FOMESOUTRA

ÇA SOUTRA !!!

COURS DE MATHS

PREMIERE D

1ère D

1ière édition

BY TEHUA

2025

MATHÉMATIQUES __ PROGRESSION 1ère D __ 2024-2025

Volume horaire annuel : 150 heures *(5 heures par semaine)*

Trimestre	*Mois*	*Sem.*	*Leçons*	*Vol. hor.*	*Taux d'exécution*
1er Trimestre	*Septembre*	*1*	1. Équations et inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$	*9 h*	3,57 % (5/140)
		2			6,43 % (9/140)
			Régulation	***1 h***	7,14 % (10/140)
		3	2. Angles orientés et trigonométrie	*9 h*	10,71 % (15/140)
	Octobre	*4*			13,57 % (19/140)
			Régulation	***1 h***	14,28 % (20/140)
		5	3. Généralités sur les fonctions	*7 h*	17,86 % (25/140)
		6			19,28 % (27/140)
			Régulation	***1 h***	20 % (28/140)
			4. Limites et continuité	*9 h*	21,43 % (30/140)
		7			25 % (35/140)
	Novembre	*8*			26,43 % (37/140)
			Régulation	***1 h***	27,14 % (38/140)
Devoir de niveau			5. Dénombrement	*9 h*	28,57 % (40/140)
		9			32,14 % (45/140)
		10			33,57 % (47/140)
			Régulation	***1 h***	34,28 % (48/140)
			6. Dérivation	*11 h*	35,71 % (50/140)
		11			39,28 % (55/140)
2e Trimestre	*Décembre*	*12*			42,14 % (59/140)
			Régulation	***1 h***	42,85 % (60/140)
		13	7. Extension de la notion de limite	*9 h*	46,43 % (65/140)
		14			49,28 % (69/140)
			Régulation	***1 h***	50 % (70/140)
	Janvier	*15*	8. Barycentre	*7 h*	53,57 % (75/140)
		16			55 % (77/140)
			Régulation	***1 h***	55,71 % (78/140)
			9. Étude et représentation graphique d'une fonction	*15 h*	57,14 % (80/140)
		17			60,71 % (85/140)
		18			64,28 % (90/140)
	Février	*19*			66,43 % (93/140)
			Régulation	***1 h***	67,14 % (94/140)
Devoir de niveau			10. Probabilité	*7 h*	67,86 % (95/140)
		20			71,43 % (100/140)
		21			72,14 % (101/140)
			Régulation	***1 h***	72,86 % (102/140)
			11. Suites numériques	*9 h*	75 % (105/140)
3e Trimestre	*Mars*	*22*			78,57 % (110/140)
		23			79,28 % (111/140)
			Régulation	***1 h***	80 % (112/140)
			12. Composées de transformations du plan	*7 h*	82,14 % (115/140)
					85 % (119/140)
		24	***Régulation***	***1 h***	85,71 % (120/140)
		25	13. Statistique à une variable	*7 h*	89,28 % (125/140)
	Avril	*26*			90,71 % (127/140)
			Régulation	***1 h***	91,43 % (128/140)
			14. Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$	*3 h*	92,86 % (130/140)
Devoir de niveau		*27*			93,57 % (131/140)
			Régulation	***1 h***	94,28 % (132/140)
			15. Orthogonalité dans l'espace	*7 h*	96,43 % (135/140)
		28			99,28 % (139/140)
			Régulation	***1 h***	100 % (140/140)
	Mai	*29* / *30*	*Révisions*	*10 h*	

NB : La régulation consiste à mener des activités de rémédiation relativement aux contenus de la leçon.
À cette occasion, le professeur mènera également des activités permettant d'évaluer et de renforcer les acquis des élèves.
C'est le cumul du temps de régulation qui fait 1 h. Le professeur peut en faire des séances de travaux dirigés.

Remarque :

- ➩ Le respect de la progression est obligatoire afin de garantir l'achèvement du programme dans le temps imparti et de permettre l'organisation des devoirs de niveau.
- ➩ Les volumes horaires indiqués comprennent les cours, les exercices et les travaux dirigés (75%) et IE, DS et comptes rendus (25%)

M.E.N.A.
DIRECTION DE LA PÉDAGOGIE ET DE LA FORMATION CONTINUE
Coordination Nationale Disciplinaire de Mathématiques
Le Coordonnateur National

Jean-Marie KOFFI

Durée : 10 heures

Compétence 1 **Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**

Thème 1 **Calculs algébriques**

LEÇON 1 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS IR

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une élève en classe de première, décide de faire un jardin de tomates dans la grande cour familiale. Pour l'encourager, son père lui offre 20 mètres de grillage pour la clôture qu'elle décide d'utiliser entièrement. Elle décide de réaliser son jardin de forme rectangulaire comme l'indique la figure ci-dessous, laissant sans clôture un de ses côtés dans le sens de la longueur. Elle veut que l'aire du jardin soit de 48 m². Devant la difficulté à déterminer les dimensions de ce jardin, elle explique sa préoccupation à ses camarades de classe. Ensemble, ils décident de déterminer les dimensions du jardin.

B- CONTENU DE LA LECON

I- EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS IR

1- Discriminant d'un polynôme du second degré

a) Définition

On considère le polynôme du second degré P tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.
On appelle discriminant du polynôme P le nombre réel noté Δ défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.

<u>Exemple</u>

Soit le polynôme du second degré P tel que : $P(x) = 3x^2 + 2x - 4$.

Dans ce cas on a : $a = 3; b = 2 \; et \; c = -4$

Son discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 52$

b) Propriété

On considère le polynôme du second degré P tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, et Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux zéros distincts $x_1 \; et \; x_2$ tels que :
  $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \; et \; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  La forme factorisée de $P(x)$ est : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Si $\Delta = 0$, P admet un zéro double $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
  Dans ce cas la forme factorisée de $P(x)$ est : $P(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$, P n'admet pas de zéro et P n'est pas factorisable.

Exercice de fixation

Calcule les zéros éventuels des polynômes P, Q et R ci-dessous, puis factorise si possible chacun d'eux.

$P(x) = -2x^2 + x - 3$, $Q(x) = x^2 - 4x + 4 \; et \; R(x) = 2x^2 + 3x - 5$

Solution

- Pour le polynôme P : $\Delta = -23$, $\Delta < 0$ donc P n'admet pas de zéro.
  P n'est pas factorisable.
- Pour le polynôme Q : $\Delta = 0$, donc Q admet un zéro double x_0 et on a :
  $x_0 = \frac{4}{2\times 1} = 2$
  Q est factorisable et on a : $Q(x) = (x-2)^2$
- Pour le polynôme R : $\Delta = 49$, $\Delta > 0$ donc R admet deux zéros distincts $x_1 \; et \; x_2$ et on a :

$$x_1 = \frac{\mathbf{-3-\sqrt{49}}}{\mathbf{2\times 2}} = -\frac{5}{2} \; et \; x_2 = \frac{\mathbf{-3+\sqrt{49}}}{\mathbf{2\times 2}} = \mathbf{1}$$

R est factorisable et on a : $R(x) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-1)$

2-**<u>- Equations du second Degré</u>**

a) <u>Définition</u>

On appelle équation du second degré, toute équation de la forme : $x \in \mathbb{R},\; ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, et\ c$ sont des nombres réels et $a \neq 0$.

Exemple

L'équation : $x \in \mathbb{R}, -3x^2 + x + 4 = 0$ est une équation du second degré.

<u>b) Résolution d'une équation du second degré</u>

- **Résolution algébrique**
  Résoudre l'équation du second degré $x \in \mathbb{R},\; ax^2 + bx + c = 0$ revient à déterminer les zéros éventuels du polynôme du second degré P tel que : $P(x) = \; ax^2 + bx + c$.

Exercice de fixation

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $-x^2 + x + 2 = 0$.

Solution :

$\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 2 = 9$ $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes.

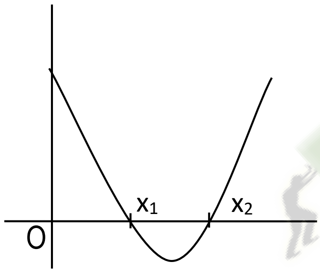
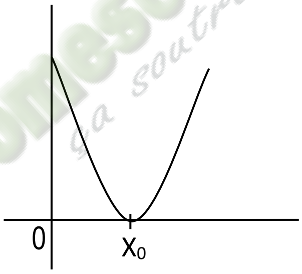
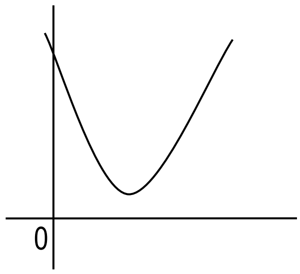
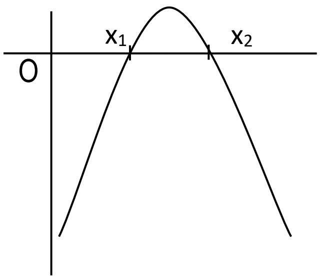
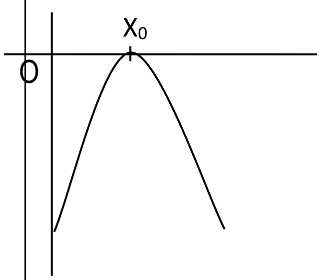
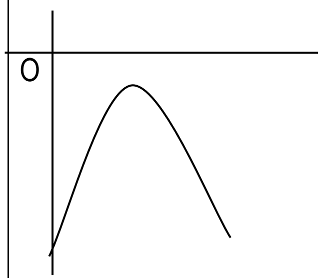
$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-1; 2\}$.

<u>Remarque</u>

Si l'équation du second degré(E) : $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = 0$ est telle que a et c sont de signes contraires, (le discriminant est positif dans ce cas), alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes.

- **Résolution graphique**

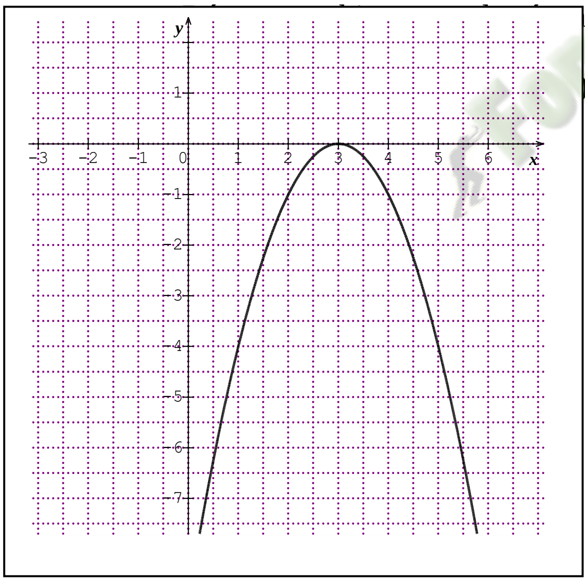
  Pour résoudre graphiquement l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = 0$, on peut utiliser le tableau récapitulatif suivant.

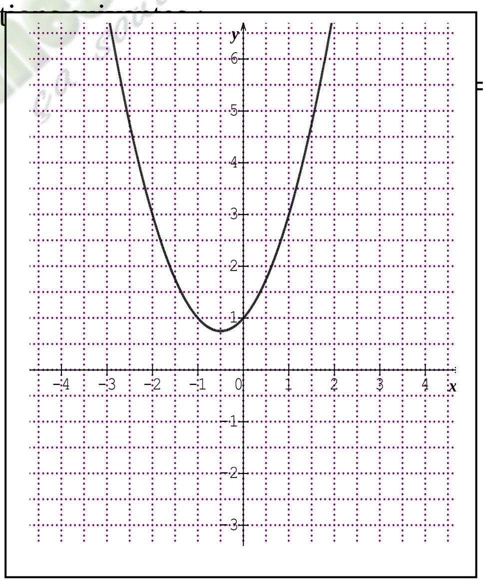
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	
			a> 0
			a< 0

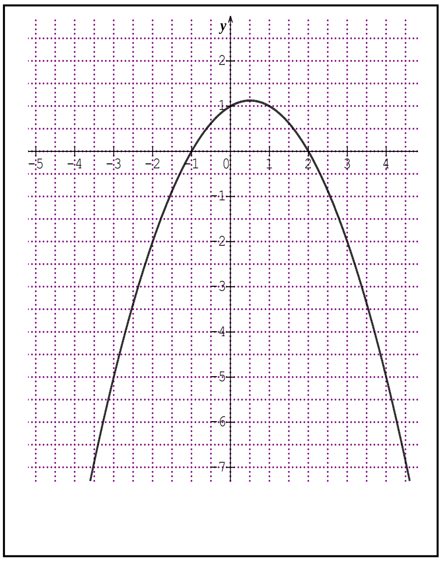
(E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2	(E) admet une solution unique x_0	(E) n'admet pas de solutions	

Exercice de fixation

Les courbes $(C_f), (C_g)$ et (C_h) ci-dessous sont les représentations graphiques respectives des fonctions polynômes du second degré f, g et h.







Résous graphiquement les équations du second degré suivantes :

a) $x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$; b) $x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0$; c) $x \in \mathbb{R}, h(x) = 0$.

Solution

a) La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 3. Par suite l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ est : $S = \{3\}$.

b) La courbe (C_g) ne coupe pas l'axe des abscisses. Par suite l'ensemble des solutions de l'équation $x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0$ est : $S = \emptyset$.

c) La courbe (C_h) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $-1\ et\ 2$. Par suite l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R},\ h(x) = 0$ est : $S = \{-1; 2\}$.

c) Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

Propriété 1

Si l'équation du second degré $x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ possède deux solutions $x_1\ et\ x_2$, (distinctes ou non) alors : $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$ et $\boldsymbol{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$.

Exercice de fixation

L'équation $(E): x \in \mathbb{R}, x^2 + 5x + 4 = 0$ admet deux solutions dont l'une est -1.

Détermine l'autre solution de (E).

Solution

Soit $x_1 = -1$ et x_2 l'autre solution de (E).

- On a : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$-1 + x_2 = -\frac{5}{1}$; donc : $x_2 = -5 + 1 = -4$

- On peut aussi utiliser la formule suivante : $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

  $-1 \times x_2 = \frac{4}{1}$; donc : $x_2 = -4$.

Propriété 2

Soit S et P deux nombres réels.
Si $S^2 - 4P \geq 0$, alors il existe deux nombres réels dont la somme est S et le produit est P.
Ces deux nombres sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

Point méthode

Pour déterminer deux nombres réels dont on connaît la somme Set le produit P, on peut procéder de la manière suivante :

- on vérifie que : $\boldsymbol{S^2 - 4P \geq 0}$ **;**
- on résout l'équation $\boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}$;
- les nombres réels recherchés sont les solutions de l'équation précédente.

Exercice de fixation

Détermine deux nombres réels s'ils existent dont leur somme est -3 et leur produit est -4

Solution

Soit $S = -3\ et\ P = -4$

On a : $S^2 - 4P = 9 + 16 = 25$; $S^2 - 4P \geq 0$.

Ces deux nombres existent et sont solutions de l'équation $x^2 + 3x - 4 = 0$

$\Delta = 25$, donc : $x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$; $x_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$

Ces deux nombres sont : $1\ et - 4$.

3- Inéquations du second degré

a) Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit P le polynôme du second degré définie par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b\ et\ c$ sont des nombres réels et $a \neq 0$ et Δ son discriminant.

- **Si** $\Delta > 0$, le polynôme P a deux zéros distincts $x_1\ et\ x_2$. (on suppose que $x_1 < x_2$)

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)$	$Signe\ de\ a$	0	$Signe\ de - a$	0	$Signe\ de\ a$

- **Si** $\Delta = 0$, alors le polynôme P admet un zéro double x_0 ; on obtient le tableau :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	$Signe\ de\ a$	0	$Signe\ de\ a$

- **Si** $\Delta < 0$, le polynôme n'admet pas de zéro ; on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$

$P(x)$	$Signe\ de\ a$

Exercice de fixation

Etudie le signe de chacun des polynômes suivants, connaissant leurs zéros éventuels :

1) $P(x) = 2x^2 - 8x + 6$, les zéros de P sont 1 et 3 ;
2) $Q(x) = -2x^2 - 8x - 11$, Q n'a pas de zéro ;
3) $R(x) = -x^2 + 10x - 25$, le zéro de R est 5.

Solution

1) $P(x) = 2x^2 - 8x + 6$, les zéros P sont 1 et 3, le discriminant Δ de P est positif ($\Delta > 0$).
   Le coefficient de x^2 est $a = 2$, $a > 0$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- Pour $x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$, $P(x) > 0$,
- Pour $x \in]1; 3[$, $P(x) < 0$
- Pour $x \in \{1; 3\}$, $P(x) = 0$.

2) $Q(x) = -2x^2 - 8x - 11$, Q n'a pas de zéro ; $\Delta < 0$.

Le coefficient a de x^2 est $a = -2$ et $a < 0$.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$Q(x)$	$-$	

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) < 0$

3) $R(x) = -x^2 + 10x - 25$, le zéro de R est 5. $\Delta = 0$
   Le coefficient a de x^2 est $a = -1$ et $a < 0$.
On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$R(x)$	$-$	0	$-$

- Pour $x \in \left]-\infty, 5\right[\cup \left]5, +\infty\right[$, $R(x) < 0$,
- Pour $x \in \{5\}$, $R(x) = 0$.

b) Définition d'une inéquation du second degré

Soit P un polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, et\ c$ sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Toute inéquation de l'un des types ci-dessous est appelée inéquation du second degré.

$x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$; $x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$; $x \in \mathbb{R}, P(x) < 0$; $x \in \mathbb{R}, P(x) \leq 0$.

Exemple

L'inéquation : $x \in \mathbb{R},\ -3x^2 + 5x - 2 > 0$ est une inéquation du second degré.

c) Résolution d'une inéquation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation de l'un des types ci-dessus revient à étudier le signe du polynôme$P(x)$, puis trouver l'intervalle ou les intervalles correspondants à l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Exercice de fixation

Résous dans $\mathbb{R}$, les inequations suivantes :

1) $2x^2 - 5x + 3 < 0$; 2) $-x^2 - 4x - 4 \geq 0$; 3) $x^2 + x + 2 > 0$

Solution

1) Résolution de l'inéquation $2x^2 - 5x + 3 < 0$
On considère le polynôme P tel que : $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$.
On calcule le discriminant du polynôme P.
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$
Le polynôme P admet deux zéros : $x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Pour $x \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$, $P(x) < 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left]1; \frac{3}{2}\right[$

2) Résolution de l'inéquation $-x^2 - 4x - 4 \geq 0$;

On considère le polynôme Q tel que : $Q(x) = -x^2 - 4x - 4$.
On calcule le discriminant du polynôme Q.
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 16 - 16 = 0$
Le polynôme Q admet un zéro double : $x_0 = \frac{4}{-2} = -2$
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$Q(x)$	$-$	0	$-$

Pour $x \in \{-2\}$, $Q(x) \geq 0$

$S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$

3) Résolution de l'inéquation $x^2 + x + 2 > 0$;

On considère le polynôme R tel que : $R(x) = x^2 + x + 2$.
On calcule le discriminant du polynôme R.
$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7$
Le polynôme R n'admet pas de zéro .
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$R(x)$	$+$	

Pour $x \in \mathbb{R}, R(x) > 0$

$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

II. EQUATIONS ET INEQUATIONS SE RAMENANT AU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{R}$

1-Equations bicarrées

a) Définition

On appelle équation bicarrée une équation du type : $x \in \mathbb{R}, ax^4 + bx^2 + c = 0,$ où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Exemple

L'équation : $x \in \mathbb{R}, -3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$ est une équation bicarrée.

b) Résolution d'une équation bicarrée

Point méthode

Pour résoudre une équation du type : $x \in \mathbb{R}, ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$. On peut procéder de la façon suivante :

-on pose : $X = x^2$;

- on résout l'équation du second degré : $aX^2 + bX + c = 0$;

- on résout, s'il y a lieu, les équations d'inconnue x du type $x^2 = X$.

(X étant solution de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$)

Exercice de fixation

Résous dans ℝ, l'équation suivante : $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

Solution :

Posons : $X = x^2$. L'équation devient : $2X^2 - 3X + 1 = 0$.

On a : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$, les solutions de l'équation $2X^2 - 3X + 1 = 0$ sont :

$X_1 = \frac{3-1}{2} = 1; X_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

On obtient : $x^2 = 1 \; ou \; x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \; ou \; x = 1 \; ou \; x = \sqrt{2} \; ou \; x = -\sqrt{2}$

$S_{IR} = \left\{1 \; ; -1 \; ; \sqrt{2} \; ; -\sqrt{2}\right\}$

2. Equations et inéquations irrationnelles

a) **Résolution d'une équation irrationnelle du type**: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{\boldsymbol{P(x)}} = \boldsymbol{Q(x)}$

Point méthode

Pour résoudre une équation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} = Q(x)$ on peut

Utiliser l'équivalence suivante :

$$\sqrt{P(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = (Q(x))^2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est l’ensemble des solutions du système.

Exercice de fixation

Résous dans $\mathbb{R}$, l’équation $\sqrt{x^2-1} = x+2$.

Solution

$$\sqrt{x^2-1} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2-1 = (x+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2;+\infty[\\ x^2-1 = x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2;+\infty[\\ x = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2;+\infty[\cap \left\{-\frac{5}{4}\right\}.$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\frac{5}{4}\right\}.$$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$.

b) Résolution d’une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{\boldsymbol{P(x)}} < Q(x)$.

<u>Point méthode</u>

Pour résoudre une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{\boldsymbol{P(x)}} < Q(x)$ on peut utiliser l’équivalence suivante :

$$\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) < (Q(x))^2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l’ensemble des solutions du système.

<u>Exercice de fixation</u>

Résous dans $\mathbb{R}$ l’inéquation $\sqrt{x^2+5x+3} < 2x+1$

Solution

$\sqrt{x^2+5x+3} < 2x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+3 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x^2+5x+3 < (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty; \frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right[\\ x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup \left]1; +\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup \left]1; +\infty\right[\end{cases} \quad \Leftrightarrow x \in \left]1; +\infty\right[$$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left]1; +\infty\right[$

c) Résolution d'une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{\boldsymbol{P(x)}} \geq \boldsymbol{Q(x)}$

<u>Point méthode</u>

Pour résoudre une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{\boldsymbol{P(x)}} \geq Q(x)$ on peut utiliser l'équivalence suivante :

$$\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq (Q(x))^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases} \right)$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des solutions du système.

<u>Exercice de fixation</u>

Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\sqrt{2-x} \geq x+4$

Solution

$$\sqrt{2-x} \geq x+4 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq (x+4)^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+4 \leq 0 \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in [-4; +\infty[\\ x \in [-7; -2] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in]-\infty; 2] \\ x \in]-\infty; -4] \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x \in [-4; -2] \text{ ou } x \in]-\infty; 2] \cap]-\infty; -4])$$

$$\Leftrightarrow x \in [-4; -2] \cup]-\infty; -4]$$

L'ensemble des solutions est : $]-\infty; -2]$.

C. SITUATION COMPLEXE

Lors d'une visite d'entreprise, les élèves d'une classe de 1ère scientifique ont été informés que dans cette entreprise, le coût de production de q objets et les frais d'entretien sont donnés en milliers de francs CFA par la formule $c(q) = 0{,}1q^2 + 10\,q + 1500$ et que chaque objet est vendu à 87.000 F. Un agent de cette entreprise affirme que pour maintenir le bénéfice supérieur ou égal à 12.832.500 F, le nombre d'objets q à produire doit être compris entre 310 et 460.
En utilisant leurs acquis mathématiques, les élèves doivent vérifier si l'agent a raison ou pas.
A l'aide d'une production argumentée, dis si l'agent a raison.

Corrigé

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser la leçon équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ pour cela nous allons :

- le bénéfice en fonction du nombre d'objets fabriqué

- déterminer le nombre d'objet pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 12.832.500 F

- puis conclure

Le bénéfice est : $87.000q - c(q)$ en milliers de FCFA

On résout donc l'inéquation : $87.000q - (0{,}1q^2 - 10q + 1500) \times 1000 \geq 12.832.500$

$\Leftrightarrow -0{,}1q^2 + 77q - 14332{,}5 \geq 0$

$\Leftrightarrow q^2 - 770q + 143325 \leq 0$

$$\Delta = (-770)^2 - 4 \times 143325 = 140^2 \text{ et } q_1 = \frac{770+140}{2} = 455 \text{ et } q_2 = \frac{770-140}{2} = 315$$

L'inéquation devient : $(q-315)(q-455) \leq 0$ d'où $q \in [315\,;\,455]$

Pour que le bénéfice soit supérieur à 12.832.500 FCFA il faut que le nombre d'objets q soit compris entre 315 et 455 or $[315; 455] \subset [310; 460]$.

Donc l'agent de l'entreprise a raison

D-EXERCICES

EXERCICES DE FIXATION

<u>Exercice 1</u>

Écris le numéro et la lettre correspondant à la bonne réponse

N°	Polynôme du 2nd degré	Discriminant		
		a	b	c

1.	$2x^2-3x+1$	**15**	**1**	**-15**
2.	x^2+x-2	**-7**	**3**	**9**
3.	$4x^2-5x+3$	**3**	**13**	**-23**
4.	$15x^2-27x+10$	**129**	**49**	**9**
5.	x^2-2x+1	**0**	**-1**	**5**

Corrigé

1- b 2-c 3-c 4- a 5-a

Exercices 2 **: Complète le tableau suivant :**

Polynôme P(x)	**Valeur du discriminant**	**Nombres de racines du polynôme**
$x^2 - 3x + 2$	**Δ =** …………	……………
$x^2 - x + 1$	**Δ =** …………	……………
$-5x^2 + 10x - 5$	**Δ =** …………	……………
$x^2 - 4x + 4$	**Δ =** …………	……………
$3x^2 - 4x + 2$	**Δ =** …………	……………
$2x^2 - x - 3$	**Δ =** …………	……………

corrigé

Polynôme P(x)	**Valeur du discriminant**	**Nombres de zéros du polynôme**
$x^2 - 3x + 2$	**Δ =** …1………	……2………
$x^2 - x + 1$	**Δ =**	……0………

	……-3……	
$-5x^2 +10x - 5$	**Δ =** …0………	……1………
$x^2 - 4x + 4$	**Δ =** ……0……	……1………
$3x^2 - 4x + 2$	**Δ =** …-8………	……0………
$2x^2 - x - 3$	**Δ =** …25………	……2………

Exercice 3

Par la méthode du discriminant, résous dans ℝ chacune des équations suivantes :

1) $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ 2) $9x^2 + 4x + 5 = 0$

= 3) $\sqrt{2}x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 1 = 0$

Corrigé

1) Δ =49 $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-1}{2} ; 3\right\}$

2) Δ = -164 $S_{\mathbb{R}} = \phi$ 3) Δ =3+2$\sqrt{2}$ $= (1 + \sqrt{2})^2$ $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{2}\right\}$

. Exercices de renforcement

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, détermine deux nombres réels s'ils existent, dont on connait la somme S et le produit P.

1) $S = 28 ; P = 195$

2) $S = 2\sqrt{5}$; $P = 3$

Corrigé

1) S^2-4P=4≥ 0 donc il existe deux nombres $x_1 = 12$ et $x_2 = 16$ solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

2) S^2-4P=8≥ 0 donc il existe deux nombres $x_1 = \sqrt{5}$ -$\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{5}$ +$\sqrt{2}$ solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

Exercice 5

Détermine deux entiers consécutifs dont la somme des carrés est 41.

Corrigé

Soit n un entier relatif on a $n^2+(n+1)^2=41$ on obtient n= -5 et n=4 donc on aura :

-5 et -4 OU 4 et 5

Exercice 6

Résous dans R les inéquations suivantes :

(I_1): $x^2 - 2x + 3 > 0$

(I_2): $-3x^2 + 2x + 5 \leq 0$

Corrigé

- **Résolvons (I_1): soit p(x)= $x^2 - 2x + 3$ étudions le signe de p**

$\Delta = -8$ donc pour tout x ∈IR P(x) >**0** **donc** Donc $S_{\mathbb{R}} = IR$

- **Résolvons (I_2): soit Q(x)= $x^2 - 2x + 3$ étudions le signe de Q**

$\Delta = 64$ donc $x_1 = \frac{5}{3}$ et $x_2 = -1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left[-1, \frac{5}{3}\right]$

Exercice 7

Résous dans IR l' équation suivante :$x^2 + 1 = \sqrt{5 - x^2}$

Corrigé

$x^2 + 1 = \sqrt{5 - x^2} \Leftrightarrow (x^2+1)^2=5-x^2$ car $x^2+5 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ posons $X=x^2$ l'équation devient :

$X^2+3X-4=0$;$\Delta = 25$; $X_1 = -4$; $X_2 = 1$ on a

$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \; et \; x = -1$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-1,1\}$$

Exercices d'approfondissement

<u>Exercice 8</u>

Détermine les nombres x et y tels que :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

<u>Corrigé</u>

$$\begin{cases} x + y = 2 \ \ (1) \\ x^2 + y^2 = 34 \ \ (2) \end{cases}$$

En élevant l'équation(1) au carré on obtient :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

En faisant la différence membre à membre on obtient :

xy= -15 on a

$$\begin{cases} x + y = 2 \ \ (s) \\ xy = -15 \ \ (p) \end{cases}$$

x et y sont solutions de x²-2x-15=0

Δ= 64 et donc $X_1 = 5$ et $X_2 = -3$ On a $x = 5 \; ou \; y = -3$ ou a $x = -5 \; ou \; y = 3$

<u>Exercice 9</u>

a) Vérifie que : **A** = $\sqrt{3}$ + **2** et **B =** - $\sqrt{3}$ + **2** sont inverses l'un de l'autre.

b) Vérifie que A + B = 4

c) Déduis-en (sans calcul mais en justifiant) les solutions de l'équation (E) : x² = 4x – 1

corrigé

a) A×B=($\sqrt{3}$ + 2)(- $\sqrt{3}$ + 2)= -3+4= 1 alors A et B sont inverses l'un de l'autre
b) A+B= $\sqrt{3}$ + 2 - $\sqrt{3}$ + 2= 4
c) A+B=4 et A×B=1 donc A et B sont solutions de l'équation x²-4x+1=0

<u>Exercice 10</u>

L'aire d'un jardin rectangulaire est égale à 360 m^2 .

Si on augmente sa longueur L de 6m et sa largeur I de 6m, alors l'aire est alors égale à 630m^2.

Détermine les dimensions de ce jardin.

Corrigé

$L\times \ell = 360$ et $(L+6)(\ell + 6) = 630 \Leftrightarrow L\times \ell+6(L+\ell)+ 36=630$

On a $L+\ell= 39$ Soit S=39 et P= 360 donc L et ℓ sont solutions de l'équation $x^2-39x+360=0$

$\Delta= 81$ et $L= 24$ et $\ell = 14$

Durée : 10 heures

Compétence 2 **Traiter des situations relatives à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements de données**

Thème 2 **Modélisation de phénomènes aléatoires**

Leçon 4 : **DENOMBREMENT**

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le cadre des compétitions de l'OISSU, un sponsor a remis un lot de maillots au Chef d'un établissement. Le professeur d'EPS de la classe de 1ère scientifique a fourni à ce Chef d'établissement les informations suivantes :
Sur les 25 élèves régulièrement inscrits en 1ère scientifique :
15 jouent au Handball ;
10 jouent au Basketball ;
5 pratiquent les deux sports.

Le premier lot de maillots parvenu n'étant pas suffisant pour tous les élèves, le Chef d'établissement décide de dénombrer les élèves de 1ère scientifique qui ne pratiquent aucun sport. Il se rend dans la classe afin de procéder au comptage. Malheureusement, ayant terminé leur cours du jour, la plupart des élèves des élèves sont rentrés chez eux.
Vu l'urgence et dans le souci d'avoir le nombre exact de maillots restants pour cette classe, il sollicite les élèves de la classe présents. Ceux-ci s'organisent pour répondre à la préoccupation du Chef d'établissement.

B-RESUME DE COURS

1. ENSEMBLE FINI

1.1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition

On appelle cardinal d'un ensemble fini E le nombre d'éléments de E.

On note : **Card (E).**

Exemple : A= {0 ; 1 ; 2 ; 3}

Card (A) = 4

1.2 Réunion et intersection de deux ensembles

Définitions

- Soit A et B deux ensembles.
  On appelle réunion de A et B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.
  On note $A \cup B$ et on lit : A union B.

- Soit A et B deux ensembles.
  On appelle intersection de A et B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.
  On note $A \cap B$ et on lit : A inter B.
  Exemple
  On donne A= {3 ; h ; * ; 5} et B= {8 ; * ; 1}

On a alors :$A \cup B = \{3; h; * ; 5; 8; 1\}$ et $A \cap B = \{*\}$

Propriété

Soit A et B deux ensembles finis.

Card$(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.

Exercice de fixation

On considère les ensembles E et F tels que $Card(E) = 30$, $Card(F) = 25$ et $Card(E \cap F) = 15$
Détermine $Card(E \cup F)$

Solution

$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$
On a : $Card(E \cup F) = 30 + 25 - 15 = 40$

1.3 Complémentaire d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E.
On appelle complémentaire ou partie complémentaire de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
On note : C_E^A ou $\overline{A}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple

Soit A et E deux ensembles tels que E = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} et

A= {0; 2; 4; 6; 8}.

le complémentaire de A dans E est :

$\overline{A} = C_E^A$ = {1; 3; 5; 7; 9}

Propriété 1

Soit E un ensemble et A une partie de E. On a :
$A \cup C_E^A$ = E
$A \cap C_E^A = \emptyset$

Exercice de fixation

On donne B et A deux parties d'un ensemble E tel que $B = \overline{A}$ et

A={2 ; 3 ; 6} et B={t ; 4 ; v ;y}.

Ecris l'ensemble E.

Solution

$A \cup B$= $A \cup C_E^A = E$ alors E= {2 ; 3 ; 4 ; 6 ; t ; v ; y}

Propriété 2

Soit A une partie d'un ensemble E et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.

On a : $card(E) = card(A) + card(\overline{A})$

Exercice de fixation

On donne B et A deux parties d'un ensemble E tel que $B = \overline{A}$ et

A={2 ; 3 ; 6} et $card(E) = 12$

Trouve le cardinal de l'ensemble B.

Solution

$card(E) = card(A) + card(B)$ donc $card(B) = card(E) - card(A) = 12 - 3 = 9$.

1.4 Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Soit A et B deux ensembles.
On appelle produit cartésien de A par B, l'ensemble des couples (a ; b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.
Notation : Le produit cartésien de A par B se note : $A \times B$

(et se lit : A croix B).

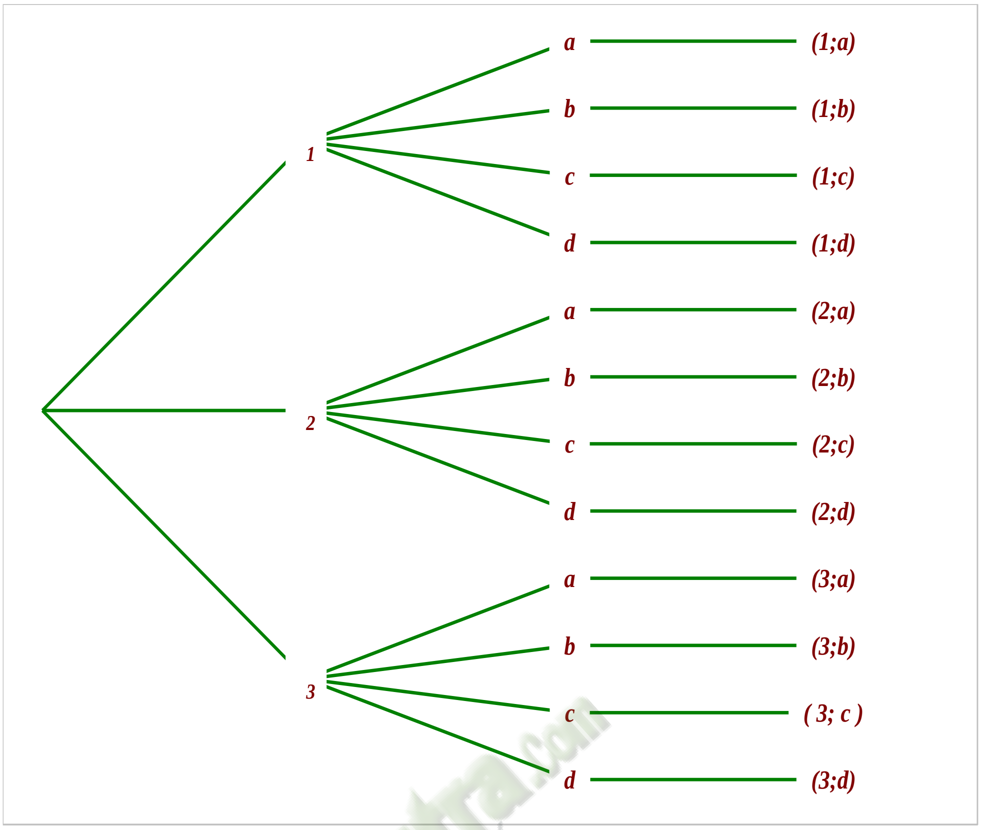
Exemple

Soit A et B des ensembles telle que A = {1 ; 2 ; 3} et B = {a ; b ; c ; d}

Les éléments du produit cartésien de A×B sont :

(On pourra utiliser un arbre de choix ou un tableau à double entrées)

- Arbre de choix



- Tableau à double entrées

B / A	a	b	c	d
1	(1 ;a)	(1 ;b)	(1 ;c)	(1 ;d)
2	(2 ;a)	(2 ;b)	(2 ;c)	(2 ;d)
3	(3 ;a)	(3 ;b)	(3 ;c)	(3 ;d)

AxB ={ (1 ; a); (1 ; b) ; (1 ; c) ; (1 ; d) ; (2 ; a) ; (2 ; b) ; (2 ; c) ; (2 ; d) ; (3 ; a) ; (3 ; b) ; (3 ; c) (3 ; d) }.

<u>Remarques</u>

- De la même manière, on définit A $\times B \times C$ l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ où $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$.
- A $\times A$ se note A^2, A $\times A \times A$ se note A^3.
- Soit n est un entier supérieur ou égal à 2

$A \times A \times \ldots \times A = A^n$ (A apparaît n fois dans le produit)
Les éléments de A^n sont n éléments x_1 ; $x_2; \ldots et\ x_n$ de A totalement ordonnés. On les note $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$.
x_1 est premier ; x_2 est deuxième ;… x_n est n-ième.
Lorsque $x_1 \neq x_2$ on a : $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n) \neq (x_2;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)$ en particulier : $(a; b) \neq (b; a)$ ainsi, dans un couple l'ordre des éléments est très important.

Propriété

Pour tous ensembles finis A et B, on a :

Card(A × B) = Card(A) × Card(B).

Exercice de fixation

Soit E et F deux ensembles tels que : card(A) = 5 et card(F) = 8.
Détermine Card(E × F).

Solution

Card(E × F) = 5 × 8 = 40

Conséquence

Pour tout ensemble fini A, pour tout entier naturel p non nul,

Card $(A^p) = [Card(A)]^p$.

Exercice de fixation

On lance au hasard trois fois de suite un dé parfait en notant à chaque lancer le numéro de la face supérieure.
Détermine le nombre de résultats possibles.

Solution

Posons E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, Card(E) = 6.
Chaque résultat est un élément de E^3.
Soit N le nombre résultats possibles.
$N = 6^3$
$= 216$

2. P-UPLETS, ARRANGEMENTS, PERMUTATIONS

2.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul.

On appelle p-uplet de E tout élément de l'ensemble E^P .

Cas particuliers
p = 2 : On parle de couple ;
p = 3 : On parle de triplet ;

p = 4 : On parle de quadruplet.

Exemple

On donne E= {0 ; 5 ; 6}.

(0 ;0 ; 1) ; (0 ; 5 ; 6) sont des 3-uplets ou triplets de l'ensemble E^3.

2.1 Propriété

Le nombre de p-uplet(s) d'un ensemble à n éléments est égal à n^P.

Remarque : Dans les p-uplets, un élément peut apparaitre plusieurs fois (répétition possible) et l'ordre dans lequel les éléments apparaissent est important.

Exercice de fixation

Détermine le nombre de numéros de téléphones de 8 chiffres puis de 10 chiffres qu'on peut former avec les nombres du système décimal.

Solution

Le système décimal étant composé des chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 soit 10 chiffres.

- Pour 8 chiffres : Chaque chiffre pouvant être répété, le nombre de numéros de téléphone de 8 chiffres est un 8-uplet dans 10 soit 10^8 numéros
- Pour 10 chiffres : Chaque chiffre pouvant être répété, le nombre de numéros de téléphone de 10 chiffres est un 10-uplet dans 10 soit 10^{10} numéros.

3 Arrangements

3.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel tel que : $1 \leq p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple

E = $\{a; 1; 4; b; 9; c\}$

$(1; a; 4; 9)$; $(b; c; 9; 1)$; $(9; a; 4; 1)$ sont trois arrangements de 4 éléments de E.

Par contre (b ; 4 ; b) ; (9; b ;9) sont des triplets qui ne sont pas des arrangements de E.

3.2 **Propriété**

n et p sont deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est égal à A_n^p.

$A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$

NB : Le nombre d'arrangement de p éléments dans un ensemble à n éléments est égal au produit de p nombres entiers naturels consécutifs dont le plus grand est n.

Remarque : Dans les arrangements, un élément ne peut apparaitre qu'au plus une fois (répétition impossible) et l'ordre dans lequel les éléments apparaissent est important.

Exercice de fixation

Calcule A_{10}^4 et A_7^5

Solution

$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 4$ (Produit de 4 nombres entiers naturels consécutifs dont le plus grand est 10)

$A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

(Produit de 5 nombres entiers naturels consécutifs dont le plus grand est 7)

Cas particulier :$A_n^1 = n$; Par convention $A_n^0 = 1$;

4 Permutation

4.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E.

Exemple

(0 ; 1 ; 6) ; (6 ;0 ;1) ; (0 ;6 ;1) sont des permutations de l'ensemble A = {0 ;1 ;6}.

4.2 Propriétés

Propriété1

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est A_n^n.

$A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 2 \times 1$

Exercice de fixation

Détermine le nombre de mots ayant un sens ou non, que l'on peut former à partie des lettres du nom KENDAL.

Solution

Il s'agit d'une permutation des 6 lettres du nom KENDAL. Le nombre de mot est donc : $A_6^6 = 720$

Notation factorielle

$n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 2 \times 1$ se note $n!$ On lit factorielle n.

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 2 \times 1$

Exemple : $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Propriété2

- Soit n et p deux nombres entiers naturels non nuls tels que : $1 \leq p \leq n$. On a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- $n! = A_n^n$

Exercice de fixation

Calcule le nombre de 4 arrangements dans 10.

Solution

On a : $A_{10}^4 = \frac{10\,!}{(10-4)\,!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

5 COMBINAISONS

5.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel tels que $p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E tout sous- ensemble de E ayant p éléments.

Exemple

Les ensembles {0 ; e ; u}, {v ; e} sont des combinaisons de l'ensemble

A= {0 ;1 ; e ; v ; u}

Remarque

L'ensemble {d ; a ; c} possède les mêmes éléments que l'ensemble {a ; d ; c}. Ils sont donc égaux.

Par conséquent, contrairement aux listes, l'ordre d'écriture des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

Cette absence d'importance de l'ordre est marquée par l'utilisation de l'écriture avec accolades, écriture réservées aux ensembles.

Par ailleurs, chaque élément ne peut apparaitre qu'au plus une fois

(répétition impossible).

5.2 Propriétés

Propriété 1

Le nombre de combinaisons de *p* éléments d'un ensemble à *n* éléments, noté

$C_n^p = \frac{A_n^p}{P!}$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exercice de fixation

Calcule le nombre de combinaisons de 5 dans 11.

Solution

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{5!\,(11-5)!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6!}$$

$$C_{11}^5 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 3 \times 7 = 231$$

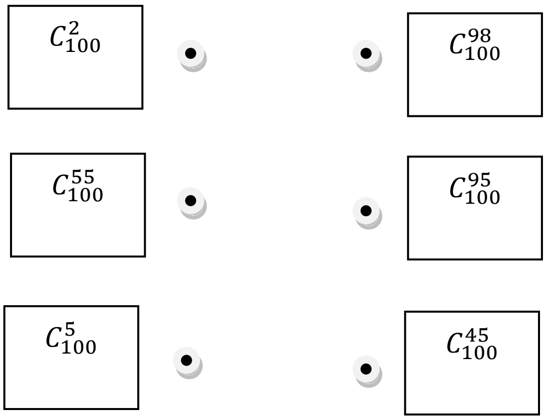
Propriété 2

Soit *n et p* deux nombres entiers naturels tels que : $p \leq n$.

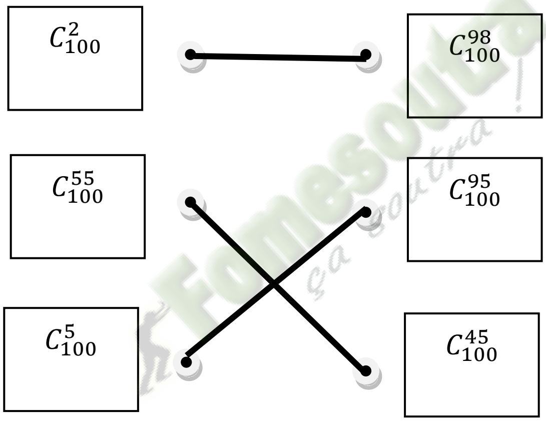
- On a: $C_n^{n-p} = C_n^P$.
- Si de plus 0 < p < n, alors on a : $C_{n-1}^{P-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$

Exercice de fixation

Relie ceux qui sont égaux entre eux.



Solution



5.3 Tirages simultanés, tirages successifs sans remise, tirages successifs avec remise

TIRAGES	SIGNIFICATION	MODELES
Simultanés de p parmi n $(0 \leq p \leq n)$	Tirer en même temps des p éléments dans n	C_n^P
Successifs sans remise de p parmi n $(0 \leq p \leq n)$	Tirer élément après élément sans remettre	A_n^p
Successifs sans remise de n parmi n	Tirer élément après élément sans remettre jusqu'à tirer les n éléments	n!
Successifs avec remise de p parmi n	Tirer élément le remettre et ainsi de suite	n^P

Vocabulaire

- Tirer au moins n éléments, c'est tirer un nombre plus grand ou égal à n. Cet ensemble a pour complémentaire « Tirer au plus $n-1$ »
- Tirer au plus n éléments, c'est tirer un nombre plus petit ou égal à n. Cet ensemble a pour complémentaire « Tirer au moins $n+1$ »

5.4 Binôme de Newton

Soit *a et b* deux nombres réels et n un nombre entier naturel non nul. On a :

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k b^{n-k}$.

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^p a^{p-1} b^p + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$

n =0   1

n=1   1 1

n=2   1   2   1

n=3   1   3   3   1

n=4   1   4   6   4   1

n=5   1   5 10 10 5   1

Les nombres 1 ; 2 ; 3 ; etc….. sont les coefficients C_n^p

Exemples

$(a+b)^1 = 1.a + 1.b$

$(a+b)^2 = 1.a^2 + 2.ab + 1.b^2$

$(3+b)^4 = 1 \times 3^4 + 4 \times 3^3 b^1 + 6 \times 3^2 b^2 + 4 \times 3^1 b^3 + 1 \times b^4$

$(a-b)^5 = 1.a^5 - 5.a^4 b^1 + 10.a^3 b^2 - 10.a^2 b^3 + 5.a^1 b^4 - 1.b^5$

C- SITUATION D'EVALUATION

Les élèves d'un lycée souhaitent participer à la kermesse organisée par une société de la place.

Pour gagner des tee-shirts, il faut miser la somme de 20.000F avant de faire le tirage de deux cartons dans une urne contenant quatre cartons numérotés de 1 à 4. Le nombre de résultats possibles de chaque tirage correspond au nombre de tee-shirts gagnés. Les organisateurs de ce jeu proposent alors trois tirages au choix :

- "Tirer simultanément deux cartons de cette urne " ;
- "Tirer successivement sans remise deux cartons de cette urne" ;
- "Tirer successivement avec remise deux cartons de cette urne".

Après être informés, les élèves décident de connaitre le tirage le plus avantageux

Mais ne savent pas comment procéder. Il te sollicite.

Elève de première D , utilise tes connaissances mathématiques pour déterminer le tirage le plus avantageux.

Proposition de réponse

Pour résoudre cet exercice, je vais utiliser les dénombrements.

Je vais déterminer le type la formule appropriée pour chacun des trois tirages.

Je vais calculer le nombre de tee-shirts que propose chaque formule.

Je vais comparer ses différents résultats entre eux afin de trouver le tirage le plus avantageux.

- "Tirer simultanément deux cartons de cette urne " est une combinaison de 2 dans 4.
- ''Tirer successivement sans remise deux cartons de cette urne '' est un arrangement de 2 dans 4.
- "Tirer successivement avec remise deux cartons de cette urne" est un 2-liste.

