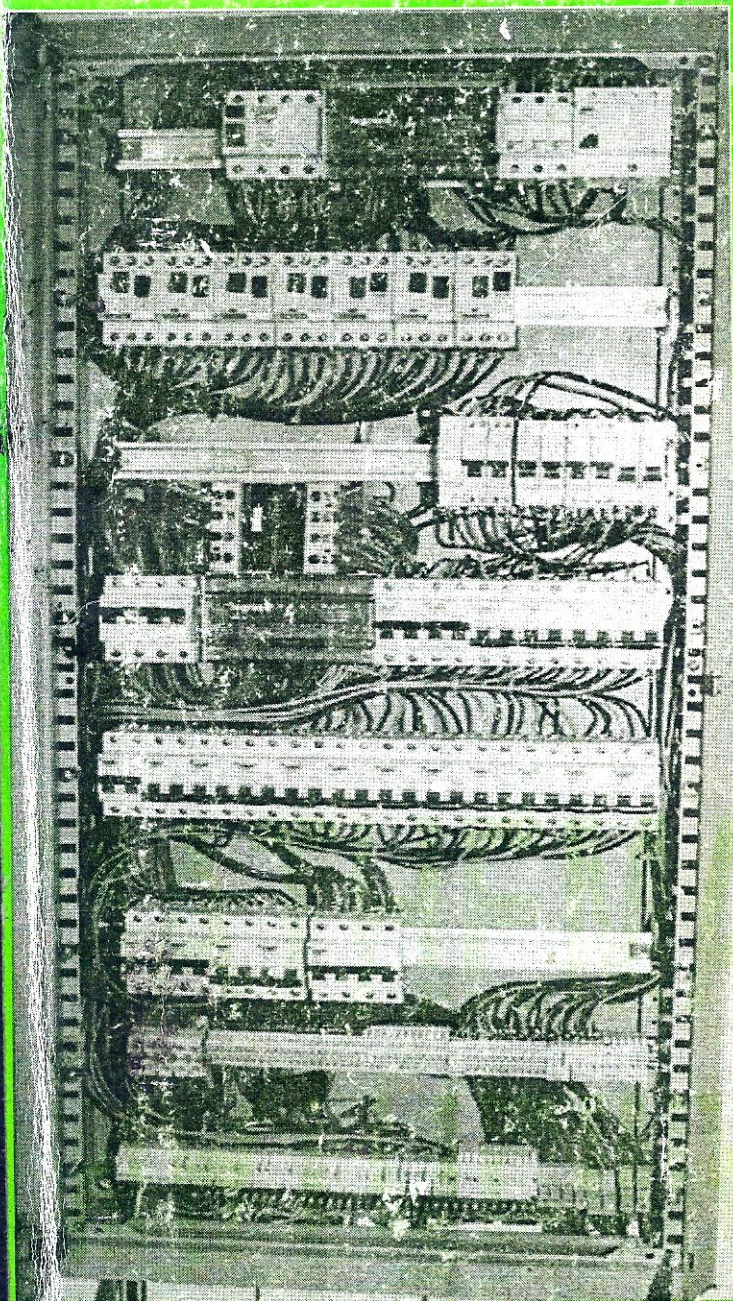


MATHÉMATIQUES

TF2



$$e^{i\pi} = -1$$

$$j^2 = -1$$

$$\tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$j^2 + j = -1$$

$$\ln(e^{-1}) = -1$$

$$\int_e^1 \frac{dx}{x} = -1$$

Terminale F2

Un fainéant n'honore pas Dieu

SOMMAIRE

CHAPITRE I :

- COMPLEMENTS SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES 3

CHAPITRE II :

- PRIMITIVES-INTEGRALES-CALCULS D'AIRES..... 22

CHAPITRE III :

- FONCTION LOGARITHME NEPERIEN 28

CHAPITRE IV :

- FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE 37

CHAPITRE V :

- NOMBRES COMPLEXES 45

CHAPITRE VI :

- NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE..... 60

CHAPITRE VII :

- EQUATIONS DIFFERENTIELLES 66

BACCALAUREAT:

- QUELQUES SUJETS
- CORRECTIONS DETAILLEES..... 71

MATHEMATIQUES

- **Cours**
- **Exercices à Compléter**

CHAPITRE I : COMPLEMENTS SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

1) RAPPELS

Ce chapitre est la suite de celui traité en classe de 1F₂ sur les limites, continuité et dérivation des fonctions numériques. Il a pour objet de renforcer les acquis de la 1F₂ sur ces notions mais surtout de montrer l'importance de la limite dans l'étude d'une fonction numérique.

A toutes fins utiles nous donnons ci-après un tableau récapitulatif des résultats des opérations sur les limites.

Tableau récapitulatif

Limites d'une somme

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si f a pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et si g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f + g$ a pour limite en a	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure

Limites d'un produit

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si f a pour limite en a	l	$l, l > 0$	$l, l < 0$	$l, l > 0$	$l, l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors fg a pour limite en a	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure

Limites d'un inverse

g est une fonction ; l' est un nombre réel ; a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si g a pour limite en a	$l' \neq 0$	0 (g étant positive sur K)*	0 (g étant négative sur K)*	$-\infty$ ou $+\infty$
Alors $\frac{1}{g}$ a pour limite en a	$\frac{1}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Limites d'un quotient

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si f a pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$ ou $+\infty$
Et si g a pour limite en a	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l', l' > 0$	$l', l' < 0$	$l', l' > 0$	$l', l' < 0$	0	$-\infty$ ou $+\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		On ne peut pas conclure

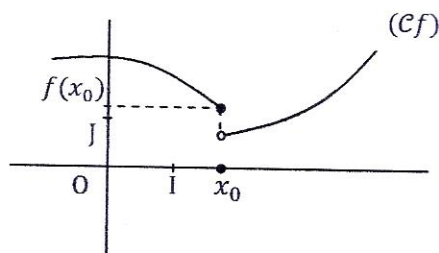
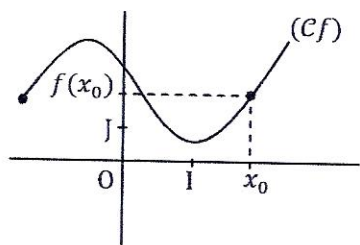
2) Utilisation des limites dans l'étude d'une fonction

L'élève de terminale en plus de savoir calculer les limites doit être capable de donner :

- a) **Une interprétation analytique du résultat** : continuité en un point ; continuité sur un intervalle, dérivabilité en un point, dérivabilité sur un intervalle.
- b) **Une interprétation graphique du résultat** : asymptotes, branches paraboliques, points anguleux, tangentes verticales...

1) Limites et continuité

- **Définition** : Une fonction f est continue en un réel x_0 de son ensemble de définition Df si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- **Interprétation graphique** : La continuité de f en x_0 se traduit pour sa courbe (Cf) par l'absence de "saut" en ce point. c'est-à-dire si (Cf) peut être tracée "sans que le stylo ne quitte" la feuille.



- **Prolongement par continuité** :

Si $x_0 \notin Df$ et si f admet en x_0 une limite finie ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l ; l \in \mathbb{R}$) alors on dit que f est prolongeable par continuité en x_0 .

Elle est prolongée par la fonction g définie comme suit :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \\ g(x_0) = l \end{cases} \quad \forall x \in Df$$

Exemple 1 :

Dans chacun des cas suivants f est une fonction définie de l'intervalle $]0; 1[$ vers \mathbb{R} et :

1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

3) $f(x) = \frac{x(1-x)}{x-1}$

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

4) $f(x) = \frac{|x|-1}{x-1}$

1) Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

2) Si oui, préciser le prolongement

Exemple 2 : On donne la fonction g définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R}

$$\text{par } \begin{cases} g(x) = \frac{6x}{x+2} & \text{Si } x \in]-\infty; 1[\\ g(x) = \sqrt{3x+1} & \text{Si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

- 1) Peut-on prolonger g par continuité en 1 ?
- 2) Si oui, préciser le prolongement.

Exemple 3 : On donne la fonction h définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $h(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

- 1) Démontrer que l'on peut prolonger h par continuité en 4.
- 2) Préciser son prolongement

Exemple 4 : Soit la fonction $l: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$$

- 1) Démontrer que l est prolongeable par continuité en -2 .
- 2) Préciser son prolongement

2) Limite et dérivabilité

• Définition :

Une fonction f est dérivable en un réel x_0 de son domaine de définition Df si et seulement si son taux de variation en x_0 admet une limite finie quand x tend vers x_0 .

$$\text{C'est-à-dire } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \quad (l \in \mathbb{R})$$

Le réel l s'il existe est appelé nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$

Exemple 1 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt{x^2 + 2}$$

- 1) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

Exemple 2 : Soit la fonction

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{Si } x \in]-\infty; 1[\\ \frac{1}{x} & \text{Si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

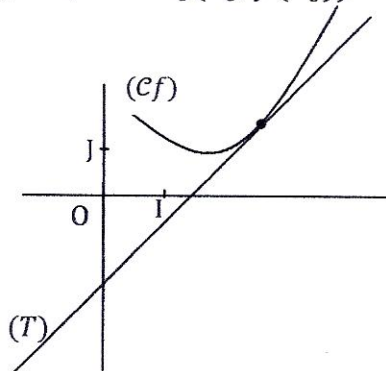
Etudier la dérivabilité de g en 1.

Exemple 3 : Etudier la dérivabilité de la fonction f en 1 dans chacun des cas suivants.

- 1) $f(x) = 3x^2 + 5$
- 2) $f(x) = x^3 - 9$
- 3) $f(x) = \sqrt{x+1}$
- 4) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

- **Interprétation graphique du nombre dérivé**

Si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0)$ représente le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point $M_0(x_0; f(x_0))$



- **Equation de la tangente (T)**

(T) a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Exemple 1 : On donne la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2 - 3x$$

- 1) Démontrer que f est dérivable en 2.
- 2) Etablir une équation de la tangente (T) à sa courbe en son point d'abscisse 2.

Exemple 2 : On donne le polynôme f tel que :

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Le plan est muni d'un repère (O, I, J)

- 1) Démontrer que la courbe (Cf) coupe l'axe (OI) en deux points A et B dont l'un a pour abscisse -1 .
- 2) Déterminer les équations des tangentes à (Cf) en A et en B.

- **Cas de non dérivabilité**

Deux principaux cas peuvent se présenter :

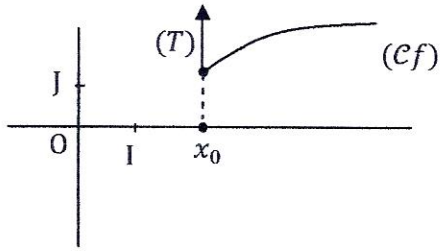
- 1) f est dérivable en x_0 à gauche ($f'_g(x_0)$ existe) dérivable en x_0 à droite ($f'_d(x_0)$ existe) mais $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$.

Le point $M_0(x_0; f(x_0))$ est un point anguleux

- 2) Le taux de variation de f en x_0 admet une limite infinie en x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$$

La courbe (Cf) admet en x_0 une demi-tangente verticale

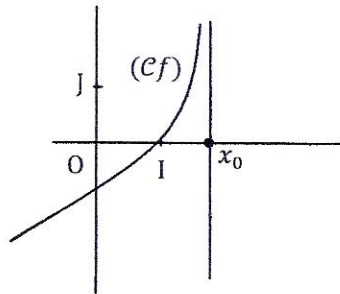


3) Limite et asymptotes

1) Asymptote verticale

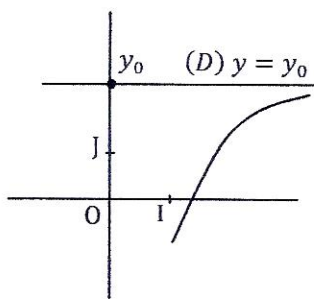
- **Définition** : x_0 étant un réel ; si la fonction f admet en x_0 une limite infinie alors la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote parallèle à l'axe (OJ) ou une asymptote verticale à la courbe (Cf).

- **Illustration graphique**

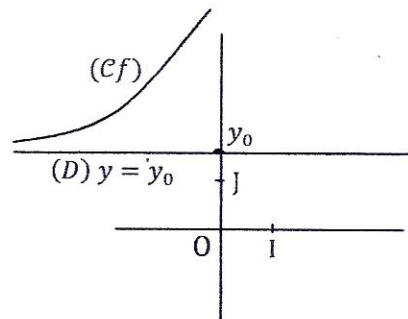


2) Asymptote horizontale

y_0 étant un réel, si la fonction f admet à l'infini une limite finie égale à y_0 alors la droite d'équation $y = y_0$ est une asymptote parallèle à l'axe (OI) ou une asymptote horizontale à la courbe (Cf).



La droite (D) est une asymptote à (Cf) en $+\infty$



La droite (D) est une asymptote à (Cf) en $-\infty$

3) Asymptote oblique

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$

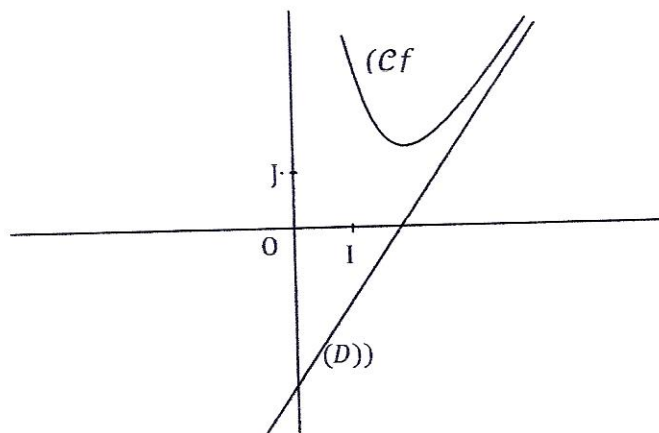
De même si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (Cf) en $+\infty$.

Position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique (D)

Le signe de l'expression $d(x) = f(x) - (ax + b)$ permet de préciser la position de la courbe (Cf) par rapport à la droite asymptote.

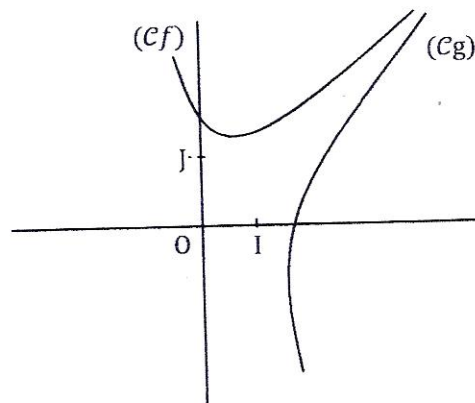
- Si $[f(x) - (ax + b)] > 0$ alors (Cf) est au-dessus de (D)
- Si $[f(x) - (ax + b)] < 0$ alors (Cf) est en-dessous de (D)
- Si $[f(x) - (ax + b)] = 0$ alors (Cf) coupe de (D)

Illustration graphique



4) Courbes asymptotes : Deux courbes (Cf) et (Cg) représentant deux fonctions f et g sont asymptotes l'une de l'autre, si seulement si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

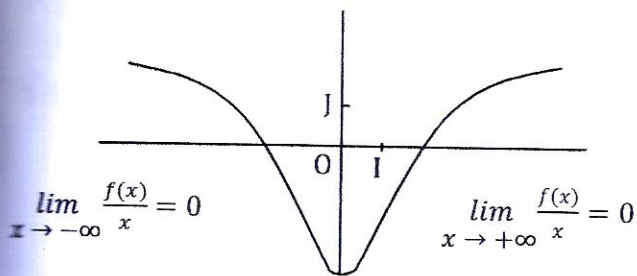
Comme précédemment l'étude du signe de l'expression $d(x) = f(x) - g(x)$ permet de préciser les positions relatives des deux courbes.



4) Limite et branches paraboliques

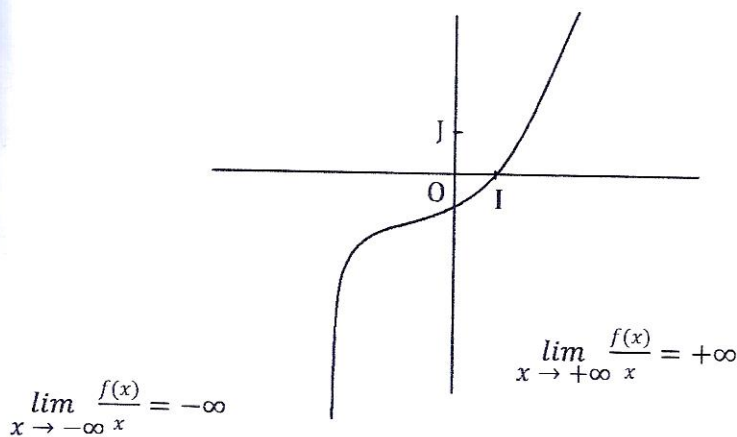
- **Branche parabolique de direction (OI)**

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ alors on dit que la courbe (Cf) admet en $-\infty$ (respectivement en $+\infty$) une branche de direction (OI) en $-\infty$ ou $+\infty$



• **Branche parabolique de direction (OJ)**

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ (en $-\infty$) ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ (en $+\infty$) alors on dit que la courbe (Cf) admet en $-\infty$ (respectivement en $+\infty$) une branche parabolique de direction (OJ).



Dans tous les exercices qui suivent le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) et les fonctions sont définies de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants :

- 1) Déterminer le domaine de définition Df
- 2) Calculer les limites aux bornes de Df
- 3) Donner une interprétation graphique des résultats

a) $f(x) = \frac{x-4}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

b) $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{4x-5}{x}$

c) $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2-1}$

f) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-x+2}}$

Exercice 2 : On donne la fonction g telle que $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$

- 1) Déterminer D_g
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_g
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$
- 4) Donner une interprétation graphique des résultats.

Exercice 3 : On donne la fonction h telle que : $h(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

- 1) Déterminer D_h
- 2) a) Calculer les limites aux bornes de D_h
b) Donner une interprétation graphique des résultats
- 3) Déterminer les réels a et b tels que $h(x) = a + \frac{b}{x-1}$
- 4) Etudier la position relative de (Ch) par rapport à son asymptote horizontale.

Exercice 4 : Soit la fonction f telle que : $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x}$

- 1) Déterminer son domaine de définition D_f
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_f
- 3) Démontrer que $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x}$
- 4) En déduire que la droite (D) ; $y = x + 3$ est une asymptote à (Cf) en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 5) Etudier la position relative de (Cf) par rapport à (D)

3) FONCTIONS DERIVEES

1) Définition :

Soit f une fonction de domaine de définition D_f et D le sous-ensemble de D_f où f est dérivable. On appelle fonction dérivée de f la fonction notée f' qui, à tout réel x de D associe le nombre dérivé de f en x ; c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

2) Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v , deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel quelconque. Alors les fonctions $u + v$; ku ; u^n sont dérivables sur I et si de plus la fonction v ne s'annule pas sur I ; les fonctions $\frac{u}{v}$ et $\frac{1}{v}$ sont dérivables sur I .

Théorèmes		Cas particuliers	
Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$	a	0
uv	$u'v + v'u$	x	1
ku	ku'	ax	a
$\frac{1}{v} \quad v \neq 0$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{1}{x} \quad x \neq 0$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{u}{v} \quad v \neq 0$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$		
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
u^n	$nu'u^{n-1}$	x^n	nx^{n-1}

Exercice : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x - 3$

2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 7$

3) $f(x) = \frac{1}{3x^2 + 4x - 7}$

4) $f(x) = \frac{3x+5}{3x-1}$

5) $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$

6) $f(x) = \frac{1}{4x+1}$

7) $f(x) = \sqrt{x-2}$

8) $f(x) = \frac{9x+5}{2x^2+3x-5}$

9) $f(x) = x(3x+1)^3$

10) $f(x) = \frac{4}{11x}$

11) $f(x) = \cos(3x+5)$

12) $f(x) = \tan(-2x+1)$

13) $f(x) = 4 \sin^3(4x+3)$

14) $f(x) = \cos x \cdot \sin 2x$

15) $f(x) = \tan(-4x^2)$

16) $f(x) = \frac{3x^2+4x-5}{2x^2+3x+1}$

17) $f(x) = (8x-3)^2$

18) $f(x) = \sqrt{4-3x}$

19) $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{3x-11}$

20) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

21) $f(x) = (2x-5)^2(x^2+x)$

22) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

23) $f(x) = -2(x-7)^2$

24) $f(x) = \frac{3}{5x}$

25) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

26) $f(x) = \frac{x^2-7x}{3x-2}$

27) $f(x) = \cos 3x + \sin 4x$

28) $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + 3 \tan x$

29) $f(x) = \cos^2(3x+8)$

30) $f(x) = \sin(x^2-3x)$

3) Application de la fonction dérivée :

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I , alors le signe de $f'(x)$ sur I permet de déterminer le sens de variation de f sur I .

