]$:

$$\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

b) En déduire que : $\frac{1}{2} \le I \le \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{5}$

EXERCICE 34

Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$

EXERCICE 35

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue sur le segment $[0;a]$. On définit la suite $(u_n)_{n\ge1}$ par : $u_n = \int_0^a \frac{f(x)}{1+nx}dx$

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 36

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

1) Montrer que la fonction F est paire.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe

$c \in [x;2x]$ tel que : $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+c^2+c^4}}$

b) En déduire que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ 0 \le F(x) \le \frac{1}{x}$

puis en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

3) Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

AIRES ET VOLUMES

EXERCICE 37

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 \operatorname{Arc}\tan x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \sqrt{3}$.

EXERCICE 38

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 4cm$.

Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions f et g définies sur $[e;e^2]$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x\ln x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\ln x}$$

Scanné avec CamScanner

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la restriction de la fonction $x \mapsto \tan x$ sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.

EXERCICE N° 40

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la restriction de la fonction cos sur $I = [2\pi;3\pi]$.

1) Vérifier que la fonction $x \mapsto \cos x$ réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

2) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des ordonnées.

EXERCICE N° 41

1) On pose : $I_p = \int_0^1 x\left(\ln(x)+1\right)^p dx$ où $p \in \mathbb{N}$.

a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\left(\forall p \in \mathbb{N}^*\right)\ 2I_p = e^2 2^p - pI_{p-1} - 1$

b) En déduire que : $I_2 = e^2 + \frac{1}{2}I_0$

2) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{x}(1+\ln x)$$

autour de l'axe des abscisses sur $[1;e]$.

EXERCICE N° 42

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x\sqrt{1-e^x} & \text{si } x \le 0 \\ f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f en 0.

3) Déterminer les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

4) Etudier les variations de la fonction f.

5) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

6) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

7) On considère les intégrales :

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx \ ; \ J = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx \ ; \ K = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$$

a) Calculer I et K puis montrer que : $J = e^{-1} + 2I$

b) Calculer l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$, $x = e$ et $y = 1$.

8) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$. On note $V(\lambda)$ le volume engendré par la rotation de la courbe la restriction de f sur $[\lambda;0]$ autour de l'axe des abscisses (un tour complet)

a) Calculer $V(\lambda)$ en fonction de λ.

b) Calculer $\lim_{\lambda \to -\infty} V(\lambda)$.

LES SOMMES DE RIEMANN

EXERCICE N° 43

Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$, dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$; 2) $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2+k^2}$

3) $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{\sqrt{\left(n^2+k^2\right)^3}}$; 4) $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n+k}}$

EXERCICE N° 44

Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = \frac{1}{n}\left[\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right]^{\frac{1}{n}}$; 2) $u_n = \left[\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^k\right]^{\frac{1}{n^2}}$

Scanné avec CamScanner

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^{x+1} (1+\ln t)\,dt & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 & \\ \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x\ln x$$

2) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

3) a) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis donner une interprétation géométrique au résultat.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

4) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{(k-2n)^2} e^{\left(\frac{n}{k-2n}\right)}$

Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

ÉTUDE DES FONCTIONS

EXERCICE 46

1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2}$$

2) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{3+t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$$

3) On considère la fonction F définie sur $[0;\pi]$ par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1+\sin u}{2+\cos u}\,du$$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0;\pi]$.

b) En utilisant une intégration par changement de variable et en posant $t = \tan\frac{u}{2}$, montrer que :

$$(\forall x \in [0,\pi[)\ F(x) = 2\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}\,dt$$

c) En utilisant les questions (1) et (2), montrer que pour tout $x \in [0;\pi[$:

$$F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}\right)$$

d) En utilisant la continuité de F, montrer que :

$$\int_0^{\pi} \frac{1+\sin u}{2+\cos u}\,du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

EXERCICE 47

Soit f la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$$

et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

On pose : $(\forall x \in]0;1])\ F(x) = \int_1^{1+(\ln x)^2} f(t)\,dt$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;1])\ F'(x) = 2\ln x$

b) Calculer $F(x)$ pour tout $x \in]0;1]$.

2) Pour tout $\alpha \geq 1$, on note $S(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

a) Montrer que :

$$S(\alpha) = F(f(\alpha)) \text{ (en unité d'aire)}$$

b) Calculer $S(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \to +\infty} S(\alpha)$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 48

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{2^n t}{1+n2^n t^2} dt$

1) Calculer u_0.

2) Calculer u_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 49

On considère la fonction f définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

On considère l'intégrale : $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

1) Montrer que : $(\forall x \in I)\ f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

2) En déduire la valeur de K.

EXERCICE 50

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \sin x$

1) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx$

EXERCICE 51

1) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

2) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^4 x} dx$

EXERCICE 52

En utilisant la formule de l'intégration par parties, une ou plusieurs fois, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$; $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 4x)\sin(2x) dx$

$I_3 = \int_1^e x \ln^2(x) dx$; $I_4 = \int_0^{\pi} e^x \sin(x) dx$

$I_5 = \int_0^1 3x^2 \operatorname{Arc\,tan}(x) dx$; $I_6 = \int_0^1 x^2 . \sqrt[3]{x+3} dx$

EXERCICE 53

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2(x) dx \quad , \quad J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2(x) dx$$

$$K = \int_0^{\pi} e^x \cos(2x) dx$$

1) En utilisant deux fois la formule d'intégration par parties, calculer la valeur du K.

2) Calculer $I + J$ et $I - J$ puis en déduire les valeurs des intégrales I et J.

3) Écrire $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$ puis calculer la valeur de chacune des intégrales I et J en utilisant celle de l'intégrale K.

EXERCICE 54

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $f(x) = \int_1^x (t-1)(t+3)e^{-t} dt$

1) Calculer $f(x)$ en fonction de x.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

EXERCICE 55

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $I(m) = \int_{-m}^{m} e^{1-2|x|} dx$

Calculer $I(m)$ en fonction de m puis donner $\lim\limits_{m \to +\infty} I(m)$.

EXERCICE 56

1) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_{-\ln 2}^{0} \frac{dx}{1+2e^x}$

2) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $I = \int_{-\ln 2}^{0} e^{-x} \ln(1+2e^x) dx$

EXERCICE 57

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

1) Calculer I_0.

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(2n+3) I_{n+1} = \sqrt{2} - 2(n+1) I_n$

3) En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 59

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}, \; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx, \; K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

1) Montrer que : $J + 2I = K$

2) Soit f la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$$

a)- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0;1]$.

b)- En déduire la valeur de l'intégrale I.

3) a)- En utilisant deux fois la formule d'intégration par parties, montrer que : $K = \sqrt{3} - J$

b)- En déduire les valeurs de J et K.

EXERCICE 60

Soit $\lambda \in]0;1[$.

1) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $I(\lambda) = \int_0^{1-\lambda} \ln\left(1-t^2\right)dt$

2) Déterminer la limite : $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} I(\lambda)$

EXERCICE 61

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère les intégrales :

$$F_a(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} \quad \text{et} \quad G_a(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+a^2}\,dt$$

1) Montrer que : $F_a(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) - \ln a$

2) En utilisant une intégration par parties, exprimer $G_a(x)$ en fonction de x.

EXERCICE 62

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin(x)dx \quad \text{et} \quad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos(x)dx$$

1) Calculer A_0 et B_0.

2) En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que : $A_n + nB_n = 1$ et $-nA_n + B_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$

3) a) En déduire A_n et B_n en fonction de n.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n$

EXERCICE 63

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\; u_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

EXERCICE 64

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^n}$

1) Calculer I_1.

2) a) En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer $I_{n+1} - I_n$ en fonction de I_n et n.

b) En déduire I_2 et I_3.

EXERCICE 65

En utilisant l'intégration par changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^{\sqrt{15}} \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)\sqrt{1+t^4}}dt$ avec $\left(u = t + \frac{1}{t}\right)$

2) $J = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos(2x).\cos x}dx$ avec $(t = \cos 2x)$

3) $K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos(x)\sqrt{2+\sin^2 x}}dx$ avec $\left(t = \sin^2 x\right)$

4) $L = \int_1^e \frac{\cos(\ln t)}{t}dx$ avec $(x = \ln t)$

EXERCICE 66

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère les intégrales :

$$I_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx \quad \text{et} \quad J_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$$

1) Calculer $I_\alpha + J_\alpha$ et $I_\alpha - J_\alpha$.

2) En déduire I_α et J_α.

EXERCICE 67

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx \quad ; \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x)\cos(5x)dx$$

$$I_3 = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} e^x \operatorname{Arctan}\left(e^{-x}\right)dx \quad ; \quad I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^4(x)dx$$

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos^2(x)\sin(x)dx \quad ; \quad I_6 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2}dx$$

$$I_7 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x\cos x + \sin x)dx \quad ; \quad \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 66

Pour tout $(a;x) \in \mathbb{R}^2$ on pose : $F_a(x) = \int_a^x \sqrt{\frac{e^t}{1+e^t}}dt$

1) En utilisant l'intégration par changement de variable suivant : $u = \sqrt{\frac{e^t}{1+e^t}}$, calculer $F_a(x)$ en fonction de a et x.

2) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} F_a(x) = 2\ln\left(\sqrt{1+e^x} + \sqrt{e^x}\right)$

EXERCICE 67

1) Soit $a \in [1;+\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on pose :

$$I_a(x) = \int_0^x t^2\sqrt{t+a}\,dt$$

En utilisant l'intégration par changement de variable et en posant $u = \sqrt{t+a}$, Montrer que :

$$I_a(x) = \frac{2}{105}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}\left(15x^2 - 12ax + 8a^2\right) - 8a^{\frac{7}{2}}\right]$$

2) Calculer l'intégrale : $J(x) = \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t+4}}dt$

EXERCICE 68

1) Soit f la fonction définie sur $I = [1;+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Montrer que f réalise une bijection de I sur I puis définir sa fonction réciproque f^{-1}.

2) Soit φ la fonction sur définie $]1;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_{\sqrt{2}}^x \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

En utilisant une intégration par changement de variable en posant $u = f(t)$, calculer $\varphi(x)$.

EXERCICE 69

On considère l'intégrale : $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+e^{2x}}dx$

1) En utilisant le changement de variable $t = -x$, montrer que : $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{2t}\cos t}{1+e^{2t}}dt$

2) En déduire que : $I = \frac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 70

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^{1} t.\text{Arc}\tan(t)\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_{-1}^{1} \frac{t.\text{Arc}\tan(t)}{1+e^t}dt$$

1) En utilisant une intégration par parties, calculer I.

2) Montrer que : $J = \int_{-1}^{1} \frac{e^t}{1+e^t}(t\text{Arc}\tan t)\,dt$

3) En déduire la valeur de l'intégrale J.

EXERCICE 71

En utilisant une intégration par changement de variable et en posant $t = \frac{\pi}{4} - x$, calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^4(2x) + \sin^4(2x)\right)\ln(1+\tan x)\,dx$$

EXERCICE 72

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$I_n(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\cos^\alpha(nt)}{\cos^\alpha(nt) + \sin^\alpha(nt)}dt$$

Calculer $I_n(\alpha)$ et vérifier qu'elle est indépendante de α.

EXERCICE 73

1) Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$.

Montrer que : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

2) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{\cos t} - \sqrt{\sin t}\right)dt$$

EXERCICE 74

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Montrer que pour tout $(a;b) \in I^2$:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f\left(a+(b-a)t\right)dt$$

EXERCICE 75

Calculer : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES ET PROBLEMES

EXERCICE 76

Montrer que : $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \cos(x).\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx = 0$

EXERCICE 77

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \int_{-x}^{x} f(t)dt = \lambda$$

Montrer que la fonction f est impaire.

EXERCICE 78

Soit f une fonction continue sur $[-a;a]$ (où $a \in \mathbb{R}_+^*$).

1) Montrer que : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a}\left(f(t)+f(-t)\right)dt$

2) En déduire les implications suivantes :

a)- Si f est impaire alors : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

b)- Si f est paire alors : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

EXERCICE 79

Soit f une fonction impaire et continue sur $\mathbb{R}$ et n un entier naturel.

