EXERCICE N°1

1·/ Ecrire sous forme de fractions irréductibles les nombres suivants

$a = 2,\underline{32}$; $b = -5,2\underline{6}$

$c = 6,\underline{315}$; $d = 3,24\underline{5}$

$e = 3,7\underline{42}$; $f = -7,0\underline{134}$

2·/ Ecrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombres premiers.

$$A = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{3} \div \frac{27}{32}}{\frac{16 \times 15}{10^2} \div \frac{20}{49}} ; \quad B = \frac{(0,6)^2 \times 54}{9^2 \times 7 \times 0,4}$$

$$C = \frac{(0,6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{18^2 \times 5^8 \times (0,8)^3 \times (0,4)^4}$$

$$D = \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4} ; \quad E = \frac{10^2 \times 3^3}{8 \times 5^2} \div \sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}$$

EXERCICE N°2

1·/ Ecrire plus simplement les expressions suivantes

$$A = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$B = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$$C = \frac{\left(\sqrt[4]{a^8 b^{12} c^4}\right)^3}{\sqrt[3]{a^6 b^3 c^9}} \times \frac{d^4}{(a^{-3} c^{-5})^2} \times \frac{b^{-4} \cdot c^{-2}}{(a^2 d^3)^2}$$

$$D = \frac{\left(\sqrt[3]{a^6 b^9 c^3}\right)^2}{(a^2 b^5 c)^3}$$

2·/ Simplifier les expressions suivantes :

$$E = (\sqrt{11} + \sqrt{10})^{10} \times (\sqrt{10} - \sqrt{11})^{11}$$

$$F = (\sqrt{7} - \sqrt{5})^5 \times (\sqrt{7} + \sqrt{5})^4$$

$$G = \left(\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}}\right)^2$$

EXERCICE N°3

1·/ Dans chacun des cas suivants comparer les réels x et y.

a·/ $x = \sqrt{6} - \sqrt{7}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{10}$

b·/ $x = \sqrt{13} + \sqrt{8}$, $y = \sqrt{14} + \sqrt{7}$

c·/ $x = 7 - 3\sqrt{5}$, $y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

2·/ x et y étant deux réels strictement positifs comparer

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \text{ et } \frac{x^2 + y^2}{2}$$

3·/ a et b étant deux réels strictement positifs démontrer les inégalités suivantes :

i·/ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$; ii·/ $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

iii·/ si $a < b$ alors $a < \sqrt{ab} < b$

iv·/ $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

EXERCICE N°4

1·/ Comparer $c = \sqrt{2} - \sqrt{5}$ et $d = \sqrt{3} - 2$

En déduire la comparaison de $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{d}$

Donner alors l'ordre dans lequel

sont rangés les réels : $\frac{-7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ et $\frac{-7}{2-\sqrt{3}}$

2/ Soit a et b deux réels non nuls. Comparer $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ et 2. (On distinguera deux cas.

3/ Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Montrer que :

$$\frac{p}{q}<\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{p+3q}{p+q}>\sqrt{3}$$

EXERCICE N°5

1/ Soient x et y deux nombres réels

a/ Développer $(y-x)(x^2+xy+y^2)$

b/ Démontrer que :

$$y^2+xy+x^2=\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2$$

c/ Déduire des questions précédentes que si $x\leq y$ alors $x^3\leq y^3$.

2/ a, b et c étant des réels strictement positifs :

a/ Montrer que $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$

b/ En déduire la comparaison de $\sqrt{c}(a+b)$ et $2\sqrt{abc}$

c/ Montrer que :

$$3\sqrt{abc}+\sqrt{a}(b+c)+\sqrt{b}(a+c)+\sqrt{c}(a+b)=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$$

d/ En utilisant la question b/, déduire que :

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})\geq 9\sqrt{abc}$$

EXERCICE N°6

Soit a un nombre réel.

1/ On suppose $0<a<1$

a/ Comparer a et a^2 ; a et $\sqrt{a}$; a et $\frac{1}{a}$

b/ Ranger dans l'ordre croissant : 1, a, $\sqrt{a}$, a^2 et $\frac{1}{a}$.

2/ On suppose $a>1$.

Ranger dans l'ordre croissant 1, a, $\sqrt{a}$, a^2 et $\frac{1}{a}$.

EXERCICE 7

1/ Soient trois réels a, b et c de l'intervalle $]0;1]$.

a/ Démontrer que :

$$(ab-1)(ac-1)(bc-1)\leq 0$$

b/ En déduire que :

$$a+b+c+\frac{1}{abc}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc$$

2/ Soient les réels x, y, z et t tels que : $0<x\leq y\leq z\leq t$.

Démontrer que :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\geq\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{t}{z}+\frac{x}{t}$$

a/ En utilisant les résultats de 1/

b/ En démontrant que :

$$(z-x)(t-y)(yt-xz)\geq 0.$$

EXERCICE N°8

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs tels que $x<y$.

On pose $a=\frac{x+y}{2}$, $g=\sqrt{xy}$ et

$$h=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

1/ Démontrer que $x<h$ et $a<y$.

2/ Démontrer que $g<a$

3/ Démontrer que $g^2=ah$. En déduire que $h<g$.

4/ Ranger dans l'ordre croissant les nombres x, y, a, g et h.

EXERCICE N°9

1/ x, y et z sont trois nombres réels.

a/ Démontrer que $2xy \leq x^2+y^2$ (1)

b/ En utilisant (1) et deux autres inégalités du même type, démontrer que : $xy+xz+yz \leq x^2+y^2+z^2$

2/ a/ Démontrer que pour tous nombres réels a et b,

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

b/ On suppose de plus que a et b sont positifs ; démontrer qu'on a alors : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$

EXERCICE N°10

1/ Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle $[0;1]$

a/ Quel est le signe de $(1-a)(1-b)$?

b/ Comparer $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ et $1+\frac{1}{ab}$

2/ a, b, c et d désignent quatre nombres réels. Démontrer que :

$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

3/ a, b, c et d sont des nombres réels strictement positifs tels que :

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}.$$

Comparer

a/ $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+d}$

b/ $\frac{c}{d}$ et $\frac{a+c}{b+d}$.

EXERCICE N°11

1/ Dans chacun des cas suivants, déterminer des encadrements de :

$x+y$; $x-y$; x^2 ; $\frac{1}{x}$; $\frac{x}{y}$.

a/ $2,1<x<2,2$ et $3,3<y<3,4$

b/ $-1,5<x<-1,4$ et $5<y<5,1$

c/ $-4,1<x<-4$ et $-0,9<y<-0,8$

2/ Déterminer l'encadrement de $K=\frac{x+y}{xy}$ lorsque $2<x<3$ et $-9<y<-8$

3/ Soient a et b deux nombres réels vérifiant $b<a<b+1$ et $-5<b<-3$.

Encadrer $a+b$ et $a-2b$.

EXERCICE N°12

On donne x et y des réels tels que $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$

1-/ Démontrer que $-1 \leq xy \leq 1$

2-/ Développer $(1-x)(1-y)$ et $(1+x)(1+y)$.

3-/ Démontrer que $|x+y| \leq 1+xy$.

EXERCICE N°13.

1-/ Démontrer que pour $a > b \geq 0$:

a-/ $\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}$

b-/ $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2 = 2(a+b)$.

2-/ Soit $x = \sqrt{98}+\sqrt{32}-\sqrt{8}$ et

$y = \sqrt{162}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

Classer par ordre croissant

$\dfrac{x+y}{2}$; $\sqrt{xy}$; $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

EXERCICE N°14

1-/ Démontrer que pour tout nombre naturel non nul n : $1-\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n+1}{n}$.

2-/ En déduire une expression plus simple du produit :

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{20^2}\right)$$

3-/ n étant un nombre entier naturel, écrire sans radical au dénominateur l'expression $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

4-/ En déduire une expression simple de la somme

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

EXERCICE N°15

1-/ Soit n un nombre entier naturel, $n \geq 2$. On pose :

$$S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}.$$

a-/ Calculer $S-\frac{1}{2}S$

b-/ En déduire la valeur de S en fonction de n, puis l'inégalité

$$S < 2$$

2-/ Soit a_1, a_2, a_3 et a_4 des nombres réels positifs. A, Q, R et S sont les nombres réels positifs définis par :

- $A = \dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$
- $R = (a_1-A)+(a_2-A)+(a_3-A)+(a_4-A)$
- $Q \geq 0$ et $Q^2 = \dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{4}$
- $S = (a_1-A)^2+(a_2-A)^2+(a_3-A)^2+(a_4-A)^2$

a-/ Démontrer que la valeur de R est indépendante de celles des nombres réels a_1, a_2, a_3 et a_4

b-/ Exprimer S en fonction de A et Q. En déduire une inégalité entre A et Q.

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER, ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

EXERCICE N°16

1/ Démontrer que pour tous nombres réels a et b : $|a+b| \leq |a|+|b|$

2/ Dans quelle condition portant sur a et b a-t-on $|a+b|=|a|+|b|$?

3/ Utiliser l'égalité $a = a+b-b$ et la question 1/ pour montrer que

$$|a|-|b| \leq |a+b|$$

4/ Utiliser le résultat de la question 2/ pour résoudre les équat- suivantes :

a/ $|x^2-3x+1| = x^2+|-3x+1|$

b/ $|x^2+2x-4| = |x^2-4|+2|x|$.

EXERCICE N°17

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a/ $|x-2|=3$ b/ $|3-x|=-5$

c/ $|x+1|=0$ d/ $|2x-6|=4$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a/ $|x-1|<2$ b/ $|1-3x| \geq 6$

c/ $|4x-2| \leq 4$ d/ $|x+5|>0$

e/ $|x-3| \leq 0$ f/ $|x-6|<0$

g/ $|x+1| \geq 0$ h/ $1 \leq |x-1| \leq 3$

3/ Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m l'équation et l'inéquation suivantes :

a/ $|-3x+2|=m$ b/ $|x-4|>1-2m$

4/ a/ Représenter graphiquement

$$I=\left\{x\in\mathbb{R}, \left|\frac{1}{2}x-1\right| \leq 3\right\}$$

b/ Soit $x \in I$, encadrer $d(-5;x)$ et en déduire que si $x\in I$ alors

$$1 \leq |x+5| \leq 13.$$

EXERCICE N°18

1/ Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a/ $3 \leq |-2x+6| \leq 6$

b/ $|x-2| > |x+4|$

c/ $|x+5|+|x-3| = 8$

d/ $|2x+6| + |4-2x| = 3$

e/ $|x-1|+|x+4| = 10$

f/ $|x+a|+|x-a| = 2a$, $a\in\mathbb{R}$

g/ $|x+a|+|x-a| = 2a+1$, $a\in\mathbb{R}$.

2/ Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes. (On donnera un contre exemple pour les affirmations fausses).

Pour tous nombres réels x et y :

a/ si $|x|=|y|$ alors $x=y$.