- Pour le tirage 1, le nombre de tee-shirts est : $C_4^2 = 6$
- Pour le tirage 2, le nombre de tee-shirts est: $A_4^2 = 12$
- Pour le tirage 3, le nombre de tee-shirts est : $4^2 = 16$

16>12 et 16>6 alors :

Le tirage successif avec remise de deux cartons de cette urne est le plus avantageux.

D- EXERCICES

Exercice 1

Soit $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Compléter par : ∈ ou ∉.

(0, 1) … … ..A x B ; (1, 3)… … … B x A ; (6, 0)… … .. B x A

(3,6) … … …. B x B ; (2, 3) … … .. A x B; (3,4) …….. B x A

Correction de l'exercice 1

$$(0; 1) \notin A \times B \; ; \quad (1; 3) \notin B \times A \; ; \quad (6; 0) \in B \times A \; ;$$

$$(3; 6) \in B \times B \; ; \quad (2; 3) \in A \times B \; ; \quad (3; 4) \in B \times A$$

Exercice 2

Soit A et B, deux ensembles non-vides. On donne Card (A x B) = 12

Complète le tableau suivant :

Card (A)	1	6		3	6	
Card (B)			4			12

Correction de l'exercice 2

Card (A)	1	6	**3**	3	6	**1**
Card (B)	**12**	**2**	4	**4**	**2**	12

Exercice 3

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul.

Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

N°	AFFIRMATION	Réponses
1	Tout p-uplet d'éléments d'un ensemble E est un élément de E^P	

2	(0, 1, 2, 3, 4) est un quadruplet d'éléments de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$	
3	(0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 0) est un élément de E^5 où E=$\{0, 1, 2\}$	
4	(0, 1, 0) est un couple d'éléments de $\{0, 1\}$	
5	L'ordre des éléments d'un p-uplet n'est pas important	
6	Un p-uplet peut contenir plusieurs fois le même élément.	

Correction de l'exercice 3

N°	AFFIRMATION	Réponses
1	Tout p-uplet d'éléments d'un ensemble E est un élément de E^P	Vrai
2	(0, 1, 2, 3, 4) est un quadruplet d'éléments de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$	Faux
3	(0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 0) est un élément de E^5 où E=$\{0, 1, 2\}$	Vrai
4	(0, 1, 0) est un couple d'éléments de $\{0, 1\}$	Faux
5	L'ordre des éléments d'un p-uplet n'est pas important	Faux
6	Un p-uplet peut contenir plusieurs fois le même élément.	Vrai

Exercice 4

Le code secret d'un téléphone portable est composé de 4 chiffres tapés sur un clavier numérique comportant les chiffres 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 et 9.

Détermine le nombre de codes possibles.

Correction de l'exercice 4

Méthode 1

Les chiffres sont en ordre avec la possibilité de répétition d'un même chiffre.
Soit N le nombre cherché.
N est le nombre de quadruplets d'un ensemble à 10 éléments.
D'où, $N = 10^4$
$= 10\,000$

Méthode 2

Pour le premier chiffre du code, on a 10 choix possibles;
Pour le 2ème chiffre du code, on a 10 choix possibles;
Pour le 3ème chiffre du code, on a 10 choix possibles;
Pour le 4ème chiffre du code, on a 10 choix possibles.
Soit N le nombre cherché.
$N = 10 \times 10 \times 10 \times 10$
$= 10^4$
$= 10\,000$

Exercice 5

Un parking comprend cinq (5) places disponibles. Trois automobilistes se présentent au parking et doivent stationner au hasard l'un après l'autre. Chaque véhicule ne peut occuper qu'une seule place.

Détermine le nombre de rangements possibles.

Correction de l'exercice 5

Méthode 1
Il s'agit de prendre 3 pistes parmi 5 sans prendre une même plus d'une fois.
D'où, un rangement des 3 véhicules est un arrangement de 3 parmi 5.
Soit N le nombre cherché.
$N = A_5^3$
$= 60$

Méthode 2
Pour le premier véhicule, on a 5 choix possibles ;
Pour le 2ème véhicule, on a 4 choix possibles ;
Pour le 3ème véhicule, on a 3 choix possibles ;
Soit N le nombre cherché.
$N = 5 \times 4 \times 3$
$= 60$

Exercice 6

Dans un jeu de 32 cartes, chaque joueur reçoit 8 cartes.

Détermine le nombre de ‘’main’’ que l’on peut obtenir à partir de 32 cartes.

Une ‘’main’’ est un sous ensemble de huit cartes prises permis 32.

Correction de l’exercice 6

Une ‘’main’’ est un sous ensemble de huit cartes prises permis 32, ici l’ordre n’est pas important. On a donc affaire à un tirage simultané.

Le nombre de ‘’main’’ possible est donc une combinaison de 8 parmi 32 :$C_{32}^{8} =$

Exercice 7

Une urne contient cinq (5) boules indiscernables au toucher et de couleurs différentes (noire, blanche, verte, rouge, bleue). On tire simultanément trois boules.

Détermine le nombre de tirage possibles.

Correction de l’exercice 7

On tire simultanément trois boules parmi 5, alors c’est une combinaison de 3 dans 5 :

$$C_5^3 = 10$$

Exercice 8

On dispose d’un jeu de 32 cartes. On en prend simultanément 8, ce qui constitue une « main ».

a) Combien y a-t-il de mains différentes ?

Dénombre les mains qui contiennent :

b) Exactement deux as.
c) Aucun as.
d) Au moins un as.
e) Au plus deux as.
f) Exactement deux cœurs et trois piques.
g) Exactement deux cœurs, trois piques et un trèfle.

Correction de l’exercice 8

Le modèle mathématique utilisé est la combinaison

a) Le nombre de mains est une combinaison de 8 cartes dans 32 soit
C_{32}^{8}= 10.518.300 mains.

b) Il y a 4 as. Donc le nombre de mains contenant exactement deux as est :
$C_4^2 \times C_{28}^6 = 6 \times 26 \times 23 \times 14 \times 9 \times 5 = 2.260.440$

c) Il n'y pas d'as, donc le tirage se fait dans 28 cartes soit C_{28}^{8}= 3.108.105 mains.

d) Le complémentaire, c'est aucun as, donc le nombre de mains est :
$C_{32}^{8} - C_{28}^{8}$ =10.518.300−3.108.105 = 7.410.195 mains

e) Soit zéro as, soit un as, soit deux as, donc le nombre de mains est

$$C_{28}^{8} + C_4^1 \times C_{28}^7 + C_4^2 \times C_{28}^6 = 3.108.105 + 4\times1.184.040 + 6\times376.740 =10.104.705$$

f) Il y a 8 cœurs et 8 piques, donc le nombre de mains est
$C_8^2 \times C_8^3 \times C_{16}^3$= 28×168×280 = 1.317.120

g) Il y a 8 cœurs, 8 piques et 8 trèfles, donc le nombre de mains est
$C_8^2 \times C_8^3 \times C_8^1 \times C_8^2$ = 28×56×8×28 = 351232.

Durée : 08 heures

Compétence 1 **Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**

Thème 2 **Fonctions**

Leçon 3: GENERALITES SUR LES FONCTIONS

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une Petite et Moyenne Entreprise (PME) emploie 6 personnes. Le Directeur est payé à 200 000 F CFA, le comptable à 150 000 F CFA et les 4 autres employés à 70.000 CFA chacun. Vu l'accroissement des activités de la PME, le propriétaire décide d'embaucher de nouveaux employés qu'il veut aussi payer à 70 000F chacun. La condition fixée par les bailleurs de fonds est que le salaire moyen de tous ceux qui travaillent doit être supérieur à 80 000 F CFA. Le propriétaire veut savoir le nombre de personnes qu'il peut embaucher sans changer les salaires. Il en parle à son fils qui est en classe de première scientifique. Ce dernier, soucieux d'aider son père, pose le problème à son professeur de mathématiques qui affirme qu'il est possible de résoudre ce problème

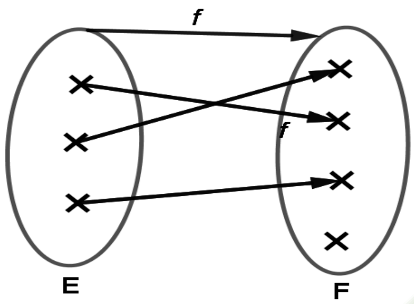
B- CONTENU DE LA COURS

I- Applications

1. Définition

Une application, d'un ensemble E dans un ensemble F (ou de E vers F) est une correspondance, qui à tout élément x de E associe un élément y de l'ensemble F. y est appelé l'image de x par f et se note : $f(x)$; x est un antécédent de y par f ; E est l'ensemble de départ, et F est l'ensemble d'arrivée.

Exemple



f est une application.

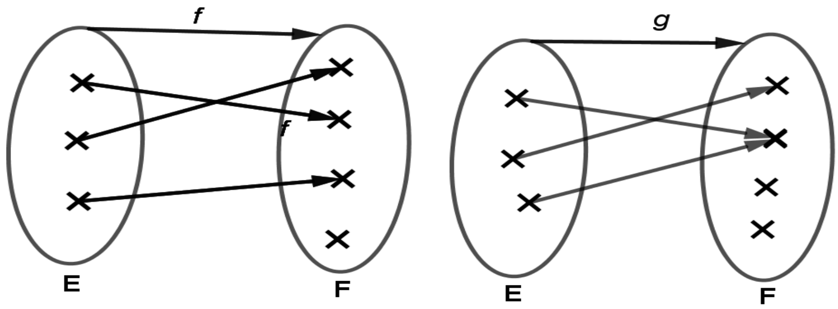
2 Applications injectives

Définition

Une application f, d'un ensemble E dans un ensemble F est une injection ou une application injective lorsque tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E.

Exemple et contre-exemple

On donne les applications f et g de E vers F



L'application f est injective, par contre l'application g n'est pas injective.

Point méthode

Pour démontrer qu'une application f, d'un ensemble E dans un ensemble F est injective, il suffit de justifier que pour tout $b \in F$,
l'équation : $x\ E,\ f(x) = b$ admet au plus une solution,
(c'est-à-dire soit 0 solution, soit une unique solution).

Exemple
L'application f de $[0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : f(x) = $\sqrt{x}$+1 est injective car :
Soit y un nombre réel,
f(x) = y $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}$+1 = y
$\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}$ = y-1
Si y≥1 alors x=$(y-1)^2$
Pour tout nombre réel y, l'équation f(x) = y, admet au plus une unique solution.

Propriété

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une injection si et seulement si pour tous $a\ et\ b$ éléments de E, $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$

Exercice de fixation
On considère l'application f de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : f(x) = $\frac{2x+1}{x-1}$.
Justifie que l'application f est injective.

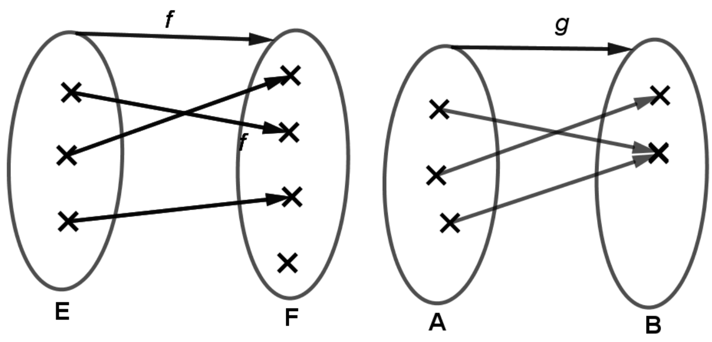
Solution
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
f(a) = f(b) $\Rightarrow$ $\frac{2a+1}{a-1} = \frac{2b+1}{b-1}$
$\Rightarrow$ 2ab - 2a + b-1 = 2ab +a - 2b - 1
$\Rightarrow$ 3a = 3b
$\Rightarrow$ a = b
D'où, f est injective.

3. Applications surjectives

Définition

Une application f, d'un ensemble E dans un ensemble F est une surjection ou une application surjective lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E.

Exemple et contre-exemple
Soit les applications f de E vers F et g de A vers B



L'application g est surjective et l'application f n'est pas surjective.

Point méthode

Pour démontrer qu'une application f, d'un ensemble E dans un ensemble F est surjective, il suffit de justifier que pour tout $b \in F$,
l'équation : $x \in E, f(x) = b$ admet au moins une solution dans E,
(c'est-à-dire soit une unique solution, soit plusieurs solutions).

Exercice de fixation
On considère l'application f de $\mathbb{R}$ vers $[1; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^2+1$.
Justifie que l'application f est surjective

Solution
Df = IR
Soit y un élément de $[1; +\infty[$,
$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y-1$
Or $y-1 \geq 0$ donc $x=\sqrt{y-1}$ ou $x=-\sqrt{y-1}$.

Tout nombre réel y, l'équation f(x) = y, admet au moins unique solution.
D'où, l'application f est surjective.

4. Applications bijectives

a) Définition

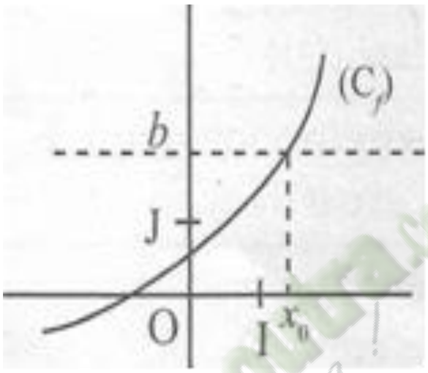
Une application f, d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection ou une application bijective lorsque tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E.

Exemple
Soit f l'application de IR vers IR définie par : $f(x) = x+1$.
L'application f est bijective.

Point méthode

- Pour démontrer qu'une application f, d'un ensemble E dans un ensemble F est bijective, il suffit de justifier que pour tout $b \in F$, l'équation : $x \in E,\ f(x) = b$ admet une unique solution dans E.
- Soit f une application d'un intervalle K dans un intervalle L et (Cf) sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

  Pour vérifier graphiquement que f est une bijection, il suffit de vérifier que toute droite d'équation : $y = b$ coupe (C_f) en un unique point dont l'abscisse x_0 appartient à K où $b \in f(K)$.



b) Propriété

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Exercice de fixation

On considère l'application f de]-∞ ; 0] vers [0 ; +∞[définie par : f(x) = x^2.
Justifie que l'application f est bijective.

Solution

Df =]-∞ ; 0]
Soit y un nombre réel de [0 ; +∞[
f(x) = y ⇒ x^2 = y
⇒ x = $-\sqrt{y}$ ou x = $\sqrt{y}$
x = $-\sqrt{y}$ car x ∈]-∞ ; 0]
Tout élément y de [0 ; +∞[admet un unique antécédent. Par conséquent, f est injective et surjective.
D'où, f est bijective.

5. Bijection réciproque d'une bijection

Définition

Soit f une bijection de E dans F. On appelle bijection réciproque de f, l'application de F dans E, notée f^{-1}qui, à tout élément de F associe son unique antécédent par f dans E.

Exemple

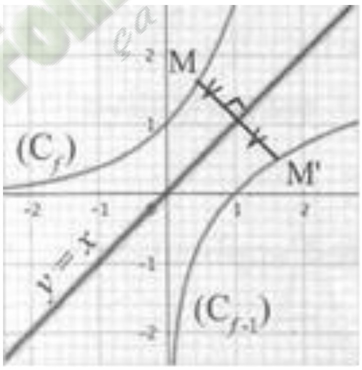
On considère l'application f de]-∞ ; 0] vers [0 ; +∞[définie par : f(x) = x^2. f est bijective, alors sa bijection réciproque est tel que :
f^{-1}: $[0;+\infty[\to]-\infty;0]$ et $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

Remarque

Si f est une bijection et f^{-1} sa bijection réciproque alors $f$est la bijection réciproque de f^{-1}.

<u>Propriété</u>

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les représentations graphiques d'une bijection et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation : *y = x.(la première bissectrice)*



<u>Exercice de fixation</u>

Soit l'application bijective $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto \sqrt{x} .$$

Représenter dans un même repère la courbe représentative de la fonction f et celle de sa bijection réciproque f^{-1}.

Proposition de réponse

Soit $b \in \mathbb{R}^+$tel que $f(x) = b$

$\sqrt{x} = b \ alors \ x = b^2$ .On a donc :

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto x^2$$

NB :

(Cf)*en rouge*, (Cf^{-1})*en orange et la premère bissectrice en noir.*

II – Compléments sur les Fonctions

1. Restriction d'une fonction

Définition

Soit f une fonction d'un ensemble E vers l'ensemble F et A une partie non vide de l'ensemble de définition de f. On appelle restriction de f à A l'application

$$g : A \longrightarrow F$$
$$x \mapsto f(x)$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x + 1, \; si\ x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x+3}, \; si\ x > 1 \end{cases}$.

La fonction g définie sur]-∞ ; 1] par : g(x) = x + 1 est la restriction de f sur $]-\infty; 1]$

La fonction h définie sur]1 ; +∞[par : h(x) = $\sqrt{x+3}$ est la restriction de f sur $]1; +\infty[$

2. Opérations sur les fonctions numériques

Définition

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$.
On note D l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $g(x) \neq 0, D_f$ et Dg les ensembles de définition respectifs de f et g. On a :

Fonction	**Ensemble de définition**	**Expression**
Somme $\boldsymbol{f + g}$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Produit $\boldsymbol{fg}$	$D_{fg} = D_f \cap D_g$	$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$
Quotient $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap D$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemple

On considère les fonctions numériques f et g définies par : f(x) = $\frac{x+1}{x-1}$ et g(x) = x-1.
On a :
Df = $\mathbb{R}$ \{1} et Dg = $\mathbb{R}$
D_{fg} = $\mathbb{R}$ \{1} $\cap$ $\mathbb{R}$ = $\mathbb{R}$ \{1}
Et pour tout x élément de $\mathbb{R}$ \{1},
(fg)(x) = f(x)g(x)
= $\frac{x+1}{x-1}$(x-1)
= x + 1

3. Comparaison de deux fonctions

Définitions et notations

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions données sur un intervalle I.

- f est inférieure ou égale à *g sur I*, lorsque pour tout élément *x* de I, $f(x) \leq g(x)$.
  On note : $f \leq g$ sur I.
- f est supérieure ou égale à *g sur I*, lorsque pour tout élément *x* de I, $f(x) \geq g(x)$.
  On note : $f \geq g$ sur I.

Point méthode

- Pour comparer deux fonctions f et g données par leurs formules explicites sur un intervalle I, on peut :

- calculer, pour tout $x \in I, f(x) - g(x)$;

- étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur I :

  - Si $f(x) - g(x) \leq 0$ alors $f \leq g$ sur I;
  - Si $f(x) - g(x) \geq 0$ alors $f \geq g$ sur I.

- Pour comparer deux fonctions f et g dont on connaît les représentations graphiques respectives (C_f) et (C_g) sur un intervalle I dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on peut procéder comme suit :
  - si (C_f) est au-dessous de (C_g) sur I, alors $f \leq$ g sur I ;
  - si (C_f) est au-dessus de (C_g) sur I, alors $f \geq$ g sur I.

Exercice de fixation

Justifie que : $\forall x \in IR$, $x^2 + 1 \geq 2x$.

Solution

Pour tout nombre réel x,

$x^2 + 1 - 2x = x^2 - 2x + 1$

$= (x - 1)^2$

$(x - 1)^2 \geq 0$

$x^2 + 1 - 2x \geq 0$

D'où, $\forall x \in IR$, $x^2 + 1 \geq 2x$

4. Composition de fonctions

- Soient E, F et G trois parties de $\mathbb{R}$, f une fonction de E vers F et g une fonction F vers G. On appelle composée de f par g la fonction de E vers G notée gof et définie par : $gof(x) = g[f(x)]$.
- D_f, D_g et D_{gof} sont les ensembles de définition respectifs de f,g et gof.
  $x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.

Exercice de fixation

Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

a) Détermine l'ensemble de définition E de gof.

b) Pour tout x élément de E, explicite gof(x).

Proposition de réponse

Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

a) $Df = \mathbb{R}^*$ et $Dg = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \in Dgof \Leftrightarrow x \neq 0$ et $\frac{1}{x^2} \neq 1$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x^2 \neq 1$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq -1$ et $x \neq 1$

$E = \mathbb{R}^*\{-1 ; 1\}$

b) Pour tout x élément de IR*\{-1 ; 1}

$$gof(x) = g(f(x))$$
$$= \frac{f(x)+2}{f(x)-1}$$
$$= \frac{\frac{1}{x^2}+2}{\frac{1}{x^2}-1}$$
$$= \frac{1+2x^2}{1-x^2}$$
$$gof(x) = -\frac{2x^2+1}{x^2-1}$$

Propriété

Si f est une bijection de E dans F et f^{-1} sa bijection réciproque, alors :

- $f^{-1} of$ est l'application identique de E.
- fof^{-1} est l'application identique de F.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "f^{-1}of"] & F \arrow[r, "f^{-1}"] & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend left, "fof^{-1}"] & E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

Exercice de fixation

On considère la bijection $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et sa bijection réciproque : $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$x \mapsto \sqrt{x}$ $\qquad\qquad$ $x \mapsto x^2$

Détermine fof^{-1} et $f^{-1}of$

Proposition de réponse

$fof^{-1}(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{x^2} = x$ et $f^{-1}of(x) = (f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$

5. Représentations graphiques de fonctions associées

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

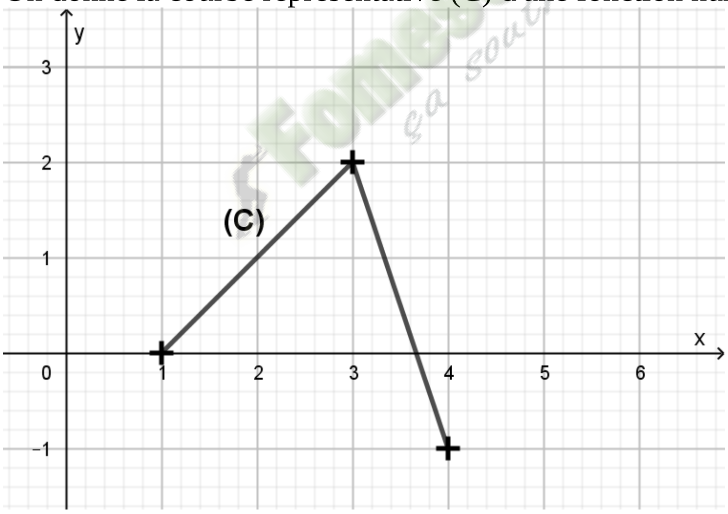
a et b sont deux nombres réels.

On note (C_f) la représentation graphique de la fonction f dans le repère (O, I, J).

Fonction g	**Représentation graphique (C_g) de g**
$x \mapsto f(x-a)$	(C_g) *est l'image de* (C_f) *par la translation* t *de vecteur* $a\overrightarrow{OI}$
$x \mapsto f(x)+b$	(C_g) est l'image de (C_f) par la translation t de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$
$x \mapsto f(x-a)+b$	(C_g) est l'image de (C_f) par la translation t de vecteur directeur $a\overrightarrow{OI} + b\overrightarrow{OJ}$
$x \mapsto f(-x)$	(C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale $S_{(OJ)}$ d'axe (OJ)
$x \mapsto -f(x)$	(C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale $S_{(OI)}$ d'axe (OI)
$x \mapsto -f(-x)$	(C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie centrale $S_{(O)}$ de centre O

Exercice de fixation

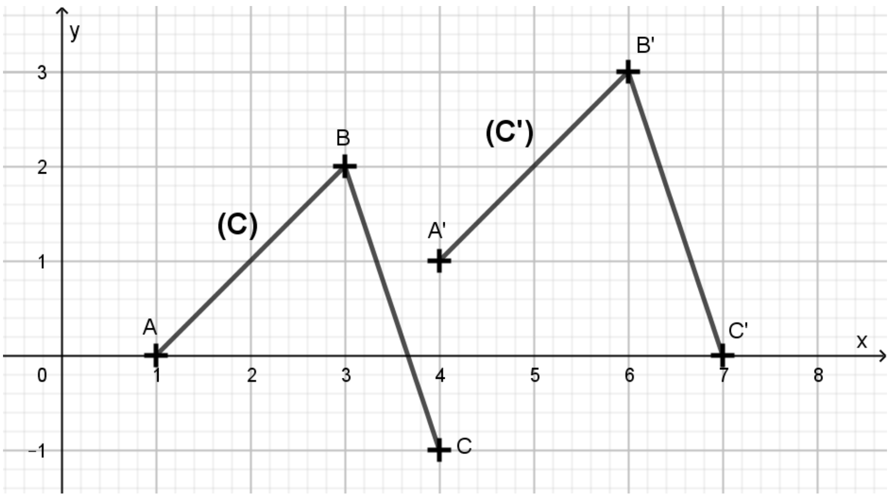
Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique le centimètre.
On donne la courbe représentative (C) d'une fonction numérique définie sur [1 ; 4].



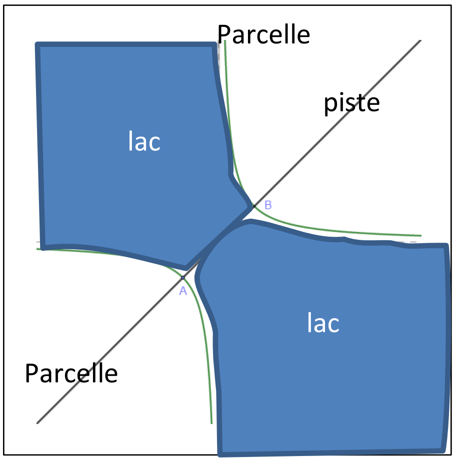
On considère la fonction numérique g définie par : g(x) = f(x-3)+1.
On note (C') la courbe représentative de g dans le plan.
Construis (C') à partir de (C).

Solution

(C') est l'image de (C) dans la translation t de vecteur $\vec{u}(3\ ;\ 1)$.
t(A) = A', t(B) = B' et t(C) = C'



C- SITUATION D'EVALUATION



Un monsieur cède une parcelle de terrain cultivable à ses deux enfants avec les mêmes conditions d'accessibilité et de superficie. Un grand lac traverse la parcelle. Un pont$[AB]$et une piste (AB) permettent de traverser aisément la parcelle. Les contours du lac s'apparent à la courbe de la fonction inverse et la piste s'identifie à la première bissectrice dans un repère orthonormé naturel comme l'indique la figure ci-contre. Les deux parts sont séparées par la piste. Le plus jeune pense qu'il est lésé et menace de ne plus s'adresser à son père. Ayant assisté à cette scène, élève de 1ère C et amis du jeune fils, rassure le en utilisant tes connaissances mathématiques.

Proposition de solution

Pour rassurer le jeune fils, nous allons utiliser la leçon généralités sur les fonctions.
Nous utiliserons les notions de :
- de restriction ;
- d'application ;
- composée de fonctions ;
- bijection et sa réciproque
- de représentation de la bijection réciproque.

Les contours du lac s'apparent à la courbe de la fonction inverse. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $(x) = \frac{1}{x}$. Son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On considère la restriction g de f définie de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc g est une application.

Composons g par g.

$g \circ g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Donc $\circ\, g = id_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Par suite g est une application bijective et sa bijection réciproque est g.

Symétrie de $(\mathcal{C}_g)$

$g^{-1} = g$ donc $\left(\mathcal{C}_{g^{-1}}\right) = (\mathcal{C}_g)$ et (AB) est la première bissectrice de repère orthonormé dans lequel est représenté $(\mathcal{C}_g)$. Donc $s_{(AB)}\left(\mathcal{C}_g\right) = (\mathcal{C}_g)$.

La parcelle cultivable cédée par le père présente une parfaite symétrie par rapport à la piste (AB).

En conséquence les parts situées des deux côtés de la piste ont la même aire.

D-EXERCICES

Exercice 1

On considère l'application f de]-∞ ; 1] vers [-4 ; +∞[définie par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

a) Justifie que f est une bijection.

b) Explicite la bijection réciproque f^{-1} de f.

Correction de l'exercice 1

On considère l'application f de]-∞ ; 1] vers [-4 ; +∞[définie par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

a) Soit y un élément de [-4 ; +∞[et x un élément de]-∞ ; 1].

$f(x) = y \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = y$

$\Rightarrow (x-1)^2 - 4 = y$

$\Rightarrow (x-1)^2 = y + 4$

$\Rightarrow x - 1 = -\sqrt{y+4}$ ou $x - 1 = \sqrt{y+4}$

$x \leq 1 \Rightarrow x - 1 \leq 0$ d'où

$x - 1 = -\sqrt{y+4}$

$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{y+4}$

Tout élément y de [-4 ; +∞[admet un unique antécédent : $1 - \sqrt{y+4}$.

Par conséquent, f est une bijection.

b) De ce qui précède :

$\forall y \in [-4 ; +\infty[,\ f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y+4}$

Ou encore, $\forall x \in [-4 ; +\infty[,\ f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+4}$

Exercice 2

On considère l'application f de IR\{-2} vers IR définie par : $f(x) = \frac{5x+3}{x+2}$.

a) L'application f est-elle injective ? (Justifie ta réponse).

b) L'application f est-elle surjective ? (Justifie ta réponse).

c) Justifie que f n'est pas bijective.

Correction de l'exercice 2

On considère l'application f de IR\{-2} vers IR définie par : $f(x) = \frac{5x+3}{x+2}$.

a) Soit y un élément de IR,

$x \in IR$, $f(x) = y \Rightarrow \frac{5x+3}{x+2} = y$

$\Rightarrow x(-y + 5) = 2y - 3$

$\Rightarrow x = -\frac{2y-3}{y-5}$

5 n'a pas d'antécédent.
Et, tout nombre réel distinct de 5 a un unique antécédent.
D'où, f est injective.

b) 5 n'a pas d'antécédent.
D'où, f n'est pas surjective.

f n'est pas surjective.
Donc, f n'est pas bijective.

Exercice 3

Soit f l'application de IR vers $]-\infty; 1]$ définie par : $f(x) = 1 - x^2$.

Démontre que f est surjective.

Correction de l'exercice 3

Soit $b \in]-\infty; 1]$ tel que $f(x) = b \Longrightarrow 1 - x^2 = b$ alors $x = \sqrt{1-b}$ *ou* $x = -\sqrt{1-b}$ par conséquent f est une application surjective.

Exercice 4

Soit g l'application de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ vers $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ qui à x associe $\frac{2x-3}{x-1}$.

1. Démontre que g est une bijection.
2. Détermine g^{-1}.

Correction de l'exercice 4

1. Soit $b \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ tel que $f(x) = b$
   $\frac{2x-3}{x-1} = b$ on a donc $x = \frac{3-b}{2-b}$. Par conséquent, g est une bijection.
2. On en déduire que :
   $g^{-1}: \mathbb{R}\backslash\{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   $x \mapsto \frac{3-x}{2-x}$

Exercice 5

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :$h(x) = 3 - |2 - x|$.

Détermine la restriction f de h à l'intervalle $]-\infty; 2]$.

Correction de l'exercice 5

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2 - x$	$+$	0	$-$
$\lvert 2 - x \rvert$	$2 - x$	0	$x - 2$

Alors la restriction *de* h à l'intervalle $]-\infty; 2]$ est $f(x) = x + 1$.

<u>Exercice 6</u>

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

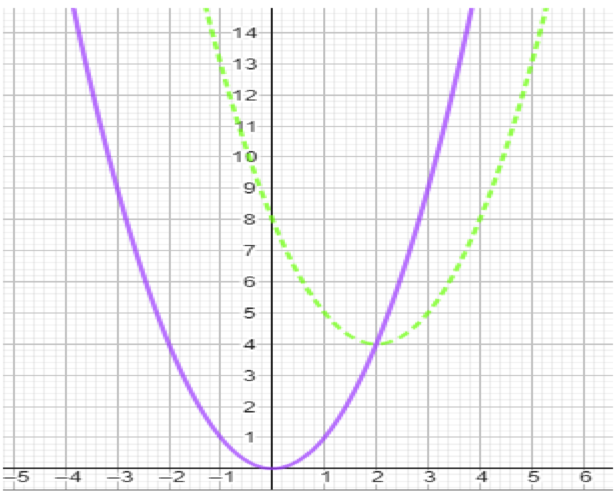
$f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 - 4x + 8$.

1. Démontre que, pour tout nombre réel x, $g(x) = f(x-2) + 4$.
2. On désigne par (C_f) et (C_g) les représentations graphiques de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé.
   a) Détermine la transformation du plan t telle que $(C_f) = (C_g)$.
   b) Construis (C_f) et (C_g) dans le même repère.

Correction de l'exercice 6

1. $f(x-2) + 4 = (x-2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 8$
2. a) On a $g(x) = f(x-2) + 4$ alors (Cg) est l'image de (Cf) par la translation t de vecteur directeur $2\overrightarrow{OI} + 4\overrightarrow{OJ}$.

   b)



Exercice 7

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2 - x^2 + 2x$.

1. Justifie que pour tout nombre réel x, $f(x) = 3 - (x-1)^2$.

2. Justifie que pour tout nombre réel x, $f(x) \leq 3$.

Correction de l'exercice 7

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 2$
   $= -(x^2 - 2x - 2)$
   $= -(x^2 - 2x + 1 - 1 - 2)$
   $= -(x^2 - 2x + 1 - 3)$
   $= -[(x-1)^2 - 3]$
   $= 3 - (x-1)^2$
2. $f(x) - 3 = 3 - (x-1)^2 - 3 = -(x-1)^2$

Pour tout nombre réel x, $(x-1)^2 \geq 0$ $donc$ $-(x-1)^2 \leq 0$ alors $f(x) - 3 \leq 3 \Rightarrow f(x) \leq 3$.

Exercice 8

f et g sont deux fonctions de IR vers IR définies respectivement par :

$f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}}$.

1) Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :
   $f + g; f - g\ ; f \times g$ et $\frac{f}{g}$.
2) Détermine $(f+g)(x); (f-g)(x)$ et $(\frac{f}{g})(x)$.

Exercice 9

f et g sont deux fonctions de R vers R définies respectivement par :

$f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Détermine$D_f; D_{fog}$ et D_{gof}.
b) Détermine$fog(x)$et $gof(x)$.

Exercice 1

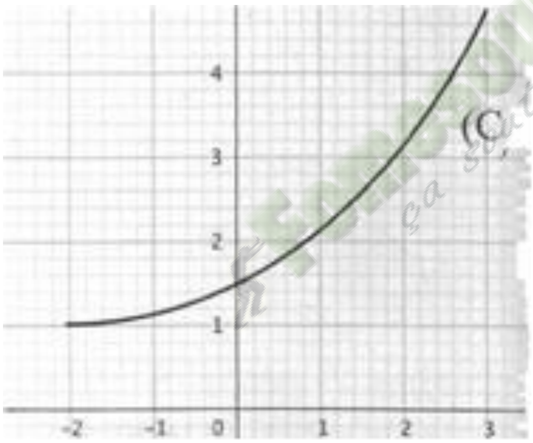
Soit f la fonction de IR^* vers IR définie par : $f(x) = x^2$.

Démontre que f est injective.

Exercice 11

La courbe (C_f) ci-contre est la représentation graphique d'une application bijective f dans un repère orthonormé.

Construis $(C_{f^{-1}})$, la représentation graphique de f^{-1} dans le même repère.



Durée : 8 heures

Compétence 1	**Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**
Thème 2	**Fonctions**

Leçon 4 : LIMITES ET CONTINUITE

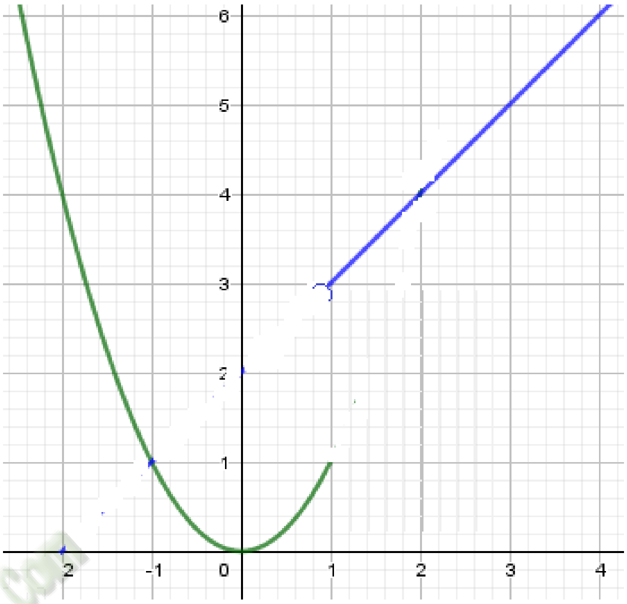
A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant une séance de cours en informatique qu'organise le club scientifique, les élèves d'une classe de première D apprennent à tracer des courbes à l'aide de l'ordinateur de leur salle multimédias.

Ainsi pour la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 si\ x \in\ ]-\infty, 1] \\ f(x) = x + 2\ si\ x \in\ ]1, +\infty[\end{cases}$

Ils observent sur l'écran de leur ordinateur une figure morcelée en deux parties au point d'abscisse 1 $(voir\ figure)$. Cherchant à expliquer cette particularité de la courbe, un professeur de mathématiques encadreur du club scientifique les renvoie aux notions de continuité d'une fonction.

Désireux de comprendre le comportement de la courbe de la fonction f en 1, les élèves décident d'approfondir les connaissances sur les fonctions.



B--RESUME DE COURS

I. LIMITES

1- Notion de limites

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.
On constate par le calcul que lorsque l'on choisit « $\boldsymbol{x}$ **suffisamment proche de 2** », on obtient « $f(\boldsymbol{x})$ **suffisamment proche de 4** ».
On dit alors que : $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers 4** , lorsque $\boldsymbol{x}$ **tend vers 2**
ou bien : **la limite, lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers 2, de $\boldsymbol{f(x)}$ égale 4.**
On dit aussi que : **4 est la limite de $\boldsymbol{f}$ en 2**.
On note : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$
A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et par Faux si elle est incorrecte
1) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 8$ 2) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 5$ 3) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 9$

Corrigé

1) Faux 2) Faux 3) Vrai

2- Notion de continuité

Propriété

Soit f une fonction définie en a.
Si f admet une limite en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 + \frac{4}{x}$
A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et par Faux si elle est incorrecte.
1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

2)La fonction f admet une limite en -2

3) La fonction f admet une limite en 0

Corrigé

1) Faux 2) Vrai 3) Faux

Définition

Soit f une fonction et a un élément de l'ensemble de définition de f
On dit que la fonction f est **continue en a** lorsque f admet une limite en a.
(c'est – à – dire : $\boldsymbol{f}$ **est continue en $\boldsymbol{a}$** signifie que $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$).

Exemple

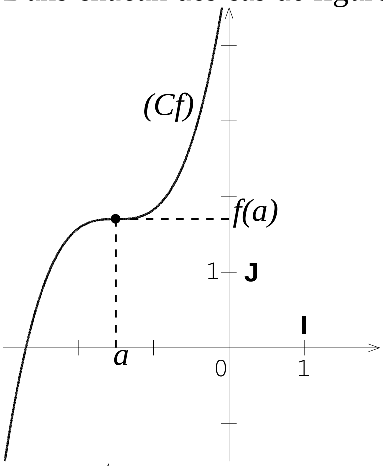
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$
- La fonction f est continue en 2 car f est définie en 2 et $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)} = \frac{5}{2}$.
- La fonction f n'est pas continue en 0 car f n'est pas défini en 0

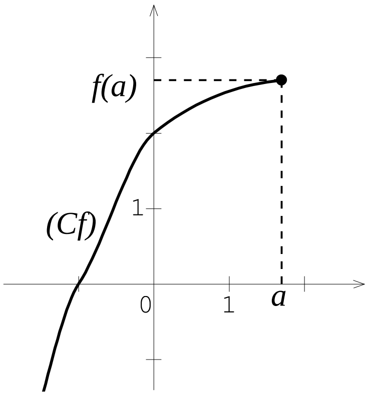
Remarque

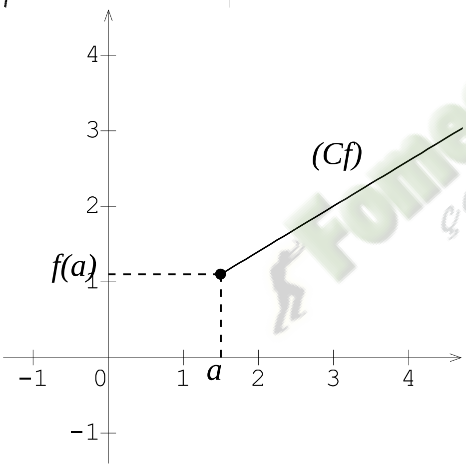
- On démontre et on admet que : lorsqu'une fonction admet une limite en a, cette limite est unique.
- Pour qu'une fonction f soit continue en a, il est nécessaire qu'elle soit définie en a.

Illustration graphique de la continuité d'une fonction en un point

Dans chacun des cas de figures ci – dessous, (*Cf*) est la représentation graphique d'une fonction *f*.







Dans chacun de ces trois cas, la fonction f est continue en a.

Exercice de fixation

Sur chacune des figures ci – dessous, la courbe donnée est la représentation graphique d'une fonction f et a désigne un nombre réel. Indique dans quels cas la fonction f est continue en a.

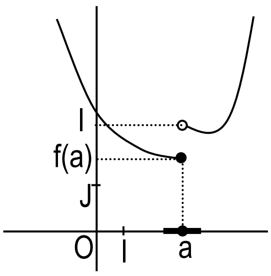


Figure 1

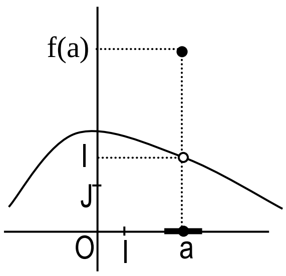


Figure 2

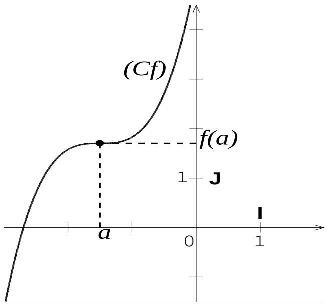


Figure 3

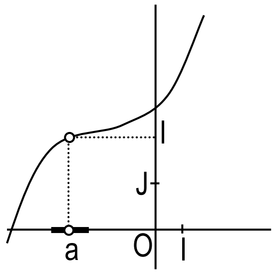


Figure 4

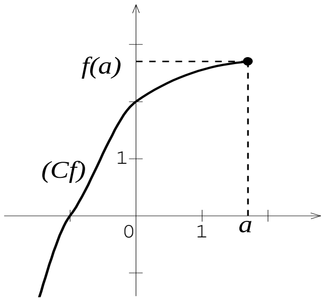


Figure 5

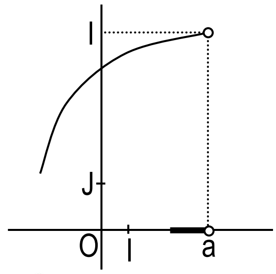


Figure 6

Corrigé

Les figures qui présentent une courbe de fonction continue en a sont Figure 3 et Figure 5

3- Continuité en a de fonctions élémentaires

a) Propriété 1

Les fonctions élémentaires définies respectivement par : $x \longmapsto c$ $(c \in \mathbb{R})$; $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \longmapsto \frac{1}{x}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto |x|$; $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont continues en tout élément a de leurs ensembles de définition respectifs.

Exercice de fixation

Complète les égalités suivantes :

$\lim\limits_{x\to 15} cosx = \cdots$; $\lim\limits_{x\to -2} (3) = \cdots$; $\lim\limits_{x\to -3} (x^2) = \cdots$; $\lim\limits_{x\to 49} (\sqrt{x}) = \cdots$; $\lim\limits_{x\to -1,8} |x| = \cdots$; $\lim\limits_{x\to 3} (\frac{1}{x}) = \cdots$

Corrigé

Comme les fonctions élémentaires sont continues en tout élément de leur ensemble de définition alors :

$\lim\limits_{x\to 15} cosx = \cos(15)$; $\lim\limits_{x\to -2} (3) = 3$; $\lim\limits_{x\to -3} (x^2) = (-3)^2 = 9$; $\lim\limits_{x\to 49} (\sqrt{x}) = \sqrt{49} = 7$;

$\lim\limits_{x\to -1,8} |x| = |-1,8| = 1,8$; $\lim\limits_{x\to 3} (\frac{1}{x}) = \frac{1}{3}$.

b) Propriété 2

f et g étant deux fonctions continues en a :

- Les fonctions $f + g,\ fg,\ kf\ (k \in \mathbb{R})\ et\ |f|$ sont continues en a.
- Si g ne s'annule pas en a alors les fonctions $\frac{1}{g}\ \ et\ \ \frac{f}{g}$ sont continues en a.
- Si f est positive alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Exercice de fixation

Soit f et g deux fonctions continues en 5

Justifie que chacune des fonctions $f^2;\ \ f - g\ \ et\ \ 4f$ est continue en 5.

Corrigé

- f est continue en 5 donc la fonction $f \times f = f^2$ est continue en 5.
- g est continue en 5 donc $-g$ est continue en 5.

  f et $-g$ sont continues en 5 donc $f + (-g) = f - g$ est continue en 5
- f étant continue en 5 alors $4f$ est aussi continue en 5

Remarque

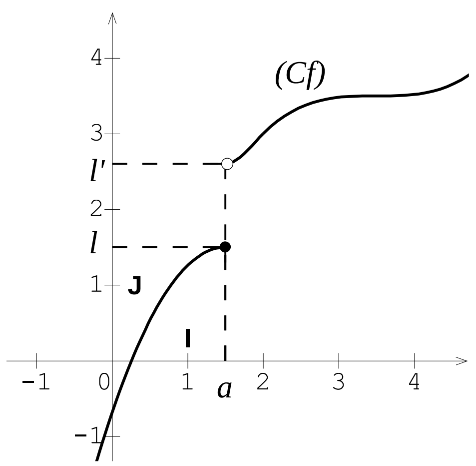
Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires, est continue en tout élément de son ensemble de définition.

II. LIMITE A GAUCHE – LIMITE A DROITE

1) Présentation

Sur la figure ci – dessous, le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J), (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f et a est un nombre réel.

- Lorsqu'on choisit x dans $]-\infty; a[$ et suffisamment proche de a alors $f(x)$ est très proche de l. On dit alors que l est la limite de f à gauche en a et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = l$
- Lorsqu'on choisit x dans $]a; +\infty[$ et suffisamment proche de a alors $f(x)$ est très proche de l'. On dit alors que l' est la limite de f à droite en a et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l'$



Exercice de fixation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \ si\ x \in]-\infty; 3] \\ f(x) = 2x + 1\ si\ x \in]3; +\infty[\end{cases}$

A chacune des affirmations ci – dessous, réponds par VRAI si elle est correcte sinon réponds par FAUX.

1) La limite de f à gauche en 3 se note $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x)$

2) La limite de f à droite en 3 est égale à 9

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = 7$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = 7$

Corrigé

1) FAUX 2) FAUX 3) VRAI 4) FAUX

2) Propriétés

a et l sont des nombres réels, f est une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a sauf éventuellement en a.

- f n'est pas définie en a.

La fonction f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite égales à l.

$(\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l)$

- f est définie en a.

La fonction f admet une limite en a si et seulement si f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(a)$.

$(\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a))$

Exercice de fixation

f est une fonction définie sur $\mathbb{R} \backslash \{4\}$ telle que : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 7$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 7$, $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = -2$,

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = -2$ et $f(1) = 3$.

A chacune des affirmations ci – dessous, réponds par VRAI si elle est correcte sinon réponds par FAUX.

1) f admet une limite en 1

2) f admet une limite en 4

Corrigé

1) FAUX

2) VRAI

Remarque

f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

III- CALCUL DE LIMITES

1- Opérations sur les limites

Propriétés

$a, l\ et\ l'$ désignent des nombres réels.

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ alors, $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = l + l'$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ alors, $\lim_{x \to a} (f.g)(x) = ll'$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'(l' \neq 0)$ alors, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$

Exercice de fixation

$f\ et\ g$ sont deux fonctions telles que : $\lim_{x \to 3} f(x) = -5$ et $\lim_{x \to 3} g(x) = 2$.

Calcule chacune des limites suivantes : $\lim_{x \to 3}(f + g)(x)$; $\lim_{x \to 3}(f.g)(x)$ et $\lim_{x \to 3}(\frac{f}{g})(x)$

Corrigé

Comme $\lim_{x \to 3} f(x) = -5$ et $\lim_{x \to 3} g(x) = 2$ alors :

- $\lim_{x \to 3}(f + g)(x) = -5 + 2 = -3$
- $\lim_{x \to 3}(f.g)(x) = -5 \times 2 = -10$
- $\lim_{x \to 3}(\frac{f}{g})(x) = \frac{-5}{2}$

remarque

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro, est une fonction continue en a.

C- - SITUATION COMPLEXE

Deux frères, élèves d'une classe de 1ère C, souhaitent communiquer avec leur oncle résidant à Paris en France.
Ils se rendent dans une cabine téléphonique et le gérant de la cabine leur propose le contrat suivant :

- 150F CFA la minute de 0 à 5 minutes de communication,
- 750F CFA forfaitaire entre 5 minutes et 10 minutes de communication,
- 100F CFA la minute, de 10minutes à 30 minutes de communication,
- Au – delà de 30 minutes, 3000F CFA de forfait plus 50F CFA pour chaque minute de communication supplémentaire.

