Chapitre I : ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

I- NOMBRES RATIONNELS – NOMBRES IRRATIONNELS

1- Nombres rationnels

Définition

Un nombre x est un nombre rationnel s'il existe un nombre entier relatif P et un nombre entier relatif q non nul tel que $x = \frac{p}{q}$.

Exemples

- Tout nombre entier relatif est un nombre rationnel
- $\frac{43}{17}; -\frac{12}{4}; \frac{1487}{-426}$ sont des nombres rationnels.
- $1{,}45; 12; -0{,}2$ sont des nombres rationnels puisque $1{,}45 = \frac{145}{100}; 12 = \frac{12}{1}$; $-0{,}2 = -\frac{2}{10}$
- Tout nombre décimal relatif est un nombre rationnel.

2- Nombres irrationnels

Il existe des nombres qui ne peuvent se mettre sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Ces nombres sont appelés **nombres irrationnels**

Exercice résolu

Démontre en utilisant le raisonnement par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Solution

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Il existerait alors un entier naturel p et un entier naturel non nul q tels que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Mais, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ équivaut à $p = \sqrt{2}\times q$, soit $p^2 = 2q^2$. Ainsi, p^2 serait un nombre pair et par suite p serait un nombre un nombre pair, soit $p = 2p'$ où $p' \in \mathbb{N}$.

L'égalité $p^2 = 2q^2$ implique $4p'^2 = 2q^2$, soit $2p'^2 = q^2$. Ainsi, l'aboutissement « p est un nombre pair et q est un nombre pair » constitue une contradiction puisque $\frac{p}{q}$ est irréductible.

Comme l'hypothèse « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » conduit à une contradiction, alors elle est fausse, donc son contraire est vraie, c'est-à-dire $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exemples des nombres irrationnels :

$\pi; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}; \sqrt{8}; \sqrt{11}; \sqrt{17}$ et leurs opposés sont des nombres rationnels

NB :

- Il existe **une infinie** de nombres irrationnels.
- L'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres irrationnels forment un ensemble appelé **ensemble des nombres réels noté IR**

Exercice :

Dans chacun des cas suivants le nombre réel x est-il un nombre rationnel ou un nombre irrationnel ? justifie votre réponse. (pour justifier qu'un nombre x est irrationnel. On procède par un raisonnement par l'absurde.

a) $x = -\frac{4,7}{6}$;b)$x = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{32}}$;c) $x = \frac{12,35}{0,3}$;d) $x = -\sqrt{400}$;e) $x = \frac{\sqrt{12}}{3}$

3- Définition et notation des ensembles

- Les nombres entiers naturels sont :0,1,2,3,4,……

Cet ensemble est noté N= {0,1,2,3,…..}

- L'ensemble des entiers relatifs est noté Z. Il est composé des entiers naturels et de leurs opposés Z = {…. -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,……}

$N \subset Z$

- un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec

  $a \in Z$ et

  $a \in Z^*$

$Z^* = \{…-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,…\}$

$Z^+ = \{0,1,2,3,4,…\}$

$Z^- = \{…-4,-3,-2,-1,0\}$

L'ensemble des nombres rationnels est noté Q

Remarque

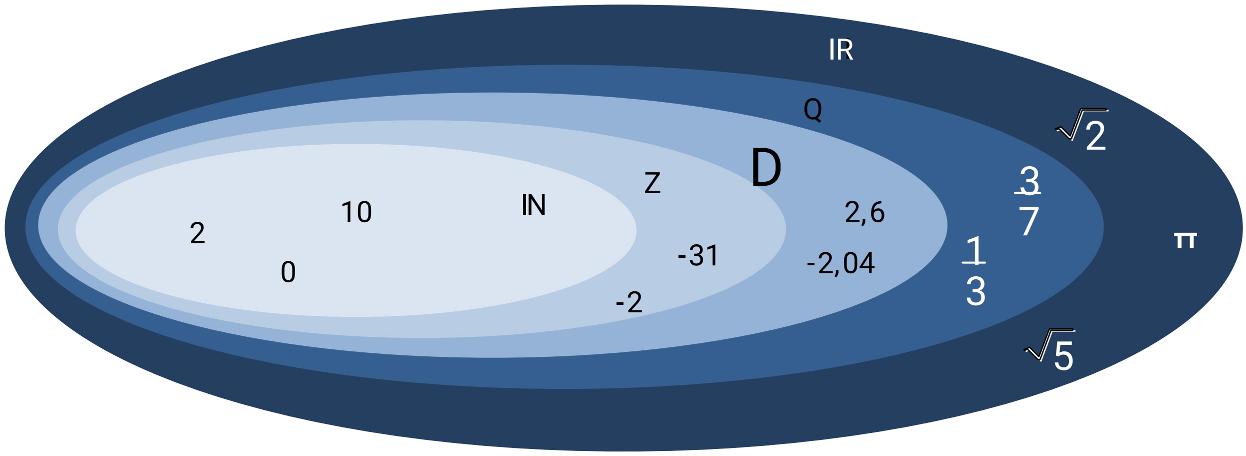
Un nombre décimal est un nombre rationnel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^p}$ avec $a \in Z$.

L'ensemble des nombres décimaux se note D

NB : un nombre irrationnel est un nombre ne pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in Z$ et $b \in Z^*$

C'est le cas de $\sqrt{2}$; $\sqrt{15}$; π...

*l'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble des nombres réels ; l'ensemble des nombres réels est noté IR.



N ⊂ Z ⊂D ⊂ Q ⊂ IR

-l'ensemble des nombres réels négatifs est noté IR^-.

- l'ensemble des nombres réels positifs est noté IR^+.

II/. REPRESENTATION DES NOMBRES REELS

* L'ensemble des nombres réels est représenté par une droite gradué (D)

*A tous point M de (D) on associe un nombre réel x

III/ REGLE DE CALCUL

a. **Quotient**

Définition

$a \in IR$, $b \in IR^*$ le quotient de a par b est l'unique réel q tel que $a = bq$.

On note : $q = \frac{a}{b}$

Remarque

$\frac{a}{b}$ n'a pas de sens si b = 0

Propriété

$a \in IR$; $b \in IR^*$
$c \in IR$; $d \in IR^*$

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

2) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$

4) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

5) $1 : \frac{c}{d} = \frac{d}{c}$

b. <u>Puissances</u>

- <u>Définition</u>

$a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$

<u>Exemple :</u>

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$

- <u>Propriétés</u>

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^0 = 1$

$a^n \times a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{n \times m}$

$(ab)^n = a^n \times b^n$

$(-a)^n$ = {égal à a^n si n est pair ; égal à $-a^n$ si n est impair}

<u>Exemple</u>

$(3^4)^4 = 3^{16}$

$\frac{7^5}{7^3} = 7^2$

$\frac{1}{5^4} = 5^{-4}$

C. Racine carrée

- **Définition**

On appelle racine carrée du nombre positif a, le nombre positif b dont le carré est égal à a .

On le note $\sqrt{a}$ et on a :

$\sqrt{a} = b$ équivaut à $b^2 = a$.

Exemple

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{25} = 5$

- **Propriétés**

Pour tous nombres réels a ,b et n є ℕ

*$\sqrt{a} = b$ équivaut à a = b

*$(\sqrt{a})^2 = a$

*$a^2 = b$ équivaut à {$a = -\sqrt{b}$ ou $a = \sqrt{b}$}

*$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

*$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est différent de $\sqrt{a+b}$

* $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

*$\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$

Exercice résolu

1)soit $a^2 = 25$, déterminons le nombre a

2) écris plus simplement $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{80}}$

Résolution

1) $a^2 = 25$ alors $a = \sqrt{25}$ ou $a = -\sqrt{25}$

   C'est-à-dire a = 5 ou a = -5

2) $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{6\times6\times5}}{\sqrt{4\times4\times5}} = \frac{3}{2}$

- **Calculs dans IR**

Exercice1 :

Dans chacun des cas suivants, exprimer le nombre réel t le plus simplement possible.

a) $t = -\sqrt{50} + \sqrt{32} + \sqrt{2}$;
b) $t = 3\sqrt{12} + 7\sqrt{27} - \sqrt{75} - 5\sqrt{48} + \sqrt{147}$.

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, calculer y et donner le résultat sous la forme la plus simple possible.

a) $y = (\sqrt{21}+3)(\sqrt{7}-\sqrt{3})$
b) $y = (\sqrt{8}-\sqrt{18})(\sqrt{50}-\sqrt{72}+\sqrt{32})$;
c) $y = \sqrt{5-\sqrt{3}\times\sqrt{5+\sqrt{3}}}$;
d) $y = \sqrt{\frac{7}{3}+3\sqrt{\frac{28}{27}-2\sqrt{\frac{63}{75}}}}$;
e) $y = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}-1)^2$;

IV/ <u>ORDRE DANS IR</u>

1) <u>Inégalité dans IR</u>

a) <u>Définition et propriété</u>

- <u>Définition</u>

Soient deux nombres réels quelconques a et b. on dit que :

- a est égal à b et on écrit a = b si a – b = 0 ;
- a est inférieur à b signifie que a-b est négatif ($a \leq b$ équivaut à $a-b \leq 0$)
- a est supérieur à b signifie que a-b est négatif ($a \geq b$ équivaut à $a-b \geq 0$)
- a est strictement inferieur à b signifie que a-b est strictement négatif ($a < b$ équivaut à $a-b < 0$)
- a est strictement supérieur à b signifie que a-b est strictement négatif ($a>b$

équivaut à a-b > 0)

- <u>Propriétés</u>

a, b et c sont trois nombres réels

- ✓ si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$

b) **Opérations et inégalités dans I**

<u>Propriété</u> 1

Soient a, b et c trois nombres réels .

- ✓ Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$
- ✓ Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $a \times c \leq b \times c$
- ✓ Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $a \times c \geq b \times c$
- ✓ En particulier si $a \leq b$ alors $a \geq -b$

<u>Propriété</u> 2

Soient a, b, c et d quatre nombres réels

- ✓ si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$
- ✓ si a, b, c et d sont positifs et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a \times c \leq b \times d$

<u>Propriété</u> 3

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls

- ✓ si $a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$
- ✓ si $a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
- ✓ si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

c) <u>Méthode pour comparer des nombres réels</u>

Pour comparer deux nombres réels, on peut :

- ✓ Étudier le signe de leur différence
- ✓ Les comparer à un autre réel
- ✓ Comparer leurs carrés, leurs racines carrées ou leurs inverses.

<u>Exemple</u>

Comparer les nombres suivants :

$\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{10}$; $5\sqrt{13}$ et 18 ; $2-2\sqrt{7}$ et $2-3\sqrt{3}$

2) <u>Majorant, minorant, maximum, minimum</u>

a) <u>Majorant, minorant</u>

Soit A un ensemble non vide

- ❖ Un élément M est un majorant de A s'il est plus grand que tous les éléments de A (pour tout $x \in A$; $x \leq M$)
- ❖ Un élément m est un minorant de A s'il est plus petit que tous les éléments de A (pour tout $x \in A$; $m \leq x$)

b) <u>maximum, minimum</u>

- ❖ Le maximum de A s'il existe est le plus grand élément de A
- ❖ Le minimum de A s'il existe est le plus petit élément de A

NB : le maximum de A et le minimum de A sont des éléments de A

<u>Exemple</u>

Soit $A = \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \}$

1) Donner 2 majorants et 2 minorants de A
2) Donner le maximum et le minimum de A s'ils existent

V/ <u>VALEUR ABSOLUE</u>

1) <u>Définitions et propriétés</u>

a) <u>Définition</u>

On appelle valeur absolue du nombre a, le plus grand des nombres –a et a

La valeur absolue de a est le nombre positif noté |a| ; on a : $|a| = \begin{cases} -a, \text{ si } a<0 \\ a, \text{si } a\geq 0 \end{cases}$

b) <u>propriétés</u>

Pour tous nombres réels a, b et tout nombre réel strictement positif r on a :

1) $|a| \geq 0$,
2) $|a| = 0$ équivaut à $a = 0$
3) $|a| = |-a|$
4) $|a| = |b|$ équivaut à $a = b$ ou $a = -b$
5) $\sqrt{a^2} = |a|$
6) $|ab| = |a||b|$
7) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire)
8) $|a| \leq r$ équivaut à $-r \leq a \leq r$

9) $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$

10) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$

11) $|a| \leq |b| \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$

Exemple :

Calculer et donner le résultat sous la forme la plus simple possible.

$a = \sqrt{(5-2\sqrt{7})^2}$; $b = \sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$.

Remarques

- ❖ Pour tout réel a, $|a^2| = |a|^2 = a^2$
- ❖ Pour tout nombre réel a, $|a| \geq a$ et $|a| \geq -a$

2) **Equation dans IR de la forme** $|x-a| = r$ **($r \geq 0$)**
$|x-a|=r$ équivaut à $x-a = r$ ou $x-a = -r$

Exemple :

Résoudre algébriquement puis graphiquement dans ℝ l'équation suivante : $|x+2,5|=3$

Résolution

Soit $x \in$ IR.

- **Résolution algébrique**

  $|x+2,5|=3 \leftrightarrow x+2,5 = -3$ ou $x+2,5 = 3$

  $\Leftrightarrow x = -5,5$ ou $x = 0,5$

L'ensemble des solutions est { -5,5 ;0,5}

- **Résolution graphique**

  $|x+2,5|=3 \Leftrightarrow |x-(-2,5)|=3$

  $\Leftrightarrow$ la distance de x à -2,5 est égale à

3) **Inéquations dans IR de la formule** $|x-a| \leq r$ ($r \geq 0$)

   Résolution de l'inéquation $|x-a| \leq r$

$|x-a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x-a \leq r$

$\Leftrightarrow a-r \leq x \leq a + r$.

Exemple

Résoudre algébriquement puis graphiquement dans IR l'inéquation suivante :
$|x-2| \leq 5$

Résolution

- **Résolution algébrique**

  Soit x ϵ IR.

  $|x-2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x-2 \leq 5$

  $\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 7$

  L'ensemble des solutions de (I) est $[-3;7]$

- **Résolution graphique**

  $|x-2| \leq 5 \Leftrightarrow$ la distance de x à 2 est inférieure ou égale à 5

VI / CALCULS APPROCHES

1. Approximations décimales

- **Théorème et définition**

Pour tout nombre réel x. il existe un nombre décimal d'ordre n tel que $d \leq x < d+10^{-n}$

❖ d est appelé approximation décimale par défaut d'ordre n de x.

❖ $d+10^{-n}$ est appelé approximation décimale par excès d'ordre n de x.

Exemple

On donne π = 3,141592

Déterminer les approximations décimales par défaut et par excès d'ordre 3 de π

Résolution

- L'approximation décimale par défaut de π est 3,141
- L'approximation décimale par excès de π est 3,142

2. Arrondi d'ordre n

- Règle

Soit n un nombre entier naturel.

Pour déterminer l'arrondi d'ordre n d'un nombre réel dont l'écriture décimale contient au moins n+1 chiffres après la virgule, on néglige :

❖ Tous les chiffres à partir du n+1 ième chiffre si le n+1 ième chiffre est 0,1 ,2,3 ou 4

❖ Tous les chiffres à partir du n+1 ième chiffre en ajoutant 1 au n ième chiffre si le n+1 ième chiffre est 5,6,7,8 ou 9

- <u>Exemple et notation</u>

Soit a= 1,246095

- 1,2 est l'arrondi d'ordre 1 de a. on écrit a ≈ 1,2
- 1,25 est l'arrondi d'ordre 2 de a. on écrit a ≈ 1,2

3. <u>Valeur approchée</u>

- <u>Définition</u>

x et α sont deux nombres réels. Soit l un nombre réel positif.

On dit que α est une valeur approchée de x à l-près si $|x-\alpha| \leq l$

<u>Exemples</u>

De l'encadrement suivant : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. On déduit que

❖ 1,4 est la valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$ à 10^{-1} près.

❖ 1,5 est la valeur approchée par excès de $\sqrt{2}$ à 10^{-1} près.

❖ 1,403 est la valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

❖ Tout nombre décimal compris dans l'intervalle [1,4 ;1,5] est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près avec n >1.

<u>TRAVAUX DIRIGES</u>

<u>Exercice 1</u> :

Sachant que : a < b.