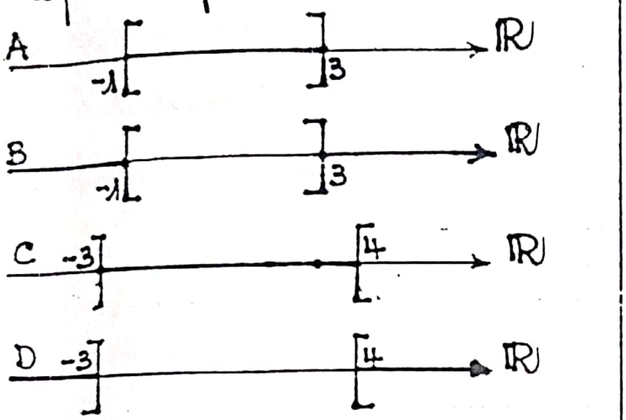
b/ si $x^2=y^2$ alors $|x|=|y|$

c/ si $|x| \geq |y|$ alors $x \geq y$.

d/ si $x^2 \leq y^2$ alors $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

EXERCICE N°19

Caractériser par une inégalité du type $|x-a| \leq r$, $|x-a| \geq r$, $|x-a| < r$ ou $|x-a| > r$ les nombres réels x appartenant aux ensembles A, B, C, et D représentés géométriquement par :



EXERCICE N°20

1·/ Résoudre dans IR les équations suivantes :

a·/ $E(x) = 2$ b·/ $2E(x) - 1 = 0$

c·/ $|E(x)| = 3$ d·/ $E(|x|) = 1$

e·/ $E(x) = x$ f·/ $|E(x)| = x$

g·/ $E\left(\sqrt{|x|} - \frac{1}{3}\right) = 1$ h·/ $|E(x) - 5| = 6$

2·/ Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a·/ $E(x) \leq x$ b·/ $E(x) \geq x$

c·/ $E(x) < x$ d·/ $E(x) > x$

e·/ $0 < E(x) < 2$ f·/ $|E(x)| < 2$

g·/ $|E(x)| \geq 1$ h·/ $|E(x) - 1| < 1$

3·/ Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-2)(x+1)$.

a·/ Developper réduire et ordonner $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

b·/ Résoudre dans IR l'équation

$$x^2 - x - 2 = 0$$

c·/ En déduire l'ensemble solution de l'équation

$$(E(x))^2 - E(x) - 2 = 0$$

EXERCICE N°21

1·/ Soit la fonction g définie sur $[-2; 2]$ par : $g(x) = E(x) - 2|x|$

a·/ Montrer que g est une fonction affine par intervalles.

b·/ Représenter g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2·/ Soit f la fonction définie sur $[-4; 4]$ par : $f(x) = |x| - E\left(\frac{x}{2}\right)$.

a·/ Montrer que f est une fonction affine par intervalle.

b·/ Représenter f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

EXERCICE N°22

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On donne :

$$f : [-3;3] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{E(x)}$$

$E(x)$ désigne la partie entière de x.

1./ Quel est l'ensemble de définition de f?

2./ Construire soigneusement la représentation graphique de f.

3./ Déterminer l'ensemble des antécédents de 1 par f.

EXERCICE N°23

1./ Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes sous forme d'intervalle ou la réunion d'intervalles

a./ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{E(x)-x}$ b./ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|E(x)|-x}$

c./ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{3}{|x+1|-|3x-2|}$

d./ $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2E(x)-1}$

e./ $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto |x+1|-4$

f./ $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sqrt{6-2x}}{2x\sqrt{5+x}}$

g./ $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \frac{1-x}{x+3}$

h./ $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$, $x \mapsto \frac{x-4}{2-x}$

2./ Soit f et g deux fonctions numériques à variable réelle définies par :
$f(x) = \frac{2-x}{x+1}$ et $g(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions :

f, g, $f+g$, $\frac{f}{g}$, $\sqrt{f}$, $g\circ f$, $f\circ g$, $f\circ f$ et $g\circ g$.

EXERCICE N°24

1./ Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

a./ $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1-|x|}{2-x}}$

b./ $g(x) = \dfrac{1+\dfrac{1+x}{1+\frac{1}{x}}}{1-\dfrac{1-x}{1-\frac{1}{x}}}$

c./ $h(x) = \frac{x^2}{|x|-3}$ d./ $p(x) = \frac{x^2+4}{x^2-3}$

e./ $q(x) = |x| + \sqrt{x-2}$

f./ $V(x) = \frac{2+\sqrt{|x|+2}}{\sqrt{|x|-3}}$

2./ Déterminer le domaine de définition de :

$$k :]-4;4[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{3x+1}{|x|-2}$$

EXERCICE N°25

1./ Soit l'application $f : [0;6] \to \mathbb{R}$ telle que : si $0 \leq x \leq 2$, $f(x) = 2x - 1$

si $2 < x \leq 3$, $f(x) = -x + 3$

si $3 < x \leq 6$, $f(x) = 2\left(\frac{x}{3} - 1\right)$

a./ Trouver par calcul l'image réciproque de $]0;1]$ et de $[3;5]$

b./ Trouver graphiquement l'image directe de $[2;6]$.

2./ Dans la suite de l'exercice on pose $f(x) = E(x-5)$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On rappelle que $E(x-5)$ est la partie entière de $x-5$.

a./ Calculer $f(1)$, $f(5)$, $f(2{,}1)$ $f(3)$.

b./ Représenter graphiquement la restriction de f à $[1;7]$

c./ Quel est l'ensemble S des réels vérifiant : $3 \leq f(x) \leq 15$.

EXERCICE N°26

1./ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|-1 + E(x)| \leq 4$. On note S l'ensemble solution.

2./ a./ Déterminer deux majorants et deux minorants de l'ensemble S.

b./ S admet-il un maximum ? un minimum ? Si oui préciser les.

c./ Soit $S' = S \cap \mathbb{Z}$

S' admet-il un maximum ? un minimum. Si oui préciser les.

EXERCICE N°27

On considère la fonction

$$f : [-3;3] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}\left(xE(x) + E(x) - 2\right)$$

1./ Déterminer $f(x)$ pour x appartenant à chacun des ensembles $[-3;-2[$, $[-2;-1[$; $[-1;0[$; $[0;1[$ $[1;2[$; $[2;3[$ et 3.

2./ Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3./ Déterminer l'image directe de chacun des intervalles $[-3;0[$ et $[-1;3]$ par f.

4/ Déterminer l'image réciproque des intervalles suivants :

$[-1;2]$ et $[3;5]$ par f.

EXERCICE N°28

1./ Soit A l'ensemble des inverses des nombres entiers naturels non nuls

a./ Démontrer que 1 est le maximum de A.

b./ Démontrer que l'ensemble A est minoré, mais n'admet pas de minimum.

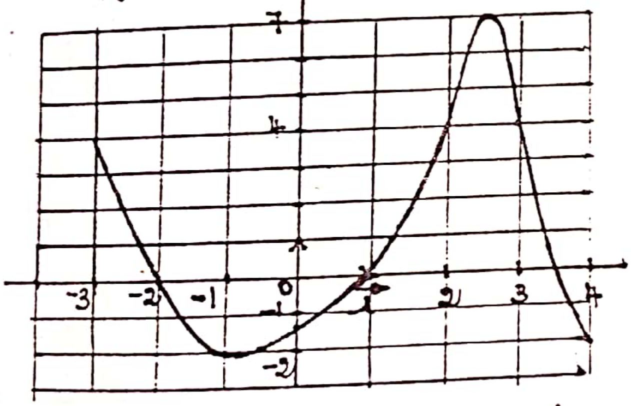
2/ On considère l'ensemble B des nombres réels pouvant s'écrire sous la forme $\frac{n}{n+1}$, où n est un nombre entier naturel quelconque.

a/ Démontrer que B admet 0 pour minimum.

b/ Démontrer que B est majorée par 1 mais qu'il n'admet pas de maximum.

EXERCICE N°29

(Cf) est la courbe représentative d'une fonction f, définie sur [-3; 4]



1/ Déterminer graphiquement l'image par f de chacun des nombres réels suivants : -3; -2; 3; 4.

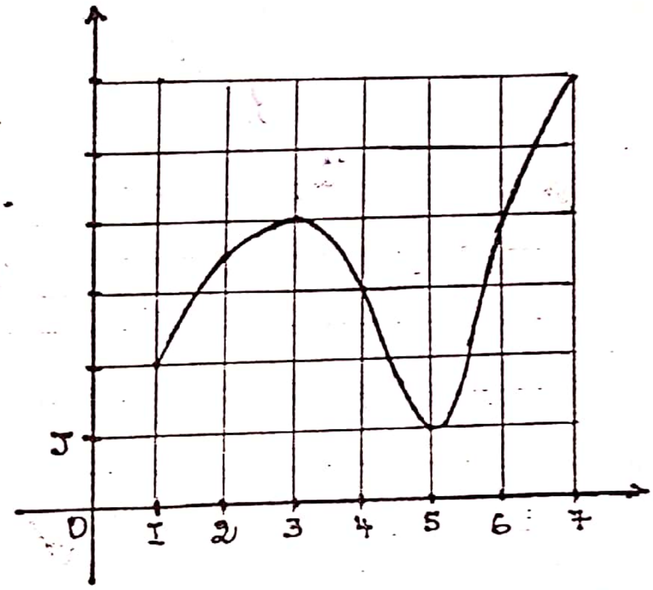
2/ Déterminer graphiquement les antécédents par f de chacun des nombres réels suivants : -2; 0; 4.

3/ Déterminer graphiquement l'image directe de l'intervalle]-2; 2] puis celle de l'intervalle]-1; 3] par f.

4/ Déterminer graphiquement l'image réciproque par f des intervalles : [-2; 4[et [0; 7[.

EXERCICE N°30

(Cf) est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [1; 7].



1/ Déterminer graphiquement l'image directe de chacun des intervalles suivants : [1; 5], [3,5; 6], [3; 5], [1; 7]

2/ Déterminer graphiquement l'ensemble des antécédents des nombres suivants : 1; 2; 4; 6 par f.

3/ Déterminer graphiquement l'image réciproque de chacun des intervalles suivants : [1; 4], [4; 6], [2; 4]

4/ En utilisant la courbe (Cf) résoudre l'équation : $E\left(\frac{1}{2}f(x)\right) = 2$.

EXERCICE N°31

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = |x+2| + |3-2x| - |x|$

1./ Ecrire $g(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

2./ Représenter g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3./ Déterminer graphiquement puis algébriquement l'image directe de chacun des intervalles $]-4;0]$; $]1;2[$

4./ Déterminer graphiquement puis algébriquement l'image réciproque de : $\{1\}$; $[0;2]$; $]2;5]$; $\{5\}$.

EXERCICE N°32

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Soit l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto OM$$

1./ Calculer les images des points O, $A(-1;1)$; $B(3;-4)$; $C(-2;1)$ et $E(2;1)$

2./ Déterminer l'image directe du plan $\mathcal{P}$.

3./ Déterminer si cela est possible les antécédents des nombres : -2 ; 0 ; 2

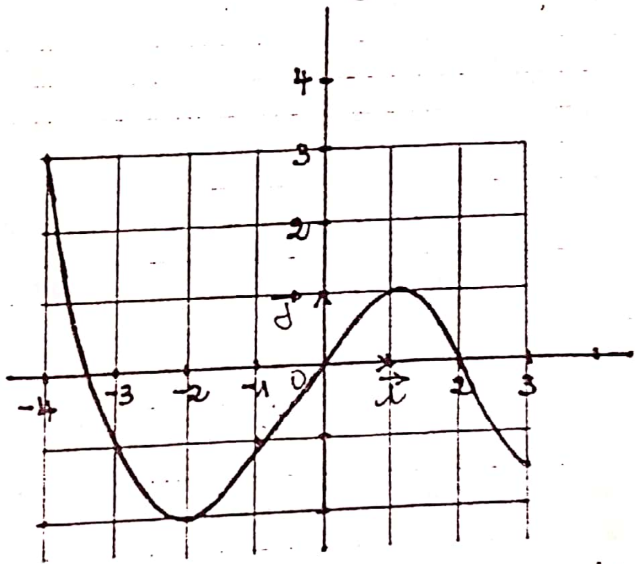
4./ Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = 1$

a./ Pour le point M de $(\mathcal{D})$ d'abscisse x, calculer $f(M)$.

b./ Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ dont l'image est 2.