Dans leurs échanges l'ainé affirme que le contrat proposé par le gérant de la cabine traduit une fonction continue en 5 et discontinue en 30 mais son petit frère soutient que cette fonction est continue en 5 et en 30. Ils ont présenté cette situation à leurs camarades de classe qui n'ont pu départager. En tant qu'élève de 1ère C, ils te sollicitent. A l'aide d'une production argumentée, en utilisant tes connaissances mathématiques, indique lequel des deux frères a raison.

Corrigé

Pour départager les deux frères nous allons utiliser la leçon limite et continuité pour cela nous allons :

- Déterminer la fonction f qui a chaque minute de communication associe son coût
- Etudier la continuité de f en 5 et en 30
- départager les deux frères

Soit x la durée en minutes de communication et f la fonction qui à x associe le coût de la communication en franc CFA. On a :

$$\begin{cases} Si \quad x\in[0;5] \quad alors \quad f(x)=150x \\ Si \quad x\in]5;10[\quad alors \quad f(x)=750 \\ Si \quad x\in[10;30] \quad alors \quad f(x)=100x \\ Si \quad x\in]30;+\infty[\quad alors \quad f(x)=3000+50(x-30) \end{cases}$$

- On a : $f(5)=150\times 5=750$, $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}}(150x)=750$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}}(750)=750$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} f(x)=f(5)$ alors f est continue en 5 (1)

- On a : $f(30)=100\times 30=3000$, $\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ <}}(100x)=3000$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ >}}(3000+50(x-30))=3000$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ >}} f(x)=f(30)$ alors f est continue en 30 (2)

(1) et (2) impliquent que f est continue en 5 et en 30 donc le petit frère a raison.

D- EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{7}\right)$; $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x}{\cos x}$

Corrigé

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(2-\sqrt{7}) = 2-\sqrt{7}$;

$\lim\limits_{x\to -5}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\right) = \dfrac{(-5)^2-2\times(-5)+3}{-5-2} = -\dfrac{38}{7}$;

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{6})}{\cos(-\frac{\pi}{6})} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 2

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 + 3$.
Etudie la continuité de f en 2.

Corrigé

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.
f est définie en 2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+3) = 2^2+3 = 7$ et $f(2) = 2^2+3 = 7$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ donc f est continue en 2.

Exercices de renforcement

Exercice 3

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \text{Pour } x < 1,\ f(x) = 3x-1 \\ \text{Pour } x \geq 1, f(x) = \frac{x-1}{x+1} \end{cases}$

1) Calcule la limite de f à gauche en 1 et la limite de f à droite en 1.
2) Justifie que la fonction f n'admet pas limite en 1.

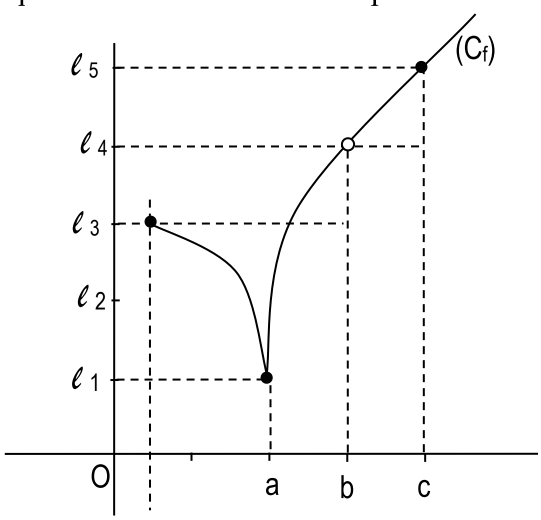
Corrigé

1) On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}}(3x-1) = 3\times 1-1 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$

2) On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 1.

Exercice 4

(C_f) est la représentation graphique d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.



A l'aide de ce graphique:

a) donne la limite de f en a, en b et en c.
b) dis si f est continue en a, en b et en c.

Corrigé

a) La limite de f en a est ℓ_1 ; la limite de f en b est ℓ_4 et la limite de f en c est ℓ_5.
b) f est continue en a et en c. f n'est pas continue en b car f n'est pas définie en b.

Exercices d'approfondissement

Exercice 5

Calcule chacune des limites suivantes.

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$; $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$

Corrigé

On a :

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \to 4}(\sqrt{x}+2) = \sqrt{4}+2 = 4$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to -2}(x-2) = -2-2 = -4$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{x-1}{x+2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Etudie la continuité de f en a.

1) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$; $a = 1$
2) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{x+3}$; $a = -3$
3) $\begin{cases} \text{Pour } x \neq -2, \ f(x) = \dfrac{-x^2-x+2}{x+2} \\ f(-2) = 0 \end{cases}$; $a = -2$

Corrigé

1) f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier f est continue en 1
2) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ donc f ne peut être continue en -3
3) f est définie sur $\mathbb{R}$.

On a : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-x^2-x+2}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-(x+2)(x-1)}{(x+2)} = \lim\limits_{x \to -2}(-x+1) = 3$

Comme $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$ alors f n'est pas continue en -2 .

Durée : 06 heures

Compétence 2	**Traiter des situations relatives à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements de données**
Thème 2	**Modélisation de phénomènes aléatoires**

Leçon 5 : PROBABILITE

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

M. Konan a oublié le code secret de son compte bancaire. Après deux essaies infructueux, il appelle son épouse pour de l'aide. Celle-ci lui communique les quatre chiffres mais pas dans le bon ordre !

Ne disposant que d'un dernier essai, il joue la carte de la prudence en envisageant tous les cas et en quantifiant la chance qu'il a, de retirer l'argent, à l'ultime essai.

B –CONTENU DE LA LECON

I. VOCABULAIRES ET PROPRIETES

1- Vocabulaires et définition

a) Expérience aléatoire

Une expérience ou une épreuve aléatoire est une expérience dont on ne connait pas d'avance le résultat mais dont on connait les résultats possibles.

Exemples

1.

Expérience 1 : Le lancer d'un dé cubique parfaitement équilibré.
Expérience 2 : Le lancer d'une pièce de monnaie.

2.

Soit les expériences suivantes :

1. *Trois bouteilles de limonade : Fanta, Coca et Sprite sont posées sur une table.*
   « Choisir la bouteille de Fanta » n'est pas une expérience aléatoire.
2. *''Cinq boules numérotées de 1 à 5 sont placées dans un carton non transparent. Les boules ont la même taille et sont indiscernables au toucher.*
   « Choisir une boule parmi elles » est une expérience aléatoire.

b) Univers-Eventualité

$\mathcal{E}$ est une expérience aléatoire donnant un nombre fini de résultats possibles.
Chaque résultat possibles est appelé **éventualité.**
L'ensemble de ces résultats possibles est appelé **univers** des éventualités de $\mathcal{E}$.
On le note **U** ou **Ω.**

Exemple

EXPERIENCE ALEATOIRE	EVENTUALITES	UNIVERS
Lancer d'un dé	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6	$\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Lancer d'une pièce	Pile (P) ou face (F)	$\{P; F\}$

Exemple2

En considérant le lancer de deux pièces de monnaie. Tous les résultats possibles (on dit qu'on écrit l'univers en extension) sont :

Soit U l'univers de toutes les éventualités.

$U = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$

c) Evènement

Définition

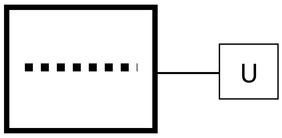
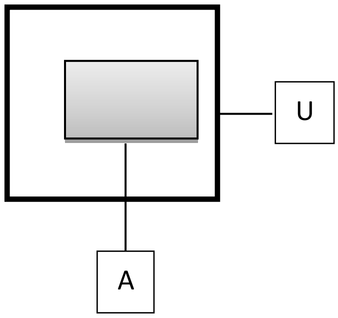
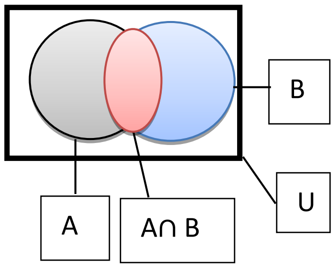
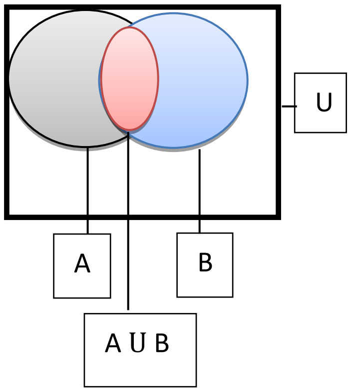
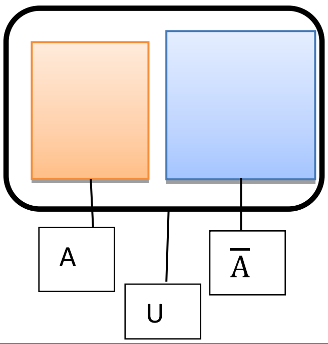
U étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, on appelle **évènement** de U, toute partie de U.

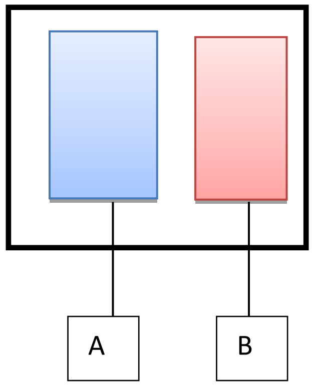
- Lorsque cette partie de U est un singleton, on l'appelle **événement élémentaire** ;
- Lorsque cette partie de U est l'ensemble vide, on l'appelle **évènement impossible** ;
- Lorsque cette partie de U est l'ensemble U, on l'appelle **évènement certain**.

  Exemple
- Lors d'un lancer de pièce de monnaie, le résultat obtenu est un évènement élémentaire :''soit pile'' ou ''face''.

- Lors d'un lancer de Dé (parfaitement équilibré et dont les faces sont numéroté de 1 à 6), obtenir le chiffre 7 est un événement impossible.
- Pour une femme qui porte une grossesse, ''accouché d'un garçon ou d'une fille'' est un événement certain.

TABLEAU RECAPITULATIF

	Langage des ensembles	**Langage des probabilités**	**Illustrations**
Univers	U est un ensemble $e_i \in U$	U est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. e_i est une éventualité	
Evènement	$A \subset U$ $e_i \in A$ $\{e_i\} \subset U$ $A = \emptyset$ $A = U$	A est un évènement . e_i réalise l'évènement A. $\{e_i\}$ est un évènement élémentaire. L'événement A est impossible. L'évènement A est certain.	
Intersection de deux évènements	$A \cap B$ $e_i \in A \cap B$	L'évènement (A et B) e_i réalise l'évènement A et e_i réalise l'évènement B.	
Réunion de deux évènements	$A \cup B$ $e_i \in A \ \cup B$	L'évènement (A ou B) e_i réalise l'évènement A ou e_i réalise l'événement B.	
Contraire d'un évènement	$\overline{A} = C_U^A \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup \overline{A} = U \\ A \cap \overline{A} = \emptyset \end{cases}$ $e_i \in A \ \Leftrightarrow \ e_i \notin \ \overline{A}$	$\overline{A}$ est l'évènement contraire de A. A et $\overline{A}$ sont des évènements disjoints. e_i réalise l'évènement A si et seulement si, e_i ne réalise pas l'évènement $\overline{A}$.	

Evènement incompatibles	$A \cap B = \emptyset$ A et B sont disjoints	L'évènement (A et B) est impossible. L'évènement A et l'évènement B sont incompatibles	

Exemple

Lors du lancer de deux pièces de monnaie, deux évènements de cette expérience sont :
A : « obtenir Pile (P) au 1^er lancer » : on a $A = \{(P,P),(P,F)\}$

B : « obtenir Pile au 2^nd lancer » : on a $B = \{(F,P),(P,P)\}$

II. NOTION DE PROBABILITE

1. Probabilité d'un évènement

Définition

Soit **U** l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.
Une probabilité P sur l'univers U est une application de l'ensemble des parties de U vers l'intervalle [0;1], qui à chaque évènement A, associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de A et qui vérifie les conditions suivantes :

- $P(U) = 1$
- Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple

Lors d'un lancer de dé non truqué, l'univers est : $\Omega = \{1\,;2;3;4;\ 5;\ 6\}$.

Soit A l'événement' 'avoir un nombre pair''. A= {2 ; 4 ; 6} ;

$$p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriétés

- Pour tout évènement A, on a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si A est évènement tel que :A $= \{e_1\,;e_2\,;\dots.e_k\}$
  alors P(A) $= P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \cdots + P(\{e_k\})$.
- Pour tous évènements A et B, P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B).

Exercice de fixation

On lance un dé truqué tel que :
$P(\{1\})=\frac{1}{16}\ ;P(\{2\})=\frac{3}{16};P(\{3\}) = \frac{5}{16};P(\{4\}) = \frac{2}{16};P(\{5\}) = \frac{3}{16}$ et $P(\{6\}) = \frac{2}{16}$.
Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « le résultat du lancer est un nombre pair »

B : « le résultat est un nombre multiple de 3 ».
C : « le résultat est un nombre différent de 6 ».

<u>Proposition de réponse</u>

1) *A* = $\{2; 4; 6\}$. *Donc P(A)* $=P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{3+2+2}{16} = \frac{7}{16}$. $P(A) = \frac{7}{16}$
2) *B* = $\{3; 6\}$. *Donc P(B)* = $P(\{3\}) + P(\{6\}) = \frac{5+2}{16} = \frac{7}{16}$. $P(B) = \frac{7}{16}$
3) *C* = $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. *Donc P(C)* = $P(\{1\}) + P(\{2\}) + \cdots + P(\{5\}) = \frac{1+3+5+2+3}{16} = \frac{14}{16}$

P(C) = $\frac{7}{8}$.

<u>Equiprobabilité</u>

Définition

Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et P une probabilité définie sur U.
On dit que cette expérience aléatoire a lieu dans un cadre d'équiprobabilité des évènements élémentaires lorsque tous les évènements élémentaires de U ont la même probabilité.

<u>Exemple</u>

Un lancer de dé non truqué est une situation d'équiprobabilité. Toutes les faces du dé ont la même chance d'apparaître lors du lancer.

<u>Propriété1</u>
Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $card(U) = n$.
Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement élémentaire est $\frac{1}{n}$.

Exercice de fixation

On lance un dé parfaitement équilibré. Détermine la probabilité d'apparition de chaque face.

Proposition de réponse
Soit Ω l'univers, on a $\Omega = \{1; 2; 3; 4;\ 5; 6\}$ et donc $card(\Omega) = 6$. Le dé étant équilibré, toutes les faces ont la même chance d'apparition, on a donc :$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$

<u>Propriété2</u>

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est

$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{nombre de cas favorable à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$.
$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{CardA}}{\mathrm{CardU}}$.

<u>Exercice de fixation</u>
On lance un dé équilibré à 6 faces.
1) Justifie que nous sommes en présence d'une situation d'équiprobabilité.

2) Détermine la probabilité de l'évènement E suivant « on obtient un multiple de 3 »

Proposition de réponse

1) *Le fait que le dé soit équilibré, toutes les faces ont la même probabilité d'apparaitre. On est donc dans une situation d'équiprobabilité.*
2) *Soit Ω l'univers des éventualités. On a :* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. $Card((\Omega)) = 6$
Ensuite $E = \{3; 6\}$ *; on a* $card(E) = 2$ *donc* $P(E) = \frac{2}{6}$ *soit* $P(E) = \frac{1}{3}$

Remarque

Dans certains exercices de probabilité, il est dit clairement que l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée. Cependant, voici quelques mots clés qui permettent de reconnaître une situation d'équiprobabilité.

- « Equitable »
- « Equilibré »
- « Parfait »
- « Uniforme »
- « Même chance »
- « Indiscernable au toucher »

Remarque 2

Il n'est pas évident d'écrire un évènement en extension avant de déterminer son cardinal. Les formules de dénombrement permettent de déterminer directement le cardinal d'un évènement.

C- SITUATION COMPLEXE

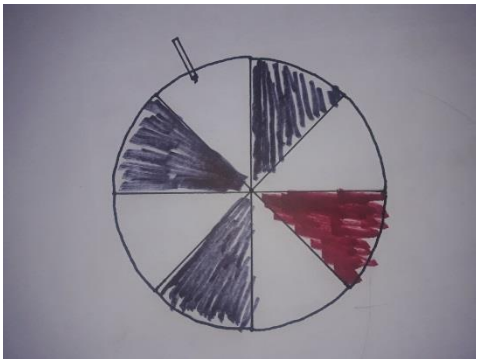
Une loterie consiste à tourner une roue partagée en huit secteurs. On admet que chaque secteur a autant de chance d'être désignée. (Voir figure ci-dessous)

Lorsque le secteur désigné par la flèche est :

- Le blanc, on perd 2 000FCFA (c'est-à-dire qu'on remet 2 000FCFA aux organisateurs) ;
- Le noir, on gagne 1 000FCFA (c'est-à-dire qu'on reçoit 1 000FCFA des organisateurs) ;
- Le rouge, on gagne 2 000FCFA (c'est-à-dire qu'on reçoit 2 000FCFA des organisateurs) ;

Un groupe d'élèves qui assistent à cette loterie affirment qu'un joueur a autant de chance de gagner que de perdre.

Par des calculs appropriés dis si ce groupe a raison ou pas.



Proposition de réponse

Pour répondre à cette question, je vais utiliser les probabilités.

Je vais définir chaque événement en fonction de l'apparition de couleur.

Je vais définir l'événement « gagner » et l'événement « perdre ».

Je vais déterminer la probabilité de perdre et celle de gagner.

Je vais comparer ses deux probabilités afin de justifier si le groupe a raison ou pas.

Soient les évènements suivants :

B : « on perd 2 000FCFA » ; card (B)=4

N : « on gagne 1 000FCFA » ; card (N)=3

R : « on gagne 2 000FCFA » card (R) 1

G : « on gagne »

Le contraire de G est l'évènement B.

On a $G = N \cup R$ *avec R et N incompatibles.*

Soit Ω *l'univers des possibilités. On a* $card(\Omega) = 8$

$P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{4}{8} = 0{,}5$; $P(N) = \frac{card(N)}{card(\Omega)} = \frac{3}{8} = 0{,}375$; $P(R) = \frac{card(R)}{card(\Omega)} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. *Donc* $P(G) = P(N) + P(R)$; $P(G) = 0{,}375 + 0{,}125 = 0{,}5$.

On a : $P(B) = P(G)$. *Les deux évènements ont la même probabilité c'est-à-dire qu'il y a autant de chance de gagner que de perde.*

Le groupe d'élèves a donc raison.

D-EXERCICES

Exercice 1

Soit A et B deux évènements quelconques.
Complete par vrai ou faux les propositions suivantes

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ……
- $P(A \cup \bar{A}) = 1$ ……
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ ……

Correction de l'exercice 1

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ …*FAUX*…
- $P(A \cup \bar{A}) = 1$ …*VRAI*…
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ …*VRAI*…

Exercice 2

Soient deux évènements A et B tels que $P(A) = 0.33$; $P(B) = 0{,}15$ et $P(A \cap B) = 0{,}09$.
Détermine $P(A \cup B)$.

Correction de l'exercice 2

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. *On a donc :* $P(A \cup B) = 0{,}33 + 0{,}15 - 0{,}09 = 0{,}39$

Exercice 3

Une coopérative comprend sept hommes et trois femmes. Le couple Zamblé fait également partie de cette coopérative.
La coopérative choisit au hasard une délégation de quatre membres pour la représenter à une cérémonie.

1) Détermine le nombre de délégations possibles.
2) Calcule la probabilité que le couple Zamblé en fasse partie.
3) Calcule la probabilité que monsieur ou madame fasse partie de la délégation.

Correction de l'exercice 3

1) *Une délégation est ici un sous-ensemble de quatre membres pris parmi les 10 membres de la coopérative. Il y a donc :* $C_{10}^4 = 210$ *délégations possibles.*
   Les choix se faisant au hasard, il y a équiprobabilité.
2) *Le couple Zamblé faisant partie de la délégation, il suffit alors de choisir deux membres parmi les 8 restants pour avoir les quatre membres. Il y a donc* $C_8^2 = 28$ *façons possibles de constituer une telle délégation. Le choix se faisant au hasard, il y a équiprobabilité.*
   La probabilité cherchée est donc $\frac{28}{210}$ *soit* $\frac{2}{15}$.
3) ***Méthode 1***
   Il y a trois cas à examiner :
   1er cas : monsieur Zamblé fait partie de la délégation mais son épouse n'en fait pas partie ; Mr Zamblé étant déjà choisi, l'on doit choisir les trois autres personnes parmi 8. il y a C_8^3 *=56 délégations possibles.*
   2nd cas : Mme Zamblé fait partie de la délégation mais son époux n'en fait pas partie ; on fait le même calcul que dans le cas 1 ; il y a donc 56 délégations possibles.
   3ème cas : le couple fait partie de la délégation . Cela revient à la question 2. Il donc 28 délégations possibles.
   Au total, il y a 56+56+28=140 délégations possibles.
   La probabilité est donc : $\frac{140}{210}$ *soit* $\frac{2}{3}$.
   Méthode 2
   L'événement contraire de Mr ou Mme Zamblé font partie de la délégation est soit
   B : « « Mr et Mme Zamblé ne font pas parti de la délégation » ». Alors on va choisir les 4 membres de la délégation parti 8 membres, soit :$C_8^4 = 70$ *délégations possibles.*

$$p(B) = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

On a donc : $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

<u>Exercice 3</u>

Associe chaque expérience aléatoire à son univers.

Expérience aléatoire	Univers
1) On lance deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.	a) L'univers est constitué des 4-uplet formés à partir des 10 touches du clavier. Il comporte 10 000 codes possibles.
2) Choisir simultanément deux élèves dans une classe de 25	b) L'univers est constitué des 2-arrangements formés à partir des 4 boules. Il comporte 12 arrangements possibles.
3) Taper un code secret de 4 chiffres sur un clavier comportant les 10 touches 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.	c) L'univers est l'ensemble de toutes les combinaisons de deux élèves de cette classe. Il comporte 300 combinaisons possibles.
4) Tirer successivement sans remise deux boules dans une urne qui en contient 4.	d) L'univers est l'ensemble de tous des 36 couples des nombres formés à partir des chiffres de 1 à 6.

<u>Correction de l'exercice 3</u>

Expérience aléatoire	*Univers*
1) On lance deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.	*a) L'univers est constitué des 4-uplet formés à partir des 10 touches du clavier. Il comporte 10 000 codes possibles.*
2) Choisir simultanément deux élèves dans une classe de 25	*b) L'univers est constitué des 2-arrangements formés à partir des 4 boules. Il comporte 12 arrangements possibles.*
3) Taper un code secret de 4 chiffres sur un clavier comportant les 10 touches 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.	*c) L'univers est l'ensemble de toutes les combinaisons de deux élèves de cette classe. Il comporte 300 combinaisons possibles.*
4) Tirer successivement sans remise deux boules dans une urne qui en contient 4.	*d) L'univers est l'ensemble de tous des 36 couples des nombres formés à partir des chiffres de 1 à 6.*

<u>Exercice 4</u>

On lance deux fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Détermine la probabilité que les deux nombres soient supérieurs ou égaux à quatre.

<u>Correction de l'exercice 4</u>

Un résultat de cette expérience est un couple de deux nombres entiers naturels compris en 1 et 6. Il y a donc 36 résultats possibles. Les couples dont les composants sont supérieurs ou égaux à 4 sont : (4 ; 4) ; (4 ; 5) ; (4 ; 6) ; (5 ; 4) ; (5 ; 5) ; (5 ; 6) ; (6 ; 4) ; (6 ; 5) et (6 ; 6).

Il y a équiprobabilité : donc la probabilité cherchée est $\frac{9}{36}$ *soit 0,25.*

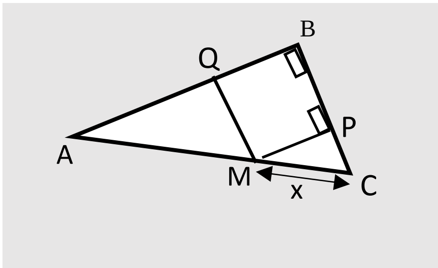
Durée : 09 heures

Compétence 1 **Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**

Thème 2 **Fonctions**

Leçon 6 : DERIVATION

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE



Lors de la préparation du concours d'excellence de sa région, un élève de première scientifique découvre dans ses recherches la figure ci-contre.
Cette figure est un triangle ABC rectangle en B tel que :
AB = 8 ; BC = 6 et AC = 10. À l'intérieur de ce triangle, on a construit le rectangle BPMQ avec $M \in]AC[$; $Q \in]AB[$ $P \in]BC[$ et on a posé MC = *x*.
En faisant varier M de C à A, il constate que l'aire du rectangle croit puis décroit par la suite.
Il veut déterminer la valeur de *x* pour laquelle l'aire du rectangle BPMQ est maximale sans passer par la forme canonique. Après plusieurs tentatives sans succès, il présente la situation à toute la classe à un cours de Mathématiques.

Le professeur de mathématiques propose d'étudier ce problème d'optimisation en utilisant les dérivées de fonctions. Ensemble les élèves font des recherches sur la dérivation.

B. RESUME DE COURS

I. DERIVATION D'UNE FONCTION EN UN POINT

1. Nombre dérivé d'une fonction dérivable en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant le réel x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si l'expression $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0.

Cette limite finie est appelée le **nombre dérivé de** f **en** $\boldsymbol{x_0}$ *et est notée* $\boldsymbol{f'(x_0)}$.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in D_f \\ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemple 1

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 2$.

En utilisant la définition, montrons que f est dérivable en 3.

On a : $\lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x^2-2)-7}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x^2-9)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}(x+3) = 6$ et $6 \in \mathbb{R}$

Donc, la fonction f est dérivable en 3 et le nombre dérivé de f en 3 est : $f'(3) = 6$.

Exemple 2

Soit la fonction g de $[0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \sqrt{x}$.

On a: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ n'est pas un nombre réel, donc la fonction g n'est pas dérivable en 0.

2. Interprétation graphique

Propriété

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J) et A un point de (C_f) d'abscisse x_0.

Si f est dérivable en x_0 alors (C_f) admet en son point A une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Une équation de (T) est : $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.

EXERCICE DE FIXATION

Soit la fonction f définie et dérivable en 2 telle que $f(2) = -4$ et $f'(2) = -3$. (C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J).
Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2.

CORRIGÉ

Une équation de (T) est donc : $y = f'(x)(x-2) + f(2) = -3(x-2) - 4 = -3x + 2$
On a donc : $(T) :\ y = -3x + 2.$

3. **Dérivabilité et continuité**

Propriété

Si une fonction f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Remarque

Réciproquement, f continue en x_0 n'implique pas que f dérivable en x_0.
En effet la fonction g de $[0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0. (Voir exemple 2 ci-dessus)).

EXERCICE D'APPLICATION

Réponds par Vrai si l'affirmation est vraie ou par Faux sinon.

1-Toute fonction continue en x_0 est dérivable en x_0

2- Toute fonction qui n'est pas continue en x_0 n'est pas dérivable en x_0

3- Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0

SOLUTION

1-Faux ; 2-Vrai ; 3-Vrai

II. FONCTION DERIVEE

1. Définitions

- **Fonction dérivable sur un intervalle**

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert K lorsqu'elle est dérivable en chaque élément de K.

- **Fonction dérivée**

Soit f une fonction numérique et K un intervalle ouvert sur lequel f est dérivable.
L'application qui à chaque élément x de K, associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f sur K et notée f'. $f' :\ \begin{array}{l} \mathrm{K} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array}$

Exemple

Déterminons la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : g(x) = x^3.
Soit x_0 un nombre réel.

On a: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$

$$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0} = 3x_0^2 \ .$$

On a donc : $g'(x_0) = 3x_0^2$.

On conclut que la fonction dérivée de g est la fonction : $\begin{array}{l} g' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto 3x^2 \end{array}$

<u>Remarques</u>

- On appelle ensemble de dérivabilité d'une fonction f, l'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f. Elle est notée f'

- Les fonctions élémentaires (constante, puissance, inverse), polynômes, rationnelles et trigonométriques sont dérivables sur tout intervalle ouvert inclus dans leur ensemble de définition.

- Les fonctions élémentaires racine carrée et valeur absolue sont dérivables sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

2. <u>Dérivées de fonctions de référence</u>

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k \ \ (k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ ; \ \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; \ +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sin \ x$	$x \mapsto cos \ x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto cos \ x$	$x \mapsto -sin \ x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto tan \ x$	$x \mapsto 1 + tan^2 x$ ou $x \mapsto \frac{1}{cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCICE DE FIXATION

Relie chaque fonction à sa fonction dérivée

Fonction f
$x \mapsto -3$
$x \mapsto -3x$
$x \mapsto x^4$
$x \mapsto cos\ x$
$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \frac{1}{x^4}$
$x \mapsto tan\ x$
$x \mapsto \sin\ x$

Fonction dérivée f'
$x \mapsto 0$
$x \mapsto 4x^3$
$x \mapsto -3$
$x \mapsto \frac{1}{cos^2 x}$
$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto -\frac{4}{x^5}$
$x \mapsto cos\ x$
$x \mapsto -sin\ x$

SOLUTION

Fonction f
$x \mapsto -3$
$x \mapsto -3x$
$x \mapsto x^4$
$x \mapsto cos\ x$
$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \frac{1}{x^4}$
$x \mapsto tan\ x$
$x \mapsto \sin\ x$

Fonction dérivée f'
$x \mapsto 0$
$x \mapsto 4x^3$
$x \mapsto -3$
$x \mapsto \frac{1}{cos^2 x}$
$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto -\frac{4}{x^5}$
$x \mapsto cos\ x$
$x \mapsto -sin\ x$

3. Dérivées et opérations

Propriété

On suppose que u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K de ℝ.

Fonction f	**Fonction dérivée f'**
$x \mapsto u(x) + v(x)$	$x \mapsto u'(x) + v'(x)$
$x \mapsto u(x)v(x)$	$x \mapsto u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$x \mapsto a\,u(x), (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a\,u'(x)$
$x \mapsto \frac{1}{u(x)}$, ($u \neq 0$ sur K)	$x \mapsto \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$
$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$, ($v \neq 0$ sur K)	$x \mapsto \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$
$x \mapsto cos(ax+b), (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto -asin(ax+b)$
$x \mapsto sin(ax+b), (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto acos(ax+b)$
$x \mapsto \sqrt{ax+b}, (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

EXERCICE DE FIXATION

Dans chacun des cas suivants, détermine la fonction dérivée de la fonction donnée.

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \cos(x)$.

2) $g(x) = \frac{x^2}{x+5}$.

3) $h(x) = \sqrt{3x+6}$

SOLUTION

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \cos(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} - \sin(x)$

2) $g(x) = \frac{x^2}{x+5}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}, g'(x) = \frac{2x(x+5) - x^2}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x}{(x+5)^2}$

3) $h(x) = \sqrt{3x+6}$.

h est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$

On a : $h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$

III. APPLICATIONS DE LA DERIVABILITE

1. Dérivée et sens de variation

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.
f est croissante sur K si et seulement si f' est positive sur K
f est décroissante sur K si et seulement si f' est négative sur K
f est constante sur K si et seulement si f' est nulle surK

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.
f est stictement croissante sur K si et seulement si f' est strictement positive surK
f est stictement décroissante sur K si et seulement si f' est stictement négative surK

EXERCICE DE FIXATION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 - 3x$.

1- Détermine $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
2- Détermine les sens de variation de f.

SOLUTION

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$;

2) **Signe de $f'(x)$**

Soit x un nombre réel

- $f'(x) = 0 \iff x = 1 \; ou \; x = -1$
- $\forall\, x \in\ ]-1\,;1[, f'(x) < 0$;
- $\forall\, x \in\ ]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]1\,;+\infty1[, f'(x) > 0$

Variation de f

$\forall\, x \in\ ]-1\,;1[, f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]-1\,;1[$,
$\forall\, x \in\ ]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]1\,;+\infty1[, f'(x) > 0$; donc $f$est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]1\,;+\infty1[$.

Remarques

- Si f' est positive sur K et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de K alors f est strictement croissante sur K

- Si f' est négative sur K et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de K alors f est strictement décroissante sur K

2. Extremums relatifs d'une fonction

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de K.
Si f' s'annule et change de signe en x_0 alors $f(x_0)$ est un extremum relatif de la fonction f .

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

$f(x_0)$ est un maximum relatif de f

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

$f(x_0)$ est un minimum relatif de f

EXERCICE DE FIXATION

On donne le tableau de variation de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^3}{x-1}$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↘	‖	↘	$\boxed{27/4}$	↗	

Indique l'extremum relatif de g

SOLUTION

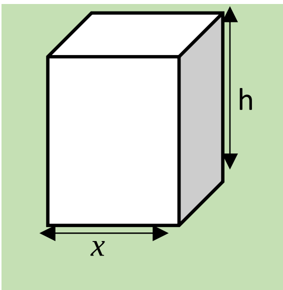
La dérivée de g s'annule en $\frac{3}{2}$ en changeant de signe. Donc, la fonction g admet en $\frac{3}{2}$ un minimum relatif égal $\frac{27}{4}$.

C. SITUATION COMPLEXE

Monsieur Moussa est un menuisier. Il veut confectionner une caisse en bois semblable à un pavé droit tel que représenté sur la figure ci-contre.
Cette caisse doit avoir les caractéristiques suivantes :

- Son volume est égal à 8 m^3 ;
- Sa base est un carré.

Monsieur Moussa se demande quelles dimensions doivent avoir la base et la hauteur de cette caisse afin d'utiliser le moins de bois possible pour minimiser les dépenses. Ne sachant comment effectuer ses calculs, il te sollicite.
En utilisant tes connaissances en mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Moussa dans une production écrite.



SOLUTION

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser nos connaissances sur les fonctions et particulièrement la leçon dérivation.
Pour cela, je vais :

- exprimer l'aire de la surface totale du solide en fonction de x,
- étudier la fonction obtenue pour trouver ses éventuelles extremums
- conclure

- Notons V le volume de la caisse et S sa surface de base.
  On a : $h = \frac{V}{S} = \frac{8}{x^2}$
- La caisse à deux faces carrées qui ont pour aire est : $2x^2$
- La caisse a 4 faces rectangulaires qui ont pour aire : $4 \times \left(x \times \frac{8}{x^2}\right) = \frac{32}{x}$

  L'aire de la surface totale est : $f(x) = 2x^2 + \frac{32}{x}$.

- La fonction f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on a : $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ f'(x) = 4x - \frac{32}{x^2} = \frac{4}{x^2}(x^3 - 8)$

$\forall x \in]0;\ 2[, f'(x) < 0$; $\forall x \in]2;\ +\infty[, f'(x) > 0$

f est strictement décroissante sur $]0; 2[$ et strictement croissante sur $]2; +\infty[$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	16	$\nearrow$	

16 est le minimum de f

Moussa utilisera moins de bois lorsque L'aire de la surface totale est minimale c'est-à-dire lorsque la longueur x du côté de la base mesure 2 m et la hauteur de la caisse mesure également 2 m.

D-EXERCICES

A) Exercices de fixation

Exercice 1

f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant le réel x_0.
Indique dans quel cas la fonction f est dérivable en x_0

$a)$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$;

b) La limite en x_0 de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ n'existe pas ;

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$;

d) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -3$.

Solution

f est dérivable dans le cas d)

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calcule, en utilisant la définition, le nombre dérivé de f en x_0

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; $x_0 = -1$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt{3x+1}$; $x_0 = 2$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x^2+2x-3)+4}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+1)^2}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} (x+1) = 0$

donc $f(-1) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{-x}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x+1} = -1$

donc $f'(0) = -1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{7}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(\sqrt{3x+1}-\sqrt{7})(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})}{(x-2)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{3}{(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})} = \frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$;

donc $f'(2) = \frac{3\sqrt{7}}{14}$

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$ et (C) sa courbe représentative.
Détermine une équation de la tangente (T) à (C)au point d'abscisse -2.

Solution

Les calculs donnent : $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ et $f(-2) = -\frac{1}{2}$.

Une équation de (T) est donc : $y = -\frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{2}$ ou encore $(T): y = -\frac{1}{4}x - 1$.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, détermine la fonction dérivée f' de f sur L'intervalle K

a) $f(x) = \sqrt{x}$; $K =]0;\ +\infty[$

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $K =]-1;\ +\infty[$

Solution

a) Soit x_0 un élément de $]0;\ +\infty[$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

La fonction dérivée de f est définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) Soit x_0 un élément de $]-1;\ +\infty[$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x_0+1}}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0-x}{(x+1)(x_0+1)}}{(x-x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{(x+1)(x_0+1)} = \frac{-1}{(x_0+1)^2}$$

La fonction dérivée de f sur $]-1;\ +\infty[$ est définie par : $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

Exercice 5

Recopie le tableau puis réponds par Vrai (V) si l'affirmation est vrai ou par Faux (F) sinon

Affirmations	V ou F
f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$.	
$Si\ f(x) = (-2x+5)^6$alors $f'(x) = -12(-2x+4)^5$.	
Si v est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K sur lequel elle ne s'annule pas alors : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-1}{v^2}$	
Si $f'(a) = 0$ alors la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.	
Si la fonction f est positive sur un intervalle K alors f est croissante sur K.	

Solution

Affirmations	V ou F
f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$.	F
$Si\ f(x) = (-2x+5)^6$alors $f'(x) = -12(-2x+4)^5$.	V
Si v est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K sur lequel elle ne s'annule pas alors : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-1}{v^2}$	F
Si $f'(a) = 0$ alors la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.	F
Si la fonction f est positive sur un intervalle K alors f est croissante sur K.	F

Exercice 6

Détermine la fonction dérivée de f dans chacun des cas suivants :
(Tu préciseras l'ensemble de dérivabilité de la fonction f dans chaque cas)

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x + 5$
b) $f(x) = (25x-1)^4$
c) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$
d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
e) $f(x) = \tan(2x+\pi)$

Solution

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x + 5$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

b) $f(x) = (25x-1)^4$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 100(25x-1)^3$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x) = \frac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et on a: $\forall x \in]-\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$

e) $f(x) = \tan(2x+\pi)$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et on a:

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $f'(x) = 1 + tan^2(2x+\pi)$

B) Exercices de renforcement

Exercice 7

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$.

1. a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (x+1)(x-3)$
   b) Etudie les variations de h.
2. a) Dresse le tableau de variation de h.
   b) Déduis-en les extrema de la fonction h.
3. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe de h au point d'abscisse 0

Solution

1) a) $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = x^2 - 2x - 3$. On a: $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$

donc: $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (x+1)(x-3)$

b) $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et $]3; +\infty[$

$\forall x \in [-1; 3], h'(x) \leq 0$ donc h est strictement décroissante sur $[-1; 3]$

2) a)

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	$\frac{11}{3}$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	

b) $\frac{11}{3}$ est un maximum relatif de h

-7 est un minimum relatif de h

3) $h(0) = 2$; $h'(0) = -3$. Une équation de (T) est : $y = -3x + 2$

Exercice 8

Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par :
$g(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$; On note (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I , J)
1) Détermine les nombres réels a et b sachant que :
- (Γ) passe par le point $\mathrm{A}(2; 2)$
- $f'(2) = 0$

2) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) au point d'abscisse 2.

3. Dans la suite, on prend : $a = -1$ et $b = 3$
a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, g'(x) = \frac{(4-x)(x-2)}{(3-x)^2}$
b) Etudie les variations de g.

Solution

1) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, g'(x) = a + \frac{1}{(3-x)^2}$. On a : $g'(2) = a + 1$; donc $g'(2) = 0 \Leftrightarrow a = -1$
On : $g(2) = 2a + b + 1 = b - 1$; or $g(2) = 2$ donc $b = 3$
2) $g(2) = 2$ et $g'(2) = 0$. Une équation de (T) est : $y = 2$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, g'(x) = -1 + \frac{1}{(3-x)^2} = \frac{1-(3-x)^2}{(3-x)^2} = \frac{(4-x)(x-2)}{(3-x)^2}$

b) $\forall x \in]-\infty; 2[\cup]4; +\infty[, g'(x) < 0$

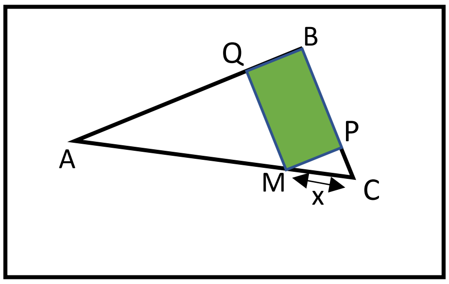
$\forall x \in]2; 3[\cup]3; 4[, g'(x) > 0$. On en déduit que :

- g est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et $]4; +\infty[$
- g est strictement croissante sur $]2; 3[$ et $]3; 4[$

C) Exercice d'approfondissement

Exercice 9

L'unité de longueur est le centimètre
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, ABC est un triangle rectangle en B tel que : AB = 8 ; BC = 6 et AC = 10.
A l'intérieur de ce triangle, on construit le rectangle BPMQ avec $M \in]AC[$; $Q \in]AB[$
$P \in]BC[$ et on pose : MC = x.



1. Exprime MQ et MP en fonction de x.
2. On désigne par f la fonction définie et dérivable sur $]0; 10[$ et représentant l'aire du rectangle BPMQ. On a donc $f(x) = \text{MQ.MP}$
   a) Justifie que $f(x) = \frac{12}{5}x\left(2 - \frac{1}{5}x\right)$.
   b) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.
3. Déduis-en la valeur de x pour que l'aire du rectangle BPMQ soit maximale et calcule alors cette aire.

Solution

1) Considérons le triangle ABC ; M est point de (AC) , Q est un point de (AB) et (MQ) parallèle à (BC) ; donc on a : $\frac{AM}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{MQ}{BC}$ ce qui donne : $\frac{10-x}{10} = \frac{AQ}{8} = \frac{MQ}{6}$
D'où : $MQ = 6 - \frac{3x}{5}$

Le triangle CMP est rectangle est rectangle en P. D'après la propriété de Pythagore on a :
$CM^2 = MP^2 + PC^2$ donc : $MP^2 = CM^2 - PC^2 = x^2 - (BC - MQ)^2$
On en déduit que : $MP = \frac{4x}{5}$
2a) $f(x) = MP \times PQ = \frac{4x}{5}\left(6 - \frac{3x}{5}\right) = \frac{12x}{5}(2 - \frac{x}{5})$
b) $\forall x \in]0; 10[, f'(x) = \frac{24}{5}\left(1 - \frac{x}{5}\right) = \frac{24}{25}(5 - x)$
$\forall x \in]0; 5[, f'(x) > 0$; $\forall x \in]5; 10[, f'(x) < 0$
f est strictement croissante sur $]0; 5[$ et strictement décroissante sur $]5; 10[$

3)

x	0	5	10
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	12	↘

L'aire du rectangle est maximum pour x égal à 5 . L'aire du rectangle est alors de 12 cm²

Leçon 7 : EXTENSION DE LA NOTION DE LA LIMITE

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans la perspective d'aborder le prochain cours dans ta classe de 1ère C, ton professeur de mathématiques présente la courbe suivante qui décrit dans un repère orthonormé, la trajectoire de deux projectiles à l'aide de l'équation horaire suivante :

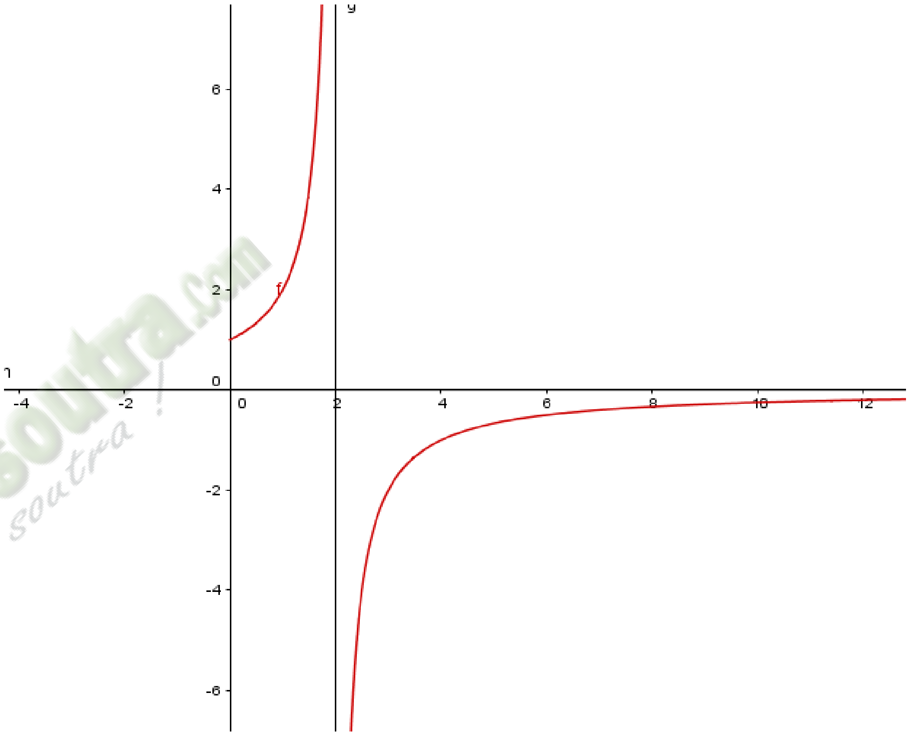
$\boldsymbol{y(t) = \frac{2}{2-t}}$, $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}; +\infty[$

où pour le premier projectile,

$\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0};\ \mathbf{2}[$ et pour le deuxième,

$\boldsymbol{t} \in]\mathbf{2}; +\infty[$.

Tes amis et toi constatez que sur $]2; +\infty[$ lorsque t tend vers $+\infty$, la trajectoire du projectile se rapproche de la droite d'équation y = 0 comme l'indique le graphique ci-contre. Dans le but d'expliquer ce résultat le professeur vous organise en groupe afin d'étudier les limites de cette fonction.



B– RESUME DE COURS

I. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1) Limite infinie d'une fonction en *a* (*a* est un nombre réel)

Propriété

Soit a un nombre réel.

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on a :

- $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{1}{(x-a)^n} \right) = +\infty$ si n est pair
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \left(\dfrac{1}{(x-a)^n} \right) = +\infty$ si n est impair ou pair
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \left(\dfrac{1}{(x-a)^n} \right) = -\infty$ si n est impair

Cas particuliers

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}}\left(\dfrac{1}{x-a}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}}\left(\dfrac{1}{x-a}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$

Exercice d'application

Complète chacune des égalités suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}}(\dfrac{1}{x-4})=...$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2})=...$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(\dfrac{1}{(x-4)^5})=...$ d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(\dfrac{1}{x})=...$

Corrigé

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}}(\dfrac{1}{x-4})=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2})=+\infty$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(\dfrac{1}{(x-4)^5})=-\infty$ d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(\dfrac{1}{x})=+\infty$

2) Asymptote verticale

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

a est un nombre réel et f est une fonction de représentation graphique (C_f)

Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est infinie, on dit que la droite d'équation : $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

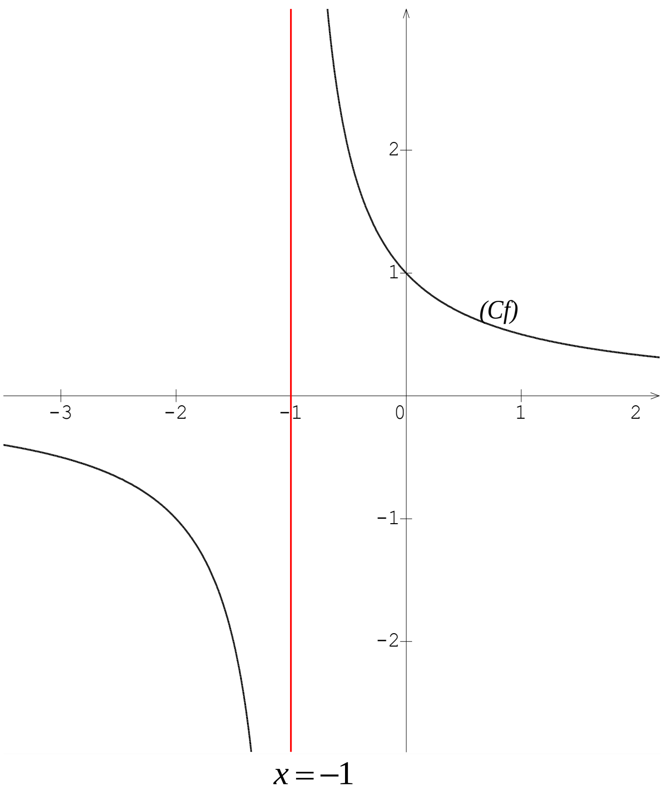
Exemple

Soit f la fonction définie de ℝ vers ℝ par :

$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation

$x=-1$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).