En effet : Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I

Si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I

Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

Si f' s'annule en un réel x_0 et change de signe, alors f admet en x_0 un extremum (maximum ; ou minimum).

Remarque : Si $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I

Si $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I

Exercice 1 :

On donne la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 5$

- 1) Déterminer son domaine de définition.
- 2) Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}f$.
- 3) Calculer $f'(x)$.
- 4) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f .
- 5) Dresser le tableau de variation de f .
- 6) Etablir une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}f)$ en $x_0 = 4$.
- 7) Construire la courbe $(\mathcal{C}f)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , après avoir rempli le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-1	-0,5	0	1	2	3	4
$f(x)$							

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

- 1) Déterminer son domaine de définition
- 2) a. Calculer les limites aux bornes de ce domaine
b. Donner une interprétation graphique des résultats
- 3) Calculer $f'(x)$
- 4) Etudier les variations de f
- 5) Dresser son tableau de variation
- 6) a) Calculer les coordonnées du point A d'intersection de $(\mathcal{C}f)$ et l'axe (OI) du repère.
b) Calculer les coordonnées du point B d'intersection de $(\mathcal{C}f)$ et l'axe (OJ) du repère.
- 7) Construire la courbe $(\mathcal{C}f)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité un centimètre.

Exercice 3 : On donne la fonction g définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$

- 1) Déterminer son domaine de définition
- 2) a.) Calculer les limites aux bornes de ce domaine
b.) Justifier que l'axe (OI) est une asymptote à (Cg)
- 3) a.) Démontrer que g est une fonction impaire
b.) Donner une interprétation graphique du résultat.
- 4) a) Démontrer que la droite (D) , $y = x$ est une asymptote à la courbe (Cg) en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudier la position relative de (Cg) par rapport à (D)
- 5) Calculer $g'(x)$
- 6) En déduire les variations et le tableau de variation de g
- 7) Démontrer que le point d'intersection Ω des deux asymptotes est un centre de symétrie de (Cg) .
- 8) Construire la courbe (Cg) ainsi que ses asymptotes dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1 cm.

Exercice 4 : Dans chacun des cas suivants étudier la fonction f (domaine de définition, limites aux bornes, sens de variation, tableau de variation) et représenter graphiquement f

- 1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
- 2) $f(x) = -x^3 + 3x^2$
- 3) $f(x) = 4x^3 + x^2 + 1$
- 4) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 15$

Exercice 5 : Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

- 1) Déterminer les réels a , b , c et d pour que :
 - f présente un extrémum en $x = -3$
 - La courbe (Cf) soit tangente à la droite d'équation $y = 3x - 3$ au point d'abscisse 1.
- 2) On donne la fonction g telle que $g(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ et (Cg) sa courbe.
 - 1) Calculer $g(1)$
 - 2) En déduire que $g(x) = (x - 1)(x^2 + 3x - 1)$
 - 3) Résoudre l'équation $g(x) = 0$
 - 4) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation avec les limites aux bornes de Dg

Exercice 6 : On donne la fonction f telle que :

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3 \text{ et } (Cf) \text{ sa représentation graphique.}$$

- 1) Etudier f (domaine de définition, limites aux bornes de ce domaine, sens de variations et tableau de variation) puis construire la courbe (Cf)
- 2) On note f'' la dérivée seconde de f (la dérivée de la dérivée)
 - a) Calculer $f''(x)$
 - b) Résoudre l'équation $f''(x) = 0$ dans \mathbb{R}
 - c) Démontrer que le point $\Omega(x_0; f(x_0))$ où x_0 est la solution de cette équation est un centre de symétrie de (Cf) .

Exercice 7 : Dans chacun des cas suivants étudier la fonction f (domaine de définition ; limites aux bornes de ce domaine ; interprétation graphique des limites ; variations et tableau de variation.) puis construire la courbe (Cf) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

5) $f(x) = \frac{5}{x-4}$

2) $f(x) = \frac{4x-7}{2x-5}$

6) $f(x) = \frac{4x-3}{|x-3|}$

3) $f(x) = \frac{5x+1}{x+3}$

7) $f(x) = \frac{2-x}{3x-2}$

4) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

8) $f(x) = \frac{4x}{1+2x}$

Exercice 8 :

- 1) Déterminer les nombres a, b, c sachant que la courbe d'équation $y = \frac{ax+b}{x+c}$ passe par les points $B(-1; 6)$; $C(4; 1)$ et admet une asymptote d'équation $y = 2$.

Exercice 9 : Dans chacun des cas suivants :

- 1) Faire l'étude de la fonction f (Df ; limites aux bornes ; interprétation graphique du résultat (éventuellement) ; sens de variations ; tableau de variation).
- 2) a) Déterminer les réels a, b tels que $f(x) = ax + b + \varphi(x)$
b) En déduire que la droite (D) , $y = ax + b$ est asymptote à (Cf) .
c) Etudier la position de (Cf) par rapport à (D)
- 3) Démontrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (Cf) .
- 4) Calculer les coordonnées des points éventuels d'intersection de (Cf) et les axes (OI) et (OJ) du repère.
- 5) construire la courbe (Cf) ainsi que ses asymptotes dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .

$$1) f(x) = \frac{x^2 + 3x + 45}{x}$$

$$2) f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x + 2}$$

$$3) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2 - x}$$

$$4) f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$$

$$5) f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

Exercice 10 : Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . On donne la fonction f telle que $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

- 1) Déterminer les points de la courbe (Cf) où la tangente est parallèle à la droite $(D): y = 7x - 9$
- 2) Déterminer les points de (Cf) où la tangente est perpendiculaire à la droite $(D'): y = x + 3$

4) Propriétés des fonctions strictement monotones sur un intervalle :

1) Définition :

Une fonction f est dite strictement monotone sur un intervalle I si et seulement si elle est strictement croissante ($f'(x) > 0$) ou strictement décroissante ($f'(x) < 0$) sur cet intervalle.

2) Propriétés

- 1) L'image d'un intervalle I par une fonction strictement monotone sur I est un intervalle noté $f(I)$

Plus clairement :

- Si f est strictement croissante sur $[a; b]$ alors $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$

Les réels de I et leurs images sont rangés dans le même ordre

- Si f est strictement décroissante sur $[a; b]$ alors $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$

Les réels de I et leurs images sont rangés dans l'ordre contraire

- Si f est strictement croissante sur $]a; b[$ alors $f(]a; b[) =]\lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$

- Si f est strictement décroissante sur $]a; b[$ alors $f(]a; b[) =]\lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

Remarque : Pour déterminer l'image d'un intervalle I par une fonction f il est donc nécessaire d'étudier le sens de variation de f sur cet intervalle.

2) Fonction bijective :

Une fonction f continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle I réalise une bijection de I vers $f(I)$.

Exemple 1 : Soit la fonction g définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$
Démontrer que g réalise une bijection de $]-\infty; \frac{1}{2}[$ vers $]\frac{5}{2}; +\infty[$

Exemple 2 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x-1}{2x+3}$$

Démontrer que f réalise une bijection de $]-\frac{3}{2}; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

Exercice : Dans chacun des cas suivants démontrer que la fonction f définit une bijection de I vers un intervalle que l'on précisera :

1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$ $I = [2; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ $I =]1; 5]$

3) $f(x) = -4x^3 + 6x + 5$ $I = [1; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{2x+3}{3x^2-2x+8}$ $I = [0; 2]$

3) Application de la bijectivité d'une fonction

Si la fonction f est bijective de I vers $f(I)$ alors pour tout réel m élément de $f(I)$ l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans I .

En particulier si 0 appartient à $f(I)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans I . Cette propriété permet :

- 1) De déterminer le nombre de zéros de f sur tout son domaine de définition
- 2) D'étudier le signe de $f(x)$ à partir de son tableau de variation.

Exemple 1 : On donne la fonction définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + x + 1$

- 1) Déterminer son domaine de définition
- 2) Calculer les limites aux bornes de ce domaine.
- 3) Etudier les variations de f
- 4) Dresser son tableau de variation
- 5) Dédire de ce qui précède que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .
- 6) Justifier que $\alpha \in]-0,7; -0,6[$
- 7) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x

Exemple 2 : On donne la fonction g définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

Dans chacun des cas :

- 1) Etudier la fonction (domaine de définition, limites aux bornes, sens de variation, tableau de variation).
- 2) Dédire de ce qui précède le signe de $g(x)$ sur son domaine de définition
 - a) $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 5$
 - b) $g(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$
 - c) $g(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x - 15$
 - d) $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$
 - e) $g(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 - 5x + 3)$

Problème1

On donne la fonction définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 3}$

- 1) Déterminer son domaine de définition
- 2) a. Calculer les limites aux bornes de ce domaine
b. Donner une interprétation graphique des résultats
- 3) a. Démontrer que f est une fonction paire.
b. Donner une interprétation graphique du résultat
- 4) a. Etudier les variations de f
b. Dresser son tableau de variation
- 5) Démontrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet exactement 2 solutions α et β .

Problème2 : Partie A :

On donne la fonction g définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8$

- 1) Déterminer son domaine de définition
- 2) Calculer les limites aux bornes de ce domaine
- 3) a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
b) Dédire de ce qui précède que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]-2; -1[$
- 4) De tout ce qui précède, déduire que :
 $\forall \epsilon \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall \epsilon \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

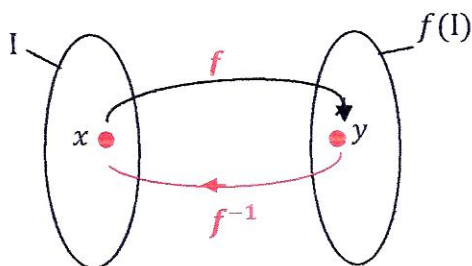
Partie B : On considère maintenant la fonction f telle que $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 1}$

- 1) Déterminer son domaine de définition
- 2) a) Calculer les limites aux bornes de ce domaine
b) Donner une interprétation graphique du résultat le cas échéant
- 3) a) Démontrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

- b) Etudier les variations de f (on utilisera la question 4 de la partie A)
- c) Dresser son tableau de variation
- 4) Justifier que la restriction h de f à l'intervalle $]1; +\infty[$ est une bijection.

4) Bijection réciproque

1) **Définition** : Toute bijection f de I vers $f(I)$ admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie de l'intervalle $f(I)$ vers I



$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

Elle permet à chacun des réels y de $f(I)$ d'associer son unique antécédent x

2) Etude de f^{-1}

- 1) Domaine de définition : $\mathcal{D}f^{-1} = f(I)$
- 2) Sens de variation : f^{-1} a le même sens de variation que f .
- 3) Tableau de variation de f^{-1}

x	a	b
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

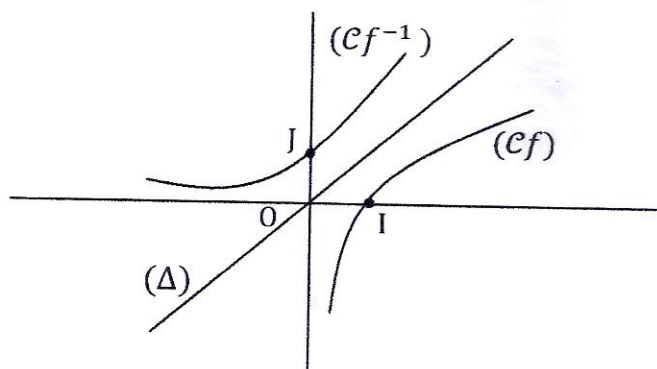
x	a	b
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

x	$f(a)$	$f(b)$
$(f^{-1})'(x)$	+	
$f^{-1}(x)$	a	b

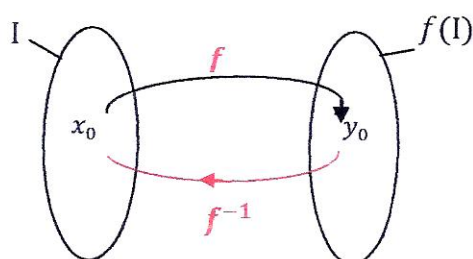
x	$f(b)$	$f(a)$
$(f^{-1})'(x)$	-	
$f^{-1}(x)$	b	a

3) Représentation graphique de f^{-1} :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) la courbe de f^{-1} est l'image de la courbe (Cf) par la symétrie orthogonale d'axe (Δ) ; $y = x$ (appelée la 1^{ère} bissectrice).



4) Dérivabilité de f^{-1} en y_0



- f^{-1} est dérivable en y_0 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$
- $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Méthode

Pour étudier la dérivabilité de f^{-1} en y_0 on peut procéder comme suit :

- 1) On détermine x_0 en résolvant l'équation $f(x) = y_0$ (y_0 est donné dans l'énoncé).
- 2) a) On calcule $f'(x_0)$
b) Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0
- 3) On calcule $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Exemple : On donne la fonction définie de $]1; +\infty[$ vers \mathbb{R} par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8$

- 1) Démontrer f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers sur un intervalle I que l'on précisera
- 2) Donner le sens de variation de f^{-1} et dresser son tableau de variation
- 3) Déterminer $f^{-1}(8)$
- 4) a) f^{-1} est-elle dérivable en 8 ? Justifier ?
b) Si oui, calculer $(f^{-1})'(8)$
- 5) Démontrer que f^{-1} n'est pas dérivable en 7.
- 6) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) construire la courbe (cf) et en déduire (cf^{-1}) .

Problème :

Partie I : On donne la fonction P telle que : $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$

- 1) Etudier la fonction P (domaine de définition, limites aux bornes, variations et tableau de variation)
- 2) En déduire que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]1,6 \ 1,7[$
- 3) Justifier que dans l'intervalle $] -\infty; \alpha[$ $P(x) > 0$
et que dans l'intervalle $] \alpha; +\infty[$ $P(x) < 0$

Partie II : Soit la fonction f définie dans \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^3+1}{1-x}$

- 1) Déterminer son domaine de définition
- 2) Calculer les limites aux bornes de ce domaine
- 3) En déduire que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à (Cf)
- 4) Démontrer que $f'(x) = \frac{P(x)}{(1-x)^2}$
- 5) a) En utilisant les résultats de la partie I, étudier les variations de f
b) Dresser son tableau de variation
- 6) Etablir une équation de la tangente (T) à (Cf) en 0
- 7) a) Justifier que la restriction h de f à $] -\infty; 0[$ est bijective
b) Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
 h^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Si oui, calculer $(h^{-1})'(0)$
- 8) Construire les courbes (Cf) et (Ch^{-1}) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 4cm.

CHAPITRE II : PRIMITIVES – INTEGRALES - CALCULS D'AIRES

I) PRIMITIVES

1) **Définition** : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit qu'une fonction F est une primitive de f si F est définie et dérivable sur I et pour tout élément x de I ; $F'(x) = f(x)$

Exemples :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2 \qquad x \longmapsto 2x + 3$$

- 1) Démontrer que F est une primitive de f
- 2) Trouver d'autres primitives de f sur \mathbb{R}

2) Théorèmes :

- 1) Toute fonction f **continue** sur un intervalle I admet *une infinité de primitive* des primitives sur I .
- 2) Si F est une primitive de f alors toute fonction G telle que $G = F + C$ (C une constante) est aussi une primitive de f

En effet $(G)' = (F + C)' = F' + 0 = F' = f$ donc G aussi est une primitive de f
Des que on rajoute une constante ça ne change rien en dérivant

Conséquence : Une fonction f continue admet une infinité de primitives

- 3) **Primitive d'une fonction satisfaisant une condition donnée** : Si x_0 et y_0 sont des éléments de I , il existe une primitive F et une seule telle que $F(x_0) = y_0$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto -3$$

- 1) Déterminer la forme générale de toutes les primitives de f sur \mathbb{R}
- 2) Déterminer la primitive F de f qui prend la valeur 5 en 2.

4) Opérations sur les primitives

Sous réserve de leur existence nous donnons ci-après les primitives des fonctions, somme, produit, quotient et puissances.

1) Fonctions élémentaires

Fonction f	Une primitive de f
$x \longmapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto ax$
$x \longmapsto x^r \quad (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$x \longmapsto \frac{x^{r+1}}{r+1}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x$
$x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \longmapsto \tan x$

2) Opérations

Fonction f	Une primitive de f
au'	au
$u' + v'$	$u + v$
$u'u^r \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$ ✗
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$
$\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$

Exercice 1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes

1) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7$ ✓

2) $f(x) = 4x^5 + 8x^3 - 5x + 11$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{11}x - 11$

4) $f(x) = \frac{3}{4}x^6 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + 1$

5) $f(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{4}{5x^4} + \frac{11}{2x^7}$

6) $f(x) = \frac{11}{5x^6} + \frac{4}{7x^5} - \frac{3}{2x^2}$

7) $f(x) = \cos x + 2\sin x$

8) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + x^2$

Exercice 2 : Dans chacun des cas suivants déterminer la primitive de f qui prend la valeur β pour $x = \alpha$

1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$\alpha = -2 ; \beta = 5$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\alpha = 4 ; \beta = 7$

3) $f(x) = (x-1)^4$

$\alpha = 2 ; \beta = 0$

4) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$

$\alpha = 0 ; \beta = 0$

Exercice 3 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes

1) $f(x) = (5x+1)^6$

2) $f(x) = (x^2 + 3x - 2)(2x + 3)$

3) $f(x) = (x^3 + 4x + 5)^6(3x^2 + 4)$

4) $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)(x + 1)$

5) $f(x) = \frac{1}{(3x+1)^4} - \frac{5}{(2x+5)^3} + \frac{3}{4(2x-1)^5}$

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

7) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4-x}}$

$$8) f(x) = 4\cos(4x + 8)$$

$$9) f(x) = \sin x \cos^3 x$$

$$10) f(x) = \sin^3 x \cos x$$

$$11) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$12) f(x) = \cos^2 3x$$

$$13) f(x) = x \cos(x^2 + 2)$$

$$14) f(x) = \sin(wx + 4)$$

$$15) f(x) = \cos(wx + 4)$$

$$16) f(x) = \cos^2 x$$

$$17) f(x) = \sin^2 x$$

Exercice 4 : On donne les fonctions f et F définies de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par :

$$f(x) = x\sqrt{x^2 + 4} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 + 4}$$

1) Déterminer les réels a, b et c pour que F soit une primitive de f sur son domaine de définition.

2) Déterminer F telle que $F(0) = 0$

III) INTEGRALES

1) **Définition** : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux réels de I .
 f admet donc des primitives F sur I .

On appelle intégrale de a à b de f , le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ et tel que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Notation : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple : Calculons $\int_2^3 x^3 dx$

$$\text{On a : } f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^4}{4}$$

$$F(3) = \frac{81}{4}$$

$$F(2) = \frac{16}{4}$$

$$\text{donc } F(3) - F(2) = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4}$$

$$\boxed{\int_2^3 x^3 dx = \frac{65}{4}}$$

2) **Vocabulaire** : Le réel a est appelé borne inférieure de l'intégrale

Le réel b est appelé borne supérieure de l'intégrale

Une intégrale dont les 2 bornes sont égales est nulle $\int_a^a f(x)dx = 0$

3) **Propriété de l'intégrale**

a) Relation de Chasles $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

c) Linéarité : $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \int \alpha f(x)dx + \int \beta g(x)dx$
 $= \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

d) Inégalité de la moyenne


Si $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Exercice : Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^3 (x-4)dx$

$I_6 = \int_1^2 \frac{dx}{(4-3x)^2}$

$I_2 = \int_0^3 \frac{2}{(2x+3)^2} dx$

$I_7 = \int_0^\pi (\cos x + 1)dx$ ~~X~~ 

$I_3 = \int_1^2 (2x - 1 + \frac{1}{x^2})dx$

$I_8 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}$

$I_9 = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ D/2

$I_5 = \int_1^4 4x^3 dx$

$I_{10} = \int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^3} dx$ S

4) Valeur moyenne d'une fonction

1) **Définition** : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On appelle valeur moyenne

de f sur $[a, b]$ le nombre réel $m = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

2) **Exemple** : Calculer la valeur moyenne m de la fonction sinus sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$

5) Technique d'intégration par parties

Lorsqu'aucune formule usuelle ne permet de déterminer une primitive de la fonction sous intégrale on utilise la technique d'intégration par parties.