1. Comparer $\frac{2-a}{3}$ et $\frac{2-b}{3}$
2. En déduit la comparaison de $\frac{2-\sqrt{7}}{3}$ et $\frac{2-\sqrt{5}}{3}$

<u>EXERCICE 2</u> :

On sait que : 2 < a < 4 et 6 < b < 8

1. Démontre que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$

2. Justifier que : $\frac{3}{8} < \frac{a+b}{ab} < \frac{2}{3}$

EXERCICE 3 :

Résoudre algébriquement les équations et inéquations suivantes :

a) $|x-3|\leq 2$ $\quad |x+1|<4 \quad |2x-5|<1$

b) $|x-3|=2 \quad |x+1|=4 \quad |2x-5|=1$

EXERCICE 4 :

On considère un trapèze dont les dimensions ne sont pas toutes connues de manière exacte :

La grande base B est telle que : $5{,}98 \leq B \leq 6{,}02$

La petite base b est telle que b = 4,9 à 10^{-2} près

La hauteur h = 4,7

1. Trouver un encadrement le plus précis possible de l'aide A du trapèze

$$A = \frac{B+b+h}{2}$$

2. En déduire une valeur approchée de A à 10^{-1} près.

EXERCICE 5 :

Ecrire le nombre $A = (9^{-1} \times 2^{2})^{4} : (3^{4}\times 2^{-3})^{3}$ sans dénominateur et à l'aide de puissances entières de nombres premiers.

EXERCICE 6 :

Démontre que $(\sqrt{7}-\sqrt{8})^{11} \times (\sqrt{7}+\sqrt{8})^{9} = 4\sqrt{14} - 15$

EXERCICE 7

Calcule les sommes, les produits et les quotients suivants :

1) $\frac{2}{3} + \frac{5}{7} - \frac{1}{4}$; $\quad$ 2) $\frac{7}{5} \times \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right)$; $\quad$ 3) $\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\right) : \frac{2}{3}$;

4) $a^{-4} \times a^{5} \times a^{-2}$; $\quad$ 5) $(a^{-2})^{5}$

EXERCICE 8 :

Recopie et réponds aux questions par vrai (V) ou faut (F).

a) 81 est la racine carrée de 9 $\square$

b) $(\sqrt{3})^3=3$ $\square$

c) $\sqrt{4}=16$ $\square$

d) $\sqrt{5}\times\sqrt{45}=15$ $\square$

e) $\sqrt{36}\times\sqrt{64}=\sqrt{100}$ $\square$

f) $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{40}}=\sqrt{2,5}$ $\square$

EXERCICE 9 :

On donne : $X= 3+2\sqrt{2}$ et $Y= 3-2\sqrt{2}$

1) Calcule X^2 ; Y^2 et XY

2) Démontre que $\frac{X}{Y}+\frac{Y}{X}$ est un entier ou écris sans radical au dénominateur.

EXERCICE 10 :

Ecris sans radical les nombres suivants :

$A= \sqrt{0,0049}$; $B= \sqrt{(-31)^2}$; $C= \sqrt{8}x5\sqrt{18}$; $D= 10x\sqrt{(\frac{12}{3})}$

EXERCICE 11:

On donne : $X = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

1) Ecris le nombre X sans radical au dénominateur

2) Sachant que $1,732<\sqrt{3}<1,733$; donne un encadrement de X à 10^{-2} près

EXERCICE 12:

Compare les nombres $A= 5\sqrt{2}$ et $B= 3\sqrt{5}$; $C= \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ et $D= \sqrt{3}$; $E= \frac{-3}{2\sqrt{5}}$ et $F= \frac{-3}{3\sqrt{2}}$;

Exercice 13

Ecris les nombres réels suivants sans le symbole

a. $|-\sqrt{3}|$; b. $|2\sqrt{3}-3|$; c. $|1-\sqrt{3}|$;

Exercice 14

Calculer chacun des nombres réels suivants et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

$a = (2^2 \text{ x } 5)^6[(-3) \times 5]^{-6} \times (-3)^9$;

$$b = \frac{-42^2 \times 14^3 \times (-70)^2}{(-50)^4 \times (-49^2)}$$

$$c = \frac{\frac{2}{7} + \frac{5}{21}}{\frac{5}{9} - \frac{1}{3}}$$

$$d = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$e = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3$$

Exercice 15

Simplifier l'écriture de chacun des nombres suivants :

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \ ; \ \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} \ ; \ \frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} \ ; \ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Exercice 16

Comparer les nombres réels dans chacun des cas ci-dessous.

a) $5\sqrt{3}$ et $4\sqrt{6}$; b) $1+2\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3} - 3$ et $5 + \sqrt{3}$

Exercice 17

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$

On pose :

$m = \dfrac{a+b}{2}$; $g = \sqrt{ab}$ et $h = \dfrac{2ab}{a+b}$

1. Comparer a et g ; g et m ; m et b
2. a) Montrer que $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

b) Comparer $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ et $\dfrac{1}{h}$; $\dfrac{1}{h}$ et $\dfrac{1}{a}$

Exercice 18

Dans chacun des cas suivants, donner des encadrements des nombres réels :

$a + b$; $a - b$; ab et $\frac{a}{b}$

on donne $17,3 < a < 17,4$ et $21,9 < b < 22$

Exercice 19

On donne les encadrements suivants :

$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,7321$.

Déterminer :

a) L'approximation décimale par défaut d'ordre 2 de $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$.

b) L'approximation décimale par excès d'ordre 3 de $5\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$

CHAPITRE II / PROPORTIONNALITE ET POURCENTAGE

I/ PROPORTIONNALITE

1. Définition

- Rapport de deux nombres

Soient a et b deux nombres réel tel que $b \neq 0$

On appelle rapport de a à b le quotient de a par b.

On le note : $\frac{a}{b}$.

Avec a le premier terme et b le deuxième terme.

Exemple :

$\frac{2}{3}$; $\frac{-5}{2}$; $\frac{-\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{5}$

- Proportion

Soient les nombres a, b, c et d non nuls. L'égalité de deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ est appelée une proportion.

On la note : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a, b, c, et d sont les quatre termes de la proportion.

a et d sont des termes extrêmes ;

b et c sont les termes moyens .

2. propriété

Dans une proportion, le produit des termes extrêmes est égal au produit des termes moyens.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Exemple :

$$\frac{12}{5} = \frac{48}{20} \Leftrightarrow 12 \times 20 = 48 \times 5 = 240$$

3. Conséquences

3.1- Echange des termes

* Echange des termes extrêmes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

Exemple :

$$\frac{12}{5} = \frac{48}{20} \Leftrightarrow \frac{20}{5} = \frac{48}{12}$$

- Echange des termes moyens

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Exemple

$$\frac{12}{5} = \frac{48}{20} \Leftrightarrow \frac{12}{48} = \frac{5}{20}$$

- Echange simultané

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

Exemple

$$\frac{12}{5} = \frac{48}{20} \Leftrightarrow \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$$

Remarque

Dans une proportion, on peut permuter les termes moyens entre eux et les termes extrêmes entre eux sans modifier le caractère de proportionnalité.

3.2- calcul d'un terme d'une proportion

Soit x le terme inconnu d'une proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Leftrightarrow ax = bc$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{bc}{a}$$

Exemple

Soit la proportion a) $\frac{620}{150} = \frac{x}{210}$; b) $\frac{5}{x} = \frac{4}{3}$; c) $\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$; d) $\frac{4}{5} = \frac{8}{x}$

Calculer x

Solution

a) $\frac{620}{150} = \frac{x}{210} \Leftrightarrow 150x = 620x210$

$\Leftrightarrow 150x = 130200$

$\Leftrightarrow x = \frac{130200}{150}$

$\Leftrightarrow x = 868$

b) $x = \frac{15}{4}$; c) $x = \frac{2}{3}$; d) $x = 10$

4. grandeurs proportionnelles

4.1- Définition

Soient deux grandeurs :

A dont les mesures sont : a_1 , a_2 , …. ,a_n

B dont les mesures sont : b_1 , b_2 ,… , b_n

A et B sont proportionnels si le rapport d'une mesure de A à une mesure de même ordre que B est une constante k c'est-à-dire que k est le même pour tous les ordres.

Exemple :

	1[er] ordre	2[e] ordre	3[e] ordre	4[e] ordre	5[e] ordre
A	12	16,8	30	48	52,8
B	5	7	12,5	20	22
K	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4

NB : k est le coefficient de proportionnalité de A et B avec $k = \frac{a1+a2+a3+\ldots+an}{b1+b2+b3+\ldots+bn}$

$$K=\frac{12+16,8+30+48+52,8}{5+7+12,5+20+22}$$

K=2,4

4.2- Type de grandeurs proportionnelles

4.2.1- proportionnalité directe

4.2.1.1- Expression mathématique

Soient $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ les mesures respectives de la grandeur A et $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, les mesures respectives de la grandeurs B.

A est directement proportionnelle à B signifie que $\frac{a1}{b1} = \frac{a2}{b2} = \frac{a3}{b3} = \dots = \frac{an}{bn} = k$

4.2.1.2- Règle

Deux grandeurs A et B sont directement proportionnelles si le rapport de toute mesure de l'une à la mesure du même ordre de l'autre est constant.

4.2.2- Proportionnalité indirecte

4.2.2.1- Expression mathématique

Soient $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ les mesures respectives de la grandeur C et $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, les mesures respectives de la grandeur D

C est inversement proportionnel à D signifie que $\frac{c1}{1/d1} = \frac{c2}{1/d2} = \frac{c3}{1/d3} = \dots = \frac{cn}{1/dn}$

*conséquence

Si C est inversement proportionnel à D alors $c_1d_1 = c_2d_2 = c_3d_3 = \dots = c_nd_n$.

4.2.2.2- Règles

Deux grandeurs C et D sont inversement proportionnelles si le produit des mesures de même ordre est constant.

4.2.3- Proportionnalité composée

4.2.3.1- Expression mathématique

Soient trois grandeurs A, B et C.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont les mesures respectives de la grandeur A ;

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ sont les mesures respectives de la grandeur B ;

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ sont les mesures respectives de la grandeur C .

Trois situations peuvent se présenter :

- Première situation

A est directement proportionnelle à B et à C signifie que :

$$\frac{a_1}{b_1c_1} = \frac{a_2}{b_2c_2} = \frac{a_3}{b_3c_3} = \dots = \frac{a_n}{b_nc_n}$$

- Deuxième situation

A est directement proportionnelle à B et inversement proportionnelle à C signifie que :

$$\frac{a_1}{b_1\times 1/c_1} = \frac{a_2}{b_2\times 1/c_2} = \frac{a_3}{b_3\times 1/c_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n\times 1/c_n}$$

- Troisième situation

A est directement proportionnelle à B et C signifie que :

$$\frac{a_1}{1/b_1 \times c_1} = \frac{a_2}{1/b_2 \times c_2} = \frac{a_3}{1/b_3 \times c_3} = \dots = \frac{a_n}{1/b_n \times c_n}$$

4.2.3.2/ Règle

A est inversement proportionnelle à B et C signifie que :

$a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2 = a_3b_3c_3 = \dots = a_nb_nc_n$.

5/ APPLICATION ; PARTAGES PROPORTIONNELS

Application 1 :

On partage une prime de 250.000 F entre trois ouvriers proportionnellement aux nombres d'enfants à charge qui sont 8 ;7 ;5.

Calculer la prime de chaque ouvrier.

Solution :

Soient x, y, z les primes reçues par les ouvriers qui ont respectivement 8 ;7 ;5 enfants.

x, y, z sont directement proportionnelles à 8 ;7 ;5 signifie que :

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{8+7+5} = k$$

Or x+ y+ z = 250000 et 8+7+5 =20

Ce qui entraine $k = \frac{250000}{20}$, donc k = 12500.

Pour déterminer la prime x, y, z reçues par les ouvriers qui ont 8 ; 7 ;5 enfants à leur charge,

on a :

- $\frac{x}{8}$ =12500 implique x = 12500x8

x = 100 000 F soit une prime de 100 000 F.

- $\frac{y}{7}$ = 12500 implique y = 12500x7

y = 87500 F soit une prime de 87500 F .

- $\frac{z}{5}$ = 12500 implique z = 12500x5

z = 62500 F soit une prime de 62500 F .

Vérification : 100 000+87500 +62500 = 250 000 F.

<u>Remarque :</u>

-Les valeurs 8 ;7 et 5 sont appelées nombres proportionnels

-Dans un partage proportionnel, on peut multiplier ou diviser les nombres proportionnels par un même nombre non nul sans modifier le résultat du partage.

II/<u>POURCENTAGES</u>

1- <u>Définition</u>

Un pourcentage est un rapport dont le deuxième terme est 100.

On note $\frac{t}{100}$ ou encore t%.t est le taux du pourcentage.

<u>Exemple</u> :

Un commerçant accorde un rabais de 15% sur un prix marqué.

Un rabais 15% signifie que sur un prix marqué de 100F, le client reçoit un rabais de 15F.

2- <u>Différents pourcentages</u>

On distingue :

- Le pourcentage direct
- Le pourcentage indirect
- Les pourcentages successifs

- Les pourcentages par tranche

2.1- Pourcentage direct

2.1.1- Notion de pourcentage direct

Application 1

Un commerçant accorde un rabais de 15% sur prix marqué de 240 000F à un client.

Calculer le montant du rabais

Solution :

Soit x le montant du rabais

Il y a deux grandeurs A et B directement proportionnelles :

A : rabais de mesures 15 et x

B : prix marqué de mesures 100 et 240 000

A	15	X
B	100	240 000

$\frac{15}{100} = \frac{x}{240000}$ soit x = 36000 F .

2.1.2- règle :

Pour calculer t% d'une valeur (connue), on la multiplie par $\frac{t}{100}$.

- Application :

Soit x le montant du rabais.

15% est appliqué sur la valeur connue de 240 000F ; alors $x = 240\,000 \times \frac{15}{100}$,soit x = 36000F

2.2- Pourcentage indirect

2.2.1- Notion de pourcentage indirect

Application 2 :

Après une remise de 7,5% , un client paye finalement une mobylette à 344100 F. Quel était le montant de la remise ?

Solution :

Soit x le montant de la remise.

Une remise de 7,5%, signifie que sur un prix marqué de 100F, il y a une remise de 7,5F.

On paye finalement (100-7,5) = 92,5F

On constate donc deux grandeurs A, B directement proportionnelles.

A : prix net de mesures 344100 ; 92,5.

B : Remise de mesures x ;7,5

A	344100	92,5
B	X	7,5

On écrit alors : $\frac{344100}{x} = \frac{92,5}{7,5}$ donc x = $\frac{344100x7,5}{92,5}$ soit x = 27 900F

2.2.2- Règles

Connaissant la valeur nette :

- Pour calculer la réduction de t% on multiplie la valeur nette par $\frac{t}{100-t}$.
- Pour calculer l'augmentation de t % on multiplie la valeur nette par $\frac{t}{100+t}$

Application :

Soit x le montant de la remise.

7,5 % est appliqué sur le prix marqué inconnu et non directement sur 344 100.

Il faut utiliser la règle du pourcentage indirect.

x = $\frac{344100x7,5}{100-7,5}$ ce qui donne x = 27 900.

Soit 27 100F

2.3- Pourcentages successifs

2.3.1-Définition

Les pourcentages successifs sont des réductions accordées à un client. Ces pourcentages successifs se déterminent l'un à la suite de l'autre sur chaque résultat net. On dit que ces montants se calculent par cascades.

On distingue, par ordre de détermination, différents types de réductions :

- Les réductions sur le poids des marchandises.

Ce sont :

- Les réductions commerciales : le rabais, la remise, la ristourne ;
- La réduction financière : l'escompte de règlement.

La résultante de tous ces pourcentages définit le coefficient multiplicateur.

2.3.2-Le coefficient multiplicateur

Soit k un nombre réel.

On appelle coefficient multiplicateur, le nombre k qui multiplie un nombre A pour obtenir un nombre B. on a KA = B, donc k = $\frac{B}{A}$.

Le coefficient multiplicateur permet également de trouver le taux unique de réduction r.

r = 1-k

2.4- Pourcentages par tranches

2.4.1- Notion :

Les pourcentages par tranches sont des pourcentages dont chacun est appliqué à un intervalle de nombres spécifiques.

Le principe de calcul de pourcentage par tranches est appliqué dans certaines entreprises lors du payement des commissions.

2.4.2- Application :

Le barème de rémunération proposé par l'assurance ACI à ses démarcheurs est le suivant :

- De 0 à 50 000 : 1 %,
- De 50 000 à 100 000 : 2,5 %,
- De 100 000 et plus : 6 %

Le démarcheur Sek a pu trouver dans le mois de Février deux clients X et Y.

Le client X souscrit à un contrat de 90 000 F et Y à contrat de 250 000.

Le minimum de gain offert à chaque démarcheur étant de 30 000 F, calculer le gain de Sek pour ce mois de Février.