II – LIMITE A L'IN FINI D'UNE FONCTION

1) Limite à l'infini des fonctions élémentaires

Propriétés

On a :

- Pour tout nombre réel c :
  $\lim\limits_{x\to+\infty}(c)=c$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(c)=c$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x})=+\infty$
- Pour tout nombre entier naturel non nul n :
  - ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n)=+\infty$

- ✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^n)=+\infty$ si n est pair
- ✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^n)=-\infty$ si n est impair
- ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^n})=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^n})=0$

Exercice de fixation

Complète les égalités suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^5})=...$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^6)=...$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^{15})=...$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^4})=...$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^7)=...$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^3})=...$

Corrigé

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^5})=0$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^6)=+\infty$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^{15})=-\infty$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^4})=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^7)=+\infty$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^3})=0$

2) Asymptote horizontale

Définition

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b\ (b \in \mathbb{R})$ on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$.

- Lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b\ (b \in \mathbb{R})$ on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x^3}$ et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^3})=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

III – Opérations sur les limites

1) Limite de la somme de deux fonctions

Propriétés

l *et* l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

On admet:

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Impossible de conclure

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes

1) $\lim_{x\to-\infty}(x^7+x^3)$

2) $\lim_{\substack{x\to 0\\>}}(\frac{1}{x^5}+\sqrt{x})$

Corrigé

1) On a $\lim_{x\to-\infty}(x^7)=-\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty}(x^7+x^3)=-\infty$

2) On a $\lim_{\substack{x\to 0\\>}}(\frac{1}{x^5})=+\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\>}}(\sqrt{x})=0$ donc $\lim_{\substack{x\to 0\\>}}(\frac{1}{x^5}+\sqrt{x})=+\infty$

b) Limite du produit de deux fonctions

Propriétés

l *et* l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

On admet:

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x\to a} (f\times g)(x)$	$l\times l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Impossible de conclure

Exemples

$\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty}(-10)=-10$ donc $\lim_{x\to-\infty}(-10x^3)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty}(2)=2$ donc $\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$

On a $\lim_{x\to-\infty}(x^7)=-\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty}(x^7(x^3))=+\infty$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}}(\dfrac{1}{x-2}(3x-5))$ $\quad b)\ \lim\limits_{x \to -\infty}(x^3(-2+\dfrac{1}{x^7}))$ $\quad c)\ \lim\limits_{x \to +\infty}((6+\dfrac{1}{x})(-2+\dfrac{1}{x^7}))$ $\quad d)\ \lim\limits_{x \to +\infty}(\dfrac{1}{x}(x^3))$

Corrigé

On a :

$a)\ \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}}(\dfrac{1}{x-2}) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}}(3x-5) = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}}((\dfrac{1}{x-2})(3x-5)) = -\infty$

$b)\ \lim\limits_{x \to -\infty}(x^3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}(-2+\dfrac{1}{x^7}) = -2$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^3(-2+\dfrac{1}{x^7})) = +\infty$

$c)\ \lim\limits_{x \to +\infty}(6+\dfrac{1}{x}) = 6$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(-2+\dfrac{1}{x^7}) = -2$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty}((6+\dfrac{1}{x})(-2+\dfrac{1}{x^7})) = 6 \times (-2) = -12$

$d)\ \lim\limits_{x \to +\infty}(\dfrac{1}{x}) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^7) = +\infty$ donc il est impossible de conclure $\lim\limits_{x \to +\infty}(\dfrac{1}{x}x^3)$ sans transformation.

On peut remarquer que :

$$\lim_{x \to +\infty}(\frac{1}{x}(x^7)) = \lim_{x \to +\infty}(\frac{x^7}{x}) = \lim_{x \to +\infty}(x^6) = +\infty$$

3) Limite de l'inverse d'une fonction

Propriétés

l désigne un nombre réel non nul et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

On admet:

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	0 et $f(x)>0$	0 et $f(x)<0$
$\lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{1}{f}\right)(x)$	$\dfrac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ b) $\lim\limits_{x \to -1}(\dfrac{1}{x^2+3})$ $\quad$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty}(\dfrac{1}{x^2+3})$

Corrigé

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$ *et* $\sqrt{x} \geq 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1}(x^2+3) = 4$ donc $\lim\limits_{x \to -1}(\dfrac{1}{x^2+3}) = \dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^2+3) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty}(\dfrac{1}{x^2+3}) = 0$

4) Limite du quotient de deux fonctions

Propriétés

l et l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

On admet :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l' non nul	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Impossible de conclure	

Exercice de fixation

f et g sont deux fonctions. Complète les égalités suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -6$ donc $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 15$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 15$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -3$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$

Corrigé

1) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -6$ donc $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 15$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 15$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -3$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{15}{-3} = -5$

Remarque

Pour calculer la limite du quotient d'une fonction f par une fonction g, on peut écrire le quotient comme produit de f par l'inverse de g. ($\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}\right)$).

5) Limite en l'infini des fonctions polynômes

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction polynôme f est la limite en l'infini de la fonction monôme définie par le terme de plus haut degré de $f(x)$.

$$\lim_{x\to -\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to -\infty} (a_n x^n)$$
$$\lim_{x\to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to +\infty} (a_n x^n)$$

NB : a_n est un nombre réel non nul

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^3+2x^2-6x+8)$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3+2x^2-6x^7+8x-9)$

Corrigé

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^3+2x^2-6x+8)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^3)=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3+2x^2-6x^7+8x-9)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-6x^7)=+\infty$

6) Limite en l'infini des fonctions rationnelles

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle $\frac{p}{q}$ est la limite en l'infini de la fonction rationnelle définie par le quotient des monômes de plus hauts degrés de $p(x)$ et de $q(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p}$

NB : a_n et b_p sont des nombres réels non nuls

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^5-6x+8}{5x^3+2x^2-x+7}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+8}{2x^2-x+7}\right)$

Corrigé

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^5-6x+8}{5x^3+2x^2-x+7}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{3x^5}{5x^3})=\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{3x^2}{5})=\lim\limits_{x\to a}(\frac{3}{5}x^2)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+8}{2x^2-x+7}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{3x}{2x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{3}{2x})=0$

7) Propriétés de comparaison

Propriété 1

Soit f une fonction et $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$.

- S'il existe une fonction g telle que $g\le f$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$
- S'il existe une fonction g telle que $f\le g$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+\cos(x^2)$.

Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Corrigé

Pour tout nombre réel x, $-1 \leq \cos(x^2) \leq 1$ donc $2x-1 \leq f(x) \leq 2x+1$.

Comme $f(x) \leq 2x+1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}(2x+1) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Comme $2x-1 \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(2x-1) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Propriété 2 (Théorème des gendarmes)

Soit f une fonction.

- S'il existe deux fonctions g et h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]a;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$
- S'il existe deux fonctions g et h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]-\infty;a[$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+E(x)}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Corrigé

Pour tout nombre réel x, $E(x) \leq x \leq E(x)+1$ donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty}(0) = \lim\limits_{x \to +\infty}(\dfrac{1}{x}) = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

C-Situation complexe

Lors d'une recherche pour le cours de géographie, les élèves d'une classe de première C d'un lycée de Gagnoa découvrent une ville d'Afrique créée en 1960. La population de cette ville évolue selon une fonction croissante f telle que : $f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$ où x est le nombre d'années écoulées depuis la fin de l'année 1960 et $f(x)$ est exprimée en dizaines de milliers d'habitants.

Un élève de la classe affirme que la population de cette ville ne pourra jamais dépasser 600000 habitants mais certains élèves de la classe pensent le contraire. Une discussion s'engage entre eux.

En tant qu'élève de première C, utilise tes connaissances mathématiques pour les départager.

Corrigé

Pour départager ces élèves nous allons utiliser :

- la notion d'extension de limite
- Calculer la limite de la fonction quand x tend vers $+\infty$
- Et comparer a 60000

Comme la fonction définissant l'évolution de la population est croissante alors lorsque x devient de plus en plus grand, la population de cette ville est aussi de plus en plus élevée. Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ déterminera la population limite.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{60x+40}{x+10}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{60x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(60) = 60$$

La population limite est : $60\times 10000 = 600000$ habitants

L'élève qui a fait l'affirmation a raison.

D– EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé

(O, I, J). f est une fonction de représentation graphique (C) et $\lim_{\substack{x\to 6\\ <}} f(x) = +\infty$.

Interprète graphiquement la limite de f à gauche en 6.

Corrigé

On a $\lim_{\substack{x\to 6\\ <}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 6$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

Exercice 2

Calcule chacune des limites suivantes :

a) $\lim_{\substack{x\to -4\\ >}} \frac{3x}{x+4}$ b) $\lim_{x\to+\infty}(9-7x^2+6x-8x^4)$ c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{9-7x^2+6x}{x^3+2x-4}\right)$

Corrigé

a) $\lim_{\substack{x\to -4\\ >}}\left(\frac{3x}{x+4}\right) = \lim_{\substack{x\to -4\\ >}}(3x)\times\left(\frac{1}{x-(-4)}\right) = -\infty$ car $\lim_{\substack{x\to -4\\ >}}(3x) = -12$ et $\lim_{\substack{x\to -4\\ >}}\left(\frac{1}{x-(-4)}\right) = +\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}(9-7x^2+6x-8x^4) = \lim_{x\to+\infty}(-8x^4) = -\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{9-7x^2+6x}{x^3+2x-4}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-7x^2}{x^3}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-7}{x}\right) = 0$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$ et de représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1) Justifie que la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C).

2) Justifie que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

Corrigé

1) On a : $\lim_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{1}{(x+2)^3} = \lim_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{1}{(x-(-2))^3} = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C).

2) On a : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(x+2)^3} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

Exercices de renforcement

Exercice 4

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est juste et réponds par Faux si elle est incorrecte

1) Si $\lim_{x \to -7} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = -7$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f).

2) $\lim_{x \to -1}(3x^2 + 2x - 8) = \lim_{x \to -1}(3x^2)$

3) $\lim_{\substack{x \to 8 \\ <}} \left(\frac{1}{(x-8)^4} \right) = -\infty$

4) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{-x+9}{3x-8} \right) = -\frac{1}{3}$

Corrigé

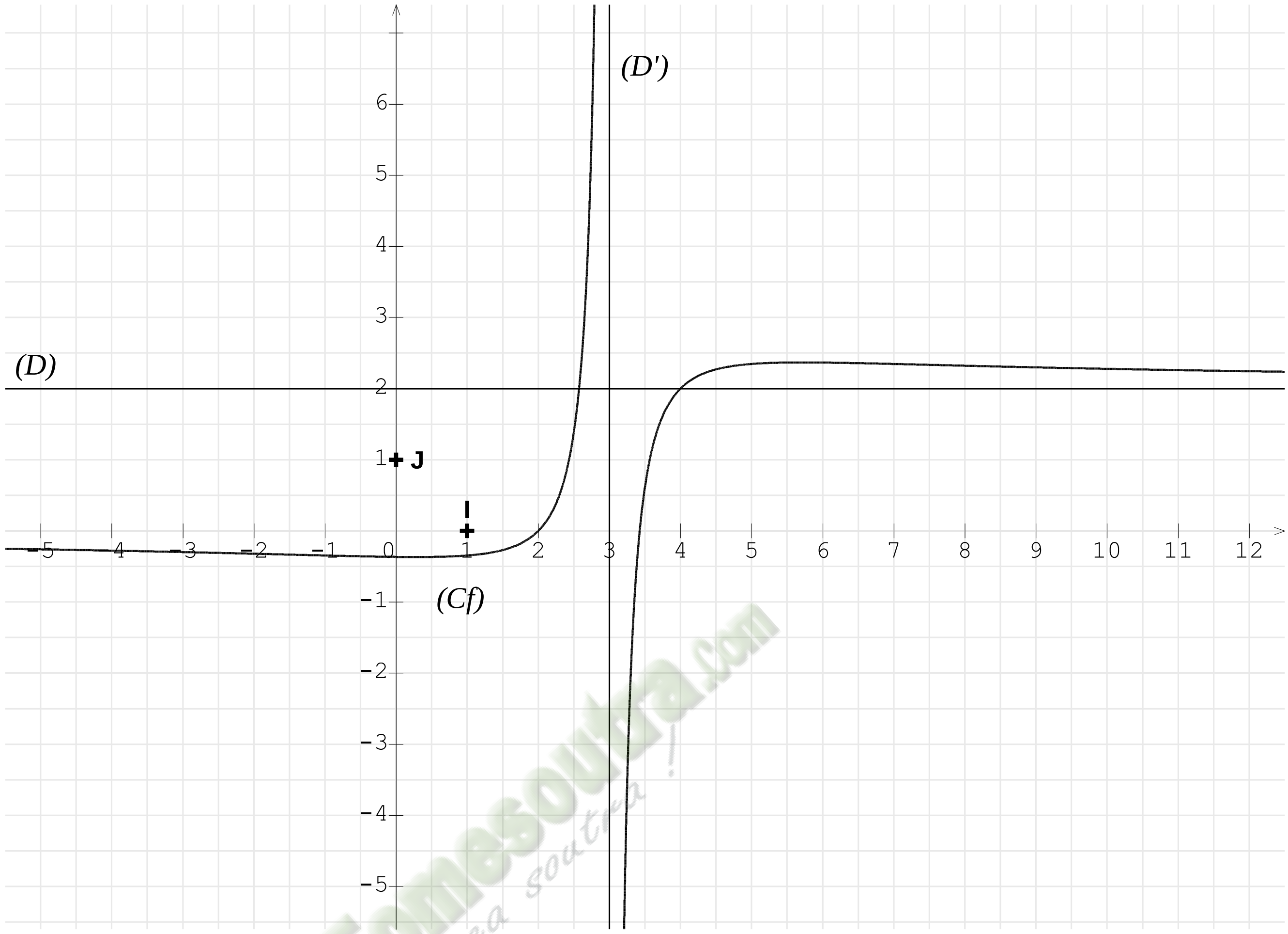
1) Faux 2) Faux 3) Faux 4) Faux

Exercice 5

(C_f) est la courbe représentative d'une fonction f dans le plan rapporté au repère (O, I, J).
(OI), (D) et (D') sont asymptotes à (C_f).
Observe attentivement la figure et donne chacune des limites suivantes :
$\lim_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x)$.

Corrigé

On a :
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = +\infty$



<u>Exercices d'approfondissement</u>

<u>Exercice 6</u>

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x})$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+3}{1-\sqrt{x}}\right)$

<u>Corrigé</u>

a) On a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2}-1)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1})=\frac{0}{2}=0$

b) On a : $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x}-1)=+\infty$

c) Posons $X=\sqrt{x}$.

On a $x=X^2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x})=+\infty$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{1-\sqrt{x}}\right)=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{2X^2+3}{1-X}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2X^2}{-X}\right)=\lim_{x\to+\infty}(-2X)=-\infty$$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par : $f(x)=\dfrac{5x-2}{3-x}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)$ puis interprète graphiquement ton résultat.

2) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interprète graphiquement ton résultat.

Corrigé

1) On a : $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}}\dfrac{5x-2}{3-x}=\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}}\left((-5x+2)\times\dfrac{1}{x-3}\right)=+\infty$ car

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}}(-5x+2)=-13$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=+\infty$ alors la droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

2) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{3-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x}{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-5)=-5$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-5$ alors la droite d'équation $y=-5$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $+\infty$.

Durée : 9 heures

Compétence 1 **Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**

Thème 2 **Fonctions**

Leçon 8 : EXTENSION DE LA NOTION DE LA LIMITE

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

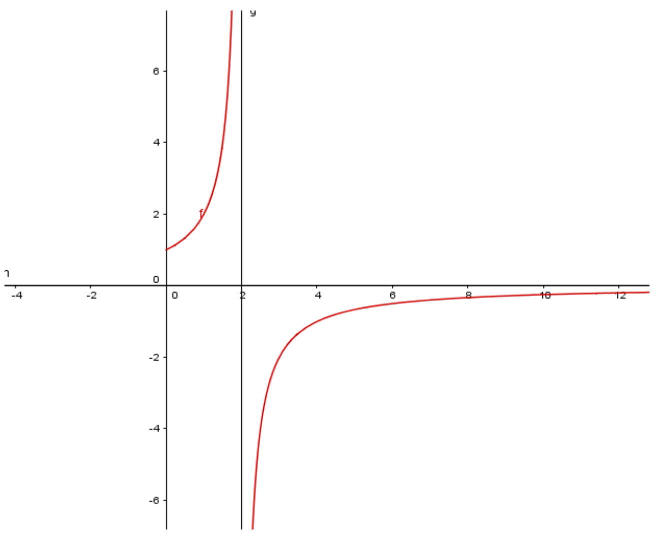
Dans la perspective d'aborder le prochain cours dans ta classe de 1ère D, ton professeur de mathématiques présente la courbe suivante qui décrit dans un repère orthonormé, la trajectoire de deux projectiles à l'aide de l'équation horaire suivante :

$\boldsymbol{y(t) = \frac{2}{2-t}}$, $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}; +\infty[$

où pour le premier projectile,

$\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0};\ \mathbf{2}[$ et pour le deuxième,

$\boldsymbol{t} \in]\mathbf{2}; +\infty[$.



Tes amis et toi constatez que sur $]2; +\infty[$ lorsque t tend vers $+\infty$, la trajectoire du projectile se rapproche de la droite d'équation y = 0 comme l'indique le graphique ci-contre. Dans le but d'expliquer ce résultat le professeur vous organise en groupe afin de traduire ce résultat en limite de la fonction.

B– RESUME DE COURS

I. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1) Limite infinie d'une fonction en *a* (*a* est un nombre réel)

Propriété

Soit a un nombre réel.

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on a :

- $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{1}{(x-a)^n} \right) = +\infty$ si n est pair
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \left(\dfrac{1}{(x-a)^n} \right) = +\infty$ si n est impair ou pair
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \left(\dfrac{1}{(x-a)^n} \right) = -\infty$ si n est impair

Cas particuliers

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \left(\frac{1}{x-a} \right) = +\infty \ ; \quad \lim_{\substack{x \to a \\ <}} \left(\frac{1}{x-a} \right) = -\infty \ ; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty \ ; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty$$

Exercice d'application

Complète chacune des égalités suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} (\dfrac{1}{x-4}) = \ldots$ b) $\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{x^2}) = \ldots$ c) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (\dfrac{1}{(x-4)^5}) = \ldots$ d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\dfrac{1}{x}) = \ldots$

Corrigé

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} (\dfrac{1}{x-4}) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{x^2}) = +\infty$ c) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (\dfrac{1}{(x-4)^5}) = -\infty$ d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\dfrac{1}{x}) = +\infty$

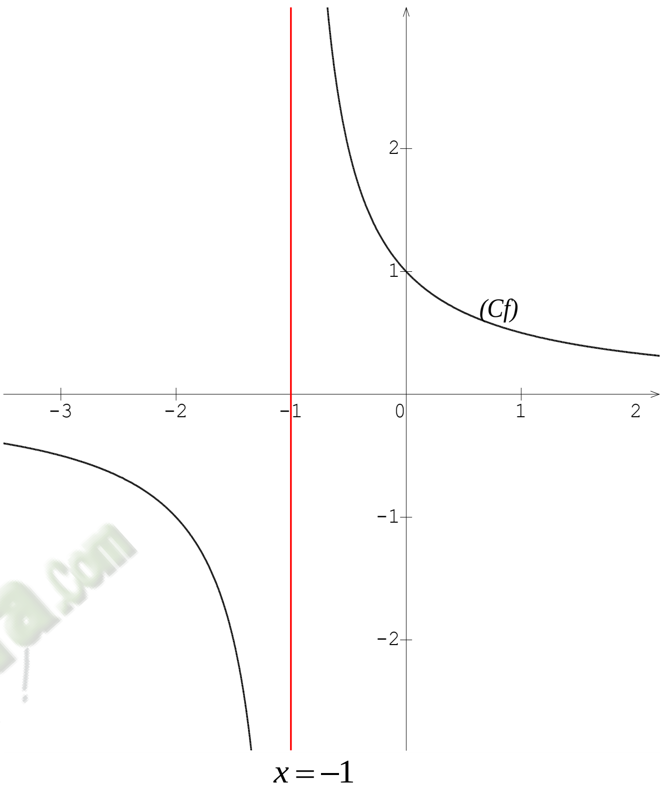
2) Asymptote verticale

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

a est un nombre réel et f est une fonction de représentation graphique (C_f)

Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est infinie, on dit que la droite d'équation : $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).



Exemple

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$vers $\mathbb{R}$par :

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

II – LIMITE A L'INFINI D'UNE FONCTION

1) Limite à l'infini des fonctions élémentaires

Propriétés

On a :

- Pour tout nombre réel c :
  $\lim\limits_{x\to +\infty}(c)=c;\quad \lim\limits_{x\to -\infty}(c)=c$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x})=+\infty$
- Pour tout nombre entier naturel non nul n :
  - ✓ $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^n)=+\infty$
  - ✓ $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^n)=+\infty$ si n est pair
  - ✓ $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^n)=-\infty$ si n est impair
  - ✓ $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{1}{x^n})=0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}(\frac{1}{x^n})=0$

Exercice de fixation

Complète les égalités suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{1}{x^5})=...$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^6)=...$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^{15})=...$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\frac{1}{x^4})=...$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^7)=...$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\frac{1}{x^3})=...$

Corrigé

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{1}{x^5})=0$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^6)=+\infty$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^{15})=-\infty$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\frac{1}{x^4})=0$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^7)=+\infty$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\frac{1}{x^3})=0$

2) Asymptote horizontale

Définition

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ $(b \in \mathbb{R})$ on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$.

- Lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ $(b \in \mathbb{R})$ on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{1}{x^3}) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

III – Opérations sur les limites

1) Limite de la somme de deux fonctions

Propriétés

l *et* l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet:

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Résultat pas immédiat

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^7 + x^3)$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\dfrac{1}{x^5} + \sqrt{x})$

Corrigé

1) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^7) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^7 + x^3) = -\infty$

2) On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\frac{1}{x^5}) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\sqrt{x}) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\frac{1}{x^5} + \sqrt{x}) = +\infty$

b) Limite du produit de deux fonctions

Propriétés

l *et* l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet:

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} (f \times g)(x)$	$l \times l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Résultat pas immédiat

Exemples

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} (-10) = -10$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (-10x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} (2) = 2$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3) = -\infty$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^7) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^7 (x^3)) = +\infty$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

$a)$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (\frac{1}{x-2}(3x-5))$ $b)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3(-2 + \frac{1}{x^7}))$ $c)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} ((6 + \frac{1}{x})(-2 + \frac{1}{x^7}))$ $d)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x}(x^3))$

Corrigé

On a :

$a)$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (\frac{1}{x-2}) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (3x-5) = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} ((\frac{1}{x-2})(3x-5)) = -\infty$

$b)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2 + \frac{1}{x^7}) = -2$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3(-2 + \frac{1}{x^7})) = +\infty$

$c)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (6 + \frac{1}{x}) = 6$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2 + \frac{1}{x^7}) = -2$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} ((6 + \frac{1}{x})(-2 + \frac{1}{x^7})) = 6 \times (-2) = -12$

$d)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x}) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^7) = +\infty$ donc il est impossible de conclure $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} x^3)$ sans transformation.

On peut remarquer que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}(x^7)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^7}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x^6)=+\infty$$

3) Limite de l'inverse d'une fonction

Propriétés

l désigne un nombre réel non nul et $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty;-\infty\}$

On admet:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	0 et $f(x)>0$	0 et $f(x)<0$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x^2+3}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+3}\right)$

Corrigé

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\sqrt{x}=0$ *et* $\sqrt{x}\geq 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+3)=4$ donc $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x^2+3}\right)=\frac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+3}\right)=0$

4) Limite du quotient de deux fonctions

Propriétés

l *et* l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty;-\infty\}$

On admet :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l' non nul	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'<0$	$l'>0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Résultat pas immédiat	

Exercice de fixation

f *et* g sont deux fonctions. Complète les égalités suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-6$ donc $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ldots$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=15$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ldots$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=15$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-3$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ldots$

Corrigé

1) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-6$ donc $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=15$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=15$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-3$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{15}{-3}=-5$

Remarque

Pour calculer la limite du quotient d'une fonction f par une fonction g, on peut écrire le quotient comme produit de f par l'inverse de g. ($\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}\right)$).

5) Limite en l'infini des fonctions polynômes

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction polynôme f est la limite en l'infini de la fonction monôme définie par le terme de plus haut degré de $f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to-\infty}(a_n x^n)$$
$$\lim_{x\to+\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to+\infty}(a_n x^n)$$

NB : a_n est un nombre réel non nul

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^3+2x^2-6x+8)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3+2x^2-6x^7+8x-9)$

Corrigé

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^3+2x^2-6x+8)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^3)=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3+2x^2-6x^7+8x-9)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-6x^7)=+\infty$

6) Limite en l'infini des fonctions rationnelles

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle $\frac{p}{q}$ est la limite en l'infini de la fonction rationnelle définie par le quotient des monômes de plus hauts degrés de $p(x)$ et de $q(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p}$$

NB : a_n et b_p sont des nombres réels non nuls

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^5-6x+8}{5x^3+2x^2-x+7}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+8}{2x^2-x+7}\right)$

Corrigé

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^5-6x+8}{5x^3+2x^2-x+7}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{3x^5}{5x^3})=\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{3x^2}{5})=\lim\limits_{x\to a}(\frac{3}{5}x^2)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+8}{2x^2-x+7}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{3x}{2x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{3}{2x})=0$

7) Propriétés de comparaison

Propriété 1

Soit f une fonction et $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty;-\infty\}$

.

- S'il existe une fonction g telle que $g\le f$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$
- S'il existe une fonction g telle que $f\le g$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+\cos(x^2)$.

Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Corrigé

Pour tout nombre réel x, $-1\le\cos(x^2)\le1$ donc $2x-1\le f(x)\le 2x+1$.

Comme $f(x)\le 2x+1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

Comme $2x-1\le f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

C-Situation complexe

Lors d'une recherche pour le cours de géographie, les élèves d'une classe de première scientifique d'un lycée découvrent une ville d'Afrique créée en 1960. La population de cette ville évolue selon une

fonction croissante f telle que : $f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$ où x est le nombre d'années écoulées depuis la fin de l'année 1960 et $f(x)$ est exprimée en dizaines de milliers d'habitants.
Un élève de la classe affirme que la population de cette ville ne pourra jamais dépasser 600000 habitants mais certains élèves de la classe pensent le contraire. Une discussion s'engage entre eux.
En tant que major de ta classe en mathématiques, utilise tes connaissances mathématiques pour les départager.

Corrigé
Pour départager ces élèves nous allons utiliser :
- la notion d'extension de limite
- Calculer la limite de la fonction quand x tend vers $+\infty$
- Et comparer a 60000

Comme la fonction définissant l'évolution de la population est croissante alors lorsque x devient de plus en plus grand, la population de cette ville est aussi de plus en plus élevée. Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ déterminera la population limite.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{60x+40}{x+10}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{60x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} (60) = 60$$

La population limite est : $60 \times 10000 = 600000$ habitants
L'élève qui a fait l'affirmation a raison.

D– EXERCICES
Exercices de fixation

Exercice 1
Le plan est muni d'un repère orthonormé
(O, I, J). f est une fonction de représentation graphique (C) et $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ <}} f(x) = +\infty$.

Interprète graphiquement la limite de f à gauche en 6.
Corrigé
On a $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ <}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 6$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

Exercice 2
Calcule chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ >}} \frac{3x}{x+4}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (9 - 7x^2 + 6x - 8x^4)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{9 - 7x^2 + 6x}{x^3 + 2x - 4})$

Corrigé

a) $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ >}} (\frac{3x}{x+4}) = \lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ >}} (3x) \times (\frac{1}{x-(-4)}) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ >}} (3x) = -12$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ >}} (\frac{1}{x-(-4)}) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (9 - 7x^2 + 6x - 8x^4) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-8x^4) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{9-7x^2+6x}{x^3+2x-4}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-7x^2}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-7}{x}\right)=0$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^3}$ et de représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1) Justifie que la droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à (C).

2) Justifie que la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

Corrigé

1) On a : $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ >}}\dfrac{1}{(x+2)^3}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ >}}\dfrac{1}{(x-(-2))^3}=+\infty$ donc la droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à (C).

2) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{(x+2)^3}=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

Exercices de renforcement

Exercice 4

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est juste et réponds par Faux si elle est incorrecte

1) Si $\lim\limits_{x\to-7} f(x)=+\infty$ alors la droite d'équation $x=-7$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f).

2) $\lim\limits_{x\to-1}(3x^2+2x-8)=\lim\limits_{x\to-1}(3x^2)$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ <}}\left(\dfrac{1}{(x-8)^4}\right)=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-x+9}{3x-8}\right)=-\dfrac{1}{3}$

Corrigé

1) Faux 2) Faux 3) Faux 4) Faux

Exercice 5

(C_f) est la courbe représentative d'une fonction f dans le plan rapporté au repère (O, I, J).

(OI), (D) et (D') sont asymptotes à (C_f).

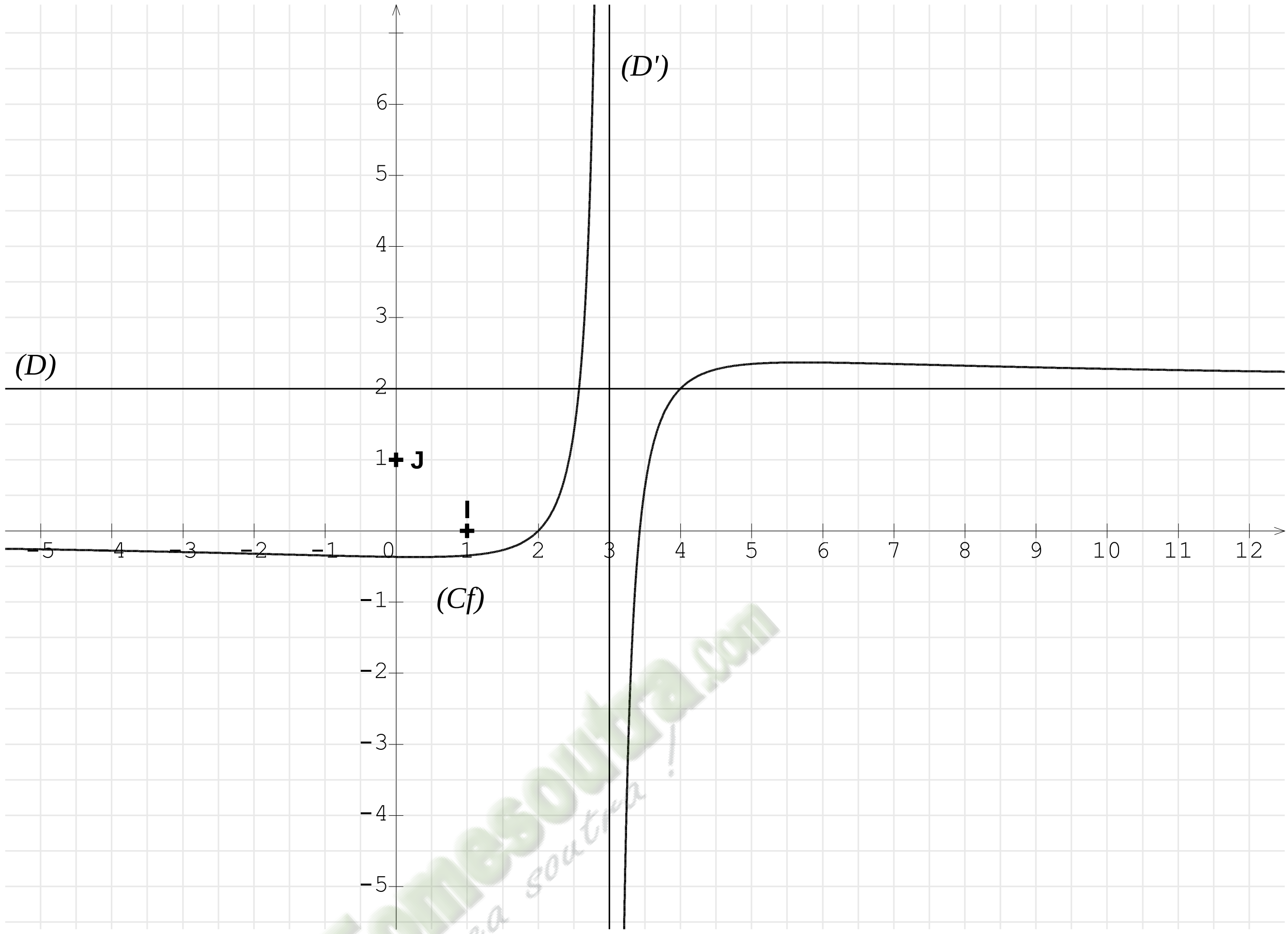
Observe attentivement la figure et donne chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)$.

Corrigé

On a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)=+\infty$



Exercices d'approfondissement

Exercice 6

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x})$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2x+3}{1-\sqrt{x}}\right)$

Corrigé

a) On a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2}-1)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1})=\frac{0}{2}=0$

b) On a : $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x}-1)=+\infty$

c) Posons $X=\sqrt{x}$.

On a $x=X^2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x})=+\infty$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{1-\sqrt{x}}\right)=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{2X^2+3}{1-X}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2X^2}{-X}\right)=\lim_{x\to+\infty}(-2X)=-\infty$$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par : $f(x)=\dfrac{5x-2}{3-x}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)$ puis interprète graphiquement ton résultat.

2) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interprète graphiquement ton résultat.

Corrigé

1) On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{5x-2}{3-x}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\left((-5x+2)\times\dfrac{1}{x-3}\right)=+\infty$ car

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}(-5x+2)=-13$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)=+\infty$ alors la droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

2) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{3-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x}{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-5)=-5$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-5$ alors la droite d'équation $y=-5$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $+\infty$.

Durée : 15 heures

Compétence 1	**Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**
Thème 2	**Fonctions**

Leçon 9 : ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Ta tante a une entreprise qui fabrique des jus de fruits. Pour des contraintes de fabrication et de conservation, elle fabrique un nombre de jus ne pouvant excéder 100. Chaque jus est vendu à 100F CFA et on suppose que tous les jus fabriqués sont vendus. Le coût unitaire de production journalière par jus est fonction de la quantité produite et vérifie la relation suivante : $V(x) = x^2 - 130x + 4225$.
Afin de rentabiliser son activité, ta tante te sollicite pour lui indiquer la quantité exacte de jus de fruits à fabriquer pour un profit maximal.
Par solidarité, toute la classe décide de t'aider à répondre à la préoccupation de ta tante en étudiant la fonction V.

B. CONTENU DU COURS

I –PARITE

Soit f une fonction de IR vers IR d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. **Fonction paire**

a) Définition

Une fonction f de IR vers IR d'ensemble de définition D_f est dite paire lorsque pour tout x élément de D_f, on a : $-x \epsilon D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Exemple

Les fonctions : $x \longmapsto c$ $(c\epsilon IR)$, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto |x|$ et $x \longmapsto cosx$ sont paires.

la fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{2}{1+|x|}$ est paire car l'ensemble de définition Df de la fonction f est IR et donc pour tout x de Df, on a $-x \in Df$.

Ensuite pour tout x de Df, $f(-x) = \frac{2}{1+|-x|}$; $|-x| = |x|$; donc $f(-x) = f(x)$.

b) Interprétation graphique

Propriété

La fonction f est paire si et seulement si la droite (OJ) est un axe de symétrie de (C_f) dans un repère orthogonal (O, I, J).

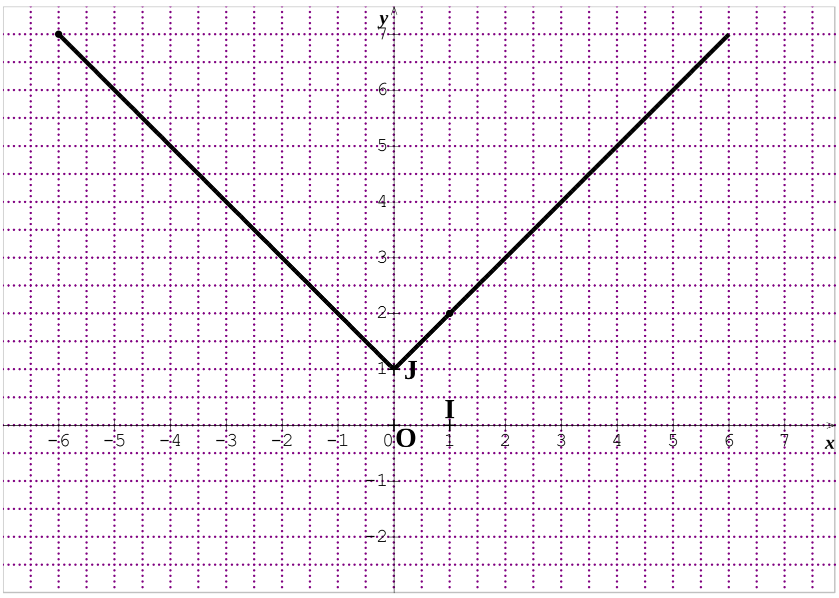
Exemple

La courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto x^2$ admet la droite des ordonnées (OJ) comme axe de symétrie dans un repère orthogonal (O, I, J).

Exercice de fixation

La représentation ci-dessous, est celle d'une fonction de f de $[-6; 6]$ dans IR dans un repère orthonormé (O, I, J). Cette représentation graphique admet la droite (OJ) comme axe de symétrie.

Justifie que la fonction f est paire.



SOLUTION

Par hypothèse, la représentation graphique de f admet la droite (OJ) comme axe de symétrie dans repère orthonormé (O, I, J). Donc la fonction f est paire.

2. Fonction impaire

a) Définition

Une fonction f de IR vers IR d'ensemble de définition D_f est dite impaire lorsque pour tout x élément de D_f, on a : $-x \epsilon D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exemple

Les fonctions : $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto sinx$ sont impaires.

La fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ est impaire car l'ensemble de définition Df de la fonction f est IR et donc pour tout x de Df, on a $-x \in Df$.

Ensuite pour tout x de Df, $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+(x)^2}$. il en résulte que : $f(-x) = -f(x)$.

b) Interprétation graphique

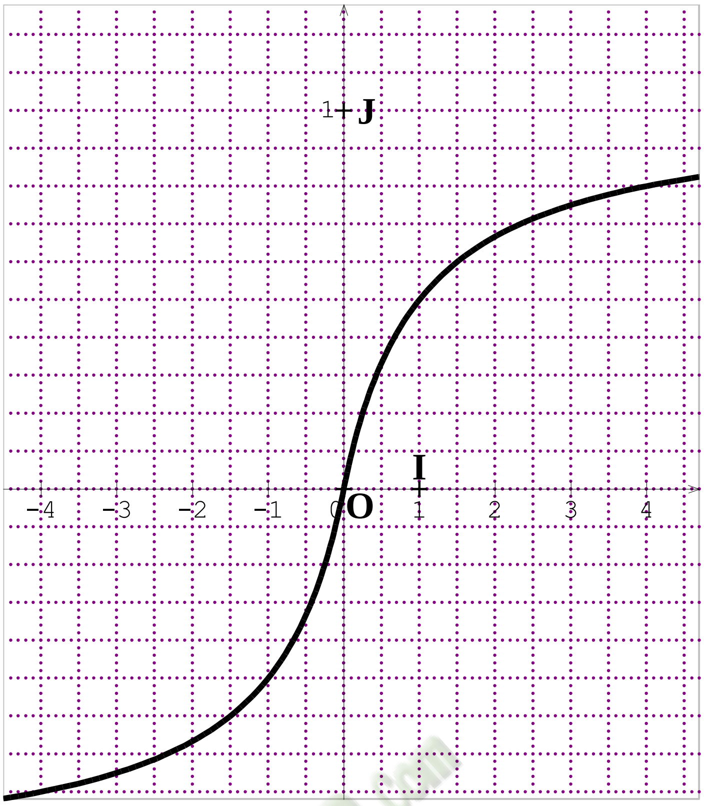
Propriété

La fonction f est impaire si et seulement si le point O est un centre de symétrie de (C_f) dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

Exercice de fixation

La représentation ci-dessous, est celle d'une fonction de f de $[-4; 4]$ dans IR dans un repère (O, I, J).

Cette représentation graphique admet le point O comme centre de symétrie.



Justifie que la fonction f est impaire.

SOLUTION

Par hypothèse, la représentation graphique de f admet le point O comme centre de symétrie dans repère (O, I, J). Donc la fonction f est impaire.

Remarques

- Un sous- ensemble E de IR est dit symétrique par rapport à zéro lorsqu'il vérifie la propriété suivante : $\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{\epsilon}$ E, on a $-x\epsilon$E.

  Exemples : Les ensembles IR, IR\{0} , IR\{-2 ;2} , $[-1; 1]$ et $]-3; 3[$ sont symétriques par rapport à 0.
- Lorsque la fonction f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap [0; +\infty[$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à la droite (OJ) si $f$est paire ou par symétrie par rapport au point O si f est impaire.

II-ELEMENTS DE SYMETRIE

1. Axe de symétrie

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit une droite (D) d'équation : $x = a$ et une fonction f de IR vers IR d'ensemble de définition Df.

La droite (D) est un axe de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de Df on a :

$(2a - x) \in Df$ et $f(2a - x) = f(x)$.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit une droite (D) d'équation : $x = 3$ et une fonction f de IR vers IR définie par :

$f(x) = -2(x-3)^2 + 5$.

Démontre que la droite (D) est un axe de symétrie de la courbe de f.

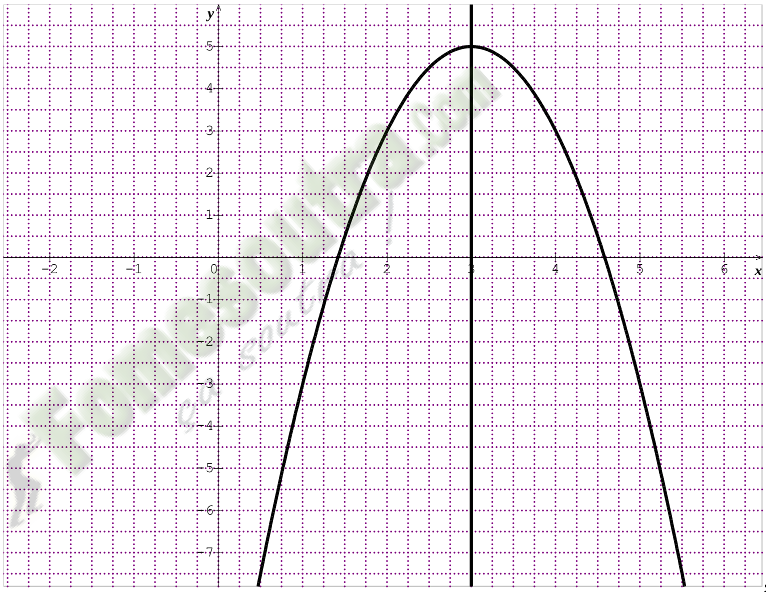
SOLUTION

L'ensemble de définition de f est $Df = IR$. Donc pour tout x de Df on a $6 - x$ appartient à Df.

Ensuite $f(6-x) = -2(6-x-3)^2 + 5 = -2(x-3)^2 + 5$. Donc $f(6-x) = f(x)$.

D'où le résultat.

On donne ci-dessous, un aperçu de la courbe de f et de son axe de symétrie.



Remarque :on peut aussi utiliser la propriété ci- dessous

La droite $(D): x = a$ est un axe de symétrie de (c_f) si et seulement si :

Pour tout $h \in \mathbb{R}; tel\ que, (a+h) \in D_f\ \ ona\ (a-h) \in D_f\ et\ f(a+h) = f(a-h)$

2. **Centre de symétrie**

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit un point A de couple de coordonnées (a, b) et une fonction f de IR vers IR d'ensemble de définition Df.

Le point A est un centre de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de Df on a :

$2a - x \in Df$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit A de coordonnées (2 ;3) et une fonction g de IR vers IR définie par :

$g(x) = (x-2)^3 + 3.$

Démontre que le point A est un centre de symétrie de la courbe de g.

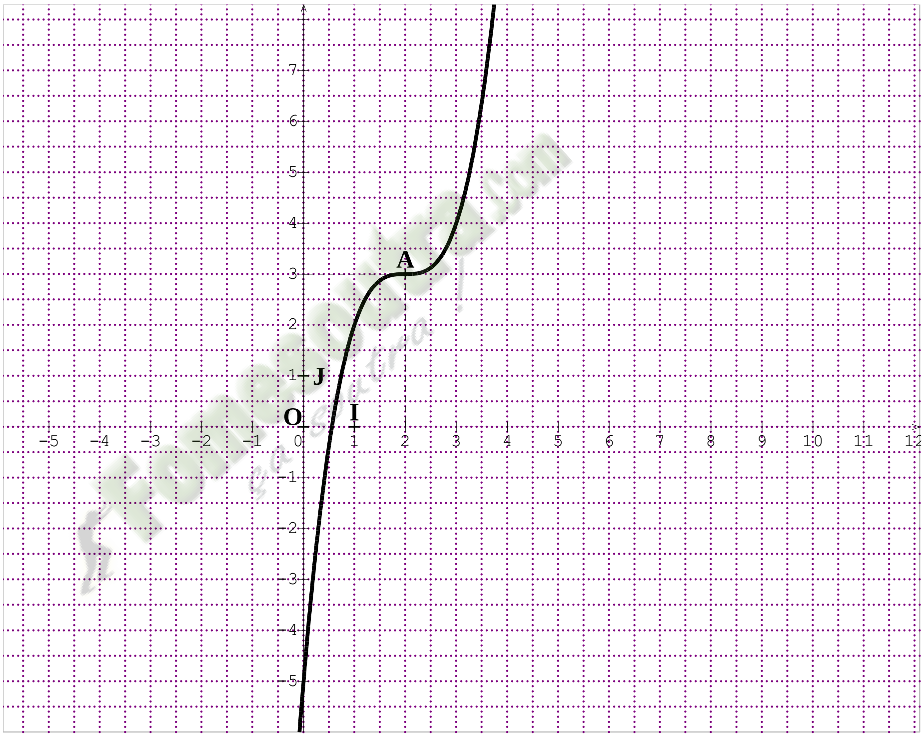
réponse

L'ensemble de définition de g est $Dg = IR$. Donc pour tout x de Dg on a $4-x$ appartient à Dg.

Ensuite : $g(4-x) + g(x) = (4-x-2)^3 + 3 + (x-2)^3 + 3$.

$g(4-x) + g(x) = (-x+2)^3 + (x-2)^3 + 6$. Sachant que $(-x+2)^3 = -(x-2)^3$, on obtient finalement : $g(4-x) + g(x) = 6$. D'où le résultat.

On donne ci-dessous, un aperçu de la courbe de g et de son centre de symétrie.



Remarque :on peut aussi utiliser la propriété ci dessous
La droite $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de (c_f) si et seulement si :
Pour tout $h \in \mathbb{R}; tel\ que, (a+h) \in D_f\ \ ona\ (a-h) \in D_f\ et\ \ \frac{f(a+h)f(a-h)}{2} = b$

3. Fonction périodique

Définition

Soit T un nombre réel strictement positif.
Une fonction f est dite périodique de période T lorsque $\forall x \in D_f$:
$x+T\ \in D_f\ ,\ \ x-T\ \in\ D_f\qquad et\ \ f(x+T) = f(x).$

Remarque

on dit souvent qu'une fonction f est T-périodique pour exprimer qu'elle est périodique de période T.

Exemple

- Les fonctions : $x \longmapsto cosx$, $x \longmapsto sinx$ sont périodiques de période 2π.
- La fonction : $x \longmapsto tanx$ est périodique de période π.

La fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = sin(2x)$ est π-périodique

- car l'ensemble de définition de f est IR ; et donc pour tout x de IR, $x + \pi$ et $x - \pi$ appartiennent à IR.
- Ensuite $sin\big(2(x + \pi)\big) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$ car la fonction sinus est 2π-périodique.

Donc $f(x + \pi) = f(x)$.

Remarques

- Si T est une période de f alors $\forall$ ($k \epsilon \mathbb{Z} \backslash \{0\}$) $f(x + kT) = f(x)$.
- Si f est périodique de période T, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap [a; a + T[$. La courbe obtenue est ensuite complétée par les translations de vecteurs
  T$\overrightarrow{OI}$ et -T$\overrightarrow{OI}$.

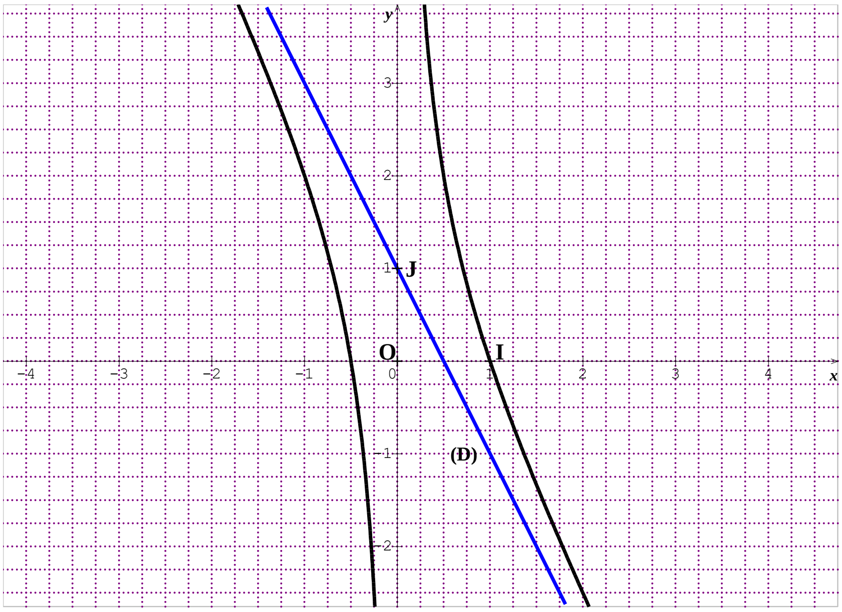
III- ASYMPTOTE OBLIQUE

Définition

f est une fonction et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal.
Soit a et b des nombres réels ($a \neq 0$).
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à (C_f) en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exemple

Sur la représentation ci-dessous, la droite (D) est une asymptote (oblique) à la courbe en $(+\infty)$ et $en(-\infty)$.