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si leurs dérivées u' et v' sont aussi dérivables sur I on a :

$$\int_a^b u'(x) v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x)dx$$

Exemple : $I = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$

Soit $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = x$

$u'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$

$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$

$I = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx$

$I = [x \sin x]_0^{\pi/2} + [\cos x]_0^{\pi/2} = [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2}$

Exercice : A l'aide de la technique d'intégration par parties calculer les intégrales

$$I_1 = \int_0^{\pi} x \cos x \, dx$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x \, dx$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} x^2 \cos 3x$$

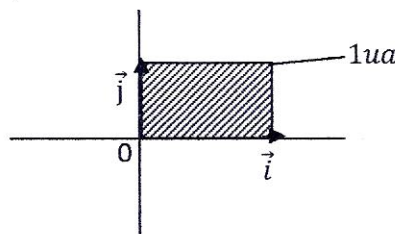
$$I_4 = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, d(x)$$

$$I_5 = \int x^2 \sin x \, d(x)$$

III) Application des intégrales : calcul d'aire

1) Définition du mot aire

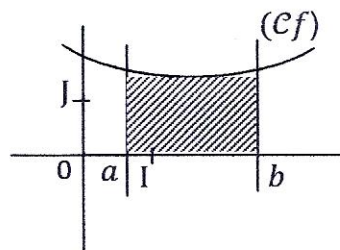
- L'aire est le nombre qui mesure une surface
- Unité d'aire : Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle unité d'aire (et on note ua) l'aire du rectangle dont les dimensions sont $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$



2) Calcul d'aire :

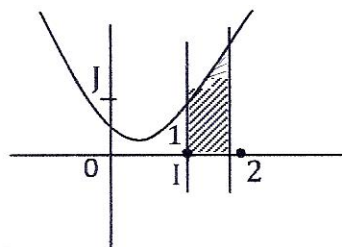
* f étant une fonction continue (elle admet des primitives) et positive (sa courbe est au-dessus de l'axe (OI)) sur un intervalle $[a, b]$, l'aire du domaine du plan limité par la courbe (Cf) ; l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) \, dx$$



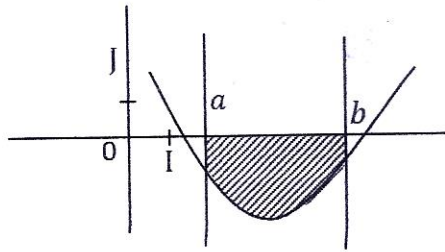
Exemple : Soit $f: x \mapsto x^2$ et (Cf) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

- 1) **Hachurer** le domaine du plan limité par la courbe (Cf) l'axe (OI) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$
- 2) **Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie hachurée.**



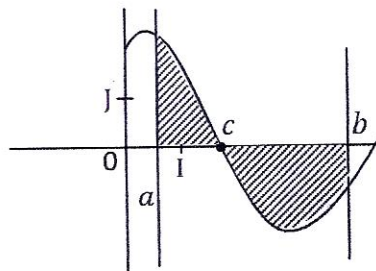
- f étant une fonction continue et négative (sa courbe est en dessous de l'axe (OI)) sur un intervalle $[a, b]$, l'aire du domaine du plan limité par la courbe (Cf) , l'axe (OI) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$$



- f étant une fonction continue sur $[a, b]$ et dont la courbe sur $[a, b]$ a l'allure ci-dessous ; l'aire de la partie du plan limitée par (Cf) , l'axe (O,I) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

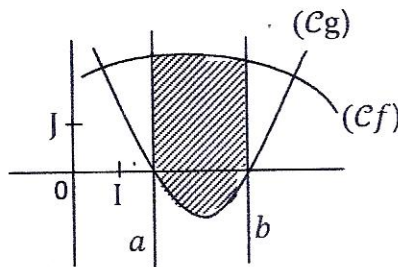


Exemple : $f(x) = \cos x$

- 1) Construire la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2 cm.
- 2) Hachurer le domaine du plan limité par (Cf) ; l'axe (OI) et les droites d'équation $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$
- 3) Calculer en cm^2 l'aire de la zone hachurée.

- f et g sont 2 fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et $f \geq g$ sur $[a, b]$ (la courbe (Cf) est au-dessus de (Cg) sur $[a, b]$) ; l'aire du domaine plan limité par les courbes (Cf) et (Cg) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



Exemple d'application : Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1cm, représenter la fonction $f: x \rightarrow x^2$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$

- 1) Hachurer le domaine plan limité par la courbe (Cf) , (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.
- 2) Calculer l'aire \mathcal{A} de ce domaine en cm^2 .

CHAPITRE III : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1) Définition :

La fonction inverse c'est-à-dire la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction rationnelle. Elle est donc continue sur $]0; +\infty[$. D'où elle admet des primitives sur cet intervalle. On appelle fonction logarithme népérien, la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction inverse qui prend la valeur 0 en 1.

On la note \ln .

ln existe sse $x > 0$

Traduction de la définition

- $\mathcal{D}\ln =]0; +\infty[$
- $\ln 1 = 0$
- Pour tout réel x élément de $]0; +\infty[$ $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

2) Ensemble de définition de fonctions composées avec \ln

D'après ce qui précède la fonction :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln[u(x)] \text{ a pour ensemble de définition}$$

$$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathcal{D}u \text{ et } u(x) > 0\}$$

et la fonction $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \ln[|u(x)|]$$

a pour ensemble de définition : $\mathcal{D}g = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathcal{D}u \text{ et } u(x) \neq 0\}$

Exemples : Dans chacun des cas suivants déterminer le domaine de définition de la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R}

$$1) f(x) = \ln(2x + 3)$$

$$2) f(x) = \ln(-x + 4)$$

$$3) f(x) = \ln(3x^2 + 5x - 2)$$

$$4) f(x) = \ln\left(\frac{-x+1}{5x-3}\right)$$

$$5) f(x) = \ln|x - 4|$$

$$6) f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$$

$$7) f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$$

$$8) f(x) = \ln x - \ln(x^2 - 9)$$

$$9) f(x) = \ln(1 - x) + \ln(2x + 1)$$

$$10) f(x) = \ln(x - 1) + \ln(2x + 1)$$

ln |A| existe sse $A \neq 0$

3) Propriétés algébriques de \ln :

1) Propriété fondamentale :

Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau ci-dessous et conjecturer une relation entre $\ln a$; $\ln b$ et $\ln(ab)$

a	b	ab	$\ln(ab)$	$\ln a$	$\ln b$	$\ln a + \ln b$
3	2					
4	7					
7	6					
2,5	4					
5	0,8					

Propriété :

Pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$, on a $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Traduction : \ln transforme le produit de deux réels strictement positifs en la somme de leurs images.

2) Conséquences de la propriété fondamentale

La propriété ci-dessus permet de trouver :

a) L'image de l'inverse d'un réel

En remplaçant b par $\frac{1}{a}$ on a :

$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a} \text{ or } a \times \frac{1}{a} = 1$$

$$\text{donc } \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$$

b) L'image d'un quotient

En remplaçant b par $\frac{1}{b}$ on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) &= \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \\ &= \ln a - \ln b \end{aligned}$$

$$\boxed{\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b}$$

c) L'image d'une puissance

En remplaçant b par a on a :

$$\ln(a \times a) = \ln a + \ln a$$

$$\Leftrightarrow \ln a^2 = 2 \ln a$$

Et d'une manière générale

$$\boxed{\ln(a^n) = n \ln a}$$

$$\forall n \in \mathbb{R}$$

$$\text{En particulier } \ln \sqrt{a} = \ln a^{1/2} = \frac{1}{2} \ln a$$

Exemples : Ecrire sous forme de $\ln A$ chacun des nombres suivants :

1) $3\ln 2 - \ln 7 + \ln 4$

4) $\ln(1 + \sqrt{2}) + \ln(1 + \sqrt{2})^2$

2) $\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 9 - 2\ln 5$

5) $\ln \frac{(\sqrt{3}+1)}{2} + \ln \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$

3) $\ln 5 - 3\ln 3 - \ln 2$

6) $\ln(1 - \sqrt{2})^{10} + \ln(1 + \sqrt{2})^{10}$

3) **Le nombre de Neper** :

On appelle nombre de Neper (du nom du mathématicien écossais Neper) l'unique réel noté e tel que $\ln e = 1$

Pour cela on dit que e est la base de \ln

e est un nombre irrationnel (c'est-à-dire un nombre à écriture décimale illimitée non périodique).

La calculatrice donne $e \approx 2,718\ 281\ 828\ 456 \dots$

Exercice : Calculer la valeur exacte de chacun des nombres suivants :

1) $\ln(e^2)$ 2) $\ln\left(\frac{e^4}{\sqrt{e}}\right)$ 3) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ 4) $\ln(e^2\sqrt{e})$

5) $\ln(\sqrt{e})$ 6) $\ln(\sqrt{e})^3 + \ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ 7) $\ln e^3 + \frac{1}{\ln(e^3)} - e\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$

4) **Etude analytique de \ln**

1) **Variation de \ln et conséquences**

\ln est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$ car sa dérivée \ln' est strictement positive sur cet intervalle.

Conséquence 1 : Elle est une fonction bijective. Ce qui signifie que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$

Traduction : Deux réels à images égales par \ln sont égaux. Cette propriété permet de résoudre les équations contenant \ln .

Méthode : Pour résoudre une équation (E) contenant \ln on peut procéder comme suit :

- On détermine le domaine de validité de (E) noté \mathcal{D}_V
- On transforme l'équation de façon à obtenir une égalité de la forme $\ln A = \ln B$
- On laisse "tomber" les \ln et on a : $A = B$
- On résout l'équation $A = B$ et on retient seulement les solutions qui appartiennent à \mathcal{D}_V .

Exemple 1 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \sphericalangle (E_1) ; \ln(5 - 2x) = 0 & (E_7) ; \ln(4 - x^2) = \ln(3x) \\ \sphericalangle (E_2) ; \ln(x^2 - 4) = \ln(1 - 4x) & (E_8) ; \ln(5x + 2) - \ln(x + 2) = \ln(x - 2) \\ (E_3) ; \ln(x^2 - 3) = \ln(x) & (E_9) ; 3\ln(x + 1) = 1 \sphericalangle \\ (E_4) ; \ln(x - 3) = \ln(2 + x) & (E_{10}) ; \ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(2 + x) \\ \sphericalangle (E_5) ; \ln(x - 4) = \ln 2 + \ln 3 & \sphericalangle (E_{11}) ; \ln \left| \frac{1}{2} + x \right| = \ln|x| \\ (E_6) ; 1 + \ln(x + 2) = 0 & (E_{12}) ; \ln|x - 1| + \ln|2x + 1| = 0 \end{array}$$

Exemple 2 : Résoudre dans les équations suivantes

$$\begin{array}{l} (E_1) ; (\ln x)^2 + \ln x - 12 = 0 \\ (E_2) ; (\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0 \sphericalangle \\ (E_3) ; (\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - 7\ln x + 10 = 0 \\ (E_4) ; (\ln x)^3 - 6(\ln x)^2 + 8\ln x = 0 \sphericalangle \\ (E_5) ; (\ln x)^4 - (\ln x)^2 - 12 = 0 \\ (E_6) ; (\ln x)^4 + (\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - \ln x + 6 = 0 \\ (E_7) ; 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0 \\ (E_8) ; 2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - \ln x + 6 = 0 \\ (E_9) ; 3(\ln x)^2 - 7\ln x + 2 = 0 \end{array}$$

Conséquence 2 : \ln est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc 2 réels quelconques de cet intervalle et leurs images sont rangés dans le même ordre.

C'est-à-dire $\forall x > 0$ et $\forall y > 0$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$.

Cette propriété permet de résoudre les inéquations contenant \ln .

Méthode : Pour résoudre une inéquation (I) contenant \ln on peut procéder comme suit :

- On détermine le domaine de validité $\mathcal{D}V$ de (I)
- On transforme l'inéquation de façon à obtenir une inégalité du type $\ln A > \ln B$ (par exemple)
- On laisse "tomber" les \ln et on obtient (I') , $A > B$
- On résout l'inéquation (I')
- On détermine l'ensemble solution de I

$$S_{(I)} = S_{(I')} \cap \mathcal{D}V .$$

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

(I₁): $\ln x < 3 \ln 2$

(I₂): $(1 - \ln x)(2 + \ln x) \geq 0$

(I₃): $\ln(x^2 - x + 1) \leq \ln(2 - x)$

(I₄): $(\ln x)^2 < 1$

(I₅): $\ln(x^2) \geq 1$

(I₆): $\ln(x + 5) + \ln(x - 1) < \ln(5x + 7)$

(I₇): $\ln(2x + 3) + \ln(-5x + 4) > \ln(-7x + 2)$

2) Etude des limites aux bornes de $D \ln$

Compléter le tableau ci-dessous et conjecturer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x$; $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$
 > > > > >

x	10 ⁻⁴⁰	10 ⁻³⁰	10 ⁻²⁰	10 ⁻¹⁰	1	10 ¹⁰	10 ²⁰	10 ³⁰	10 ⁴⁰	10 ⁵⁰
lnx										
xlnx										
$\frac{\ln x}{x}$										
$\frac{\ln x}{x-1}$										

Limites de référence

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$
>

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$
>

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Exemple 1 : Calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) \ln x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - \ln x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x + 3 - \ln x)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 3}{\ln x + 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Exemple 2 : Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f pour les valeurs données :

$$1) f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$$

en 0 et en $+\infty$

$$2) f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

en 1 et en $+\infty$

$$3) f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$$

en 0 et en $+\infty$

$$4) f(x) = \ln(1 - x)$$

en 1 et en $-\infty$

$$5) f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

en 0 et en $+\infty$

$$6) f(x) = \ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right)$$

en 5 et en $+\infty$

$$7) f(x) = (x - 2) \ln(x - 2)$$

en 2 et en $+\infty$

$$8) f(x) = x(1 - \ln x)$$

en 0 et en $+\infty$

$$9) f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$$

en 1 et en 2

3) Tableau de variation de \ln

x	0	$+\infty$
$(\ln x)'$		+
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$

4) Interprétation graphique de certaines limites

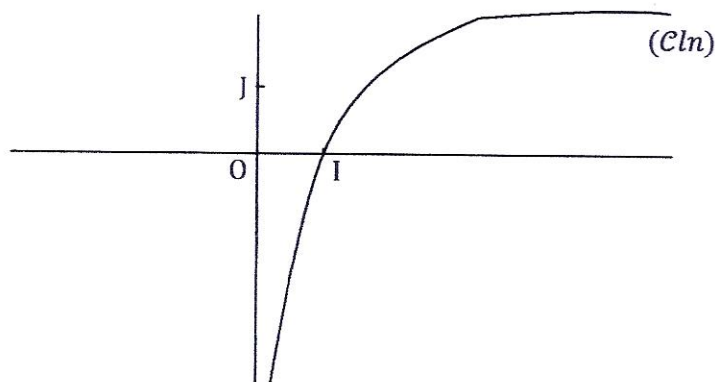
1) la courbe (C_{\ln}) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

>

- 2) la courbe (C_{\ln}) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe (OI) en $+\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

5) Construction de la courbe (C_{\ln})



5) Dérivées des fonctions composées avec \ln :

Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f = \ln(u)$ est dérivable sur I et

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

et d'une façon générale

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple : Déterminer la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$ | 2) $f(x) = \ln(1 - 2x)$ |
| 3) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ | 4) $f(x) = \ln\sqrt{x} - 5x$ |
| 5) $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$ | 6) $f(x) = x \ln x$ |
| 7) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ | 8) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x - 2)$ |
| 9) $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x - 1)$ | 10) $f(x) = x \ln x - x$ |
| 11) $\frac{x-1}{x} \ln x = f(x)$ | 12) $f(x) = x + \frac{1 + \ln x}{x}$ |
| 13) $f(x) = (1 + \frac{1}{x}) \ln x$ | 14) $f(x) = x + 1 - \ln x$ |
| 15) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \ln x$ | |

6) Primitives des fonctions comportant \ln :

u étant une fonction dérivable sur un intervalle I et sur lequel elle ne s'annule pas alors $\frac{u'}{u}$ a pour primitives les fonctions $F = \ln|u| + C$ ($C \in \mathbb{R}$)

$\frac{u'}{u}$ a pour primitives : $F = \ln|u| + C$

Exercice 1 : Déterminer les primitives de la fonction f dans chacun des cas suivants sous réserve de leur existence.

1) $f(x) = -\frac{1}{x}$

2) $f(x) = \frac{5}{3-x}$

3) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

4) $f(x) = \frac{-4x-2}{x^2+x+1}$

5) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

6) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

7) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x+2}$

8) $f(x) = \frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{3x}$

Exercice 2 : On donne la fonction f telle que $f(x) = \frac{3x^2+2x-2}{3x-1}$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{3x-1}$

2) En déduire les primitives de f sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$ puis sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$

Exercice 3 : Soit la fonction g telle que $g(x) = \frac{2x-5}{(x-2)(1-x)}$

1) Déterminer les réels a et b tels que $g(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{1-x}$

2) En déduire les primitives de g sur $]2; +\infty[$

Problème 1 :

Partie A :

Soit $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2 - 1 + \ln x$$

- 1) Déterminer son domaine de définition
- 2) Calculer les limites aux bornes de ce domaine
- 3) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in [1; 3]$
- 5) En déduire le signe de $g(x)$ sur son domaine \mathcal{D}_g

Partie B : On donne $f: x \longmapsto x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

- 1) Déterminer son domaine de définition
- 2) En déduire que (Cf) admet une asymptote verticale
- 3) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
- 4) En déduire les variations et le tableau de variation de f
- 5) Montrer que la droite $(\Delta): y = x - 1$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$
- 6) Etudier la position relative de (Cf) et (Δ)

- 7) Construire la courbe (Cf) ainsi que ses asymptotes
- 8) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (Cf) ; (Δ) et les droites d'équations $x = e$; $x = 2$

Problème 2

Partie A :

Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - \ln x - 1$

- 1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$
- 2) Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x ,

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

- 3) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
- 4) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0; +\infty[$
 b) On désigne par a la plus petite des solutions. Démontrer que $0,4 < a < 0,5$
 c) Calculer $g(1)$
 d) En déduire que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$\begin{cases} \text{si } x \in]0; a[\cup]1; +\infty[& \text{alors } g(x) > 0 \\ \text{si } x \in]a; 1[& \text{alors } g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B :

Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

On note (c) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . L'unité est 4cm sur (OI) et 2cm sur (OJ) .

1. a) Déterminer la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.
 b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 2) Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x . $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
3. a) Démontrer que $f(a) = 2a + \frac{1}{a}$
 b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 4) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (c) en $+\infty$
- 5) Etudier la position de (D) par rapport à (c)
- 6) Tracer (D) et (c) . On prendra $a = 0,45$ et $f(a) = 3,1$
- 7) Soit \mathcal{A} l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (c) , (D) et les droites d'équations respectives $x = e^2$ et $x = 1$. Calculer \mathcal{A}

CHAPITRE IV : FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1) Définition :

On rappelle que \ln réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$. Or toute bijection admet une réciproque.

On appelle fonction exponentielle népérienne la bijection réciproque de \ln .

On la note \exp .