Solution :

1- Commission avec X

$(50\ 000-0) \times \frac{1}{100} = 50\ 000 \times \frac{1}{100}$

$=500$

$(90\ 000-50000) \times \frac{2,5}{100} = 40000 \times \frac{2,5}{100}$

$= 1000$

Total avec X : 500+1000 = 1500

2- Commission avec Y

$(50\ 000-0) \times \frac{1}{100} = 50000 \times \frac{1}{100}$

$=500$

$(100\ 000-50000) \times \frac{2,5}{100} = 50000 \times \frac{2,5}{100}$

$= 1250$

$(250\ 000-100\ 000) \times \frac{6}{100} = 150\ 000 \times \frac{6}{100}$

$= 9000$

Total avec Y : 500+1250+9000=10 750

3- Le gain de Sek : 30 000F+1500F+10 750F = 42 250 F.

TRAVAUX DIRIGES

Exercice n°1

Le salaire total de trois (3) ouvriers travaillant ensemble s'élève à 65.000f pour 5 jours de travail. Le 1er gagne 4.400f par jour, le 2e gagne 30.000f pour 6 jours de travail. Quel est le gain du 3e pour 28 jours de travail.

Exercice n°2

Pour établir un panneau de bois peint de 1,25 m^2, on a dépensé 1.300f de bois et 280f de peinture. Quel est dans les mêmes conditions, le prix de revient total d'un panneau de 3,2m^2.

Exercice n°3 :

Un oncle a laissé à ses trois (3) neveux un héritage s'élevant à 3 570 000 F. il a chargé le notaire de le répartir proportionnellement à leurs nombres d'enfants 2 ;3 ;5 et en raison inverse de leurs salaires 250 000 F ;600 000 F ;400 000 F

Calculer le montant d'héritage de chaque neveu.

Exercice n°4

La situation d'une entreprise est donnée par le tableau suivant :

Eléments	Nombre d'enfants	Ancienneté
1er secrétaire	2	12 ans
2e secrétaire	3	5 ans
3e secrétaire	1	8 ans

Le directeur de cette entreprise décide de réaliser en prime de vacance entre ces trois (3) secrétaires la somme globale de 23500.

Calculer la prime de chacune, si le partage est réalisé proportionnellement aux nombres d'enfants et aux nombres d'années d'ancienneté.

EXERCICE n°5

Trois contremaitres dirigent des équipes d'ouvrier : le premier comprend 10 ouvriers, le deuxième comprend 18 ouvriers et le troisième comprend 22 ouvriers. On désire partager 9600f entre 'les 3 contremaitres proportionnellement aux nombres d'ouvriers qu'ils dirigent.

Exercice n°6

Deux associés ont mis en commun 3000 000 f dans une entreprise. Le bénéfice a été partager proportionnellement aux mises et le premier a reçu 84000f de plus que le second. Le bénéfice total ayant été de 630 000f, trouve la mise de chacun.

EXERCICE n°7

3 poulets valent le prix de 4 canards, 2 canards valent le prix de 5 pigeons, 11 pigeons

valent le prix de 6 lapins. Sachant que 5 lapins valent 8250f quel est le prix de chaque animal ?

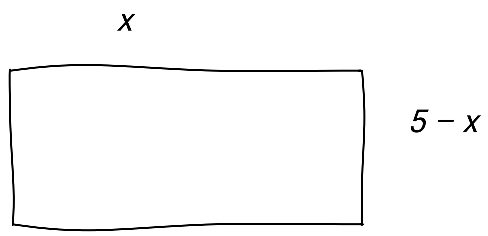
CHAPITRE III/ LES FONCTIONS : GENERALITES ET VARIATIONS

I. Vocabulaire et notations

1. Exemple d'introduction :

Avec une corde de longueur 10 cm, on fabrique un rectangle. On désigne par x la longueur d'un côté de ce rectangle.

- Exprimer en fonction de x l'aire du rectangle.



Les dimensions du rectangle sont donc : x et $5 - x$.

En effet : $P = 2x + 2(5 - x) = 10$ cm.

Ainsi l'aire du rectangle s'exprime par la formule $A = x(5 - x)$

- Développer A.

$A = x(5 - x) = 5x - x^2$

3) On peut calculer l'aire du rectangle pour différentes valeurs de x :

X	*1*	*1,5*	*2*	*2,5*	*3*	*3,5*	*4*	*4,5*
Aire	4	5,25	6	6,25	6	5,25	4	2,25

Ce tableau est appelé un tableau de valeurs.

Pour chaque nombre x, on a fait correspondre un nombre égal à l'aire du rectangle.

Par exemple : $1 \mapsto 4$

$2 \mapsto 6$

De façon générale, on note : $A : x \mapsto 5x-x^2$

$x \mapsto 5x - x^2$ se lit « à x, on associe $5x - x^2$ »

A est appelée une fonction. C'est une « machine » mathématique qui, à un nombre donné, fait correspondre un autre nombre.

$$x \overset{A}{\longmapsto} 5x - x^2$$

Nombre de départ nombre correspondant

L'expression A dépend de la valeur de x et varie en fonction de x. x est appelée la variable.

On note ainsi : $\boxed{A(x) = 5x - x^2}$

$A(x)$ se lit « A de x ».

2. Définitions

Soit D une partie de l'ensemble des nombres réels IR.
Une fonction f définie sur D associe à tout nombre réel x de D un unique nombre réel, noté $f(x)$. D est appelé l'ensemble de définition de la fonction f.
On note :

$f : \text{D} \rightarrow \text{IR}$

$x \mapsto f(x)$

Et on lit : « La fonction f, définie pour x appartenant à D, qui a un nombre x associe le nombre f(x). »

REMARQUE

- Lorsque l'ensemble d'arrivé d'une fonction f est un ensemble de nombre réel, on dit que f est une fonction numérique
- Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction numérique est un ensemble de nombre réel, on dit que cette fonction est une fonction numérique d'une variable réelle.

3. Image, antécédent

Exemples :

Pour la fonction A définie plus haut, on avait :
$A(2{,}5) = 6{,}25$; $A(1) = 4$

$2,5 \mapsto 6,25$

Antécédent de 6,25 | Image de 2,5

On dit que :

- L'image de 2,5 par la fonction *A* est 6,25.
- 6,25 est un antécédent de 2,5 par A.

- **Remarques :**
  - Un nombre possède une unique image.
  - Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

  Par exemple : les antécédents de 5,25 sont 1,5 et 3,5 (voir la méthode suivante).
- **Méthode : Calculer une image ou un antécédent**

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{x} + 1$

1) Compléter le tableau de valeurs :

X	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$				

2) Compléter alors :

a) L'image de 4 par *f* est …
b) Un antécédent de 5 par *f* est …
c) f : … $\rightarrow$ 4,2
d) $f(20,25)$ = …

3) Calculer $f(4,41)$ et $f(1310,44)$

Résolution

1)

X	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$	3	4,2	5	5,5

2) a) L'image de 4 par *f* est **3**.
b) Un antécédent de 5 par *f* est **16**.
c) f : **10,24** $\rightarrow$ 4,2
d) $f(20,25)$ = **5,5**

3) $f(4,41) = \sqrt{4,41} + 1 = 3,1$
$f(1310,44) = \sqrt{1310,44} + 1 = 37,2$

II. Coïncidence et égalité de deux fonctions numériques

1. Coïncidence de deux fonctions numériques

les fonctions f et g coïncident sur un intervalle I si les fonctions f et g sont définies sur I et $\forall\, x \in I$, $f(x) = g(x)$

Exemple

Soit f et g deux fonctions numériques définies par :

$f(x) = \frac{|x|-1}{x+1}$ et $g(x) = -1$

f et g coïncident-elles sur l'intervalle I=]-∞ ; -1[

<u>Solution</u> :

D_f= { x ϵ IR\ X+1≠0 }

X+1≠ 0 équivaut à x≠ -1

D_f = IR\{-1}

I inclus dans D_f cela implique que f est définie sur I.

D_g=IR

I inclus dans D_g cela implique que g est définie sur I.

∀ xϵ]-∞ ; -1[, |x|=-x

$$f(x)=\frac{-x-1}{x+1}=\frac{-(x+1)}{x+1}=-1$$

f(x)=g(x)

∀ xϵI ; f(x)= g(x) donc f et g coïncident sur I

2)Egalité de deux (2) fonctions numériques

Deux fonctions numériques f et g sont égales si D_f= D_g et f(x)=g(x)

<u>Exemples</u>

Soient les fonctions

$f : IR \rightarrow IR$ et

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$g : IR \rightarrow IR$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Démontre que f et g sont égales

D_f={xϵ IR\ x-1≥ 0 et x-1 ≠0}

$X \geq 1$ et $x \neq 1$

$D_f =]1 ; +\infty[$

$D_g = \{x \in IR \backslash\ x-1 > 0\}$

$X > 1$; $D_g =]1 ; +\infty[$

donc $D_f = D_g$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1})}{(x-1)(\sqrt{x-1})}$$

$$= \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x-1})}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

donc $f(x)=g(x)$

$D_f=D_g$ et $f(x)=g(x)$ d'où f est égale à g

III. Représentation graphique d'une fonction

1.Définition

Soit A une fonction numérique et D son ensemble de définition, l'ensemble des points M de cordonnées (x ;A(x)) où x décrit D, est la courbe représentative (représentation graphique) de A dans le plan muni du repère (O,I,J).

- Remarque :

Une courbe (C) est la représentation graphique d'une fonction A dans le plan muni du repère (O,I,J) si toute droite parallèle à l'axe (OJ) coupe la courbe (C) en O ou un point.

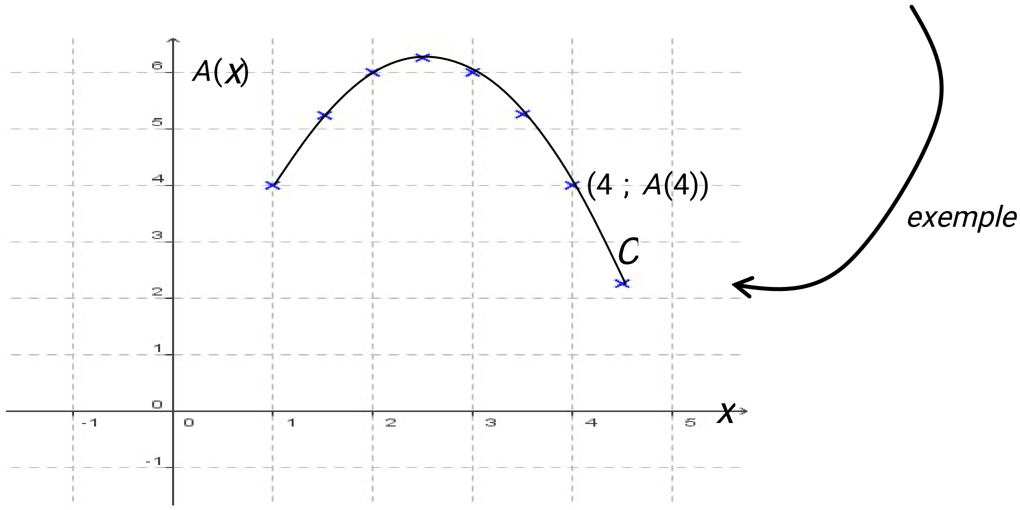
2.Courbe représentative

Exemple :

Représenter les données du tableau de valeurs du paragraphe I. dans un repère tel qu'on trouve en abscisse la longueur du côté du rectangle et en ordonnée son aire correspondante.

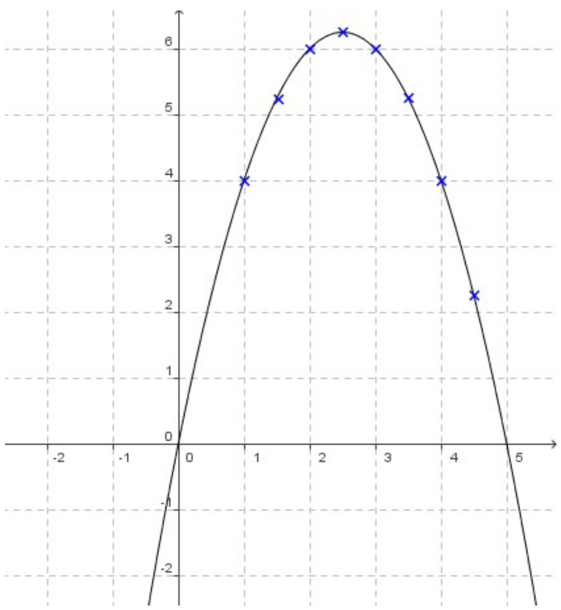
En reliant les points, on obtient une courbe *C*.

Tout point de la courbe *C* possède donc des coordonnées de la forme (x ; $A(x)$).



Avec votre calculatrice saisir directement l'expression de la fonction *A*.

Avec la touche f(x) on écriera : $Y_1=5x-x^2$ et on choisira une fenêtre adaptée.



La courbe représentative de la fonction *A* dépassé les limites du problème.
En effet, l'expression de la fonction *A* accepte par exemple des valeurs négatives de *x*, ce que les données du problème rejettent puisque *x* représente une longueur !

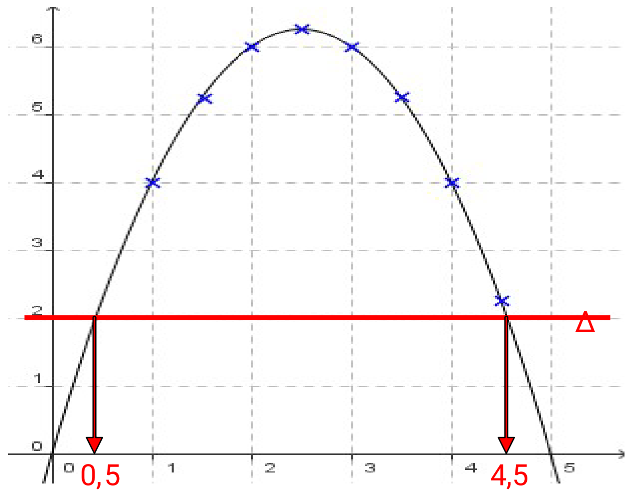
<u>3.Résolution graphique d'équations et d'inéquations</u>

<u>Exemples :</u>

Répondre graphiquement aux questions suivantes :

1) Donner un ordre de grandeur des dimensions d'un rectangle dont l'aire est égale à $2cm^2$.
2) Résoudre graphiquement l'inéquation $A(x) > 2$. Donner une interprétation du résultat.

Résolution



1) Il s'agit de trouver les antécédents de 2 par la fonction *A*.

Ce qui revient à résoudre l'équation $A(x) = 2$.

On détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe *C* avec la droite Δ parallèle à l'axe des abscisses passant par le point (0 ; 2).

On lit graphiquement que l'équation $A(x) = 2$ admet pour solutions : les nombres 0,5 et 4,5.

Le rectangle de dimensions 0,5 cm sur 4,5 cm possède une aire environ égale à 2 cm^2.

2) Résoudre l'inéquation $A(x) > 2$ revient à déterminer les abscisses des points de *C* pour lesquels *C* est au-dessus la droite Δ.

On lit graphiquement que l'inéquation $A(x) > 2$ admet pour solutions tous les nombres de l'intervalle [0,5 ; 4,5].

Si une dimension du rectangle est comprise entre 0,5 et 4,5 alors son aire est supérieure à 2.

Remarques :

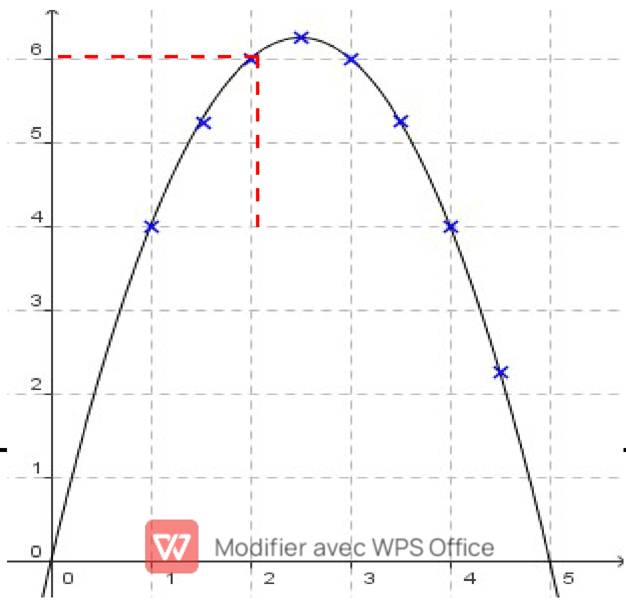
a) Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.

b) L'équation $A(x) = 7$ n'a pas de solution car dans ce cas la droite Δ ne coupe pas la courbe.

c) Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

III. Variations d'une fonction numerique

1. Exemple



Pour des valeurs croissantes choisies pour *x* dans l'intervalle [0 ; 2,5], l'aire *A* du rectangle est également croissante.