C- SITUATION COMPLEXE

Des élèves de $1^{ère}D$ ont découvert le texte suivant dans une revue. « Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'ampoules dite `` économique de 20 watts''. Chaque ampoule est vendue à 100 francs CFA. Il a été établi que le coût de production de x ampoule(s) est donné par la fonction suivante : $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle [10 ; 100]. Le Directeur de l'entreprise cherche à déterminer le nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de production et avoir un bénéfice maximal ».

Impressionnés par cette formule donnant le coût de production, tu cherches à répondre aux préoccupations du Directeur.

Réponds, à l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques aux préoccupations du Directeur.

SOLUTION

Pour répondre à la préoccupation du Directeur, je vais faire une étude de fonction.

Je vais faire l'étude de la fonction U afin de déterminer son minimum, le point auquel ce minimum sera atteint correspondra au nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de production pour avoir un bénéfice maximal.

$D_U = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$U'(x) = x' - 10' + \left(\frac{900}{x}\right)' = 1 - \frac{900}{x^2} = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$

$\forall x \in D_U, x^2 > 0; U'$a le signe de $(x-30)(x+30)$.

Tableau de signe

x	$-\infty$		-30		30		$+\infty$
$x^2 - 900$		+	0	-	0	+	

x	10		30		100
$U'(x)$		-	0	+	
U		↘	50	↗	

50 est le minimum de la fonction U est 50 et il est atteint en 30.

Le nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de production et avoir un bénéfice maximal est 30.

D. EXERCICES

Exercice1

f est une fonction de IR vers IR. Dans chacun des cas suivants, étudie la parité de f.

1) $f(x) = 3x^4 - |x| + 1$; 2) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; 4) $f(x) = x^2 + 4x - 8$.

1) SOLUTION
2) $D_f = \mathbb{R}$. Donc D_f est symétrique par rapport à 0.

$f(-x) = 3(-x)^4 - |-x| + 1 = 3x^4 - |x| + 1 = f(x)$ donc la fonction est paire.

3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ;1\}$. Donc D_f est symétrique par rapport à 0.

$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x)$, alors la fonction est impaire.

4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.$D_f$ n'est pas symétrique par rapport à 0 car $-1 \in D_f ; et\ 1 \notin D_f$. La fonction n'est ni paire ni impaire.
5) $D_f = \mathbb{R}$. Donc D_f est symétrique par rapport à 0.

$f(-x) = (-x)^2 + 4 \times (-x) - 8 = x^2 - 4x - 8$; $f(-x) \neq f(x) et f(-x) \neq -f(x)$; par conséquent, la fonction n'est ni paire ni impaire.

Exercice 2

Soit f la fonction polynôme définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 7$ de représentation graphique (C_f) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Démontre que la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f).

SOLUTION

on pose $g(x) = f(x + 2)$ alors $g(x) = (x + 2)^2 - 4(x + 2) + 7 = x^2 + 3$.

$D_g = \mathbb{R}$. Donc D_g est symétrique par rapport à 0.

$g(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = g(x)$, alors la fonction g est paire, d'où la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f).

Exercice 3

Soit f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{x^2+5x-1}{x+1}$. On note (C_f), la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Démontre que le point A(-1 ;3) est un centre de symétrie de (C_f).

SOLUTION

On pose $f(-2 - x) + f(x) = \frac{x^2-x-7}{-x-1} + \frac{x^2+5x-1}{x+1} = \frac{6(x+1)}{x+1} = 6 = 2 \times 3$; alors le point A(-1 ;3) est un centre de symétrie de (C_f).

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \cos\,(3x - \frac{\pi}{5})$.

Démontre que f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

SOLUTION

$D_f =]-\pi; \pi[$; alors $\forall x \in D_f, x + \frac{2\pi}{3} x \in D_f \; et \; x - \frac{2\pi}{3} x \in D_f$.

$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\,[\,3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{5}] = \cos\,(3x + 2\pi - \frac{\pi}{5}) = \cos\,(3x - \frac{\pi}{5} + 2\pi) = \cos\,(3x - \frac{\pi}{5})$ car cos est périodique de période 2π.

On a donc $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$, par conséquent, f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$

Exercice 5

Soit f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x-1}$. On note (C_f), la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1) Démontre que pour tout x de $D_f, f(x) = 2x + 5 + \frac{4}{x-1}$
2) Démontre que la droite d'équation $y = 2x + 5$ est une asymptote à (C_f) en$+\infty$ et en $-\infty$.

SOLUTION

1) En effectuant la division euclidienne de $2x^2 + 3x - 1$ par -1 , on a $f(x) = 2x + 5 + \frac{4}{x-1}$

2) $f(x) - 2x + 5 = \frac{4}{x-1}$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-1} = 0$, alors la droite d'équation $y = 2x + 5$ est une asymptote à (C_f) en$+\infty$ et en $-\infty$.

Dans les exercices suivants, f est une fonction de IR vers IR. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Exercice 6

Soit $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
1-Justifie que le point A(0 ;-1) est un centre de symétrie de (C).
2-Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3-a) Calcule la dérivée de f .
b) Etudie les variations de f sur $[0\,;+\infty[$ et dresse son tableau de variation.
4-a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
b) Etudie la position de (C) par rapport (T).
5- Trace la droite (T) et construis (C) sur $[0\,;+\infty[$ puis sur IR dans le plan muni du même repère orthonormé (O, I, J) tel que : OI = OJ = 1cm.

1- SOLUTION

2- On pose $g(x) = f(x+0) + 1 = x^3 - 3x - 1 + 1 = x^3 - 3x$
$D_g = \mathbb{R}$, donc l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0.
$g(-x) = (-x)^3 - 3 \times (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -g(x)$, alors g est impaire ; par conséquent le point A(0 ;-1) est un centre de symétrie de (C).

3- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

4- a) $f'(x) = (x^3 - 3x - 1)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

b) Tableau de signe de f'

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

$\forall x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[, f'(x) \geq 0;$ alors f est croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur [1 ;+∞[
$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) \leq 0;$ alors f est strictement décroissante sur]-1 ;1[

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

5- a) $y = f(0) + f'(0)(x-0)$

$y = -1 - 3 \times x$

$(T): y = -3x - 1$

b) Position de (C) par rapport à (T)

$f(x) - y = x^3 - 3x - 1 - (-3x - 1)$

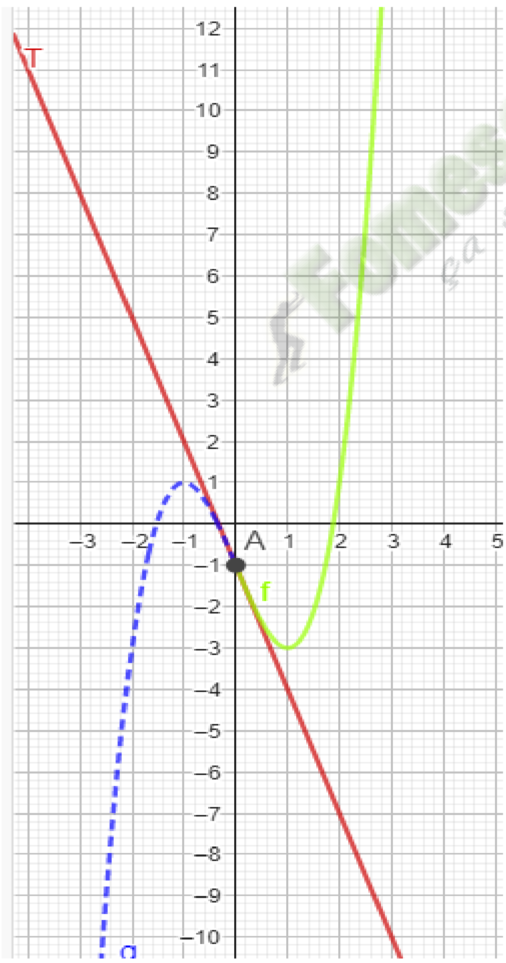
$= x^3 - 3x - 1 + 3x + 1$

$f(x) - y = x^3$

$x^3 \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ et $x^3 \leq 0$ sur $]-\infty; 0]$; alors :

- Sur $]-\infty; 0]$, (T) est au-dessus de (C)
- Sur $[0; +\infty[$, (C) est au-dessus de (T).

6- Construction



Exercice 7

f est définie sur IR\{-1} par : $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

1-Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2-Calcule : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

3-a) Calcule la dérivée de f.

b) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

4-Justifie que le point A(-1 ; 2) est un centre de symétrie de (C).

5-Construis la courbe (C) et ses asymptotes. Unité graphique : OI = OJ = 1cm.

1- SOLUTION

2- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$. Alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ *et* $-\infty$.

3- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -3 \times (-\infty) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -3 \times (+\infty) = -\infty$. Alors la droite d'équation x= -1 est une asymptote verticale en +∞ et -∞.

4- a) $f'(x) = \frac{(2x-1)'(x+1)-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$

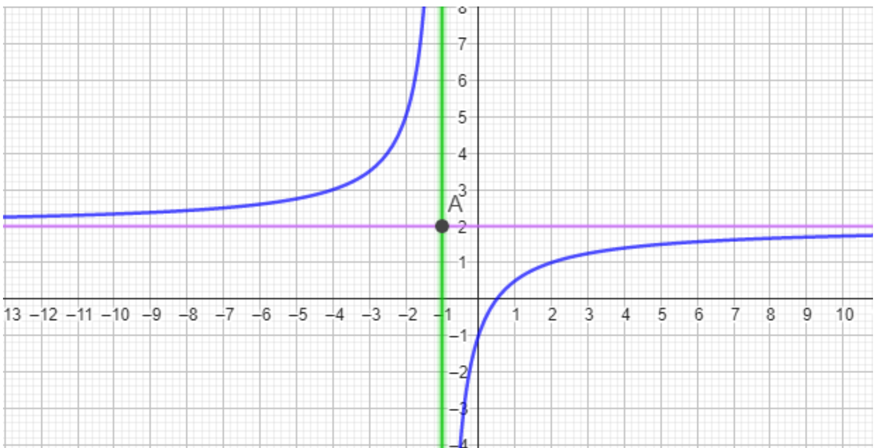
b) $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$; $\forall x \in D_f, (x+1)^2 > 0, donc\ f(x)' > 0$; alors f est croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 2$

On pose $g(x) = f(x-1) - 2 = -\frac{3}{x}$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ donc l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. $g(-x) = \frac{-(-x)}{3} = -g(x)$ donc g est une fonction impaire ; alors le point A(-1 ; 2) est un centre de symétrie de (C).

5- Construction



Exercice 8

$$f \text{ est définie sur } IR\backslash\{2\} \text{ par} : f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}.$$

1-Calcule : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2-Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3-a) Détermine les réels a , b et c tels que : $\forall x \epsilon$ IR-{2}, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

b) Justifie que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Etudie les positions de (C) par rapport à (D).

4-a) Justifie que : $\forall x \epsilon$ IR-{2}, $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.

b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

5-Démontre que le point A(2 ; 1) est un centre de symétrie de (C).

6-Construis la courbe (C) et ses asymptotes. Unité graphique : OI = OJ = 1cm.

1- SOLUTION

2- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$; alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale en l'infini à (C).

3- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

4- a)

en effectuant la division euclidienne de $x^2 - 3x + 3$ par $x - 2$ on obtient

$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$ alors $a = 1$; $b = -1$ et $c = 1$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x - 1)] = x - 1 + \frac{1}{x-2} - (x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$; la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Position de (C) et (D).

$f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x-2}$

x	$-\infty$	2	$-\infty$
$x - 2$	-	0	+

- Sur $]-\infty; 2[$, (D) est au-dessus de (C)
- Sur $]2; +\infty[$, (C) est au-dessus de (D).

5- a) $f'(x) = \frac{(x^2-3x+3)\prime(x-2)-(x^2-3x+3)(x-2)\prime}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

b) $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$; $\forall x \in D_f, (x-2)^2 > 0$ alors f' a le signe de $x^2 - 4x + 3$.

<u>Déterminons le signe de $x^2 - 4x + 3$.</u>

$\triangle = 4$; les deux racines du polynôme sont : $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. Alors :

pour $x \in [1; 2[\cup]2; 3], x^2 - 4x + 3 \leq 0$ *et pour* $x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[, x^2 - 4x + 3 \geq 0$

Par conséquent : $\begin{cases} f \text{ est décroissante sur} [1; 2[\text{ et sur }]2; 3] \\ f \text{ est croissante sur }]-\infty; 1] \text{ et sur } [3; +\infty[\end{cases}$

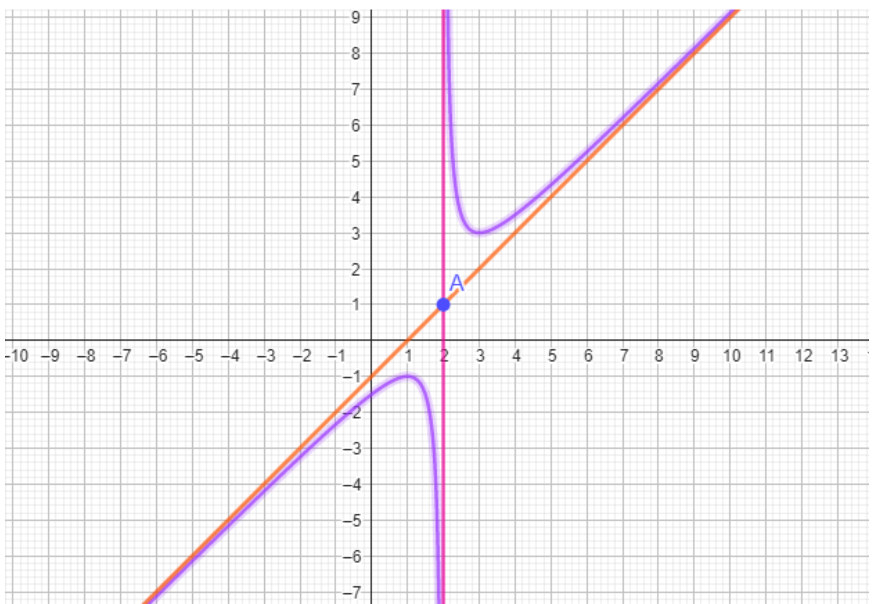
<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	$\Vert$	-	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

6- On pose : $g(x) = f(x+2) - 1 = \frac{x^2+1}{x}$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Alors $\forall x \in D_g, -x \in D_g$.

$g(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -g(x)$, la fonction g est donc impaire. Alors le point A(2 ; 1) est un centre de symétrie de (C).

7- Construction



Exercice 9

Soit $f(x) = 2sinx + sin2x.$

1-a) Démontre que f est impaire et périodique de période 2π.

b) Justifie que l'on peut limiter l'ensemble d'étude à l'intervalle : I=$[0\ ;\ \pi]$.

2-Démontre que : $\forall x\epsilon\ IR, f'(x) = 2(2cosx - 1)(cosx + 1).$

3-Etudie les variations de f sur l'intervalle I puis dresse son tableau de variation sur I.

4-Trace (C) sur I puis sur $\left[-\frac{7\pi}{3}\ ;\ \frac{7\pi}{3}\right]$. Unité graphique : OI = OJ = 1cm.

SOLUTION

1- a) f est définie sur $\mathbb{R}$, $f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin(x) - \sin(2x) = -f(x)$, la fonction est donc impaire.

$$f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2(x + 2\pi)) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 2 \times 2\pi)$$

$f(x + 2\pi) = 2\sin(x) + \sin(2x) = f(x)$ car la fonction sin est périodique de période 2π .

b) f est périodique de période 2π, donc on peut l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap [a; a + 2\pi]$ en prenant a=0 ; on restreint l'ensemble d'étude à $[0; 2\pi]$; la fonction étant impaire, on pourra donc l'étudier sur $[0; \pi]$ et compléter par la symétrie centrale de centre O.

2- $f'(x) = 2cox + 2\cos(2x)$comme $\cos(2x) = 2cos^2(x) - 1$ on obtient donc : $f'(x) = 2cox + 4cos^2(x) - 2 = 4cos^2(x) + 2\cos(x) - 2 = 2(cos^2(x) + \cos(x) - 1)$

En posant $\cos(x) = X$ et en calculant le discriminant du nouveau polynôme, on obtient deux racine -1 et $\frac{1}{2}$. On a donc : $2(cos^2(x) + \cos(x) - 1) = 2 \times 2(cosx + 1)\left(cosx - \frac{1}{2}\right) =$

$$2(cosx + 1)(2cosx - 1)$$

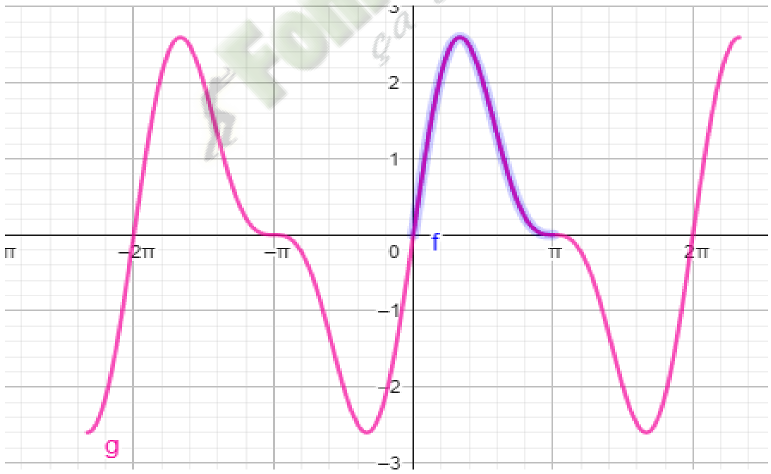
3- En résolvant l'équation $(cosx + 1)(2cosx - 1) = 0$ on a :

$cosx = -1\ ou\ cosx = \frac{1}{2}$, en résolvant sur I, on a $x = \pi\ ou\ x = \frac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$2cosx - 1$		+	0	-	
$cosx + 1$		+		+	0
$f'(x)$		+	0	-	0

Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		+	0	-	0
f	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0



Exercice 10

Ta tante a une entreprise qui fabrique des jus de fruits. Pour des contraintes de fabrication et de conservation, elle fabrique un nombre de jus ne pouvant excéder 100. Chaque jus est vendu à 100F CFA et on suppose que tous les jus fabriqués sont vendus. Le coût unitaire de production journalière par jus est fonction de la quantité produite et vérifie la relation : $V(x) = x^2 - 130x + 4225$.

Afin de rentabiliser son activité, ta tante te sollicite pour lui indiquer la quantité exacte de jus de fruits à fabriquer pour un profit maximal.

1-Démontre que le bénéfice global $B(x)$ réalisé par l'entreprise pour x jus produits et vendus est : $B(x) = -x^2 + 130x - 4125$.

2-Dresse le tableau de variation de la fonction B.
3-Déduis le bénéfice maximal, puis indique pour quelle production elle est atteinte.

Exercice 11

Partie A

Soit p la fonction polynôme définie par : $p(x) = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$.
1-Justifie que : $p(x) = (x-1)^2(x^2 + 2x + 9)$.
2-Etudie le signe de $p(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$ et on note $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1-Détermine l'ensemble de définition D_f de f.
2-Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3-a) Justifie que : $\forall x \in D_f$, $f(x) = x - 1 + \frac{8}{x^2+3}$.
b) Déduis-en que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
c) Etudie les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (D).
4-a) Justifie que : $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{p(x)}{(x^2+3)^2}$.
b) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
5-Démontre qu'il existe un unique point A de $(\mathcal{C})$ tel que la tangente à $(\mathcal{C})$ en A soit parallèle à (D).
6-a) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1 est :
$y = 2x + 2$.
b) Vérifie que : $\forall x \in D_f$, $f(x) - (2x + 2) = -\frac{(x+1)^3}{x^2+3}$.
c) Etudie les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (T).
7-Trace les droites (D) et (T) et construis la courbe $(\mathcal{C})$. Unité graphique : 1cm.

Durée : 10 heures

Compétence 3	**Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan**
Thème 1	**Géométrie du plan**

Leçon 10 : **Angles orientés et trigonométrie**

Dans cette leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé direct$(0, I, J)$.
(C) est le cercle trigonométrique, I' et J' sont les points de (C) diamétralement opposés respectivement à I et J. (T) est la tangente à(C) en I. L'unité de mesure d'angle est le radian.

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève de 1ère D d'un lycée Moderne fait des recherches sur les équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ dans la salle multimédia de son établissement. Il découvre des équations de types :
$\cos x = a$; $\sin x = a$; $\tan x = a$ $(a \in \mathbb{R})$; $a\cos x + b\sin x + c = 0$ $(a \neq 0$ et $b \neq 0)$.
Il présente ses recherches à ces camarades de classe. Ceux-ci constatent que ces équations ne sont pas habituelles. Ils décident d'approfondir leurs connaissances sur la trigonométrie afin de résoudre ces équations.

B- RESUME DE COURS

I) ANGLES ORIENTES

1) Mesures d'un angle orienté

a) Définition

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté et α sa mesure principale.

On appelle mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, tout nombre réel de forme α + 2kπ où $k \in \mathbb{Z}$.

On note $mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 2k\pi$.

Exemple

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{3}$.

$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$.

$\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{11\pi}{3}$ sont des mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Remarques

A tout nombre réel x correspond un unique point M de (C) ; donc un unique angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$ dont une mesure est x.

- Si x est une mesure d'un angle orienté, les mesures de cet angle orienté sont les nombres réels de la forme $x + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$
- Toutes les mesures d'un même angle orienté ont le même point image M sur (C).

Notations

- L'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de mesure α sera noté $\hat{\alpha}$.
- L'angle orienté nul et l'angle plat seront notés respectivement $\hat{0}$ et $\hat{\pi}$.

b) Recherche de la mesure principale d'un angle orienté

Propriété :

Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α, α ∈ ℝ. Il existe un unique nombre réel $x \in]-\pi\,;\pi]$ tel que Mes$(\hat{\alpha}) = x$.

Méthode

Déterminer la mesure principale α d'un angle orienté dont une mesure x est connue, consiste à écrire $\alpha = x + 2k\pi$ où $-\pi < \alpha \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- Cette écriture peut être immédiate.
- Sinon, on détermine tout d'abord k à l'aide des inégalités $-\pi < x + 2k\pi \leq \pi$;
- Puis l'on détermine α à l'aide de l'égalité $\alpha = x + 2k\pi$.

Exercice de fixation

Détermine la mesure principale α de l'angle orienté dont une mesure est : $-\frac{119\pi}{4}$.

Solution

α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $-\pi < \alpha \leq \pi$;   (2) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = -\frac{119\pi}{4} + 2k\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$-\pi < -\frac{119\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$, en divisant par 2π on obtient : $-\frac{1}{2} < -\frac{119}{8} + k \leq \frac{1}{2}$;

par la suite : $\frac{115}{8} < k \leq \frac{123}{8}$; d'où : $k = 15$.

donc α = $-\frac{119\pi}{4} + 15 \times 2\pi$; ce qui donne : $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2) Somme et différence de deux angles orientés

Définitions

Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives α et β.

- On appelle somme des angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ et on note $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ l'angle orienté dont une mesure est α + β.
- Deux angles orientés sont opposés lorsque leur somme est l'angle orienté nul. L'opposé de $\hat{\alpha}$ est noté $-\hat{\alpha}$, il a pour mesure $-\alpha$.
- La différence des angles orienté $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, noté $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ est l'angle orienté $\hat{\alpha} + (-\hat{\beta})$ dont une mesure est α – β.

Exemple :

Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{-2\pi}{5}$

- $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{5}$
- $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}$

Remarque

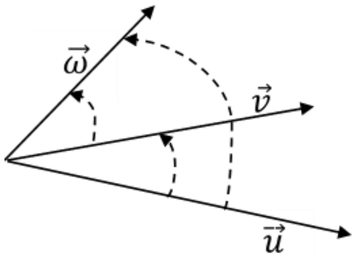
$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}$

II) PROPRIETES DES ANGLES ORIENTES

1) Relation de Chasles

Propriété

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{w}})$.



EXERCICE DE FIXATION

A , B, C et D sont quatre points distincts. Choisis l'égalité correcte :

a) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC}})$

b) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AC}})$

c) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}}\right)$

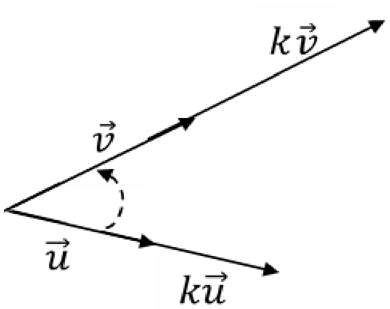
SOLUTION

L'égalité correcte est b)

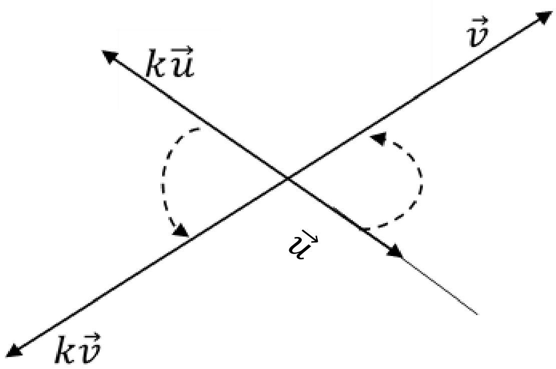
Conséquences

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k un nombre réel non nul on a :

1) $(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
2) Si k > 0 alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
3) Si k < 0 alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},k\vec{v}}) = \hat{\pi} + (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
4) $(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$



$k > 0$



$k < 0$

EXERCICE DE FIXATION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Ecris le numéro de l'égalité suivi de VRAI si l'égalité est juste ou de FAUX si l'égalité n'est pas juste.

N°	Égalités
1	$(\widehat{-2\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
2	$(\widehat{-\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \hat{\pi}$
3	$(\widehat{7\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},7\vec{v}})$
4	$(\widehat{-5\vec{u},-5\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
5	$(\widehat{\vec{u},4\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \hat{\pi}$

SOLUTION

1- FAUX ; 2- VRAI ; 3- VRAI ; 4- VRAI ; 5- FAUX

2) Double d'un angle orienté

Définition

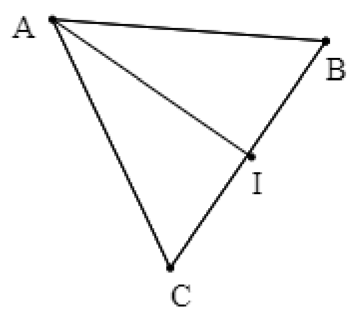
Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté.

On appelle double de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et on note $2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ l'angle orienté défini par : $2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Exemple

ABC est un triangle équilatéral de sens indirect et I le milieu de $[BC]$

$2\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)$



Remarques

- Le double d'un angle orienté de mesure α a pour mesure 2α.
- Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés ; on a : $2\hat{\alpha} + 2\hat{\beta} = 2(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$.

Propriétés

Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés et $\frac{\hat{\pi}}{2}$ l'angle orienté droit direct. On a :

1) $2\hat{\alpha} = \hat{0} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \hat{0}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\pi})$
2) $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\beta}+\hat{\pi})$
3) $2\hat{\alpha} = \hat{\pi} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \frac{\hat{\pi}}{2}$ ou $\hat{\alpha} = -\frac{\hat{\pi}}{2})$

EXERCICES DE FIXATION

A, B et C sont trois points distincts tels $2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{0}$.

Démontre que les points A, B et C sont alignés.

CORRIGÉ

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{0} \Leftrightarrow \left(\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{0} \text{ ou } \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{\pi}\right)$$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

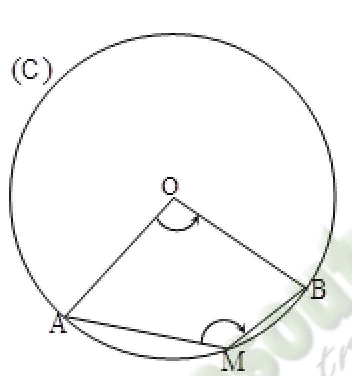
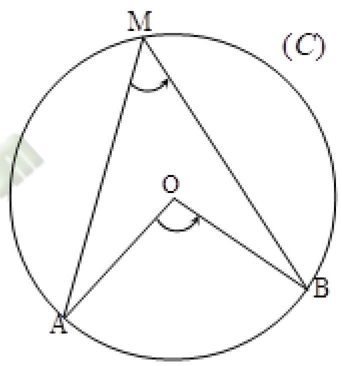
$\Leftrightarrow$ A, B et C sont alignés

3) Angles orientés et cercle

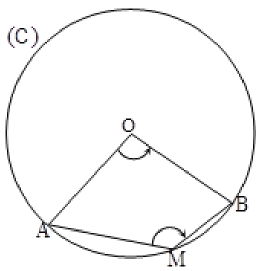
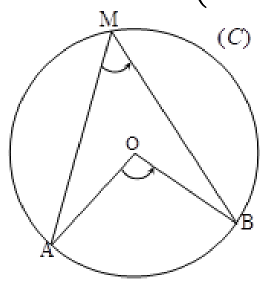
a) Angles orientés inscrits dans un cercle.

Propriété

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O ; A et B deux points distincts de ce cercle. Soit M un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B

 $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + \hat{\pi}$	 $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

Exercice de fixation

1)On donne Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.  Calcule Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$	2) On donne Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{4}$  Calcule Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

Solution

1) $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + \hat{\pi}$ donc mes$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ + mes $\hat{\pi} = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$.

Donc Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$.

2) $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ donc mes$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ donc mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$.

Par suite Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$.

b) Caractérisation d’un cercle

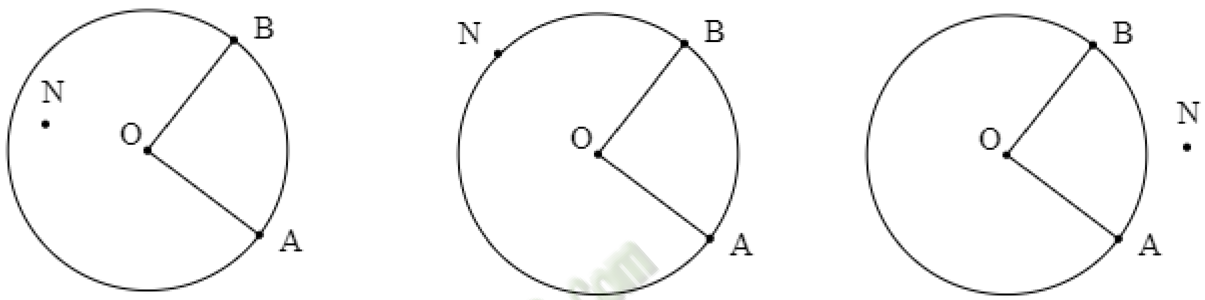
Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O ; A et B deux points distincts de ce cercle. Pour tout point M du plan distinct de A et B on a :

$$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$$

EXERCICE DE FIXATION

Observe les figures ci-dessous et indique dans quel cas on a : $2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

a) b) c)



Solution

Figure b)

c) Points cocycliques

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan tels que trois quelconques d’entre eux ne sont pas alignés.

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$.

EXERCICE DE FIXATION

Soit ABC un triangle rectangle en C et D le symétrique de C par rapport à la droite (AB).

Démontre que les points A, B , C et D sont cocycliques.

Solution

Les triangles ABC et ABD sont rectangles respectivement en C et en D

On a : $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \hat{\pi}$ et $2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) = \hat{\pi}$ donc $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)$. Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

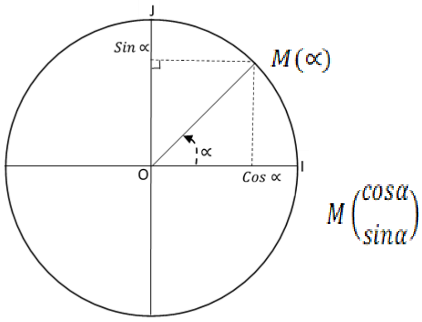
III) TRIGONOMETRIE

1) Lignes trigonométriques d'un angle orienté

a) Cosinus et Sinus d'un angle orienté

Définition

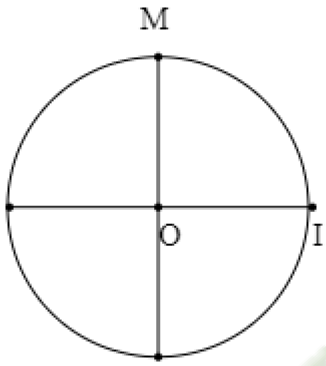
Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur (C).



- Le cosinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α est l'abscisse de M.
- Le sinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α est l'ordonnée de M.

Exemple

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad M\binom{0}{1}$



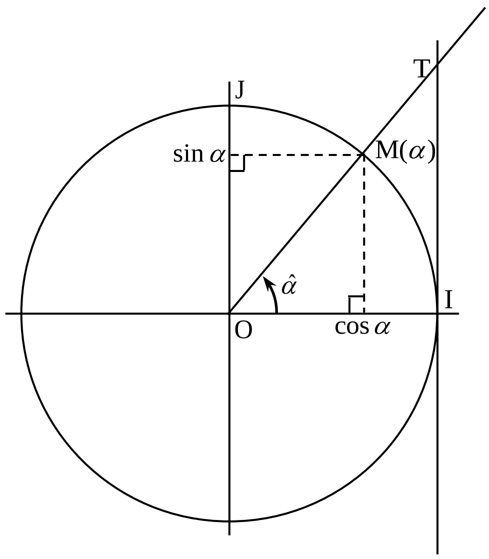
b) Tangente d'un angle orienté

Définition

Soient $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté non droit de mesure α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$).

La tangente du $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α est le nombre réel noté tan $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ défini par :

tan $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ = tanα = $\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$



$\tan\alpha = \overline{IT}$

Exemple

$$tan\pi = \frac{sin\pi}{cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

Remarques

- cosα, sinα et tanα sont appelés lignes trigonométriques de l'angle orienté de mesure α
  Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

- tan n'est pas définie pour les nombres réels α de la forme : α = $\frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

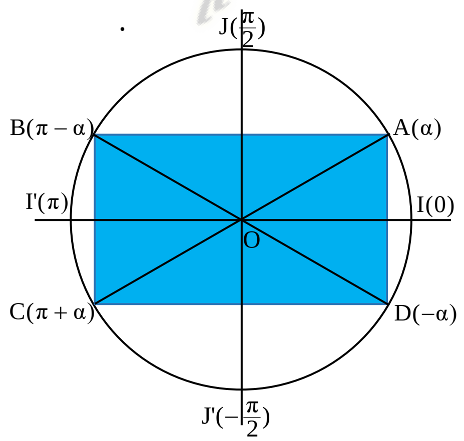
c) Lignes trigonométriques d'angles associés

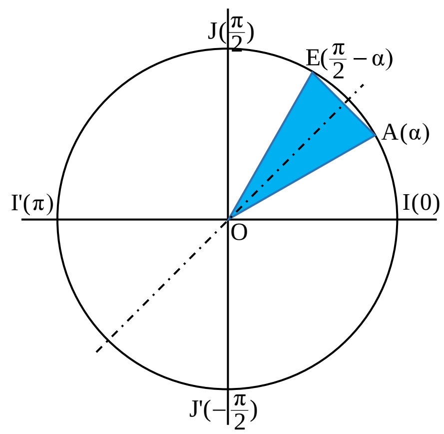
Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α.
Les angles orientés de mesures $-\alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$ sont dit associés à $\hat{\alpha}$

Propriété

Pour tout nombre réel α on a :

cos(-α) = cosα	cos(π – α) = -cosα	cos (π+α) = – cosα	cos($\frac{\pi}{2}$ − α) = sinα	cos ($\frac{\pi}{2}$ + α) = – sinα
sin(-α) = -sinα	sin(π – α) = sinα	sin(π + α) = -sinα	sin ($\frac{\pi}{2}$ − α) = cosα	sin($\frac{\pi}{2}$ + α) = cosα





EXERCICE DE FIXATION

Détermine $cos\alpha$ et $sin\alpha$ dans chacun des cas suivants :

1) $\alpha = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

2) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

3) $\alpha = \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi$

4) $\alpha = \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

Solution

1) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

2) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

Remarque

Les tangentes des angles associés, non droits, se déduisent des formules précédentes.

Exemple : Pour $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{sin\alpha}{-cos\alpha} = -tan\alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-sin\alpha}{-cos\alpha} = tan\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-sin\alpha}{cos\alpha} = -tan\alpha$$

2) Formules trigonométriques

a) Formules d'addition

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b, on a :

1) cos (a + b) = cos a cos b − sin a sin b
2) sin (a + b) = sin a cos b +cos a sin b
3) cos (a − b) = cos a cos b + sin a sin b
4) sin (a − b) = sin a cos b − cos a sin b

EXERCICE DE FIXATION

En remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, détermine $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Solution

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = cos\frac{\pi}{4}\ cos\frac{\pi}{3} - sin\frac{\pi}{4}\ sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = sin\frac{\pi}{4}\ cos\frac{\pi}{3} + cos\frac{\pi}{4}\ sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b) Formules de duplication et de linéarisation

Propriété

Pour tout nombre réel a, on a :

Formules de duplication	**Formules de linéarisation**
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.	$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$. $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

EXERCICE DE FIXATION

Pour chacune des propositions suivantes, trois réponses sont proposées ; une seule est exacte. Ecris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

		Réponses		
N°	Affirmation	A	B	C
1	$\cos^2 a - \sin^2 a$ est égale à	1	$\cos 2a$	$\sin 2a$
2	$\sin 2a$ est égale à	$2\sin a$	$1 - 2\sin^2 a$	$2\cos a \sin a$
3	$2\sin^2 a$ est égale à	$1 - \cos 2a$	$1 + \cos 2a$	$4\sin a$
4	$1 + \cos 2a$ est égale à	$2\cos^2 a$	$1 - 2\sin^2 a$	$1 - 2\cos^2 a$

CORRIGÉ

1-B ; 2-C ; 3-A ; 4-A

3) Fonctions circulaires

a) Fonctions cosinus ; fonctions sinus

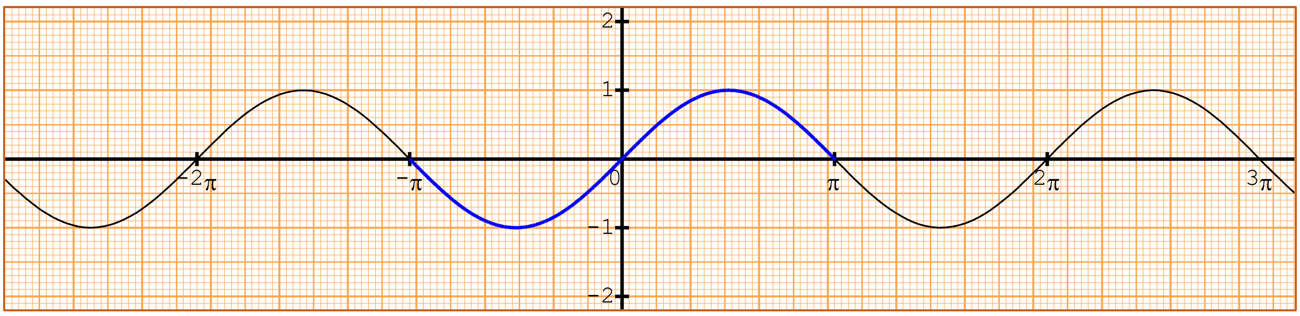
Définitions

- On appelle fonction sinus, la fonction notée sin : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \sin x$
- On appelle fonction cosinus, la fonction notée cos : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \cos x$

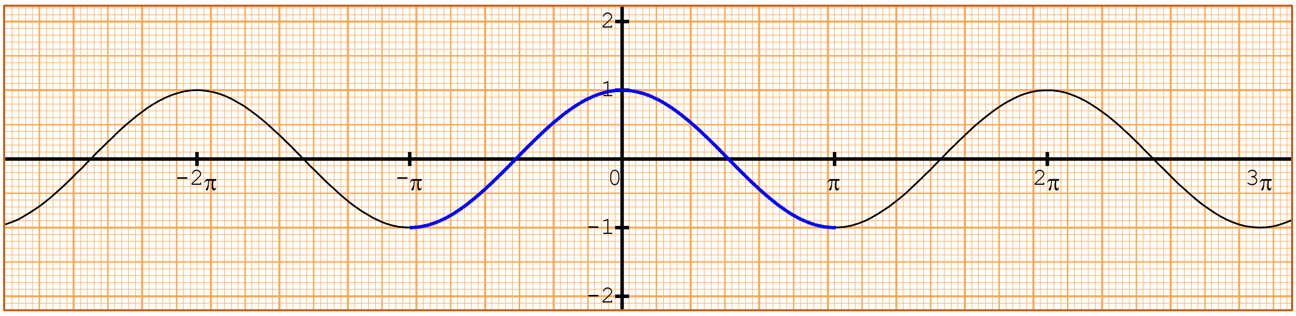
b) Représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus

Pour construire les courbes représentatives des fonctions : $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$, on construit les courbes sur $]-\pi, \pi]$ puis on complète en utilisant les translations de vecteurs $2\pi\overrightarrow{OI}$ et $-2\pi\overrightarrow{OI}$.

Représentation graphique de la fonction sin



Représentation graphique de la fonction cos



b) Fonction tangente

La fonction tangente notée tan est la fonction : $\tan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto tanx$$

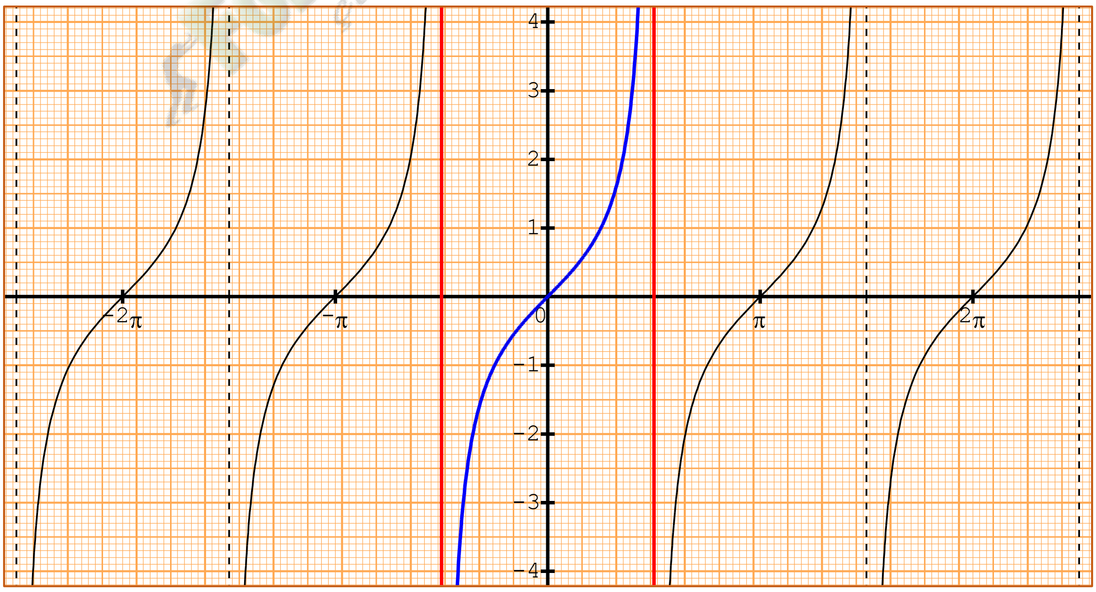
L'ensemble de définition de la fonction tan est $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Cette fonction est continue en tout élément de son ensemble de définition

On construit sa courbe représentative sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puis on complète en utilisant les translations de vecteur $\pi \times \overrightarrow{OI}$ et $-\pi \times \overrightarrow{OI}$.

Exemple

Représentation graphique de la fonction tangente dans le plan muni d'un repère orthonormé



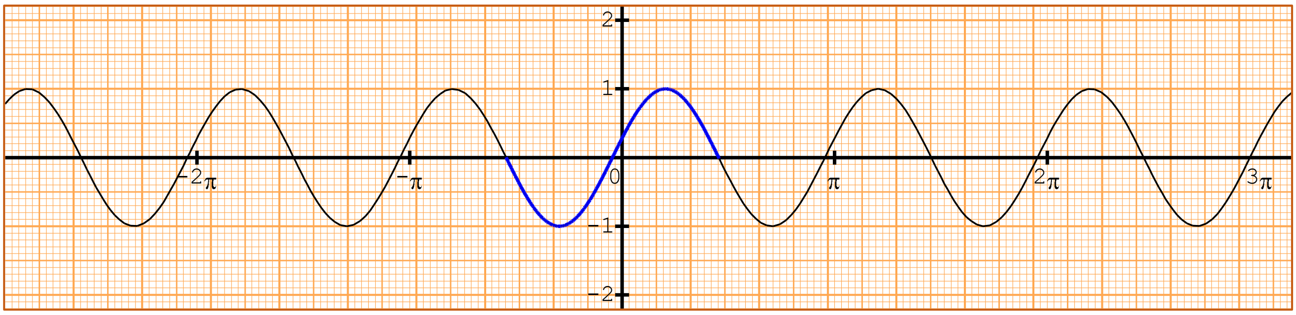
EXERCICE DE FIXATION

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Représente graphiquement la fonction :

$f: x \mapsto \cos(2x + 5)$

CORRIGÉ

Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \cos(2x + 5)$



IV) EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1) Equations du type : $\cos x = \cos a$; $\sin x = \sin a$ et $\tan x = \tan a$

Propriétés

Pour tous nombres réels x et a, on a :

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + \mathrm{k}\pi, \in \mathbb{Z}$, pour x et a différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE DE FIXATION

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

a) $cosx = \frac{1}{2}$.

b) $sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $tanx = 1$

SOLUTION

a) On a : $cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

$$cosx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow cosx = cos\frac{\pi}{3}$$

$$cosx = cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont les nombres réels x de forme : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) On a : $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$sinx = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = \pi + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont les nombres réels x de forme : $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) On a : tan $\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Les solutions sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

<u>Remarques</u> : cas particuliers d'équations trigonométriques

1) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi , k \in \mathbb{Z}$

2) $sx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbb{Z}$

3) $sx = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

4) $sinx = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

5) $sinx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi , k \in \mathbb{Z}$

6) $sinx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

2) Equations du type : $a\cos x + b\sin x + c = 0$

Méthode

Pour réduire l'expression : $a\cos x + b\sin x$, on peut procéder de la façon suivante :

- On écrit : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$
- On détermine un nombre réel α tel que :

$$\begin{cases} cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

- On écrit ensuite : $acos\, x + bsin\, x = \sqrt{a^2+b^2}\,(cos\alpha\, cosx + sin\alpha\, sinx)$
- Donc : $acos\, x + bsin\, x = \sqrt{a^2+b^2}cos(x-\alpha)$
- On résout l'équation : $cos(x-\alpha) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

EXERCICE DE FIXATION

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{3}cox + sinx = \sqrt{2}$

Solution

$$\sqrt{3}cosx + sinx = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}}cosx + \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}}sinx\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow cos\frac{\pi}{6}cosx + sin\frac{\pi}{6}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou

$x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

V) INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Les résolutions d'inéquations trigonométriques seront traitées sous forme d'exercices.

EXERCICE DE FIXATION

a) Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation (I_1) : sin x $> -\frac{1}{2}$.

b) Résous dans $[0{,}2\pi]$, l'inéquation (I_2) : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

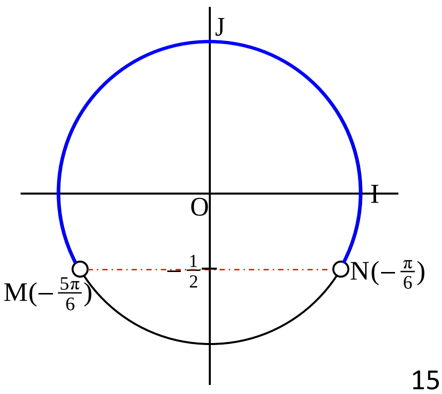
c) Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation (I_3): $tan < 1$.

Solution

Résolution de l'inéquation (I_1) : sin $x > -\frac{1}{2}$

Considérons les points M et M' du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée $-\frac{1}{2}$.