1) Montrer que : $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0$

2) Montrer que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

EXERCICE 80

Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

1) Montrer que si f et continue sur $[-a;a]$ et paire,

alors : $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$

2) En déduire la valeur de : $\int_{-a}^{a} \frac{dx}{(x^2+1)(e^x+1)}$

EXERCICE 81

Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$ telle pour tout $x \in [a;b]$: $f(a+b-x) = f(x)$

Montrer alors que :

$$\int_{a}^{b} xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

EXERCICE 82

On considère l'intégrale I définie par :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\left(x^4+x^2+1\right)^2+e^x}{e^x+1}dx$$

En utilisant le changement $x = -t$, montrer que :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\left(x^4+x^2+1\right)^2 e^x+1}{e^x+1}dx$$

puis en déduire la valeur de I.

EXERCICE 83

1) a) Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}^*\right) 1-t \le \frac{1}{1+t} \le 1$

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$$

2) En déduire alors un encadrement de l'intégrale $I = \int_{0}^{1} \ln\left(1+x^2\right)dx$ à 10^{-1} près.

EXERCICE 84

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ une bijection et g sa bijection réciproque. On suppose que f et g sont continues sur $\mathbb{R}^*$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\int_{0}^{x} f(t)dt + \int_{0}^{f(x)} g(t)dt = xf(x)$$

2) En déduire la valeur de : $F(x) = \int_{0}^{x} \operatorname{Arc}\tan t\,dt$

EXERCICE 85

(Les questions suivantes sont indépendantes)

1) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale suivante : $I = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

2) Calculer l'intégrale suivante :

$J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx$ (on pourra poser : $t = \tan\frac{x}{2}$)

3) Calculer la limite suivante : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{\frac{k}{n}}$

4) Calculer l'intégrale : $K = \int_{0}^{\pi} \sin^2 x.\cos^4 x dx$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 85

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

1) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 x^{2n}\,dx$

2) Montrer que : $S_n = \int_0^1 \dfrac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ S_n - \dfrac{\pi}{4} = (-1)^n \int_0^1 \dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$

puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EXERCICE 87

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $I_n = \dfrac{1}{n!.2^{n+1}} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt$

1) Calculer I_1.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!.2^{n+1}}$

3) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \sqrt{e} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!.2^k} + I_n$

4) a)- Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 \le I_n \le \frac{A}{2^n.n!}$$

b)- En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!.2^k}$

EXERCICE 88

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = n \int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x^n}\,dx$$

1) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $(\forall n \ge 2)\ u_n = \dfrac{n}{n-1}\left(\sin 1 + \int_1^{\pi} \dfrac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx\right)$

2) a)- Montrer que : $(\forall n \ge 2)\ \left|\int_1^{\pi} \dfrac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx\right| \le \int_1^{\pi} \dfrac{dx}{x^{n-1}}$

b)- En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_1^{\pi} \dfrac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx\right) = 0$

c)- Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sin 1$

EXERCICE 89

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.

1) Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,dx \ge 0$$

2) En déduire que :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \times \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

3) Montrer les inégalités suivantes :

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}\,dx \le \sqrt{\dfrac{\pi+2}{4\pi}}$

b) $\left(\int_0^1 e^{x^2}\,dx\right).\left(\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\right) \ge 1$

4) Soit h une fonction continue sur $[0;1]$ telle que :

$$(\forall x \in [0;1])\ 0 < f(x) < \ln 2$$

On pose : $A = \int_0^1 e^{f(x)}\,dx$ et $B = \int_0^1 e^{-f(x)}\,dx$

Montrer que : $1 \le AB < 2$ et $0 \le \dfrac{A}{B} < 1$

EXERCICE 90

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et vérifiant :

$\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. En utilisant la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = e^{-x} \int_0^x f(t)\,dt$$

Montrer que : $(\exists c \in]0;1[)\ \int_0^c f(t)\,dt = f(c)$

EXERCICE 91

Soit f une fonction non constante et dérivable sur $[0;1]$ telle que $f(0) = 0$. On considère la fonction g définie sur $[0;1]$ par : $g(x) = (1-x)\int_0^x f(t)\,dt$

1) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que : $g'(\alpha) = 0$.

2) En appliquant le théorème de Rolle à la fonction h définie sur $[0;\alpha]$ par :

$$h(x) = -\int_0^x f(x)dx + (1-x)f(x)$$

Montrer que : $(\exists x_0 \in]0;1[)\ f'(x_0) > 2f(x_0)$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 92

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n=\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}dx$$

1) Vérifier que : $(\forall x\in[0;1])\ \ e^{-\frac{1}{n}}\le e^{-\frac{x^2}{n}}\le 1$

2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un réel $c_n\in[0,1]$ tel que : $c_n^2=-n\ln u_n$

EXERCICE 93

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\ \text{ si }\ x\neq 0\quad\text{et}\quad f(0)=1$$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Montrer que la fonction f est paire.

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\le\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\le x$$

b) Montrer que f est continue et dérivable à droite en zéro.

4) a) Vérifier que : $(\forall t\in[1,+\infty[)\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\le\frac{1}{\sqrt{t}}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5) Étudier les variations de f puis tracer sa courbe $\mathcal{C}_f$.

EXERCICE 94

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\ge1}$ définie par :

$$u_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\ge1}$ est positive et décroissante.

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ 2u_{n+1}+(n+1)u_n=e^2$

3) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \frac{e^2}{n+3}\le u_n\le\frac{e^2}{n+1}$

puis en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\ge1}$.

EXERCICE 95

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt$

1) Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0;2]$ par : $\varphi(t)=\frac{2t+3}{t+2}$

En déduire que : $(\forall t\in[0;2])\ \frac{3}{2}\le\varphi(t)\le\frac{7}{4}$

2) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)\le u_n\le\frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$$

b) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge alors sa limite ℓ vérifie : $3\le\ell\le\frac{7}{2}$

3) a) Vérifier que : $(\forall t\in[0,2])\ \frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$

et en déduire la valeur de : $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}dt$

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ I\le u_n\le e^{\frac{2}{n}}I$

c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en précisant sa limite.

EXERCICE 96

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\int_0^1\frac{e^{-t^2}}{1+t+n}dt$

1) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) puis montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\ge0$

2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

3) On considère les fonctions f et g définies sur $[0;1]$ par : $f(x)=e^{-x}+x-1$ et $g(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$

a) Étudier les variations de la fonction f.

b) En déduire le sens de variation de g sur $[0,1]$.

c) Montrer que :

$$(\forall x\in[0;1])\ 1-x\le e^{-x}\le1-x+\frac{x^2}{2}$$

d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour $t\in[0;1]$.

Scanné avec CamScanner

e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2}{3(n+2)} \le u_n \le \frac{23}{30(n+1)}$$

f) Déterminer un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel on a :

$$(\forall n \ge n_0) \quad u_n \le 10^{-2}$$

EXERCICE 97

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\ge1}$ définie par :

$$u_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^n}\,dx$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\ge1}$ est croissante.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in [0;1]$:

$$1-x \le \sqrt{1-x} \le 1-\frac{x}{2}$$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \frac{n}{n+1} \le u_n \le \frac{2n+1}{2n+2}$

puis préciser la limite de $(u_n)_{n\ge1}$.

EXERCICE 98

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$

1) a) Calculer la dérivée de la fonction u définie par :

$$u(t) = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$$

b) Calculer les intégrales I_0 et I_1

2) Déterminer la monotonie de la suite (I_n).

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_{n+2} + I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t^2}\,dt$

4) En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que : $(n+2)I_{n+2} + (n+1)I_n = \sqrt{2}$

5) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(2n+3)I_{n+2} \le \sqrt{2} \le (2n+3)I_n$$

6) Montrer que la suite (nI_n) converge en précisant sa limite.

EXERCICE 99

On considère la suite numérique (I_n) définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) En utilisant le changement $t = \sqrt{1-x}$, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_n = 2\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{2k+1}$

3) a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (2n+5)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$$

b) En déduire par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ I_n = \frac{2^{2n+2}(n!)^2(n+1)}{(2n+3)!}$$

4) a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in [0;1]$: $\frac{2}{x^2-2} = a + \frac{b}{x-\sqrt{2}} + \frac{c}{x+\sqrt{2}}$

b) En déduire la valeur de : $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-2}\,dx$

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n = \int_0^1 x^n \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}\,dx \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k$$

a) En utilisant le changement $t = \sqrt{1-x}$, calculer J_0.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le J_n \le \frac{1}{n+1}$

et en déduire $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ S_n = J_0 - (-1)^{n+1}J_{n+1}$

d) En déduire la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 100

On pose : $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$

I) On considère la fonction F définie sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ par :

$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$, et la fonction G définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par : $G(x) = \int_0^x \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt$

1) Montrer que pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$:

$$G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$$

Scanné avec CamScanner

2) En déduire que : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt$

II) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin(\pi t)\,dt$

1) Calculer u_0 et u_1, et montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)u_{n-2}\right]$$

2) Montrer que : $I = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + R_n$

avec : $R_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t}\,dt$

3) Montrer que pour tout $t \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$: $\frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \leq 2t^n$

puis en déduire que : $(\forall n \geq 2)\ |R_n| \leq \frac{1}{(n+1)2^n}$

4) Montrer que : $I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

5) Déterminer une valeur approchée de I à 10^{-2} près.

EXERCICE 101

On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x) = \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+t^2}}$

En utilisant le théorème de la moyenne, calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} F(x)$

EXERCICE 102

1) En utilisant une intégration par changement de variable, calculer l'intégrale : (poser $t = \operatorname{Arc}\tan u$)

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{x} \frac{2dt}{\sin(2t)(\tan t - 1)} \text{ où } x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[$$

2) Soit $x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[$. On considère la fonction v définie sur $\left[\frac{\pi}{3};x\right]$ par : $\left(\forall t \in \left[\frac{\pi}{3};x\right]\right)\ v(t) = \frac{1}{1-\tan t}$

a) Calculer $v'(t)$ pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{3};x\right]$.

b) Calculer l'intégrale :

$$J = \int_{\frac{\pi}{3}}^{x} \frac{1+\tan^2 t}{(1-\tan t)^2} \ln(\tan t)\,dt$$

EXERCICE 103

Le but de cet exercice est de montrer l'irrationalité du nombre π (c'est-à-dire : $\pi \notin \mathbb{Q}$)

1) Soit (u_n) une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire (c'est-dire : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n = u_N$)

2) Pour $(a;b;n) \in (\mathbb{N}^*)^3$, on pose :

$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$ et $I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin x\,dx$.

a) Montrer que, pour tout $(a;b;n) \in (\mathbb{N}^*)^3$, P_n et ses dérivées successives prennent en 0 et $\frac{a}{b}$ des valeurs entières (valeurs dans $\mathbb{Z}$).

b) Montrer que, pour $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

3) On suppose que : $\left(\exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2\right)\ \pi = \frac{a}{b}$.

a) Avec les notations de 2) a), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n \in \mathbb{Z}$

b) En utilisant le résultat de la question 1), déduire une contradiction.

EXERCICE 104

Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$ telles que :

i. $(\forall t \in [a;b])\ g(t) \geq 0$.

ii. $(\exists M \in \mathbb{R}^*)\ (\forall t \in [a;b])\ |f(t)| \leq M$.

1) Montrer que : $\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq M\int_a^b g(t)dt$

2) Montrer que :

$(\exists c \in [a;b])\ \int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$

Scanned with CamScanner

Scanné avec CamScanner

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \left(x^2-3\right)^2 dx \quad ; \quad I_2 = \int_0^4 \left|x^2-2x-3\right| dx$$

$$I_3 = \int_4^9 \left(x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad ; \quad I_4 = \int_{-1}^2 \frac{2x}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$I_5 = \int_{-2}^0 (x+1)\sqrt{x^2+2x+3} \quad ; \quad I_6 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan^3 x}$$

$$I_7 = \int_0^{\ln\sqrt{3}} e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\, dx \quad ; \quad I_8 = \int_0^1 \left(2^x + 3^{2x}\right) dx$$

2) En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad ; \quad J_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2} dx$$

$$J_3 = \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dx \quad ; \quad J_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$J_5 = \int_1^2 \frac{x \ln x}{\left(x^2+1\right)^2} dx \quad ; \quad J_6 = \int_0^{\ln 3} \frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^2} dx$$

$$J_7 = \int_1^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx \quad ; \quad J_8 = \int_0^{\pi} x \sin\frac{x}{4} dx$$

3) Soit f une fonction numérique continue sur $[0;1]$.