Par convention l'image d'un réel x par cette fonction se note e^x

C'est-à-dire : $\exp(x) = e^x$

2) Conséquences de la définition

- Le domaine de définition de $\exp =]-\infty; +\infty[$
- Pour tout réel x , $e^x \in]0; +\infty[$ ce qui signifie que l'image d'un réel x par \exp est strictement positive.

$$\forall x \in \mathbb{R}; e^x > 0$$

Par conséquent les équations du genre $e^x = a$ n'ont pas de solution si le réel a est négatif.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; e^{\ln x} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; \ln(e^x) = x$$

3) Propriétés algébriques de la fonction \exp

On rappelle que \ln transforme le produit de deux réels strictement positifs en la somme de leurs images, \exp sa réciproque transforme donc la somme de deux réels quelconques en produit de leurs images c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(x+y)} = e^x \cdot e^y$$

$$\forall y \in \mathbb{R}$$

Propriété fondamentale

Conséquences :

- Remplaçant y par $-y$ on obtient

$$\bullet e^{(x-y)} = e^x \cdot e^{-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\bullet e^{-y} = \frac{1}{e^y}$$

$$\bullet (e^x)^r = e^{rx}$$

$$\bullet e^{(x+y)} = e^x \cdot e^y$$

Exemple 1 : Calculer

$$a = \ln(e^{-4})$$

$$b = e^{(\ln 8)}$$

$$c = e^{(2\ln 3 - 1)}$$

$$d = e^{(1 + \ln 2)}$$

$$e = \ln e^{0,7}$$

$$f = e^{-3\ln 2}$$

Exemple 2 : Simplifier les expressions suivantes :

$$a = (e - 4)\left(1 + \frac{4}{e}\right)$$

$$e = (e^x - 4)(1 + 4e^{-x})$$

$$b = (1 + 2\sqrt{e})(1 - 2\sqrt{e})$$

$$f = e^{-1-x} \cdot e^{2x+3}$$

$$c = \frac{1-e^4}{1-e^2}$$

$$g = 1 + \frac{3e^2 - e}{e}$$

$$d = (3 + 2e^x)(2 - 3e^{-x})$$

4) Etude analytique de exp : $(e^x)' = e^x$

1) Variations de exp et conséquences :

La fonction \ln est une bijection strictement croissante donc sa réciproque \exp l'est également sur \mathbb{R} .

Conséquence 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R} \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

Cette propriété permet de résoudre les équations contenant la fonction expo.

Méthode : Pour résoudre une équation (E) contenant \exp on peut procéder comme suit :

- On détermine l'ensemble de validité DV de (E)
- On transforme l'équation de façon à obtenir une égalité de la forme $e^A = e^B$
- On laisse "tomber" les \exp et on résout l'équation (E') ; $A = B$ en retenant seulement les solutions appartenant à DV

Exemple 1 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(E_1); e^{3x+1} = 7$$

$$(E_2); e^{x+3} + \frac{3}{2} = 2$$

$$(E_3); e^{x-3} = 1$$

$$(E_4); e^{x-1} - \frac{1}{2}e^x = 1$$

$$(E_5); e^{2x-1} = 6$$

$$(E_6); \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{1}{2}$$

$$(E_7); e^{-x-4} - 6 = 0$$

$$(E_8); \frac{4e^x - 3}{e^x} = 1$$

$$(E_9); e^{x+3} + 2 = 1$$

$$(E_{10}); e^{\frac{x^2-x}{x}} = e$$

Exemple 2 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

$$(E_1); e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

$$(E_2); e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

$$(E_3); 2e^{2x} + 5e^x - 3 = 0$$

$$(E_4); e^x - 4e^{-x} + 3 = 0$$

$$(E_5); -e^{3x} + 7e^x - 6 = 0$$

$$(E_6); 2e^{3x} - e^{2x} - 5e^x - 2 = 0$$

$$(E_7); e^{3x} + 4e^{2x} - e^x - 4 = 0$$

Conséquence 2 : \exp est une fonction strictement croissante sur \mathbb{R} , donc deux réels quelconques et leurs images sont rangés dans le même ordre c'est-à-dire.

$$\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}; e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

Cette propriété permet de résoudre les inéquations contenant \exp .

Méthode : Pour résoudre une inéquation (I) contenant \exp , on peut procéder comme suit :

- On détermine l'ensemble de validité \mathcal{D}_V de (I)
- On transforme (I) de façon à obtenir une inégalité du type $e^A > e^B$ par exemple
- On laisse "tomber" les \exp et on obtient (I') ; $A > B$
- On résoud l'inéquation (I') et $S_{(I)} = S_{(I')} \cap \mathcal{D}_V$

Exemple 1 : Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes

$$(I_1); e^{-3x-2} > 7$$

$$(I_2); e^{-2x+3} \geq 6$$

$$(I_3); e^{-x+4} - 8 \geq 0$$

$$(I_4); 2 - e^{-x} \leq 0$$

$$(I_5); e^{x-6} > 1$$

$$(I_6); 1 - e^{2x} \geq 0$$

$$(I_7); e^{x-3} + \frac{3}{2} \leq 2$$

$$(I_8); 4e^{-x} - e^x < 0$$

$$(I_9); \frac{e^x+1}{e^x} > \frac{4}{3}$$

$$(I_{10}); (e^x - 2)(e^{1-x} - 1) \leq 0$$

Exemple 2 : Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$(I_1); e^{2x} - 5e^x + 6 > 0$$

$$(I_6); 2e^{3x} - e^{2x} - 5e^x - 2 \geq 0$$

$$(I_2); e^{3x} - 7e^x + 6 < 0$$

$$(I_7); \frac{e^x-1}{e^{-x}-2} \leq 0$$

$$(I_3); 2e^{2x} + 5e^x - 3 \leq 0$$

$$(I_8); (1 - e^x)(1 + e^x) > 0$$

$$(I_4); e^{2x} - 4e^x + 3 > 0$$

$$(I_9); (e^{-x} - 3)(3 - e^{-2x}) \leq 0$$

$$(I_5); -e^{3x} + 7e^x - 6 > 0$$

$$(I_{10}); \frac{3e^{-x}}{1-e^x} \leq 0$$

2) Etude des limites aux bornes de D_{exp}

Compléter le tableau ci-dessous et conjecturer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

x	-50	-40	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50
e^x	1,25					1			100,00	2,526	
$x e^x$		$-1,6 \cdot 10^{-14}$									
$\frac{e^x}{x}$											
$\frac{e^x - 1}{x}$		0,015									

A
SUIVRE

Limites de référence

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{et} \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Exemple 1 : Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{5x-3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (9x - 3)e^x$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x+3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x+3}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x} \cdot e^x$$

3) Tableau de variation de exp

x	$-\infty$	$+\infty$
$(exp)'(x)$	+	
$exp x$	0	$+\infty$

4) Interprétation graphique de certaines limites

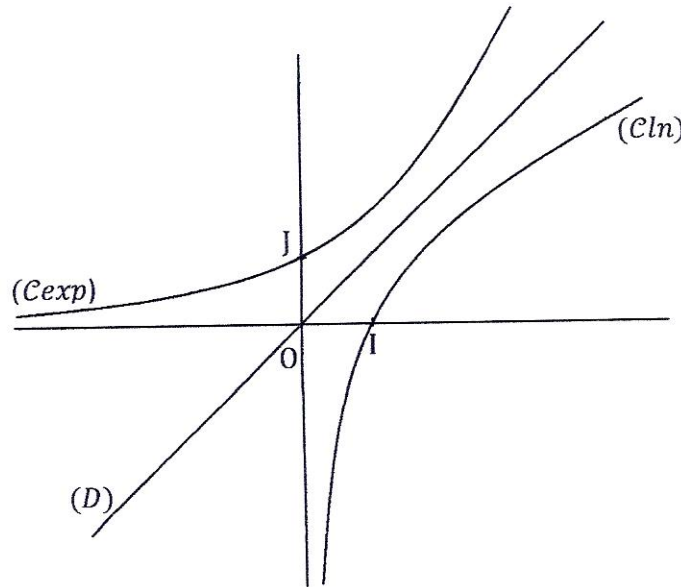
1) La courbe (C_{exp}) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

$$\text{en } -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

2) La courbe (C_{exp}) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe (O)

$$\text{en } +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

5) Construction de la courbe (C_{exp})



(C_{exp}) et (C_{ln}) sont symétriques par rapport à $(D) : y = x$.

Une autre limite à retenir :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

5) Dérivées des fonctions composées avec exp

Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $f = e^u$ est dérivable sur I et $f' = u'e^u$

Exemple : Déterminer la dérivée f' de f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = (x^3 + 4)e^x$

2) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

3) $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$

4) $f(x) = e^{x^3}$

5) $f(x) = \frac{1}{x} - e^{-x}$

6) $f(x) = \frac{x}{1 - e^x}$

7) $f(x) = (3x + 2)e^x$

8) $f(x) = (x^2 - 3)e^{-5x}$

9) $f(x) = (2x^2 - 6x + 7)e^x$

10) $f(x) = (x^2 - 4)e^{2x}$

6) Primitives des fonctions comportant \exp :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors $u'e^u$ a pour primitives les fonctions $F = e^u + C (C \in \mathbb{R})$

Exemple 1 : Déterminer les primitives de la fonction f dans chacun des cas suivants sous réserve de leur existence.

1) $f(x) = e^{-x+3}$

2) $f(x) = (-2x + 3)e^{-x^2+3x-1}$

3) $f(x) = e^{2x}$

4) $f(x) = \frac{e^x}{3e^x+2}$

5) $f(x) = 3xe^{x^2} - 1$

6) $f(x) = 2e^{x+3}$

Exemple 2 : Déterminer les réels a et b pour que la fonction : $F: x \mapsto (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f: x \mapsto (2x + 1)e^{-x}$

Exemple 3 : Soit la fonction f telle que $(x^2 - 4)e^{2x}$

1) Déterminer les réels α, β, r pour que la fonction $F: x \mapsto (\alpha x^2 + \beta x + r)e^{2x}$ soit une primitive de f sur \mathbb{R} .

2) Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

Exemple 4 : On considère la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{(e^x+2)^2}$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\frac{1}{(x+2)^2} = a + \frac{bx}{x+2} + \frac{cx}{(x+2)^2}$$

2) En déduire une autre écriture de $f(x)$

3) Déterminer les primitives sur \mathbb{R} de f .

Problème 1 :

Dans tout ce problème on note :

- f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x - 2)e^x + x$$

- (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de longueur sur les axes 1 cm).

- g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (x - 1)e^x + 1.$$

Le problème comporte trois parties liées A, B et C

Partie A

- 1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$
- 2) Calculer la dérivée de g et dresser son tableau de variation de g
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} .

Partie B

- 1) a) Calculer la limite de f en $-\infty$
b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$
Étudier la position de (C) par rapport à (D)
- 2) a) Calculer la limite de f en $+\infty$
b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ du rapport $\frac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f
- 4) a) Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse a
b) Calculer les valeurs exactes, puis les troncatures à trois décimales de $f(1,68)$ et $f(1,7)$.
En déduire une valeur approchée de a à 10^{-2} près par défaut.
- 5) Tracer (C) .

Problème 2

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur \mathbb{R} et définie par : $g(x) = e^{3x} - e^{2x} + 1$

1. Démontrer que pour tout nombre réel x , $g'(x) = e^{2x}(3e^x - 2)$
2. Étudier le sens de variation de g puis établir son tableau de variation.
(Il est inutile de calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$)
3. Démontrer que pour tout nombre réel x , $g(x) > 0$

Partie B :

Soit f la fonction définie et dérivable en tout élément de $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{2 - e^{2x}}{1 - e^x}$$

On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

Unités graphiques : $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 1\text{cm}$

1. Calculer la limite de f en 0 à gauche et à droite. Donner une interprétation graphique des résultats obtenus.
2. Démontrer que $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, $f(x) = x + 2 + \frac{e^x(2 - e^x)}{1 - e^x}$

3. a) Calculer la limite de f en $-\infty$
 b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$
 c) Démontrer que (C) est au-dessus de (D) sur l'intervalle $]-\infty; 0[$

4. a) Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$$f(x) = x + 2 + e^x + \frac{e^x}{1-e^x}$$

- b) Calculer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre e^x en facteur)
 c) Démontrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$

5. a) Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-e^x)^2}$

b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

6. a) Démontrer que l'équation : $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions a et β ($a < 0$).

b) Démontrer que $-2,23 < a < -2,22$ et $0,31 < \beta < 0,32$

7. Construire (D) et (C) dans le même repère. (on prendra $a = -2,2$ et $\beta = 0,3$)

8. Soit h l'application définie de $]-\infty; 0[$ dans \mathbb{R} par $h(x) = f(x)$

a) Démontrer que h est une bijection

b) On note h^{-1} la bijection réciproque de h .

$$\text{Démontrer que } (h^{-1})'(0) = \frac{(1-e^a)^2}{g(a)}$$

9. Déterminer une primitive F de f sur $]-\infty; 0[$.

CHAPITRE V : NOMBRES COMPLEXES

1) Introduction : Insuffisance de \mathbb{R}

Dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, beaucoup d'équations notamment celles à discriminants négatifs n'admettent pas de solutions.

Exemple : L'équation (E); $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution car $x^2 = -1$ est impossible.

Il a fallu donc imaginer un nouvel ensemble qui contient \mathbb{R} et un nombre i (imaginaire) tel que $i^2 = -1$

Dans ce nouvel ensemble noté \mathbb{C} et appelé ensemble des nombres complexes toute équation de degré n admet exactement n solutions

Exemple $x^2 = -1$

$$\Leftrightarrow x^2 = i^2$$

$$\Leftrightarrow x = i \text{ ou } x = -i$$

NB : En physique, on utilise j au lieu de i pour ne pas confondre avec l'intensité i

2) Présentation des nombres complexes

Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont des réels. Cette écriture est appelée forme algébrique de z .

Le réel a est appelé partie réelle de z et est noté $\Re(z)$ $\Re(z) = a$

Le réel b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\Im(z)$.

Exemple : $z = 3 - 4i$ $\Re(z) = 3$
 $\Im(z) = -4$

Cas particuliers

- Si $b = 0$ alors $z = a$ donc $z \in \mathbb{R}$

De tels complexes sont des réels et leur ensemble est \mathbb{R}

Exemples : $z = 3$

$$z = -5$$

$$z = \frac{5}{2}$$

- Si $a = 0$ alors $z = 0 + ib = ib$

De tels complexes sont **appelés imaginaires purs** et leur ensemble est $i\mathbb{R}$

Exemples : $z = 2i$

$$z = -4i$$

$$z = \frac{1}{2}i$$

- Si $a = 0$ et $b = 0$ alors $z = 0 + 0i = 0$

3) Opérations dans \mathbb{C}

1) Egalité de deux complexes

Soit z et z' deux nombres complexes

$$z = a + ib \text{ et } z' = a' + ib'$$

$$z = z' \Leftrightarrow a + ib = a' + ib'$$

$$\Leftrightarrow a = a'$$

$$\Leftrightarrow b = b'$$

$$\text{Conclusion : } z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

2) Addition dans \mathbb{C}

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

Exemple : Calculer : $Z_1 = (2 + 5i) + (-1 + 2i)$

$$Z_2 = (14 - 9i) + (22 + i)$$

$$Z_3 = (1 - i) + (3 - 2i)$$

3) Multiplication dans \mathbb{C}

$$zz' = (a + ib)(a' + ib')$$

$$= aa' + aib' + a'ib - bb' \text{ (} i^2 = -1 \text{)}$$

$$= aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

Exemple : Calculer : $Z_1 = (3 + 4i)(1 - i)$

$$Z_2 = (2 - 3i)(1 + 2i)$$

4) Puissances entières de i

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$
$i^4 = 1$	$i^5 = i$	$i^6 = -1$	$i^7 = -i$
$i^8 = 1$	$i^9 = i$	$i^{10} = -1$	$i^{11} = -i$

Remplir ce tableau et constater que $\forall n \in \mathbb{N} : i^{4n} = 1 ; i^{4n+1} = i ; i^{4n+2} = -1 ; i^{4n+3} = -i$

Exercice : Calculer $A = i^{22} - 3i^5 + 3i^{14}$

$$B = i^{122} + 2i^{20} - 14i$$

$$C = i^{2002} + 2i^{1998}$$

$$D = 3i^{14} + 3i^{2000}$$

$$E = 14i^{202} + 14i^6$$

$$F = i^3 + i^4 + i^6 + i^{18} + 14i^2$$

Exemple : Calculer $A = (1 + 2i)^3$

$$B = (2 + 2i)(5i - 2)$$

$$C = -4i(1 + i)^2$$

$$D = (2 - i)(2 + i)(1 + 18i)$$

4) Conjugué d'un complexe

1) Définition :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle conjugué de z le complexe noté \bar{z}

(lire \bar{z} barre) tel que : $\bar{z} = a - ib$ donc $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$

$$\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$$

Exemples : $z = 2 + 3i$

$$z = 1$$

$$\bar{z} = 2 - 3i$$

$$\bar{z} = 1$$

$$z = 2i$$

$$\bar{z} = -2i$$

2) Propriétés du conjugué

$$1) \bar{\bar{z}} = z$$

$$2) z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$$

$$3) z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

$$4) z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$5) z - \bar{z} = a + ib - a + ib = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$$

$$6) z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

La propriété 6 du conjugué permet de mettre sous forme algébrique :

1) L'inverse d'un complexe non nul. En effet : $z = a + ib$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$$

Exemple : Ecrire sous forme algébrique les inverses des complexes suivants :

$$a = i ; b = 11 + 2i ; c = 4i - 3$$

$$d = -2 - 5i ; e = 4i ; f = 3 - 2i$$

2) Le quotient de deux nombres complexes : Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple 1 : Ecrire sous forme algébrique les complexes suivants :

$$a = \frac{1-7i}{4+3i} ; b = \frac{11-9i}{1-i} ; c = \frac{2+i}{i} ; d = \frac{3+2i}{i-2} ;$$

$$e = \frac{3-5i}{2+3i} + \frac{1-i}{-3+2i} ; f = \frac{1-9i}{2i-3} - \frac{5+12i}{4i}$$

Exemple 2 : Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$(1 + 2i)^2 z - 5 + 8i = 0$$

5) Représentation géométrique d'un complexe

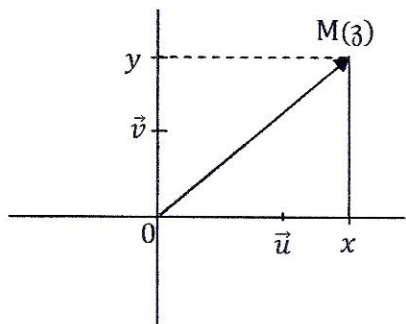
1) Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

A tout nombre complexe $z = x + yi$, on associe l'unique point de couple de coordonnées (x, y)

On dit que M a pour affixe z ou encore que M est le point-image de z . On note $M(z)$.

On dit de même que le vecteur \overrightarrow{OM} a pour affixe z ou que \overrightarrow{OM} est le vecteur-image du complexe z . On note $\overrightarrow{OM}(z)$.



Remarque

L'axe (O, \vec{u}) des abscisses est l'ensemble des point-images des complexes réels. On l'appelle pour cela "axe des réels".

L'axe $(0, \vec{v})$ des ordonnées est l'ensemble des point-images des complexes imaginaires purs. Il est donc appelé "axe des imaginaires purs".

Exemple : Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) les points A, B, C et D, point-images des complexes suivants :

$$1 - 2i ; -2i ; 2,5 ; 3 + 4i$$

2) Calculs vectoriels avec les affixes

1. Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}(z_A - z_B)$

2. Si $\vec{u}(z_u)$ et $\vec{v}(z_v)$ alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z_u + z_v$

3) $k\vec{u}$ a pour affixe kz_u

4) Le milieu I de [AB] a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

Exemple : On donne $A(-2 + i)$; $B(3 + 3i)$ et $C(1 + \frac{11}{5}i)$

1) Calculer les affixes des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}

2) En déduire que les points A, B et C sont alignés.

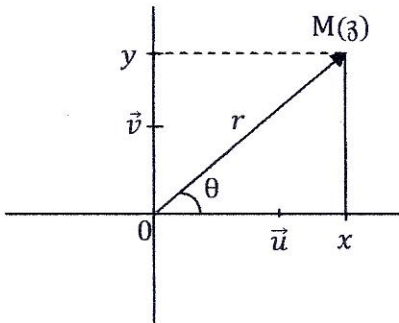
3) Calculer l'affixe du milieu I de [AB]

4) Soit le point $D(iz_A)$

a) Calculer l'affixe de D

b) Déterminer l'affixe du point E tel que ABDE soit un parallélogramme

6) Forme trigonométrique d'un complexe



La position du point M dans le plan est déterminée par le couple (x, y) de ses coordonnées mais aussi par l'angle orienté $(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM})$ de mesure θ et de la distance OM. Le réel θ est appelé un **argument** du complexe z et la distance OM est appelée module de z .

On note $\theta = \arg(z)$

Et $OM = r = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Module d'un complexe

Remarque : Le module est dans \mathbb{C} ce que la valeur absolue est dans \mathbb{R} d'où les propriétés.