EXERCICE N°33

Soit h la fonction numérique définie sur $[-4;3]$ dont voici ci-dessous sa courbe représentative (C_h) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$



1./ A partir de la courbe (C_h), étudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation

2./ Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a./ $h(x) = 0$ b./ $|h(x)| \leq 1$

c./ $E(h(x)) = -2$ d./ $h(E(x)) = 0$

3./ Soit m un réel. Discuter suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $h(x) = m$

EXERCICE N°34

Soit ABCD un carré tel que $AB = 6$

On construit les points M, N, P et Q respectivement sur [AB], [BC], [CD], [AD] tels que :

$AM = BN = CP = DQ = x$.

1/ Calculer MN^2 en fonction de x sachant que $MB = AB - AM$.

2/ Démontrer que MNPQ est un carré.

3/ Soit f la fonction qui, à chaque valeur de x, associe l'aire du carré MNPQ.

a/ Sur quel intervalle, noté I, f est-elle définie ?

b/ Démontrer que, pour tout élément x de I, on a :

$$f(x) = 2(x-3)^2 + 18$$

c/ Déterminer le sens de variation de f sur chacun des intervalles $[0;3]$ et $[3;6]$.

d/ Déterminer le minimum de f.

4/ a/ Déterminer par calcul $f([0;6])$ après avoir déterminé $f([0;3])$ et $f([3;6])$.

b/ Déterminer par calcul l'ensemble des antécédents de 20 par f.

c/ Pour quelles valeurs de x a-t-on $20 \leq f(x) \leq 26$?

EXERCICE N°35

Dans le plan muni du repère (O, I, J) on donne les points $A(-3;1)$, $B(-1;3)$, $C(1;3)$, $D(2;5)$, $E(5;-1)$, $F(7;2)$.

On désigne par f la fonction affine par intervalles dont la représentation graphique est : $[AB[\cup [BC[\cup [CD[\cup [DE[\cup [EF]$.

1/ Déterminer f par une formule explicite sur chaque intervalle.

2/ Calculer $f(-1,5)$, $f(-0,5)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5,5)$.

3/ Déterminer l'ensemble des antécédents de chacun des nombres réels suivants :

-1 ; $-0,5$; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; $3,5$; 4 et 5.

4/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5/ Déterminer graphiquement l'image directe de chacun des intervalles suivants :

$[-3;-1,5]$; $[-0,5;0,5]$; $[3;4]$; $[4;6]$; $[-3;4]$

Controler chaque résultat par calcul.

6/ Déterminer graphiquement l'image réciproque de chacun des intervalles suivants :

$[-1;0]$; $[-0,5;0,5]$; $[1;2]$, $[2;3]$ et $[1;5]$

EXERCICE N°36

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle D, en utilisant le signe du rapport $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, où a et b sont deux nombres réels distincts de D.

1/ $f(x) = -3x^2+2x+8$; $D = [-1/3;+\infty[$

2/ $f(x) = \sqrt{x^2+4x+7}$; $D =]-\infty;-2]$

3/ $f(x) = x+\frac{5}{x}$; $D =]0;\sqrt{5}]$.

EXERCICE N°37

1/ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

a/ Déterminer l'ensemble de définition de f.

b/ Vérifier que, si $u \in D_f$ et $v \in D_f$, $f(u)-f(v) = \frac{-2(u-v)}{(u-1)(v-1)}$

c/ En déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$

2/ Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x-5}{3x+2}$. S'inspirer de la méthode utilisée dans la question 1/ pour démontrer que g est strictement croissante sur $]-\infty;-\frac{2}{3}[$ et sur $]-2/3;+\infty[$.

EXERCICE N°38

1/ Dans chacun des cas suivants dire si les fonctions f et g sont égales ou non.

a/ $f(x) = x$; $g(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

b/ $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1}$; $g(x) = |x|+1$

c/ $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x-2}$; $g(x) = \frac{-x^2-2}{x^2-x-2}$

2/ Dans chacun des cas suivants montrer que les fonctions f et g coïncident sur un intervalle que l'on précisera

a/ $f(x) = 2-|x-1|$; $g(x) = x+1$

b/ $f(x) = \frac{2+3|x|}{|x|+1}$; $g(x) = \frac{2-3x}{1-x}$

c/ $f(x) = |x| - E(x)$; $g(x) = -x+2$

3/ Soit u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$u(x) = \frac{2x+1}{x} - \frac{ax}{x+1}$, $v(x) = \frac{-x^2+3x+1}{x(x+1)}$

Déterminer a pour que les fonctions u et v soient égales.

EXERCICE N°39

1·/ Trouver la forme canonique de chacune des fonctions polynômes suivantes et factoriser si possible

a·/ $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$

b·/ $g(x) = 3x^2 - 7x + 6$

c·/ $h(x) = -x^2 + 3x - 2$

d·/ $p(x) = -6x^2 + 19x - 15$

2·/ Etudier suivant les valeurs de x le signe des polynomes ci-dessous

EXERCICE N°40

1·/ Factoriser

a·/ $P(x) = x^3 - 8$ b·/ $Q(x) = x^6 - 729$

c·/ $R(x) = 625x^4 - 16$

d·/ $S(x) = x^6 + 6x^3 + 9$

e·/ $T(x) = x^4 + 9$; f·/ $U(x) = x^4 + 1$

2·/ Developper, reduire puis ordonner suivant les puissances décroissantes de x les polynomes suivants:

a·/ $P(x) = (x^2+5)^2 + (2x-3)^3$

b·/ $Q(x) = (x^2+1)^3 + (x^4-1)^3$

c·/ $R(x) = (x-1)^2(x+1)^3$

d·/ $S(x) = (x^2+2x+3)^3$

EXERCICE N°41

Soit le polynôme P défini par

$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$

1·/ a·/ Calculer $P(1)$.

b·/ En déduire qu'il existe un polynôme Q du second dégré tel que $P(x) = (x-1)Q(x)$.

c·/ Factoriser $Q(x)$ aprés avoir trouvé sa forme canonique.

2·/ a·/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

b·/ Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

3·/ Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

a·/ $f(x) = \dfrac{1}{P(x)}$ b·/ $g(x) = \sqrt{P(x)}$

EXERCICE N°42

1·/ Déterminer le polynôme P de dégré 2 qui s'annule en -2 et 1 et qui prend la valeur 6 en 0

2·/ Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

3·/ Déterminer l'ensemble S des valeurs de x verifiant $|P(x)| = -P(x)$

4·/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(|x|) \geq 0$

5·/ Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{R}^+$ par P. On utilisera à cet effet le tableau de signe de $P(x)$.

EXERCICE N°43

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = (x^2-1)^2 + (2x)^2$

1·/ Développer, réduire et ordonner P

2·/ Factoriser P.

3·/ Trouver deux nombres entiers p et q tels que : $p^2+q^2 = 101^2$

EXERCICE N°44

1·/ Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 3, qui s'annule en 0 et vérifie, pour tout nombre réel x : $P(x+1) - P(x) = x^2$

2·/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a·/ Démontrer que

$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = P(n+1) - P(1)$.

b·/ En déduire que :

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c·/ Vérifier ce résultat sur quelques exemples.

EXERCICE N°45

1·/ Démontrer que, pour tout nombre réel x : $x^3 = \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$

2·/ Soit f le polynôme défini par

$$f(x) = \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$$

Démontrer que $f(x+1) - f(x) = x^3$

3·/ En utilisant une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, démontrer que :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

EXERCICE N°46

Soit b, c, d et e des nombres réels a un nombre réel non nul et f le polynôme défini pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

1·/ On considère la propriété (P) :

Pour tout nombre réel x non nul,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$$

a·/ Démontrer que si f vérifie (P) et α est une racine non nulle de f alors $\frac{1}{\alpha}$ est également une racine de f.

b·/ Démontrer que f vérifie la propriété (P) si et seulement si :

$$\begin{cases} a = e \\ b = d \end{cases}$$

En déduire en particulier que 0 n'est pas racine de f.

c·/ Application

Soit le polynôme f défini par :

$$f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2$$

Mettre f sous la forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1.

2-/ On suppose désormais que f vérifie la propriété (p).

a-/ Démontrer que pour tout nombre réel x non nul :

$$\frac{f(x)}{x^2} = a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c.$$

b-/ Soit α un nombre réel non nul. Démontrer que α est une racine de f ssi $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ est une racine du polynôme g défini pour tout nombre réel x par :

$$g(x) = ax^2+bx+c-2a.$$

c-/ application

Soit f et g les polynômes définis pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = 6x^4-35x^3+62x^2-35x+6$$

$$g(x) = 6x^2-35x+50.$$

Déterminer les racines de g puis celles de f.

EXERCICE N°47

Soit a, b deux nombres réels distincts. On définit le polynôme P par :

$$P(x) = a^2(b-x)+b^2(x-a)+x^2(a-b)$$

1-/ Démontrer qu'il existe un polynôme P_1 tel que, pour tout nombre réel x : $P(x) = (x-a)(x-b)P_1(x)$.

2-/ Quel est le degré de P_1 ? Déterminer P_1. En déduire une factorisation de P(x)

EXERCICE N°48

1-/ Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel x, on ait : $a(x^2+9)+b(x^2-9) = 6^3$

2-/ Déterminer les nombres réels c et d tels que, pour tout nombre réel x, on ait : $c(x+3)+d(x-3) = 12$

3-/ On considère la fraction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{6^3}{x^4-81}$

a-/ Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b-/ Déduire de la première quest- qu'il existe deux nombres réels α' et β' tels que, pour tout élément x de D_f on ait : $f(x) = \frac{\alpha'}{x^2+9}+\frac{\beta'}{x^2-9}$

c-/ Démontrer qu'il existe trois nombres réels α, β et γ tels que, pour tout élément x de D_f, on ait :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x+3}+\frac{\beta}{x-3}+\frac{\gamma}{x^2+9}.$$

EXERCICE N°49

1-/ On considère la fraction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{3x^2-x+4}{-x+2}$

Trouver un polynôme P de degré 1

et un nombre réel c tel que, pour tout nombre réel x différent de 2 :

$$f(x) = P(x) + \frac{c}{-x+2}$$

2-/ On considère la fraction rationnelle g définie par : $g(x) = \frac{x^3-5x^2+10}{x-4}$, Trouver un polynôme Q de degré 2 et un nombre réel c tels que, pour tout nombre réel x différent de 4 : $g(x) = Q(x) + \frac{c}{x-4}$

EXERCICE N°50

1-/ Soit la fonction g définie de IR vers IR par : $g(x) = x^2-2x+5$

a-/ Quel est l'ensemble de définition de g?

b-/ Trouver la forme canonique de g(x)

c-/ Montrer que g admet un minimum Quel est ce minimum? Trouver le nombre réel pour lequel ce minimum est atteint.

d-/ Etudier le sens de variation de g sur $]-\infty;1]$ et sur $[1;+\infty[$

2-/ On donne la fonction

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{|x^2+x-2|}{x+2}$$

a-/ Quel est le domaine de définit° de h ?

b-/ Etudier le signe de $N(x) = x^2+x-2$ suivant les valeurs de x puis écrire $|x^2+x-2|$ sans les barres de valeur absolue.

c-/ Trouver une écriture simplifiée de h(x) puis dresser son tableau de variation.