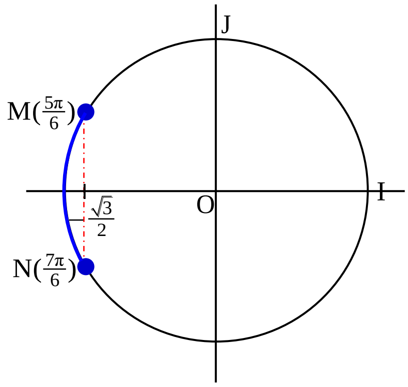
Les points du cercle trigonométrique ayant une ordonnée strictement supérieur à $-\frac{1}{2}$ sont les points du grand arc $\overset{\frown}{MN}$, M et N étant exclus.



Dans $]-\pi, \pi]$ M et N sont les images respectives de $\frac{-5\pi}{6}$ et $\frac{-\pi}{6}$.

Donc : $S_{]-\pi,\pi]} =]-\pi; -\frac{5\pi}{6}[\cup \left]-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$.

Résolution de l'inéquation (I_2) : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

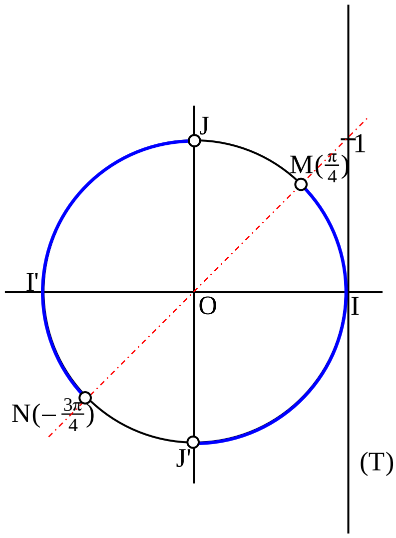


Soient les points M et N du cercle trigonométrique ayant pour abscisse $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les points du cercle trigonométrique ayant une abscisse inférieure ou égale à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les points du petit arc $\widehat{MN}$, les points M et N étant inclus.

Dans $[0; 2\pi]$, M et M' sont les images respectives de $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

Donc : $S_{[0,2\pi]} = \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$

Résolution de l'inéquation (I_3) : $tan < 1$



Contraintes sur l'inconnue : $x \neq -\frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2}$.

Dans]-π ;π], tan x = 1 $\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$.

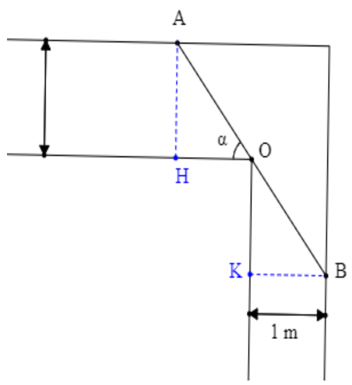
Désignons par N et M les images respectives sur (C) de $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Les points M du cercle trigonométrique tels que (OM) coupe (T) en un point d'abscisse strictement inférieure à 1 sont les points des petits arcs *JN et J'M ; J, N, J' et M* étant exclus.

Dans]-π ;π], l'ensemble des solutions de (I_3) est donc :

$\left]-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

C- SITUATION COMPLEXE



Au cours d'une séance de travaux dirigés en Physique chimie, des élèves de 1ère D découvrent la figure ci-contre :

Cette figure représente un couloir de largeur $\sqrt{3}$ m qui tourne à l'angle droit et cette largeur n'est plus alors que de 1 m

Sur la figure, une droite passe par O fait avec l'un des murs un angle α et coupe les deux autres murs en A et

.

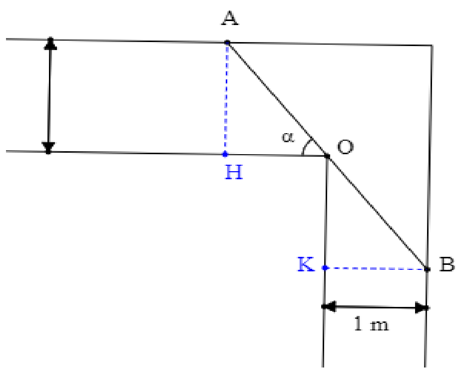
B $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\ \ et\ \ AB = 4\right)$. *L'unité de longueur est le mètre*

En observant la figure, Séri, le chef de classe, affirme que l'angle α admet deux valeurs $\frac{2\pi}{9}$ ou $\frac{\pi}{3}$.

Par contre, son voisin affirme que α n'a qu'une seule valeur égale à $\frac{\pi}{3}$. Tu es sollicité pour les départager. Dis, en le justifiant par une production argumentée, qui de Séri ou de son voisin a raison.

SOLUTION

Pour départager Séry et son voisin, nous allons utiliser nos connaissances
mathématiques sur la leçon angles orientés et trigonométrie.



Pour ce faire, Nous allons :

- En fonction des données connues, obtenir une
- équation contenant une ligne trigonométrique de α.
- Résoudre l'équation obtenue pour trouver (si possible) les valeurs
  de α.

Déterminer une ligne Soit H le projeté orthogonal de A sur le bord du mur opposé à A et K le projeté orthogonal de B sur le bord du mur opposé à B.

Le triangle AHO est rectangle en H.

On a : $sin\alpha = \frac{AH}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{0A}$;

donc $OA = \frac{\sqrt{3}}{sin\alpha}$

Le triangle BKO est rectangle en K.

On a : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{OK}{OB} = \frac{1}{OB}$

Donc : $OB = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{1}{cos\alpha}$

On a : $AB = OA + OB = \frac{\sqrt{3}}{sin\alpha} + \frac{1}{cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha}$

Comme $AB = f(\alpha) = 4$, on déduit l'équation (E) : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4$

Résolvons l'équation (E) : $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4$.

- Comme $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, on a cosα ≠ 0 et sinα ≠ 0 par suite cosα.sinα ≠ 0. Donc le domaine de validité de (E) est : $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
- $\frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3}cos\alpha + sin\alpha = 4sin\alpha cos\alpha$

Or : $\sqrt{3}cos\alpha + sin\alpha = 2\left(cos\frac{\pi}{6}cos\alpha + sin\frac{\pi}{6}sin\alpha\right) = 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ et $4sin\alpha cos\alpha = 2sin2\alpha$

Donc : $\frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4 \Leftrightarrow 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 2sin2\alpha \Leftrightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = sin2\alpha$

$sin2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$ donc $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = sin2\alpha \Leftrightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ \alpha - \frac{\pi}{6} = 2\alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ \alpha = \frac{\pi}{3} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Comme α appartient à $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a deux valeurs de α qui correspondent : $\alpha = \frac{2\pi}{9}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

C'est donc Seri qui a raison.

D- EXERCICES

A) Exercices de fixation

Exercice 1

Détermine la mesure principale α de l'angle orienté de mesure $\frac{149\pi}{3}$ et place sur le cercle trigonométrique le point M $\left(\frac{149\pi}{3}\right)$.

SOLUTION

α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $-\pi < \alpha \leq \pi$; (2) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \frac{149\pi}{3} + k2\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$-\pi < \frac{149\pi}{3} + k2\pi \leq \pi$, en divisant par 2π on obtient : $-\frac{1}{2} < \frac{149}{6} + k \leq \frac{1}{2}$;

par la suite : $-\frac{152}{6} < k \leq -\frac{146}{6}$; d'où : $k = -25$.

donc $\alpha = \frac{149\pi}{3} - 25 \times 2\pi$; ce qui donne : $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2

Soit $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ un angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{12}$.

Parmi les nombres ci-dessous indique ceux qui sont des mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$:

$\frac{\pi}{12}+3\pi$; $\frac{\pi}{12}-6\pi$; ; $\frac{\pi}{12}+2020\pi$; $\frac{\pi}{12}-2021\pi$

SOLUTION

Les mesures l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ sont : $\frac{\pi}{12}-6\pi$ et $\frac{\pi}{12}+2020\pi$

Exercice 3

Relie chaque élément du tableau A à l'élément du tableau B qui lui est égal.

Tableau A
$\sin(a-b)$
$\cos(a+b)$
$\sin(a+b)$
$\cos(a-b)$

Tableau B
$cosb\ cosa - sina\ sinb$
$sina\ sinb + cosa\ cosb$
$sina\ cosb - cosa\ sinb$
$sinb\ cosa + cosb\ sina$

SOLUTION

Tableau A
$\sin(a-b)$
$\cos(a+b)$
$\sin(a+b)$
$\cos(a-b)$

Tableau B
$cosb\ cosa - sina\ sinb$
$sina\ sinb + cosa\ cosb$
$sina\ cosb - cosa\ sinb$
$sinb\ cosa + cosb\ sina$

Exercice 3

Calcule la tangente de l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$ sachant que : $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

SOLUTION

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, détermine le sinus et le cosinus de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de mesure α

a) $\alpha=\pi$ b) $\alpha=0$ c) $\alpha=-\frac{\pi}{2}$

SOLUTION

a) $cos\pi=-1$; $sin\pi=0$

b) $cos0=1$; $sin0=0$

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

Exercice 6

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Indique les égalités justes :

a) $2(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = 2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

b) $2(\widehat{\vec{u},-\vec{u}}) = \hat{\pi}$

c) $2(\widehat{\vec{u},-\vec{u}}) = \hat{0}$

SOLUTION

Les égalités justes sont : a) et c)

car $(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \hat{\pi}$ et $(\widehat{\vec{u},-\vec{u}}) = \hat{\pi}$

Exercice 7

$\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont deux angles orientés. Recopie et complète le tableau suivant :

Une mesure de $\hat{\alpha}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{25\pi}{3}$
Une mesure de $\hat{\beta}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$				
Une mesure de $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$				

SOLUTION

Une mesure de $\hat{\alpha}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$-\frac{25\pi}{3}$
Une mesure de $\hat{\beta}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\pi$	$\frac{7\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{-5\pi}{3}$	$\frac{-43\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-57\pi}{6}$

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, détermine la mesure principale α de l'angle orienté dont une mesure est :

a) $\frac{2021\pi}{6}$.

b) $-\frac{37\pi}{3}$

SOLUTION

a) α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $-\pi < \alpha \leq \pi$; (2) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha = \frac{2021\pi}{6} + k2\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$-\pi < \frac{2021\pi}{6} + k2\pi \leq \pi$, en divisant par 2π on obtient : $-\frac{1}{2} < \frac{2021}{12} + k \leq \frac{1}{2}$;

par la suite : $-\frac{2027}{12} < k \leq -\frac{2015}{12}$; d'où : $k = -168$.

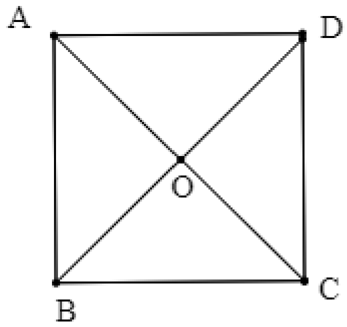
donc α = $\frac{2021\pi}{6} - 168 \times 2\pi$; ce qui donne : $\alpha = \frac{5\pi}{12}$.

b) $-\frac{37\pi}{3} = \frac{-36\pi-\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - 6 \times 2\pi$; donc $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

Exercice 9

ABCD est un carré de centre O et de sens direct. Relie chaque élément du tableau A à un élément du tableau B qui lui est égal.

Tableau A			Tableau B
$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right)$	•	•	$\hat{\pi}$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)$	•	•	$\hat{0}$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right)$	•	•	$\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD}}\right)$	•	•	$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$



SOLUTION

Tableau A			Tableau B
$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right)$	•	•	$\hat{\pi}$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)$	•	•	$\hat{0}$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right)$	•	•	$\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD}}\right)$	•	•	$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$

Exercice 10

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$, trois vecteurs non nuls.

Sachant que $-\frac{\pi}{7}$ *et* $\frac{\pi}{4}$ *sont des mesures* respectives des angles orientés $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$, complète les phrases suivantes :

1) Une mesure de $\left(\widehat{2\vec{u},\vec{v}}\right)$ est ....
2) Une mesure de $\left(\widehat{\vec{u},-3\vec{v}}\right)$ est ....
3) Une mesure de $\left(\widehat{\vec{w},\vec{u}}\right)$ *est* ....

Une mesure de $\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right)$ *est* .... car $\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right) =$................. + ...

SOLUTION

1) Une mesure de $\left(\widehat{2\vec{u},\vec{v}}\right)$ est $-\frac{\pi}{7}$

2) Une mesure de $(\widehat{\vec{u}, -3\vec{v}})$ est $-\frac{\pi}{7}+\pi=\frac{6\pi}{7}$

3) Une mesure de $(\widehat{\vec{w},\vec{u}})$ est $-\frac{\pi}{4}$

4) Une mesure de $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$ est $\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{4}$ car $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})=(\widehat{\vec{v},\vec{u}})+(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$

B) Exercices de renforcement

Exercice 11

1. Démontre que pour tous nombres réels a et b on a : $2sina\ cosb=\sin(a+b)+\sin(a-b)$

2. Soit A le nombre réel défini par : $A=2sin\frac{\pi}{11}(cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11})$

a) Démontre que : $A=sin\frac{10\pi}{11}$

b) Déduis-en que : $A=sin\frac{\pi}{11}$

c) Démontre que : $cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

SOLUTION

1. on a : $\sin(a+b)=sina\ cosb+cosa\ sinb$ et $\sin(a-b)=sina\ cosb-cosa\ sinb$

Donc : $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2sina\ cosb$

2. a) On a : $A=\left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{\pi}{11}\right)+\left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{3\pi}{11}\right)+\left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{5\pi}{11}\right)+\left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{7\pi}{11}\right)+\left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{9\pi}{11}\right)$

$$A=\left(sin\frac{2\pi}{11}+sin0\right)+\left(sin\frac{4\pi}{11}+sin\frac{-2\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{6\pi}{11}+sin\frac{-4\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{8\pi}{11}+sin\frac{-6\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{10\pi}{11}+sin\frac{-8\pi}{11}\right)$$

$$A=sin\frac{2\pi}{11}+\left(sin\frac{4\pi}{11}-sin\frac{2\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{6\pi}{11}-sin\frac{4\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{8\pi}{11}-sin\frac{6\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{10\pi}{11}-sin\frac{8\pi}{11}\right)$$

D'où: $A=sin\frac{10\pi}{11}$

b) On a: $\frac{10\pi}{11}=\pi-\frac{\pi}{11}$; donc $A=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{11}\right)=sin\frac{\pi}{11}$

c) On a : $A=2sin\frac{\pi}{11}(cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11})$ et $A=sin\frac{\pi}{11}$

On en déduit que : $cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$ car $sin\frac{\pi}{11}\neq 0$

Exercice 12

1) Démontre pour tout nombre réel x, $cos2x-\sqrt{3}sin2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

2) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $cos2x - \sqrt{3}sin2x = -1$.

b) Représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

c) Donne les solutions de (E) appartenant à $\left]-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

SOLUTION

1) Pour tout nombre réel x , on a : $cos2x - \sqrt{3}sin2x = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}(\frac{1}{2}cos2x - \frac{\sqrt{3}}{2}sinx)$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)cos2x + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)sin2x\right)$$

$$= 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

2) a) $(E) \Leftrightarrow 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

On a : $cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

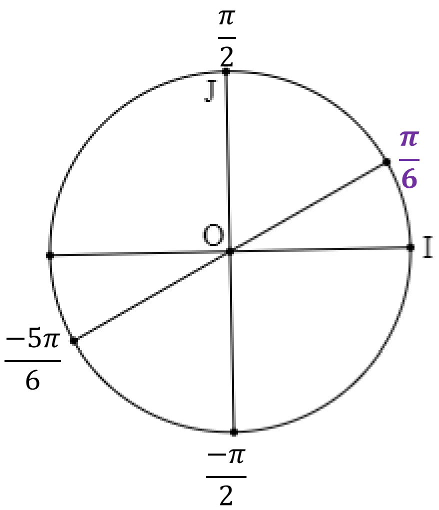
Donc : $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b)



c)

- Cherchons les nombres entiers k tels que : $-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2\pi$

  $-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{10}{6} < k \leq \frac{11}{6}$. Trois valeurs de k conviennent : $-1;\quad 0$ et 1 .

  Il leur correspond les solutions : $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$

- Cherchons les nombres entiers k tels que : $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi$

  $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -1 < k \leq \frac{5}{2}$. Trois valeurs de k conviennent : $0;\quad 1$ et 2 .

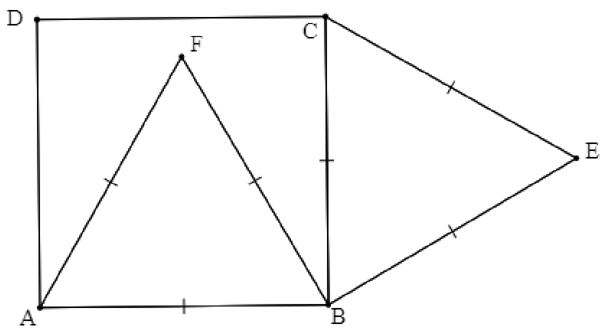
  Il leur correspond les solutions : $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$

  Les solutions de l'équation (E) appartenant à $\left]-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ sont : $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{6}$

C) EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5

ABCD est un carré de sens direct. ABF et CBE sont des triangles équilatéraux directs



1. Justifie que : $Mes\widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF})} = \frac{5\pi}{12}$

2. Démontre que : $Mes\widehat{(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC})} = \frac{\pi}{12}$

3. a) Donne une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE})}$.

   b) Déduis-en que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right) = -\frac{\pi}{12}$

4. Démontre que les points D, E et F sont alignés.

SOLUTION

1) Le triangle AFD est isocèle en A et de sens direct. On a : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF}}\right) + \widehat{(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA})} = \hat{\pi}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF}}\right) = \widehat{(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA})}$

on déduit que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF}}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12}$

2) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DA}}\right) + \widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})}$ (relation de Chasles)

Donc : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DA}}\right) + mes\widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})}$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}}\right) = -\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$. D'où $Mes\widehat{(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC})} = \frac{\pi}{12}$

3) a) $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}})$ donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right) + mes(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}})$.

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

b) Le triangle CDE est isocèle en C et de sens direct.

On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}) = \hat{\pi}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right) = (\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}})$.

Donc : $\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$. On en déduit que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right) = -\frac{\pi}{12}$

c) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DE}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right) = \hat{0}$ car $\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right)$

Par suite, les points D; E et F sont alignés.

Durée : 3 heures

Compétence 1 **Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**

Thème 1 **Calculs algébriques**

LEÇON 13 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$ ET DANS $\mathbb{R}^3$

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Trois élèves d'une classe de première D font des recherches sur les hydrocarbures. Ils découvrent le texte suivant :

« Un mélange de méthane, d'acétylène et d'oxygène est introduit dans un eudiomètre. Le mélange initial occupe un volume de 70 cm^3. Après le passage d'une étincelle, il se produit une réaction. Au retour dans les conditions normales, il reste dans l'eudiomètre 30 cm^3 de dioxyde de carbone et 10 cm^3 d'oxygène ».

Impressionnés par les résultats de cette expérience, ils veulent déterminer les volumes respectifs des gaz qui composent le mélange initial.

Pour cela, ils décident d'apprendre à résoudre des systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^3$.

B- CONTENU DE LA LEÇON

I. SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$

1) Définition

On considère un système (S) de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x; y)$:

(S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

On appelle déterminant du système (S), le nombre réel $ab' - a'b$. On le note : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Exemple

Le déterminant du système(S) : $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + y = 0 \end{cases}$ est: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ = - 13

2) Propriété

On considère un système (S) de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x; y)$:

(S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où $(a, b) \neq (0,0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$.

Le système (S) admet une unique solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Remarque

Le système (S) n'admet pas de solution ou admet une infinité de solutions si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$.

EXERCICE DE FIXATION

Pour chacun des systèmes ci-dessous, détermine le nombre de solutions.

(S_1): $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 5 = 0} \\ \boldsymbol{3x - y + 2 = 0} \end{cases}$; (S_2): $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 15y + 2 = 0} \\ \boldsymbol{2x + 10y - 6 = 0} \end{cases}$.

Solution

$\det(S_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7 \neq 0$, donc (S_1) admet exactement un couple de solutions.

$\det(S_2) = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 2 \times 15 = 0$. Soit (S_2) n'admet pas de couples solutions, soit (S_2) admet une infinité de couples solutions.

3) Résolution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

<u>Méthode</u>

Un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$, peut se résoudre :

- Par le calcul à l'aide de la substitution, de la combinaison ou du déterminant.
- Graphiquement.

Exemple1 : Par le calcul à l'aide du déterminant

Résous les systèmes d'inconnue $(x; y)$ dans $\mathbb{R}^2$:

a) (S_1): $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 15y + 2 = 0} \\ \boldsymbol{2x + 10y - 6 = 0} \end{cases}$

Le déterminant du système est : $D = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 2 \times 15 = 0$	le couple $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ vérifie l'équation $3x + 15y + 2 = 0$ et ne vérifie pas l'équation

Donc le système (S_1) admet zéro solution ou plusieurs solutions.	$2x + 10y - 6 = 0$. Donc (S_1)n'admet aucun couple solution.

b) (S_2): $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 5 = 0} \\ \boldsymbol{3x - y + 2 = 0} \end{cases}$

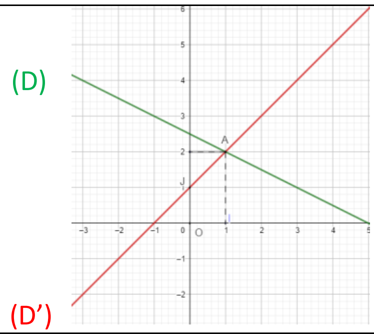
Le déterminant du système est : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1) - 3\times 2 = -7$ Donc le système (S_2) admet une seule solution.	$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$ donc $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$. $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -17$ donc $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-17}{-7} = \frac{17}{7}$. L'unique couple de solutions de (S_2) est $\left(\frac{1}{7};\frac{17}{7}\right)$.

Synthèse : **Cas général**

S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où $(a,b) \neq (0,0)$ et $(a',b') \neq (0,0)$. On pose $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Lorsque le déterminant $D \neq 0$, le système admet une unique solution. On calcule $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ puis $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$.

Exemple 2 : Graphiquement, résous le système (S): $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 5 = 0} \\ \boldsymbol{x - y + 1 = 0} \end{cases}$.

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives $x + 2y - 5 = 0$ et $x - y + 1 = 0$ puis on lit les coordonnées du point d'intersection des droites. (D) et (D') sont sécantes en A et A(1 ; 2) . La solution du système est (1 ; 2).	

II. SYSTEMES DE TROIS EQUATIONS LINEAIRES DANS $\mathbb{R}^3$

1) Définitions

• On appelle système linéaire de trois équations du premier degré à trois inconnues $(x; y; z)$, un système du type : $\begin{cases} ax + by + cz = m \\ a'x + b'y + c'z = m' \\ a''x + b''y + c''z = m'' \end{cases}$ où $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', m, m'$ et m'' sont des nombres réels.

- Un système triangulaire d'équations dans $\mathbb{R}^3$ est un système du type : $\begin{cases} ax + by + cz = m \\ b'y + c'z = m' \\ c''z = m'' \end{cases}$

  où $a, b, c, b', c', c'', m, m'$ et m''sont des nombres réels.

  Exemples

  :(Σ_1) $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$ (S) $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y + 4z = 0 \\ 3z = 6 \end{cases}$

2) Résolution d'un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Méthode

Pour résoudre un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Par substitution ;
- Par la méthode du Pivot de Gauss.

a) Par substitution

Exemple

Résous le système suivant par la méthode de substitution :$(\sum_1)\begin{cases} x - 2y - 3z = -9 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -9 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 2(2y + 3z - 9) + 5y - 3z = 0 \\ 2y + 3z - 9 + y + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 9y + 3z = 18 \\ 3y + 5z = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 3y + z = 6 \\ 3y + 5z = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ z = 6 - 3y \\ 3y + 5(6 - 3y) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ z = 6 - 3y \\ -12y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Donc : $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(2; 1; 3)\}$

b) Par la méthode du pivot de Gauss

Exemple

Résous le système suivant par la méthode de pivot de Gauss : $(\sum_2)\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \ (L_1) \\ 5x + 3y + z = 3 \ (L_2) \\ 3x + y - 2z = -1 \ (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (L_1) \\ 0 + 28y + 36z = -12 & (L'_2) = (L_2) - 5(L_1) \\ 0 + 16y + 19z = -10 & (L'_3) = (L_3) - 3(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (L_1) \\ 14y + 18z = -6 & (L'_2) \\ 16y + 19z = -10 & (L'_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (L_1) \\ 14y + 18z = -6 & (L'_2) \\ 0 - 22z = -44 & (L''_3) = 14(L'_3) - 16(L'_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Donc : $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(2; -3; 2)\}$

C- SITUATION COMPLEXE

On propose un jeu à trois groupes d'élèves d'une classe de première D.
A ce jeu, les groupes peuvent solliciter une personne ressource. Le problème posé est le suivant : « un fermier élève des canards, des lapins et des dromadaires. Il compte le nombre de pattes de ses canards, de ses lapins et de bosses de ses dromadaires. Il trouve 130. Il compte le nombre de têtes de ceux-ci, et il trouve 46. Il compte ensuite le nombre d'oreilles des lapins et des dromadaires et trouve 38. Enfin, le fermier affirme avoir dénombré au moins 16 lapins et souhaite déterminer le nombre d'animaux de chaque espèce. »

Tu es la personne ressource sollicitée, A L'aide de tes connaissances mathématiques aide ce fermier.

Corrigé

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser la leçon : systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ pour cela nous allons :

- Traduire le problème en un système de 3 équations
- résoudre ce système et
- déterminer le nombre de canards de lapins et de dromadaire

Mise en équation : soit x le nombre de canards, y celui des lapins et z le nombre de lapins.
On a : $2x+4y+z=130$, $x+y+z=46$, $2y+2z=38$ et $y\geq 16$

Ce qui nous conduit au système suivant : $\begin{cases} 2x+4y+z=130 \\ x+y+z=46 \\ y+z=19 \\ y\geq 16 \end{cases}$

On trouve $x=27,\quad y=19,\quad z=0$
Donc ce fermier a 27 canards, 19 lapins et 0 dromadaire.

D- EXERCICES

Exercice 1
Calcule le déterminant de chacun des systèmes suivants, puis indique le nombre de solutions du système.

$(S_1)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x+2y=-3 \end{cases}$; $(S_2)\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x-2y=-1 \end{cases}$; $(S_3)\begin{cases} \sqrt{2}x-2y=\sqrt{2} \\ 2x-2\sqrt{2}y=-2 \end{cases}$

Corrigé

- $\det(S_1)=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-1\times 3=4-3=1$ (S_1) a une solution unique.
- $\det(S_2)=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=3\times(-2)-6\times(-1)=-6+6=0$ (S_2) n'a pas de solution car (1 ;-2) est solution de la première équation mais pas solution de la deuxième équation.

- $\det(S_3)=\begin{vmatrix}\sqrt{2} & -2\\ 2 & -2\sqrt{2}\end{vmatrix}=\sqrt{2}\times\left(-2\sqrt{2}\right)-2\times(-2)=-4+4=0$ **(S3)** n'a pas de solution car (1 ;0) est solution de la première équation mais pas solution de la deuxième équation

<u>Exercice 2</u>

Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes ci-dessous en utilisant :

1) La méthode de substitution ;
2) La méthode de combinaison.

$(S_1)\begin{cases}2x+3y=2\\ x+2y=-3\end{cases}$; $(S_2)\begin{cases}3x-y=1\\ 5x-2y=-1\end{cases}$; $(S_3)\begin{cases}-\sqrt{2}x+y=\sqrt{3}\\ 2x-\sqrt{2}y=-\sqrt{6}\end{cases}$;

<u>Corrigé</u>

1) $(S_1)\begin{cases}2x+3y=2 & (L_1)\\ x+2y=-3 & (L_2)\end{cases}$

Résolution par substitution :

De (L_2) on a $x=-3-2y$ (L'_2). On remplace x par -3-2y dans (L_1) on obtient

$2(-3-2y)+3y=2$ soit $y=-8$ on calcule x en remplaçant y par -8 dans (L'_2) on trouve x=13.

<u>La solution du système est le couple :</u> $(13;-8)$

Résolution par combinaison :

$(L'_2)=(L_1)-2(L_2): 3y-4y=2+6$

$y \quad =-8$

On remplace y par -8 dans (L_1) ; on trouve $x=13$.

<u>La solution du système est le couple :</u> $(13;-8)$

$(S_2)\begin{cases}3x-y=1 & (L_1)\\ 5x-2y=-1 & (L_2)\end{cases}$

Résolution par substitution

$$(S_2)\begin{cases}3x-y=1\\ 5x-2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-1\\ 5x-2(3x-1)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-1\\ 5x-2(3x-1)=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=8\\ x=3\end{cases}$$

<u>La solution du système est le couple :</u> (3 ,8)

Résolution par combinaison :

$(L_3)=-2L_1+L_2\Leftrightarrow x=3$

On remplace x par 3 dans (L_1) ; on trouve$y=8$.

<u>La solution du système est le couple </u>(3 ,8)

$(S_3)\begin{cases}-\sqrt{2}x+y=\sqrt{3}\\ 2x-\sqrt{2}y=-\sqrt{6}\end{cases}$

Det$(S_3)=0$ et le couple (0,$\sqrt{3}$) est solution de des deux équations donc (S_3) a une infinité de solution

<u>Exercice 3</u>

3) Résous dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes a) b) c) ci-dessous en utilisant La méthode de substitution et d) e) et f) par la méthode du Pivot de Gauss ;

.

$a)\begin{cases} x+2y+z=8 \\ -3y-2z=-12 \\ -22z=-66 \end{cases}$; $b)\begin{cases} 2x+y-4z=4 \\ 3x+2y=-5 \\ 5x+8y=1 \end{cases}$; $c)\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=1 \\ x+z=-8 \end{cases}$

$d)\begin{cases} x-5y-7z=3 \\ 5x+3y+z=3 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$; $e)\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 2x+3y-z=6 \\ -x+2y+2z=-1 \end{cases}$; $f)\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+7z=1 \\ -2x+y+z=1 \end{cases}$

Corrigé

$a)\begin{cases} x+2y+z=8 \\ -3y-2z=-12 \\ -22z=-66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-z+8 \\ -3y=2z-12 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+5 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$ Donc :

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(1;2;3)\}$

$b)\begin{cases} 2x+y-4z=4 \\ 3x+2y=-5 \\ 5x+8y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{4}(2x+y-4) \\ y=\frac{1}{2}(-3x-5) \\ 5x+4(-3x-5)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{4}(2x+y-4) \\ y=-7 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{-11}{4} \\ y=-1 \\ x=-3 \end{cases}$

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{\left(-3;-1;-\frac{11}{4}\right)\}$

$c)\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=1 \\ x+z=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ z=1-y \\ 5-y+1-y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ z=1-y \\ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-6 \\ y=7 \\ x=-2 \end{cases}$

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(-2;7;-6)\}$

$d)\begin{cases} x-5y-7z=3\ (L_1) \\ 5x+3y+z=3(L_2) \\ 3x+y-2z=-1(L_3) \end{cases}$

On élimine x dans (L_2) et (L_3) on obtient $\begin{cases} x-5y-7z=3\ (L_1) \\ -28y-36z=12\ (5L_1-L_2)\quad (L_3) \\ -16y-19z=10\ (3L_1-L_3)(L_4) \end{cases}$

On élimine y dans (L_3) et(L_4) on obtient

$$\begin{cases} x-5y-7z=3\ (L_1) \\ -7y-9z=3 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=2 \end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(2;-3;2)\}$

$$e)\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 2x+3y-z=6 \\ -x+2y+2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+2z=-1 (L_1) \\ 2x+3y-z=6\ (L_2) \\ 2x+y+z=1\ (L_3) \end{cases}$$

On élimine x dans (L_2) et (L_3) on obtient $\begin{cases} -x+2y+2z=-1\ \ (L_1) \\ 7y+3z=4\ \ (2L_1+\ L_2\ ) \quad (L_4) \\ 5y+5z=-1\ \ (2L_1+L_3\ \ )\ \ (L_5) \end{cases}$

On élimine y dans (L_3) et(L_4) on obtient$\begin{cases} -x+2y+2z=1\ \ \ (L_1) \\ 7y+3z=4\ \ \ (L_4) \\ -20z=27\ (7L_5)-5(L_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{23}{20} \\ z=\frac{-27}{20} \end{cases}$

$$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{\left(\frac{3}{5};\frac{23}{20};-\frac{27}{20}\right)\right\}$$

$f)\begin{cases} x+y-2z=1(L_1) \\ x-2y+7z=1(L_2) \\ -2x+y+z=1(L_3) \end{cases} \Leftrightarrow) \begin{cases} x+y-2z=1(L_1) \\ 3y-3z=0(L_1-\ L_2 \\ 3y-3z=3\ (2L_1-L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-3z=0 \\ 3y-3z=0 \end{cases}$ n'a pas de solution donc le systeme n'a pas de solution

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Détermine une équation de la parabole dont la courbe représentative passe par les points :
$A\binom{1}{0}$; $B\binom{2}{-5}$ et $C\binom{3}{-12}$.

Corrigé

L'équation de la parabole est de la forme :$y = ax^2 + bx + C$ et passe par les points $A\binom{1}{0}$; $B\binom{2}{-5}$ et $C\binom{3}{-12}$ donc on a le système suivant :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=-5 \\ 9a+3b+c=-12 \end{cases}$$

La résolution de ce système par substitution ou par pivot de Gauss nous donne a=-1 .b=-2 et c=3

Exercice 5

Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points :
$A(2;6)$, $B(-3;1)$, $C(7;-2)$; $D(4;0)$, $E(-4;4)$ et $F(11;-1)$.
Les droites (AB), (CD) et (EF) sont-elles concourantes ? Justifie ta réponse.

Corrigé

$(AB): x-y=-4;\quad (CD): 2x+3y=8;\quad (EF): x+3y=8$

$\left(-\frac{4}{5};\frac{16}{5}\right)$ est solution de $(s_1)\begin{cases} x-y=-4 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$, mais pas solution de $(s_2):\begin{cases} x-y=-4 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$ par conséquent, les droites (AB), (CD) et (EF) ne sont pas concourantes.

Exercice 6

Détermine un nombre de trois chiffre sachant que :

- La somme des chiffres est égale à 14 ;
- Si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines le nombre augmente de 180 ;
- Si on permute le chiffre des unités et celui des centaines le nombre diminue de 297.

Corrigé

Mise en équation : soit x le chiffre des unités, y celui des dizaines et z le chiffre des centaines.

- $x+y+z=14$
- $y-z=2$
- $-x+z=3$

Les chiffres de ce nombre sont solution du système suivant : $(s):\begin{cases} x+y+z=14(L_1) \\ y-z=2(L_2) \\ -x+z=3(L_3) \end{cases}$

Résolution du système :

De (L_3) on a : $z=x+3$ on remplace z par x+3 dans (L_1) et (L_2). On obtient le système suivant :

$(s_2):\begin{cases} x-y=-5(L'_1) \\ 2x+y=11(L'_2) \end{cases}$ on trouve : $x=2, \quad y=7, \quad z=5$. Le nombre cherché est 572.

Durée : 8 heures

Compétence 1	**Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**
Thème 2	**Fonctions**

LEÇON 12 : SUITES NUMERIQUES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une coopérative scolaire veut monter un projet de construction de ferme. Pour ce fait le président encourage ses 45 membres à cotiser une somme de 1000 F par mois pendant 9 mois. Au bout de la première année, il compte ouvrir un compte et déposer cet argent dans une banque qui accorde un intérêt de 5% chaque année, sur tout montant resté immobilisé sur ce compte. Le budget primitif du projet s'élève à 623 000F.
Le président de la coopérative, en classe de première D désire savoir si pendant 4 années la coopérative pourra réunir ce montant grâce à la banque. Il recherche un procédé efficace pour effectuer les calculs nécessaires.

B-CONTENU DU COURS

I- GENERALITES

1- Définition

On appelle suite numérique toute fonction de ℕ vers IR. U : ℕ ⟶ IR $n \longmapsto U(n)$. L'image $U(n)$ de n est généralement notée U_n. La suite numérique ainsi définie est notée $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (U_n). U_n est appelé terme d'indice n ou terme général de la suite (U_n).

Exemple

Parmi les fonctions suivantes, seule la fonction de la colonne C est une suite numérique

A	B	C
f : ***IR*** ⟶ IR $n \longmapsto 2n-1$	g :IR ⟶ IR $n \longmapsto \frac{2n-1}{n+3}$	g :ℕ ⟶ IR $n \longmapsto \frac{2n-1}{n}$

2- Différentes présentations d'une suite

Une suite peut être définie par une formule explicite ou par une formule de récurrence.

a- Suite définie par une formule explicite

Soit f une fonction définie dans IR+, pour tout n∈ ℕ, la suite (Un) de terme général Un = f(n) est dite définie par une formule explicite.

Exemples :

- $U_n = 3n+5$ et $V_n = \frac{2n^2+1}{n}$ sont des suites définies par des formules explicites.

- Soit la suite suivante : $W_n = -6(\frac{1}{2})^n + 10$. On a :

$W_0 = -6(\frac{1}{2})^0 + 10 = 4$; $W_5 = -6(\frac{1}{2})^5 + 10 = \frac{157}{12}$; $W_{10} = -6(\frac{1}{2})^{10} + 10 = \frac{5117}{512}$

b- Suite définie par une formule de récurrence

La suite (U_n) définie par la donnée : - d'un terme (en général le 1er terme) - et d'une relation du type : ∀ n∈ ℕ, $U_{n+1} = f(U_n)$ est dite suite définie par une formule de récurrence.

Exemple 1 : $\begin{cases} P_1 = 3500 \\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n + 25 \end{cases}$ est une suite définie par une formule de récurrence.

Soit la suite (V_n) définie par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} V_0 = 7 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 2V_n - 5 \end{cases}$$

On a :

$V_1 = 2V_0 - 5 = 9$;

$V_4 = 2V_3 - 5$. Il nous faut calculer V_3.

$V_3 = 2V_2 - 5$; il nous faut calculer V_2 .

$V_2 = 2V_1 - 5$. On a donc $V_2 = 14$; $V_3 = 23$ et enfin $V_4 = 41$.

3- Représentation graphique d'une suite

a- Suite définie par une formule explicite

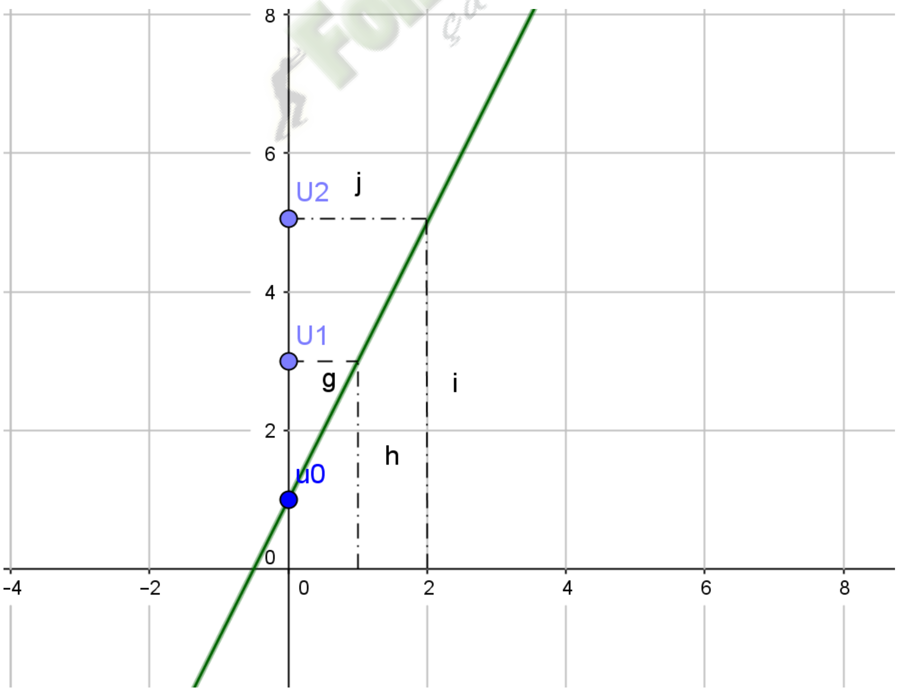
$U_n = f(n)$.

Méthode :

- On représente (Cf), la courbe de la fonction f associée à la suite (U_n).
- On détermine graphiquement $U_0=f(0)$; $U_1 = f(1)$; $U_2 = f(2)$; $U_3= f(3)$ etc.

Exemple

Représentation graphique des 3 premiers termes de la suite définie par : $U_n= 2n+1$.



b- Suite définie par une formule de récurrence : $U_{n+1}=f(U_n)$

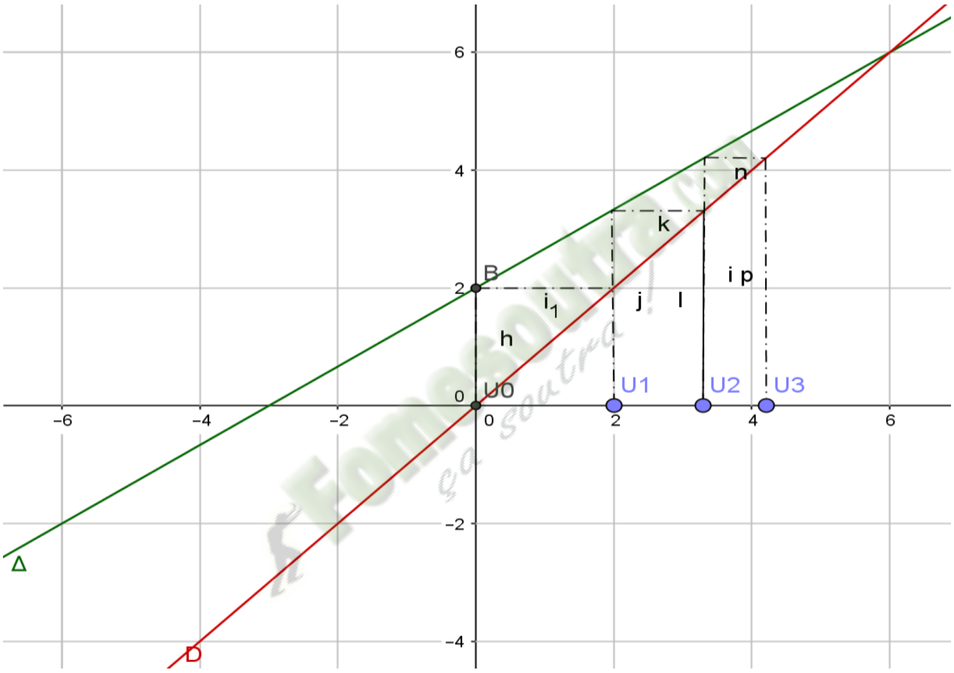
Méthode :

- On représente (Cf), la courbe de la fonction f associée à la suite (U_n).
- On trace la droite (Δ) d'équation : y = x (la première bissectrice)
- On marque U_0 sur l'axe des abscisses (OI).
- On Projette le point obtenu verticalement sur (Cf), on projette ce nouveau point horizontalement sur (Δ) et enfin on projette ce dernier point obtenu verticalement sur (OI), on obtient U_1.
-Refaire ce même processus avec U_1 pour obtenir U_2.
- Et ainsi de suite…

<u>**Exemple**</u>

Représentation graphique des 3 premiers termes de la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 2 \end{cases}$$



II- <u>SUITES ARITHMETIQUES, SUITES GEOMETRIQUES</u>

1- <u>Suites arithmétiques</u>

a- <u>Définition</u>

Soit (U_n) une suite numérique.
(U_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel **r** tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r$.

*** r** est appelé la **raison** de la suite (U_n)

<u>Exemples</u> :

- Voici des exemples de suite arithmétique :

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + 3$; 3 est la raison et U_0 le premier terme.

$\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = V_n - \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$ est la raison et V_1 le premier terme.

- On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \frac{1}{2}n - 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1) - 3 = \frac{1}{2}n - 3 + \frac{1}{2}$. Donc $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}$. Il en résulte que la suite (U_n) est arithmétique. Sa raison est $\frac{1}{2}$ et son premier terme est : $U_0 = -3$.

b-Détermination du terme général

Propriété

Soit n et k des entiers naturels ; (U_n) une suite arithmétique de raison r, on a :
$U_n = U_k + (n-k)r$
Cette forme est appelée terme général de (U_n)

Cas particuliers:

$U_n = U_0 + n\,r$
$U_n = U_1 + (n-1)r$

Exercice de fixation

Soit (U_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $U_0 = 5$.
Exprime U_n en fonction de n.

Solution

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + (-4)n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 5 - 4n$.

c- Somme des termes consécutifs

Propriété

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit par n de la demi-somme des termes extrêmes

Conséquences :

- Si $S = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) alors $S = n \times \frac{(U_1 + U_n)}{2}$
- Si $S = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots + U_j$ une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) , alors $S = (j - k + 1) \times \frac{(U_k + U_j)}{2}$

Exemples

- $S = 1+2+3+\ldots+2020 = 2020 \times \frac{(1+2020)}{2} = 2\,041\,210$

- S= 2+4+6+.........+2n $= n \times \frac{2+2n}{2} = n(n+1)$
- S= 1+3+5+ ....+ (2n+1) $=(n+1) \times (n+1) = (n+1)^2$

- Soit (U_n) la suite arithmétique de raison 9 et de premier terme $U_0 = -2$.

Alors : Si on pose

1) $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$. De 0 à $n-1$, on additionne n termes.

Donc $S = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$. Soit donc $S = \frac{n(9n-13)}{2}$

2) $T = U_3 + U_4 + \cdots + U_{77}$; de 3 à 77, on additionne $77 - 3 + 1 = 75$ termes.

Donc $T = \frac{75}{2}(U_3 + U_{77})$ soit $T = 26\,850$.

2- Suites géométriques

a- Définition

Soit (U_n) une suite numérique.
(U_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = q\, U_n$
* q est appelé la raison de la suite (U_n)

Exemple :

- Soit la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, U_n \end{cases}$$ est une suite géométrique.

- On considère la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = 3(\frac{1}{4})^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 3(\frac{1}{4})^{n+1} = \frac{1}{4}\left[3(\frac{1}{4})^n\right]$. Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n$.

Donc la suite (V_n) est une géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0 = 3$.

b-Détermination du terme général

Propriété

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et k un entier naturel inférieur à n.
On a : $\mathbf{U_n = q^{(n-k)}\, U_k}$

Cas particuliers :

- $U_n = q^n\, U_0$
- $U_n = q^{n-1}\, U_1$

Exercice de fixation

Soit (V_n) la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $V_1 = 3$.
Exprime V_n en fonction de n.

Solution

$\forall n \geq 1, V_n = V_1 3^{n-1}$. Donc $\forall n \geq 1, V_n = 3^n$

c-**Somme de termes consécutifs**

Propriété

La somme S des n termes consécutifs d'une suite géométrique de 1er terme a et de raison q est :

Si $q \neq 1$ alors : $S = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots + U_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

• Si $q = 1$ alors $S = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots + U_n =$ (nombre de termes) $\times$ (1er terme) ; $S = n \times U_1$

• De façon générale : $U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots\ldots + U_{k+p} = U_k \times \frac{1-q^{p+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

$U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots\ldots + U_{k+p} = U_k \times (p+1)$ si $q = 1$

Exercice de fixation

Soit (V_n) la suite géométrique définie par : $V_n = (\frac{1}{3})^n$.

Calcule la somme T suivante: $T = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^7}$.

Solution

$T = V_1 + V_2 + \cdots + V_7$; d'après une formule du cours, $T = \frac{1}{3}\left(\frac{1-(\frac{1}{3})^7}{1-\frac{1}{3}}\right)$; soit $T = \frac{1}{2}\left(1 - (\frac{1}{3})^7\right)$

$T = \frac{1093}{2187}$

C-SITUATION COMPLEXE

Chaque année, depuis 2010 la production d'un article de l'usine citoyenne O.B.V en Côte d'Ivoire subit une baisse par rapport à la production de l'année précédente d'environ 3%. Au cours de l'année 2010, la production a été de 65 000 articles.
Une étude de marché a montré que la production de cet article n'est plus rentable dès que la production annuelle devient inférieure à 56 000 articles
Les premiers responsables de cette usine désirent savoir à partir de quelle année la production de cet article ne sera plus rentable.
Elève en classe de 1ère D, Ton professeur de mathématiques a son épouse qui travaille dans cette usine. Il présente la situation à la classe puis accorde un bonus de deux à chacun des trois premiers élèves qui trouveront la solution. Tu désires obtenir ce bonus.
Propose une solution argumentée à ce problème.