On note $M = \underset{x\in[0,1]}{Max}\left|f(x)\right|$. Montrer que :

$$\left|\int_0^1 \left(f(x) + xf(1-x)\right) dx\right| \le \frac{3}{2} M$$

4) Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et de dérivée continue. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$

5) Soit $g : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $0 \le g(x) \le \int_0^x g(t) dt$

Montrer que g est identiquement nulle.

DEVOIR 2

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^8 \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad ; \quad I_2 = \int_1^2 \frac{x^3-4x^2+7}{x^2} dx$$

$$I_3 = \int_{-3}^3 \left(1+\left|x+2\right|+\left|x-2\right|\right)^3 dx \; ; \; I_4 = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}} dx$$

$$I_5 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}} dx \quad ; \quad I_6 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}}{\left(1+e^{3x}\right)^2} dx$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)\cos(5x) dx \quad ; \quad I_8 = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$$

2) En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x} dx \quad ; \quad J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos^2 x dx$$

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos x\, dx \quad ; \quad J_4 = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$J_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(2x) dx \quad ; \quad J_6 = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

$$J_7 = \int_0^{\pi} 2x\sin x\cos^2\frac{x}{2} dx \quad ; \quad J_8 = \int_1^e x(\ln x)^2 dx$$

3) On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\right) dt$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt$$

a) Ecrire l'intégrale I en fonction de J et K.

b) Montrer que : $J = K$

c) Calculer l'intégrale I.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2x)^n}{(1-x)^n} dx$

a) Calculer I_1.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) I_{n+1} = \frac{-1}{2^{n+1}(n+2)} + \frac{n+1}{n+2} I_n$

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

DEVOIR 3

Première partie :

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x}$ et en déduire que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}=0$$

2) Pour tout réel x, on pose : $I(x)=e^x\int_0^x\frac{t^2}{2}e^{-t}dt$

a) Sans calculer $I(x)$, montrer que :

- $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ 0\le I(x)\le e^x\dfrac{x^3}{6}$
- $(\forall x\in\mathbb{R}^-)\ |I(x)|\le\dfrac{|x|^3}{6}$

b) En utilisant deux fois l'intégration par partie, montrer que : $I(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$

c) En utilisant ce qui précède, montrer que

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ et en déduire que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$$

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=e^x\ln(1+x)-x$$

Étudier les variations de la fonction f et en déduire que $f(x)\ge 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

(On admet que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ e^x\ge 1+x$)

Deuxième partie :

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases}F(0)=0\\ F(x)=\int_{1+x}^{e^x}\dfrac{dt}{\ln t}\ ,\ x>0\end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{e^x-1-x}{x}\le F(x)\le\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}$$

2) Montrer que F est continue et dérivable à droite en zéro.

3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $F'(x)=\dfrac{f(x)}{x\ln(1+x)}$

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction F.

5) Étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_F$ de F au voisinage de $+\infty$.

DEVOIR 4

Première Partie :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^n\,dx$

1) Montrer que la suite (I_n) est positive et croissante.

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$

3) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \dfrac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$

et en déduire la limite de la suite (I_n).

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose : $\varphi(n)=I_{n+4}-I_n$

Calculer $\varphi(n)$ en fonction de n.

5) a) Calculer I_0 et I_2 .

b) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, calculer la somme $\sum_{p=0}^{k-1}\varphi(4p+2)$ en fonction de I_2 et I_{4k+2}.

c) En déduire : $\lim\limits_{k\to+\infty}\sum_{q=0}^{2k}\dfrac{(-1)^q}{2q+1}$

6) a) Calculer I_1 et I_3 .

b) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, calculer la somme $\sum_{p=0}^{k-1}\varphi(4p+1)$ en fonction de I_1 et I_{4k+1}.

c) En déduire : $\lim\limits_{k\to+\infty}\sum_{q=1}^{2k}\dfrac{(-1)^{q+1}}{q}$

Deuxième Partie :

Soit $\alpha\in\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

Scanned with CamScanner

$K_n(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan(x))^n\,dx$ et $S_n(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}K_k(\alpha)$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|S_n(\alpha)-\int_0^{\alpha}\frac{\tan x}{1-\tan x}dx\right|\le\frac{\alpha(\tan\alpha)^{n+1}}{1-\alpha}$$

2) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\tan x}{1-\tan x}dx$.

On pose : $A(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\tan x}{1-\tan x}dx$

Troisième Partie :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=\sum_{k=1}^{n}I_k$

1) Soit $M\in\mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que pour tout $u\in\mathbb{R}-\{1\}$:

$$\frac{u}{(1-u)(1+u^2)}=\frac{1}{2(1-u)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u-1}{1+u^2}$$

b) En utilisant le changement de variable $u=\tan x$ calculer $A(\alpha)$ en fonction de $\tan\alpha$ et α.

c) Calculer la limite $\lim\limits_{\alpha\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^-}A(\alpha)$ et en déduire que :

$$\left(\exists\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right)\quad A(\alpha)>M+1$$

d) Montrer que :

$$(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\ge n_0),\ \left|S_n(\beta)-A(\beta)\right|\le 1$$

2) Montrer que :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\forall\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right),\ S_n\ge S_n(\alpha)$$

3) Déduire de ce qui précède que : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$

DEVOIR 5

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{R}^+$, on pose :

$$I_n(a)=\int_0^a e^{-nx}\ln(n+x)dx$$

1) Etablir l'encadrement :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ln n\le\ln(n+x)\le\ln n+\frac{x}{n}$$

2) Trouver alors un encadrement de $I_n(a)$.

3) Montrer que la fonction $a\mapsto I_n(a)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

DEVOIR 6

Première Partie :

1) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x)=x-\ln x$$

Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ h(x)\ge 1$

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(0)=0\quad\text{et}\quad f(x)=\frac{1}{x-\ln x}\ \text{ si }\ x>0$$

a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

b) La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Deuxième Partie :

Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$F(x)=\int_x^{2x}f(t)dt$$

1) a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

b) Montrer que $F'_d(0)=0$ et que :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ F'(x)=\frac{\ln 2-\ln x}{h(2x)h(x)}$$

2) a) Vérifier que : $\ln 2=\int_x^{2x}\frac{dt}{t}$

b) Montrer que pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$0\le F(x)-\ln 2\le\frac{\ln(2x)}{x-\ln x}$$

c) En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

3) a) Montrer que : $F\left(\frac{1}{2}\right)\le\ln 2$

b) Montrer que : $\left(\exists\alpha\in\left[\frac{1}{2};1\right]\right);\ F(\alpha)=\ln 2$

4) a) Dresser le tableau de variations de F.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_F$ de F dans un repère orthonormé (On admet que : $F(1)\approx 0,9$ et $F(2)\approx 1,1$)

5) On considère la fonction G définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$G(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{t-\ln t}dt$$

Scanné avec CamScanner

Montrer que : $(\forall x \geq 1)\ G(x) \geq \frac{1}{2}\ln^2(x)$

Puis en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$.

Troisième Partie :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \int_n^{n^2} \frac{t}{t - \ln t}\,dt$$

1) a) Montrer que : $(\forall t > 0)\ \frac{t}{t - \ln t} \leq t$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et que sa limite ℓ vérifie : $\ell \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

2) On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$v_n = \int_1^{n^2} \frac{t}{t - \ln t}\,dt$$

a) Calculer $\int_1^{n^2} \left(1 - \frac{\ln t}{t}\right) dt$ puis montrer que :

$$(\forall n \geq 5)\quad v_n \geq n$$

b) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$.

DEVOIR

Première Partie :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\operatorname{Arc}\tan x}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

1) Montrer que f est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{Arc}\tan x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

b) En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

3) En utilisant une intégration par partie, montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = -\frac{1}{2}x^2 f'(x)$

Puis en déduire les variations de f.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

1) Montrer que F est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) \leq F(x) \leq 1$

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ F'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - F(x))$

4) a) Montrer que la fonction F est dérivable en 0 puis calculer $F'(0)$.

b) Donner les variations de la fonction F.

c) Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$0 < \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln x}{x}$$

Puis en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Troisième Partie :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a) Vérifier que : $(\forall t \in \mathbb{R}^*)\ 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ |F'(x)| \leq \frac{1}{x}(1 - f(x))$

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$

Puis en déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ |F'(x)| \leq \frac{1}{4}$

2) Montrer que l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1]$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Scanné avec CamScanner

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

I) On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

1) Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

2) Étudier les variations de la fonction f.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) a) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

II) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n)^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n}$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x \geq x+1$

2) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$

3)a) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ v_n = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$

b) Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

III) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt & \text{si } x > 0 \\ F(0) = 2\ln 2 \end{cases}$$

1) a) Vérifier que : $\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t}\,dt = 2\ln 2$

b) En utilisant le résultat de la question II)1), montrer que : $(\forall t > 0)\ -t \leq e^{-t} - 1 \leq 0$

2) a) Montrer que : $(\forall x > 0)\ -3x^2 \leq F(x) - 2\ln 2 \leq 0$

b) En déduire que la fonction F est continue et dérivable à droite en zéro.

3) a) Montrer que : $(\forall t \geq 1)\ f(t) \leq e^{-t}$

b) En déduire la limite suivante : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

4) a) Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis calculer $F'(x)$.

b) Dresser le tableau des variations de F.

c) Construire $\mathscr{C}_F$, la courbe représentative de F, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5) Soit G la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$G(x) = \int_x^{4x} e^{-t}\ln(t)\,dt$$

a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x}\ln(4x) + e^{-x}\ln(x)$$

b) Calculer la limite : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (e^{-x} - e^{-4x})\ln x$

c) En déduire la limite : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} G(x)$

Examen National 2004 (Session Normale)

PROBLÈME 2

I) On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x\ln x}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1)a) Montrer que la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ et à droite de 0.

On admet dans la suite que f est continue sur $[0;+\infty[$.

b) Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0;+\infty[$.

2)a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

b) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

c) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]0;1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$

d) En déduire que : $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$

Scanné avec CamScanner

On considère la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

Et soit $\mathscr{C}_F$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

II)

1) a) Vérifier que : $(\forall t\in[1;+\infty[)\ \frac{1}{2}\le\frac{t^2}{1+t^2}\le 1$

b) En déduire que pour tout $x\ge 1$:

$$F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\le F(x)\le F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2$$

(Remarquer que :

$$F(x)=\int_0^1 f(t)\,dt-\int_1^x\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t}\,dt\ )$$

c) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2)a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

b) Étudier les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}_+^*$.

III)

1)a) Montrer que : $(\forall t\in\mathbb{R}_+^*)\ -t\ln t\le\frac{1}{e}$

b) Montrer que : $(\forall t\in\mathbb{R}^*)\ f(t)\le\frac{1}{e}$

c) En déduire que : $(\forall x>0)\ F(x)<x$

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0\in]0,1[\quad\text{et}\quad(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}=F(u_n)$$

2)a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\in]0;1[$

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Examen National 2014 (Session Normale)

PROBLÈME 3

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\ \text{si}\ x>0\ ,\ \text{et}\ g(0)=0$$

1) Montrer que g est continue sur $[0;+\infty[$.

2) Pour tout $x\in]0;+\infty[$ on pose : $L(x)=\int_x^{2x}g(t)\,dt$

a) Calculer $L(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b) Montrer que L est continue sur $]0;+\infty[$.

c) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+}L(x)$ puis en déduire $L(0)$.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $s_n=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1}g\left(\frac{p}{n}\right)$

Montrer que la suite $(s_n)_{n\ge1}$ est convergente puis préciser sa limite.

Examen National 2014 (Session Normale)

PROBLÈME 4

Première Partie :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(0)=0\quad\text{et}\quad f(x)=x\left(1+\ln^2 x\right)\ \text{si}\ x>0$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ puis en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1}.