3-/ Soit $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{2x^2-3x+4}{x-1}$$

a-/ Quel est le domaine de définition de k ?

b-/ Montrer qu'il existe trois nombre réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in D_k,\ k(x) = ax+b+\frac{c}{x-1}$$

EXERCICE N°51

On donne la fonction :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^2+bx+c$$

1-/ Soit (C) la représentation graphique de g dans le plan muni d'un repère orthonormé. $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les réels a, b et c pour que (C) passe par les points :

$A(-4;-5)$, $B(-2;3)$ et $E(-1;4)$.

2-/ Soient les fonctions f et h de IR vers IR définies par :

$f(x) = -x^2-2x+3$ et $h(x) = 4(x+3)$.

a-/ Mettre f(x) sous forme canonique

b-/ Montrer que f admet un maximum sur son ensemble de définition.

c-/ Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty;-1]$ et sur $[-1;+\infty[$

d-/ Construire avec soins la courbe (C).

e-/ Déterminer graphiquement et algebriquement l'image réciproque par f de : $\{-5\}$; $\{3\}$ et $]-\infty;0]$

f-/ Construire sur le même graphique que (C) la courbe (H) de h.

g-/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=h(x)$ puis comparer pour tout nombre réel x, $f(x)$ et $h(x)$.

EXERCICE N°52

Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J). On considère la fonction numérique f définie par :

$f(x)=(x+2)^2-1$.

1-/ Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty;-2]$ et $[-2;+\infty[$ puis tracer sa représentation graphique (C).

2-/ Tracer le symétrique (C_1) de (C) par rapport O et trouver une équation de (C_1).

3-/ Tracer le symétrique (C_2) de (C) par rapport à (OI) et trouver une équation de (C_2)

4-/ Tracer le symétrique (C_3) de (C) par rapport à (OJ) et trouver une équation de (C_3).

EXERCICE N°53

Le plan est muni du repère (O,I,J). On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$f(x)=x|x|$ et $g(x)=x^3$

1-/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative

2-/ Tracer sur le même graphique la courbe représentative de g.

3-/ a-/ Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$

b-/ Comparer pour tout nombre réel x, $f(x)$ et $g(x)$.

EXERCICE N°54

Soit la fonction f_m définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f_m(x)=mx^2-2(m+1)x-3m+2$ où m est un paramètre réel. Soit (C_m) la courbe représentative de f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$.

1-/ Donner suivant les valeurs de m la nature de la courbe (C_m)

2/ Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées.

3/ Déterminer m pour que la courbe (C_m) passe par le point $E(4;-1)$

4/ Dans la suite de l'exercice on pose $m=1$. On désigne f_1 par g et (C_1) par (C).

a/ Donner l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

b/ Etudier le sens de variation de g sur $]-\infty;2]$ et sur $[2;+\infty[$

c/ Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère.

d/ Construire avec soins la courbe (C).

5/ Soit (D) la droite d'equation $y=-2x+2$.

a/ Construire (D) dans le même repère que (C).

b/ Déterminer graphiquement puis par calcul l'ensemble solution de l'inéquation : $g(x) \geq -2x+2$

c/ Construire sur le graphique précédent, la courbe (C') représentative de la fonction h définie pour tout nombre réel x par :

$$h(x) = \min\left(g(x); -2x+2\right)$$

EXERCICE N°55

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2-4x-3$

1/ a/ Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

b/ Montrer que la fonction f admet un minimum en 2.

c/ Etudier les variations de f sur $]-\infty;2]$ et sur $[2;+\infty[$

d/ Construire la courbe (C) représentative de f.

2/ Soit les fonctions g et h définies par : $g(x)=f(-x)$ et $h(x)=f(|x|)$

a/ Construire la courbe (C_g) de g à partir de (C).

b/ Montrer h coïncide avec g sur $\mathbb{R}^-$ et que h coïncide avec f sur $\mathbb{R}^+$.

c/ En déduire la construct° de la courbe (C_h) représentative de h, dans le même repère que (C) et (C_g). On fera à cet effet une légende claire.

EXERCICE N°56

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équat° suivantes :

a/ $\left|\frac{x-1}{x}\right| = x^2+3x-4$

b/ $\frac{x^4-3x^2-1}{x-2} = x+2$

c/ $|x^2-|x^2-1|| = 1$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équat° suivantes :

a/ $|2x-5| = |7-x|$

b/ $|x^2-5x+13| = |6x-15|$

c/ $|4x^2-x-9| = |3x^2-5x-3|$

3/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équat° suivantes :

a/ $x^2-13x+36=0$

b/ $x^4-13x^2+36=0$

c/ $(2x+1)^4-13(2x+1)^2+36=0$

d/ $(2x^2+1)^4-13(2x^2+1)^2+36=0$

EXERCICE N°57

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{|1-|x||}{2-|x|} = 1+|x|$$

2/ On considère l'équation suivante :

$$(E) : \frac{1+\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}}{1-\frac{1-x}{1-\frac{1}{x}}} = 1$$

Résoudre (E) en précisant, à chaque étape de la résolution, les contraintes sur l'inconnue.

3/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{x^2+|x|+2}{x^2-|x|+2} = 2$$

EXERCICE N°58

1/ On considère l'équation

(E) : $3\sqrt{9-x^2} = x$.

a/ Préciser les contraintes sur l'inconnue

b/ Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$

2/ De la même façon, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

(E') : $x^2-\sqrt{4-x^2}+2=0$

EXERCICE N°59

Un marchand possède une certaine somme d'argent. La première année, il dépense 100 livres puis il augmente ce qui lui reste d'un tiers. La deuxième année, il dépense encore 100 livres, puis il augmente ce qui lui reste d'un tiers. La troisième année, il dépense à nouveau 100 livres, puis il augmente ce qui lui reste d'un tiers. Il se trouve alors deux fois plus riche que la première année

Quel était son capital initial ?

EXERCICE N°60

Une dame charitable rencontre un premier mendiant auquel elle donne la moitié de l'argent qu'elle a dans son portefeuille, plus 100F. Au deuxième mendiant, elle donne la moitié de ce qui lui reste plus 100F. Elle donne enfin la moitié de ce qui lui reste au troisième mendiant, plus 100F. Il lui reste alors une seule pièce de 100F. Quelle somme avait-elle au début de sa promenade ?

EXERCICE N° 61

Une personne dépense dans un premier magasin le quart de la somme dont elle dispose. Dans un second magasin, elle dépense la moitié du reste. Et après avoir ensuite acheté un objet à 500F, il lui reste 400F. De quelle somme disposait-elle au départ ?

EXERCICE N° 62

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a-/ $\frac{x-2}{x+1} < \frac{2x+5}{x}$; b-/ $\frac{2}{(x-1)^2} \leq \frac{1}{x^2+1}$

c-/ $x - \frac{2}{|x|} \leq \frac{2-|x|}{x}$

d-/ $\frac{x}{x^2-1} \leq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

e-/ $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} \leq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4}$

f-/ $\frac{3x-1}{x^2-1} \geq \frac{2}{x+1}$

g-/ $|x^2-5x-15| < |6x+13|$

h-/ $|2x^2-x+1| \geq |5x^2-3x-22|$

EXERCICE N°63

1-/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a-/ $\frac{|x+1|}{1-|x|} \leq 1$

b-/ $|x+2| \leq (x-1)|3x-2|$

c-/ $|x^2-5x+3| \leq 2x-3$

2-/ Un représentant commercial a le choix entre deux modes de rémunération :

mode 1 : il perçoit un fixe de 100000F par mois plus un commission de 5% sur le montant de ses ventes.

mode 2 : il perçoit un fixe de 120000F par mois plus une commission de 2% sur le montant de es ventes.

A partir de quel montant des ventes, le mode 1 est-il le plus avantageux ?

EXERCICE N°64

1./ L'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan est muni de la base $(\vec{i},\vec{j})$ et les vecteurs $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ définis par : $\vec{U_1}=(3+\sqrt{2})\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{U_2}=7\vec{i}+(3-\sqrt{2})\vec{j}$ les vecteurs $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ sont-ils colinéaires ?

2./ Pour quelles valeurs de x les vecteurs $\vec{W_1}=\vec{i}+x\vec{j}$ et $\vec{W_2}=x\vec{i}+\vec{j}$ forment-ils une base ?

3./ Soit $\vec{U}\binom{a}{b}$ et $\vec{V}\binom{c}{d}$ deux vecteurs quelconques et k un nombre réel.

a./ Comparer $\det(\vec{V},\vec{U})$ et $\det(\vec{U},\vec{V})$

b./ Calculer $\det(k\vec{U},\vec{V})$ en fonction de $\det(\vec{U},\vec{V})$

c./ Soit $\vec{W}\binom{e}{f}$. Démontrer que $\det(\vec{W},\vec{U}+\vec{V})=\det(\vec{W},\vec{U})+\det(\vec{W},\vec{V})$

EXERCICE N°65

1./ On considère les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ dont les couples de coordonnées dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ sont respectivement $(1;3)$; $(-2;1)$; $(0;2)$

a./ Ecrire chacun des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b./ Trouver les coordonnées des vecteurs : $\vec{U}-\vec{V}$, $\frac{3}{2}\vec{U}+2\vec{V}$, $5\vec{U}-\frac{1}{5}\vec{V}$.

2./ Dans la suite de l'exercice on pose $\vec{U}\binom{a}{3}$; $\vec{V}\binom{2}{1}$; $\vec{W}\binom{1}{b}$

a./ Trouver a pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires

b./ Trouver b pour que $\vec{W}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires.

3./ Soit $(\vec{AI},\vec{AJ})$ une base de $\mathcal{V}$.

a./ Construire les points B et C tels que : $\vec{AB}=3\vec{AI}+2\vec{AJ}$

$$\vec{AC}=2\vec{AI}-\vec{AJ}.$$

b./ Quelles sont les coordonnées de $\vec{BC}$, $\vec{PB}$ et $\vec{QA}$ dans la base $(\vec{AI},\vec{AJ})$, P et Q étant les milieux respectifs de [AB], [AC].

EXERCICE N°66

Le plan est muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On donne le point $A(-2;3)$, les vecteurs $\vec{U}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{V}=\vec{i}-\vec{j}$.

1./ Démontrer que $(\vec{U},\vec{V})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2./ Quelles sont les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{U},\vec{V})$?

3./ Un point M a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $(x';y')$ dans le repère $(A,\vec{U},\vec{V})$.

Exprimer x' et y' en fonction

de x et y. En déduire les coordonnées du point O dans le repère $(A, \vec{U}, \vec{V})$

EXERCICE N°67

Dans le plan P, construire un parallélogramme ABCD de centre I

1./ a./ Montrer que $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.

b./ Dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$ donner les coordonnées des vecteurs $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{CI}$, $\vec{BD}$

2./ On considère les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ dont les couples de coordonnées dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$ sont respectivement : $(2;-1)$ $(3;1)$ $(\alpha;2)$.

a./ Trouver le nombre réel α pour que les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ soient colinéaires.

b./ Montrer que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ne sont pas colinéaires

c./ Trouver dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$ les coordonnées des vecteurs :

$\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{CI}$, $\vec{BD}$

EXERCICE N°68

PARTIE A.

Soit f la fonction à variable réelle x définie par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$

1./ Trouver la forme canonique de $f(x)$ puis factoriser $f(x)$.

2./ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

PARTIE B.

On rapporte l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs à la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Soient $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ les vecteurs de $\mathcal{V}$ tels que :

$\vec{U_1} = (m-3)\vec{i} + 4m\vec{j}$; $\vec{U_2} = -\vec{i} + (m+1)\vec{j}$

1./ Pour quelles valeurs de m, $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ sont-ils colinéaires ?