P₁: $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \geq 0$

P₂: $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

P₃: $|zz'| = |z||z'|$

P₄: $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

P₅: $|z^n| = |z|^n$

P₆: $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

Exemple : Calculer le module de chacun des nombres suivants :

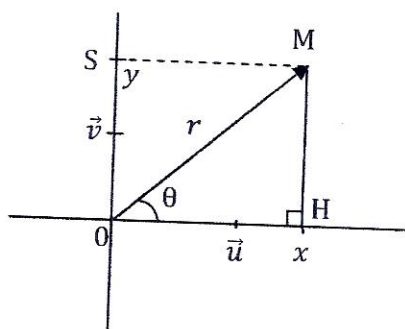
1) $1 - 2i$ 2) $1 - 5i$ 3) $3 + 4i$ 4) $3 + 4i$

5) $1 - 7i$ 7) $5 + 3i$ 8) $2i$ 9) i

10) -5 11) $\frac{5+i}{3+2i}$ 12) $\frac{5+i}{3-2i}$ 13) $(2-i)^3$

14) $(1+2i)^2(1+3i)$ 15) $\frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}$ 16) $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$

• Argument d'un complexe



Trouvons une relation entre les grandeurs suivantes : le couple (x, y) d'une part et le module r et l'argument θ d'autre part puisqu'elles caractérisent la même position de M. Dans le triangle OMH rectangle en H on a :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OM}} = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{OM}} = \frac{y}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Ce système permet connaissant x, y de déterminer une mesure θ de l'angle (\vec{u}, \overline{OM})

Exemple : si $z = 1 + i$ alors

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{MH}{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

La mesure principale de (\vec{u}, \widehat{OM}) est appelée argument principal de z et noté $ARG(z)$

• **Opérations sur les arguments**

Si $ARG(z) = \theta$ alors

$$ARG(\bar{z}) = -ARG(z) = -\theta$$

$$ARG\left(\frac{1}{z}\right) = -ARG(z) = -\theta$$

$$ARG(-z) = ARG(z) + \pi$$

$$ARG(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$$

$$ARG(z) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} \quad \text{si } z \in i\mathbb{R}^*$$

$$ARG(zz') = ARG(z) + ARG(z')$$

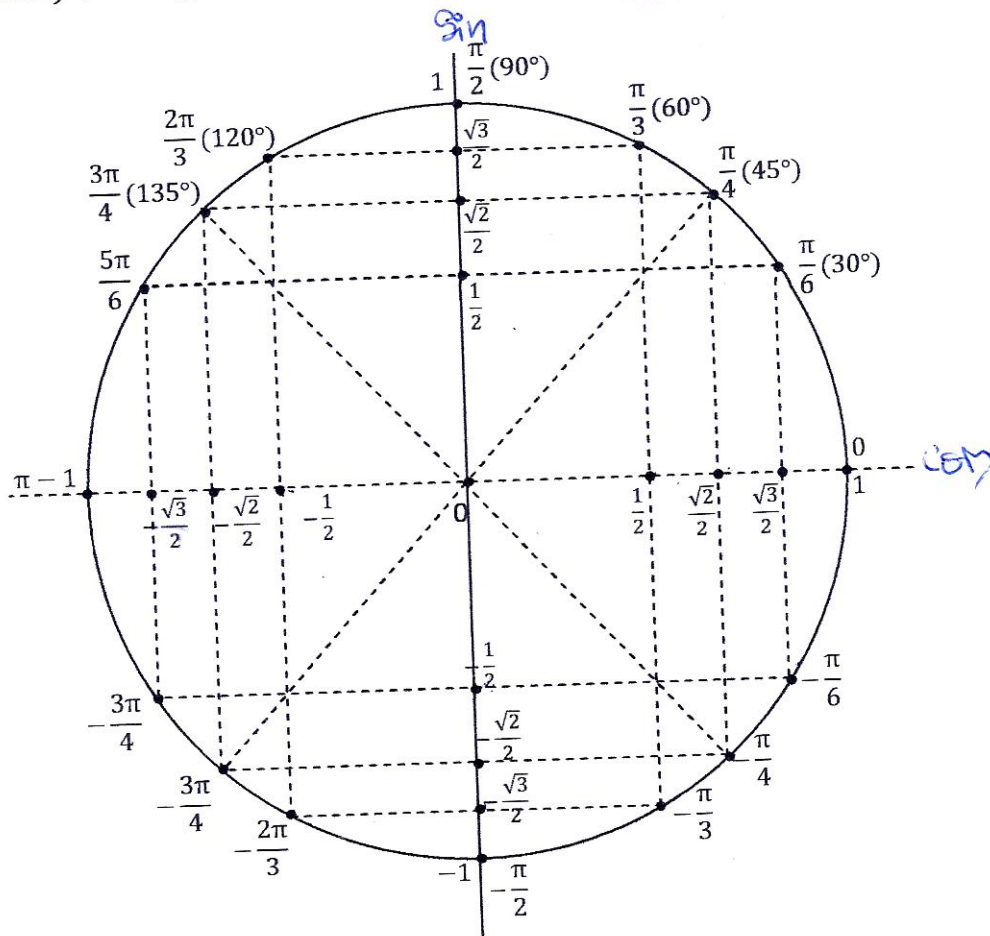
$$ARG\left(\frac{z}{z'}\right) = ARG(z) - ARG(z')$$

$$ARG(z^n) = n ARG(z)$$

Remarques : les relations restent valables avec les autres arguments. Il suffit d'ajouter $2k\pi$ au membre de droite.

NB : Le complexe 0 n'a pas d'argument.

Rappels de trigonométrie : on donne ci-dessous les lignes trigonométriques (*cos* et *sin*) des angles remarquables dans le cercle trigonométrique.



Exemple : Déterminer les arguments principaux des complexes suivants :

$$z_1 = 1 - i$$

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_3 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{3}-i}{2i}$$

$$z_5 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_6 = (2 - 2i)(1 - i)$$

$$z_7 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2i} \right)^4$$

$$z_8 = (-1 - i)^4$$

$$z_9 = i(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$$

Forme trigonométrique de z : c'est l'expression du complexe z en fonction de son module r et de son argument θ .

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Or $z = x + yi$

$$z = r\cos\theta + ri\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Exemple 1 : Ecrire sous forme trigonométrique les complexes suivants :

$$z_1 = -4 + 4i$$

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_3 = 1 + i$$

$$z_4 = (\sqrt{3} + i)^4$$

$$z_5 = -3 - i\sqrt{3}$$

$$z_6 = (\sqrt{3} + i)(-1 + i\sqrt{3})$$

$$z_7 = (-1 - i)i$$

$$z_8 = (\sqrt{3} + i)^{2000}$$

$$z_9 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}$$

$$z_{10} = (\sqrt{3} + i)^3$$

Exemple 2 : On donne le complexe $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

- 1) Ecrire z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique
- 2) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exemple 3 :

- 1) Déterminer le module et un argument des complexes suivants: $z_1 = 1 - i$ et

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3} \text{ puis } z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

- 2) Ecrire z_3 sous forme algébrique

- 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

7) Forme exponentielle d'un complexe

L'écriture $z = r e^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle du complexe z

Cette forme est la plus commode dans les calculs de produits, puissances et quotients des complexes. En effet,

Si $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$

$$1) z z' = r r' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$2) \frac{z}{z'} = \frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$3) \frac{1}{z'} = \frac{1}{r' e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'} e^{i(-\theta')}$$

$$4) \bar{z} = r e^{-i\theta}$$

$$5) -z = r e^{i(\theta+\pi)}$$

$$6) z^n = r^n e^{in\theta}$$

8) Application des nombres complexes en trigonométrie : Formules de Moivre - Formule de Euler

1) Formules de Moivre :

Le mathématicien de Moivre a utilisé les nombres complexes de module 1 pour faciliter les calculs trigonométriques notamment l'expression de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

En effet : si $z = \cos\theta + i\sin\theta$ alors

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

z^n a pour argument $n\theta$ donc: $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ d'où

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

Exemple :

- 1) Exprimer $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$
- 2) Exprimer $\sin 3\theta$ et $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$
- 3) Exprimer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

2) Formules de Euler :

Le mathématicien Euler utilise l'expression exponentielle des complexes de module 1 pour effectuer les calculs trigonométriques

En effet : $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ (1)

$$\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$
 (2)

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta}$$
 (3)

$$z^{-n} = \cos n\theta - i \sin n\theta = e^{-in\theta} \quad (4)$$

$$(1) + (2) \text{ donne } \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$(1) - (2) \text{ donne } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$(3) + (4) \text{ donne } \cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

$$(3) - (4) \text{ donne } \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

$$\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

Application à la trigonométrie

Euler a utilisé ces égalités pour exprimer $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$ en fonction trigonométriques affines c'est-à-dire les linéariser

Exemple 1 : Linéariser les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \cos^2 x$

2) $f(x) = \cos^3 x$

3) $f(x) = \cos^4 x$

4) $g(x) = \sin^2 x$

5) $g(x) = \sin^3 x$

6) $g(x) = \sin^4 x$

Exemple 2 :

1) θ étant un nombre réel, linéariser $\sin^3 3\theta \cos^2 \theta$

2) En déduire une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f: x \longmapsto \sin^3 3x \cos^2 x$

Point méthode : Pour le développement de $(a + b)^n$ on peut utiliser le triangle de Pascal pour trouver les coefficients du développement.

$(a + b)^0$	1
$(a + b)^1$	1 1
$(a + b)^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a + b)^6$	1 6 15 20 15 6 1

9) Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe écrit sous forme exponentielle

Définition :

n étant un entier naturel non nul et Z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ , on appelle racine $n^{\text{ième}}$ de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$

Réolvons donc cette équation d'inconnue $z = r e^{i\alpha}$

On a : $z^n = Z$

$\Leftrightarrow r^n e^{in\alpha} = \rho e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

L'équation admet donc exactement n solutions correspondant aux valeurs $0, 1, 2, \dots, n - 1$ de k

Conclusion :

- 1) Tout nombre complexe z admet donc exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$
- 2) Les points-images de ces racines sont situés sur le cercle de centre 0 (origine du repère) et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$.

Exemple 1 : déterminer les racines cubiques de 1 et placer leurs points-images dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v})

Exemple 2 : Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 = 1$

Exemple 3 : Déterminer les racines cubiques de $Z = 8i$

Exemple 4 : Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^6 = -1$

10) Equations du 2nd degré dans \mathbb{C}

1) **Définition** : On appelle équation du 2nd degré dans \mathbb{C} toute équation de la forme.

$$(E); z \in \mathbb{C}; az^2 + bz + c = 0$$

$$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; b \in \mathbb{C} \text{ et } c \in \mathbb{C}$$

2) Racines carrées d'un complexe écrit sous forme algébrique

Soit le complexe $Z = a + ib$

On se propose de déterminer les racines carrées de Z c'est-à-dire les complexes z

tels que $z^2 = Z$

On résout donc l'équation $z^2 = Z$

Avec $z = x + yi$

$$(x + yi)^2 = a + ib$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Pour faciliter la résolution de ce système on y ajoute l'équation suivante $|z^2| = |Z|$

$$\Leftrightarrow |z^2| = z \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Donc le système devient } \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

La résolution de ce système donne 2 complexes opposés qui sont les racines carrées de Z .

Exemple :

Déterminer les racines carrées des complexes suivants :

$$Z_1 = -4i \quad Z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$Z_3 = 7 + 24i \quad Z_4 = i$$

$$Z_5 = 3 + 4i \quad Z_6 = -1 - i\sqrt{3}$$

3) Résolution de (E)

Méthode : Pour résoudre (E) on procède comme suit :

- On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de (E)
- On détermine les deux racines carrées σ et $-\sigma$ de Δ
- On calcule les solutions z_1 et z_2 de (E)

$$z_1 = \frac{-b + \sigma}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sigma}{2a}$$

Exemple : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes

$$(E_1); z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i = 0$$

$$(E_2); z^2 - (4 + i)z + 10i = 0$$

$$(E_3); z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$(E_4); z^2 + (2 - 6i)z - (9 + 6i) = 0$$

$$(E_5); z^2 - (2 + 2i)z + 8 + 8i = 0$$

$$(E_6); z^2 + z + 1 = 0$$

$$(E_7); z^2 + 11 = 0$$

$$(E_8); 3z^2 + 2z - 3 = 0$$

$$(E_9); z^2 - 4z = 0$$

11) Equations de degrés supérieurs à 2

Exercices 1 : On considère l'équation

$$(E); z \in \mathbb{C}; z^3 - 2iz^2 + (4 + 4i)z + 16 + 16i = 0$$

1) montrer que -2 est une solution de (E)

2) En déduire que (E) équivaut à :

$$(E'); (z + 2)(z^2 - 2(1 + i)z + 8 + 8i) = 0$$

3) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E)

Exercice 2 : On donne le polynôme P tel que :

$$P(z) = z^3 + (2 + i)z^2 + (-3 + 4i)z - 10 + 5i = 0$$

1) Vérifier que $2 - i$ est un zéro de P

2) Déterminer les nombres a et b tels que :

$$P(z) = (z - 2 + i)(z^2 + az + b)$$

3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$

Exercice 3 : Soit l'équation (E) telle que :

$$(E); z^3 - 4iz^2 - (6 + i)z + 3i - 1 = 0$$

1) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0

2) Ecrire l'expression $z^3 - 4iz^2 - (6 + i)z + 3i - 1$ sous la forme

$$P(z) = (z - 2 + i)(z^2 + az + b) \text{ où } a, b, \text{ sont des complexes à déterminer.}$$

3) En déduire les solutions de (E)

Exercice 4 : On considère l'équation (E) dans \mathbb{C} telle que :

$$z^3 + (1 - 9i)z^2 - (20 + 13i)z - 42 + 42i = 0$$

- 1) Démontrer que (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera
- 2) Justifier que
(E) équivaut à $(z + 3)[z^2 - (2 + 9i)z - 14 + 14i] = 0$
- 3) Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (E)

Exercice 5 : On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 - 3z + 1$

- 1) Montrer que si un complexe α est une solution de l'équation $P(z) = 0$ il en est de même de $\bar{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$
- 2) a) Calculer $P(1 + i)$
b) En déduire trois solutions de l'équation $P(z) = 0$
c) En déduire une factorisation de $P(z)$
- 3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$

Exercice 6 :

- 1) Calculer $(1 + i)^2$ et $(1 - i)^2$
- 2) Soit l'équation (E) ; $z^4 + 8iz^2 + 48 = 0$

Montrer que si un complexe α est solution de (E) alors $-\alpha$ aussi est solution de (E)

- 3) Développer, réduire et ordonner $(z^2 + 12i)(z^2 - 4i)$
- 4) Résoudre alors l'équation (E) dans \mathbb{C}

CHAPITRE VI : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE

I) Nombres complexes et configurations du plan

La triple relation bijective entre les ensembles :

\mathcal{P} : Ensemble des points du plan muni d'un repère (O, I, J)

\mathcal{V} : Ensemble des vecteurs du plan

\mathbb{C} : Ensemble des nombres complexes, est résumée dans le tableau ci-dessous.

Langage géométrique	Langage vectoriel	Langage complexe	Formules
Distance OM	$\ \vec{OM}\ $	$ z $	$\sqrt{x^2 + y^2}$
Distance AB	$\ \vec{AB}\ $	$ z_B - z_A $	$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Angle orienté	(\vec{OI}, \vec{OM})	$\text{ARG}(z) = \theta$	$\cos\theta = \frac{x}{ z }, \sin\theta = \frac{y}{ z }$
Angle orienté	(\vec{AB}, \vec{AC})	$\text{ARG}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$	
Orthogonalité	$\vec{AB} \perp \vec{AC}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$	$\text{ARG}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$
Colinéarité	$\vec{AB} // \vec{AC}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$	$\text{ARG}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \text{ ou } \pi$
Alignement de points	$\vec{AB} // \vec{AC}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$	$\text{ARG}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \text{ ou } \pi$

Exercice 1 : soit $A(2)$; $B(i)$ et $C(1 - 2i)$

Déterminer la nature du triangle ABC

Exercice 2 : Soit un point M d'affixe z avec $z \in \mathbb{C} \setminus \{1; -2i\}$

1) Interpréter géométriquement :

a) $\left| \frac{z-1}{z+2i} \right|$

b) $\text{Arg}\left(\frac{z-1}{z+2i}\right)$

2) a) Déterminer l'ensemble (D) des points $M(z)$ tels que $\text{ARG}\left(\frac{z-1}{z+2i}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) Construire l'ensemble (D) .

3) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que $\frac{z-1}{z+2i}$ soit un réel

Exercice 3 : Quel est l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $\frac{z+2}{z-i}$ soit un imaginaire pur ?

Exercice 4 :

- 1) Interpréter géométriquement l'égalité $|z+2| = |z-3+i|$
- 2) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que $|z+2| = |z-3+i|$

Exercice 5 : $A(-\sqrt{3}+i)$; $B(-\sqrt{3}-i)$ et $C(2i)$ sont trois points du plan. Démontrer que A, B, C sont sur le cercle de centre 0 et de rayon 2.

Exercices d'application

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v})

Exercice 1 : On donne les points $A(-\sqrt{3}+3i)$; $B(2i)$, $C(-i)$ et $D(\sqrt{3}-2i)$. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

Exercice 2 : On donne $A(-i)$; $B(1+i)$ et $C(1-3i)$. Démontrer que le triangle ABC est isocèle.

Exercice 3 : Soit $A(-1-i)$; $B(2+3i)$ et $C(-10-13i)$. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 4 : Soit $A(-1-i)$; $B(4+i)$ et $C(-2+1,5i)$. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 5 : On donne les points $A(3+i)$; $B(2i)$ et $C(2-i)$

- 1) Placer ces points
- 2) Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A
- 3) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer D.
- 4) a) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ du plan tels que $|z-2+2i| = \sqrt{10}$
b) Les points A, B, D appartiennent-ils à (C) ?
c) Construire (C)

Exercice 6 : Soit $A(i)$; $B(1-i)$ et $C(2+2i)$

Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC

II) Nombres complexes et transformation du plan

On rappelle qu'une transformation du plan \mathcal{P} est une application de \mathcal{P} vers \mathcal{P} qui, à tout point M associe un unique point M' appelé son image.

Exemple : La translation, la rotation, l'homothétie, la symétrie centrale, la similitude. Puisqu'il y a entre \mathcal{P} et \mathbb{C} une relation bijective alors à toute transformation F du plan est associée une transformation f dans \mathbb{C} qui, au complexe z (affixe de M) associe le complexe z' (affixe de M')

C'est-à-dire :

$$F: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

$$M \longmapsto M'$$

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto z'$$

Afin d'alléger le cours nous donnons ci-dessous un tableau récapitulatif donnant les transformations complexes associées aux principales transformations planes.

Transformations du plan et nombres complexes

Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la transformation

Transformation	Définition géométrique	Définition complexe
Translation $t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}(Z_0)$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' - z = z_0$ ou $z' = z + z_0$
Symétrie centrale S_{Ω} avec $\Omega(Z_0)$	$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$	$z' - z_0 = -(z - z_0)$
Homothétie h de centre $\Omega(Z_0)$ et de rapport k $h(\Omega; k)$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - z_0 = k(z - z_0)$
Rotation r de centre $\Omega(Z_0)$ et d'angle α $r(\Omega; \alpha)$	$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M} \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}$	$z' - z_0 = e^{i\alpha}(z - z_0)$
Similitude directe de centre $\Omega(Z_0)$ de rapport k et d'angle α $S(\Omega; k; \alpha)$	$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}$	$z' - z_0 = ke^{i\alpha}(z - z_0)$ ou $z' = az + b$ $a \in \mathbb{C}^*$ $b \in \mathbb{C}$

Application

Dans le plan complexe on donne les points $\Omega(-2 + i)$ et $A(1 - i)$

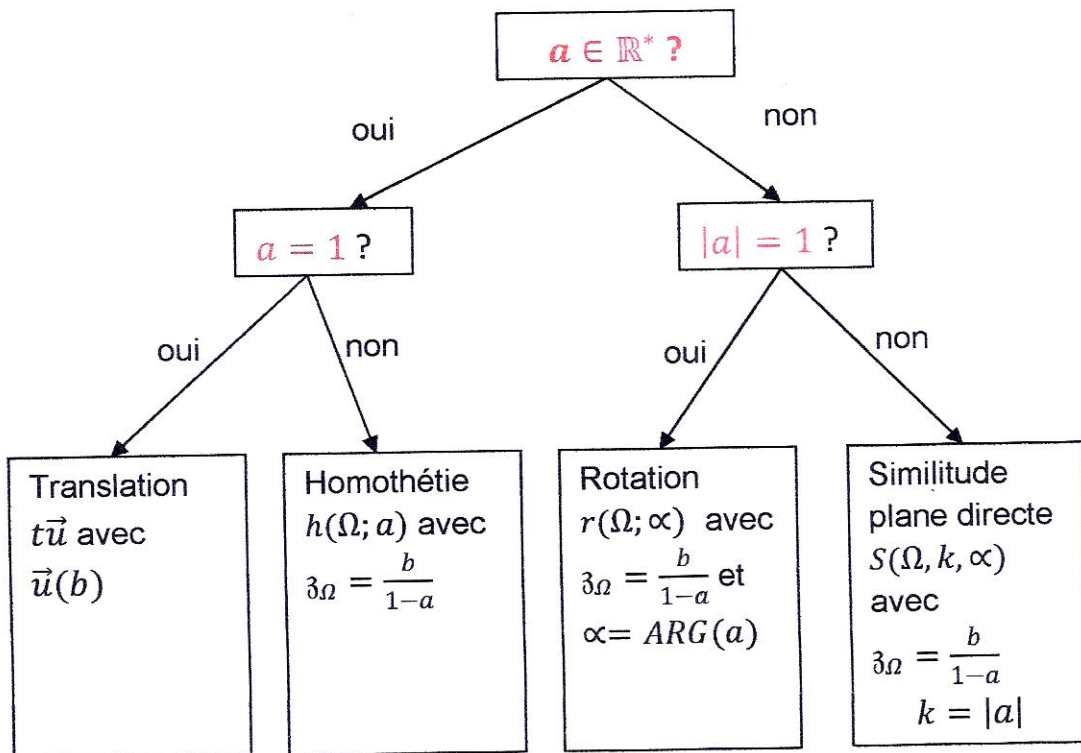
Dans chacun des cas suivants déterminer l'écriture complexe de la transformation plane et en déduire l'affixe de l'image A' de A .