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$.

c) Construire la courbe $\mathscr{C}$. (On prend : $e^{-1}\approx0,4$)

Deuxième Partie :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0=e^{-1}\quad\text{et}\quad u_{n+1}=f(u_n)\ \text{pour tout}\ n\in\mathbb{N}$$

Scanné avec CamScanner

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ e^{-1} \leq u_n < 1$

2) Montrer que (u_n) est strictement croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

3) On pose : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

a) Montrer que $e^{-1} \leq \ell < 1$

b) Déterminer la valeur de ℓ.

Troisième Partie :

Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1) a) Montrer que la fonction H définie par :

$$H(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

est une primitive de $h : x \mapsto x \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_1^x t^2 \ln(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int_1^x t \ln(t)dt$$

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2}\ln^2 x$$

2) a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ puis en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

Examen National 2015 (Session Normale)

PROBLÈME 5

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$$

1) Montrer que la fonction g est paire.

2) Montrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

3) a) En utilisant la formule d'intégration par parties, vérifier que pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

b) Montrer que pour tout $x > 0$: $|g(x)| \leq \frac{2}{x}$

puis en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

4) a) En remarquant que $1 - \cos t \leq t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que : $0 \leq \int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{t} dt \leq 2x$

b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.

Examen National 2015 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 6

On considère la fonction F définie sur $[0;1]$ par :

$$F(0) = 1 \text{ et } F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \text{ si } x \in]0;1]$$

1) Soit $x \in [0;1]$. Montrer que pour tout $t \in [0;x]$:

$$\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$$

2) Soit $x \in]0;1]$.

a) Montrer que : $F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$

b) Montrer que : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$

puis en déduire que la fonction F est continue à droite en zéro.

3) En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que pour tout $x \in [0;1]$:

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

4) Soit $x \in]0;1]$:

a) Montrer que : $F'(x) = -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

Scanné avec CamScanner

b) En utilisant le résultat de la question 1), montrer que : $-\frac{4}{3} \le F'(x) \le -\frac{4}{3(1+2x)^2}$

c) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0;x]$, montrer que :

$$-\frac{4}{3} \le \frac{F(x)-F(0)}{x} \le \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

d) En déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant la valeur de $F'_d(0)$.

Examen National 2012 (Session Normale)

PROBLÈME 1

Première Partie :

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par :

$$f(1)=0 \text{ et } f(x)=\frac{1}{1-\ln(1-x)} \text{ si } 0 \le x < 1$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\,cm$

1) Montrer que f est continue à gauche en 1 .

2) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1 .

3) Étudier les variations de la fonction f sur I puis donner son tableau de variations.

4) a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion dont l'abscisse est $\frac{e-1}{e}$.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}$ en indiquant sa demi-tangente au point d'abscisse 0.

5) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.

6) a) Montrer que f est une bijection de I vers I .

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

Deuxième Partie :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

puis déterminer la limite de la suite (I_n).

Troisième Partie :

Pour tout réel x de l'intervalle $J=[0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$F_0(x)=\int_0^x f(t)\,dt \quad , \quad F_n(x)=\int_0^x t^n f(t)\,dt$$

$$F(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,dt \quad , \quad S_n(x)=\sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in J$:

$$F(x)-S_n(x)=\int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\,dt$$

2) a) Montrer que la fonction u définie sur J par :

$$u(x)=(1-x)(1-\ln(1-x))$$

est strictement décroissante sur J .

b) En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0;x]$ pour tout $x \in J$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in J$:

$$0 \le F(x)-S_n(x) \le \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

b) En déduire que pour tout $x \in J$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x)=F(x)$$

4) a) Déterminer $F(x)$ pour tout $x \in J$.

b) Déterminer la limite : $\lim_{x\to 1^-} F(x)$

Examen National 2010 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 2

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(0)=\ln 2 \text{ et } g(x)=\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \text{ si } x>0$$

1) a) Montrer que :

$$(\forall x>0)\,(\forall t \in [x;2x])\; e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x}$$

b) Montrer que pour tout $x>0$:

Scanné avec CamScanner

$$e^{-2x}\ln 2 \le g(x) \le e^{-x}\ln 2$$

c) En déduire que g est continue à droite en 0.

2) Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3) a) Montrer que : $(\forall t > 0)\ -1 \le \dfrac{e^{-t}-1}{t} \le -e^{-t}$

Puis calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).

b) Montrer que pour tout $x > 0$:

$$-1 \le \frac{g(x)-\ln 2}{x} \le \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$$

c) En déduire que g est dérivable à droite en 0.

Examen National 2015 (Session Normale)

PROBLÈME 9

Première Partie :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = 1\,cm$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique à chacun des résultats obtenus.

2) Calculer $f'(x)$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction g_n définie sur $]0;1[$ par : $g_n(x) = f(x) - x^n$

a) Montrer que g_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1[$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $\alpha_n \in]0;1[$ tel que : $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ g_n(\alpha_{n+1}) < 0$

d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\ge 1}$ est strictement croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

4) On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

a) Vérifier que : $0 < \alpha_1 \le \ell \le 1$

b) Vérifier que $h(\alpha_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ où :

$$h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$$

c) Montrer que : $\ell = 1$

d) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = 0$

Deuxième Partie :

1) a) Étudier le signe de l'intégrale $\int_x^1 f(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b) En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_x^1 f(t)\,dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\ln x$$

c) En déduire (en cm^2) l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations :

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = e^2 \quad \text{et} \quad y = 0$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

a) Montrer que pour tout $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n \ge 2$ et $1 \le k \le n-1$:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \le \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\,dt \le u_n \le \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\,dt$$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Examen National 2014 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 10

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2}\,dt$$

Scanné avec CamScanner

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $k(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,dt$

a) Vérifier que pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$g(x) = -k\left(\sqrt{x}\right)$$

b) Montrer que g est continue $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$.

c) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis en déduire que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ \dfrac{g(x)-g(0)}{x} < -\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$

b) En déduire que g n'est pas dérivable à droite en 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

Examen National 2014 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 11

1) On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2\ln^2 x}} \quad \text{si } x > 0$$

a) Montrer que f est continue à droite en 0 puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 (on pourra utiliser $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2 x = 0$)

c) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x > 0)\ \ f'(x) = \frac{-x\ln(x)(1+\ln x)}{\left(1+x^2\ln^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

d) Dresser le tableau de variations de f.

2) Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Et soit $\mathscr{C}_F$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Déterminer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x\ln x} \text{ sur l'intervalle } [e;+\infty[.$$

b) Montrer que pour tout réel $t \geq e$:

$$t\ln t \leq \sqrt{1+t^2\ln^2 t} \leq \sqrt{2}\,t\ln t$$

c) Montrer que pour tout réel $x \geq e$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2\ln^2 t}} \leq \ln(\ln x)$$

d) En déduire que :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

e) Montrer que $\mathscr{C}_F$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.

f) Tracer $\mathscr{C}_F$ (prendre : $F(1) \approx 0{,}5$, $F\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0{,}4$)

3) Pour tout $x \in [0;+\infty[$, on pose : $\varphi(x) = x - F(x)$

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ puis étudier les variations de la fonction φ.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\varphi(x) = n$ admet une solution unique α_n dans $[0;+\infty[$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n \geq n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$.

Examen National 2013 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 12

On considère la fonction h définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$h(1) = 1 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x-1}{x\ln x} \text{ pour tout } x > 1$$

Scanné avec CamScanner

Première Partie :

1) a) Montrer que h est continue à droite en 1.

b) Montrer que pour tout $x > 1$: $\ln x < x - 1$

puis en déduire que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

2) a) Calculer $\lim_{+\infty} h(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction h.

b) En déduire que : $(\forall x \geq 1),\ 0 \leq h(x) \leq 1$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$g(1) = \ln 2 \text{ et } (\forall x > 1)\ g(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}\ln t}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Vérifier que : $(\forall x > 1)\ \int_1^x \frac{dt}{t\ln t} = \ln 2$

b) Vérifier que pour tout réel $x > 1$:

$$g(x) - \ln 2 = \int_1^x \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,dt$$

c) Montrer que pour tout réel $x > 1$:

$$g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$$

2) a) Montrer que pour tout réel $x > 1$:

$$\left(x-\sqrt{x}\right)h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq \left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$$

b) En déduire que g est dérivable à droite en 1.

c) Montrer que :

$$\lim_{+\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$$

3) a) Montrer que g est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que pour tout $x > 1$: $g'(x) = \frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$

b) En déduire : $(\forall x > 1)\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$

Puis dresser le tableau de variations de g.

c) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

Troisième Partie :

1) Soit k la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$k(x) = g(x) - x + 1$$

1) Montrer que k réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur l'intervalle $]-\infty;\ln 2]$.

2) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]1;+\infty[$ tel que : $1 + g(\alpha) = \alpha$

II) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$1 \leq u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = 1 + g(u_n)$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq u_n < \alpha$

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et que $\lim_{+\infty} u_n = \alpha$.

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

c) En déduire encore une fois que : $\lim_{+\infty} u_n = \alpha$

Examen National 2013 (Session Normale)

Problème 2

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

1) Calculer $F(1)$.

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $F'(x)$.

En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ F(x) = 0$

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$F(x) = \left(\operatorname{Arc\,tan} x + \operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x}\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arc\,tan} t}{t}\,dt$$

4) Montrer que : $(\forall x > 0)\ \operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tan} x$

5) En déduire que : $(\forall x > 0)\ \ln x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arc\,tan} t}{t}\,dt$

Examen National 2012 (Session De Rattrapage)

Scanné avec CamScanner

PROBLÈME 14

On considère la fonction F définie sur $I=]0;+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$$

1) a) Étudier le signe de $F(x)$ pour tout $x\in I$.

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x\in I$.

c) Montrer que la fonction F est strictement croissante sur I.

2) a) En utilisant une intégration par changement de variable et en posant $u=\sqrt{e^t-1}$, montrer que pour tout $x\in I$:

$$\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=2\Lambda\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2}$$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

3) a) Montrer que la fonction F réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer la bijection réciproque F^{-1} de F.

Examen National 2016 (Session Normale)

PROBLÈME 15

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(1+x)e^{-2x}$$

Et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Première Partie :

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$.

2) Étudier les variations de la fonction f.

3) a) Étudier la concavité de la courbe $\mathcal{C}$.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Deuxième Partie :

Soit n un entier naturel non nul.

On note A_n l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=n$.

1) Calculer A_n en fonction de n.

2) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$.

Troisième Partie :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n=n\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n=\int_0^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}dt \quad \text{(on pourra poser } t=nx\text{)}$$

2) a) Montrer que : $\left(\forall u\in[1;2]\right),\ 2-u\le\frac{1}{u}\le 1$

b) En déduire que pour tout $x\in[0;n]$:

$$x-\frac{x^2}{2n}\le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\le x$$

3) a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ u_n\le\int_0^n e^{-x}dx$

b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ e^{-\frac{1}{2\sqrt{n}}}\int_0^{\sqrt{n}}e^{-x}dx\le u_n$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est convergente et déterminer sa limite.

4) Soit a un réel de l'intervalle $]0;1[$.

a) Montrer que :

$$\int_a^1 n\left(f(x)\right)^n dx\le n(1-a)\left(f(a)\right)^n$$

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^1 n\left(f(x)\right)^n dx=0$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^a n\left(f(x)\right)^n dx$.

Examen National 2005 (Session De Rattrapage)

Scanné avec CamScanner

HISTOIRE

La notion d'équation différentielle apparaît vers 1690 avec Huygens et Leibniz ; comme souvent en mathématiques, la résolution de certains cas particuliers notamment par Newton en 1670, avait précédé l'étude du problème général. Ce sont des problèmes d'origine mécanique et géométrique qui sont à la base de l'introduction des équations différentielles. La théorie des équations différentielles ne se structure qu'au 19ième siècle avec Cauchy. Au 20ième siècle, avec Klein et Poincaré, les progrès sont considérables. La loi d'évolution de nombreux phénomènes naturels est souvent solution d'une équation différentielle. C'est le cas, par exemple, lorsque deux quantités x et y sont telles que dy/dx est proportionnel à y. Ce type d'équations différentielles du premier ordre apparaît en biologie (prolifération de bactéries) et dans de nombreuses réactions chimiques. La physique utilise la solution d'équations différentielles du premier ordre et du second ordre dans les problèmes d'oscillations non amorties ou entretenues, des problèmes de décharge d'un condensateur ou de résistance de matériaux.