2./ On suppose dans la suite que $m = -1$

a./ Montrer que $(\vec{U_1}, \vec{U_2})$ est une base de $\mathcal{V}$.

b./ Déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{U_1}, \vec{U_2})$

c./ Soit $\vec{V_1} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{V_2} = 2\vec{U_1} + \vec{U_2}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{V_1}$ dans la base $(\vec{U_1}, \vec{U_2})$ et les coordonnées de $\vec{V_2}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

EXERCICE N°69

On considère dans le plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ les trois vecteurs :

$\vec{U_1}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{U_2}\begin{pmatrix}2\alpha-\beta\\\alpha+2\beta-4\end{pmatrix}$; $\vec{U_3}\begin{pmatrix}\alpha-3\beta+2\\-3\alpha+3\beta-2\end{pmatrix}$

1/ Calculer les cordonnées $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{S}=\vec{U_1}+\vec{U_2}+\vec{U_3}$

En déduire la relation qui doit exister entre α et β pour que $\vec{S}$ soit colinéaire au vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

Quelles sont alors les coordonnées de $\vec{S}$

2-/ Pour quelles valeurs de α et β le vecteur $\vec{S}$ est-il le vecteur nul?

EXERCICE N°70

1-/ Soit ABC un triangle quelconque.

a-/ Construire les points M et N tels que: $\vec{AM}=-\frac{2}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AN}=-\frac{2}{3}\vec{AC}$

b-/ Démontrer que (MN) et (BC) sont parallèles.

c-/ Soient S et T les milieux respectifs de [BC] et [MN]

Démontrer que les points A, S et T sont alignés.

2-/ $(\vec{i},\vec{j})$ et $(\vec{u},\vec{v})$ sont deux bases de $\mathcal{V}$ telles que:

$\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{j}=\frac{7}{6}\vec{u}+\vec{v}$

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ et les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

EXERCICE N°71

Soit ABCD un parallélogramme non aplati. E et F deux points du plan éléments de la droite (BD).

1-/ Placer les points G et H tels que: $\vec{AG}=\vec{AB}+\vec{AE}$ et $\vec{AH}=\vec{AB}+\vec{AF}$.

2-/ Montrer que les points C, G et H sont alignés.

3-/ On pose $\vec{BE}=x\vec{BD}$ et $\vec{BF}=y\vec{BD}$

Comment choisir x et y pour que:

a-/ $G\in(AB)$ et $H\in(DC)$?

b-/ C soit le milieu de [GH]?

EXERCICE N°72

A/ Soit ABCD un carré.

1-/ Construire les points E et F tels que les triangles BCE et CDF soient équilatéraux ; BCE situé à l'intérieur du carré ABCD et CDF à l'extérieur.

2-/ On considère le repère (B, C, A).

a-/ Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et F dans ce repère.

b-/ Démontrer que les points A, E et F sont alignés.

B-/ Soit ABC un triangle de centre de gravité G, I le milieu de [BC]

1-/ Démontrer que pour tout point M du plan : $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=3\vec{MG}$

$$2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}=2\vec{IA}$$

2-/ Quel est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}$ et $2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}$ soient colinéaires.

3-/ Quel est l'ensemble des points M tels que:

$$\|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\|=\|2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}\|$$

EXERCICE N°73

Soit ABC un triangle et M, N et P les points définis par :

$$\vec{AM}=\frac{1}{4}\vec{AC} ; \vec{AN}=\frac{1}{3}\vec{AB} ; \vec{BP}=2\vec{CB}$$

1-/ Faire une figure soignée.

2-/ Exprimer $\vec{MN}$ et $\vec{MP}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

3-/ Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

4-/ Soit I, J et K les milieux des cotés [BC], [AC] et [AB]. Soit M' le symétrique de M par rapport à J, N' le symétrique de N par rapport à K et P' le symétrique de P par rapport à I.

a-/ Exprimer $\vec{M'N'}$ et $\vec{M'P'}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

b-/ Démontrer que les points M', N' et P' sont alignés.

EXERCICE N°74

1-/ Dans le plan vectoriel $\vec{P}$ on donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $2\vec{u}+5\vec{v}=\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})$. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Sont-ils de même sens ? Justifier

2-/ On donne dans le plan P trois points non alignés A, B, C.

a-/ Pourquoi $(\vec{AB},\vec{AC})$ est une base de $\vec{P}$?

b-/ Soit un point M de P tel que $\vec{AM}=\vec{BM}+\vec{CM}$; déterminer les réels x et y pour que $\vec{AM}=x\vec{AB}+y\vec{AC}$. En déduire les coordonnées de $\vec{BC}$ dans la base $(\vec{AB},\vec{AC})$.

3-/ Soit $\beta=(\vec{i},\vec{j})$ une base de $\vec{P}$ et deux vecteurs :

$$\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j} \text{ et } \vec{v}=\vec{i}+b\vec{j}.$$

a-/ Déterminer le réel b pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

b-/ Soit b = 2, prouver que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base β' de $\vec{P}$.

c-/ Calculer dans la base β', les

coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

EXERCICE N°75

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
Dans chacun des cas ci-dessous, démontrer que le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$ et déterminer les coordonnées des vecteurs :
$\vec{i}, \vec{j}, -4\vec{i}+\vec{j}, 3\vec{i}+2\vec{j}$ dans cette base.

1/ $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{j}, \vec{i})$
2/ $(\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{i}, -\vec{j})$
3/ $(\vec{u}, \vec{v}) = (2\vec{i}, -\vec{j})$
4/ $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{i}+\vec{j})$.

EXERCICE N°76

Soit le parallélogramme ABCD et I le point d'intersection de ses diagonales

1/ Justifier que $(\vec{AB}, \vec{AD})$ est une base de $\mathcal{V}$.
Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par :
$\vec{u} = \vec{AC} + \vec{BD} + 3(\vec{CB} - \vec{BA}) + 2(\vec{AD} - \vec{BC}) - 2(\vec{ID} - \vec{IA})$

2/ Construire le point E défini par : $\vec{AE} = \vec{AB} - \vec{AD}$.
Les vecteurs $\vec{CB}$ et $\vec{CE}$ forment-ils une base de $\mathcal{V}$?

3/ Donner les coordonnées des points B, C, D, E et I dans chacun des repère (A, B, D) et $(B, \vec{AB}, \vec{AC})$.

EXERCICE N°77

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Les points E, F, G et H sont les milieux respectifs de [AD], [AB], [BC] et [CD].

1/ Justifier que $(\vec{ED}, \vec{EO})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2/ Déterminer dans cette base les coordonnées des vecteurs :
$\vec{EH}$, $\vec{EB}$; $\vec{EG}$, $\vec{EA}$, $\vec{FC}$, $\vec{AC}$ et $\vec{GD}$

EXERCICE N°78

Soit ABC un triangle équilatéral tel que : AB = 4cm. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].

1/ a/ Construire le triangle ABC ainsi que les points I et J.

b/ Construire les points M, N et P définis par :
$\vec{BM} = \vec{AM} + \vec{CM}$; $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$ et $\vec{PC} = \vec{PA} - \vec{PB}$.

2/ a/ Démontrer que les points B, M et N sont alignés.

b/ Démontrer que les points M, C, P sont alignés.

c/ Quelle est la nature des quadrilatères ABCM et ABPC ?

3/ a/ Démontrer que $(\vec{IB}, \vec{IJ})$ est une base de $\mathcal{V}$.

b/ Déterminer dans cette base les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BP}$, $\vec{AM}$ et $\vec{AN}$.

c/ Déduire les coordonnées des points A, B, C, I, J, P, M et N dans le repère $(I, \vec{IB}, \vec{IJ})$

EXERCICE N°79

Soit A, B, C trois points non alignés et I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On note respectivement a, b, c, p les distances BC, AC, AB et le périmètre du triangle ABC.

1/ Parmi les vecteurs $\vec{AI}$, $\vec{BI}$, $\vec{CI}$ peut-il y en avoir deux colinéaires ?

2/ Soit D le point tel que : $\vec{AD} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$. Démontrer que les vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AI}$ sont colinéaires. (On pourra introduire les points B' et C' tels que : $\vec{AB'} = b\vec{AB}$ et $\vec{AC'} = c\vec{AC}$)

3/ a/ Démontrer qu'il existe un réel α tel que :

$$(\alpha - b - c)\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$$

b/ Démontrer de même qu'il existe un réel β tel que :

$$a\vec{IA} + (\beta - a - c)\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$$

c/ Démontrer que : $\alpha = \beta = p$.

d/ En déduire que :

$$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}.$$

Application

4/ Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$. On donne A(1;1) B(1;4), C(5;1) et on appelle $(\mathscr{C})$ le cercle inscrit dans le triangle ABC.

a/ Déterminer les coordonnées du point K centre de $(\mathscr{C})$ et faire une figure.

b/ Quel est le rayon de $(\mathscr{C})$?

c/ Tracer le cercle $(\mathscr{C})$.

EXERCICE N°80

Deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de centres respectifs O et O' sont tangents intérieurement en A. Une droite $(\mathscr{D})$ distincte de (AO) et passant par A, distincte de (AO) et de la perpendiculaire à (AO) coupe $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ respectivement en M et M'

Soit (T) la tangente à $(\mathscr{C})$ en M et (T') la tangente à $(\mathscr{C}')$ en M'. Montrer que les droites (T) et (T') sont parallèles.

EXERCICE N°81

Soit ABCD un rectangle tel que BD = 2AB et $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit à ABCD. Les tangentes en A et D au cercle $(\mathscr{C})$ ont pour point d'intersection M et coupent la droite (BC) respectivement en N et P.

Démontrer que le triangle MNP est équilatéral.

EXERCICE N°82

Soit deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, de centres respectifs O et O', sécants en deux points A et B. On appelle C le symétrique de B par rapport à O et C' le symétrique de B par rapport à O'.

1/ Démontrer que C, A et C' sont alignés.

2/ Soit M_1 un point de $(\mathscr{C})$, distinct de A et B, appartenant au demi-plan de frontière (AB) contenant C. On appelle M_1' le point d'intersection de (AM_1) avec $(\mathscr{C}')$. Démontrer que $mes\,\widehat{CBC'} = mes\,\widehat{M_1BM_1'}$

3/ Soit M_2 un point de $(\mathscr{C})$, distinct de A et B, appartenant à l'arc d'extrémités A et B ne contenant pas C. On appelle M_2' le point d'intersection de (AM_2) avec $(\mathscr{C}')$. Démontrer que $mes\,\widehat{CBC'} = mes\,\widehat{M_2BM_2'}$

4/ Que peut-on dire des angles du triangle MBM' lorsque M parcourt le cercle $(\mathscr{C})$ privé des points A et B ?

EXERCICE N°83

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon R, M et N deux points qui décrivent le cercle $(\mathscr{C})$ de façon à ce que la distance MN reste toujours égale à R. On cherche à déterminer le lieu géométrique du point d'intersection P des tangentes en M et N au cercle $(\mathscr{C})$.

1/ Pour M et N donnés sur $(\mathscr{C})$, démontrer que P appartient à un cercle $(\mathscr{C}')$ que l'on déterminera.

2/ Réciproquement, P étant un point de $(\mathscr{C}')$, démontrer qu'on peut trouver deux points M et N de $(\mathscr{C})$ tels que P soit le point d'intersection des tangentes en M et N au cercle $(\mathscr{C})$. Conclure.