Proposition de solution

Pour aider à résoudre ce problème, je vais utiliser les suites numériques.
Je vais schématiser ce problème sous la forme d'une suite géométrique.
Je vais au fur et à mesure donner des valeurs à n afin de trouver une valeur inférieure à 56000.
La valeur qui me permettra de trouver une valeur inférieure à 56000 me permettra de trouver l'année et conclure.
Chaque année, la production subit une baisse par rapport à la production de l'année précédente d'environ 3%. Au cours de l'année 2010, la production a été de 65 000 articles.
Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la une suite associée à ce problème. Alors le terme général de cette suite est :

$$U_{n+1} = U_n - \frac{3}{100}U_n = \frac{97}{100}U_n$$

Alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{97}{100}$ et de premier terme $V_0 = 65000$.
On a alors : $U_n = U_0 \times q^n = 65000 \times (\frac{97}{100})^n$
En 2011, la production sera :
$U_1 = 65000 \times \frac{97}{100} = 63050$
En 2012, la production sera :
$U_2 = 65000 \times (\frac{97}{100})^2 = 61158{,}5$ Soit 61159
En 2013, la production sera :
$U_3 = 65000 \times (\frac{97}{100})^3 = 59323{,}7$ Soit 59324
En 2014, la production sera :
$U_4 = 65000 \times (\frac{97}{100})^4 = 57544$
En 2015, la production sera :
$U_5 = 65000 \times (\frac{97}{100})^5 = 55817{,}7$ Soit 55818

$55818 < 56000$ Alors la production ne sera plus rentable à partie de 2015.

D- EXERCICES

Exercice 1
Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes :
1- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = -2n + 7$ est une suite arithmétique.
2- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{2}{n} + 1$ est une suite arithmétique.
3- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 3(2^n) - 1$ est une suite géométrique.
4- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 6^n$ est une suite géométrique.

Correction de l'exercice 1
1- Vrai
2- Faux
3- Faux
4- Vrai

Exercice 2

Soit (V_n) la suite géométrique définie par : $\begin{cases} V_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \; V_{n+1} = -5V_n \end{cases}$

Exprime V_n en fonction de n.

Correction de l'exercice 2

$V_n = V_1 \times q^{n-1} = -2 \times (-5)^{n-1}$

Exercice 3

Soit (U_n) la suite de terme général : $U_n = -5n + n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$

Calcule les 5 premiers termes de cette suite.

Correction de l'exercice 3

$U_0 = -5 \times 0 + 0^2 = 0$; $U_1 = -5 \times 1 + 1^2 = -4$; $U_2 = -5 \times 2 + 2^2 = -6$;
$U_3 = -5 \times 3 + 3^2 = -6$; $U_4 = -5 \times 4 + 4^2 = -4$

Exercice 4

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique définie par : $\begin{cases} U_2 = 5 \\ \forall n \geq 2, U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

Exprime U_n en fonction de n.

Correction de l'exercice 4

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $U_2 = 5$ et de raison r=-3, alors :

$$U_n = U_2 + (n-2) \times (-3) = 5 + (n-2) \times (-3) = -3n + 11$$

Exercice 5

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r telle que : $U_6 = -3$ et $U_9 = -6$.

Détermine la valeur de r.

Correction de l'exercice 5

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite arithmétique, on a :$U_{n+1} = U_n + r$.

Par conséquent : $U_7 = U_6 + r$; $U_8 = U_7 + r$, en remplaçant U_7 par sa valeur, on obtient ;
$U_8 = U_6 + 2r$ et donc ; $U_9 = U_6 + 3r = -3 + 3r = -6$ d'où $r = -1$.

Exercice 6

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q telle que : $V_1 = -\frac{3}{2}$ et $V_3 = -\frac{27}{2}$.

Détermine les valeurs possibles de q.

Correction de l'exercice 6

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, alors $V_{n+1} = q \times V_n$ d'où $V_2 = q \times V_1$,

$V_3 = q \times V_2 = q^2 \times V_1$ par conséquent, on a $-\frac{27}{2} = q^2 \times (-\frac{3}{2})$; $q^2 = 9$. Conclusion $q = 3$ ou $q = -3$.

Exercice 7

Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = 2n + 1$

1) Calcule les quatre premiers termes de cette suite.
2) Démontre que (U_n) est une suite arithmétique.
3) Déduis-en le calcul de la somme des cents premiers nombres impaires.

Correction de l'exercice 7

1) $U_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$; $U_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$; $U_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$; $U_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$
2) $U_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 1 + 2 = U_n + 2$ alors (U_n) est une suite arithmétique.
3) $S = \frac{(U_0+U_{99})}{2} \times 100$. $U_{99} = 2 \times 99 + 1 = 199$; alors S=10000.

Exercice 8

Soit (V_n) la suite définie par : $\begin{cases} V_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \; V_{n+1} = \frac{V_n}{1-V_n} \end{cases}$

Calcule les 3 premiers termes de cette suite.

Correction de l'exercice 8

$V_1 = -2$; $V_2 = \frac{V_1}{1-V_1} = -\frac{2}{3}$; $V_3 = -\frac{2}{5}$

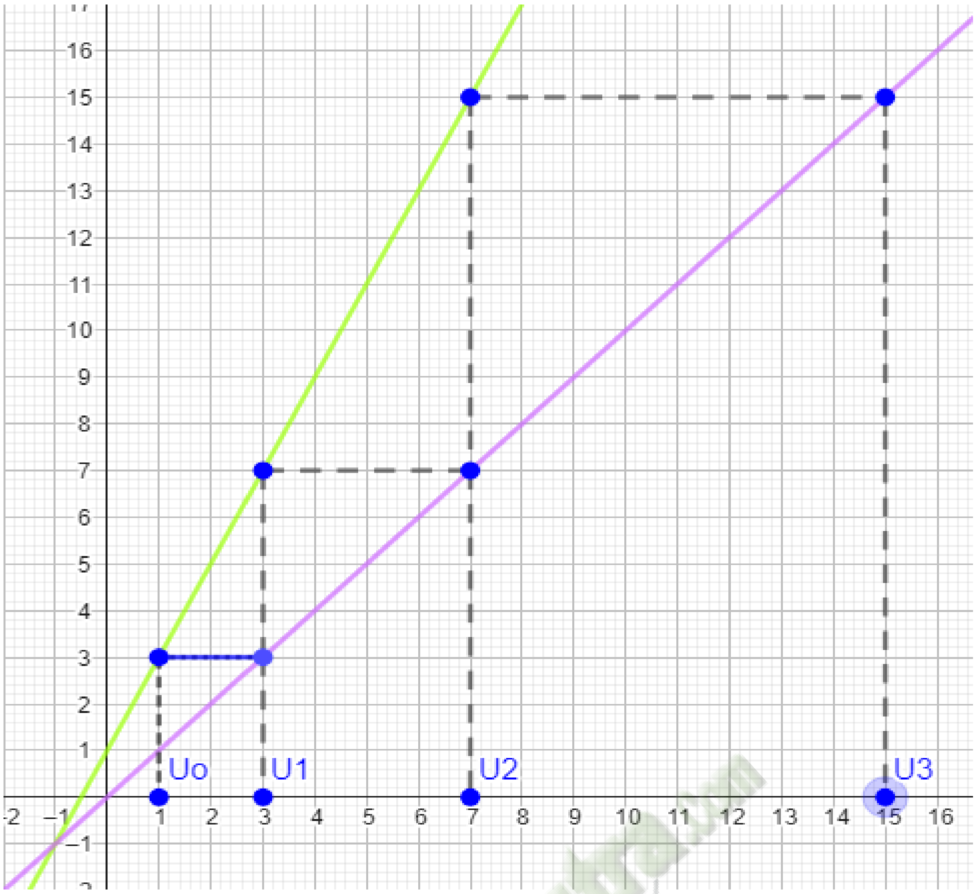
Exercice 9

Le plan est muni du repère orthonormé (O; I, J).

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \; U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$

Représente sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite

Correction de l'exercice 9



Exercice 10

Soit (t_n) la suite de terme général $t_n = -6n + 3$

Démontre que : $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

Correction de l'exercice 10

$t_{n+1} = -6(n+1) + 3 = -6n - 6 + 3 = -6n + 3 - 6 = t_n - 6$, alors : $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison -6 et de premier terme $t_1 = -6 \times 1 + 3 = -3$.

Exercice 11

Soit (P_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} P_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 2P_{n+1} = 2P_n - 5 \end{cases}$

Démontre que : $(P_n)n \in \mathbb{N}^*$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison

Correction de l'exercice 11

$2P_{n+1} = 2P_n - 5$ alors $P_{n+1} = P_n - \frac{5}{2}$; par conséquent $(P_n)n \in \mathbb{N}^*$ est une suite arithmétique de raison $\frac{5}{2}$ et de premier terme $P_1 = P_0 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}$

Exercice 12

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $U_n = 7 \times 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démontre que : $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique puis précise le premier terme et la raison.

Correction de l'exercice 12

$U_{n+1} = 7 \times 2^{n+1} = 7 \times 2^n \times 2 = 2U_n$; alors $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $U_0 = 7$.

Exercice 13

Soit (V_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, 2V_{n+1} + 5V_n = 0 \end{cases}$

Démontre que : $(V_n)n \in \mathbb{N}^*$ est une suite géométrique et précise le premier terme et la raison

Correction de l'exercice 14

$2V_{n+1} + 5V_n = 0$ *alors* $2V_{n+1} = -5V_n$ d'où $V_{n+1} = -\frac{5}{2}V_n$ par conséquent $(V_n)n \in \mathbb{N}^*$ est une suite géométrique de raison $-\frac{5}{2}$ et de premier terme $V_1 = -\frac{5}{2}V_0 = -5$.

Exercice 14

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que : $U_8 = 4$ et $U_{20} = 28$

1- Détermine la raison de cette suite
2- Calcule U_{18} puis en déduis U_{19}

Correction de l'exercice 14

1- (U_n) est une suite arithmétique, en utilisant la formule : $U_n = U_p + (n-p)r$ on a :
$U_{20} = U_8 + (20-8)r; \quad r = \frac{U_{20}-U_8}{(20-8)} = 2$

2- $U_{18} = U_{20} + (18-20)2 = 24$. En utilisant la formule $U_{n+1} = U_n + r$ on en déduis que : $U_{19} = U_{18} + 2 = 24 + 2 = 26$

Exercice 15

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} U_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4U_n-9}{U_n-2} \end{cases}$ et $V_n = \frac{1}{U_n-3}$

1- Calcule U_1 , U_2 puis V_0, V_1 et V_2
2- a) Démontre que $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison r = 1 et de premier terme $V_0 = 1$
b) Déduis-en V_n puis U_n en fonction de n
3- On pose $T_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$
Exprime T_n en fonction de n

Correction de l'exercice 15

1- $U_1 = \frac{4U_0-9}{U_0-2} = \frac{4\times4-9}{4-2} = \frac{7}{2}$; $U_2 = \frac{4U_1-9}{U_1-2} = \frac{10}{3}$; $V_0 = \frac{1}{U_0-3} = 1$; $V_1 = \frac{1}{U_1-3} = 2$;

$$V_2 = \frac{1}{U_2 - 3} = 3$$

2- a) $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}-3} = \frac{1}{\frac{4U_n-9}{U_n-2}-3} = \frac{U_n-2}{U_n-3} = \frac{U_n-3+1}{U_n-3} = 1 + \frac{1}{U_n-3} = 1 + V_n$; alors $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison r = 1 et de premier terme $V_0 = 1$.

b) $V_n = V_0 + nr = 1 + n$; $V_n = \frac{1}{U_n-3}$ alors $U_n = \frac{1}{V_n} + 3 = \frac{1}{1+n} + 3 = \frac{4+3n}{1+n}$

3- $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique alors : $T_n = \frac{(V_1+V_n)\times n}{2} = \frac{(2+1+n)\times n}{2} = \frac{n^2+3n}{2}$

Exercice 16

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} U_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$ et $V_n = U_n - 3$

1- Calcule U_1 , U_2 puis V_0, V_1 et V_2

2- a) Démontre que $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$

b) Déduis-en V_n puis U_n en fonction de n

3- On pose $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ et $T_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

Exprime T_n puis S_n en fonction de n.

Correction de l'exercice 16

1- $U_1 = \frac{1}{3}U_0 + 2 = 5$; $U_2 = \frac{1}{3}U_1 + 2 = \frac{11}{3}$; $V_0 = U_0 - 3 = 6$; $V_1 = U_1 - 3 = 2$;

$$V_2 = U_2 - 3 = \frac{2}{3}$$

2- a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}U_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}U_n - 1 = \frac{1}{3}(U_n - 3) = \frac{1}{3}U_n$

Alors $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$.

b) $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$, alors

$$V_n = 6 \times (\frac{1}{3})^n$$

$V_n = U_n - 3$ alors $U_n = V_n + 3 = 6 \times (\frac{1}{3})^n + 3$

3- $T_n = \frac{1-q^n}{1-q} \times V_0 = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \times 6 = 9\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ on a $V_n = U_n - 3$ $alors$ $U_n = V_n + 3$

$S_n = T_n + 3n = 9\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3n$

Durée : 8 heures

Compétence 3 **Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan**

Thème 2 **Géométrie de l'espace**

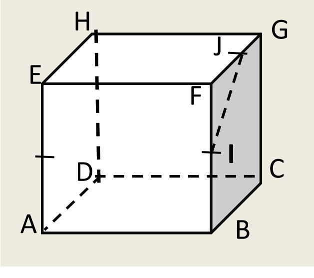
Leçon13 : **ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE**

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Hermann, un élève en classe 1ère D ne comprend pas pourquoi son frère aîné affirme que dans le cube ABCDEFGH ci-contre, les droites (HG) et (IJ) sont orthogonales ; avec I et J milieux respectifs de $[FB]$ et $[FG]$.

Afin de comprendre cette affirmation, Son professeur de mathématiques lui demande de faire des recherches sur les propriétés de l'orthogonalité dans l'espace.



B- CONTENU DE LA LEÇON

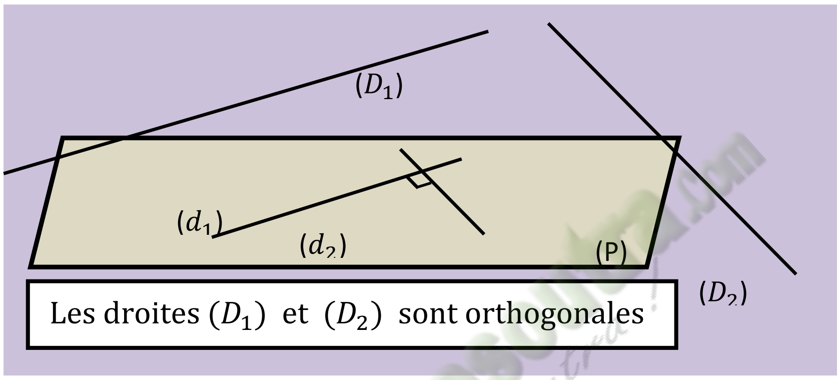
1. DROITES ORTHOGONALES DE L'ESPACE

a) **Définition**

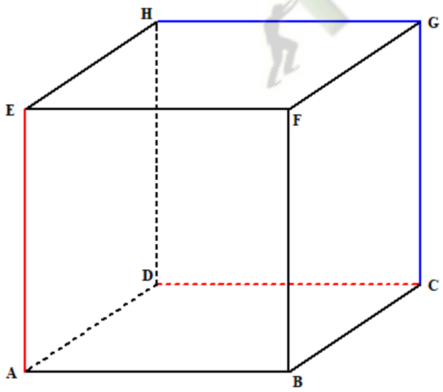
Dans l'espace (ε), deux droites (D_1) et (D_2) sont dites orthogonales lorsqu'il existe deux droites perpendiculaires (L_1) et (L_2) telles que (D_1) est parallèle à (L_1) et (D_2) est parallèle à (L_2).

La droite (D_1) est orthogonale à la droite (D_2) se note : $(D_1) \perp (D_2)$

$$\begin{cases} (L_1) \text{ et } (L_2) \text{ perpendiculaires} \\ (D_1) \parallel (L_1) \\ (D_2) \parallel (L_2) \end{cases} \Longrightarrow (D_1) \perp (D_2)$$



Exemple :



Dans le cube ABCDEFGH, les droites (AE) et (DC) sont orthogonales. En effet, (GH) est perpendiculaire à (CG). De plus (GH) // (DC) et (CG) // (AE).

Remarque : le terme perpendiculaire ne s'utilise que lorsque les droites sont orthogonales et sécantes. Autrement dit, deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.

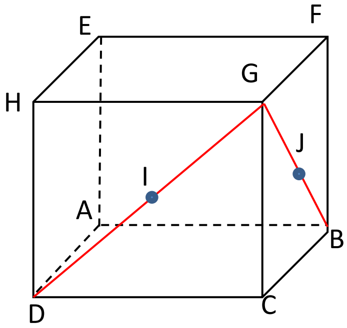
b) **Propriétés**

Propriété 1 :

Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 2 :

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.



Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre :
ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [DG] et
J est le milieu de [BG].
Démontre que les droites (IJ) et (AC) sont orthogonales.

Solution

Dans le triangle BDG, I est le milieu de [DG] et J est le milieu de [BG],
D'après le théorème des milieux (IJ) et (DB) sont parallèles.
Comme ABCD est un carré, alors ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
Puisque (IJ) et (BD) sont parallèles et (AC) est orthogonale à (BD), alors (AC) est orthogonale à (IJ).

Remarque :

Dans l'espace, deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles.

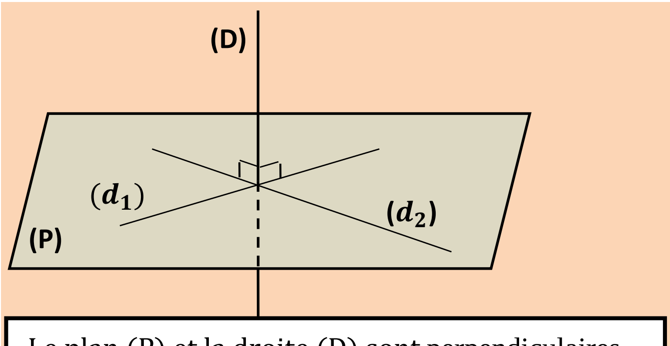
2. DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX

a) **Définition**

Dans l'espace, on dit qu'une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P) lorsque (D) est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans (P).

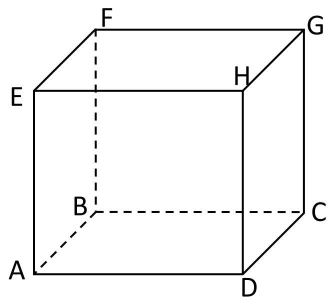
La droite (D) est perpendiculaire au plan (P) se note : $(D) \perp (P)$

$$\begin{cases} (d_1) \text{ et } (d_2) \text{ sécantes dans } (P) \\ (D) \perp (d_1) \\ (D) \perp (d_2) \end{cases} \Longrightarrow (D) \perp (P)$$



Le plan (P) et la droite (D) sont perpendiculaires

Exemple



On donne la figure ci-contre : ABCDEFGH est un cube.

(DH) est perpendiculaire au plan (EGH). En effet, (DH) ⊥ (HE) et (DH) ⊥ (HG). La droite (DH) est orthogonale à deux droites sécantes en H incluses du plan (EGH), alors (DH) est perpendiculaire au plan (EGH).

b) Propriétés

Propriété 1 (propriété fondamentale) :

Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, justifie que les droites (DH) et (EG) sont orthogonales.

Solution : Comme (DH) est perpendiculaire au plan (EGH), Or (EG) $\subset$ (EGH), donc (DH) $\perp$ (EG).

Propriété 2 :

Il existe une unique droite passant par un point donné et perpendiculaire à un plan donné.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, combien y a-t-il de droites passant par le point B et perpendiculaire au plan GCD ?

Solution : Il existe une seule droite passant par le point B et perpendiculaire au plan (GCD), c'est la droite (BC).

Propriété 3 :

Il existe un unique plan passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, combien y a-t-il de plans passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AD) ?

Solution : Il existe un seul plan passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AD) c'est le plan (ABE).

Propriété 4 :

Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Exercice de fixation

Justifie que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (FGH).

Solution : la droite (AE) est parallèle à la droite (DH) et (DH) est perpendiculaire au plan (FGH). Alors (AE) est perpendiculaire au plan (FGH).

Propriété 5 :

Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.

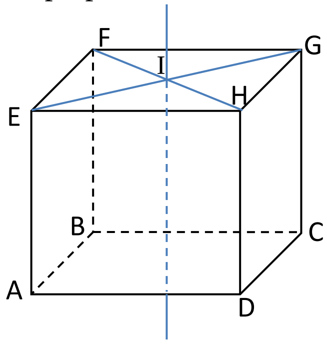
Exercice de fixation

Justifie que les droites (DH) et (BF) sont parallèles.

Solution : la droite (DH) est perpendiculaire au plan (FGH). De même, on montre que (BF) est perpendiculaire au plan (FGH). Alors les droites (DH) et (BF) sont parallèles.

Propriété 6 :

Si deux plans sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.



Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube, la droite (D) est perpendiculaire aux droites (FH) et (EG) en I.
Justifie que (D) est perpendiculaire au plan (ABD).

Solution

La droite (D) étant perpendiculaire aux droites (FH) et (EG), alors elle est perpendiculaire au plan (FGH). Or les plans (ABD) et (FGH) sont parallèles. Donc la droite (D) est perpendiculaire au plan (ABD).

Propriété 7 :

Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont parallèles.

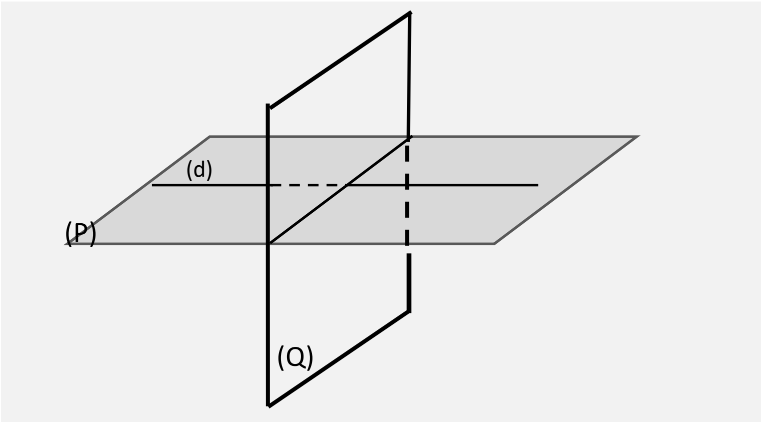
3. PLANS PERPENDICULAIRES DE L'ESPACE

a) Définition

Dans l'espace, deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'e
orthogonale à l'autre plan.

Le plan (P) est perpendiculaire au plan (Q) se note : $(P) \perp (Q)$

$$\begin{cases} (d) \text{ est une droite du plan } (P) \\ (Q) \perp (d) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$



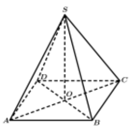
$(d) \subset (P)$ et $(d) \perp (Q) \Rightarrow (P) \perp (Q)$

Exemple

On donne la pyramide régulière SABCD ci-dessous de hauteur $[SO]$

Démontrons que les plans (SDB) et (ABD) sont perpendiculaires.

(AO) est une droite incluse dans le plan (ADB)
(AO) est perpendiculaire au plan (SDB) donc les plans (SDB) et (ABD) sont perpendiculaires.



Conséquences

* Si une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P), alors tout plan parallèle à (D) est perpendiculaire à (P).
* Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

b) Propriétés

Propriété 1

Si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

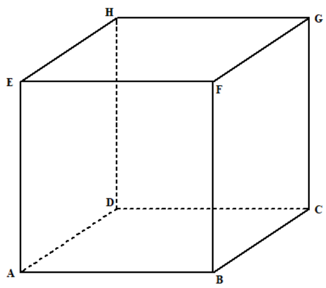
Propriété 2

Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement s'il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.

Exercices de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.

Démontre que les plans (ACE) et (DEH) sont perpendiculaires au plan (ABC).



Solution

Les plans (ACE) et (DEH) sont sécants et leur droite d'intersection est la droite (AE).
(AE) $\perp$ (AD) et (AE) $\perp$ (AB). Comme (AD) et (AB) sont incluses (ABC), donc (AE) $\perp$ (ABC).
Par conséquent, les plans (ACE) et (DEH) sont perpendiculaires au plan (ABC).

4. PROJECTIONS ORTHOGONALES SUR UN PLAN, SUR UNE DROITE DE L'ESPACE

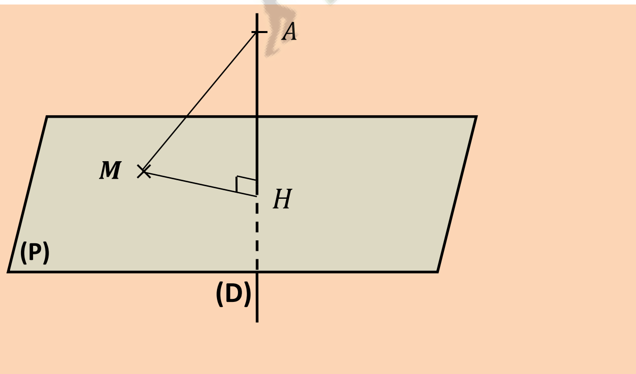
Définitions

- Soit A un point et (P) un plan de l'espace. Soit (D) l'unique droite passant par A et perpendiculaire à (P) en H.

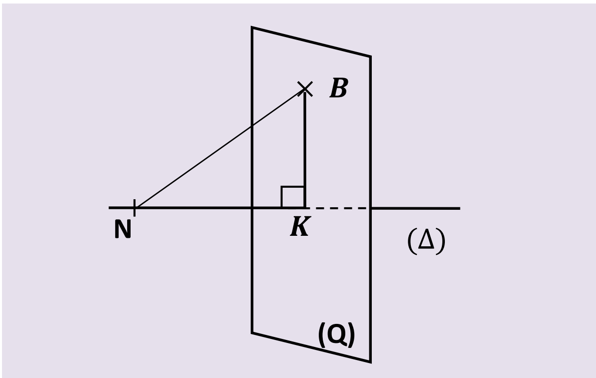
Alors le point H est appelé le **projeté orthogonal** du point A sur le plan (P)
La distance AH est appelée **la distance du point A au plan (P)**

- Soit B un point et (Δ) une droite de l'espace. Soit (Q) l'unique plan passant par B et perpendiculaire à (Δ) en K.

Alors le point K est appelé le **projeté orthogonal** du point B sur la droite (Δ).
La distance BK est appelée **la distance du point B à la droite** (Δ).



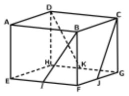
M $\in$ (P), H est le projeté orthogonal de A sur le plan (P) ; $AH < AM$



N $\in$ (Δ), K est le projeté orthogonal de B sur la droite (Δ) ; $BK < BN$

Exemple

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont des points respectifs des arrêtes $[EF]$, $[FG]$ et $[GH]$. p est la projection orthogonale sur le plan (EHD)



Complétons le tableau ci-dessous.

M	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
p(M)	A	A	D	D	E	E	H	H	E	H

b -Propriétés

Propriété 1

Par une projection orthogonale sur un plan $(\mathcal{P})$, **l'image d'une droite** (D) est :

- un **singleton** si (D) est **perpendiculaire** à $(\mathcal{P})$.
- une **droite** si (D) n'est **pas perpendiculaire** à $(\mathcal{P})$.

Propriété 2

Par une projection orthogonale sur un plan $(\mathcal{P})$, **l'image d'un segment** [AB] est :

- un **singleton** si la droite (AB) est **perpendiculaire** à $(\mathcal{P})$.
- un **segment** si la droite (AB) n'est **pas perpendiculaire** à $(\mathcal{P})$.

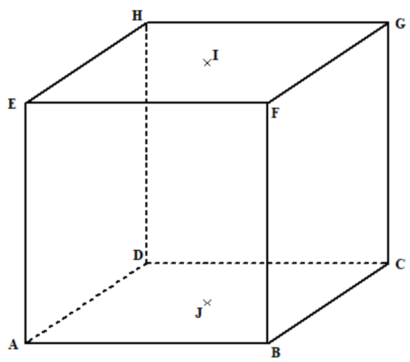
Propriété 3 (Projeté orthogonal du milieu d'un segment)

Par une projection orthogonale sur un plan (P), l'image du milieu d'un segment [AB] est le milieu de l'image du segment [AB] si (AB) n'est pas perpendiculaire à (P).

Exercices de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube. J est le centre du carré ABCD et I le centre du carré EFGH.

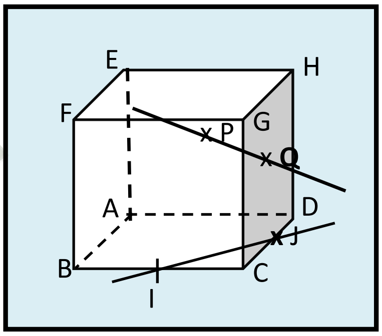
Détermine le projeté orthogonal du point I sur le plan (ABC). Justifie ta réponse.



Corrigé

Soit I le milieu du segment [HF].
Le projeté orthogonal de [HF] sur le plan (ABC) est le segment [DB].
Par conséquent, le projeté orthogonal de I sur le plan (ABC) est le milieu de [DB] donc le point J.

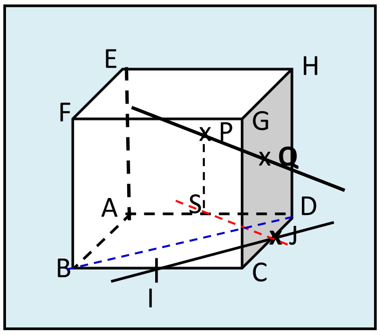
C. SITUATION COMPLEXE

Soit ABCDEFGH un cube. I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$. P et Q sont les centres respectifs des faces AEHD et CDHG. Lors du cours le professeur de Mathématiques d'une classe de 1^{ere} D affirme que : « les droites (PQ) et (IJ) sur la figure ci-contre sont orthogonales non sécantes». Il donne la démonstration à faire en exercice en classe et accorde trois points en bonus au premier élève qui aura fait une démonstration correcte. Etant élève de cette classe et désireux d'obtenir les points bonus, justifie cette affirmation du professeur de Mathématiques	

Solution

Pour répondre à la question, nous allons nos connaissances sur la leçon orthogonalité dans l'espace. Pour ce faire, nous allons :

- Justifier que les deux droites sont non sécantes
- Justifier que les deux droites sont orthogonales



Montrons que les droites (IJ) et (PQ) sont non sécantes

Soit (Π) le plan médiateur de l'arête [AE].
$(IJ) \subset (ABC)$ et $(PQ) \subset (\Pi)$ or , $(ABC) // (\Pi)$ (disjoints) les droites (IJ) et (PQ) sont disjointes car appartenant à des plans disjoints. Elles ne sont pas sécantes.

Montrons que les droites (IJ) et (PQ) sont orthogonales. Pour cela nous allons utiliser la définition de droites orthogonales.

Soit J est le projeté orthogonal de Q sur le plan (ABC). Soit S le projeté orthogonal de P sur le plan (ABC). Alors les droites (SJ) et (PQ) sont parallèles car $(ABC) // (\Pi)$.

I milieu de [BC] et J milieu de [CD] ; d'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle BCD, $(IJ) // (BD)$. Par conséquent, $(SJ) \perp (BD)$.

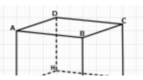
Dns le triangle ACD, S milieu de [AD] et J milieu de [CD] ; d'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle ACD, $(SJ) // (AC)$. Or (AC) perpendiculaire à (BD), par conséquent, $(SJ) \perp (BD)$.

En définitive, (SJ) *perpendiculaire à* (BD) ; $(SJ) // (PQ)$, $(BD) // (IJ)$ et donc (PQ) ⊥ (IJ).

D-EXERCICES

1. EXERCICES DE FIXATION

<u>Exercice 1</u>



Sur la figure ci-dessous $ABCDEFGH$ est un cube.

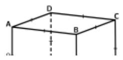
Justifie que la droite (EF) est orthogonale au plan (BFG).

Corrigé

(BF) et (GF) sont deux droites sécantes du plan (BFG) or (EF) est orthogonale aux deux droites (BF) et (GF) ; on en déduit que la droite (EF) est perpendiculaire au plan (BFG).

Exercice 2

La figure ci-dessous représente un cube. Les points Q et R désignent les milieux respectifs des arêtes $[AE]$ et $[BF]$



1) Justifie que les droites (AE) et (DC) sont orthogonales.

2) Justifie que les droites (AR) et (HG) ne sont pas orthogonales.

CORRIGÉ

1) $(AE)//(BF)$ et $(DC)//(AB)$ or (BF) et (AB) sont perpendiculaires en B, donc (AE) et (DC) sont orthogonales.

2) $(AR)//(QF)$ et $(HG)//(EF)$ or (QF) et (EF) ne sont pas perpendiculaires, donc (AR) et (HG) ne sont pas orthogonales.

Exercices 3

Réponds par vrai (V) ou faux (F)

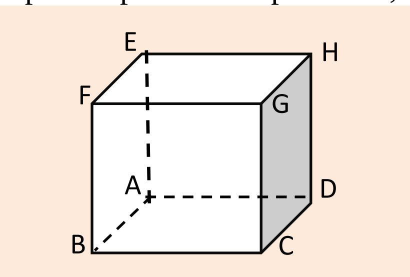
	Affirmations	V ou F
1	Deux droites perpendiculaires sont orthogonales	
2	Deux droites orthogonales sont perpendiculaires	
3	Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles	
4	Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles	
5	Toute droite orthogonale à deux droites parallèles d'un plan (P), est orthogonale à ce plan (P).	
6	Par un point donné, il passe une unique droite orthogonale à une droite donnée.	
7	Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles	

SOLUTION

1. V 2. F 3. V 4. F 5.F 6. V 7. V

Exercice 4

A partir du cube ABCDEFGH ci-dessous, et pour chaque affirmation, choisis la ou les bonnes réponses parmi les réponses A, B et C du tableau

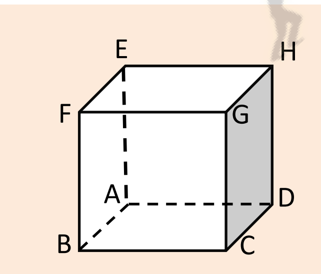


	AFFIRMATIONS	A	B	C
1	La droite (AB) est perpendiculaire à…	(AD)	(EH)	(GH)
2	La droite (AB) est orthogonale à…	(CG)	(CD)	(GH)
3	La droite (BD) est orthogonale à…	(AE)	(AEH)	(ACD)
4	Le projeté orthogonal de B sur la droite (EH) est …	A	E	H
5	Le projeté orthogonal de G sur le plan (AED) est….	A	E	H
6	La distance de H au plan (AED) est…	HE	0	HD
7	La distance de F à la droite (HD) est…	FD	FH	FE
8	Le triangle … est rectangle	EBG	HEC	AEC

Solution

1. A 2. A 3. A 4. E 5. C 6. B 7.B 8. B-C

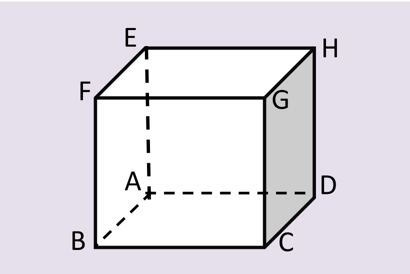
Exercice 5



La figure ci-dessus est le cube ABCDEFGH

1. Détermine le projeté orthogonal de G sur (ABF). F
2. Détermine la distance de B au plan (EGH).
3. Cite 3 droites perpendiculaires à la droite (EF).
4. Cite 3 droites orthogonales et non perpendiculaires à la droite (EF).
5. Cite 3 plans orthogonaux au droite (CD).
6. Cite 3 plans orthogonaux au plan (CDH).

On utilisera le cube ABCDEFGH pour résoudre les exercices allant de Ex 6 à Ex10.



<u>Exercice 6</u> : *L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier que deux droites sont orthogonales*

1. Démontre que : (BC) // (AD) et (HD) // (AE)
2. Déduis-en que : (BC) ⊥ (HD)

<u>Exercice 7</u> : *L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier l'orthogonalité entre une droite et un plan.*

1. Démontre que : (AB) ⊥ (AD) et (AB) ⊥ (AE)
2. Déduis-en que la droite (AB) est orthogonale au plan (AHD)

<u>Exercice 8</u> : *L'objet de cet exercice est d'utiliser la propriété fondamentale pour justifier l'orthogonalité entre deux droites.*

1. Démontre que : (AB) ⊥ (AHD).
2. Déduis-en que : (AB) ⊥ (HD).

<u>Exercice 9</u> : *L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier l'orthogonalité entre deux plans.*

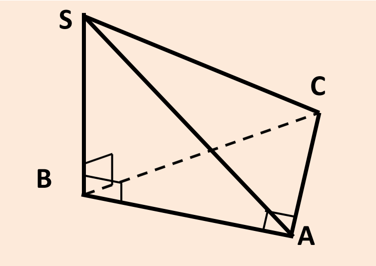
1. Démontre que : (AB) ⊥ (AHD).
2. Déduis-en que : (AEB) ⊥ (AHD).

<u>Exercice 10</u> *L'objet de cet exercice est de trouver le projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan et de calculer la distance d'un point à une droite ou à un plan*

1. a) Justifie que E est le projeté orthogonal de A sur le plan (FHG).
   b) Déduis-en, la distance de H à la droite (HG)
2. a) Justifie que D est le projeté orthogonale de C sur le plan (EHA).
   b) Déduis-en, la distance de C au plan (EHA).

D.2. EXERCICES DE RENFORCEMENT ET D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 11



La figure ci-dessus est un tétraèdre SABC tel que :

- La droite (SB) est orthogonale au plan ABC
- Le triangle ABC est rectangle en A

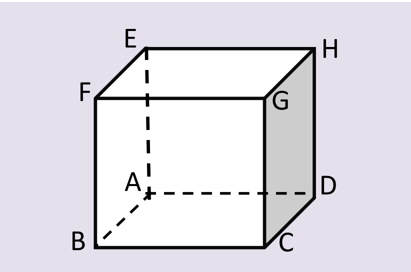
1. Démontre que la droite (AC) est orthogonale à la droite (SB).
2. Déduis-en que les plans (SAB) et (SAC) sont perpendiculaires

CORRIGÉ

1. (SB) $\perp$ (ABC) et (AC) $\subset$ (ABC). Donc (AC) $\perp$ (SB).

2. (AC) $\subset$ (SAC) ; (AB) $\subset$ (SAB) et (SB) $\subset$ (SAB)
   (AC) $\perp$ (SB) ; (AC) $\perp$ (AB) ; (AC) et (SB) sont sécantes en B donc (AC) $\perp$ (SAB).
   Par conséquent les plans (SAB) et (SAC) sont perpendiculaires.

Exercice 12 **Orthogonalité entre les plans**
On donne ci-dessous le cube ABCDEFGH



1. Démontre que : (ABC) $\perp$ (AEC)
2. Démontre que : (AEC) $\perp$ (HDB)
3. Démontre que : (FCH) $\perp$ (AEG)

Indications :
1. on étudiera l'orthogonalité entre (AE) et (ABC))
2. on étudiera l'orthogonalité entre la droite (AC) et les droites (BD) et (HD))
3. on étudiera l'orthogonalité entre la droite (FH) et les droites (EG) et (AE))

CORRIGE

1) $(AE)\perp(AD)$ et $(AE)\perp(AB)$ (AB) et (AD) sont incluses dans (ABC) donc (AE) est perpendiculaire au plan (ABC). La droite (AE) étant incluse dans le plan (AEC) on en déduit que les plans (ABC) et (AEC) sont perpendiculaires.

2) $(AC)\perp(BD)$ car ABCD est un carré. (AC) et (HD) sont orthogonales car $\begin{cases}(AC)\perp(CG)\\(CG)//(HD)\end{cases}$

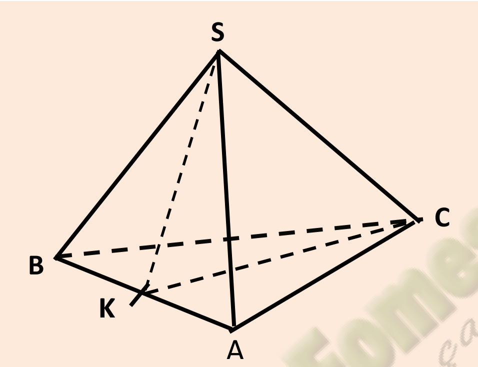
par conséquent (AC) est perpendiculaire au plan (HDB) et comme (AC) est incluse dans le plan (AEC) alors les plans (AEC) et (HDB) sont perpendiculaires.

3) $(FH)\perp(EG)$ car EFGH est un carré. (FH) et (AE) sont orthogonales car $\begin{cases}(FH)\perp(FB)\\(FB)//(AE)\end{cases}$

par conséquent (FH) est perpendiculaire au plan (AEG) et comme (FH) est incluse dans le plan (FCH) alors les plans (FCH) et (AEG) sont perpendiculaires.

<u>Exercice 13</u>

La figure ci-dessous est un tétraèdre régulier SABC c'est-à-dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux. On désigne par K le milieu de l'arête$[AB]$.



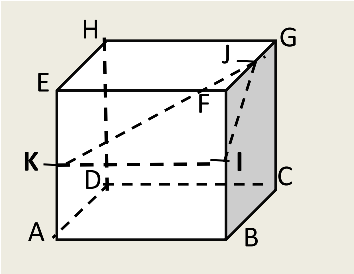
1. Démontre que la droite (AB) est orthogonale à la droite (SC)
2. Soit G le centre de gravité du tétraèdre SABC et H le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).
   a) Justifie que H est le centre de gravité du triangle ABC
   b) Justifie que $3\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$

Solution

1. Pour cela, nous allons montrer que la droite (AB) est orthogonale à un plan contenant (SC).
   Considérons le triangle équilatéral SAB. K est milieu de [AB] donc (SK) est perpendiculaire à (AB).
   De même en considérant le triangle équilatéral ABC, K est milieu de [AB] donc (CK) est perpendiculaire à (AB).
   Donc la droite (AB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (SKC). Donc (AB) $\perp$ (SKC), d'où (AB) $\perp$ (SC).

2. a) (SH) est la hauteur du tétraèdre régulier SABC et G $\in$ (SH). Donc H est le centre de gravité ABC.
   b) G est le centre de gravité du tétraèdre SABC alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$.
   $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}\Longrightarrow\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$
   $\Longrightarrow 3\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$
   $\Longrightarrow 3\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$ car H est le centre de gravité ABC.

Exercice 14



Sur la figure ci-dessus, ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de $[BF]$, $[FG]$ et $[AE]$

1. Démontre l'orthogonalité entre les droites et les plans dans les cas suivants :
  a) (IK) et (ADE)
  b) (BE) et (ADG)
  c) (ED) et (IJK)

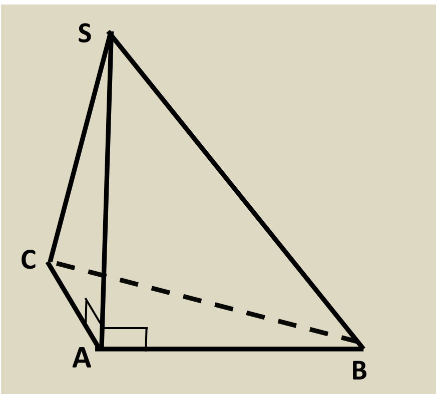
2. Démontre l'orthogonalité entre les droites dans les cas suivants :
 a) (AC) et (BF)
 b) (IK) et (CF)
 c) (IJ) et (CD)

Indications :
1b. (BE) ⊥ (AD) et (BE) ⊥ (DG) et conclure
1c. (ED) ⊥ (BG) et (BG)//(IJ) et conclure

Exercice 15 **(Arêtes opposées orthogonales)**

Dans un tétraèdre, on appelle arêtes opposées, deux arêtes qui n'ont aucun sommet commun.
La figure ci-dessous est un tétraèdre SABC tel que :
- La droite (SA) est orthogonale au plan ABC
- Le triangle ABC est rectangle en A

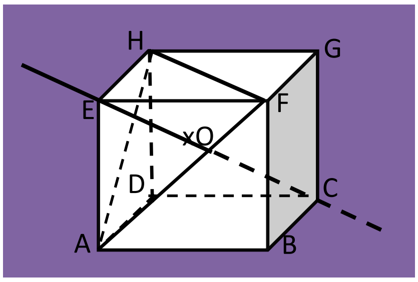
Démontre que les arêtes opposées de ce tétraèdre sont orthogonales. C'est à dire démontre que:
1. (SB) ⊥ (AC)
2. (SA) ⊥ (BC)
3. (SC) ⊥ (AB)



Indications :
1. Justifier que : (AC) ⊥ (ABS) et conclure
2. Propriété fondamentale
3. Justifier que : (AB) ⊥ (SCA) et conclure

Exercice 16

La figure ci-dessous est un cube ABCDEFGH d'arête a
L'objet de cet exercice est de démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (AHF) et de calculer la distance du point E au plan (AHF)



1. a) Démontre que la droite (AH) est orthogonale au plan (EDC)
   b) Déduis-en que : (EC) ⊥ (AH)
2. a) Démontre que : (AF) ⊥ (EB) et (AF) ⊥ (BC)
   b) Déduis-en que : (AF) ⊥ (EBC)
3. Déduis-en que la droite (EC) est orthogonale au plan (AHF)
4. On suppose que (EC) et (AHF) se rencontrent en O.
   a) Quelle est la nature du triangle AHF ?
   b) Démontre que O est le centre de gravité du triangle AHF. (*On pourra justifier que la droite (EC) est axe de symétrie du cercle circonscrit au triangle AHF*)

5.
a) Justifie que
E = $\mathrm{bar}\{(F;1),(H;1),(A;1),(C;-1)\}$
b) En utilisant l'isobarycentre O de A, H et F, détermine la position de O sur $[EC]$.
c) Calcule la distance EC en fonction de l'arête a
d) Déduis-en que la distance du point E au plan (AHF) est égale à : $EO = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

Durée : 07 heures

Compétence 2 — **Traiter des situations relatives à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements de données**

Thème 1 — **Organisation et traitements de données**

Leçon 15 : STATISTIQUES

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'équipe de course à pied d'un lycée a un nouvel entraîneur. Celui-ci vient de recevoir le tableau ci-dessous indiquant le temps mis par chacun des membres de l'équipe lors de la dernière épreuve de 10 km.

Nom	Temps (en min)
Agnero	53
Aka	51
Akalé	66
Allou	63
Amani	59
Ballo	61
Camara	48
Dago	41
Ehouman	47
Fallé	46

Nom	Temps (en min)
Goly	51
Gnali	60
Kassi	49
Koffi	46
Kouamé	44
Kouman	43
Lath	52
Lamine	39
Lohess	42
Manouan	53

Nom	Temps (en min)
Pakora	51
Sery	57
Seyo	62
Tiékoura	50
Traoré	43
Vanié	47
Yao	48
Yéo	56
Zadi	49
Zatto	61

Soucieux d'améliorer les performances de l'équipe, l'entraîneur expose ses décisions suivantes à l'équipe. « Je vais vous partager en cinq équipes de même effectif et de niveau équivalent (selon le temps mis lors de votre dernière épreuve).
Pour exposer les raisons de mon choix, je vais faire un affichage présentant une représentation graphique sous forme d'un histogramme.
Chacun des sportifs sera situé par rapport aux autres avec le classement, ainsi qu'une mise en évidence du premier quart, de la moitié et du troisième quart et des temps correspondants ».
Les élèves des classes de première scientifique faisant partie de l'équipe sont impatients de savoir dans quelles équipes ils seront et quelle est la situation de chacun par rapport aux autres.
Ils se mettent ensemble à organiser les données ci-dessus pour répondre à leurs préoccupations.

B. RESUME DE COURS

I. SERIES STATISTIQUES REGROUPEES EN CLASSES

1. Rappel

Lorsqu'il est question d'une série statistique regroupée en classes, on considère le tableau suivant :

Valeurs de X	$[x_1; x_2[$	$[x_2; x_3[$	$[x_3; x_4[$	…	$[x_p; x_{p+1}[$	TOTAL
Effectifs	n_1	n_2	n_3	…	n_p	N
Centre	c_1	c_2	c_3	…	c_p	

- L'amplitude de la classe $[x_i; x_{i+1}[$ est $x_{i+1} - x_i$
- Le centre $c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Exemple :

On a relevé dans une agence bancaire les montants en milliers de francs des 49 premiers versements effectués au guichet. On a obtenu les résultats suivants :

950	300	100	800	200	30	75
250	600	260	150	45	490	400
200	375	360	620	130	1450	880
1025	560	350	450	400	280	190
1180	220	520	120	900	110	350
600	850	290	1400	125	900	1000
130	1100	430	950	45	310	590

Regroupons ces montants par classes d'amplitude 300, la première étant [0 ;300[et dressons le tableau des effectifs comportant les centres.

Classes	[0 ;300[	[300 ; 600[	[600 ; 900[	[900 ; 1200[	[1200 ;1500[
Effectifs	19	14	6	8	2
Centres	150	450	750	1050	1350

2. Densité

Définition

On appelle densité d'une classe, le quotient de l'effectif de la classe par l'amplitude de cette classe.

Exemple

Cette série statistique représente la production en tonnes de plusieurs coopératives de planteurs de cacao.

Classes	[0 ;30 [	[30 ; 45[	[45 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 100[
Effectifs	13	25	20	15	17

Déterminons l'amplitude et la densité de chaque classe.