Source : https://fr.wikipedia.org

HENRI POINCARE

(1854 – 1912)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Résoudre de l'équation $y' = ay + b$;
- Résoudre de l'équation $y'' + ay' + by = 0$;
- Résolution d'équations différentielles se ramenant à la résolution de l'une des deux équations précédentes.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires..... 302
- Connaissances Fondamentales
  - Équations différentielles de 1er ordre..... 304
  - Équations différentielles de 2nd ordre 306
- Techniques Et Astuces 308
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application..... 311
  - Exercices de perfectionnement..... 312
  - Problèmes de synthèse..... 315

Scanné avec CamScanner

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

1 RAPPELS

1. a) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5e^{-3x}$

On pose : $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$

vérifier que : $y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad (E)$

b) Dans les deux cas suivants, la fonction g est-elle solution de l'équation (E) ?

1er cas : $g(x) = e^{-2x}$; 2nd cas : $g(x) = 4e^{-2x} - \frac{2}{5}e^{-3x}$

2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle : $y' = 3x^2$

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle : $y'' = 2x - 1$

4. Vérifier que la fonction $h : x \mapsto e^{5x} - \frac{2}{5}$ est une solution de l'équation différentielle : $y' = 5y + 2$

5. Vérifier que la fonction $\varphi : x \mapsto e^{-x}(\cos(2x) + \sin(2x))$ est une solution de l'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$.

6. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

$y'' + 9y = 0$; $2y'' + 3y = 0$; $y'' + 6y' = 0$

2 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = ay + b$ où $a \neq 0$

On considère l'équation différentielle : $(E_1) : y' = 2y$

1. Montrer que les fonctions définies par $x \mapsto \lambda e^{2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, sont des solutions de l'équation différentielle (E_1).

2. Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est solution de l'équation (E_1).

On pose : $g(x) = f(x).e^{-2x}$

a) Montrer que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire qu'il existe un réel λ tel que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = \lambda e^{2x}$

c) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_1) qui vérifient la condition initiale : $f(\ln 2) = 4$

3. On considère l'équation différentielle : $(E_2) : y' = 2y + 3$

a) Vérifier que la fonction $y_0 : x \mapsto -\frac{3}{2}$ est une solution de l'équation (E_2).

b) Montrer l'équivalence suivante : $[y$ est solution de $(E_2)] \Leftrightarrow [(y - y_0)$ est solution de $(E_1)]$.

c) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_2).

3 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' + by = 0$

A) On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' - 4y = 0$

1. Déterminer les valeurs du réel r pour que la fonction $x \mapsto e^{rx}$ soit solution de l'équation différentielle (E).

Scanné avec CamScanner

2. Montrer que les fonctions $x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}$, où $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$, sont des solutions de l'équation différentielle (E).

3. Soit f une solution de l'équation différentielle (E).

On pose : $g(x) = f(x)e^{-2x}$

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ g''(x) + 4g'(x) = 0$

b) En déduire qu'il existe $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ g(x) = \lambda + \mu e^{-4x}$$

c) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}$

d) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

B) On considère l'équation différentielle : $(F) : y'' + 4y = 0$

1. Montrer que les fonctions $x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$ où $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$, sont des solutions de l'équation (F).

2. Montrer que les fonctions $x \mapsto A\cos(2x+\theta)$ où $(A;\theta) \in \mathbb{R}^2$, sont des solutions de l'équation (F).

En général :

- Les solutions de l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = 0$ sont les fonctions :
  $x \mapsto \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x}$ où $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$
- Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions :
  $x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ où $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y'' + ay' + by = 0$

On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' + ay' + by = 0$ où $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ où $r \in \mathbb{C}$ est appelée l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E).

Dans tout ce qui suit, α et β sont des réels quelconques.

1. On considère l'équation différentielle : $(E_1) : y'' + 3y' - 4y = 0$

a) Déterminer les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E_1).

b) Montrer que toute fonction f_1 qui s'écrit sous la fonction $f_1 : x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ est une solution de (E_1).

2. On considère l'équation différentielle : $(E_2) : y'' + 2y' + y = 0$

a) Déterminer r_0 l'unique solution de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E_2).

b) Montrer que toute fonction f_2 qui s'écrit sous la fonction $f_2 : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$ est une solution de (E_2).

3. On considère l'équation différentielle : $(E_3) : y'' + y' + y = 0$

a) Déterminer les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E_3).

b) On pose : $p = \mathrm{Re}(r_1)$ et $q = \mathrm{Im}(r_1)$

Montrer que toute fonction f_3 qui s'écrit sous la fonction $f_3 : x \mapsto e^{px}\left(\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx)\right)$ est une solution de l'équation différentielle (E_3).

Scanné avec CamScanner

1 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

1.1. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = a\,y \ \ (a \in \mathbb{R}^*)$

Soit a un réel non nul. L'équation $y' = ay$ où l'inconnue est une fonction numérique y, dérivable sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$) est appelée équation différentielle du premier ordre.

Remarquons que la fonction $y_0 : x \mapsto e^{ax}$ est une solution particulière de cette équation. Le but de ce paragraphe est la détermination de toutes les fonctions y vérifiant la relation $y' = ay$.

y est appelé la solution générale de cette équation différentielle.

Signalons qu'au cours de cette leçon, on écrit par exemple $y = \lambda e^{ax}$ au lieu d'écrire $y(x) = \lambda e^{ax}$ ou $y : x \mapsto \lambda e^{ax}$.

Proposition 1

La solution générale de l'équation différentielle $y' = ay$ est : $y = \lambda e^{ax}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve

Soit y une solution de l'équation différentielle $(E) : y' = ay$ et posons $z = y.e^{-ax}$.

On a alors $z' = y'.e^{-ax} - aye^{-ax} = (y' - ay)e^{-ax}$. Puisque $y' = ay$ alors $z' = 0$. Il s'ensuit donc que la fonction z est constante sur $\mathbb{R}$. En posant $z = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ on obtient $y = \lambda.e^{ax}$.

On vérifie aisément que la fonction $x \mapsto \lambda e^{ax}$ est bien une solution de (E).

Remarque

Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une solution unique f de l'équation différentielle $y' = ay$ vérifiant la condition $f(x_0) = y_0$.

Exemples

1) La solution générale de l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 0$ est : $y = \lambda e^{-2x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Soit f la solution de l'équation (E) vérifiant la condition $f(0) = 3$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda e^{-2x}$. Donc : $f(0) = 3 \Leftrightarrow \lambda e^0 = 3 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 3e^{-2x}$

2) Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t.

La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que $y'(t) = ky(t)$, où k est un coefficient strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

Scanné avec CamScanner

Déterminons l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$:

La solution générale de l'équation $y' = ky$ est $y = \alpha e^{kt}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si on désigne par f la solution de $y' = ky$ vérifiant $y(0) = N$, on trouve $\alpha = N$, ce qui donne $f(t) = Ne^{kt}$.

Applications

1. Résoudre les équations différentielles suivantes : $y' = 5y$; $y' + \sqrt{2}y = 0$; $y' = (\ln 2)y$

2. Déterminer la solution de l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$ vérifiant $y(0) = -7$.

1.2. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = ay + b$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$

Soit a un réel non nul. Déterminons la solution générale de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

On remarque bien que $y_0 = -\frac{b}{a}$ est une solution de l'équation $y' = ay + b$ car $y_0' = 0$ et $ay_0 + b = 0$.

Soit y une solution de l'équation $y' = ay + b$. Puisque $y_0' = ay_0 + b$ alors $y' - y_0' = a(y - y_0)$. Donc $Y = y - y_0$ est une solution de l'équation $Y' = aY$, et d'après ce qui précède on tire : $Y = \lambda e^{ax}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Par conséquent : $y = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$. Réciproquement, Si $y = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$, alors y est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Proposition 2

La solution générale de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est : $y = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple

La solution générale de l'équation différentielle $y' = 3y + 2$ est : $y = \lambda e^{3x} - \frac{2}{3}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminons la solution f de l'équation $y' = 3y + 2$ qui vérifie la condition $f(-1) = \frac{1}{3}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda e^{3x} - \frac{2}{3}$. La condition $f(-1) = \frac{1}{3}$ donne $\lambda e^{-3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et donc $\lambda = e^3$.

Il s'ensuit donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = e^{3x+3} - \frac{2}{3}$

Applications

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$y' + 4y - 7 = 0$; $y' = -9y + 2$; $3y' + 5y = 8$; $y'' = -2y' + 3$

2. Déterminer la solution f de l'équation $y' - 6y = 3$ vérifiant la condition : $f\left(\frac{1}{6}\right) = 0$

3. Déterminer la solution g de l'équation $y' = \pi y + \sqrt{2}$ vérifiant la condition : $g(0) = -1$

Scanné avec CamScanner

2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

2.1. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y'' + a\,y' + by = 0$ $((a;b) \in \mathbb{R}^2)$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. L'équation $y'' + ay' + by = 0$ où l'inconnue est une fonction numérique y, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$) est appelée équation différentielle du second ordre.

Cas Particuliers :

- Cas où $a = b = 0$: Dans ce cas, l'équation différentielle ci-dessus devient sous la forme $y'' = 0$ et ceci est équivaut à : $y = \alpha x + \beta$ avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.
- Cas où $b = 0$: Dans ce cas, l'équation différentielle ci-dessus devient sous la forme $y'' + ay' = 0$ ou aussi $(y' + ay)' = 0$, et ceci est équivalent à : $(\exists \beta \in \mathbb{R})\ ;\ y' + ay = \beta$

  D'après la proposition 2 du paragraphe précédent, on obtient : $y = \alpha e^{-ax} + \dfrac{\beta}{a}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On admet les résultats cités dans la proposition suivante :

Proposition 3

Soit a et b deux réels quelconques. On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' + ay' + by = 0$

L'équation caractéristique de (E) est $r^2 + ar + b = 0$. Son discriminant est : $\Delta = a^2 - 4b$

1) Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, et la solution générale de (E) est donnée par : $y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

2) Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double r, et la solution générale de (E) est donnée par : $y = (\alpha x + \beta)e^{rx}$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

3) Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées. En posant $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$ avec $(p;q) \in \mathbb{R}^2$, la solution générale de (E) est donnée par :

$$y = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px} \quad \text{où} \quad (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

On considère l'équation différentielle : $(E_m) : y'' - 2y' + (1-m)y = 0$ où m est une constante réelle.

L'équation caractéristique de (E_m) est $r^2 - 2r + (1-m) = 0$. Son discriminant est : $\Delta = 4m$

D'où la discussion suivante :

- Si $m = 0$, alors $\Delta = 0$ et l'équation caractéristique admet une solution double $r = 1$.