EXERCICE N°84

1/ Soit ABMC un quadrilatère inscriptible tel que le triangle ABC soit isocèle en A.

Démontrer que la droite (MA) est la bissectrice issue de M dans le triangle BMC.

2/ Soit A et B deux points d'un cercle $(\mathscr{C})$ non diamétralement opposés. On choisit un point M sur $(\mathscr{C})$ n'appartenant pas à $\widehat{AB}$. Les tangentes en A et B au cercle $(\mathscr{C})$ se coupent en un point N.

Trouver la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ pour que mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$

EXERCICE N°85

1/ Soit ABC un triangle tel que $AB = 6cm$, $BC = 4cm$ et mes $\widehat{ABC} = 40°$

Construire à la règle et au compas un point M tel que mes $\widehat{AMB} = 45°$ et mes $\widehat{BMC} = 60°$

2/ Soit ABC un triangle. Construire à la règle et au compas le lieu géométrique des points M du demi-plan de frontière (AB) contenant C tels que : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ACB}$

EXERCICE N°86

Pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $]-\pi/2;\pi[$. On définit les nombres $A(x)$ et $B(x)$ par :

$A(x) = \cos(-x) + \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$

$B(x) = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos(x - \frac{\pi}{2})$

Mettre $A(x)$ et $B(x)$ sous la forme la plus simple possible.

EXERCICE N°87

1/ Démontrer que :

$\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{4\pi}{10} + \cos\frac{6\pi}{10} = 0$

2/ x étant la mesure principale d'un angle orienté, démontrer que :

a/ $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

b/ $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$.

c/ $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$.

d/ $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

e/ $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = 1$

3/ x étant la mesure principale d'un angle orienté non droit, démontrer que : $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x . \sin^2 x$.

EXERCICE N°88

1/ Calculer $\cos x$ sachant que :

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

2/ Calculer $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{\pi}{5}$ sachant que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

3/ Calculer $\sin\frac{\pi}{10}$ et $\tan\frac{\pi}{10}$ sachant que : $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

4/ Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$ sachant que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

EXERCICE N°89

Soit un nombre réel α tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Soit ABC un triangle isocèle de sommet principale A tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = 2\alpha$. H et I sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A et B.

On pose : $a = AB$

1/ Démontrer que : $BC = 2a\sin\alpha$

2/ Démontre que : $BI = BC\cos\alpha$

3/ Démontrer que : $BI = a\sin 2\alpha$.

4/ En déduire que :

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

EXERCICE N°90

Soit α et β deux nombres réels. On rappelle que :

* si $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ alors $\sin\alpha = \cos\beta$.
* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

1/ Démontrer que :

$$16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = 1$$

2/ x est un nombre réel distinct de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

a/ Soit $A = 16\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x$

En calculant $A\sin x$, montrer que

$$A = \frac{\sin 16x}{\sin x}$$

b/ En déduire la valeur exacte du nombre :

$$B = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$$

EXERCICE N°91

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que :

$BC = a$ et $Mes(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{5}$.

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté [AC] en D. Faire une figure.

1/ Démontrer que : $AD = BD = a$.

2/ Démontrer que :

$AB = 2a\cos\frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a\cos\frac{2\pi}{5}$.

En déduire que : $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$

3/ On appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC).

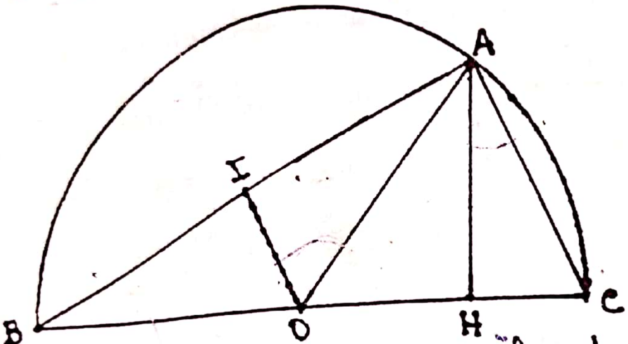
Calculer BH en fonction de a de deux manières différentes. et en déduire que : $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$

4/ En remarquant que : $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ calculer $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.

5/ Calculer $\sin\frac{\pi}{5}$

EXERCICE N°92

- Soit un demi-cercle de centre O et de diamètre BC = 2, A un point de ce demi-cercle tel que $\widehat{COA}$ soit aigu. On note H le projeté orthogonal de A sur (BC) et I celui de O sur (AB).



α est la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

1/ Démontrer que I est le milieu de [AB] et que $OH = \cos 2\alpha$.

2/ Exprimer AB en fonction de $\cos\alpha$

3/ Démontrer que: $BH = 2\cos^2\alpha$ et
$OH = 2\cos^2\alpha - 1$

4/ En déduire que:
$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\quad \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

5/ Application:
Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE N°93

Soit $\alpha \in]-\pi/2; \pi/2[$, M son image sur le cercle trigonométrique. On appelle A l'image de zéro. Soit T le point d'intersection de (OM) et de la tangente en A au cercle trigonométrique.

1/ Faire une figure

2/ Calculer l'aire du triangle OAT en fonction de α.

3/ Calculer, en fonction de α, l'aire de la région du plan limitée par les segments [OA], [OM] et l'arc $\widehat{AM}$.

4/ Démontrer que $|\alpha| \leq |\tan\alpha|$

EXERCICE N° 94

Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, M est l'image de 2α sur le cercle trigonométrique. On appelle A l'image de zéro, A' le symétrique de A par rapport à O.

1/ Calculer, en fonction de α, la mesure principale de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{A'M})$

2/ Dans le triangle AA'M, calculer AM en fonction de $\sin|\alpha|$

3/ Quelle est la longueur de l'arc $\widehat{AM}$?

4/ Démontrer que:
$\sin|\alpha| = |\sin\alpha|$ et que:
$|\sin\alpha| \leq |\alpha|$

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

EXERCICE N°95

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$, H un point de $[AB]$, $(\mathscr{D})$ la perpendiculaire à (AB) en H.
Soit M un point de $(\mathscr{C})$. La droite (BM) coupe $(\mathscr{D})$ en N.

1/ Démontrer que : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA}$

2/ En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN}$ reste constant lorsque M décrit $(\mathscr{C})$.

EXERCICE N°96

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que : $AB = 3$ et $BC = 4$
Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), K le projeté orthogonal de H sur (AC).

1/ Calculer AH

2/ Calculer $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes et en déduire la valeur AK.

EXERCICE N°97

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r. On considère sur $(\mathscr{C})$ deux points A et B et leurs symétriques respectifs A' et B' par rapport à O.

1/ Démontrer que :
$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}$

2/ Démontrer que les sommes :
$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'}$
sont constantes lorsque A et B parcourent $(\mathscr{C})$.

EXERCICE N°98

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r, M un point quelconque du plan.

1/ Soit $[IJ]$ un diamètre de $(\mathscr{C})$
Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}$ ne dépend pas du diamètre $[IJ]$ choisi

2/ Une droite passant par M coupe $(\mathscr{C})$ en deux points P et Q.
Soit P' le symétrique de P par rapport à O.
Démontrer que $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MP'}$

3/ En déduire que $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$ reste constant lorsque P décrit $(\mathscr{C})$

EXERCICE N°99

Soit IJKL un parallélogramme tel que : $IJ = 5cm$; $IL = 8cm$ et $IK = 7cm$.

1/ Faire une figure.

2·/ Calculer $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LK}$. En déduire la mesure en dégré de l'angle $\widehat{ILK}$

3·/ Calculer $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IJ}$ et $(\overrightarrow{IL}-\overrightarrow{IJ})^2$.
En déduire la mesure de la diagonale LJ.

EXERCICE N°100

Soit $f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$

$M \longmapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

1·/ On appelle O le milieu de [AB]. Déterminer $f(A)$, $f(B)$ et $f(O)$.

2·/ Montrer que $\forall M \in \mathcal{P}$,

$$f(M) = OM^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

3·/ Si $AB = 2$, quel est l'ensemble des points du plan tel que: $f(M) = 0$? Construire cet ensemble.

EXERCICE N°101

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(2;-3)$ et $B(2;1)$.

1·/ Déterminer une équation de l'ensemble (C) des points M tels que

$$AM^2 + BM^2 = 40$$

2·/ Soit I le milieu du segment [AB]. Démontrer que pour tout point M du plan on a:

$$AM^2 + BM^2 = 2MI^2 + 8$$

Utiliser cette propriété pour retrouver les résultats de la première question.

3·/ Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 5$

EXERCICE N°102

Soit ABC un triangle tel que: $mes\hat{A} = 60°$; $AC = 3$; $AB = 5$. On appelle R le rayon de son cercle circonscrit et S l'aire de ABC. Déterminer BC, $\hat{B}$, $\hat{C}$, R et S.

EXERCICE N°103

Soit ABC un triangle. On appelle S son aire. On pose: $a = BC$; $b = CA$; $c = AB$. On sait que $mes\hat{A} = 45°$ $b = 3$ et $S = 3$. Déterminer la longueur de chacun des cotés et les angles de ce triangle.

EXERCICE N°104

Soit ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Démontrer que si ABC est rectangle en A alors: $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$

EXERCICE N°105

Soit ABC un triangle isocèle de base [BC]. On pose $a = BC$, $b = CA = AB$. Soit r le rayon de son cercle inscrit, R celui de son cercle circonscrit et S son aire.

L'objet de l'exercice est de démontrer que le triangle ABC est équilatéral ssi $R = 2r$

1/ On suppose que le triangle ABC est isocèle.

a/ Démontrer que $r = \dfrac{2S}{a+2b}$

b/ Démontrer que $R = \dfrac{ab^2}{4S}$.

c/ Démontrer que $\cos\widehat{B} = \dfrac{a}{2b}$

En déduire que $\sin^2\widehat{B} = \dfrac{4b^2-a^2}{4b^2}$ puis exprimer S^2 en fonction de a et b.

d/ Déduire des questions a/ b/ et c/ que si $R = 2r$ alors le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE N°106

Soit ABCD un parallélogramme.

1/ Démontrer que :

$2(AB^2+AD^2) = AC^2+BD^2$.

2/ On donne : $AB=4$, $AD=2$, $BD=5$

Calculer AC puis les mesures en degrés des angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DAC}$.

EXERCICE N°107

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de [BC] et [AC]

On pose $BC=a$, $AC=b$ et $AB=c$

Démontrer que :

$$\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BJ} \Leftrightarrow a^2+b^2=5c^2$$

EXERCICE N°108

Soit ABC un triangle.

On pose : $a=BC$; $b=CA$; $c=AB$. On appelle p son démi-périmètre et S son aire. On se propose de calculer S en fonction de a, b et c.

1/ Démontrer que $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

En déduire $\sin^2\widehat{A}$ en fonction de a, b, c.

2/ Démontrer la formule de Héron d'Alexandrie :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

3/ On appelle r le rayon du cercle inscrit dans ABC.

a/ Démontrer que $S = pr$

b/ En déduire que :

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

c/ On appelle R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

Calculer R en fonction de a, b, c.

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

EXERCICE N°109

ABC est un triangle rectangle en A. Soit [AH] la hauteur relative au côté [BC], M et P les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC) respectivement.

Démontrer que :

$$BM^2 + CP^2 + 3AH^2 = BC^2$$

EXERCICE N°110

On considère un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon R. Soit M un point intérieur à $(\mathscr{C})$, (Δ) une droite passant par M. (Δ) coupe $(\mathscr{C})$ en deux points A et B. La droite (Δ') perpendiculaire en M à (Δ) coupe $(\mathscr{C})$ en deux points C et D. On désigne par H et K les milieux respectifs de [AB] et [CD] et on pose : $d = OM$.