Par exemple : $1 < 2$ et $A(1) < A(2)$.

Pour des valeurs croissantes choisies pour *x* dans l'intervalle [2,5 ; 5], l'aire *A* du rectangle est décroissante.

Par exemple : $3 < 4$ et $A(3) > A(4)$.

On dit que la fonction *A* est croissante sur l'intervalle [0 ; 2,5] et décroissante sur l'intervalle [2,5 ; 5].

2. Définitions

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

-Dire que *f* est croissante sur I signifie que pour tous réels *a* et *b* de I :
si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

-Dire que *f* est décroissante sur I signifie que pour tous réels *a* et *b* de I :
si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.

-Dire que *f* est constante sur I signifie que pour tous réels *a* et *b* de I : $f(a)=f(b)$
.

Dire que *f* est monotone sur I signifie que *f* est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

- Remarques :
  - On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.
  - On dit qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.
  - Une fonction constante sur I peut être considérée comme croissante et décroissante sur I.

3. Maximum ; minimum

Exemple :
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 5], on a :

$A(x) \leq 6,25$. 6,25 est le maximum de la fonction A.

L'aire du rectangle est maximum pour $x = 2,5$.

- Définitions :

Soit f une fonction de l'intervalle I. a et b deux nombres réels de I.

- Dire que f admet un maximum M en a de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I,
$f(x) \leq M$.

- Dire que f admet un minimum m en b de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I,
$f(x) \geq m$.

4. Tableau de variations

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone.

- Exemple :

La fonction A est croissante sur l'intervalle [0 ; 2,5] et décroissante sur l'intervalle [2,5 ; 5].

$A(0) = 0$

$A(2,5) = 6,25$

$A(5) = 0$

x	0		2,5		5
$A(x)$	0	↗	6,25	↘	0

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Fonctions déterminées par une formule explicite

$f : IR \to IR$

$x \mapsto \sqrt{5-7x}$

$g : \{-4 ;-2 ;0 ;1 ; \frac{1}{2}\} \to IR$

$x \mapsto \frac{1}{-4+x^2}$

Déterminer l'ensemble de départ de f.

Déterminer l'ensemble d'arrivé de f.

Déterminer l'ensemble de départ de g.

Déterminer l'ensemble d'arrivé de g .

Dire si f et g sont des fonctions explicites

Exercice 2

On donne la fonction numérique f,

Détermine par une formule explicite ci-dessous.

$f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$

1- Détermine les images par f le : -2 ;-1 ;0 ;1 ;3.

2- Détermine les antécédents par f de : -3 ;1 ;3

Exercice 3

Soit f la fonction définie de IR vers IR par $f(x)=\frac{3}{2x+1}$

1.Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Calculer l'image par f de chacun des nombres réels suivants : -3 ;0 et 2

3.Quel est l'antécédent de -3 ;0 et 1 par f ?

Exercice 4

Soit la fonction g : $IR \rightarrow IR$

$x \mapsto \sqrt{x+1}$

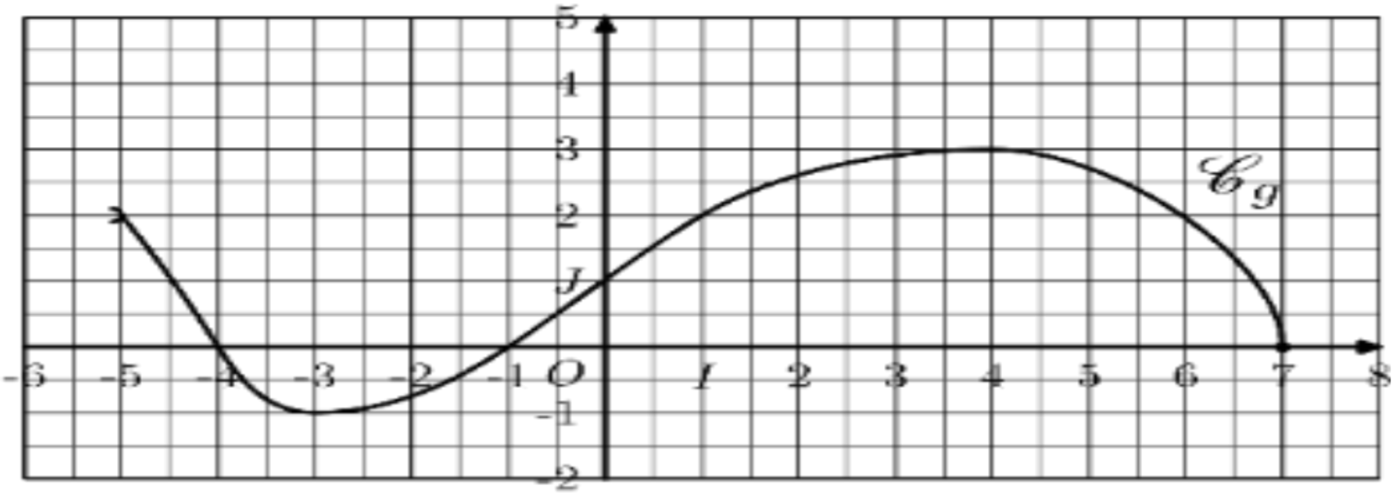
1.Determiner l'ensemble de définition de g.

2.Calculer l'image de chacun des nombres réels suivants : $\frac{-1}{3}$; $\frac{-2}{5}$; 1,5 ;3 ; 8 ;17.

3.Déterminer les antécédents par g de chacun des nombres réels suivants : 2 ;0 et -1.

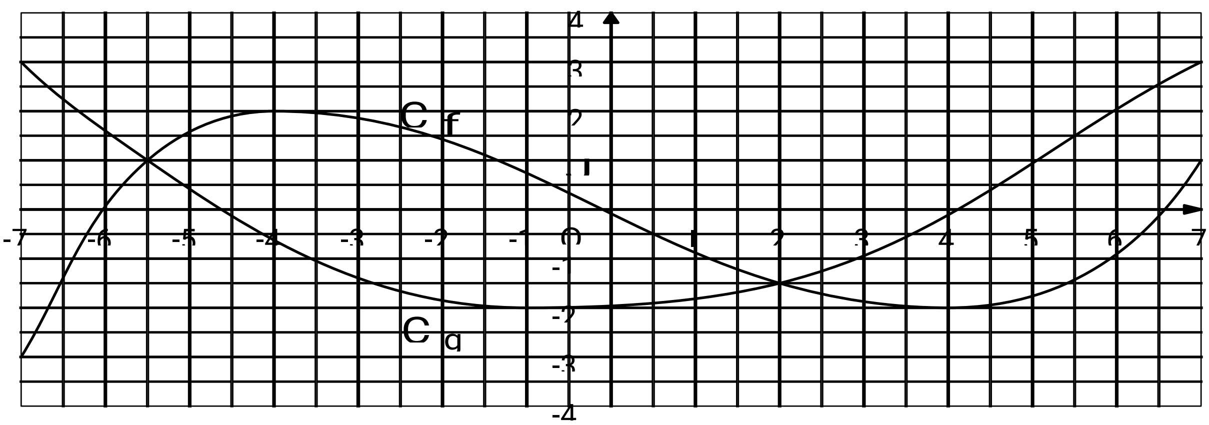
Exercice 5

Dans un repère $(O ; I ; J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g :



1. Donner, sans justification, l'ensemble de définition de la fonction g.

Exercice 6



Déterminer,graphiquement, les coordonnées des points d'intersection des courbes Cf et Cg

Exercice 7

Soit f et g deux fonctions de IR vers IR définies par : f(x)= 1 et g(x)= $\frac{|x|+1}{1-x}$

1.Déterminer les ensembles de définitions de f et g

2.Démontrer que f et g coïncident sur]-∞,0]

CHAPITRE IV/ POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

I/ GENERALITES SUR LES POLYNÔMES

1. Polynôme

- **Définitions**

-On appelle fonction monôme (ou simplement monôme) toute fonction de la forme x associé à ax^n où a est un nombre réel, n est un nombre entier naturel et x une variable réelle. Si $a \neq 0$, le monôme qui a x associé ax^n est appelé monôme de degré n et de coefficient a.

-On appelle fonction polynôme (ou simplement polynôme) toute somme algébrique de monômes.

REMARQUES :

- Un monôme est un polynôme
- 0 est un polynôme appelé polynôme nul
- Tout polynôme est défini sur IR.

EXEMPLES :

7 ; $3x + 1$; $-\frac{5}{3}x^2 + 4x$; $-4x^3 + \sqrt{2}x^2$; $x^2 - 2x + 7$ sont des polynômes.

2. Degré, coefficient d'un polynôme

- **Définition**

-Lorsqu'un polynôme non nul est écrit sous la forme développée et réduite. On appelle degré de ce polynôme le degré du monôme de plus haut degré.

-Lorsqu'un polynôme de degré n est écrit sous forme développée réduite et ordonnée suivant les puissances de la variable x d'exposants décroissants. On appelle coefficients de ce polynôme les coefficients des monômes qui le composent dans cet ordre en considérant comme nul le coefficient d'un terme de degré inférieur à n qui n'apparait pas.

NOTATION :

Si p(x) est un polynôme non nul, le degré de p(x) est noté d°P

Exemples :

Soit le polynôme $P(x)= 5x^3 + 7x^2 - x + 5$

Le degré de P(x) est 3 et les coefficients de P(x) sont 5 ;7 ;-1 ;5.

Soit le polynôme $Q(x)= x^4 - 4x^2 + 1$

Le degré de $Q(x)$ est 4 et ses coefficients sont 2 ; -4 ;1.

Exercice1

Dans chacun des cas suivants, développer, réduire et ordonner le polynôme $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x. préciser le degré et les coefficients de $P(x)$.

a) $P(x)=(x^2+3)(x+1-x(4x-3)$

b) $P(x)=(x-1)^2-4(x^2+2)^2$

3. Egalité de deux polynômes

- Propriété

Deux polynômes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exercice2

On considère les polynômes $P(x)=(x+2)^2+1$ et $Q(x)=(x-1)^2+6(x-1)+10$

Justifier que $P(x)=Q(x)$

Solution

On a : $P(x)=(x+2)^2+1 = x^2+4x+4+1= x^2 + 4x+5$

$Q(x)=(x-1)^2+6(x-1)+10 = x^2-2x+1+6x-6+10 = x^2+4x+5$

Donc $P(x)=Q(x)$

Exercice3

Soit les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ tels que : $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des nombres réels et

$Q(x)=-5x^3+x^2+3$

Déterminer les nombres réels a, b, c et d pour que $P(x)=Q(x)$

Solution

$P(x)=Q(x) \Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d = -5x^3+x^2+3$

$\leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d = -5x^3+x^2+0x+3$

$\leftrightarrow a=-5 ; b=1 ; c=0 ; d=3$

4. Somme et produit de polynôme

Exercice 4

Soit les polynômes suivants :

$P(x) = 12x^3 - x + 4$; $Q(x) = -4x^3 + 5x^2 + x - 1$; $R(x) = 2x - 4x^2 + 7 - 5x^3$ et $S(x) = x - 4$

1. Déterminer et ordonner suivant les puissances décroissantes de x, chacune des sommes suivantes : $P(x) + Q(x)$; $R(x) + S(x)$
2. Déterminer et ordonner suivant les puissances décroissantes de x chacun des produits suivants : $P(x) \times H(x)$; $R(x) \times S(x)$.

REMARQUE

- $d°(P + Q)$ est inférieur ou égal au plus grand des nombres $d°P$ et $d°Q$
- $d°(PQ) = d°P + d°Q$

5. Factorisation d'un polynôme

a) Produits remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2)$

b) Définition

Un polynôme mis sous la forme d'un produit de polynômes de degré supérieurs ou égaux à 1 est dit factorisé.

Exercice 5

Ecrire sous la forme d'un produit de polynômes du premier degré les polynômes ci-dessous :

$P(x) = 2x(x - 3) + 9 - 3x$; $Q(x) = (2x - 3)^2 - (5 - x)(2x - 3)$; $R(x) = 5x^3 - 2x^2 - 5x + 2$;

$S(x) = 24x - 6x^3$

Solution

- $P(x) = 2x(x - 3) + 9 - 3x$;

  $P(x) = 2x(x - 3) + 3(3 - x)$;

$P(x)= (x - 3)(2x - 3)$.

- $Q(x)= (2x - 3)^2 - (5 - x)(2x - 3)$

  $Q(x)= (2x - 3)(x - 8)$

- $R(x)= 5x^3 - 2x^2 - 5x + 2$

  $R(x)= (5x - 2)(x - 1)(x + 1)$

Exercice 6

Utiliser les produits remarquables pour donner une factorisation des polynômes suivants :

$P(x)= 36x^2-(5x-2)^2$; $Q(x)= 8x^3-27$

Solution

$P(x)= (6x)^2 - (5x - 2)^2$

$P(x)= (6x - 5x + 2)(6x + 5x - 2)$

$P(x)= (x + 2)(11x - 2)$

$Q(x)= (2x)^3 - 3^3$ $\qquad$ $Q(x)= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$.

II/ POLYNÔME DU SECOND DEGRE

1. Forme canonique

- Propriété

Pour tout polynôme P(x) du second degré. Il existe des nombres réels a.α et β tels que, pour tout nombre réel x :

$P(x)= a[(x+\alpha)^2 +\beta]$.

Cette écriture de P(x) est appelée forme canonique.

REMARQUE :

.Si $\beta >$ alors P(x) ne peut être factorisé

.Si $\beta <$ alors P(x) peut être factorisé

- Point méthode :

Pour écrire un polynôme du second degré sous forme canonique, on utilise l'égalité :

$x^2 + ux = (x + \frac{u}{2})^2 - (\frac{u}{2})^2$

Exercice 7

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes suivants :

$A(x)= x^2-2x+5$;$B(x)= 4x^2+5x+1$

Solution

A(x)= x^2-2 x +5

A(x)= $(x-1)^2$-1+5

A(x)= $(x-1)^2$+4

B(x)= 4 x^2+5 x +1

B(x)= $4(x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4})$

B(x)= $4[(x+\frac{5}{8})^2-\frac{25}{64}+\frac{1}{4}]$

B(x)= $4[(x+\frac{5}{8})^2-\frac{9}{64}]$

2. Factorisation d'un polynôme du second degré

Exercice 8

Ecrire les polynômes suivants sous la forme canonique puis les factoriser si possible

P(x)= x^2+6 x +5 ;R(x)= 9 x^2-6 x +1

Solution

P(x)= x^2+6 x +5

P(x)= $(x+3)^2-4$

P(x)= (x +3-2)(x +3+2)

P(x)= (x +1)(x +5)

R(x)= 9 x^2-6 x +1

R(x)= $9(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9})$

R(x)= $9[(x-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}]$

R(x)= $9(x-\frac{1}{3})^2$

3. Etude de signe d'un polynôme du second degré

a) Signe d'un polynôme de degré 1

Pour étudier le signe du polynôme de degré 1 P(x)= ax+b , a et b deux nombres réels tels que a ≠0 on peut utiliser le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
a x + b	Signe de –a	0	Signe de a

<u>Exercice 9</u>

Etudier le signe des polynômes P(x)= -5 x +15 et Q(x)= 2 x +5

<u>Solution</u>

- Signe de P(x)= -5 x +15. Ici a=-5 et a est du signe –

  P(x)= 0 $\leftrightarrow$ -5 x +15= 0

  $\Leftrightarrow$ x = 3 donc 3 est le zéro ou solution de p

  D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
-5 x + 15	+	0	-

Ainsi :

Pour tout x ∈]-∞ ;3[, P(x)> 0

Pour tout x ∈]3 ;+∞[, P(x)<0

Pour tout x ∈ {3}, P(3)= 0

- Signe de Q(x)= 2 x +5. Ici, a= 2et a est de signe positif

  Q(x)= 0 $\Leftrightarrow$ 2x +5= 0

  $\Leftrightarrow$ x = $-\frac{5}{2}$.Donc $-\frac{5}{2}$ est le zéro ou la solution de Q

  D'où le tableau suivant

x	$-\infty$ $+\infty$	$-\frac{5}{2}$	
2 x +5	-	0	+

Ainsi :

Pour tout x $\in$]-∞ ; - $\frac{5}{2}$ [, Q(x)< 0

Pour tout x $\in$] - $\frac{5}{2}$;+∞[, Q()>0

Pour tout x $\in$ {- $\frac{5}{2}$}, Q(x)= 0

b) <u>Signe d'un</u> x <u>polynôme de degré 2</u>

<u>Exercice 10</u>

Etudier le signe de chacun des polynômes suivants :

$P(x)= (-x+1)(\frac{2}{7}x + 2)$; $Q(x)= 3x^2 - 5x + 2$; $R(x)= 1 - 9x^2$

<u>Résolution</u>

- Signe de $P(x) = (-x+1)(\frac{2}{7}x + 2)$

  $P(x) = 0 \Leftrightarrow (-x+1)(\frac{2}{7}x + 2) = 0$

  $\Leftrightarrow$ x = 1 ou x = -7

x	-∞	-7		1	+∞
- x +1	+		+	0	-
$\frac{2}{7}x + 2$	-	0	+		+
$P(x) = (-x+1)(\frac{2}{7}x + 2)$	-	0	+	0	-

Ainsi :

Pour tout x $\in$] -∞ ; -7[, P(x) < 0

Pour tout x $\in$] -7 ; 1 [, P(x) > 0

Pour tout x $\in$] 1 ; +∞[, P(x) < 0

Pour tout x $\in$ { -7 ;1} , P(x) = 0

- Signe de $Q(x) = 3x^2 - 5x + 2$

  La forme factorisée de Q(x) est Q(x)= (x - 1)(3 x – 2)

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1	$+\infty$
x -1	-		-	0	+	
3 x – 2	-	0	+		+	
Q(x)= (x - 1)(3 x – 2)	+	0	-	0	+	

Ainsi :

Pour tout $x \in \left]-\infty ; \frac{2}{3}\right[$, $P(x) > 0$

Pour tout $x \in \left]\frac{2}{3} ; 1\right[$, $P(x) < 0$

Pour tout $x \in \left]1 ; +\infty\right[$, $P(x) > 0$

Pour tout $x \in \left\{\frac{2}{3} ; 1\right\}$, $P(x) = 0$

III/ FACTORISATION PAR x - α

1. Théorème fondamental

Soit P un polynôme et α un nombre réel.