- a) Symétries de centre Ω
- b) Rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$
- c) Homothétie h de centre Ω et de rapport 2.
- d) Similitude plane directe S de centre Ω , de rapport 3 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$
- e) Translation $t\vec{u}$ avec $\vec{u}(1 + i)$.

Comment déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une transformation plane à partir de son écriture complexe :

$$z' = az + b ; a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$$

Tous les cas sont résumés dans l'organigramme ci-dessous :



NB : Toute homothétie de rapport a est une similitude plane directe de rapport $|a|$
Toute rotation est une similitude plane directe de rapport 1.

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe dont on donne une écriture complexe :

- 1) $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $z \longmapsto -3z + 1 - 2i$
- 2) $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $z \longmapsto (1 + i)z + 2i$
- 3) $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $z \longmapsto z + 1 - 5i$
- 4) $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $z \longmapsto iz + 1 - i$

Exercice 2 : On donne les points $A(-1 - i)$; $B(i)$; $C(1 + 3i)$; $D(5 + i)$

Soit S la similitude plane directe telle que :

$$S(A) = C \text{ et } S(B) = D$$

- 1) Déterminer le rapport k de S
- 2) Déterminer l'angle θ de S
- 3) Déterminer l'écriture complexe f associée à S
- 4) Déterminer l'affixe ω du centre Ω de S
- 5) Déterminer les caractéristiques (centre et rayon) de l'image (\mathcal{C}') du cercle (\mathcal{C}) de centre A et de rayon 2.
- 6) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2cm, placer les points A ; B ; C ; D et construire les cercles (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .
- 7) Justifier que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 3 : Dans le plan complexe muni d'un repère (o, \vec{u}, \vec{v}) d'unité 4cm. On donne

$$A(2i) ; B(1) \text{ et } C\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Soit la transformation $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto 2e^{i\pi/3} z + i\sqrt{3}$$

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation R du plan associée à f .
- 2) Soit (\mathcal{C}) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 2i| = 2$
 - a) Déterminer et construire l'ensemble (\mathcal{C})
 - b) Déterminer et construire l'image de (\mathcal{C}) par R
- 3) Soit (Δ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

$$|z - 1| = \left| z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|$$

- d) Déterminer et construire (Δ)
- e) Déterminer et construire l'image de (Δ) par R

Exercice 4:

Dans cet exercice, Z désigne un nombre complexe quelconque et (P) le plan complexe muni d'un repère orthormé $\mathcal{R}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1) a) Développer réduire et ordonner par rapport aux puissances décroissantes de Z l'expression : $(Z+2)(Z^2 - 6Z + 34)$

b) Soit (E) l'équation : $Z^3 - 4Z^2 + 22Z + 68 = 0$. Démontrer que (E) admet un entier comme solution.

c) Résoudre (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

2) A, B et C désignent trois points de (P) d'affixes respectives -2 ; $3 + 5i$ et $3 - 5i$. La droite (BC) coupe l'axe des abscisses en K.

a) quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

b) R désigne la rotation du plan telle que $R(K) = K$ et $R(B) = A$. Préciser la mesure principale de l'angle de R.

CHAPITRE VI : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1) Définition :

On appelle équation différentielle une équation dans laquelle l'inconnu est une fonction numérique et qui (l'équation) contient une au moins des dérivées successives de la fonction inconnue.

Exemple : (E) ; $3f'' - 2f = 0$

(E) ; $-2f' + 4f = g$

(E) ; $-4f'' + 2f' + 4f = 0$

Résoudre une équation différentielle revient à déterminer toutes les fonctions qui la vérifient.

Remarque : Souvent au lieu de dire résoudre une équation différentielle on dit intégrer l'équation différentielle.

2) Equations différentielles du 1^{er} ordre sans 2nd membre

Ce sont des équations du type :

(E) ; $af' + bf = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

Exemple : (E₁) ; $2f' + 3f = 0$

(E₂) ; $-\frac{1}{2}f' = 2f$

(E₃) ; $-7f' + f = 0$

Résolution : On démontre que toutes les fonctions f solutions de l'équation (E) sont telles que :

$$f(x) = Ae^{-\frac{b}{a}x} \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

Exemples : Résoudre l'équation (E) ; $f' + 3f = 0$

Les fonctions f solutions de (E) sont telles que $f(x) = Ae^{-3x}$ avec $A \in \mathbb{R}$

Exercice 1 : Résoudre chacune des équations suivantes et déterminer la solution satisfaisant la condition donnée :

(E₁) ; $f' - 2f = 0$ et $f(0) = 2$

(E₂) ; $f' + 7f = 0$ et $f(1) = 2$

(E₃) ; $-6f' + f = 0$ et $f(3) = 3$

(E₄) ; $2f' - \frac{4}{3}f = 0$ et $f(-1) = 2$

(E₅) ; $f' + \sqrt{3}f = 0$ et $f(0) = -5$

(E₆) ; $2\sqrt{3}f + f' = 0$ et $f(0) = 1$

(E₇) ; $-\frac{1}{2}f' - 4f = 0$ et $f(0) = 2$

Exercice 2 :

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $2f' + f = 0$
- 2) Déterminer la solution particulière g dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(2; 1)$.

Exercice 3 :

Soit l'équation différentielle (E) : $f' + 2f = x^2 + 1$

- 1) Résoudre l'équation différentielle (F) : $f' + 2f = 0$
- 2) Déterminer une fonction polynôme g du second degré, solution de (E).
- 3) Démontrer qu'une fonction h est une solution de (E) si et seulement si $h - g$ est une solution de (F).
- 4) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 4 :

Soit l'équation différentielle (E) : $f' + 2f = 5\cos x$

- 1) Résoudre l'équation différentielle (F) : $f' + 2f = 0$
- 2) Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur \mathbb{R} par :
 $g(x) = a\cos x + b\sin x$ est une solution de (E)
- 3) Démontrer qu'une fonction h est une solution de (E) si et seulement si $h - g$ est une solution de (F).
- 4) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 5 :

La proportion d'atomes de carbone 14 présents dans un organisme mort est une fonction f du temps t (en années) qui vérifie l'équation différentielle

$$(E): f' + 0,000121f = 0$$

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E).
- 2) Déterminer la solution particulière g telles que $g(0) = 1$.
- 3) On appelle période d'un élément radioactif, le temps T au bout duquel la moitié des atomes initialement présents se sont désintégrés.
- 4) Calculer, à 10 ans près, la période du carbone 14.
- 5) Quel est l'âge, à 100 ans près, d'un os fossile qui contient 23% d'atomes de carbone 14 par rapport à un os contemporain ?

3) Equations différentielles du 2nd ordre sans 2nd membre

Ce sont des équations du type :

$$(E) : af'' + bf' + cf = 0 \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* ; b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}$$

Exemple :

$$2f'' - 2f' + f = 0$$

$$-3f'' - f' = 0$$

$$4f'' - 2f' = 0$$

Résolution de (E) :

Pour résoudre une telle équation on procède comme suit :

- Etablir l'équation caractéristique (E') de (E) de la façon suivante :

$$(E') ; ar^2 + br + c = 0 \quad r \in \mathbb{C}$$

En remplaçant f'' par r^2 ; f' par r et f par 1.

- Résoudre l'équation (E')

- La forme des solutions de (E) dépend de la nature des solutions de (E')

Puisque (E') est une équation du 2nd degré on distingue 3 cas :

* **1^{er} cas** : Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif ($\Delta > 0$)

(E') admet 2 solutions réelles distinctes $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Les fonctions f solutions de (E) sont telles que

$$f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} \text{ avec } A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$$

Exemple : Résoudre l'équation (E) ; $f'' - f' - 2f = 0$

* **2^e cas** : $\Delta = 0$; l'équation (E') admet une racine réelle double $r_0 = \frac{-b}{2a}$

Les fonctions f solutions de (E) sont dans ce cas telles que : $f(x) = (Ax + B)e^{r_0x}$

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$(E) ; f'' - 2f' + f = 0$$

* **3^e cas** : $\Delta < 0$; l'équation (E') admet deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \alpha + i\beta \text{ et } r_2 = \alpha - i\beta$$

Les fonctions f solutions de (E) sont dans ce cas telles que

$$f(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x} \text{ avec } (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$$

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$(E) ; f'' + f' + f = 0$$

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants résoudre l'équation (E) et déterminer la solution qui satisfait la condition donnée :

- 1) (E) ; $f'' - 5f' + 4f = 0$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$
- 2) (E) ; $f'' + 6f' + 9f = 0$ avec $f(1) = 0$ et $f'(2) = 3$
- 3) (E) ; $f'' - 2f' + 5f = 0$ avec $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'(\pi) = 1$
- 4) (E) ; $f'' + 2f' + 3f = 0$ avec $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
- 5) $f'' - f = 0$ avec $f(5) = 3$ et $f'(2) = 4$
- 6) $f'' + 9f = 0$ avec $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$
- 7) $f'' + 4f = 0$ avec $f(\pi) = 0$ et $f'(0) = 1$

Exercice 2 :

Soit les équations (E_1) et (E_2) telles que : $(E_1) : f'' + 4f = 0$ et

$(E_2) : f'' + 4f = 3\cos x$ où f est une fonction numérique deux fois dérivable

- 1) Déterminer les fonctions g solutions de (E_1)
- 2) Vérifier que la fonction cosinus est solution de (E_2)
- 3) g étant solution de (E_1) vérifier que toute fonction h telle que $h(x) = g(x) + \cos x$ est solution de (E_2)
- 4) Parmi les fonctions h solutions de (E_2) déterminer celle qui vérifie $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Exercice 3 : On donne l'équation (E) telle que :

$$(E) : f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$$

- 1) Résoudre (E)
- 2) Déterminer la solution g de (E) qui vérifie les conditions suivantes :
 - Sa représentation graphique (Cg) passe par le point $A(0; 4)$
 - La tangente à (Cg) au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 0.

Exercice 4 : Soit l'équation (E) ; $y'' + 2y' + 5y = 0$

- 1) Vérifier que les fonctions f_1 et f_2 telles que $f_1(x) = e^{-x}\cos 2x$ et $f_2(x) = e^{-x}\sin 2x$ sont solutions de (E).
- 2) On admet que toute solution P de (E) est de la forme $P(x) = Af_1(x) + Bf_2(x)$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$).
- 3) Démontrer qu'il existe une solution f et une seule de (E) dont la courbe passe par le point $A(0; 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -3 .

Exercice 5 :

- 1) Résoudre l'équation (E) ; $16f'' + f = 0$
- 2) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f(2\pi) = -\sqrt{3}$
- 3) Démontrer que $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

BACCALAUREAT

-
- Sujets d'Examen
 - CORRECTIONS DETAILLEES

SUIJET N°1 BAC 2010

Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = 6xe^{-x}$

1) a) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E₀) : $y'' - 3y' + 2y = 0$

b) Démontrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \left(x + \frac{5}{6}\right)e^{-x}$ est une solution de (E).

En déduire la solution générale de (E).

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit f la solution de (E) dont la courbe passe par $A(0; -\frac{1}{6})$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{5}{6}x$.

a) Déterminer $f(x)$

b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_0^1 g(x)dx$

c) Calculer $K = \int_0^1 f(x)dx$

Exercice 2 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2cm) ; on considère les points A et B d'affixes respectives Z_A et Z_B telles que $Z_A = e^{\frac{-2\pi}{3}}$ et $Z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

1.a) Déterminer le module et un argument de Z_B puis écrire Z_B sous forme exponentielle.

b) Ecrire Z_A sous forme algébrique.

c) Placer les points A et B dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

2) Soit Z un nombre complexe non nul d'argument principal θ et de module r .

a) Ecrire Z^3 sous forme exponentielle.

b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles Z^3 est un nombre réel.

3) Soit (D) l'ensemble des points M d'affixes Z pour lesquels Z^3 est un réel.

a) Vérifier que A et B appartiennent à (D)

b) Déterminer la nature de (D)

c) Construire (D)

SUIJET N°2 BAC 2011

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0; \pi[$ par

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{2(1 - \cos x)} \text{ et } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

- 1- Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; \pi[$, $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} - \sin x$
- 2- Calculer $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx$
- 3- a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; \pi[$, $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$
b) Calculer $K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$
c) A l'aide de J et K , calculer I .

Exercice 2 :

On considère sur $]0; +\infty[$, l'équation différentielle

$$(E); y'' - 2y' = \frac{1}{x} - 2 \ln x$$

- 1- Résoudre l'équation différentielle (E_1) ; $y' - 2y = 0$
- 2- a) Démontrer qu'une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = f'(x) - \ln x$ est solution de (E_1) .
b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^x \ln t dt$ où, $x > 1$
- 3- Dédurre de la question 2) la solution générale de (E) .
- 4- Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) = e^2$

Problème

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{3+e^x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 2 cm)

Partie A

1- a) Calculer la limite de f en $-\infty$

b) Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$

Etudier la position relative de (C) par rapport à (D_1) .

2- a) calculer la limite de f en $+\infty$

b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x+3}$

c) En déduire que la droite (D_2) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

d) Étudier la position de (C) par rapport à (D_2) .

3- Démontrer que le point $A(\ln 3; \ln 3)$ est un centre de symétrie de (C) .

4- On suppose que f est dérivable sur \mathbb{R} .

a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} , f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α et que α appartient à l'intervalle $] -1,8 ; -1,7[$.

d) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

5- Déterminer une équation de la tangente (D_3) à (C) au point d'abscisse 0.

6- Placer le point A ; tracer les droites (D_1) (D_2) (D_3) puis construire (C)

On prendra $\alpha \approx -1,75$

Partie B

1- Déterminer une primitive de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^x}{e^x+3}$

2- Soit λ un réel strictement négatif. On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine du plan délimité par (D_1) ; (C) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$

a) Démontrer que $\mathcal{A}(\lambda) = 16\ln 4 - 16\ln(e^\lambda + 3)$

b) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

SUIJET N°3 BAC 2012

Exercice 1 :

On considère le polynôme P défini sur \mathbb{R} par $P(x) = 9x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

1-a) Calculer $P(-1)$. En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de polynômes du premier degré

b) Etudier le signe de $P(x)$.

2- Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

a) $2\ln x + \ln 3 = \ln(5x - 1) - \ln(3x + 1)$

b) $9(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 5(\ln x) + 1 \leq 0$

c) $9e^{2x} + 3e^x + e^{-x} - 5 > 0$

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (Unité graphique : 2 cm)

1- Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

2- On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B telles que

$$z_A = \sqrt{3} - i, \quad z_B = \sqrt{3} + i \text{ et } C \text{ le milieu du segment } [OB] \text{ d'affixes } z_C$$

a) Calculer z_C puis déterminer le module et une argument de chacun des nombres complexes z_A , z_B et z_C

b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

c) Calculer $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique puis en déduire la nature du triangle OAB

3- Soit f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -iz$

a) Soit D l'image du point C par l'application f

Démontrer que $z_D = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) Soit E le point du plan tel que $\vec{DE} = 2\vec{e}_2$

Démontrer que l'affixe z_E de E est $z_E = \frac{1}{2}[1 + i(4 - \sqrt{3})]$

c) Démontrer que les points A, C et E sont alignés.

Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + e^{-x}$.

- 1- a) Calculer la limite de g en $+\infty$
b) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
- 2- En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)
(Unité graphique : 4 cm)

- 1- a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0. En déduire une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
- 2- On suppose que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$
 - a) Calculer $f'(x)$ pour tout x strictement positif puis justifier que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$
 - b) Dresser le tableau de variation de f .

- 3- a) Démontrer que pour tout x strictement positif, on a :

$$f(x) - (x - 1) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$$

- b) En posant $X = \frac{1}{x}$, calculer $\lim xg\left(\frac{1}{x}\right)$

En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

- c) Etudier les positions relatives de (C) et (Δ) (on utilisera la partie A).

- 4- a) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

- 5- Construire (T) , (Δ) et (C) dans le repère (O, I, J) .

Partie C

- 1- a) Démontrer que l'équation $f(1) = 1$ admet une seule solution α dans l'intervalle $[0; +\infty[$
 - b) Démontrer que α appartient à l'intervalle $]1,76; 1,77[$
 - c) Déterminer le signe de $f(x) - 1$ suivant les valeurs de x .
- 2- Soit \mathcal{A} l'aire en cm^2 du domaine du plan délimité par (C) et les droites d'équations respectives $y = 1$, $x = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{1}{2}$
 - a) Démontrer que $\forall x \in [0; 1]$, $0 \leq f(x) \leq x$
 - b) En déduire un encadrement de \mathcal{A} .