  D'après la proposition 3, la solution générale de (E_0) est : $y = (\alpha x + \beta)e^{x}$ avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$
- Si $m > 0$, alors $\Delta > 0$ et l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes qui sont :

$$r_1 = 1 + \sqrt{m} \quad \text{et} \quad r_2 = 1 - \sqrt{m}$$

Scanné avec CamScanner

D'après la proposition 3, la solution générale de (E_m) est : $y = \alpha e^{(1+\sqrt{m})x} + \beta e^{(1-\sqrt{m})x}$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

- Si $m < 0$, alors $\Delta < 0$ et l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées qui sont : $r_1 = 1 + i\sqrt{-m}$ et $r_2 = 1 - i\sqrt{-m}$

D'après la proposition 3, la solution générale de l'équation différentielle (E_m) est :

$$y = \left(\alpha\cos\left(x\sqrt{-m}\right) + \beta\sin\left(x\sqrt{-m}\right)\right)e^x \text{ avec } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

Applications

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$y'' + y' - 2y = 0$; $4y'' - 4y' + y = 0$; $y'' - y' + y = 0$; $y'' = -2y' + 3$

2. Discuter selon les valeurs du réel m l'ensemble de solutions de l'équation : (E_m) : $y'' - 2my' + my = 0$

3. Soit (E) l'équation différentielle : $4y'' + 5y' + y = 2e^{-2x}(7x - 11)$

a) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = 2xe^{-2x}$ est une solution particulière de (E) puis trouver la solution générale de (E).

b) Déterminer la solution f de (E) dont la courbe passe par le point $A(0,-1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Remarques

- Pour tout $(x_0;y_0;z_0) \in \mathbb{R}^3$ il existe une unique solution de l'équation (E) : $y'' + ay' + by = 0$ vérifiant les conditions initiales : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$
- L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ est un cas particulier de l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = 0$:
  - La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est :
  $$y = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x) \quad \text{où} \quad (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$$
  - La solution générale de l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = 0$ est :
  $$y = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x} \quad \text{où} \quad (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$$
- En gros, on peut exprimer les conditions initiales d'une équation différentielle par diverses formules, par exemple :
  - Le point $A(x_0, y_0)$ appartient à la courbe de f ce qui se traduit par : $y_0 = f(x_0)$
  - La fonction f prend la valeur y_0 en x_0 ce qui se traduit par : $y_0 = f(x_0)$
  - La courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet au point $A(x_0, y_0)$ une tangente de pente y_1 : $y_0 = f(x_0)$ et $y_1 = f'(x_0)$
- Dans les sciences physiques, on rencontre souvent les équations différentielles $ay'' + by' + cy = 0$ sous la forme (A titre d'exemple) : $a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$ ou sous la forme : $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$

Scanné avec CamScanner

A RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1) On considère l'équation différentielle suivante : $(E_1): y' - 4y = 5$

Trouver la solution de (E_1) vérifiant $y(0) = -7$

2) On considère l'équation différentielle suivante : $(E_2): y'' + y' - 2y = 0$

a) Résoudre (E_2)

b) Trouver la solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

3) Soit $(\tau; i_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la fonction i dérivable sur $[0;+\infty[$, vérifiant :

$$\frac{di}{dt} + 3\frac{i}{\tau} = 0 \text{ avec } i(0) = -i_0$$

4) L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triplerait-elle ?

SOLUTION

1) La solution générale de l'équation (E_1) est donnée par : $y = \lambda e^{4x} - \frac{5}{4}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

$$y(0) = -7 \Leftrightarrow \lambda - \frac{5}{4} = -7 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-23}{4}$$

Par conséquent, la solution demandée est : $y = -\frac{23}{4}e^{4x} - \frac{5}{4}$

2) On considère l'équation différentielle suivante : $(E_2): y'' + y' - 2y = 0$

a) L'équation caractéristique de (E_2) est $r^2 + r - 2 = 0$. Ses solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$

En définitive, la solution générale de (E_2) est donnée par : $y = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x}$ où $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$

b) Soit y la solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. Dans ce cas :

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda + \mu = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2\mu = 1$$

La résolution de système $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - 2\mu = 1 \end{cases}$ donne $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$. La solution demandée est : $y = e^x$

3) Puisque la fonction i vérifie $\frac{di}{dt} + 3\frac{i}{\tau} = 0$, alors $i(t) = \lambda e^{-\frac{3}{\tau}t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $i(0) = -i_0$, donc $i(t) = -i_0 e^{-\frac{3}{\tau}t}$

4) L'accroissement de la population est mesurée par $P'(t)$. Par hypothèse, $P'(t)$ et $P(t)$ sont proportionnelles, ce qui se traduit par l'existence d'un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P'(t) = \alpha P(t)$. Par suite, $P(t)$ s'écrit sous la forme $P(t) = ke^{\alpha t}$ où $k \in \mathbb{R}$. Comme la population double tous les 50 ans, alors cela se traduit par :

$$(\forall t \in \mathbb{R}^*) \quad P(t+50) = 2P(t)$$

Scanné avec CamScanner

Ce qui est équivalent à $ke^{\alpha(t+50)} = 2ke^{\alpha t}$, puis $50\alpha = \ln 2$, et par suite $\alpha = \dfrac{\ln 2}{50}$.

Soit T le réel positif vérifiant $P(t+T) = 3P(t)$. On procède de la même manière on trouve :

$$ke^{\alpha(t+T)} = 3ke^{\alpha t} \Leftrightarrow \alpha T = \ln 3 \Leftrightarrow T = \frac{\ln 3}{\alpha} \Leftrightarrow T = \frac{50\ln 3}{\ln 2}$$

Approximativement on trouve $T \approx 79\,ans$. La population triplerait approximativement tous les $79\,ans$.

B ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE EN BIOLOGIE

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t.

La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que $y'(t) = ky(t)$, où k est un coefficient strictement positif.

On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1) Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$

2) Sachant qu'au bout de $2h$, le nombre de microbes a quadruplé, déterminer l'équation qui permet de trouver la constante k.

3) Déterminer la valeur de N (au microbes près) sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures.

SOLUTION

1) La solution générale de l'équation $y' = ky$ est $y = \alpha e^{kt}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si on désigne par f la solution de $y' = ky$ vérifiant $y(0) = N$, on trouve $\alpha = N$, ce qui donne $f(t) = Ne^{kt}$.

2) Au bout de $2h$, la population est quadruplée, donc $f(2) = 4N$ ce qui donne $e^{2k} = 4$ (attention : ne pas transformer $2h$ en seconde car l'énoncé indique que t en h). Par suite $k = \ln 2$.

3) D'après les données de l'exercice $f(t) = Ne^{t\ln 2}$ et $f(5) = 6400$ d'où : $N = \dfrac{6400}{e^{5\ln 2}} = \dfrac{6400}{e^{\ln 32}} = \dfrac{6400}{32} = 200$

C ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE EN MÉCANIQUE

On étudie un élément d'une structure métallique soumis à une force concentrée en un point. Cette force est la résultante des forces dues aux effets du vent sur la structure.

On note $y(t)$ le déplacement, en mètres, de cet élément en fonction du temps t en secondes.

Le principe fondamental de la dynamique permet d'établir l'équation différentielle suivante :

$$y'' - \varphi.y' + 100y = 0$$

où φ est un coefficient qui caractérise l'amortissement du déplacement par dissipation d'énergie dans

Scanné avec CamScanner

structure. Il s'agit d'étudier les variations du déplacement $y(t)$ lorsque l'on fait varier le coefficient φ.

On considère les conditions initiales suivantes : $y(0) = 0,05\,m$ et $y'(0) = 0$

1) Hypothèse d'absence d'amortissement :

On fait l'hypothèse de l'absence d'amortissement du déplacement. On obtient l'équation différentielle suivante : $y''(t) + 100y(t) = 0$

Résoudre cette équation puis déterminer l'expression du déplacement $y(t)$ de l'élément.

2) Hypothèse d'amortissement faible:

On fait l'hypothèse d'un faible amortissement du déplacement. On obtient l'équation différentielle suivante : $y''(t) + \sqrt{39}\,y'(t) + 100y(t) = 0$

Résoudre cette équation puis déterminer l'expression du déplacement $y(t)$ de l'élément.

3) Hypothèse d'amortissement classique:

On fait l'hypothèse d'un faible amortissement du déplacement. On obtient l'équation différentielle suivante : $y''(t) + 20\,y'(t) + 100y(t) = 0$

Résoudre cette équation puis déterminer l'expression du déplacement $y(t)$ de l'élément.

SOLUTION

1) Hypothèse d'absence d'amortissement :

La solution générale de l'équation $y'' + 100y = 0$ est : $y(t) = \alpha\cos(10t) + \beta\sin(10t)$

Les conditions initiales $y(0) = 0,05$ et $y'(0) = 0$ donnent $\alpha = 0,05$ et $\beta = 0$

On en déduit la solution du système étudié : $y(t) = 0,05\cos(10t)$

2) Hypothèse d'amortissement faible :

L'équation caractéristique de l'équation $y''(t) + \sqrt{39}\,y'(t) + 100y(t) = 0$ est $r^2 + \sqrt{39}\,r + 100 = 0$.

Elle a deux racines complexes conjuguées qui sont : $r_1 = -\frac{\sqrt{39}}{2} + \frac{19}{2}i$ et $r_2 = -\frac{\sqrt{39}}{2} - \frac{19}{2}i$

On en déduit la solution de l'équation différentielle : $y(t) = e^{-\frac{\sqrt{39}}{2}t}\left(\alpha\cos\left(\frac{19}{2}t\right) + \beta\sin\left(\frac{19}{2}t\right)\right)$

Les conditions initiales permettent de déterminer les deux équations suivantes :

$\alpha = 0,05$ et $\beta = 0,05 \times \frac{\sqrt{39}}{19}$. Il s'ensuit alors : $y(t) = 0,05e^{-\frac{\sqrt{39}}{2}t}\left(\cos\left(\frac{19}{2}t\right) + \frac{\sqrt{39}}{19}\sin\left(\frac{19}{2}t\right)\right)$

3) Hypothèse d'amortissement classique :

L'équation caractéristique de l'équation $y''(t) + 20\,y'(t) + 100y(t) = 0$ est $r^2 + 20r + 100 = 0$. Elle a une seule racine qui est $r = -10$. On en déduit la solution de l'équation différentielle : $y(t) = (\alpha t + \beta)e^{-10t}$

Les conditions initiales permettent de déterminer les deux équations suivantes : $\alpha = 0,5$ et $\beta = 0,05$

Il s'ensuit alors : $y(t) = 0,05(10t + 1)e^{-10t}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES D'APPLICATION

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = a\,y$

EXERCICE 01

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = 3y$; 2) $y' = -2y$; 3) $2y' + 3y = 0$

4) $\sqrt{2}y' - \sqrt{3}y = 0$; 5) $(\ln 2)y - \pi y' = 0$

6) $my' + (n+1)y = 0$ (où $n \in \mathbb{N}$)

EXERCICE 02

Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $y(x_0) = y_0$ dans chacun des cas suivants :

1) (E) : $y' - 4y = 0$ et $x_0 = 0$ et $y_0 = 2$

2) (E) : $y' + 3y = 0$ et $x_0 = -1$ et $y_0 = 1$

3) (E) : $2y' - \sqrt{2}y = 0$ et $x_0 = -2$ et $y_0 = -3$

EXERCICE 03

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3e^{-\frac{5}{2}x}$

Déterminer une équation différentielle de la forme $y' = ay$ dont la fonction f est une solution.

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = a\,y + b$

EXERCICE 04

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = 2y + 3$; 2) $\sqrt{2}y' + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$

3) $3y' + 2y = 4$; 4) $y' - (\ln 2)y = \ln 3$

EXERCICE 05

Déterminer la solution y de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $y_0 = y(x_0)$ pour chacun des cas suivants :

1) (E) : $2y' + 5y = \frac{1}{2}$ et $x_0 = -1$ et $y_0 = 2$

2) (E) : $3y' - 4y = \sqrt{2}$ et $x_0 = -2$ et $y_0 = -3$

3) (E) : $y' \ln 2 + y = \ln 8$ et $x_0 = \ln 2$ et $y_0 = \frac{1}{e}$

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y'' + a\,y' + b\,y = 0$

EXERCICE 06

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + 2y' - 3y = 0$; 2) $y'' + 3y' - 4y = 0$

3) $y'' - y' - 2y = 0$; 4) $y'' + 10y' + 25y = 0$

5) $y'' + 6y' + \frac{5}{2}y = 0$; 6) $y'' - \sqrt{3}y' + \frac{3}{4}y = 0$

7) $2y'' - 2\sqrt{3}y' = 0$; 8) $4y'' + 25y = 0$

9) $5y'' - 4y = 0$; 10) $-2y'' - \sqrt{3}y' + y = 0$

EXERCICE 07

Déterminer la solution y de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales données pour chacun des cas suivants :

1) (E) : $2y'' - 3y' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

2) (E) : $2y'' + 3y' + y = 0$ et $y(0) = -1$ et $y'(0) = 2$

3) (E) : $y'' - 6y' + 9y = 0$ et $y(-1) = 1$ et $y'(-1) = 3$

4) (E) : $y'' + \pi^2 y = 0$ et $y(1) = 1$ et $y(1) = -1$

5) (E) : $y'' - 16y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

EXERCICE 08

1) Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : 4y'' + 4y' + y = 0$$

2) Déterminer la solution g de l'équation (E) vérifiant les conditions initiales : $g(0) = -1$ et $g'(0) = \frac{3}{2}$

3) a) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

b) Étudier les variations de la fonction g.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES DE SYNTHÈSE

EXERCICE 1

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,i,j).