α est un zéro de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que : pour tout nombre réel x, P(x) = (x - α)Q(x)

Q(x) est appelé le quotient de P(x) par x - α

2. Détermination pratique du quotient de P(x) par x - α

Exercice 11

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

1- Vérifier que P(-2) = 0

2- Déterminer le polynôme du second degré Q(x) tel que pour tout nombre réel x,

$P(x) = (x+2)Q(x)$

Résolution

1. $P(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 11(-2) + 6$

$P(-2) = -16-12+22+6$

P(-2) = 0. Donc -2 est un zéro de P(x)

2. Pour déterminer le polynôme Q(x), nous proposons ici deux méthodes :

- **Méthode des coefficients indéterminés**

-2est un zéro de P donc il existe un polynôme Q tel que P(x) = (x +2)Q(x) .

Le polynôme P(x) est de degré 3 donc Q(x) est de degré 2 :

Q(x) est de la forme $a x^2 + b x + c$

$P(x) = (x+2)(a x^2 + b x + c)$

$P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + 2a x^2 + 2b x + 2c$

Soit $P(x) = a x^3 + (2a+b) x^2 + (2b+c) x + 2c$

Comme par hypothèse $P(x) = 2 x^3 - 3 x^2 - 11 x + 6$ alors on a l'égalité

$2 x^3 - 3 x^2 - 11 x + 6 = a x^3 + b x^2 + c x + 2a x^2 + 2b x + 2c$

Par identification des coefficients, il vient :

$\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=-3 \\ 2a+c=-11 \\ 2c=6 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} a=2 \\ b=-7 \\ c=3 \end{cases}$

D'où $Q(x) = 2 x^2 - 7 x + 3$ et $P(x) = (x+2)(2 x^2 - 7 x + 3)$

- **Division euclidienne**

on effectue la division euclidienne de $2 x^3 - 3 x^2 - 11 x + 6$ par $x + 2$ pour trouver le quotient Q(x).

$$
\begin{array}{l|l}
2 x^3 - 3 x^2 - 11 x + 6 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-2 x^3 - 4 x^2} & 2 x^2 - 7 x + 3 \\
0 \quad -7 x^2 - 11 x & \\
\quad \underline{7 x^2 + 14 x} & \\
\quad 0 + 3 x + 6 & \\
\quad \underline{-3 x - 6} & \\
\quad 0 + 0 &
\end{array}
$$

D'où $Q(x) = 2 x^2 - 7 x + 3$ et $P(x) = (x+2)(2 x^2 - 7 x + 3)$

<u>Exercice 12</u>

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ de l'exercice 10 résolu

1. Factorise P(x) en produit de polynômes du premier degré
2. Etudier le signe de P(x) suivant les valeurs de x.

<u>Résolution</u>

1. Dans l'exercice précédent, on factorise P(x) par x+ 2 : $P(x) = (x + 2)(2x^2 - 7x + 3)$.

   Il reste à factoriser $Q(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

   Il faut passer d'abord par la forme canonique et ensuite factoriser : $Q(x) = 2x^2 - 7x + 3$

   $Q(x) = 2x^2 - 7x + 3$

   $Q(x) = 2(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2})$

   $Q(x) = 2[(x - \frac{7}{4})^2 - \frac{25}{16}]$

   $Q(x) = 2[(x - \frac{7}{4})^2 - (\frac{5}{4})^2]$

   $Q(x) = (x - 3)(2x - 1)$

   D'où $P(x) = (x + 2)(x - 3)(2x - 1)$

2. Signe de P(x)

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$ $+\infty$	-2		$\frac{1}{2}$		3	
$x + 2$	-	0	+		+		+
$2x - 1$	-		-	0	+		+
$x - 3$	-		-		-	0	+
P(x)	-	0	+	0	-	0	+

Ainsi,

Pour tout $x \in \ ]-\infty ; -2[\cup]\frac{1}{2} ; 3[$, $P(x) < 0$

Pour tout $x \in \ ]-2 ; \frac{1}{2}[\cup]3 ; +\infty[$, $P(x) > 0$

Pour tout $x \in \{-2 ; \frac{1}{2} ; 3\}$, $P(x) = 0$

Remarque :

Il est très facile de se rendre compte si 1 ou -1 ; 2 ou -2 ; 3 ou -3 est zéro d'un polynôme. Lorsque c'est le cas, on dit que le polynôme admet un zéro évident.

IV/ FRACTIONS RATIONNELLES

1. Définition

Toute fonction numérique de la forme $\frac{P}{Q}$ où P est un polynôme et Q un polynôme non nul, est appelée fraction rationnelle.

Exemple

$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x$ est une fraction rationnelle définie sur IR.

$g(x) = \frac{2x^2-5x-3}{x+1}$, est une fraction rationnelle définie sur IR \ {-1}.

$h(x) = 8$ est une fraction rationnelle définie sur IR.

2. Simplification de fractions rationnelles

Exercice 13

Simplifier les fractions rationnels P et Q définies par

$P(x) = \frac{(x+2)(2x-3)}{(x+2)(7x+8)}$ et $Q(x) = \frac{x^2-1}{x^2-6x+5}$

Solution

Simplification de $P(x) = \frac{(x+2)(2x-3)}{(x+2)(7x+8)}$

P est défini sur IR\ $\{-2 ; -\frac{8}{7}\}$

Pour tout x є IR\ $\{-2 ; -\frac{8}{7}\}$, $P(x) = \frac{2x-3}{7x+8}$

Simplification de $Q(x) = \frac{x^2-1}{x^2-6x+5}$

On a $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ et $x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$

Donc, $Q(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 5)(x - 1)}$ et Q est défini sur IR\ {1 ;5}

Pour tout x є IR\ {1 ;5}, $Q(x) = \frac{x+1}{x-5}$

3. Signe d'une fraction rationnelle

Exercice 14

Etudier le signe de la fraction rationnelle F définie par : $F(x)=\dfrac{-11x+33}{x-1}$

Solution

$F(x)=\dfrac{-11x+33}{x-1}$

F est définie sur IR\{1}

$-11x + 33 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Le signe de F(x) se déduit des signes de -11 x +33 et x – 1, d’où le tableau de signe suivant :

Tableau de signe de F(x)

x	$-\infty$ $+\infty$	1		3	
-11 x +33	+		+	0	-
x -1	-	0	+		+
F(x)	-		+	0	-

Ainsi,

Pour tout x є] -∞ ;1[U]3 ;+∞[, F(x) < 0

Pour tout x є]1 ;3[, F(x) > 0

Pour tout x = 3, F(x) = 0

4. Différentes écritures

Exercice 15

Soit la fraction rationnelle F définie par : $F(x) = \dfrac{7x^2-x+5}{x+2}$.

Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel $x \neq -2$,

$F(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$

a) En utilisant la méthode de coefficients indéterminés.
b) En utilisant la division euclidienne.

Solution

a) Méthode des coefficients indéterminés :

Pour tout $x \neq -2$, $F(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x+2} \leftrightarrow F(x) = \dfrac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$

$\Leftrightarrow F(x) = \dfrac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}$

$\Leftrightarrow F(x) = \dfrac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$

Par hypothèse, $F(x) = \dfrac{7x^2-x+5}{x+2}$, par suite

Pour tout $x \neq -2$, $F(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x+2} \leftrightarrow \dfrac{7x^2-x+5}{x+2} = \dfrac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$

$\Leftrightarrow 7x^2 - x + 5 = ax^2 + (2a+b)x + 2b + c$

Par identification des coefficients, on a :

$\begin{cases} a=7 \\ 2a+b=-1 \\ 2b+c=5 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} a=7 \\ b=-15 \\ c=35 \end{cases}$

D'où, $F(x) = 7\,x - 15 + \dfrac{35}{x+2}$

b) Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 7x^2 - x + 5 & x + 2 \\ \cline{2-2} -7\,x^2 - 14\,x & 7x - 15 \\ \cline{1-1} 0 - 15\,x + 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -15 \times 30 \\ \hline 0 + 35 \end{array}$$

Ainsi, $7x^2 - x + 5 = (x + 2)(7x - 15) + 35$ par suite,

$$\frac{7x^2 - x + 5}{x + 2} = 7x - 15 + \frac{35}{x + 2}$$

D'où, $F(x) = 7x - 15 + \dfrac{35}{x + 2}$

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Déterminer le degré et les coefficients des polynômes P, Q et R

$P(x) = (x^2 + 2)(3 - x^4)$;

$Q(x) = (3x - 4)(x + 3) - (x + 2)^2$;

$R(x) = (x - 2)(1 - x^2) - x(1 - x^2) + (x - 5)(3 - 2x)$

<u>Exercice 2</u>

Dans chacun des cas suivants, F est une fonction polynôme. Etudier le signe de f(x) :

a) $f(x) = 5x^2 + 3$;

b) $f(x) = -x^2 - \frac{1}{3}$;

c) $f(x) = -(x + 5)^2 - 2$;

d) $f(x) = 2(3x + 1)(5 - x) + 3(5 - x)(1 - 3x)$;

e) $f(x) = (7x + 1)(2 - x)(3x + 5)$

<u>Exercice 3</u>

Dans chacun des cas suivants, P est un polynôme de degré 2 :

a) Mettre P(x) sous forme canonique ;

b) Déterminer les zéros éventuels de P puis étudier le signe de P(x).

1. $P(x) = x^2 + 2x - 3$
2. $P(x) = -x^2 + x + 2$
3. $P(x) = -5x^2 + 6x + 8$
4. $P(x) = 4x^2 - 5x + 3$
5. $P(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$

<u>Exercice 4</u>

1. Calculer la somme des deux polynômes suivants :

   $3 - x^3 + 2x - 1$ et $-4x^3 + 5x^2 + x - 1$

Quel est le degré de cette somme

2. Calculer le produit des deux polynômes suivants : $2x - 1$ et $-4x^3 + x - 1$

Quel est le degré de ce produit ?

<u>Exercice 5</u>

On considère le polynôme P défini par :

$P(x) = x^3 - 1 - (x - 1)(2x^2 + x - 3)$

1. Justifier que 2 est un zéro de P(x).
2. Déterminer que : $P(x) = (x - 1)(-x^2 + 4)$.
3. En déduire les zéros de P(x).

Exercice 6

On considère le polynôme A défini par :

$A(x) = x^4 + x^3 + 8x + 8$

1. Justifier que $A(x) = (x + 1)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
2. Etudier le signe de A(x).

Exercice 7

On considère le polynôme R définie par :

$R(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$

1. Justifier que : R(x) est factorisable par $(x - 1)$.
2. Déterminer les réels a, b et c tel que pour tout $x \in IR$,

   $R(x) = (x - 1)(a x^2 + b x + c)$
3. Etudier suivant les valeurs de x le signe de R(x).

Exercice 8

On considère la fraction rationnelle

$f(x) = \frac{(x+2)^2(3-x)}{x^2+2x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Simplifier f(x).
3. Etudier suivant les valeurs de x le signe de f(x).

Exercice 9

On donne la fonction f définie par :

$f(x) = - x^3 + x^2 + 10 x + 8$.

1.a) Déterminer le polynôme du second degré g(x) tel que pour tout $x \in IR$.

$f(x) = (x + 2)g(x)$

b) Justifier que pour tout $x \in IR$, $g(x) = (x + 1)(4 - x)$

2. On donne la fraction rationnelle h définie par $h(x) = \frac{f(x)}{2x^2+2x}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h de h

b) simplifier h(x).

Etudier suivant les valeurs de x le signe de h(x).

Exercice 10

On considère la fraction rationnelle g définie par :

$$g(x) = \frac{x^3-5x+10}{x-4}$$

Trouver un polynôme P de degré 2 et un nombre réel c tels que pour tout nombre réel x différent de 4 : $g(x) = P(x) + \frac{c}{x-4}$.

CHAPITRE V/ EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS IR

I. GENERALITES

1. Equations

- **Activités**

Soit $f : IR \rightarrow IR$ et $g: IR \rightarrow IR$

$x \mapsto 2x - 3$ $\qquad x \mapsto x^2 - 5x + 7$

Comparer f(2) et g(2), puis f(3) et g(3)

On dit que 2 est une solution de l'équation $\forall x \in IR, f(x) = g(x)$

3 n'est pas une solution de l'équation $\forall x \in IR, f(x) = g(x)$

Définition

Soit A et B deux parties de IR, f et g deux fonctions de A vers B de variable x.

- La proposition de (E): " $x \in A, f(x) = g(x)$" est appelée équation d'inconnue x dans A

  f(x) est appelé le premier membre et g(x) le deuxième membre de l'équation.

- Tout élément α de A vérifiant $f(\alpha) = g(\alpha)$est appelé solution de l'équation (E).
- Résoudre l'équation (E), c'est trouver l'ensemble des éléments de A qui sont solutions de (E).

  REMARQUES :

-La lettre utilisée pour l'inconnue est sans importance : les équations $x \in A, f(x) = g(x)$ et $t \in A, f(t) = g(t)$ ont le même ensemble de solutions

- Avant de résoudre une équation, il convient si nécessaire de préciser les contraintes sur l'inconnue.

Exemples

- Soit l'équation (E) $x \in IR, 2x+3 = 0$

  X est l'inconnue,

  L'ensemble des solutions de (E) est $\{-\frac{3}{2}\}$on peut noter $S_{IR} = \{-\frac{3}{2}\}$

- Considérons l'équation (F) $x \in IR, \frac{x-2}{x-1} = 1 - \frac{1}{6}x$.

  Considérons sur l'inconnue : $x \in IR$ et $x - 1 \neq 0, \leftrightarrow x \neq 1$.

  Les valeurs -2 et 3 de x vérifient l'équation donc -2 et 3 sont des solutions de l'équation (F).

  -4 ; -5 ; 0 ne vérifient pas l'équation donc -4 ; -5 ; 0 ne sont pas des solutions de (F).

  2. <u>Inéquations</u>

Soit $f : IR \rightarrow IR$ et $g : IR \rightarrow IR$

$x \mapsto 2x - 3$ $x \mapsto x^2 - 5x + 7$

Comparer f(1) et g(1)

On dit que 1 est une solution de l'inéquation $x \in IR, f(x) \leq g(x)$

<u>Définitions</u>

Soit A et B deux parties de IR. F et g deux fonctions de A vers B de variable x.

- La proposition de (I): " $f(x) \leq g(x)$" où f et g sont des fonctions de A vers B est appelée inéquation d'inconnue x dans A.
- Tout élément α de A vérifiant $f(\alpha) \leq g(\alpha)$ est appelé solution de l'inéquation (I).
- Résoudre l'inéquation (I), c'est trouver l'ensemble des éléments de A qui sont solutions de (I).