CORRECTION DU SUJET N°1 :

BAC 2010

$$g'' = (g')$$

$$r_2 = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$r_2 = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$r_2 = -1$$

$$r_2 = -2$$

Exercice 1 :

$$(E) ; y'' - 3y' + 2y = 6xe^{-x}$$

1) a) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation :

$$(E_0) ; y'' - 3y' + 2y = 0$$

(E_0) a pour équation caractéristique :

$$(E'_0) ; r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1$$

$$\Delta = 9 - 4(2) \times 1 = 1$$

$$r_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

Les fonctions y solutions de (E) sont donc telles que

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^x ; A \in \mathbb{R} ; B \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{2x}$$

b) Démontrons que g est solution de (E)

$$g(x) = \left(x + \frac{5}{6}\right)e^{-x}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[\left(x + \frac{5}{6}\right)e^{-x}\right]' \\ &= \left(x + \frac{5}{6}\right)'e^{-x} + (e^{-x})'\left(x + \frac{5}{6}\right) \\ &= e^{-x} - e^{-x}\left(x + \frac{5}{6}\right) \\ &= e^{-x}\left(-x + \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= [g'(x)]' = \left[e^{-x}\left(-x + \frac{1}{6}\right)\right]' \\ &= -e^{-x}\left(-x + \frac{1}{6}\right) - e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(x - \frac{7}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) &= e^{-x}\left(x - \frac{7}{6}\right) - 3\left(-x + \frac{1}{6}\right)e^{-x} + 2\left(x + \frac{5}{6}\right)e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(x - \frac{7}{6} + 3x - \frac{1}{2} + 2x + \frac{5}{3}\right) \\ &= e^{-x}(6x) = 6xe^{-x} \end{aligned}$$

donc g est solution de (E)

La solution générale de (E) est telle que : $y(x) = Ae^{2x} + Be^x + (x + \frac{5}{6})e^{-x}$

2) a) Déterminons la fonction f solution de (E) telle que (Cf) passe par $A(0; -\frac{1}{6})$ et admet en A une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{5}{6}x$

• f est solution de (E) donc :

$$f(x) = Ae^{2x} + Be^x + (x + \frac{5}{6})e^{-x}$$

• La courbe (Cf) passe par $A(0; -\frac{1}{6})$ donc $f(0) = -\frac{1}{6}$

$$f(0) = -\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow Ae^0 + Be^0 + \frac{5}{6}e^0 = -\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow A + B + \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow A + B = -1 \quad (1)$$

• La tangente en A à (Cf) est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{5}{6}x$ signifie que

$$f'(0) = -\frac{5}{6}$$

Calculons $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [Ae^{2x} + Be^x + (x + \frac{5}{6})e^{-x}]' \\ &= 2Ae^{2x} + Be^x + (x + \frac{5}{6})'e^{-x} + (e^{-x})'(x + \frac{5}{6}) \\ &= Ae^{2x} + Be^x + e^{-x} - e^{-x}(x + \frac{5}{6}) \end{aligned}$$

$$f'(0) = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow 2Ae^0 + Be^0 + e^0 - e^0(0 + \frac{5}{6}) = -\frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2A + B + 1 - \frac{5}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2A + B = -1} \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2) on a :

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ 2A + B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \end{cases}$$

Donc la fonction f est telle que $f(x) = -e^x + (x + \frac{5}{6})e^{-x}$

$$\boxed{f(x) = -e^x + (x + \frac{5}{6})e^{-x}}$$

b) Calculons l'intégrale $I = \int_0^1 g(x) dx$ à l'aide d'une intégration par parties

$$I = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (x + \frac{5}{6})e^{-x} dx.$$

Posons $u'(x) = e^{-x}$ donc $u(x) = -e^{-x}$

$$v(x) = \left(x + \frac{5}{6}\right) \text{ donc } v'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{donc } I &= \left[-e^{-x}\left(x + \frac{5}{6}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx \\ &= \left[-e^{-x}\left(x + \frac{5}{6}\right)\right]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 \\ &= \left[\left(-x - \frac{11}{6}\right)e^{-x}\right]_0^1 \\ &= \left(-1 - \frac{11}{6}\right)e^{-1} + \frac{11}{6}e^0 = -\frac{17}{6}e^{-1} + \frac{11}{6} \end{aligned}$$

$$I = \frac{11}{6} - \frac{17}{6}e^{-1} = \frac{11-17e^{-1}}{6}$$

Calculons l'intégrale $K = \int_0^1 f(x) dx$

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (-e^x + g(x)) dx \\ &= [-e^x]_0^1 + I \\ &= -e^{-1} + 1 + I \\ &= -e^{-1} + 1 + \frac{11-17e^{-1}}{6} \\ &= \frac{-6e^{-1} + 6 + 11 - 17e^{-1}}{6} \end{aligned}$$

$$K = \frac{17-23e^{-1}}{6}$$

Exercice 2 : $z_A = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$

1)a) Déterminons le module et un argument de z_B

$$z_B = -1 + i\sqrt{3}$$

$$|z_B| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_B| = 2$$

Soit θ un argument de z_B

$$\text{On a : } \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{ARG } z_B = \frac{2\pi}{3}$$

Forme exponentielle de z_B $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) Expression algébrique de z_A

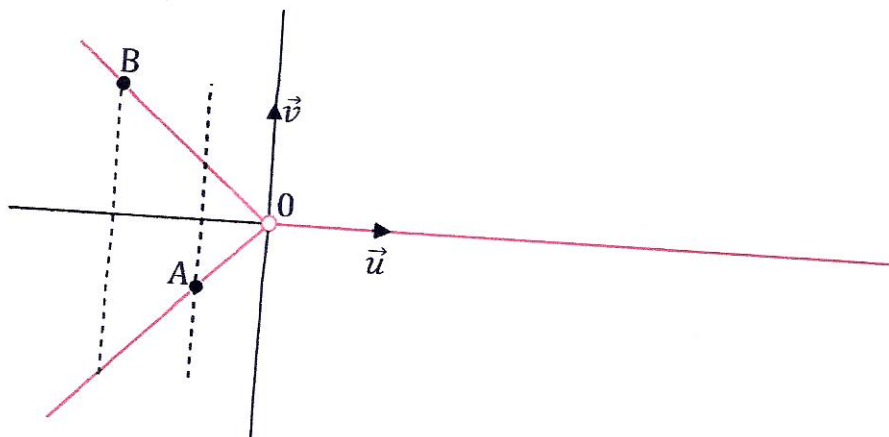
$$z_A = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{or } \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{et } \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc } z_A = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

c) Représentation des points A et B



$$2) |z| = r \text{ et } \text{Arg } z = \theta$$

a) Exprimons z sous forme exponentielle et en déduisons la forme exponentielle de z^3

$$z = r e^{i\theta} \text{ donc}$$

$$z^3 = r^3 e^{i3\theta}$$

b) Déterminons les valeurs de θ pour lesquelles z^3 est réel

$$z^3 = r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

z^3 est un nombre réel si et seulement si $\text{Im}(z^3) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 3\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\theta = 0 + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 3\theta = \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Pour } k = 0 \text{ on a : } \theta_0 = 0 \quad \text{ou} \quad * \text{ Pour } k = 0 \text{ on a : } \theta_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Pour } k = 1 \text{ on a : } \theta_1 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad * \text{ Pour } k = 1 \text{ on a : } \theta_1 = \pi$$

$$\text{Pour } k = 2 \text{ on a : } \theta_2 = -\frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad * \text{ Pour } k = 2 \text{ on a : } \theta_2 = -\frac{\pi}{3}$$

En conclusion les valeurs de θ pour lesquelles z^3 est un réel sont :

$$0 ; \frac{2\pi}{3} ; -\frac{2\pi}{3} ; \pi ; \frac{\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3}$$

3) (D) est l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquelles z est un réel

a) Vérifions que A et B appartiennent à (D) .

$$\text{Arg } z_A = -\frac{2\pi}{3} \text{ donc } A \in (D)$$

$$\text{De même } \text{ARG } z_B = \frac{2\pi}{3} \text{ donc } B \in (D)$$

b) L'ensemble (D) est la réunion des demi-droites :

$[0U)$; $[0A)$ et $[0B)$ privées de 0.

c) Construction de (D) (voir figure)

Problème :

Partie A : La fonction g est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 - 2x \ln x$

1) a) Calculons la limite de g en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1 - 2x \ln x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2x \ln x = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - 2x \ln x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - 2 \ln x \right) = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

b) Etudions les variations de g

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x - 1 - 2x \ln x)' \\ &= (x - 1)' - 2(x \ln x)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - 2(x' \ln x + (\ln x)' x) \\
 &= 1 - 2(\ln x + 1) \\
 &= 1 - 2 \ln x - 2 = -1 - 2 \ln x
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = -1 - 2 \ln x$$

Signe de $g'(x)$ et variations de g

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \ln x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$-1 - 2 \ln x$	+	0	-

$\forall x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}[$ $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0; e^{-\frac{1}{2}}[$

$\forall x \in]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$ $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$

En $e^{-\frac{1}{2}}$ g admet un maximum

Calculons la valeur de ce maximum

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - 1 - 2e^{-\frac{1}{2}} \ln e^{-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} - 1 + 2 \times \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} - 1 + e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{e}} - 1$$

$$= \frac{2 - \sqrt{e}}{\sqrt{e}}$$

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2 - \sqrt{e}}{\sqrt{e}}$$

Tableau de variations de g

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	-1		$\frac{2-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$	$-\infty$

2) a) Démontrons que g admet un unique zéro $\alpha \in]0; e^{-\frac{1}{2}}]$

g est continue et strictement croissante sur $]0; e^{-\frac{1}{2}}]$

Elle réalise donc une bijection de $]0; e^{-\frac{1}{2}}]$ vers $g\left(]0; e^{-\frac{1}{2}}]\right) =]-1; \frac{2-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}]$

Or $0 \in]-1; \frac{2-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}]$ donc g admet un unique zéro $\alpha \in]0; e^{-\frac{1}{2}}]$

$g(0,2) = -0,15$; $g(0,3) = 0,02$; $0 \in]-0,15; 0,02[$ donc $\alpha \in]0,2; 0,3[$.

b) g est continue et strictement décroissante sur $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$. Elle réalise donc une

bijection de $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$ vers $g\left(]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[\right) =]-\infty; \frac{2-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}[$

Or $0 \in]-\infty; \frac{2-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}[$ donc g admet un autre zéro dans l'intervalle $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$

De plus $g(1) = 1 - 1 - 2 \times 1 \ln 1 = 0$ donc le 2nd zéro de g est 1 car $1 \in]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$

4) Déterminons le signe de $g(x)$

D'après ce qui précède on a :

$g(]0; \alpha[) =]-1; 0[$ donc $g(x) < 0 \forall x \in]0; \alpha[$

$g\left(]\alpha; e^{-\frac{1}{2}}]\right) =]0; \frac{2-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}[$ donc $g(x) > 0 \forall x \in]\alpha; e^{-\frac{1}{2}}[$

$g\left(]e^{-\frac{1}{2}}; 1]\right) =]0; \frac{2-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}[$ donc $g(x) > 0 \forall x \in]e^{-\frac{1}{2}}; 1[$

$g(]1; +\infty[) =]-\infty; 0[$ donc $g(x) < 0 \forall x \in]1; +\infty[$

En conclusion, on obtient :

$$\forall x \in]0; \alpha[\cup]1; +\infty[\quad g(x) < 0$$

$$\forall x \in]\alpha; 1[\quad g(x) > 0$$

$$\forall x \in \{\alpha; 1\} \quad g(x) = 0$$

Partie B :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x + x^2 - x^2 \ln x \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{si } x > 0$$

1) a) Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0

Continuité :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x + x^2 - x^2 \ln x) = 1$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x + x^2) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ d'où f est continue en 0 à droite.

$$\text{Dérivabilité : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - x + x^2 - x^2 \ln x) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - x^2 \ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (-1 + x - x \ln x) = -1$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (-1 + x) = -1 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \text{ donc } f \text{ est dérivable en 0 à droite et } f'_d(0) = -1$$

b) Equation de la tangente (T) à (C) en 0 :

$$(T); y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$= f'(0)x + f(0)$$

$$(T); y = -x + 1$$

c) Etudions les positions relatives de (C) et (T)

Pour cela, on étudie le signe de l'expression $d(x) = f(x) - y$

$$d(x) = 1 - x + x^2 - x^2 \ln x - (1 - x)$$

$$= x^2 - x^2 \ln x$$

$$d(x) = x^2(1 - \ln x)$$

Tableau de signe de $d(x)$:

x	0	e	$+\infty$
x^2	+	+	+
$1 - \ln x$	+	0	-
Positions relatives de (C) et (T)	(C) est au dessus de (T)	(C) coupe (T)	(C) est en-dessous de (T)

2) a) Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x + x^2 - x^2 \ln x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2} + 1 - \ln x \right) = -\infty \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

b) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - x + x^2 - x^2 \ln x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 - \ln x \right) = -\infty \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$$

Interprétation graphique du résultat précédent.

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$

3) a) Démontrons que $f'(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - x + x^2 - x^2 \ln x)' \\ &= (1 - x)' + (x^2)' - (x^2 \ln x)' \\ &= -1 + 2x - [(x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)'] \\ &= -1 + 2x - \left[2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right] \\ &= -1 + 2x - 2x \ln x - x \\ &= -1 + x - 2x \ln x \\ &= x - 1 - 2x \ln x = g(x) \end{aligned}$$

$$f'(x) = g(x)$$

b) Etudions les variations de f

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. Or d'après la question 3.A on a :


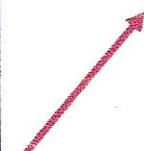

$\forall x \in]0; \alpha[\cup]1; +\infty[\quad g(x) < 0 \quad (f'(x) < 0)$ donc f est strictement décroissante sur $]0; \alpha[$ et sur $]1; +\infty[$.

$\forall x \in]\alpha; 1[\quad g(x) > 0 \quad (f'(x) > 0)$ donc f est strictement croissante sur $] \alpha; 1[$.

en α , f admet un minimum

en 1, f admet un maximum

Tableau de variation de f

x	0		α		1	$+\infty$
$f'(x)$	-1	-	0	+	0	-
$f(x)$	1		$f(\alpha)$		1	 $-\infty$

$$f(1) = 1 - 1 + 1^2 - 1^2 \ln 1 = 1$$

4) Construction de (C) et (T) (voir graphique)

5) $\lambda \in]0; \alpha[$

a) Calculons l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= \int_{\lambda}^1 [f(x) - y] dx \times 4 \text{ cm}^2 \\ &= \int_{\lambda}^1 (x^2 - x^2 \ln x) dx \times 4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$= \int_{\lambda}^1 x^2(1 - \ln x) dx$$

Posons $u'(x) = x^2$ donc $u(x) = \frac{x^3}{3}$

$v(x) = 1 - \ln x$ donc $v'(x) = -\frac{1}{x}$

Finalement $\mathcal{A}(\lambda) = \frac{4}{3} - \frac{4\lambda^3}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4\lambda^3 \ln \lambda}{3} - \frac{4\lambda^3}{9}$
 $= -\frac{16\lambda^3}{9} + \frac{4\lambda^3 \ln \lambda}{3} + \frac{16}{9}$

$$\mathcal{A}(\lambda) = -\frac{16\lambda^3}{9} + \frac{4\lambda^3 \ln \lambda}{3} + \frac{16}{9} \text{ cm}^2$$

b) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(-\frac{16\lambda^3}{9} + \frac{4\lambda^3 \ln \lambda}{3} + \frac{16}{9} \right)$

$$= \frac{16}{9} \text{ car } \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-16\lambda^3}{9} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^3 \ln \lambda}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{16}{9} \text{ cm}^2$$

121

CORRECTION DU SUJET N°2 :
BAC 2011

Exercice 1 :

1) f est définie sur $]0; \pi[$ par $f(x) = \frac{\sin 2x}{2(1 - \cos x)}$

Démontrons que $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} - \sin x$

Du cours de première, on sait que :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\text{et que } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \quad (2)$$

En utilisant les égalités (1) et (2) $f(x)$ devient :

$$f(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}} = \frac{\cos x(1 + \cos x)}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos x + 1 - \sin^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} - \sin x$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} - \sin x$$

2) Calculons $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx$

Soit la fonction g telle que $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

Il nous faut trouver une primitive G de g . Or $(\sin x)' = \cos x$

donc $g(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x}$

d'où $G(x) = \ln|\sin x| + C$

avec $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ $G(x) = \ln(\sin x) + C$

par conséquent $J = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0 + \ln 2$$

$$\boxed{J = \ln 2}$$

3) a) Démontrons que $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = \frac{\sin x}{2}\left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$= \frac{\sin x}{2}\left(\frac{1+\cos x+1-\cos x}{1-\cos^2 x}\right)$$

$$= \frac{\sin x}{2}\left(\frac{2}{\sin^2 x}\right) = \frac{\sin x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sin x}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)}$$

b) Calculons $K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$

En utilisant le résultat précédent $K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) dx$

$$K = \frac{1}{2}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{1+\cos\frac{\pi}{2}} - \ln\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - \ln\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})^2$$

$$K = \ln(2 + \sqrt{3})$$

4) Calculons I à l'aide de J et K

$$\text{On a : } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} - \sin x \right) dx$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x) dx$$

$$= J + K + [\cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{3}) + \left[\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{6} \right]$$

$$= \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 2 : (E) ; $y'' - 2y' = \frac{1}{x} - 2\ln x$

1) Résolvons l'équation (E₁) ; $y' - 2y = 0$

(E₁) est une équation différentielle du 1^{er} ordre sans second membre donc ses solutions sont les fonctions y telles que $y(x) = Ae^{2x}$ avec $A \in \mathbb{R}$

$$y(x) = Ae^{2x} \quad A \in \mathbb{R}$$

2) a) $g(x) = f'(x) - \ln x$ et g solution de (E₁) équivaut à : $g'(x) - 2g(x) = 0$

$$\text{On a : } g'(x) = (f'(x) - \ln x)'$$

$$= f''(x) - (\ln x)'$$

$$= f''(x) - \frac{1}{x}$$

$$\text{Et } g'(x) - 2g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{x} - 2(f'(x) - \ln x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f''(x) - \frac{1}{x} - 2f'(x) + 2\ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) = \frac{1}{x} - 2\ln x$$

Cette dernière égalité signifie que la fonction f est solution de l'équation (E). (ce qu'il fallait démontrer).

b) Calculons $\int_1^x \ln t \, dt$ $x > 1$ à l'aide d'une intégration par parties

Posons $u'(t) = 1$ alors $u(t) = t$

$$v(t) = \ln t \text{ alors } v'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_1^x \ln t \, dt &= [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt \\ &= x \ln x - \int_1^x dt \\ &= x \ln x - [t]_1^x \\ &= x \ln x - x + 1 \end{aligned}$$

$$\int_1^x \ln t \, dt = x \ln x - x + 1$$

3) Déduisons de la question 2) la solution générale de (E)

$$\text{On a : } g(x) = f'(x) - \ln x$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = g(x) + \ln x = Ae^{2x} + \ln x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = G(x) + C + \int_1^x f(t) \, dt \quad \text{où } G \text{ est une primitive de } g$$

$$= \frac{A}{2} e^{2x} + C + x \ln x - x + 1 \quad ; C \in \mathbb{R} ; A \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{A}{2} e^{2x} + x \ln x - x + C + 1 \quad ; C \in \mathbb{R} ; A \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{A}{2} e^{2x} + x \ln x - x + C + 1 \quad ; C \in \mathbb{R} ; A \in \mathbb{R}$$

4) Déterminons la solution particulière f de (E) telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) = e^2$

$$f \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{A}{2} e^{2x} + x \ln x - x + C + 1$$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{2} e^2 + 1 \ln 1 - 1 + C + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2} e^2 + C = 0 \quad (1)$$

Calculons $f'(x)$: d'après ce qui précède

$$f'(x) = g(x) + \ln x = Ae^{2x} + \ln x$$

$$\text{Donc } f'(1) = e^2$$

$$\Leftrightarrow Ae^2 + \ln 1 = e^2$$

$$\Leftrightarrow Ae^2 = e^2$$

$$\Leftrightarrow A = 1 \quad (2)$$

Remplaçons A par 1 dans l'égalité (1) ; on obtient $\frac{1}{2} e^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2} e^2$

En définitive la fonction f cherchée est telle que

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + x \ln x - x - \frac{1}{2} e^2 + 1$$

Problème :

f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{3+e^x}$

Partie A :

1) a) Calculons la limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 - \frac{4e^x}{3+e^x} \right)$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{3+e^x} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

b) Démontrons que la droite $(D_1) : y = x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{3+e^x} - x - 2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4e^x}{3+e^x} = 0 \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0) \end{aligned}$$

donc (D_1) est asymptote à (C) en $-\infty$

c) Etudions la position relative de (C) par rapport à (D_1)

$f(x) - y = -\frac{4e^x}{3+e^x}$ et $\forall x \in \mathbb{R} ; -\frac{4e^x}{3+e^x} < 0$ donc (C) est en dessous de (D_1) sur \mathbb{R}

2) a) Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 - \frac{4e^x}{3+e^x} \right)$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{3+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{e^x \left(\frac{3}{e^x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\frac{3}{e^x} + 1} = 4$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x+3}$

1^{ère} méthode :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} = \frac{(x+2)(e^x+3) - 4e^x}{e^x+3} = \frac{xe^x - 2e^x + 3x + 6}{e^x+3} \quad (1)$$

$$x - 2 + \frac{12}{e^x+3} = \frac{(x-2)(e^x+3) + 12}{e^x+3} = \frac{xe^x - 2e^x + 3x + 6}{e^x+3} \quad (2)$$

Les égalités (1) et (2) donnent $f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x+3}$

2^{ème} méthode :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} \\ &= x + 2 - 2 + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} \\ &= x - 2 + 4 - \frac{4e^x}{e^x+3} \\ &= x - 2 + \frac{4(e^x+3) - 4e^x}{e^x+3} = x - 2 + \frac{4e^x - 4e^x + 12}{e^x+3} \\ &= x - 2 + \frac{12}{e^x+3} \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x+3}$$

c) En déduisons que la droite $(D_2): y = x - 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 2 - \frac{12}{e^x+3} - x + 2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{e^x+3} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 3 = 0 \end{aligned}$$

donc (D_2) est asymptote à (C) en $+\infty$

d) Etudions la position relative de (C) par rapport à (D_2)

$$f(x) - (x - 2) = \frac{12}{e^x+3} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{12}{e^x+3} > 0 \text{ donc } (C) \text{ est au-dessus de } (D_2) \text{ sur } \mathbb{R}$$

3) Démontrons que le point $A(\ln 3; \ln 3)$ est centre de symétrie de (C) .