1/ Calculer en fonction de d le nombre réel : $OH^2 + OK^2$.

2/ En utilisant le théorème de la médiane dans les triangles AOB et COD, calculer en fonction de d et R le nombre réel : $AB^2 + CD^2$

3/ Calculer, en fonction de R, le nombre réel : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

EXERCICE N°111

Soit ABC un triangle. On considère A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

Soit H l'orthocentre, G le centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1/ Démontrer que :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$$
$$= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{OA'}$$

En déduire que le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$

2/ Démontrer que le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CA}$

3/ Démontrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. En déduire que O, G et H sont alignés

EXERCICE N°112

On se propose de démontrer que la somme des carrés des longueurs des quatre cotés d'un quadrilatère est supérieure ou égale à la somme des carrés des longueurs des deux diagonales.

1/ Soit ABCD un quadrilatère. On considère le point E tel que BCDE soit un parallélogramme.

Démontrer que : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = AE^2$

2-/ Démontrer que :

$AC^2+BD^2 = 2AB^2+AD^2+BC^2-2\vec{AB}.\vec{AD}-2\vec{BC}.\vec{BA}$

$AC^2+BD^2 = 2CD^2+CB^2+AD^2-2\vec{CB}.\vec{CD}-2\vec{DC}.\vec{DA}$

En déduire que :

$AC^2+BD^2 = AB^2+CD^2+BC^2+AD^2-\vec{AB}.\vec{AD}$
$-\vec{BC}.\vec{BA}-\vec{CB}.\vec{CD}-\vec{DC}.\vec{DA}.$

3-/ Déduire des questions précédentes que : $BD^2+AC^2 \leq AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$.

4/ Peut-on avoir :

$BD^2+AC^2 = AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$?

Enoncer le resultat sous forme de théorème.

EXERCICE N°113.

On considère un triangle ABC. On construit le carré ABFE situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pa C et le carré ACGD situé dans le demi-plan de frontière (AC) ne contenant pas B.

1-/ Comparer les angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{BAD}$

2-/ Comparer les produits scalaires $\vec{AC}.\vec{AE}$ et $\vec{AD}.\vec{AB}$.

3-/ Soit M le milieu de [BC]. Calculer $\vec{AM}.\vec{ED}$. En déduire que la médiane [AM] du triangle ABC est hauteur du triangle AED.

4/ Démontrer que les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{BAC}$ sont supplémentaires.

5-/ Comparer les produits scalaires $\vec{AD}.\vec{AE}$ et $\vec{AB}.\vec{AC}$.

6-/ Démontrer que les droites (CE) et (BD) sont perpendiculaires.

EXERCICE N°114

Soit ABC un triangle dont le périmètre est 24. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1-/ Sachant que a, b et c sont respectivement proportionnels aux nombre 3, 4 et 5, calculer les cotés de ce triangle

2-/ a-/ Quelle est la nature du triangle ABC

b-/ Déterminer en dégrés les angles du triangle.

3-/ Calculer l'aire S du triangle

4-/ Soit H le pied de la hauteur issue du point C au triangle ABC et C' le milieu de [AB]

a-/ Déterminer les cotés et les angles du triangle CC'H.

b-/ Déterminer le rayon r du cercle inscrit dans le triangle ABC et celui r' du cercle inscrit dans le triangle CC'H.

EXERCICE N°115

Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On appelle R le rayon de son cercle circonscrit, S son aire et r le rayon de son cercle inscrit.

1./ Montrer que :

$$R = \frac{p}{\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C}}$$ où p est le demi-périmètre du triangle ABC

2./ On donne : $p = 10{,}5$

$\hat{A} = 50{,}7°$, $\hat{B} = 95{,}75°$, $\hat{C} = 33{,}55°$

a./ Calculer R

b./ En deduire les cotés du triangle ABC.

3./ calculer l'aire S et le rayon r.

EXERCICE N°116

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$.

1./ $(\mathcal{D})$ passe par $A(-1; 2)$ et $B(1; 4)$

2./ $(\mathcal{D})$ passe par $C(2; -5)$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

3./ $(\mathcal{D})$ passe par $D(3; -1)$ et est parallèle à la droite d'équation $7x - 4y + 3 = 0$

EXERCICE N°117

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$.

1./ $(\mathcal{D})$ passe par $A\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ et admet $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

2./ $(\mathcal{D})$ passe par $B(4; 1)$ et est perpendiculaire à la droite d'équation

$$3x + 5y - 8 = 0$$

3./ $(\mathcal{D})$ est la médiatrice du segment $[CD]$ où $C(-3; 2)$ et $D(5; 0)$.

EXERCICE N°118

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la droite $(\mathcal{D})$.

1./ $(\mathcal{D})$ est la droite passant par $A(-1; 3)$ et de coefficient directeur 6

2./ $(\mathcal{D})$ est la droite passant par $B(\sqrt{3}; -4)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ vérifiant $Mes(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\pi}{6}$.

EXERCICE N°119

Le plan étant d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite

$$(\mathcal{D}) : -2x + 3y - 6 = 0$$

1·/ Déterminer une équation de la droite $(\mathcal{D}')$, image de $(\mathcal{D})$ par la translation t de vecteur $\vec{u}(1;-2)$.

2·/ Déterminer une équation de la droite $(\mathcal{D}'')$ image de $(\mathcal{D})$ par la symétrie S_A de centre $A(-3;5)$

3·/ Déterminer une équation de la droite $(\mathcal{D}''')$ image de $(\mathcal{D})$ par la symétrie orthogonale S d'axe la droite $(O,\vec{i})$.

EXERCICE N°120

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère la droite $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique

$$t\in\mathbb{R}\ \begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-4t. \end{cases}$$

1·/ La droite $(\mathcal{D})$ passe-t-elle par $A(-2;1)$? par $B(1;-1)$?

2·/ Quel est le point de $(\mathcal{D})$ qui a pour abscisse 0? Quel est le point de $(\mathcal{D})$ qui a pour ordonnée 0?

3·/ Donner une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$.

EXERCICE N°121

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considères les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-4t \end{cases} t\in\mathbb{R} \quad \begin{cases} x=1-t \\ y=b+mt \end{cases} t\in\mathbb{R}.$$

où m et b sont des nombres réels.

1·/ Peut-on trouver des couples $(m;b)$ tels que $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ soient parallèles ?

2·/ Peut-on trouver $(m;b)$ pour que $(\mathcal{D})=(\mathcal{D}')$?

EXERCICE N°122

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Trouver un vecteur directeur puis une représentation paramétrique de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ dans chacun des cas suivants

1·/ $A(3;-1)$, $B(-9;4)$ et $C(6;3)$

2·/ $A(17,4)$, $B(-7;10)$ et $C(13;6)$

3·/ $A(1;1)$, $B(2;3)$ et $C(3;2)$

EXERCICE N°123

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-4t \end{cases} t\in\mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x=1-t \\ y=3+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$$

(D) et (D') sont-elles parallèles ? Trouver les coordonnées de leur point d'intersection s'il y a lieu.

EXERCICE N°124

Soit (Dm) la droite d'équation

$$(m-1)x + (2m+3)y + m+4 = 0$$

le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Déterminer le paramètre réel m pour que :

a/ Dm passe par l'origine du repère

b/ (Dm) soit parallèle à l'axe des ordonnées

c/ (Dm) soit horizontale

d/ (Dm) soit parallèle à la première bissectrice.

2/ Montrer que toutes les droites (Dm) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées

EXERCICE N°125

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Trouver une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}_1)$ de centre O et de rayon 5.

2/ Trouver une équation du cercle $(\mathscr{C}_2)$ de centre $A(1;0)$ et de rayon 3.

3/ Trouver une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}_3)$ de centre $B(-2;1)$ et passant par $C(1;5)$

4/ Trouver une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}_4)$ de diamètre [EF] avec $E(1;5)$ et $F(-5;-2)$. Préciser les coordonnées du centre de ce cercle, ainsi que son rayon.

EXERCICE N°126

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le cercle d'équation :

$$x^2+y^2+2x-6y-15=0$$

1/ Vérifier que le point $A(2;-1)$ appartient à ce cercle. Faire une figure. Construire sur cette figure, la tangente en A.

2/ Déterminer une équation cartésienne de cette droite. On démontrera que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$x.x_A + y.y_A + (x+x_A) - 3(y+y_A) - 15 = 0$$

3/ Généralisation

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle d'équations :

(D) et (D') sont-elles parallèles ? Trouver les coordonnées de leur point d'intersection s'il y a lieu.

EXERCICE N°124

Soit (Dm) la droite d'équation

$$(m-1)x + (2m+3)y + m+4 = 0$$

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Déterminer le paramètre réel m pour que :

a./ Dm passe par l'origine du repère

b./ (Dm) soit parallèle à l'axe des ordonnées

c./ (Dm) soit horizontale

d./ (Dm) soit parallèle à la première bissectrice.

2./ Montrer que toutes les droites (Dm) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées

EXERCICE N°125

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1./ Trouver une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}_1)$ de centre O et de rayon 5.

2./ Trouver une équation du cercle $(\mathscr{C}_2)$ de centre $A(1;0)$ et de rayon 3.

3./ Trouver une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}_3)$ de centre $B(-2;1)$ et passant par $C(1;5)$

4./ Trouver une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}_4)$ de diamètre [EF] avec $E(1;5)$ et $F(-5;-2)$. Préciser les coordonnées du centre de ce cercle, ainsi que son rayon.

EXERCICE N°126

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le cercle d'équation :

$$x^2+y^2+2x-6y-15=0$$

1./ Vérifier que le point $A(2;-1)$ appartient à ce cercle. Faire une figure. Construire sur cette figure, la tangente en A.

2./ Déterminer une équation cartésienne de cette droite. On démontrera que cette équation peut se mettre sous la forme:

$$x.x_A + y.y_A + (x+x_A) - 3(y+y_A) - 15 =$$

3./ Généralisation

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle d'équations :

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ et $A(x_A;y_A)$ un point de $(\mathscr{C})$.
Démontrer que la tangente à $(\mathscr{C})$ en A a pour équation :

$$xx_A+yy_A-a(x+x_A)-b(y+y_A)+c=0$$

EXERCICE N°127

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(2;1)$ et de rayon $\sqrt{5}$

2/ Soit $A(7;6)$ et $B(-3;1)$. Démontrer que la droite (AB) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en un point K dont on déterminera les coordonnées.

3/ Déterminer une équation de la tangente (D_1) au cercle $(\mathscr{C})$ en $I(1;-1)$ et vérifier que cette droite passe par le point B.

4/ a/ Déterminer une équation de la droite (D_2) passant par A et tangente au cercle $(\mathscr{C})$, autre que la droite (AB).

b/ Soit C le point d'intersect- des droites (D_1) et (D_2). Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C et déterminer une equation cartésienne du cercle circonscrit à ce triangle.

EXERCICE N°128

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les cercles d'équations respectives

$$(x-2)^2+(y+3)^2-4=0$$

$$(x-5)^2+(y-1)^2-9=0$$

1/ Démontrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont tangents en un point A dont on déterminera les coordonnées.

2/ Vérifier que l'équation :

$$(x-2)^2+(y-3)^2-4-[(x-5)^2+(y-1)^2-9]=0$$

est une équation de droite et que cette droite passe par A.

3/ Vérifier que cette droite est une tangente commune aux deux cercles.