  <u>REMARQUES :</u>

-La lettre utilisée pour l'inconnue est sans importance : les inéquations $f(x) \leq g(x)$ et $f(t) \leq g(t)$ ont le même ensemble de solutions.

- Avant de résoudre une inéquation, il convient si nécessaire de préciser les contraintes sur l'inconnue.

NB : Dans la définition précédente, on obtient une inéquation d'inconnue x dans A en remplaçant le symbole $\leq$ par $\geq$, $<$, ou $>$.

3.<u>Equations équivalentes et inéquations équivalentes</u>

<u>Définitions</u>

a) <u>Equations équivalentes</u>

Pour résoudre une équation, on procède généralement par transformations d'écritures utilisant les règles de calcul relatives aux égalités dans IR. Ainsi, en particulier :

- En ajoutant un même nombre réel aux deux membres d'une équation, on obtient une équation ayant le même ensemble de solutions que celle-ci.
- En multipliant les deux membres d'une équation, par un même nombre réel non

nul, on obtient une équation ayant le même ensemble de solutions que celle-ci.

De telles équations sont dites équivalentes.

Exercice 1

Soit les équations :

(E1) : $x \in IR\backslash\{0\}$, $x+x^3 = 4x$ et (E2) : $x \in IR\backslash\{0\}, 1+x^2 = 4$

Démontrer que (E1) et (E2) sont équivalentes.

Solution

(E1) : $x \in IR\backslash \{0\}$, $x + x^3 = 4x \leftrightarrow x \in IR\backslash\{0\}$, $x(1 + x^2) = 4x$

$\leftrightarrow x \in IR\backslash\{0\}$, $1 + x^2 = 4$

(Multiplication des deux membres par $\frac{1}{x}$ pour tout nombre réel non nul x)

Ainsi, (E1) et (E2) sont équivalentes.

b) Inéquations équivalentes

Pour résoudre une inéquation, on procède généralement par transformations d'écritures utilisant les règles de calcul relatives aux inégalités dans IR. Ainsi, en particulier :

- En ajoutant un même nombre réel aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation ayant le même ensemble de solutions que celle-ci.
- En multipliant les deux membres d'une inéquation, par un même nombre réel non nul, on obtient une inéquation ayant le même ensemble de solutions que celle-ci.

De telles inéquations sont dites équivalentes.

Exercices 2

Soit les inéquations : (I_1) : $x \in IR$, $|x+4| \leq 6$ et (I_2) : $(x-2)(x+10) \leq 0$

Démontre que (I_1) et (I_2) sont équivalentes.

II. EXEMPLES DE RESOLUTION D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS DANS IR

1. Equations du second degré

Exercice 3

Résoudre les équations ci-dessous

(E_1) : $x \in IR$, $2x^2 + 5x - 3 = 0$

(E_2) : x ϵ IR, $x^2 + 4x + 1 = 2x$

(E_3) : x ϵ IR, $-3x^2 + x - 1 = 0$

<u>Solution</u>

Résolution de (E_1)

$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2[x^2+\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}] = 0$

$\Leftrightarrow [x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}] = 0$

$\Leftrightarrow (x+ \frac{5}{2})^2 - \frac{49}{16} = 0$

$\Leftrightarrow (x- \frac{1}{2})(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -3$

L'ensemble des solutions de (E_1) est $\{ -3 ; \frac{1}{2}\}$

Résolution de (E_2)

$x^2 + 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x+1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$

L'ensemble des solutions de (E_2) est le singleton {-1}

Résolution de (E_3)

$-3x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = 0$

$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{6})^2 + \frac{11}{36} = 0$

Cette équation n'admet pas de solution dans IR. Donc, l'ensemble des solutions de (E_3) est ensemble vide noté ∅.

2. <u>Equations liant deux fractions rationnelles</u>

<u>Exercice 4</u>

Résoudre dans IR, l'équation (E_1). $\frac{x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{x-1}$

<u>Solution</u>

Contraintes sur l'inconnue :

x є IR, x-1 ≠ 0 et 2x+1 ≠0 $\Leftrightarrow$ x ≠1 et x ≠$-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ x є IR\{1 ; $-\frac{1}{2}$}

Pour x ≠ 1 et x ≠ $-\frac{1}{2}$, $\frac{x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow (2x+1)^2 = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow$ 3x(x+2) = 0

$\Leftrightarrow$ x = 0 ou x = -2

Comme -2 et 0 appartiennent à IR\{1 ; $-\frac{1}{2}$} , donc l'ensemble des solutions est {-2 ;0}

<u>Exercice 5</u>

Résoudre dans IR, l'équation (E_2) : $\frac{4}{x+4} = \frac{3}{x-3}$

<u>Solution</u>

Contraintes sur l'inconnue :

X є IR, x-3 ≠0 et x+ 4≠ 0 $\Leftrightarrow$ x ≠ 3 et x≠-4 $\Leftrightarrow$ x є IR\{3 ;-4}

Pour x≠3 et x≠ -4, $\frac{4}{x+4} = \frac{3}{x-3} \Leftrightarrow 4(x-3) = 3(x+4)$

$\Leftrightarrow$ x= 24

24 є IR\{3 ;-4}, alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est {24}

3. <u>Equations avec valeur absolue</u>

<u>Méthode</u>
Pour résoudre une équation (E) du type $|F(x)| = |G(x)|$,

On peut :
Utiliser l'équivalence suivante :
(E) $\Leftrightarrow$ F(x) = G(x) ou F(x) = -G(x)
Résoudre successivement les équations
(E_1) : F(x) = G(x) et
(E_2) : F(x) = - G(x)
L'ensemble des solutions de (E) est la réunion des ensembles des solutions de (E_1) et (E_2).

Exercice 6

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $|3x-5|= 4$; b) $|-2x+7|=|5x+1|$; c) $\left|\frac{2x-3}{x}\right| = 3$.

Solution

a) $|3x-5|= 4 \Leftrightarrow 3x-5 =4$ ou $3x - 5 = -4$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=\frac{1}{3}$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\{3 ; \frac{1}{3}\}$

b) $|-2x+7|=|5x+1| \Leftrightarrow -2x+7=5x+1$ ou $-2x+7=-5x-1$

$\Leftrightarrow x= \frac{6}{7}$ ou $x= -\frac{8}{3}$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\{ \frac{6}{7} ; -\frac{8}{3}\}$

c) Contrainte sur l'inconnue : $x \in IR, x\neq 0 \Leftrightarrow x \in IR\backslash\{0\}$

$x \in IR\backslash\{0\}, \left|\frac{2x-3}{x}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x} = 5$ ou $\frac{2x-3}{x} = -5$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \frac{3}{7}$

-1 et $\frac{3}{7}$ appartiennent à $IR\backslash\{0\}$, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{ -1 ; \frac{3}{7}\}$.

4. Equations se ramenant au premier et au second degré

Exercice 7

Soit P le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

a) Calculer P(-1)

b) Déterminer le polynôme Q de second degré tel que P(x) = (x+1)Q(x)

c) Résoudre dans IR, l'équation P(x) = 0

<u>Solution</u>

a) P(-1) = 0 donc P(x) est factorisable par x+1.

b) Utilisons la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^3 - 2x^2} \qquad\qquad & 2x^2 - 7x + 3 \\
-7x^2 - 4x + 3 & \\
\underline{7x^2 + 7x} \qquad & \\
3x + 3 & \\
\underline{-3x - 3} & \\
0+0 &
\end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - 7x + 3$

D'où $P(x) = (x+1)(2x^2 - 7x + 3)$

c) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 7x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x+1 = 0$ ou $2x^2 - 7x + 3 = 0$

La résolution de l'équation $2x^2 - 7x + 3 = 0$ en passant par la forme canonique puis la forme factorisée du premier membre conduit aux solutions 3 et $\frac{1}{2}$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-1 ; \frac{1}{2} ; 3\}$

III. <u>EXEMPLES DE RESOLUTION D'INEQUATIONS DANS IR</u>

1. <u>Inéquation du second degré</u>

Point méthode :

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) \times g(x) \leq 0$, ou $f(x) \times g(x) \geq 0$, on étudie le signe de $f(x) \times g(x)$ dans un tableau de signe.

<u>Exercice 8</u>

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $(x-2)(x-3) \leq 0$; b) $x^2 + x \geq x + 1$; c) $2x^2 + x < -4x + 3$

__Solution__

a) Les zéros du polynôme $(x-2)(x-3)$ sont 2 et 3.

Tableau de signe :

x	$-\infty$ $+\infty$	2		3	
$x-2$	-	0	+		+
$x-3$	-		-	0	+
$(x-2)(x-3)$	+	0	-	0	+

On en déduit que l'ensemble des solutions de $(x-2)(x-3) \leq 0$ est [2 ;3]

b) $x^2 + x \geq x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0$

Soit $P(x) = (x-1)(x+1)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Tableau de signe

x	$-\infty$ $+\infty$	-1		1	
$x+1$	-	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+
$(x+1)(x-1)$	+	0	-	0	+

L'inéquation $x^2 + x \geq x + 1$ étant équivalente à $(x-1)(x+1) \geq$, l'ensemble de ses solutions d'après le tableau de signe est $]-\infty ;-1] \cup [1 ; +\infty[$

c) Vérifier que $2x^2+x < -4x + 3 \Leftrightarrow (2x-1)(x+3) < 0$

Dresser le tableau de signe du polynôme $q(x) = (2x-1)(x+3)$

En déduire que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-3 ; \frac{1}{2}[$

2. __Inéquation dont les membres sont des fractions rationnelles__

Point méthode

Pour résoudre une inéquation du type $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$, ou $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, on étudie le signe de $\frac{f(x)}{g(x)}$ dans un tableau de signe.

__Exercice 9__

Résoudre dans IR les inéquations suivantes

a) $\frac{-2x+4}{x-3} \geq 0$;b) $\frac{2x-1}{x-1} \leq \frac{x+7}{x+1}$; c) $\frac{x}{-x+2} > \frac{6}{-x+1}$

<u>Solution</u>

a) Contraintes sur l'inconnue : x ϵ IR et x-3≠0 soit x ϵ IR\{3}

x	$-\infty$ $+\infty$	2		3	
-2x + 4	+	0	-		-
x - 3	-		-	0	+
$\frac{-2x+4}{x-3}$	-	0	+		-

L'ensemble des solutions de l'inéquation x ϵ IR, $\frac{-2x+4}{x-3} \geq 0$ est donc [2 ;3[

b) Contraintes sur l'inconnue :

X ϵ IR, x-1≠0 et x+1≠0 ⇔ X ϵ IR, x≠1 et x≠ -1 ⇔ x ϵ IR\{-1 ;1}

Soit x ϵ IR\{-1 ;1}. $\frac{2x-1}{x-1} \leq \frac{x+7}{x+1}$ ⇔ $\frac{(x-3)(x-2)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

Posons q(x) = $\frac{(x-3)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$

Les zéros du numérateur sont 2 et 3 ; ceux du dénominateur sont -1 et 1.

Dressons le tableau de signe de q(x)

x	$-\infty$ $+\infty$	-1		1		2		3	
x -3	-		-		-		-	0	+
x -2	-		-		-	0	+		+
x -1	-		-	0	+		+		+
x +1	-	0	+		+		+		+
q(x)	+		-		+	0	-	0	+

D'après le tableau de signe, l'ensemble des solutions de l'inéquation q(x)≤0 est]-1 ;1[∪[2 ;3]

c) Contraintes sur l'inconnue : $x-1\neq0$ et $x-2\neq0 \Leftrightarrow x\neq1$ et $x\neq2$, d'où

$x \in IR\backslash\{1 ;2\}$

Soit $x \in IR \backslash\{1 ;2\}$

$$\frac{x}{-x+2} > \frac{6}{-x+1} \Leftrightarrow \frac{(-x+4)(x-3)}{(-x+2)(-x+1)} > 0$$

Dresser le tableau de signe de $h(x) = \frac{(-x+4)(x-3)}{(-x+2)(-x+1)}$ puis vérifier que l'ensemble de solutions de l'inéquation $h(x) > 0$ est $]1 ;2[\cup]3 ;4[$.

3. <u>Inéquation avec valeur absolue</u>

<u>Méthode</u>

Pour résoudre une équation (I) du $|F(x)| \leq |G(x)|$,

On peut :

Utiliser successivement les équivalences suivantes :

$(I) \Leftrightarrow (F(x))^2 \leq (G(x))^2$,

$\Leftrightarrow (F(x))^2 - (G(x))^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (F(x)- G(x))(F(x)+ G(x)) \leq 0$

Résoudre par les méthodes habituelles l'inéquation :

$(F(x)- G(x))(F(x)+ G(x)) \leq 0$

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $(x-5)(-3+2x) = 0$;

b) $(3x-5)(5-2x) = (3x-5)^2$;

c) $x+x^3 = 4x$;

d) $1 +x^2 = 4$;

e) $5x^2 - 8x + 3 = 0$;

f) $(x^2 - 4)^2 = (x-2)^2$;

g) $(-2x + 3)^2 = 16$;

h) $x^2(1-x) = 0$.

Exercice 2

Résoudre dans IR l'équation (F) : $\frac{1}{x+2} = \frac{-x}{x^2-4}$

Exercice 3

1) Etudier le signe de $P(x) = (x+1)(3-2x)$

2) Résoudre dans IR l'inéquation (I) : $(x+1)(2-x) < x^2 -1$

Exercice 4

Résoudre dans IR l'inéquation (I) : $x \leq \frac{4}{x}$

Exercice 5

Résoudre dans IR l'équation (E) : $|5x^2-2x-2| = |4x^2-2x+2|$

Exercice 6

Résoudre dans IR l'inéquation (I) : $|-2x-3| \leq |x+4|$

Exercice 7

Soit $P(x) = x^2 - x -2$ et $Q(x) = x^2 +3x - 4$

1) Etudier le signe de P(x) et de Q(x).
2) Résoudre dans IR
   a) L'équation $|x^2+x-3| = |2x-|$
   b) L'inéquation $|x^2+x-3| < |2x-1|$

CHAPITRE VI / $\boxed{\text{DROITES DU PLAN}}$

I- DROITES

1. VECTEUR DIRECTEUR

- **Propriétés**

Soit (D) et (D') deux droites ayant respectivement $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour vecteurs directeurs, on a les propriétés suivantes :

a) (D) // (D) $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires :

b) (D) $\perp$ (D') $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \perp \vec{v}$

Pour tout point A et tout vecteur $\vec{u}$ non nul. Il existe une et une seule droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

- **METHODE :**

Soit $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ un repère du plan.

Pour construire la droite (D) passant par A et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, on peut :

-Placer le point A ;

-Construire le point B tel que $\vec{AB} = \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$

-La droite passant par A et B est la droite (D)

- **Propriété :**

Soit (D) une droite de vecteur directeur et A un point de (D), pour tout point M du plan,

on M є (D) $\Leftrightarrow$ $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

2. Equation cartésienne

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, (D) une droite.

-Toute équations de (D) du type ax + by + c = 0 est appelée équation cartésienne de (D) dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

-Toute droite admet une infinité d'équations cartésiennes.

- Soit (D) une droite ; il existe des nombres réels a, b et c tels que, pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$:

M є(D) $\Leftrightarrow$ ax +by +c = 0

-Soit a, b et c des nombres réels tels que : (a ;b) ≠(0 ;0) ; l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que ax + by + c = 0 est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

- **METHODE :**

Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite (D) dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on peut chercher à se ramener à l'un des deux cas suivants :

-(D) est définie par un point A et un de ses vecteurs directeurs $\vec{u}$.

Pour un point M, on a M є (D) $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{AM} , \vec{u}) = 0$

-(D) est définie par un point A et un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à l'un des vecteurs directeurs de la droite (D).

Pour tout point M, on a : M є (D) $\Leftrightarrow$ $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

NB : la deuxième méthode ne doit être utilisée que si le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est orthonormé.

<u>Exercice 1</u>

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le $A\binom{2}{1}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\ \binom{1}{1}$.

<u>Solution</u>

Soit un point M du plan de coordonnées $\binom{x}{y}$.

On a : $\vec{AM}\ \binom{x-2}{y-1}$.

M є (D) $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 - y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0$

Donc une équation cartésienne de (D) est : $x - y - 1 = 0$

<u>Exercice 2</u>

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. On donne les points $A\binom{2}{3}$, $B\binom{-2}{1}$ et $C\binom{1}{-1}$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB)

<u>Solution</u>

Soit un point M du plan de coordonnées $\binom{x}{y}$.

On a : $\vec{CM}\ \binom{x-1}{y+1}$ et $\vec{AB}\ \binom{-4}{-2}$.