$D_f = \mathbb{R}$ donc il est symétrique par rapport à $\ln 3$ c'est-à-dire $\forall r \in \mathbb{R}; \ln 3 - r \in \mathbb{R}$ et $\ln 3 + r \in \mathbb{R}$.

$$\text{Calculons } \frac{f(\ln 3 - r) + f(\ln 3 + r)}{2}$$

$$\begin{aligned} f(\ln 3 - r) &= \ln 3 - r - 2 + \frac{12}{e^{\ln 3 - r} + 3} \\ &= \ln 3 - r - 2 + \frac{12}{3e^{-r} + 3} \end{aligned}$$

$$= \ln 3 - r - 2 + \frac{12e^r}{3+3e^r}$$

$$= \ln 3 - r - 2 + \frac{4e^r}{e^r+1}$$

$$f(\ln 3 + r) = \ln 3 + r - 2 + \frac{12}{e^{\ln 3 + r} + 3}$$

$$= \ln 3 + r - 2 + \frac{12}{3e^r + 3}$$

$$= \ln 3 + r - 2 + \frac{4}{e^r + 1}$$

$$f(\ln 3 - r) + f(\ln 3 + r) = \ln 3 - r - 2 + \frac{4e^r}{e^r + 1} + \ln 3 + r - 2 + \frac{4}{e^r + 1}$$

$$= 2\ln 3 - 4 + 4\left(\frac{e^r + 1}{e^r + 1}\right)$$

$$= 2\ln 3$$

$$\frac{f(\ln 3 - r) + f(\ln 3 + r)}{2} = \ln 3$$

Donc A est centre de symétrie de (C)

4) a) Démontrons que $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$

$$f'(x) = \left(x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}\right)'$$

$$= (x - 2)' + 12\left(\frac{1}{e^x + 3}\right)'$$

$$= 1 + 12\left[-\frac{(e^x + 3)}{(e^x + 3)^2}\right]'$$

$$= 1 + 12\left[\frac{-e^x}{(e^x + 3)^2}\right]$$

$$= \frac{(e^x + 3)^2 - 12e^x}{(e^x + 3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 6e^x + 9 - 12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2}$$

$$= \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2} = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

b) Sens de variation de f

$\forall x \in \mathbb{R} f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur \mathbb{R}

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

c) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]-1,8; -1,7[$

- f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}
- Elle est donc bijective sur \mathbb{R}

De plus $f(\mathbb{R}) =]-\infty; +\infty[$

Or $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$

Justifions que $\alpha \in]-1,8; -1,7[$

$$f(-1,8) = -1,8 - 2 + \frac{12}{e^{-1,8} + 3} = -0,008$$

$$f(-1,7) = -1,7 - 2 + \frac{12}{e^{-1,7} + 3} = 0,071$$

$0 \in]-0,008; -0,071[$ donc $\alpha \in]-1,8; -1,7[$

d) signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x

D'après ce qui précède ; f est croissante sur \mathbb{R}

Donc $f(]-\infty; +\infty[) =]-\infty; f(\alpha)] =]-\infty; 0]$

Donc $\forall x \in]-\infty; \alpha] f(x) \leq 0$

$$\begin{aligned} f([\alpha; +\infty[) &= [f(\alpha); +\infty[\\ &= [0; +\infty[\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \geq 0$

En conclusion $\forall x \in]-\infty; \alpha[\quad f(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[\quad f(x) > 0$

$\forall x \in \{\alpha\} \quad f(x) = 0$

5) Equation de la tangente (D_3) à (C) en 0.

$$(D_3) \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f'(0) \cdot x + f(0)$$

$$f'(0) = \left(\frac{e^0 - 3}{e^0 + 3}\right)^2 = \left(\frac{1-3}{1+3}\right)^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = 0 - 2 + \frac{12}{e^0 + 3} = -2 + \frac{12}{4} = -2 + 3 = 1$$

$$\text{Donc } y = \frac{1}{4}x + 1$$

$$(D_3); y = \frac{1}{4}x + 1$$

6) Construction de (C) ; (D₁) ; (D₂) et (D₃) .

Partie B :

1) Déterminons une primitive de g telle que

$$g(x) = \frac{e^x}{e^{x+3}}$$

$$g(x) = \frac{e^x}{e^{x+3}} = \frac{(e^{x+3})'}{e^{0+3}}$$

Donc les primitives G de g sont telles que :

$$G(x) = \ln(e^x + 3) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

2) a) Calculons l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= \int_{\lambda}^0 [y - f(x)] dx \times 4 \text{ cm}^2 \\ &= \int_{\lambda}^0 \frac{4e^x}{e^{x+1}} \times 4 dx \\ &= 16 \int_{\lambda}^0 \frac{e^x}{e^{x+3}} dx = 16 [\ln(e^x + 3)]_{\lambda}^0 \\ &= 16 [\ln(e^0 + 3) - \ln(e^{\lambda} + 3)] \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = 16 \ln 4 - 16 \ln(e^{\lambda} + 3) = 16 \ln \frac{4}{e^{\lambda} + 3}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} 16 \ln 4 - 16 \ln(e^{\lambda} + 3) \\ &= 16 \ln 4 - 16 \ln 3 \quad \text{car } \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^{\lambda} = 0 \\ &= 16(\ln 4 - \ln 3) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

CORRECTION DU SUJET N°3 :
BAC 2012

Exercice 1 : Le polynôme P est défini sur \mathbb{R} par $P(x) = 9x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

1)a) Calculons $P(-1)$ et factorisons $P(x)$

$$\begin{aligned} P(-1) &= 9(-1)^3 + 3(-1)^2 - 5(-1) + 1 \\ &= -9 + 3 + 5 + 1 = -9 + 9 = 0 \end{aligned}$$

$$P(-1) = 0$$

$P(x)$ est donc factorisable par $x + 1$ c'est-à-dire $P(x) = (x + 1)Q(x)$ où Q est un polynôme du 2nd degré

$$P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

Déterminons les réels a, b et c par la méthode de Horner

Coefficients de P	9		3		-5		1
$x_0 = -1$	↓		-9		6		-1
Coefficients de Q	9		-6		1		0

donc $Q(x) = 9x^2 - 6x + 1$

d'où

$$P(x) = (x + 1)(3x - 1)(3x - 1)$$

b) Signe de $P(x)$

Tableau de signe

x	$-\infty$	-1		$1/3$	$+\infty$
$(3x - 1)^2$	+	+	+	0	+
$x + 1$	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

$$\forall x \in]-\infty; -1[\quad P(x) < 0$$

$$\forall x \in]-1; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[\quad P(x) > 0$$

$$\forall x \in \left\{-1; \frac{1}{3}\right\} \quad P(x) = 0$$

1) résolvons dans \mathbb{R} les équations et inéquations

a) Équation $2\ln x + \ln 3 = \ln(5x - 1) - \ln(3x + 1)$

Domaine de validité

$$DV = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } 5x - 1 > 0 \text{ et } 3x + 1 > 0\}$$

$$x > 0 \text{ et } 5x - 1 > 0 \text{ et } 3x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 5x > 1 \text{ et } 3x > -1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x > \frac{1}{5} \text{ et } x > -\frac{1}{3}$$

$$\mathcal{D}V = \left] \frac{1}{5}; +\infty[\right.$$

Résolution

$$2\ln x + \ln 3 = \ln(5x - 1) - \ln(3x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln x^2 + \ln 3 = \ln \frac{5x-1}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 \times 3) = \ln \frac{5x-1}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = \frac{5x-1}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2(3x+1) = 5x-1$$

$$\Leftrightarrow 9x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(x) = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -1$$

$$\frac{1}{3} \in \mathcal{D}V \quad \text{et} \quad -1 \notin \mathcal{D}V$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{b) } 9(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 5(\ln x) + 1 \leq 0$$

Domaine de validité

$$\mathcal{D}V = \{ x \in \mathbb{R} / x > 0 \}$$

$$\mathcal{D}V =]0; +\infty[$$

Résolution :

Posons $X = \ln x$; l'inéquation devient :

$$9X^3 + 3X^2 - 5X + 1 \leq 0 \text{ et d'après la question 1).b}$$

$$X \in]-\infty; -1]$$

$$\Leftrightarrow X \leq -1$$

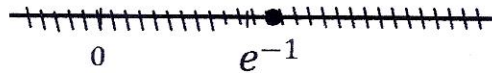
$$\Leftrightarrow \ln x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^{-1}$$

donc x doit satisfaire les 2 critères suivants :

$$x \in \mathcal{D}V \Leftrightarrow x > 0$$

et $x \leq e^{-1}$



$$S =]0; e^{-1}]$$

c) $9e^{2x} + 3e^x + e^{-x} - 5 > 0$

Domaine de validité

$$DV = \mathbb{R}$$

Résolution :

$$9e^{2x} + 3e^{2x} + e^{-x} - 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow 9e^{2x} + 3e^x + \frac{1}{e^x} - 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow 9e^{3x} + 3e^{2x} + 1 - 5e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow 9(e^x)^3 + 3(e^x)^2 - 5(e^x) + 1 > 0$$

Posons $X = e^x$ et l'inéquation devient

$$9X^3 + 3X^2 - 5X + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow P(X) > 0$$

$$\Leftrightarrow X \in]0; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[\text{ d'après la question 1.b.}$$

$$\Leftrightarrow 0 < X < \frac{1}{3} \text{ ou } X > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 < e^x < \frac{1}{3} \text{ ou } e^x > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -\ln 3[\text{ ou } x \in]-\ln 3; +\infty[$$

$$S =]-\infty; -\ln 3[\cup]-\ln 3; +\infty[$$

Exercice 2 :

1) Résolvons dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

Le discriminant Δ de l'équation est :

$$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 4$$

$$\Delta = 12 - 16 = -4$$

$$\Delta = -4 = 4i^2$$

Les deux racines carrées de Δ sont donc $\sigma = 2i$; $\sigma' = -2i$ les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2}$$

$$= \sqrt{3} + i \text{ et } = \sqrt{3} - i$$

$$S_C = \{\sqrt{3} + i ; \sqrt{3} - i\}$$

2) a) Déterminons l'affixe de C milieu de [OB] avec :

$$A(\sqrt{3} - i) \text{ et } B(\sqrt{3} + i) \text{ et } O(0)$$

$$z_C = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{0 + \sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

$$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Déterminons le module et un argument de chacun des nombres z_A ; z_B et z_C

- **Module et argument de z_A** : $|z_A| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

soit θ_A un argument de z_A

$$\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_A = -\frac{\pi}{6}$$

$$|z_A| = 2$$

$$ARG(z_A) = -\frac{\pi}{6}$$

- **Module et argument de z_B** ; On constate que : $z_B = \bar{z}_A$

$$|z_B| = |\bar{z}_A| = |z_A| = 2$$

$$\text{et } ARG(z_B) = ARG(\bar{z}_A) = -ARG(z_A) = \frac{\pi}{6}$$

$$|z_B| = 2$$

$$ARG(z_B) = \frac{\pi}{6}$$

- **Module argument de z_C** : $|z_C| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

Soit $\theta_C = ARG(z_C)$

$$\begin{cases} \cos\theta_C = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_C = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_C = \frac{\pi}{6}$$

$$|z_C| = 1$$

$$ARG(z_C) = \frac{\pi}{6}$$

b) Construction du triangle ABC

c) calculons $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{3-2\sqrt{3}i-1}{4} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Nature du triangle OAB

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{z_A - 0}{z_B - 0} = \frac{z_A - z_0}{z_B - z_0} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Donc } \text{ARG} \left(\frac{z_A}{z_B} \right) = \text{ARG} \left(\frac{z_A - z_0}{z_B - z_0} \right) = \text{MES}(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA})$$

$$\text{Or } \text{ARG} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Donc } \text{MES}(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$\text{De plus } \left| \frac{z_A}{z_B} \right| = \left| \frac{z_A - z_0}{z_B - z_0} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1$$

$$\text{Donc } \frac{OA}{OB} = 1 \Leftrightarrow OA = OB \quad (2)$$

Les égalités (1) et (2) signifient que le triangle OAB est équilatéral

$$3) M(z) \quad M'(z) \quad \text{et } z' = -iz$$

$$\text{a) Démontrons que } z_D = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\begin{aligned} f(C) = D \text{ donc } z_D &= -iz_C \\ &= -i \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2} \right) = -\frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$z_D = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{DE} = 2\vec{e}_2 \text{ Démontrons que } z_D = \frac{1}{2} [1 + i(4 - \sqrt{3})]$$

$$\overrightarrow{DE} = 2\vec{e}_2 \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{DE}} = 2z\vec{e}_2$$

$$\Leftrightarrow z_E - z_D = 2z\vec{e}_2$$

$$\Leftrightarrow z_E = z_D + 2z\vec{e}_2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + 2i$$

$$z_E = \frac{1}{2} [1 + i(4 - \sqrt{3})]$$

c) Démontrons que les points A, C et E sont alignés.

Calculons les affixes des vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AE}

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AC}} &= z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}+i}{2} - (\sqrt{3} - i) = \frac{\sqrt{3}+i-2\sqrt{3}+2i}{2} \\ &= \frac{-\sqrt{3}+3i}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AE}} &= z_E - z_A = \frac{1}{2} [1 + i(4 - \sqrt{3})] - (\sqrt{3} - i) \\ &= \frac{1+i(4-\sqrt{3})-2\sqrt{3}+2i}{2} \\ &= \frac{1-2\sqrt{3}+i(6-\sqrt{3})}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

Justifier que : $\frac{z_{\overrightarrow{AE}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$

Donc les vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires d'où les points A, C et E sont alignés

Problème :

Partie A : La fonction g est définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + e^{-x}$

1) a) Calculons la limite de g en $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 + \frac{1}{e^x}) = +\infty \\ &\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

b) Etudions les variations de g

Calculons $g'(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x - 1 + e^{-x})' \\ &= (x - 1)' + (e^{-x})' \\ &= 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^x - 1}{e^x}$$

$$g'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

Signe de $g'(x)$ et variation de g

$x \in]0; +\infty[$ $e^x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $e^x - 1$

Posons $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$


Tableau de signe de $e^x - 1$

x	0	$+\infty$
$e^x - 1$		+

$x \in [0; +\infty[$ $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	$+\infty$



2) signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

g est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle est donc bijective.

De plus $g([0; +\infty[) = [0; +\infty[$ donc $\forall x \in [0; +\infty[$ $g(x) \geq 0$

Partie B : La fonction f est définie comme suit

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Etudions la continuité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^{-\frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{e^{1/x}} \right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ > \end{array} \right.$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$
 $>$
 et $\lim e^X = +\infty$ quand $X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ or } f(0) = 0$$

$>$
 Donc f est continue en 0 à droite.

Dérivabilité de f en 0

$$\begin{aligned} \text{Calculons } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-\frac{1}{x}}-0}{x-0} \\ &> \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}} \\ &> \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ donc f est dérivable en 0 à droite et $f'_d(0) = 0$

La courbe (\mathcal{C}_f) admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation : $y = 0$

b) Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{1/x}} \right) = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^X = 1 \text{ quand } X \rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2) a) Calculons $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (xe^{-\frac{1}{x}})' = x'e^{-\frac{1}{x}} + (e^{-\frac{1}{x}})'x \\ &= e^{-\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}}.x \\ &= e^{-\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}}.x \\ &= e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}.x \end{aligned}$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

Signe de $f'(x)$ et variation de f

$\forall x \in]0; +\infty[$ $f'(x) > 0$ donc f est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$

b) Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	$+\infty$

3) a) Démontrons que $f(x) - (x - 1) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f(x) - (x - 1) = xe^{-\frac{1}{x}} - x + 1$$

$$xg\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

$$= 1 - x + xe^{-\frac{1}{x}} = xe^{-\frac{1}{x}} - x + 1 = f(x) - (x - 1)$$

$$f(x) - (x - 1) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) Posons $X = \frac{1}{x}$ et calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} xg\left(\frac{1}{x}\right)$

$$X = \frac{1}{x}$$

• quand x tend vers $+\infty$ alors X tend vers 0.

• $X = \frac{1}{x}$ donc $x = \frac{1}{X}$

$$\text{On a donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} xg\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} g(X)$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} (X - 1 + e^{-X})$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} \left(X - 1 + \frac{1}{e^X}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{(xe^x - e^{x+1})}{xe^x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x}{xe^x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1}}{xe^x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{e^{x+1}}{x} \cdot \frac{1}{e^x} \right) = 0
\end{aligned}$$

car

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1 \end{cases}$$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} xg\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X}g(X) = 0$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$

On en déduit que la limite (Δ) est asymptote à (\mathcal{C}) en $+\infty$

c) Etudions la position de (\mathcal{C}) par rapport à (Δ)

On étudie le signe de $f(x) - (x - 1)$

D'après ce qui précède $f(x) - (x - 1) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$

Le signe de l'expression dépend de celui de $xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

De plus $x > 0$ donc le signe est celui de $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

En posant $X = \frac{1}{x}$ on est ramené à l'étude du signe de $g(X)$.

D'après la question 2 de la partie A, $g(X) \geq 0$, donc $\forall x \in]0; +\infty[f(x) - (x - 1) \geq 0$

d'où la courbe (\mathcal{C}) est au-dessus de (Δ).

4) a) Equation de la tangente (T) en $\frac{1}{2}$

$$(T); \quad y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2}} e^{-2} = 3e^{-2}$$

• $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-2}$

$$(T); \quad y = 3e^{-2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-2}$$

$$= e^{-2} \left(3x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= e^{-2}(3x - 1)$$

$$(T); \quad y = e^{-2}(3x - 1)$$

b) Construction de (C) ; (T) et (Δ)

Partie C :

1) a) Démontrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une seule solution α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle est donc bijective. De plus $f[0; +\infty[= [0; +\infty[$. Or $1 \in [0; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.

b) Démontrons que $\alpha \in]1,76; 1,77[$

$$f(1,76) = 1,76e^{-\frac{1}{1,76}} = 0,997$$

$$f(1,77) = 1,77e^{-\frac{1}{1,77}} = 1,006$$

$$1 \in]f(1,76); f(1,77)[\text{ donc } \alpha \in]1,76; 1,77[$$

c) Etudions le signe de $f(x) - 1$

On compare $f(x)$ et 1

D'après la question précédente $f(\alpha) = 1$ et puisque f est strictement croissante on a :

$$f([0; \alpha]) = [f(0); f(\alpha)] = [0; 1] \text{ donc } \forall x \in [0; \alpha]$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 \leq 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0; \alpha], f(x) - 1 \leq 0$$

$$f([\alpha; +\infty[) = [1; +\infty[$$

$$\text{Donc } \forall x \in [\alpha; +\infty[; f(x) \in [1; +\infty[\text{ ce qui donne } f(x) \geq 1 \quad f(x) - 1 \geq 0$$

En conclusion

$$\forall x \in [0; \alpha[\quad f(x) - 1 < 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[\quad f(x) - 1 > 0$$

$$\forall x \in \{\alpha\} \quad f(x) - 1 = 0$$

2) Calcul d'aire : le domaine plan est limité par les droites d'équations $x = \frac{1}{4}$;

$$x = \frac{1}{2}; y = 1 \text{ et } (C).$$

a) Démontrons que $\forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq f(x) \leq x$

$$x \in [0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{-\frac{1}{x}} < e^0$$

$$\Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{-\frac{1}{x}} < 1$$

$$\Leftrightarrow xe^{-1} \leq xe^{-\frac{1}{x}} < x$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq x$$

donc

$$\forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq f(x) \leq x$$

b) Encadrons l'aire \mathcal{A} en cm^2 .

L'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \subset [0; \alpha]$ et $\forall x \in [0; \alpha]$, $f(x) < 1$ donc sur $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

(Cf) est en-dessous de la droite d'équation $y = 1$

$$\text{d'où } \mathcal{A} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} [1 - f(x)] dx$$

Encadrons d'abord \mathcal{A} en unités d'aires

$$\text{On a : } 0 \leq f(x) \leq x$$

$$\Leftrightarrow -x \leq -f(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x \leq 1 - f(x) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (1 - x) dx \leq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (1 - f(x)) dx \leq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\Leftrightarrow \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \leq \mathcal{A} \leq \left[x \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{32} \right) \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{2}$$

Encadrement en cm^2

$$\left(\frac{5}{32} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{4} \right) \times 16 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5 \times 16}{32} \leq \mathcal{A} \leq \frac{16}{4} \right) \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2} \leq \mathcal{A} \leq 4 \right) \text{ cm}^2$$