Déterminer la fonction f vérifiant les deux conditions :

a)- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = -5f'(x)$

b)- $A(-2,1)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 4y'' + \pi^2 y = 0$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E).

2) Déterminer la fonction g solution de l'équation (E) vérifiant les deux conditions suivantes :

a)- $A\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de g dans un repère orthonormé (O,i,j).

b)- $\mathscr{C}_g$ admet une tangente horizontale en A.

EXERCICE 3

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 2y = e^{2x}$$

1) Montrer que la fonction $u : x \mapsto xe^{2x}$ est une solution de l'équation (E).

2) Résoudre l'équation différentielle : $(E_0) : y' - 2y = 0$

3) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $(f-u)$ est solution de l'équation différentielle (E_0).

4) En déduire les solutions de l'équation (E).

5) Déterminer la solution g de (E) telle que : $g(0) = 1$

EXERCICE 4

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 2y' + 3y = 6e^x - 7x + 2$$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution u de la forme : $u : x \mapsto ax^2 + bx + c$

2) Résoudre l'équation différentielle : $(E_0) : 2y' + 3y = 0$

3) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $(f-u)$ est solution de l'équation différentielle (E_0).

4) En déduire les solutions de l'équation (E).

EXERCICE 5

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x}.g(x)$

1) Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si :

$$g'(x) = \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

2) En déduire les solutions de l'équation (E).

EXERCICE 6

Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = f(x)(1-f(x))$$

1) On pose $g = \frac{1}{f}$. Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle : $(E) : y' = -y + 1$

2) Résoudre l'équation différentielle (E).

3) En déduire toutes les fonctions f.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 15

On considère l'équation différentielle :

$$(E):\ y' = ky(A-y)$$

où A et k sont des réels tels que : $A>0$ et $k\neq 0$

Soit y une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation (E). On pose : $z=\dfrac{1}{y}$

1) Montrer que z est solution d'une équation différentielle de la forme $z' = az+b$.

2) En déduire qu'il existe une constante $B\in\mathbb{R}$ telle que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad y(x)=\dfrac{A}{1+Be^{-kAx}}$

3) Tracer la courbe représentative de la fonction y, solution de l'équation différentielle (E), dans chacun des cas suivants :

a) $k<0$; b) $k>0$

EXERCICE 16

On considère l'équation différentielle :

$$(E):\ y''+2y=-2\cos(2x)$$

1) Montrer que la fonction $u: x\mapsto \cos(2x)$ est solution de l'équation (E).

2) Résoudre l'équation différentielle : $(E_0): y''+2y=0$

3) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $(f-u)$ est solution de l'équation différentielle (E_0).

4) En déduire les solutions de l'équation (E).

5) Déterminer la solution g de (E) telle que :

$$g(0)=g'(0)=0$$

EXERCICE 17

Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle : $(E): y' = ay^2+by$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

On suppose que y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$z=\frac{1}{y}$$

Déterminer une équation différentielle vérifiée par z puis résoudre l'équation différentielle (E).

EXERCICE 18

Soit m un nombre réel. Résoudre et discuter les équations différentielles suivantes :

1) $y'-my+1=0$; 2) $y''+my=0$

3) $y''+my'=0$; 4) $y''-2my'+my=0$

5) $y''-2y'+(1-m)y=0$

EXERCICE 19

Soit F la primitive de la fonction $f: t\mapsto \dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1) Montrer que la fonction F est impaire.

2) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ \ln(1+2x)\leq F(x)$

et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

3) a) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

On pose : $G=F^{-1}$

b) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^*)\quad G'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1+4G^2(x)}$$

c) En déduire que G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que G est solution de l'équation différentielle :

$$y''-y=0$$

d) Calculer $G(0)$ et $G'(0)$ puis déterminer $G(x)$ et $F(x)$ en fonction x.

EXERCICE 20

Soit f une fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f''(x)=f(-x)+x$

On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g(x)=f(x)+f(-x)$$

et : $h(x)=f(x)-f(-x)-2x$

1) a) Vérifier que g est paire et que h est impaire.

b) Montrer que g est solution de l'équation diffé-

Scanné avec CamScanner

rentielle $y'' = y$ et que h est solution de l'équation différentielle $y'' = -y$.

2) Écrire $f(x)$ en fonction de $g(x)$ et $h(x)$ puis donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

EXERCICE 21

Déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(1-x) = f(x)$

EXERCICE 22

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - y' - 2y = (-6x - 4)e^{-x}$$

1) Résoudre l'équation : $(E_0) : y'' - y' - 2y = 0$

2) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ est une solution de (E).

3) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $(f - u)$ est solution de l'équation différentielle (E_0).

4) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

5) Déterminer la solution g de (E) vérifiant les conditions initiales : $g(0) = g'(0) = 1$

EXERCICE 23

Une citerne calorifugée chauffée par une résistance à sa température $\theta(t)$ (en °C) l'instant t (en s) vérifie l'équation différentielle $(E) : y' = a - by$ avec :

$$a = 2{,}088 \times 10^{-2} \text{ et } b = 2{,}32 \times 10^{-4}.$$

1) Résoudre l'équation différentielle.

2) En déduire l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t sachant que $\theta(0) = 20$.

3) Au bout de combien de temps la température atteint-elle 80 °C ?

EXERCICE 24

L'étude d'un mouvement a montré que la vitesse exprimée, en mètres par seconde est une fonction dérivable y de la variable réelle positive t vérifiant l'équation différentielle : $(E) : y' + 2y = 50$

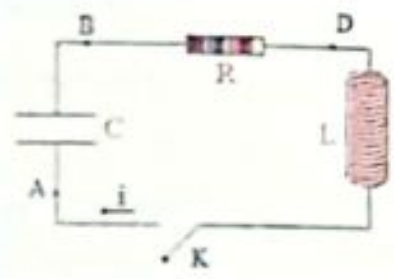
1) Résoudre l'équation différentielle (E).

2) Sachant que $y(0) = 0$, déterminer la vitesse y en fonction de t.

EXERCICE 25

L'objet de ce problème est l'étude de la décharge d'un condensateur de capacité C dans un circuit comprenant une résistance R et une inductance L. On admet que la décharge q du condensateur est une fonction du temps qui vérifie :

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0$$



1) On donne $L = 10H$, $C = 0{,}2F$ et $R = 22{,}5\Omega$.

Déterminer la solution q de l'équation différentielle telle que $q(0) = 1$ et $q'(0) = \frac{13}{4}$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-\frac{t}{4}}$$

a) Calculer $\lim_{t \to +\infty} g(t)$.

b) Calculer $g'(t)$. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $g'(t) = 0$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c) Etudier le signe de $g'(t)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}^+$.

3) Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ de g dans un repère orthonormé et sa tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 0.

4) Utiliser la courbe $\mathcal{C}$ pour déterminer une valeur approchée à 0,2 seconde près de l'instant où la charge du condensateur est devenue inférieure à 0,2 coulomb.

Scanné avec CamScanner

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$3y'-4y=5$; $3y''-5y'=0$; $3y''+y=0$

$y''-\sqrt{10}y'+\frac{5}{2}y=0$; $3y''-7y'+4y=0$

$\left(1-\sqrt{2}\right)y''+y'-\left(1+\sqrt{2}\right)y=0$

2) Résoudre les équations différentielles suivantes puis déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données :

$(E_1): y''-8y'+16y=0$ et $y(0)=1$ et $y'(0)=0$

$(E_2): y''+y=0$ et $y(0)=0$ et $y'(0)=\frac{\pi}{2}$

3) On considère les équations différentielles suivantes :

$(E): y''+y=\cos^4 x$ et $(E_0): y''+y=0$

a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\cos^4 x=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$

b) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction $u: x\mapsto a\cos(2x)+b\cos(4x)+c$ soit solution de l'équation différentielle (E).

c) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $(f-u)$ est solution de l'équation différentielle (E_0).

d) Résoudre l'équation (E_0) puis déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

e) Déterminer la solution g de (E) telle que :

$$g(0)=-2 \quad \text{et} \quad g'(0)=0$$

DEVOIR 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ $(*)$

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f\left(e^x\right)$

a) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ x^2f''(x)+f(x)=0$

b) En déduire que la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y''-y'+y=0$

2) Déterminer toutes les fonctions f vérifiant $(*)$.

DEVOIR 3

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E): yy''-2(y')^2-2yy'-y^2=0$$

On pose : $y=\frac{1}{z}$

1) Calculer y' et y'' en fonction de z et z' et z''.

2) Montrer que y est une solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle :

$$(E'): z''-2z'+z=0$$

3) En déduire la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales : $f(1)=\frac{1}{e}$ et $f(0)=1$

DEVOIR 4

1) Résoudre l'équation : $(E): y''-2y'+5y=0$

2) a) Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les condition s : $f(0)=f'(0)=1$

b) En déduire que : $\int_0^{\pi} e^x\cos(2x)dx=\frac{e^{\pi}-1}{5}$

3) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Résoudre et discuter selon les valeurs de θ l'équation différentielle suivante :

$$y''-(2\sin\theta)y'+y=0$$

Scanné avec CamScanner

DEVOIR 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \sin(u)\,du$$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ \ x.f'(x) + (n+1) f(x) = \sin x$$

2) Déterminer l'expression de $f(x)$ pour $n = 1$.

3) On considère l'équation différentielle :

$$(E):\ xy' + 2y = \sin(x) \ \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+^*$$

Et on pose : $z = y - f$

a) Montrer que y est une solution de (E) si, et seulement si, z est une solution de l'équation :

$$(E'):\ xz' + 2z = 0 \ \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+^*$$

b) Résoudre l'équation différentielle (E').

c) En déduire les solutions de l'équation (E).

DEVOIR 6

Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension initiale de 20 *volts*. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance R.

La tension aux bornes du condensateur est une fonction u (du temps) définie sur $[0;+\infty[$. Cette fonction u est solution, sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E):\ u'(t) + \frac{1}{RC} u(t) = 0$$

1) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

2) On rappelle que $u(0) = 20$. Déterminer la fonction u. Dans la suite : $R = 1000\,\Omega$ et $C = 10^{-4}\,\Omega$

3) a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $u(t) = 20e^{-10t}$

b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles on a : $u(t) \geq 0{,}02$

4) L'intensité traversant le circuit est une fonction i (du temps) définie sur $[0;+\infty[$ par : $i(t) = Cu'(t)$

a) Déterminer $i(t)$.

b) L'énergie W (exprimée en joules) dissipée dans le résistor, entre les instants $t = 0$ et $t = 0{,}69s$, est égale à $W = \int_0^{0,69} R.i^2(t)\,dt$.

Calculer W à 0,01 près.

DEVOIR 7

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $]0;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(E):\ xf'(x) - (2x+1) f(x) = 8x^2$$

1) a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle : $(E'):\ y' = 2y + 8$

b) Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

3) Existe-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln 2\ ;\ 0)$.

DEVOIR 8

Partie A :

1) Trouver trois réels a, b et c tels que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

2) En déduire une primitive de la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$

Scanné avec CamScanner

Partie B :

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$(E): y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0$$

1) Vérifie que la fonction y_0 définie sur $]0;+\infty[$ par $y_0(x) = x$ est solution de (E).

2) On pose pour tout $x \in]0;+\infty[$: $y(x) = x.z(x)$

a) Vérifier que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z vérifie $x(1+x^2)z'' + 2z' = 0$.

c) En déduire que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$z(x) = -\frac{\alpha}{x} + \alpha x + \beta \text{ où } (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

d) Donner toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Déterminer la solution y de (E) vérifiant :

$$y(1) = 0 \text{ et } y'(1) = 2$$

DEVOIR 9

Soit (E) l'équation différentielle :

$$4y'' + 5y' + y = 2e^{-2x}(7x - 11)$$

1) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = 2xe^{-2x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2) Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction u est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $(u-g)$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E_0): \quad 4y'' + 5y' + y = 0$$

3) Résoudre l'équation (E_0) et en déduire toutes les les solutions de l'équation (E).

4) Déterminer la solution f de (E) dont la courbe passe par le point $A(0,-1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

DEVOIR 10

On considère l'équation différentielle :

$$(E): y'' - 5y' + 6y = (2x-3)e^x$$

1) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction $f : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$ soit solution de (E).