M є (D) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} . \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ -4(x-1) – 2(y +1) = 0

$\Leftrightarrow$ -2x – y + 1 = 0

Donc une équation cartésienne de (D) est -2x – y + 1 = 0

<u>Exercice 3</u>

Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On considère la droite (D) dont une équation cartésienne est 2x -6y – 1 = 0 et A$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point A et parallèle à la droite (D).

<u>Solution</u>

(D) : 2x + 6y – 1=0

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$. Est un vecteur directeur de (D).

Soit un point M du plan de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$.

(Δ) // (D) $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).

M є (Δ) $\Leftrightarrow$ det($\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$) = 0

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -6 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ 2(x- 1) + 6 (y – 1)= 0

$\Leftrightarrow$ x + 3y – 4 = 0

Donc une équation cartésienne de (Δ) est x + 3y – 4 = 0.

- <u>Equation réduite</u>

Soit (D) une droite d'équation réduite y = ax + b

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D), $A\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$ appartient à (D).

- <u>Propriété</u>

Soit (D) et (D’) deux droites de coefficients directeurs respectifs a et a’, on a :

-(D) // (D’) $\Leftrightarrow$ a = a’ ;

-Lorsque le repère est orthonormé : (D) $\perp$ (D’) $\Leftrightarrow$ aa’ = -1

- <u>METHODE :</u>

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ un repère du plan.

Pour construire la droite (D) passant par A et de coefficient directeur a, on peut :

-Placer le point A ;

-Construire le point B tel que $\vec{Ab} = \vec{i} + a\vec{j}$.

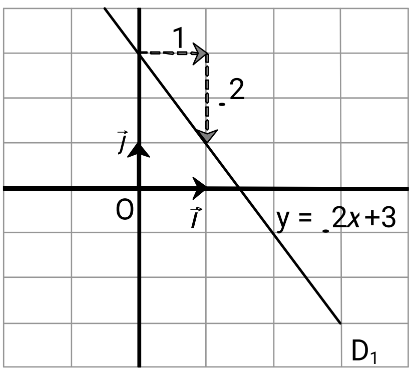
-La droite passant par A et B est la droite (D).

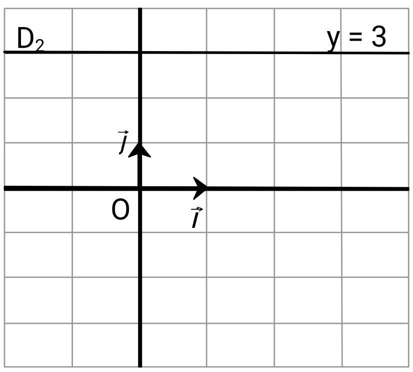
<u>Théorème</u> :

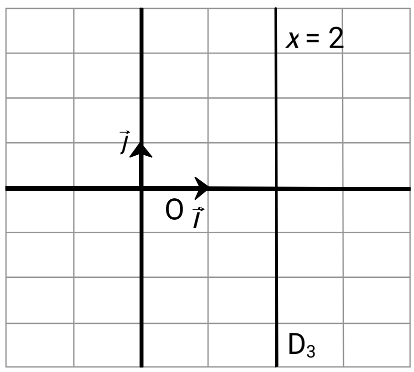
• Toute droite D non parallèle à l’axe des ordonnées a une équation de la forme y = a x + b où a et b sont deux nombres réels. Cette équation y = a x + b est appelée équation réduite de D. Le nombre a est le coefficient directeur de D et le nombre b est l’ordonnée à l’origine de D.

• Toute droite D’ parallèle à l’axe des ordonnées a une équation de la forme x = c où c est un nombre réel et correspond à l’abscisse constante de tous les points de D’.

<u>Exemples</u> :







D_1 a pour équation y = -2x + 3.

D_2 a pour équation y = 3.

D_3 a pour équation x = 2.

Coefficient directeur a = -2 ; ordonnée à l’origine b = 3.

Coefficient directeur a = 0. D_3 n’a pas de coefficient

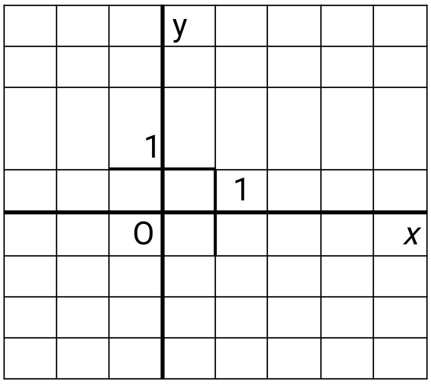
D_2 est parallèle à l’axe des abscisses. D_3 est parallèle à

l’origine b = 3. l’axe des

ordonnées.

2) Des méthodes

a) Tracer une droite dont on connaît une équation



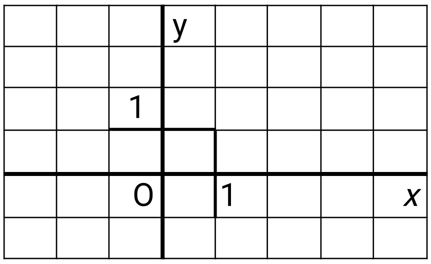
- **Méthode 4** : Placer l'ordonnée à l'origine.
  Dessiner le coefficient directeur.

Exemple : Tracer la droite d'équation $y = \frac{4}{3}x - 2$.

- **Méthode 5** : Déterminer les coordonnées de deux points.
  Placer ces deux points.

Exemple 1 : Tracer la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x + 3$

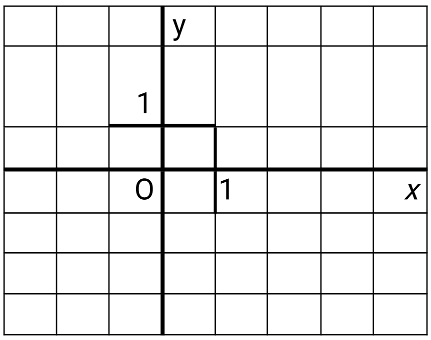
x		
y		



Si $x = 0$, alors y = ...

Si $x = 4$, alors y = ...

On place les points A (0 ;   ) et B (4 ;   )



Exemple 2 : Tracer la droite d'équation $2x + 3y + 3 = 0$

x		
y		

Si $x = 0$, alors y = ...

Si $x = 3$, alors y = ...

Remarque : on peut aussi déterminer l'équation réduite sous la forme $y = ax + b$, puis utiliser la méthode 4.

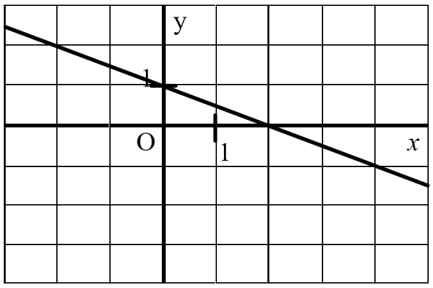
$2x + 3y + 3 = 0$ donne y =

<u>Conseils</u> : • Pour avoir un tracé précis, les points doivent être suffisamment éloignés.

• Prendre des valeurs donnant des calculs simples et si possible des nombres entiers.

b) <u>Déterminer l'équation d'une droite</u>

• <u>Méthode 6</u> : Déterminer graphiquement l'équation d'une droite.



Lire le coefficient directeur par la méthode de l'escalier. Lire l'ordonnée à l'origine.

<u>Exemple :</u>

Le coefficient directeur est $a =$

L'ordonnée à l'origine est $b =$

L'équation de la droite est donc : $y =$

• <u>Méthode 7</u> : Déterminer par le calcul l'équation d'une droite passant par deux points A et B.

L'équation est de la forme $y = a x + b$.

3. <u>Représentations paramétriques d'une droite</u>

a) <u>Théorème</u>

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit a, b, x_0, y_0 des nombres réels tels que : $(a ;b)\neq(0 ;0)$.

L'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ pour les quels il existe un nombre t vérifiant

$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$ est la droite (D) passant par A $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

b) <u>Définition</u>

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit (D) la droite passant par A $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

On dit que le système $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ ($t \in IR$) est une représentation paramétrique de la droite (D) dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminer dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution

Soit un point M du plan de coordonnée $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y+3 \end{pmatrix}$.

$M \in (D) \Leftrightarrow$ il existe un nombre réel t tel que

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-2t \\ y=-3+t \end{cases}$$

Ce système est une représentation paramétrique de la droite (D).

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne une droite (D) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=12-5t \\ y=-3+2t \end{cases} \qquad (t \in IR)$$

Justifie que le point $A\begin{pmatrix} 10 \\ -\frac{11}{5} \end{pmatrix}$ appartient à (D) et que $B\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à (D).

Solution

- Justifier $A \in (D)$ signifie qu'il existe un nombre réel t vérifiant le système

$$\begin{cases} 10=12-5t \\ -\frac{11}{5}=-3+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2=-5t \\ -\frac{11}{5}+3=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{2}{5} \\ t=\frac{2}{5} \end{cases}$$

Il existe une solution unique t donc A ϵ (D)

- Justifier que B∉ (D)

B ϵ (D) signifie qu'il existe un nombre réel t vérifiant le système

$$\begin{cases} -\frac{4}{5}=12-5t \\ 2=-3+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{64}{5}=-5t \\ 5=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{64}{25} \\ t=\frac{5}{2} \end{cases}$$

t n'a pas une valeur unique donc B∉ (D)

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Justifie que les deux représentations paramétriques ci-après sont celle d'une même droite (D).

(1) $\begin{cases} x=4t-3 \\ y=-8t-1 \end{cases}$ $(t \in IR)$

(2) $\begin{cases} x=1-t \\ y=2t-9 \end{cases}$ $(t \in IR)$

Solution

Soit (D_1) la droite définie par $\begin{cases} x=4t-3 \\ y=-8t-1 \end{cases}$ $(t \in IR)$

Soit (D_2) la droite définie par $\begin{cases} x=1-t \\ y=2t-9 \end{cases}$ $(t \in IR)$

Un vecteur directeur de (D_1) est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (D_2) est le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculons $dét(\vec{u}, \vec{v})$.

$dét(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = 2X4 - 8 = 0$

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ donc $(D_1) // (D_2)$.

Soit $A\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} \in (D_1)$.

A appartient-il à (D)?

$\begin{cases}-3=1-t\\-1=2t-9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4=-t\\8=2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=4\\t=4\end{cases}$

t est un nombre réel unique donc $A \in (D_2)$.

$(D_1) // (D_2)$ et $A \in (D_1)$ et $A \in (D_2)$ donc $(D_1) = (D_2) = (D)$.

TRAVAUX DIRIGES

EXRCICE 1

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Dans chacun des cas suivant, déterminer une équation cartésienne de la droite (D).

1) (D) passe par $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
2) (D) passe par $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne les points $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)
2) Donner l'équation réduite de (AB) et en déduire son coefficient directeur.

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit (D) la droite d'équation :

$2x + y = 5$ et le point $A\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation de la droite (D') parallèle à (D) et qui passe par A.

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ dans les cas suivants :

1) $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$;
2) $A\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=2-3t \\ y=-\frac{3}{2}+2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

1) Définir (D) par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.
2) Définir (D)par deux points distincts A et B

EXERCICE 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On considère les droites (D) et (D') de représentations paramétriques respectives :

(D) : $\begin{cases} x=2-3t \\ y=3+2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

(D') : $-3x + 2y = 0$.

1) Le point $A\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ appartient-il à (D) ? appartient-il à (D').
2) Justifier (D) et (D') sont perpendiculaires.
3) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

CHAPITRE VII/ EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS IR x IR

I/ SYSTEME D'EQUATIONS DANS IR x IR

1. Déterminant d'un système de deux équations dans IR x IR

a) Définition

Soit a, b, c, a', b' et c'des nombres réels

Considérons le système (S) : (x ;y) є IR x IR , $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'x+c'=0 \end{cases}$

Le nombre ab' - a'b noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est appelé **déterminant** du système (S)

Exemple

On donne le système suivant (x ;y) є IR x IR, $\begin{cases} -2x+y+3=0 \\ 3x+2x+5=0 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = -2 X 2 – 3 X 1 = - 4 – 3 = -7

Exercice 1

Calculer le déterminant de chacun des systèmes suivants définis dans IR X IR par :

(S_1) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 4x+7y=1 \end{cases}$; (S_2) $\begin{cases} 5x+y=-4 \\ x-8y=1 \end{cases}$; (S_3) $\begin{cases} 5x+y=4 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

b) Critère d'existence et d'unicité de solution

- **Propriété**

Un système de deux équations à deux inconnues admet un seul couple solution si et seulement si son déterminant si son déterminant est non nul.

Exercice 2

Soit le système (S) (x ;y) є IR X IR $\begin{cases} -x+3y=-14 \\ 5x-2y=5 \end{cases}$

Justifier que (S) admet un seul couple solution.

<u>Solution</u>

Calculons le déterminant de (S).

On a : $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ = -1X(-2) – 15 = -13

Le déterminant de (S) est différent de 0. Donc (S) admet un seul couple solution

<u>Exercice 3</u>

Justifier que chacun des systèmes linéaires dans IR X IR ci-dessous admet un seul couple solution

(S)$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 4x+7y=1 \end{cases}$; b) (S) $\begin{cases} -2x+y+3=0 \\ 3x+2x+5=0 \end{cases}$; c) (S) $\begin{cases} 5x+y=-4 \\ 3x-y=1 \end{cases}$; d)(S) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x+7y=-10 \end{cases}$

2. <u>Résoudre d'un système de deux équations dans IR X IR</u>

<u>Exercice 4</u>

Soit le système linéaire dans IR X IR suivant : (S) $\begin{cases} 3x+5y=-9 \\ 2x-3y=13 \end{cases}$

1. Prouver que (S) admet un seul couple solution.
2. Résoudre (S).

<u>Solution</u>

1. Le déterminant de (S) est -19 ; il est non nul alors (S) admet un seul couple solution.
2. On peut résoudre (S) **graphiquement ou algébriquement.**

<u>Résolution graphique</u>

Munissons le plan d'un repère orthonormé (O ;I ;J). soit (D) et (D') les droites d'équations respectives 3x +5y +9 =0 et 2x – 3y -13 =0 représentées ci-dessous.

(voir graphique)

Les droites (D) et (D') se coupent au point A de coordonnées (2 ;-3). Donc la solution de (S) est (2 ;-3)

Résolution algébrique

Il y a deux méthodes de résolution : la résolution par substitution et la résolution par combinaison.

- Résolution par substitution

$$(S)\begin{cases}3x+5y=-9 \ (E1)\\ 2x-3y=13 \ (E2)\end{cases}$$

De l'équation (E_1) on tire $x = \dfrac{-5y-9}{3}$

En reportant cette valeur de x dans (E_2), on en déduit que y= - 3

En remplaçant y par sa valeur dans l'expression précédente de x, on obtient : x =2

Le couple solution de (S) est (2 ;3)

- Résolution par combinaison

$$(S)\begin{cases}3x+5y=-9 \ (E1)\\ 2x-3y=13 \ (E2)\end{cases}$$

Eliminons x des équations (E_1) et (E_2)

$-2(E_1) + 3(E_2) \Rightarrow -19y = 57$ d'où $y = -3$

Eliminons y des équations (E_1) et (E_2)

$3(E_1) + 5(E_2) \Rightarrow 19x = 38$ d'où $x = 2$

Vérification

On a : 3X2 +5 X (-3) =6 – 15 = -9

Et 2 X2 – 3 X(-3) = 4 + 9 = 13

Le couple (2 ; - 3) vérifie les deux équations, donc le couple solution de (S) est (2 ; - 3)

Exercice 5

Résoudre graphiquement dans IR X IR chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 4x+7y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 6x-3y=-4 \\ 4x-2y=1 \end{cases}$

Exercice 6

Résoudre dans IR X IR le système suivant par substitution $\begin{cases} 5x+y=-4 \\ 4x+7y=1 \end{cases}$

Exercice 7

Résoudre dans IR X IR le système suivant par combinaison $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 4x+7y=1 \end{cases}$

3. Résolution de problèmes

EXERCICE 8

Dans une boite se trouvent 10 billes : les unes sont rouges et les autres sont bleues.

Si l'on ajoute dans la boite 3 billes et 2 billes rouges alors il y a deux fois plus de billes bleues que de rouges.

Combien y avait- t-il de billes de chaque couleur dans la boite ?

Solution

- Choix des inconnues

  Soit x le nombre de billes rouges et y le nombre de billes bleues initialement dans la boite.