Classes	[0 ;30 [	[30 ; 45[	[45 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 100[	Total
Effectifs	13	20	25	15	17	90
Amplitude	30	15	25	10	20	
Densité	0,43	1,33	1	1,5	0,85	

La densité de la classe [0 ;30 [est $\frac{13}{30} = 0{,}43$

II. Caractéristiques de position d'une série statistique regroupée en classes

1. Classe modale

Définition

On appelle classe modale toute classe dont la densité est maximale

Exemple

Cette série statistique représente la production en tonnes de plusieurs coopératives de planteurs de cacao.

Classes	[0 ;30 [	[30 ; 45[	[45 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 100[
Effectifs	13	20	25	15	17
Densité	0,43	1,33	1	1,5	0,85

La classe modale de cette série statistique est [70 ; 80[

Interprétation : La classe [70 ; 80[comporte la plus grande concentration de coopératives.

Cas particulier :

Si toutes les classes ont la même amplitude, alors une classe modale est une classe dont l'effectif est maximal.

2. Moyenne

La moyenne d'une série statistique, notée : $\overline{\boldsymbol{x}}$, est donnée par :

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i c_i}{N} = \frac{1}{N}(n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_pc_p) .$$

En utilisant les fréquences, on a :

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{p} f_i c_i = f_1c_1 + f_2c_2 + \cdots + f_pc_p.$$

Exercice de fixation

Cette série statistique représente la production en tonnes de plusieurs coopératives de planteurs de cacao.

Classes	[0 ;30 [	[30 ; 45[	[45 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 100[
Effectifs	13	20	25	15	17

Calcule la moyenne de la série statistique.

Solution

Classes	[0 ;30 [	[30 ; 45[	[45 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 100[	Total
Effectifs	13	20	25	15	17	90
Centre	15	37,5	57,5	75	90	
$n_i c_i$	195	750	1437,5	1125	1530	5037,5

$n_1 c_1 = 13 \times 15 = 195$

La moyenne est : $\bar{x} = \frac{5037,5}{90} = 55,97$

Interprétation

La production moyenne de l'ensemble des coopératives est 55,97 tonnes.

3. Médiane

Définition :

La médiane d'une série statistique continue est un nombre qui sépare les valeurs ordonnées de la série en deux familles de même effectif.
Autrement dit : c'est un nombre M tel qu'au moins 50% des individus aient une valeur du caractère supérieure ou égale à M.

Elle se détermine :

- Soit graphiquement : c'est l'abscisse du point de la courbe cumulative des effectifs (resp. fréquences) dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total (resp. 0,5) ;

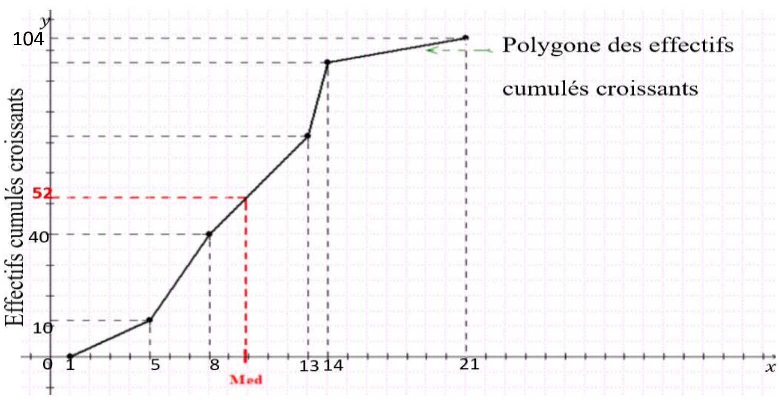
Exemple :

On a relevé le nombre d'heures d'absences de tous les élèves de 1ère C d'un lycée durant l'année scolaire.

On a obtenu la série statistique suivante :

Classes	[1 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 13[	[13 ; 14[	[14 ; 21[
Effectifs	12	28	32	24	8
Effectifs cumulés croissants	12	40	72	96	104

Le polygone des effectifs cumulés croissants est le suivant :



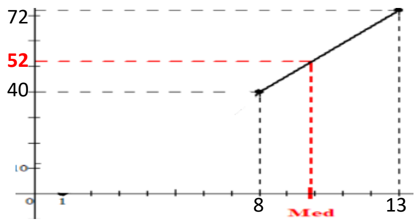
La médiane est environ égale à 9.

- La détermination de la médiane par calcul se fait par interpolation linéaire.

Exemple :

Considérons l'exemple précédent.

On a : $\frac{N}{2} = \frac{104}{2} = 52$; 52 est compris entre le 40e rang et le 72e rang. On a Me $\in$ [8 ; 13[.



On obtient le tableau suivant :

Modalités (Abscisse)	8	Me	13
Ecc (Ordonnée)	40	52	72

Alors

$\frac{Me-8}{13-8} = \frac{52-40}{72-40}$, donc Me = 9,87

Interprétation

La moitié des élèves a un nombre d'heures d'absences supérieur ou égal à 9,87.

Remarque : La médiane peut être déterminée graphiquement à l'aide du polygone des effectifs cumulés décroissants.

4. Quartiles

Définition :

Les valeurs de la série étant ordonnées :

- Le premier quartile, noté Q_1, est la valeur de la variable telle que 25% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 et 75% lui sont supérieures.
- Le deuxième quartile Q_2, est la médiane.
- Le troisième quartile, noté Q_3, est la valeur de la variable telle que 75% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_3 et 25% lui sont supérieures.

➢ Graphiquement,
  - Q_1 correspond à 25% de l'effectif sur le polygone des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes.
  - Q_3 correspond à 75% de l'effectif sur le polygone des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes.

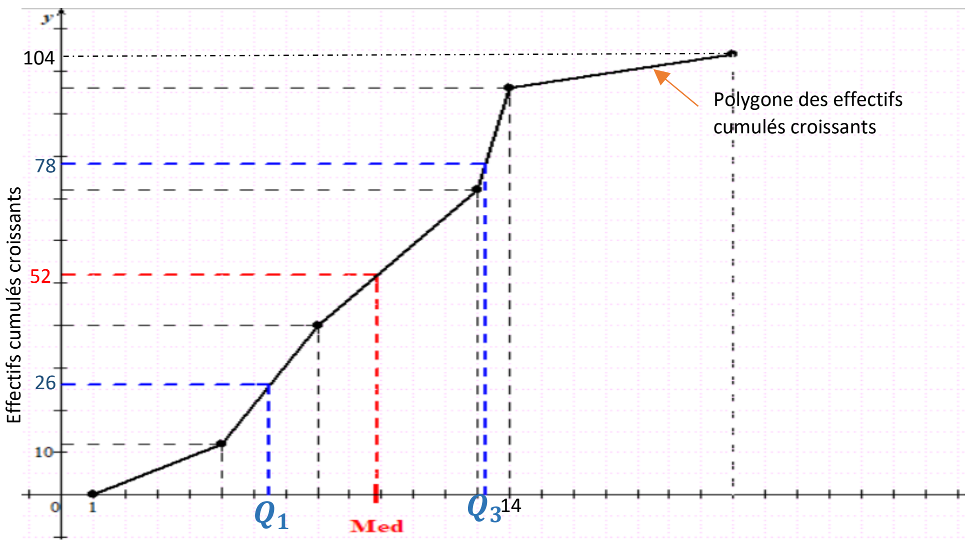
Exemple :

On a relevé le nombre d'heures d'absences de tous les élèves de 1ereC d'un lycée durant l'année scolaire.

On a obtenu la série statistique suivante .

Classes	[1 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 13[	[13 ; 14[	[14 ; 21[
Effectifs	12	28	32	24	8
Effectifs cumulés croissants	12	40	72	96	104

Le polygone des effectifs cumulés croissants est le suivant :



Le premier quartile est environ égal à 7.

Le troisième quartile est environ égal à 13.

- On peut calculer une valeur plus précise de Q_1 et Q_3 par interpolation linéaire.

<u>Calculons le premier quartile</u>

N$\times \frac{25}{100} = 104 \times \frac{25}{100} = 26$; 26 est compris entre le 12e rang et le 40e rang. On a $Q_1 \in [5;8[$

Alors $\frac{Q_1 - 5}{8-5} = \frac{26-12}{40-12}$, donc $Q_1 = 6{,}5$

<u>Calculons le troisième quartile</u>

N$\times \frac{75}{100} = 104 \times \frac{75}{100} = 78$; 78 est compris entre le 72e rang et le 96e rang. On a $Q_3 \in [13;14[$

Alors $\frac{Q_3 - 13}{14-13} = \frac{78-72}{96-72}$, donc $Q_1 = 13{,}25$

Interprétation

- 26 élèves ont un nombre d'heures d'absences inférieur ou égal à 6,5.
- 78 élèves ont un nombre d'heures d'absences inférieur ou égal à 13,5

x

III. REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

1. Histogramme

- L'histogramme d'une série statistique regroupée en classes est constitué de rectangles juxtaposés.
- L'aire de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif (resp. la fréquence) de la classe correspondante.
- Les largeurs des rectangles sont proportionnelles aux amplitudes des classes.
- Les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux densités des classes

<u>Exercice de fixation</u>

On donne la série statistique suivante :

Modalité	[2 ; 3[	[3 ; 4,5[	[4,5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[	[6 ; 8[
Fréquence	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Amplitude					
Centre					
Densité					

a- Complète le tableau

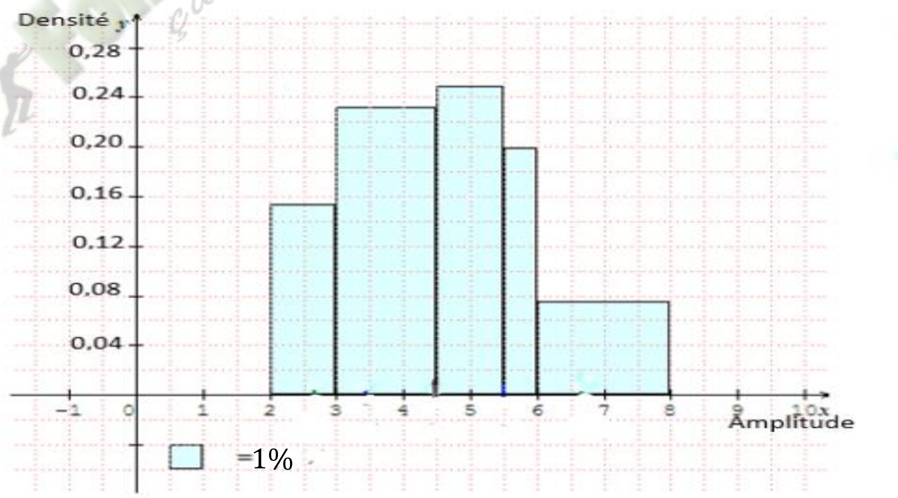
b- Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique.

Solution

a- Complétons le tableau

Modalité	[2 ; 3[	[3 ; 4,5[	[4,5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[	[6 ; 8[
Fréquence	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Amplitude	1	1,5	1	0,5	2
Centre	2,5	3,75	5	5,75	7
Densité	0,15	0,23	0,25	0,2	0,075

b- Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique



La surface d'un petit carreau est $0{,}5 \times 0{,}02 = 0{,}01$ soit 1%

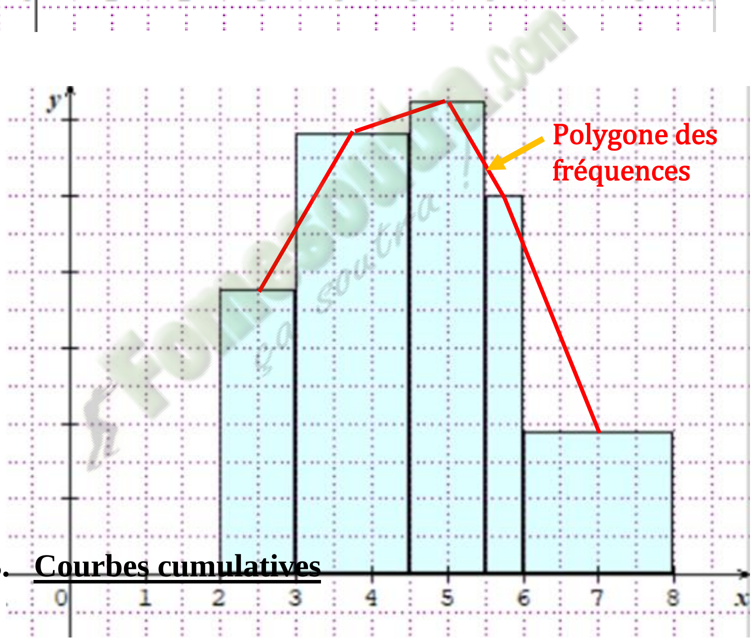
2. Polygones des effectifs et des fréquences

Le polygone des effectifs (resp. fréquences) est obtenu en joignant les milieux successifs des côtés les plus hauts de chaque rectangle de l'histogramme.

Exercice de fixation

Construis le polygone des fréquences de la série statistique dont l'histogramme des fréquences est donné ci-dessous.

Solution



3. Courbes cumulatives

La courbe cumulative des effectifs est la représentation graphique de la fonction F définie sur IR et à valeurs dans l'intervalle [0 ; N] telle que :

- Si $x < x_1$, alors $F(x) = 0$
- Sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}[$, F coïncide avec la fonction affine g telle que $\mathrm{g}(x_i) = N_i$ et $\mathrm{g}(x_{i+1}) = N_{i+1}$, où N_i est l'effectif cumulé croissant de $[x_i; x_{i+1}[$ et N_{i+1} celui de $[x_{i+1}; x_{i+2}[$
- Si $x \geq x_{p+1}$, alors $F(x) = N$.

La courbe cumulative des fréquences est la représentation graphique de la fonction F définie sur IR et à valeurs dans l'intervalle [0 ;1] telle que :

- Si$x \leq x_1$, alors $\mathrm{F}(x) = 0$
- Sur chaque intervalle $[x_1; x_{i+1}[$ F coïncide avec la fonction affine g telle que $\mathrm{g}(x_i)$=F_i et $\mathrm{g}(x_{i+1}) = F_{i+1}$, où F_i est la fréquence cumulée croissante de $[x_i; x_{i+1}[$ et F_{i+1} celle de $[x_i ;x_{i+2}[$
- Si $x \geq x_{p+1}$, alors $\mathrm{F}(x) = 1$.

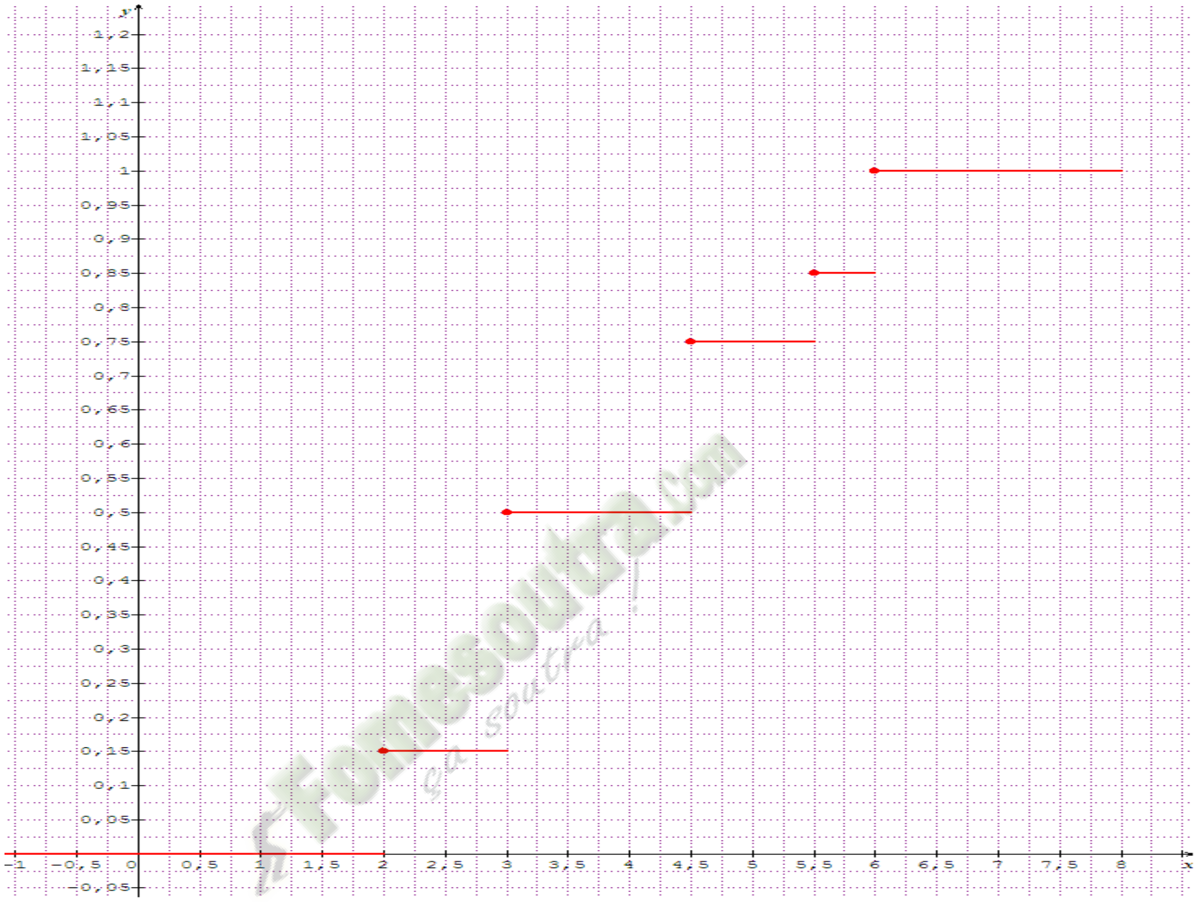
Exercice de fixation

On donne la série statistique suivante :

Classes	[2 ; 3[	[3 ; 4,5[	[4,5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[	[6 ; 8[
Fréquences	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Fréquences cumulées	0,15	0,5	0,75	0,85	1

Construis la courbe cumulative des fréquences de cette série statistique.

Solution



IV. CARACTERISTIQUES DE DISPERSION D'UNE SERIE STATISTIQUE REGROUPEES EN CLASSES

1. Variance

La variance d'une série statistique regroupée en classe, notée V, est donnée par la formule :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\,(c_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{1}{N}\left[n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_p\left(c_p - \bar{x}\right)^2\right]$$

Autre formule :

$$V = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{p} n_i\, c_i{}^2\right) - (\bar{x})^2 = \frac{1}{N}\left(n_1 c_1^2 + n_2 c_2^2 + \cdots + n_p c_p^2\right) - \bar{x}^2$$

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

a- Justifions que la moyenne est 39,84
b- Calcule la variance de cette série.

<u>Solution</u>

Temps (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[	Total
Effectif	35	41	30	12	5	2	125
Centre	10	30	50	80	120	170	
$n_i\,c_i$	350	1230	1500	960	600	340	4980
$n_i\,{c_i}^2$	3500	36900	75000	76800	72000	57800	322000

a/ <u>la moyenne $\bar{x}$</u>

$$\bar{x}=\frac{4980}{125}=39{,}84$$

b/ <u>la variance V</u>

$$V=\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{6} n_i\,{c_i}^2\right)-(\bar{x})^2=\frac{322000}{125}-(39{,}84)^2=988{,}77$$

2. <u>Ecart type</u>

L'écart type d'une série statistique, noté $\sigma=\sqrt{V}$.

Interprétation

Plus l'écart type est plus élevé, plus la dispersion des valeurs autour de la moyenne est plus élevée

<u>Exercice de fixation</u>

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

Calcule l'écart type de cette série et interprète le résultat.

Solution

Temps en (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2
Centre	10	30	50	80	120	170

On trouve $V=\ 988{,}77$

L'écart type σ

$\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{988{,}77}=31{,}44.$

<u>Interprétation(</u>

31,44 est élevé donc le temps que les élèves consacrent au sport par semaine dans la majorité n'est pas proche de la moyenne 39,84

3. <u>Ecart absolu moyen</u>

L'écart absolu moyen, noté e_m , est le réel :

$$e_m=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\,|c_i-\bar{x}|=\frac{1}{N}(n_1\times|c_1-\bar{x}|+n_2\times|c_2-\bar{x}|+\ldots+n_p\times|c_p-\bar{x}|).$$

Interprétation

L'écart moyen nous indique la distance moyenne entre la moyenne et les valeurs de la série statistique

<u>Exercice de fixation</u>

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

Calcule l'écart absolu moyen de cette série et interprète le résultat.

Solution

Temps en (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[	**Total**
Effectif	35	41	30	12	5	2	**125**
Centre	10	30	50	80	120	170	
$\boldsymbol{\lvert c_i - \bar{x} \rvert}$	29,84	9,84	10,16	40,16	80,16	130,16	
$\boldsymbol{n_i \lvert c_i - \bar{x} \rvert}$	1044,4	403,44	304,8	481,92	400,8	260,32	**2895,68**

On trouve la moyenne $\bar{x} = 39{,}84$

L'écart absolu moyen

$$e_m = \frac{1}{125}(35 \times |10 - 39{,}84| + 41 \times |30 - 39{,}84| + 30 \times |50 - 39{,}84| + 12 \times |80 - 39{,}84| + 5 \times |120 - 39{,}84| + 2 \times |170 - 39{,}84|)$$

$$e_m = \frac{2895{,}68}{125} = 23{,}17$$

<u>Interprétation.</u>

Le temps consacré à la pratique de sport par semaine d'un élève est à 23,17 min de la moyenne.

4. <u>Ecart interquartile</u>

L'écart interquartile est la différence entre le troisième et le premier quartile. C'est le nombre $Q_3 - Q_1$.

<u>Interprétation</u>

50% des valeurs sont comprises entre le premier quartile et le troisième quartile .

<u>Exercice de fixation</u>

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

Calcule l'écart interquartile de cette série et interprète le résultat.

Solution

Temps en (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2
Effectifs cumulés croissants	35	76	106	118	123	125

- On a $125 \times \frac{25}{100} = 31{,}25$.

31,25 est plus petit que la 35^e valeur. Donc $Q_1 \in [0\,;\,20[$.

$\frac{Q_1-0}{20-0} = \frac{31{,}25-0}{35-0}$ donc $\boldsymbol{Q_1 = 17{,}86}$

- On a $125 \times \frac{75}{100} = 93{,}75$.

93,75 est compris entre la 76^e et la 106^e valeur. Donc $Q_3 \in [40\,;\,60[$.

$\frac{Q_3-40}{60-40} = \frac{93{,}75-76}{106-76}$ donc $Q_3 = 51{,}83$

L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$ =51,83-17,86=33,97

Interprétation

L'étendue est 200.

L'interquartile est environ égale à 25% de l'étendue donc 50% des élèves ont leur temps consacré à la pratique du sport proche de la médiane.

C. SITUATION COMPLEXE

Le président du comité de gestion scolaire (COGES) de ton lycée veut acquérir une machine pour stocker sa récolte dans des sacs de 50 kg. Un commerçant lui propose deux machines, A et B, qu'il teste sur 80 sacs. Le tableau ci-dessous indique les résultats obtenus.

Classe	Machine A	Machine B	Classe	Machine A	Machine B
$[49; 49{,}2[$	7	4	$[49{,}8; 50[$	11	14
$[49{,}2; 49{,}4[$	6	6	$[50; 50{,}2[$	14	16
$[49{,}4; 49{,}6[$	14	9	$[50{,}2; 50{,}4[$	9	17
$[49{,}6; 49{,}8[$	14	11	$[50{,}4; 50{,}6[$	5	3

Un agent de l'agriculture du service qualité estime que la machine est bonne si les conditions suivantes sont simultanément réalisées :

- la moyenne $\bar{x}$ doit être comprise entre 49,7 et 50,3 ;
- l'écart-type σ doit être inférieur à 0,5 kg ;
- l'intervalle $[49{,}3; 50{,}5]$ doit contenir 85% des sacs.

Sollicité par un membre du bureau du COGES pour le choix de la machine convenable, tu décides de répondre à la préoccupation de leur président en utilisant tes connaissances en mathématiques.

Solution

Pour vérifier la qualité de cette machine je vais utiliser la leçon sur les statistiques .

Pour cela je vais :

- Dresser le tableau des effectifs, des fréquences et des fréquence cumulées croissantes de chaque machine.
- Calculer le stockage moyen de chaque machine.
- Calculer la variance l'écart type de chaque série statistique.
- Utiliser l'interpolation linéaire pour donner une estimation de la fréquence correspondante à la valeur 49,3 et 50,5.
    - Le tableau des effectifs, des fréquences et des fréquence cumulées croissantes de chaque machine.

Machine A

Stockage	[49; 49,2[	[49,2;49,4[	[49,4;49,6[	[49,6; 49,8[	[49,8; 50[	[50; 50,2[	[50,2; 50,4[	[50,4; 50,6[
Nombre de sacs	7	6	14	14	11	14	9	5
Centres	49,1	49,3	49,5	49,7	49,9	50,1	50,3	50,5
Fréquence (%)	8,8	7,5	17,5	17,5	13,8	17,5	11,3	6,3
Fréquence cumulées croissantes(%)	8,8	16,3	33,8	51,3	65	82,5	93,8	100

Machine B

Stockages	[49; 49,2[	[49,2;49,4[	[49,4;49,6[	[49,6; 49,8[	[49,8; 50[	[50; 50,2[	[50,2; 50,4[	[50,4; 50,6[
Nombre de sacs	4	6	9	11	14	16	17	3
Centres	49,1	49,3	49,5	49,7	49,9	50,1	50,3	50,5
Fréquence (%)	5	7,5	11,3	13,8	17,5	20	21,3	3,8
Fréquence cumulées croissantes(%)	5	12,5	23,8	37,5	55	75	96,3	100

- Le stockage moyen de chaque machine.

Machine A :

$$\boldsymbol{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{8} n_i c_i}{N} = \frac{3983{,}8}{80} = 49{,}79$$

Machine B :

$$\boldsymbol{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{8} n_i c_i}{N} = \frac{3991{,}2}{80} = 49{,}89$$

- La variance et l'écart type de chaque série statistique.

Machine A

$$V=\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{8} n_i\, {c_i}^2\right) - (\bar{x})^2 = \frac{198395{,}7}{80} - (49{,}78)^2 = 0{,}39$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}39} = 0{,}62$$

Machine B

$$V=\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{8} n_i\, {c_i}^2\right) - (\bar{x})^2 = \frac{199132}{80} - (49{,}89)^2 = 0{,}14$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}14} = 0{,}37$$

- Une estimation de la fréquence correspondante à la valeur 49,3 et 50,5par l'interpolation linéaire.

Machine A

A l'aide du tableau des fréquences cumulées croissantes , On a :

49,2	49,3	49,4
8,8	b	16,3

Machine B

A l'aide du tableau des fréquences cumulées croissantes , On a :

49,2	49,3	49,4
5	b	12,5

$$\frac{49{,}3-49{,}2}{49{,}4-49{,}2}=\frac{b-8{,}8}{16{,}3-8{,}8}$$

$\frac{b-8{,}8}{7{,}5}=\frac{0{,}1}{0{,}2}$ donc b =12,55

50,4	50,5	50,6
93,8	b	100

$$\frac{50{,}5-50{,}4}{50{,}6-50{,}4}=\frac{b-93{,}8}{100-93{,}8}$$

$\frac{b-93{,}8}{6{,}2}=\frac{0{,}1}{0{,}2}$ donc b =96,9

La fréquence de [49,3;50,5] est
$96{,}9-12{,}55=84{,}35\%$

$$\frac{49{,}3-49{,}2}{49{,}4-49{,}2}=\frac{b-5}{12{,}5-5}$$

$\frac{b-5}{7{,}5}=\frac{0{,}1}{0{,}2}$ donc b =8,75

50,4	50,5	50,6
96,3	b	100

$$\frac{50{,}5-50{,}4}{50{,}6-50{,}4}=\frac{b-96{,}3}{100-96{,}3}$$

$\frac{b-96{,}3}{3{,}7}=\frac{0{,}1}{0{,}2}$ donc b =98,15

La fréquence de [49,3;50,5] est
$98{,}15-8{,}75=89{,}4\ \%$

Après calcul, on remarque que :
Pour la machine A on a :

- la moyenne calculée (49,8) est comprise entre 49,7 et 50,3 ;
- l'écart-type calculé (0,39) est inférieur à 0,5
- l'intervalle [49,3;50,5] contient 84,35% des sacs donc la machine n'arrive pas à contenir 85% des sacs.

Pour la machine B on a :

- la moyenne calculée (49,89) est comprise entre 49,7 et 50,3 ;
- l'écart-type calculé (0,37) est inférieur à 0,5

l'intervalle [49,3;50,5] contient 89,4% des sacs donc la machine arrive à contenir 85% des sacs.

Donc le président du comité de gestion scolaire (COGES) devra choisir la machine B.

D. EXERCICES

Exercice 1

Le tableau ci- dessous indique la répartition du salaire journalier (en milliers de francs CFA) des ouvriers d'une entreprise.

Salaire	[1; 2[	[2; 3[	[3; 5[	[5; 8[
Nombre d'ouvriers	34	76	51	39

1. Dans un tableau détermine la densité et l'amplitude de cette série statistique.
2. Construis l'histogramme des effectifs de cette série statistique.
3. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des polygones des effectifs cumulés décroissants.
4. a) Déduis graphiquement une valeur approchée de la médiane.
   b) Détermine par le calcul une estimation de la médiane.

Solution

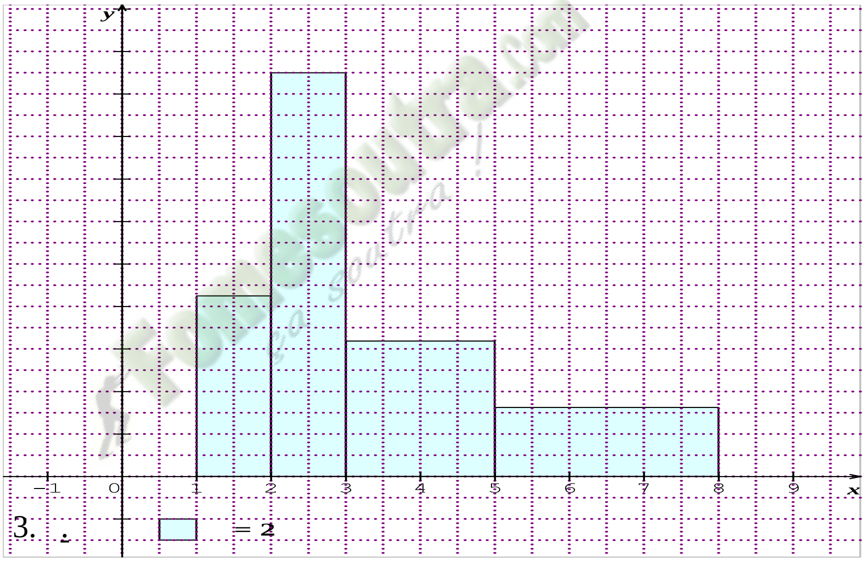
1. Tableau des fréquences

Salaire	[1; 2[	[2; 3[	[3; 5[	[5; 8[	Total
Nombre d'ouvriers	34	76	51	39	200
Amplitude	2	1	2	3	
Densité	17	76	25,5	13	

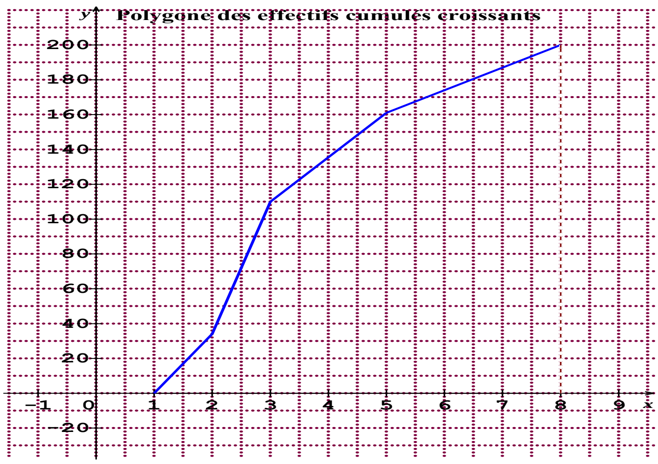
2. L'histogramme des effectifs

Echelle ; un petit carreau correspond à 2 ouvriers soit $1cm^2 \rightarrow 8$ ouvriers

Salaire	[1; 2[	[2; 3[	[3; 5[	[5; 8[	Total
Nombre d'ouvriers	34	76	51	39	200
Largeur	1	1	2	3	
hauteur	4,25	9,5	3,2	1,6	



3.

Le polygone des effectifs cumulés croissants	Le polygone des effectifs cumulés décroissants.
	

Exercice 2

On donne la série statistique suivante :

Tranche d'âge (en année)	$[0;10[$	$[10;15[$	$[15;17[$	$[17;20[$
Effectif (n_i)	7	16	18	9

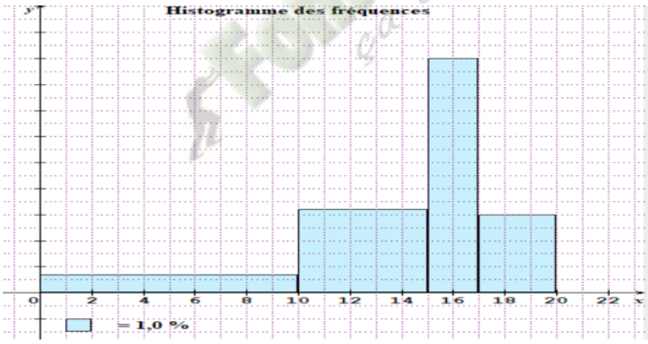
1. Dresse, en pourcentage, le tableau des fréquences cumulées croissantes de cette série.
2. Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique.
3. Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.
4. a) Déduis graphiquement une valeur approchée à 10^{-1} près des quartiles de cette série statistique.
   b) Détermine par le calcul une estimation des quartiles de cette série statistique.
   (On donnera les résultats à l'arrondi d'ordre 1).
   c) Calcul l'écart interquartile.

Solution

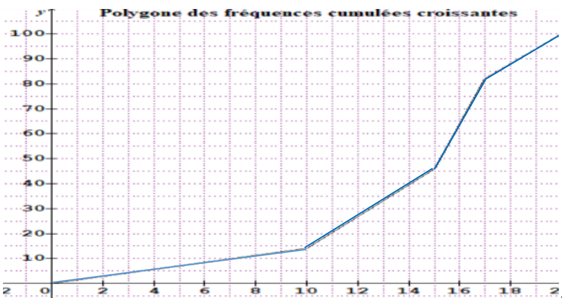
1. Le tableau des fréquences cumulées croissantes de cette série en pourcentage.

Tranche d'âge (en année)	$[0;10[$	$[10;15[$	$[15;17[$	$[17;20[$
Effectif (n_i)	7	16	18	9
Fréquence (%)	14	32	36	18
Fréquence cumulées croissantes(%)	14	46	82	1

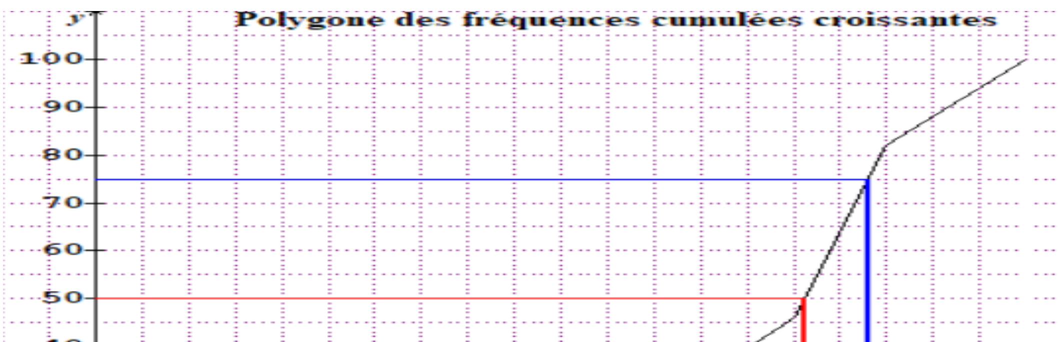
2. Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique.



3. Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.



4. a) Une valeur approchée à 10^{-1} près des quartiles de cette série statistique.



Q_1 Med Q_3

$\boldsymbol{Q_1 = 11,7}$ $\boldsymbol{Q_3 = 16,6}$

b) Une estimation des quartiles par le calcul de cette série statistique.

Tranche d'âge (en année)	$[0; 10[$	$[10; 15[$	$[15; 17[$	$[17; 20[$
Fréquence (%)	14	32	36	18
Fréquence cumulées croissantes(%)	14	46	82	1

• On a $100 \times \frac{25}{100} = 25$ 25 est compris entre la 14^e et la 46^evaleur. Donc $Q_1 \in [10 ; 15[$. $\frac{Q_1-10}{15-10} = \frac{25-14}{46-14}$ donc $\boldsymbol{Q_1 = 11,72}$	• On a $100 \times \frac{75}{100} = 75$. 75 est compris entre la 46^evaleur et la 82^evaleur. Donc $Q_3 \in [15 ; 17[$ $\frac{Q_3-15}{17-15} = \frac{75-46}{82-46}$ donc $Q_3 = 16,61$

c) Calcul l'écart interquartile.

L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$ =16,61-11,72=4,89

Exercice 3

On considère la série statistique présentée dans le tableau suivant :

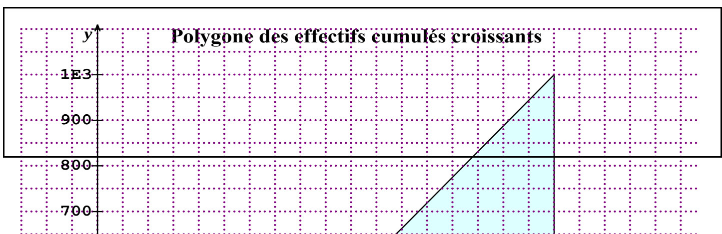
Classe	$[1; 2[$	$[2; 4[$	$[4; 5[$	$[5; 6[$	$[6; 9[$
Effectif	258	133	164	108	337

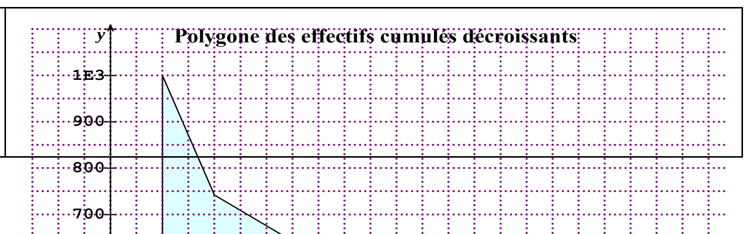
1. Construis les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Détermine le nombre d'individus dont la modalité est :

   a) inférieure à 3 ; b) supérieure à 5,3 ; c) comprise entre 3 et 5,3
3. Calcule la moyenne, la variance et l'écart type de cette série.

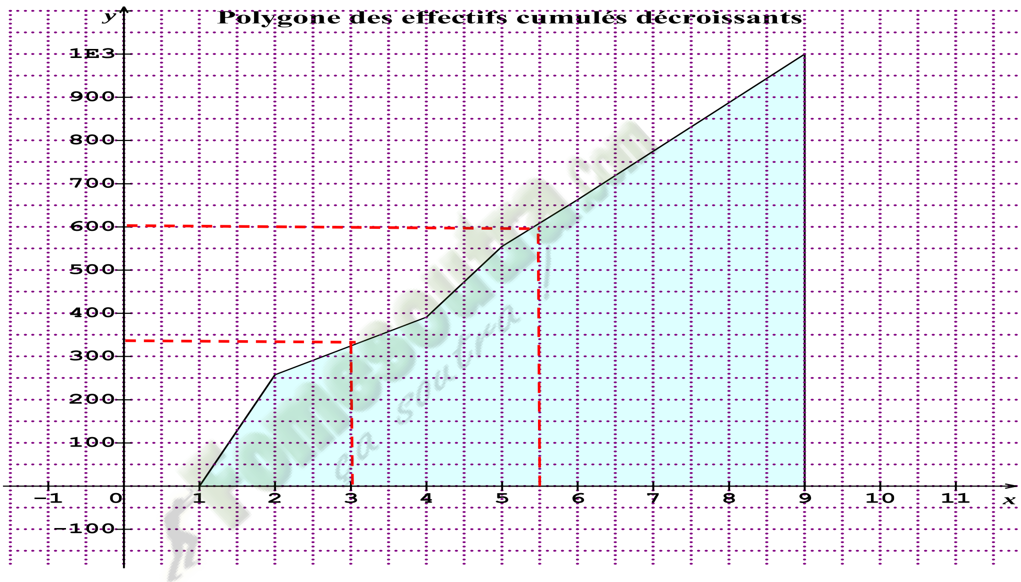
Réponse

1. :





1. Le nombre d'individus dont la modalité est :



- inférieure à 3

Graphiquement on a 340 individus qui ont une modalité inférieure 3

- supérieure à 5,3

Graphiquement on a 600 individus qui ont une modalité inférieure 3

- comprise entre 3 et 5,3

On a 600-340=260 individus.

2.

Classe	$[1;2[$	$[2;4[$	$[4;5[$	$[5;6[$	$[6;9[$	Total
Effectif	258	133	164	108	337	1000
Centre	1,5	3	4,5	5,5	7,5	
$\boldsymbol{n_i\, c_i}$	387	399	738	594	2527,5	4645,5
$\boldsymbol{n_i\, c_i^{\,2}}$	580,5	1197	3321	3267	18956,25	27321,75

la moyenne,

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i c_i}{N} = \frac{4645,5}{1000} = 4,65$$

La variance

$$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i\, c_i{}^2) - (\bar{x})^2 = \frac{27321{,}75}{1000} - (4{,}65)^2 = 5{,}7$$

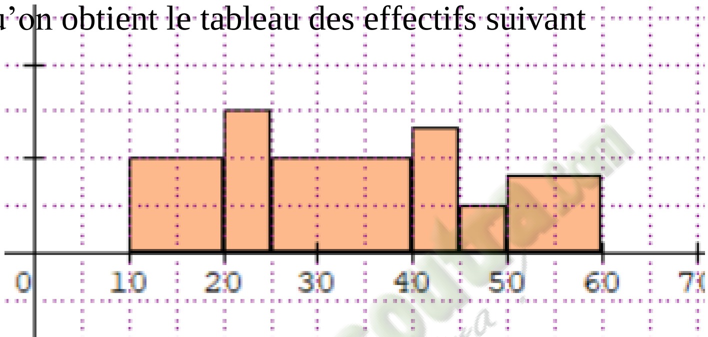
L'écart type.

$$\sigma = \sqrt{5{,}7} = 2{,}4$$

Exercice 4

L'histogramme ci-contre représente les recettes en milliers de francs CFA de 300 commerçants. $1cm^2$ représente 60 individus.

1. Justifie qu'on obtient le tableau des effectifs suivant

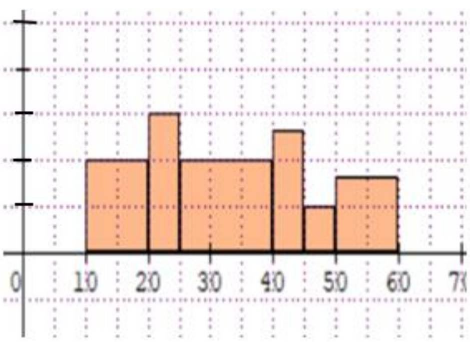


Classes	$[10; 20[$	$[20; 25[$	$[25; 40[$	$[40; 45[$	$[45; 50[$	$[50; 60[$
Effectifs	60	45	90	40	15	50

2. Détermine l'écart –type de cette série statistique. Interprète ce résultat.
3. Détermine l'écart interquartile de cette série statistique. Interprète ce résultat.

Solution

1.



On sait que l'aire d'un rectangle est hauteur × base

Classes	$[10; 20[$	$[20; 25[$	$[25; 40[$	$[40; 45[$	$[45; 50[$	$[50; 60[$
Aire du rectangle(cm^2)	2	1,5	3	1,33	0,5	1,67

Pour trouver l'aire de la classe [50 ;60[on a la base est égale à 1cm et la hauteur est égale environ à 1,67.

On obtient le tableau des effectifs

Classes	$[10; 20[$	$[20; 25[$	$[25; 40[$	$[40; 45[$	$[45; 50[$	$[50; 60[$

Effectifs	60	45	90	40	15	50

2. L'écart –type de cette série statistique.

Classe	$[10; 20[$	$[20; 25[$	$[25; 40[$	$[40; 45[$	$[45; 50[$	$[50; 60[$	Total
Effectif	60	45	90	40	15	60	300
Centre	15	22,5	32,5	42,5	47,5	55	
$\boldsymbol{n_i\, c_i}$	900	1012,5	2925	1700	712,5	2750	10000
$\boldsymbol{n_i\, c_i{}^2}$	13500	22781,25	95062,5	72250	33843,75	151250	388687,5

la moyenne : $\boldsymbol{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i c_i}{N} = \frac{10000}{300} = 33{,}33$

La variance : $V = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{6} n_i\, c_i{}^2\right) - (\bar{x})^2 = \frac{388687{,}5}{300} - (33{,}33)^2 = 184{,}74$

L'écart type : $\sigma = \sqrt{184{,}74} = 13{,}59$

<u>Interprétation</u>

13,59 est élevé donc les recettes sont dispersées autour de la moyenne 33,33.

3. L'écart interquartile de cette série statistique.

Classes	$[10; 20[$	$[20; 25[$	$[25; 40[$	$[40; 45[$	$[45; 50[$	$[50; 60[$
Effectifs	60	45	90	40	15	50
Effectifs cumulées croissantes	60	105	195	235	250	300

- On a $300\times \frac{25}{100} = 75$

75 est compris entre la 60^e et la 105^evaleur. Donc $Q_1 \in [20\ ;\ 25[$.

$\frac{Q_1-20}{25-20} = \frac{75-60}{105-60}$ donc $\boldsymbol{Q_1 = 21,67}$

- On a $300\times \frac{75}{100} = 225$

225 est compris entre la 195^e et la 235^evaleur. Donc $Q_3 \in [40\ ;\ 45[$.

$\frac{Q_1-40}{45-40} = \frac{225-195}{235-195}$ donc $\boldsymbol{Q_3 = 43,75}$

$Q_3 - Q_1 = 22,08$

Interprétation

50% des recettes sont dispersées dans un intervalle d'amplitude 22,08 qui contient la médiane

Exercice 5

On considère la série statistique suivante :

Surface (en m²)	[0; 10[	[10; 15[	[15; 17[	[17 ; 20[
Individu (x_i)	20	10	15	5

1. Détermine la classe modale et calcule la moyenne $\bar{x}$ de cette série.
2. Calcule les caractéristiques de dispersion de cette série.

Solution

1. Déterminons la densité de chaque intervalle.

Surface (en m²)	[0; 10[	[10; 15[	[15; 17[	[17 ; 20[
Individu (x_i)	20	10	15	5
Amplitude	10	5	2	3
Densité	2	2	7,5	1,67

La classe modale est : [15; 17[

2. Les caractéristiques de dispersions.

Surface (en m²)	[0; 10[	[10; 15[	[15; 17[	[17 ; 20[	Total
Individu (x_i)	20	10	15	5	50
Centre	5	12,5	16	18,5	
$\boldsymbol{n_i\, c_i}$	100	125	240	92,5	557,5
$\boldsymbol{n_i\, {c_i}^2}$	500	1562,5	3840	1711,25	7613,75
$\boldsymbol{\lvert c_i - \bar{x}\rvert}$	6,15	1,35	4,85	7,35	
$\boldsymbol{n_i\lvert c_i - \bar{x}\rvert}$	123	13,5	72,75	36,75	246

la moyenne : $\boldsymbol{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{4} n_i c_i}{N} = \frac{557,5}{50} = 11,15$

La variance : V=$\frac{1}{N}$ $(\sum_{i=1}^{4} n_i\, {c_i}^2) - (\bar{x})^2 = \frac{7613,75}{50}$ - $(11,15)^2$ = 27,95

L'écart type : $\sigma = \sqrt{27,95} = 5,29$

L'écart absolu moyen.

$e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4} n_i\, |c_i - \bar{x}| = \frac{246}{50} = 4,92$

L'écart 'interquartile

Surface (en m²)	$[0; 10[$	$[10; 15[$	$[15; 17[$	$[17\,; 20[$
Individu (x_i)	20	10	15	5
Effectifs cumulées croissantes	20	30	45	50

- On a $50 \times \frac{25}{100} = 12{,}5$

12,5 est plus petite que la 20^evaleur. Donc $Q_1 \in [0\,;\ 10[$.

$\frac{Q_1}{10} = \frac{12{,}5}{20}$ donc $Q_1 = 6{,}25$

- On a $50 \times \frac{75}{100} = 37{,}5$

37,5 est compris entre la 30^e et la 45^evaleur. Donc $Q_3 \in [15\,;\ 17[$.

$\frac{Q_1 - 15}{17 - 15} = \frac{37{,}5 - 30}{45 - 30}$ donc $Q_3 = 16$

L'interquartile est donc :

$Q_3 - Q_1 = 9{,}75$