2) Déterminer la solution générale de l'équation (E).

3) a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_{\frac{3}{2}}^{x} (2t-1)e^t\,dt$ où $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire la solution de l'équation différentielle :

$$(E''): z''' - 5z'' + 6z' = (2t-1)e^t$$

vérifiant : $z'\left(\frac{3}{2}\right) = z''\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

DEVOIR 11

Soit S l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la condition suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) - x\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt = x$$

1) On considère l'équation : $(E): y'' - y = 0$

a) Déterminer la fonction h solution de (E) et dont la courbe passe par le point $A\left(\ln 2;\frac{3}{4}\right)$ et admet une tangente de pente $\frac{5}{4}$ en ce point.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $I = \int_0^x t\left(e^t - e^{-t}\right)dt$ en fonction de x puis conclure que $h \in S$.

2) Soit f un élément de S.

a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$$

b) Montrer que f est une solution de (E).

c) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$ puis en déduire l'ensemble S.

Scanné avec CamScanner

NOTATIONS ET SYMBOLES

$f'(a)$	Nombre dérivé de la fonction f en a	ln	Fonction logarithme népérienne
$f'_d(a)$	Nombre dérivé de la fonction f à droite en a	$f'_g(a)$	Nombre dérivé de la fonction f à gauche en a
$\log_a$	Fonction logarithme de base a	$\int_a^b f(x)dx$	Intégrales de f de a à b
f^{-1}	Fonction réciproque de f	exp	Fonction exponentielle
$\sqrt[n]{x}$	Racine $n^{ième}$ du nombre réel positif x	$\exp_a$	Fonction exponentielle de base a
$\lim_{x\to a} f(x)$	Limite de la fonction f en a	Arctan	Fonction arctangente
$\sum_{k=1}^{n} a_k$	Somme des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$	$\prod_{k=1}^{n} a_k$	Produit des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$

IDENTITÉS REMARQUABLES

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \;;\; (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \;;\; a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \;;\; a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1}) \quad (n\geq 2)$$

SUITES ARITHMÉTIQUES - SUITES GÉOMÉTRIQUES

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r :

$$u_{n+1}=u_n+r \;;\; u_n=u_0+nr \;;\; u_n=u_p+(n-p)r$$

$$u_p+...+u_n=\frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$$

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q :

$$u_{n+1}=qu_n \;;\; u_n=u_0q^n \;;\; u_n=u_p.q^{n-p}$$

$$u_p+...+u_n=u_p.\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \quad (q\neq 1)$$

SOMMES CLASSIQUES - PRODUITS CLASSIQUES

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2} \;;\; \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \;;\; \sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q\neq 1) \;;\; \sum_{k=p}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_p$$

$$\sum_{k=p}^{n} a=(n-p+1)a \quad (a\in\mathbb{R}) \;;\; \prod_{k=1}^{n} k=n! \;;\; \prod_{k=p}^{n} a=a^{n-p+1} \quad (a\in\mathbb{R}) \;;\; \prod_{k=p}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{u_{n+1}}{u_p}$$

Scanné avec CamScanner

LIMITES ET CONTINUITÉ

CONTINUITÉ EN UN POINT ET SUR UN INTERVALLE

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

f est continue en a ssi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

f est continue sur I si elle est continue en chacun de ses points.

CONTINUITÉ D'UNE COMPOSÉE DE FONCTIONS

Si u est une fonction continue sur un intervalle J et v une fonction continue sur un intervalle I telle que $u(J) \subset I$ alors la fonction vou est continue sur l'intervalle J.

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Soit f une fonction numérique continue sur un segment $[a,b]$. Alors : Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

Si f est une fonction non définie en a telle que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \ell \in \mathbb{R}$$

alors f est prolongeable par continuité en a.

Ce prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & \text{si } x \neq a \\ \tilde{f}(a) = \ell \end{cases}$$

LIMITE D'UNE COMPOSÉE DE FONCTIONS

Si $\lim_{x \to a} u(x) = \ell$; $(\ell \in \mathbb{R})$ et v est continue en ℓ

alors : $\lim_{x \to a} vou(x) = v(\ell)$

THÉORÈME DE LA BIJECTION

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors elle réalise une bijection de I sur $f(I)$. De plus, f admet une fonction réciproque f^{-1}.

FONCTIONS USUELLES – LIMITES FONDAMENTALES

FONCTION RACINE $n^{ième}$

$$\begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$:

$\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$; $\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$

$\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$; $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ $(y \neq 0)$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$; $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$

PUISSANCE RATIONNELLE

- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $r = \dfrac{p}{q}$ un rationnel avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on pose : $a^r = \sqrt[q]{a^p}$
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $(r,s) \in \mathbb{Q}^2$:

$a^r a^s = a^{r+s}$; $a^r b^r = (ab)^r$; $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$

$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$; $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$; $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

Scanné avec CamScanner

FONCTION ARCTANGENTE

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arc\,tan} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \tan(\operatorname{Arc\,tan} x) = x$$

$$\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \ \operatorname{Arc\,tan}(\tan x) = x$$

Arc tan est une fonction continue, impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Arc\,tan} x = \frac{\pi}{2} \ ; \ \lim_{x \to -\infty} \operatorname{Arc\,tan} x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Arc\,tan}(ax)}{ax} = 1 \ \ (a \in \mathbb{R}^*)$$

FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

- La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ est la fonction réciproque de la fonction ln :

$$\begin{cases} y = \exp(x) = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ln(e^x) = x \ ; \ (\forall x \in \mathbb{R}_*^+) \ e^{\ln x} = x$
- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$:

$$e^{x+y} = e^x e^y \ ; \ (e^x)^y = e^{xy} \ ; \ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \ ; \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : e^{\sum_{k=1}^{n} x_k} = \prod_{k=1}^{n} e^{x_k}$$

FONCTION LOGARITHME DE BASE $a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$

- Soit $a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$: $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) \ \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$
- La fonction $\log_a$ a les mêmes propriétés algébriques que celles de la fonction ln.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_*^+$:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = e^{x \ln a} = a^y$$

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIENNE

- La fonction ln est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et qui s'annule en 1 :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) \ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

- La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_*^+$ et $r \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \ ; \ \ln(x^r) = r \ln x$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \ ; \ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \ln x \ ; \ \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^n : \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$$

LIMITES FONDAMENTALES

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]1, +\infty[$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan(\alpha x)}{\alpha x} = 1 \ ; \ \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Arc\,tan} x = \frac{\pi}{2} \ ; \ \lim_{x \to -\infty} \operatorname{Arc\,tan} x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Arc\,tan}(\alpha x)}{\alpha x} = 1 \ ; \ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(\alpha x)}{x^2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \ ; \ \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \ ; \ \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ ; \ \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0^- \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \ ; \ \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \ ; \ \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \ ; \ \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+ \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty \ ; \ \lim_{x \to -\infty} x^n a^x = 0$$

Scanné avec CamScanner

La fonction f	La dérivée f'
$k.u \quad (k \in \mathbb{R})$	$k.u'$
$u+v-w$	$u'+v'-w'$
$u.v$	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
uov	$(u'ov)\times v'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sqrt[n]{u} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$u^r \quad (r \neq 0)$	$ru'u^{r-1}$
$\text{Arc}\tan u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\ln\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$
(la fonction réciproque) u^{-1}	$\frac{1}{u'ou^{-1}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x^r$	$f'(x)=r.x^{r-1}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\frac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=\text{Arc}\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
$f(x)=\ln\lvert x\rvert$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$

PRIMITIVES USUELLES

La fonction $f: x \mapsto f(x)$	x^r $(r \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	e^{ax} $(a \neq 0)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$\sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$
Une Primitive de la fonction f	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{e^{ax}}{a}$	$\text{Arc}\tan x$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$

Scanné avec CamScanner

La fonction $f : x \mapsto f(x)$	$u'u^r$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u'}{u}$	$u'e^u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$u'\cos u$	$u'\sin u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
Une Primitive de la fonction f	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\ln\lvert u\rvert$	e^u	$\operatorname{Arc}\tan u$	$\sin u$	$-\cos u$	$\tan u$

THÉORÈMES FONDAMENTAUX SUR LA DÉRIVATION

DÉRIVÉE DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. On suppose que f est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et que $f'(x_0) \neq 0$.

Alors, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et de plus : $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe au moins un réel $c \in]a;b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

THÉORÈME DE ROLLE

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins un réel $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Si $m \leq f'(x) \leq M$ alors :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

En particulier, si $\lvert f'(x)\rvert \leq k$, alors, pour tous x et y de $]a;b[$: $\lvert f(x) - f(y)\rvert \leq k\lvert x - y\rvert$

CALCUL INTÉGRAL ET APPLICATIONS

INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive quelconque de f sur I, alors pour tout couple $(a;b) \in I^2$:

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ce nombre est appelé l'intégrale de a à b de f.

Ce résultat se nomme :
« Le théorème fondamental du calcul intégral »

PROPRIÉTÉS DU CALCUL INTÉGRAL

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $(a;b;c) \in I^3$:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \;;\; \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Scanné avec CamScanner

INTÉGRALE ET ORDRE

$$(a \le b \text{ et } f \ge 0) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$$

$$(a \le b \text{ et } f \le 0) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le 0$$

$$(a \le b \text{ et } f \le g) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

$$a \le b \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION

Si, pour tout $x \in [a;b]$, on a $m \le f(x) \le M$,

alors : $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$

Le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est la valeur moyenne de f sur $[a;b]$.

INTÉGRATION PAR PARTIES

Soit u et v deux fonctions dérivables $[a;b]$ telles que u' et v' sont continues sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b u.(x)v'(x)dx = \left[u(x)\times v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

INTÉGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

Soit u est une fonction dérivable sur $[\alpha;\beta]$ telle que sa dérivée u' est continue sur $[\alpha;\beta]$, et f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$$

Si, de plus, u est bijective de $[\alpha;\beta]$ sur $[a;b]$,

on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt$

SOMMES DE RIEMANN

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: (Sommes de Riemann)

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right)$$

et : $S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right)$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S'_n = \int_a^b f(x)dx$$

AIRES ET VOLUMES

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathscr{A} = \int_a^b |f(x)|dx \quad \text{(unités d'aire)}$$

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}_f$ autour de l'axe des abscisses un tour complet est :

$$\mathscr{V} = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \quad \text{(unités de volume)}$$

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}_f$ autour de l'axe des ordonnées un tour complet est :

$$\mathscr{V}' = \left|\pi\int_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(t)\right)^2 dt\right| \quad \text{(unités de volume)}$$

Si de plus, f est dérivable et strictement monotone sur $[a,b]$ alors :

$$\mathscr{V}' = \pi\int_a^b x^2 |f'(x)|dx \quad \text{(unités de volume)}$$

Scanné avec CamScanner

RÉFÉRENCES

BIBLIOGRAPHIE

- Mathématiques tout-en-un MPSI (édition Dunod,17 juin 2015) ,
  Auteurs : Claude Deschamps, André Warusfel.
- Tout-en-un Mathématiques MPSI (édition Bréal, 16 août 2013),
  Auteurs : Daniel Guinin et E. Ladame.
- Dictionnaire des mathématiques (édition 21 février 2013),
  Auteurs : Alain Bouvier et Michel George.
- Math'X Tle S spécifique (édition 2016) ,
  Auteurs : Elisabeth Beauvois et Joël Berhouet.
- Maths Repères Tle S spécifique (édition 2012),
  Auteurs : Agnès Choquer et Boris Hanouch
- Maths - Visa pour la prépa 2016-2017 - MPSI-PCSI-PTSI-BCPST-ECS (6 mai 2009)
  Auteur : Guillaume Connan

WEBOGRAPHIE

- www.fr.wikipedia.org (Janvier 2016)
- www.xmaths.free.fr (Janvier 2016)
- www.apmep.fr (Décembre 2015)
- www.mp.cpgedupuydelome.fr (Décembre 2015)
- www.lavau.pagesperso-orange.fr (Octobre 2015)
- www.abdellah.bechata.free.fr (2009)
- www.pagesperso-orange.fr/gilles.costantini (2010)

Scanné avec CamScanner