- Mise en équation

  x + y = 10

  y + 3 = 2(x + 2)

- Résolution

  On a le système suivant : (x ;y) є IR X IR $\begin{cases} x+y=10 \\ y+3=2(x+2) \end{cases}$

Utilisons la résolution par combinaison : $\begin{cases} x+y=10\ (E1) \\ y+3=2(x+2)(E2) \end{cases}$

Eliminons x des équations (E_1) et (E_2)

$-2(E_1) + (E_2) \Rightarrow -3y = -21$ d'où $y = 7$

Eliminons y des équations (E_1) et (E_2)

$(E_1) + (E_2) \Rightarrow 3x = 9$ d'où $x = 3$

Conclusion : il y avait initialement dans la boite 3 billes rouges et 7 billes bleues.

4. <u>Autres systèmes</u>

<u>Exercice 9</u>

Résoudre dans IR X IR le système $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ 2x-y=-3 \\ 4x+5y=1 \end{cases}$

<u>Méthode par la résolution algébrique</u>

Extrayons un système de deux équations de (S) et résolvons le système extrait.

Par exemple : $\begin{cases} 3x+2y=-1\ (E1) \\ 2x-y=-3(E2) \end{cases}$

Utilisons la résolution par combinaison.

Elimination de x

$2(E_1) -3(E_2) \Rightarrow 7y= 7$ alors $y = 1$

Elimination de y

$(E_1) +2(E_2) \Rightarrow 7x = -7$ d'où $x = -1$.

Le couple (-1 ;1) vérifie la troisième équation de (S), donc le couple solution de (S) est (1 ;-1).

<u>Exercice 10</u>

Résoudre algébriquement le système suivant dans IR X IR

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y-8=0 (E1) \\ 2x+y=2 (E2) \end{cases}$$

<u>Solution</u>

De l'équation (E_2), on tire y = 2 – 2x.

En reportant cette valeur de y dans (E_1), on obtient l'équation $5x^2 -12x = 0$ qui conduit à $x = 0$ ou $x = \frac{12}{5}$.

- Pour x = 0, on en déduit de l'expression de y en fonction de x que y = 2. Et le couple (0 ;2) vérifie le système
- Pour $x = \frac{12}{5}$, on obtient que $y = -\frac{14}{5}$; le couple $(\frac{12}{5} ; -\frac{14}{5})$.

II. <u>SYSTEME D'INEQUATIONS DANS IR X IR</u>

1. <u>Interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans IR X IR</u>

- <u>Théorème fondamental</u>

Soit (O,I,J) un repère du plan et (D) la droite d'équation ax +by + c = 0.

Soit (P_1) l'ensemble des points M(x ;y) vérifiant : ax +by + c > 0.

Soit (P_2) l'ensemble des points M(x ;y) vérifiant : ax +by + c < 0.

(P_1) et (P_2) sont les deux demi-plans ouverts de frontière(D).

2. <u>Résolution graphique d'un système d'inéquations du premier degré dans IR X IR.</u>

<u>Exercice 11</u>

Considérons le système (I) $\begin{cases} 2x+3y+6>0 \\ -3x+y-3<0 \end{cases}$

Résoudre (I) dans IR X IR.

<u>Solution</u>

On munit le plan d'un repère (O,I,J).

Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives 2x +3y + 6 = 0 et -3x + y -3 = 0

Soit (P) et (P’) les demi-plans d’équations respectives $2x + 3y + 6 > 0$ et $-3x + y - 3 < 0$.

Représentons (D) et (D’) et hachurons (P) en rouge et (P’) en vert.

<u>(Voir Graphique)</u>

L’ensemble des solutions de (I) est l’intersection de (P_1) et de (P_2).

Le point O appartient à (P_1) et à (P_2).

Donc l’ensemble des solutions de (I) est la partie du plan marqué par les deux couleurs et qui contient le point O.

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Déterminer le nombre réel x pour que chacun des déterminants suivants soit nul.

a) $\begin{vmatrix} -x+2 & 4 \\ x-5 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix}$

Exercice 2

Démontrer que chacun des systèmes suivants admet un seul couple solution dans IR X IR, puis le résoudre graphiquement

a) $\begin{cases} 2x-4y=-4 \\ -x+3y=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ -3x-y=-1 \end{cases}$

Exercice 3

Utiliser la méthode de combinaison pour résoudre dans IR X IR chacun des systèmes ci-dessous :

a) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{8}=0 \\ x+y=\frac{3}{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{2}{5}y-\frac{3}{7}y=\frac{1}{5} \\ -\frac{x}{5}+\frac{2}{7}y=\frac{1}{3} \end{cases}$

Exercice 4

Utiliser la méthode de substitution pour résoudre dans IR X IR chacun des systèmes ci-dessous :

a) $\begin{cases} 5x+2y=70 \\ 3x-5y=55 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

Exercice 5

Résoudre graphiquement et algébriquement dans IR X IR les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x-5y=-8 \\ -2x+7y=9 \\ 11x-y=-12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -x+y=4 \\ 4x-3y=-9 \\ 8x-5y=-11 \end{cases}$

Exercice 6

Résoudre algébriquement dans IR X IR le système suivant :

$$\begin{cases} x^2-16x+y^2=0 \\ 3x-y=16 \end{cases}$$

Exercice 7

Résoudre graphiquement dans IR X IR le système suivant :

$$\begin{cases} x^2-12x+y^2-128y=100 \\ y-x=4 \end{cases}$$

Exercice 8

Résoudre graphiquement dans IR X IR les systèmes d'inéquations suivantes :

a) $\begin{cases} -x+2y>-4 \\ x-y\leq 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x+y+11\geq 0 \\ x-7y-1\geq 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} -6x-5y-2\geq 0 \\ 5x+7y-4\leq 0 \end{cases}$

Exercice 9

Deux couturières Sita et Irène qui travaillent dans le même atelier vont acheter deux types de tissus A et B chez un commerçant. Sita, la plus jeune ramène les colis à l'atelier. A son arrivée elle ne retrouve plus les reçus d'achat cependant, elle sait qu'elle a acheté 15 m de tissus de type A et 7 m de tissus de type B pour un montant total de 30900F. Irène a acheté 17 m de tissus de type A et 9 m de tissus de type B pour un montant total de 36300F.

Aide Sita à retrouver le prix du mètre de chaque type de tissus.

<u>CHAPITRE VIII /</u> SERIE STATISTIQUE A UNE VARIABLE

I- <u>ORGANISATION DES DONNEES</u>

1. <u>Cas discret</u>

- <u>Activité</u>

Une enquête portant sur le nombre d'enfants dans chacun des 50 foyers d'un village donné :

Nombre	0	2	3	4	5	6	7	9	10

d’enfants									
Effectif	2	3	5	4	11	11	8	4	2
Fréquence									

1. Compléter le tableau précédent.
2. Combien de foyers ont un nombre d’enfants inférieur ou égal à 2 ?
   ce nombre est appelé l’effectif cumulé croissant de 2.
3. Combien de foyers ont un nombre d’enfants supérieur ou égal à 2 ? ce nombre est appelé l’effectif cumulé décroissant de 2.
4. Déterminer l’effectif cumulé croissant de 5.
5. Déterminer l’effectif cumulé décroissant de 4.

   On définit de façon analogue la fréquence cumulée décroissante et la fréquence cumulée croissante.
6. Compléter le tableau suivant :

Nombre d’enfants	0	2	3	4	5	6	7	9	10
Effectif	2	3	5	4	11	11	8	4	2
Fréquence									
Effectif cumulé croissant									
Effectif cumulé décroissant									
Fréquence cumulée croissante									
Fréquence cumulée décroissante									

2. <u>Cas d’un regroupement par classes de même amplitude</u>

- **<u>Activité</u>**

A l’issue des épreuves d’un concours, le jury a répertorié les notes obtenues sur 20 par les candidats :

Note	[0 ;5[	[5 ;10[	[10 ;15[	[15 ;20]
Effectif	504	500	801	300

1. Quel est le nombre de candidats ayant participé à ce concours.
2. L'effectif cumulé croissant de la classe [5 ;10[est la somme des effectifs de cette classe et des effectifs précédents.
   a) Quel est l'effectif cumulé croissant de la classe [5 ;10[?
   b) Quel est l'effectif cumulé décroissant de la classe [0 ;5[? de la classe [15 ;20] ?

3) L'effectif cumulé décroissant de la classe [5 ;10[est la somme des effectifs de cette classe et des effectifs suivants.

   Quel est l'effectif cumulé décroissant de la classe [5 ;10[?

4) Compléter le tableau suivant :

Note	[0 ;5[	[5 ;10[	[10 ;15[	[15 ;20]
Effectif	504	500	801	300
Effectif cumulé croissant				
Effectif cumulé décroissant				
Fréquence cumulée croissante				
Fréquence cumulée décroissante				

II- <u>GRAPHIQUES</u>

1. <u>Diagramme circulaire, Diagramme semi-circulaire, Diagramme à bandes et en bâtons</u>

Ces différents modes de représentations graphiques sont utilisés pour représenter une série statistique dont le caractère étudié est qualitatif.

- **Activité**

Le tableau suivant donne en millions de kilomètres carrées la superficie des océans du globe terrestre :

Océan	Superficie
Pacifique	183,4
Atlantique	106,7
Indien	73,8
Antarctique	19,7
Arctique	12,4

Représentons ces données

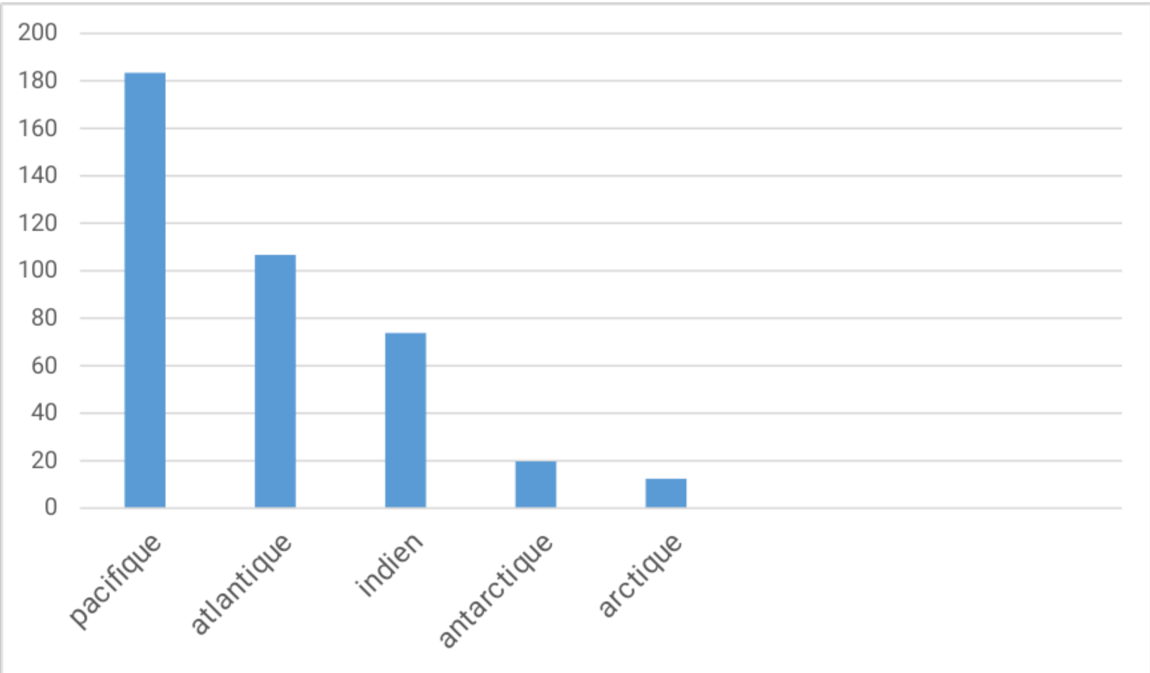
a) Par un diagramme à bande ;

b) Par un diagramme circulaire ;

c) Par un diagramme semi-circulaire.

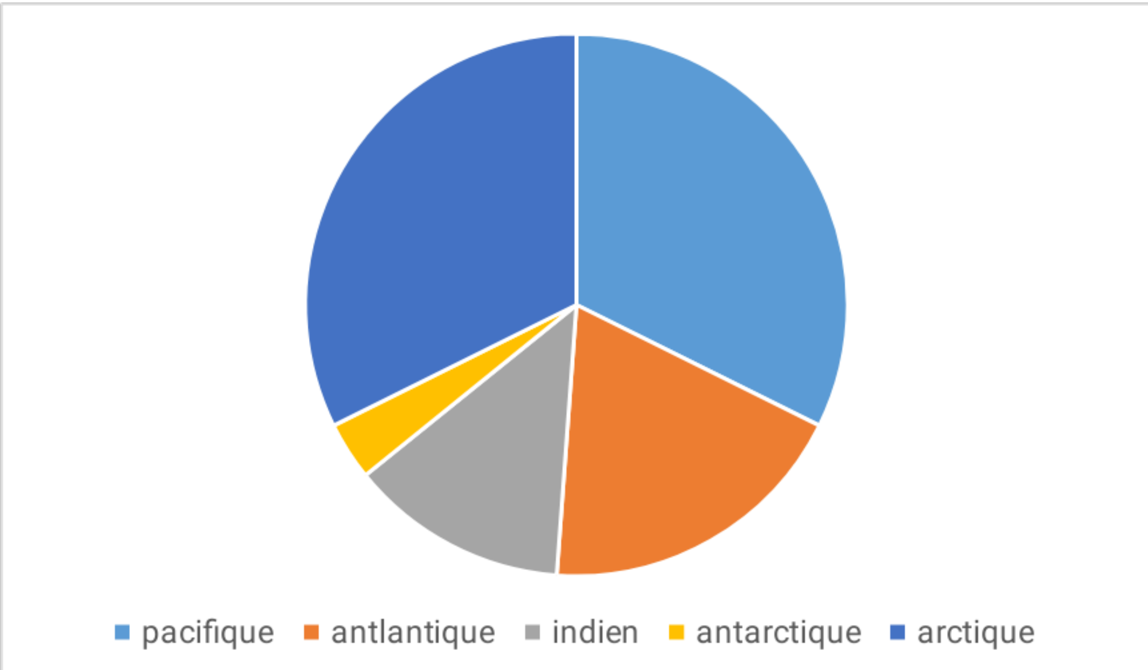
Résolution

a) Les modalités sont représentées par des rectangles ayant la même base et des hauteurs proportionnelles à leurs effectifs (ou fréquence).



b) On dresse un tableau de proportionnalité entre chaque effectif (ou fréquence) et l'angle du secteur angulaire correspondant.

Océan	**Superficie**	**Angle**
Pacifique	183,4	$\frac{183,4X360}{396}$ =166,7°
Atlantique	106,7	$\frac{106,7X360}{396}$ = 97°
Indien	73,8	$\frac{73,8X360}{396}$ = 67,1°
Antarctique	19,7	$\frac{19,7X360}{396}$ = 17 ,9°
Arctique	12,4	$\frac{12,4X360}{396}$ = 166,7°
Total	**396**	**360**



c) On dresse un tableau de proportionnalité entre chaque effectif (ou fréquence) et l'angle du secteur angulaire correspondant.

Océan	Superficie	Angle
Pacifique	183,4	$\frac{183,4X180}{396}$ =83,36°
Atlantique	106,7	$\frac{106,7X180}{396}$ = 48,5°
Indien	73,8	$\frac{73,8X180}{396}$ = 33,55°
Antarctique	19,7	$\frac{19,7X180}{396}$ = 8,95°
Arctique	12,4	$\frac{12,4X180}{396}$ = 5,64°
Total	396	180

(voir diagramme)

Exercice 1

Un établissement de transfusion sanguine a dressé le bilan de sa collecte de sang pendant un an.

Age du donneur	[16 ;25[	[25 ;34[	[34 ;43[	[43 ;52[	[52 ;61[
Fréquence (%)	4	14	24	32	26

Représenter cette série statistique par un diagramme circulaire.

2. Diagramme en bâtons

Lorsque le caractère étudié est quantitatif et discret on peut représenter la série étudiée par un **diagramme en bâtons.**

La hauteur de chaque bâton est proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence).

Exemple

Un professeur interroge les 40 élèves d'une classe de seconde G_2 sur le nombre de leurs frères et sœurs.

Voici le résultat obtenu :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5	6
Effectif	3	6	7	5	8	7	4

3. <u>Histogramme</u>

Lorsque le caractère étudié est quantitatif et continu et lorsque les modalités sont regroupées en classe de même amplitude, on peut représenter la série étudiée par un **histogramme** :

La hauteur de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence).

<u>Exemple</u>

On a noté la distance parcourue par des élèves d'une ville pour se rendre dans leur établissement et on a dressé le tableau suivant :

Distance en km	[0,3[	[3 ;6[	[6 ;9[	[9 ;12[	[12 ;15[
Fréquence (%)	40	24	16	12	8