EXERCICE N°129

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Soit $M(x;y)$ un point. Demontrer que: $\|\overrightarrow{OM}\| \Leftrightarrow$ il existe un réel t de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ tel que :

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$$

2/ Soit r un nombre réel strictement positif. Déduire de la quest° précédente le lieu $(\mathscr{C})$ des points $M(x;y)$ pour lesquels il existe un réel t de l'intervalle $]-\pi,\pi]$ tel que: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

3/ Soit a, b, r trois nombres réels tels que $r>0$

Déduire de la question précédente le lieu $(\mathscr{C}')$ des points $M(x;y)$ pour lesquels il existe un réel t de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ tel que:

$$\begin{cases} x = r\cos t + a \\ y = r\sin t + b. \end{cases}$$

EXERCICE N°130

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On donne le cercle $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équations :

$$x^2+y^2-4x-2y-8=0 \text{ et } 2x-3y+1=0$$

1/ Faire une figure. Construire les deux tangentes au cercle parallèles à $(\mathscr{D})$.

2/ Déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur normal de chacune d'elles.

En déduire leurs équations

EXERCICE N°131

Soit $(\mathscr{C}m)$ l'ensemble des points M du plan rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient $x^2+y^2-2mx-2(m-1)y+m^2+4=0$ où m est un paramètre réel.

1/ Discuter suivant les valeurs de m la nature de $(\mathscr{C}m)$.

2/ Dans le cas où $(\mathscr{C}m)$ est un cercle :

a/ Préciser les coordonnées de son centre Im et la valeur de son rayon dans le cas où $(\mathscr{C})$ est un cercle.

b/ Déterminer l'ensemble des points Im lorsque m varie

EXERCICE N°132

On considère les points $A\binom{4}{7}$, $B\binom{-12}{-3}$ et $C\binom{13}{-5}$.

1/ Déterminer une équation des droites (AB), (AC) et (BC).

2/ Déterminer une équation des bissectrices intérieures du triangle ABC.

3/ Vérifier que ces trois bissectrices sont concourantes et en déduire une équation du cercle inscrit dans le triangle ABC.

4/ Déterminer une équation de chacune des médiatrices des segments [AB], [AC] et [BC]

5/ Vérifier que ces trois médiatrices sont concourantes et en déduire une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

EXERCICE N°133

On considère les points $A\binom{0}{3}$, $B\binom{-4}{0}$ et $C\binom{0}{-2}$.

1/ Déterminer les points I et J de l'axe des abscisses, équidistants des droites (AB) et (AC).

2/ Ecrire une équation cartésienne du cercle de diamètre [IJ] et vérifier que ce cercle passe par A.

3/ Déterminer une équation de la tangente à ce cercle en A.

EXERCICE N°134

Soit A, B et C trois points du plan deux à deux distincts tels que:

$$\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{BC}.$$

Déterminer le rapport de :

1/ l'homothétie de centre A qui transforme C en B.

2/ l'homothétie de centre B qui transforme A en C.

3/ l'homothétie de centre C qui transforme A en B.

EXERCICE N°135

Soit A, B et C trois points du plan deux à deux distincts. Déterminer dans chacun des cas suivants le rapport de l'homothétie de centre A transformant B en C.

1/ $\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

2/ $\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BA} = \vec{0}$

3/ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$.

EXERCICE N°136

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On considère l'application h du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x;y)$ associe le point M' de coordonnées $(x';y')$ telles que : $\begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y+3 \end{cases}$

1/ Démontrer qu'il existe un unique point I tel que $h(I) = I$.

2/ Démontrer que h est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

3/ Caractériser h^{-1}

EXERCICE N°137

Soit h l'homothétie de centre $A(1;-2)$ et de rapport $k=-2$.

1./ Déterminer l'expression analytique de h.

2./ Préciser la nature de h^{-1} et déterminer son expression analytique.

3./ a./ Déterminer l'équation de la droite $(\mathcal{D}')$ image par h de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $2x-3y+5=0$

b./ Déterminer l'équation de la droite $\Delta = h^{-1}(\mathcal{D})$

EXERCICE N°138

Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de centres respectifs $A(1;3)$, $A'(-1;1)$ et de rayons respectifs $r=2$ et $r'=4$.

1./ Démontrer qu'il existe deux homothéties h_1 et h_2 qui transforment $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$. (h_1 étant l'homothétie de rapport positif).

2./ a./ Déterminer les éléments caractéristiques de chacunes des homothéties h_1 et h_2

b./ Déterminer l'expression analytique de h_1 puis celle de h_2.

EXERCICE N°139

Soit A et B deux points. Peut-on déterminer une homothétie transformant A en B dans les cas suivants (le centre est noté I).

1./ $k=2$ si oui construire I

2./ I est tel que : $\overrightarrow{AI}=-5\overrightarrow{AB}$. Si oui, quel est le rapport k?

3./ I n'est pas un point de (AB)

4./ $k=1$ 5./ $k=-1$.

EXERCICE N°140

Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ des droites. Peut-on déterminer des homothéties transformant $(\mathcal{D})$ en $(\mathcal{D}')$ dans les cas suivants :

1./ $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont parallèles

2./ $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont perpendiculaires

3./ $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont les supports de deux cotés d'un triangle équilateral.

EXERCICE N°141

Soit A, B et C trois points non alignés du plan. A tout point M du plan on associe le point M' défini par : $3\overrightarrow{AM'}-2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$. On définit ainsi une application f du plan dans lui même.

1/ Déterminer les images de A, B et C par f.

2/ Trouver un point invariant par f

3/ Démontrer que f est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

EXERCICE N°142

Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $mes(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = \frac{\pi}{3}$, G son centre de gravité et A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB]

1/ Quels sont les points :

$r_{(B,\frac{\pi}{3})}(C)$, $r_{(A,\pi/3)}(B)$, $r_{(C,\pi/3)}(A)$?

2/ Déterminer le centre et l'angle de la rotation qui transforme A en B, B en C et C en A.

3/ Construire les points P, Q et R tels que : $P = r_{(A,\pi/3)}(C)$, $Q = r_{(C,\pi/3)}(B)$
$R = r_{(B,\pi/3)}(A)$.

Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE N°143

Soit ABC un triangle équilatéral direct, $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit, M un point de l'arc $\widehat{AC}$, I le point du segment [MB] tel que MI = MA.

1/ Démontrer que le triangle AMI est équilatéral.

2/ Déterminer l'image de I par la rotation de centre A transformant B en C.

3/ En déduire que : MA + MC = MB.

EXERCICE N°144

Soit ABCD un carré tel que $Mes(\widehat{\vec{AB},\vec{AD}}) = \frac{\pi}{2}$. On note E, F, G et H les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1/ Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et B en A. Déterminer son centre et son angle.

2/ Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme B en D et A en A. Déterminer son centre et son angle.

3/ Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en F. Déterminer son centre et son angle.

4/ a/ Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en E. Déterminer son centre.

b/ Soit α la mesure principale de son angle. Démontrer que $\tan(-\alpha/2) = 2$. En déduire à l'aide d'une calcula trice, une valeur approchée de α.

EXERCICE N°145

Soit OAB un triangle non isocèle tel que : $Mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$. Soit O_1, O_2 les points de (OB) tels que :

$O_1B = O_2B = OA$.

1/ Démontrer que s'il existe une rotation transformant A en B et (OA) en (OB) alors :

a/ son centre est sur la médiatrice du segment [AB] ;

b/ l'image de O est soit O_1, soit O_2.

c/ En déduire que son angle a pour mesure $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$.

2/ Démontrer qu'il existe deux rotations et deux seulement transformant A en B et (OA) en (OB). Construire leurs centres et donner leurs angles.

EXERCICE N°146

Soit un triangle ABC et H son orthocentre. On note r le quart de tour direct de centre A et r' le quart de tour indirect de centre A.

1/ Construire B', C' et C'' tels que : $B' = r(B)$, $C' = r'(C)$ et $C'' = r(C)$

2/ Démontrer que (BC) est perpendiculaire à (B'C'').

3/ Quelle est l'image de la droite (AH) par l'homothétie de centre C' et de rapport 2

4/ Démontrer que (AH) est une médiane du triangle AB'C'.

EXERCICE N°147

Soit (Δ) une droite et O un point extérieur à cette droite.

1/ a/ Construire l'image (Δ') de (Δ) par le quart de tour direct de centre O. On écrira et justifiera le programme de construction.

b/ Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{u'}$ un vecteur directeur de (Δ'). Quelles sont les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{u'})$

2/ Même question avec le quart de tour indirect de centre O

EXERCICE N°148

Soit ABC un triangle isocèle de base [BC], O le centre de son cercle circonscrit.

1/ Déterminer la rotation de centre O transformant A en C. Quelle est l'image de B par cette rotation ?

2-/ Soit M un point du segment [BC] la parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en D et la parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en E. Démontrer que E est l'image de D par cette rotation
En déduire que la médiatrice de [DE] passe par un point fixe quand M parcourt de [BC]

EXERCICE N° 149

A l'extérieur d'un triangle direct ABC, on construit les carrés ACDE, ABGF, BHIC.

1-/ Déterminer la rotation transformant le triangle ACI en le triangle DCB
En déduire que (AI) est perpendiculaire à (BD).

2-/ Démontrer que les droites (CG) et (AH) sont perpendiculaires

3-/ Construire l'image du triangle AFE par le quart de tour direct de centre A.

4-/ Démontrer que l'image K' du milieu K de [EF], par ce quart de tour appartient à la droite parallèle à (BC) passant par A.
En déduire que (AK) est une hauteur du triangle ABC

EXERCICE N° 150

Soit $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ deux cercles de même centre O et de rayons respectifs R et 2R. Soit A un point de $(\mathscr{C}_1)$ et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Le but de cet exercice est de construire un triangle équilatéral ABC tel que A et B appartiennent à $(\mathscr{C}_1)$ C appartienne à $(\mathscr{C}_2)$.

1-/ Déterminer et construire l'image (Γ) de $(\mathscr{C}_1)$ par r et démontrer que (Γ) et $(\mathscr{C}_2)$ sont tangents en un point C

2-/ Les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et (Γ) se coupent en A et en un deuxième point B.
Démontrer que le triangle ABC est équilatéral et calculer AB en fonction de R.

CORRIGES DES EXERCICES

EXERCICE N°1

1/ Ecrivons sous forme de fractions irréductibles les nombres suivants :

• $a = 2,\underline{32}$ $\quad 100a = 232,\underline{32}$

$100a - a = 230 \Leftrightarrow 99a = 230$ soit

$$\boxed{a = \frac{230}{99}}$$

• $b = -5,2\underline{6}$ $\quad 100b = -526,\underline{6}$

$10b = -52,\underline{6}$

$100b - 10b = -474 \Leftrightarrow 90b = -474$

$\Leftrightarrow b = \frac{-474}{90} = -\frac{79}{15}$

$$\boxed{b = -\frac{79}{15}}$$

• $c = 6,\underline{315}$ $\quad 1000c = 6315,\underline{315}$

$1000c - c = 6309 \Leftrightarrow 999c = 6309$

$\Leftrightarrow c = \frac{6309}{999} = \frac{701}{111}$

$$\boxed{c = \frac{701}{111}}$$

• $d = 3,24\underline{5}$ $\quad 1000d = 3245,\underline{5}$

$100d = 324,\underline{5}$

$1000d - 100d = 2921 \Leftrightarrow 900d = 2921$

$$\boxed{d = \frac{2921}{900}}$$

• $e = 3,7\underline{42}$ $\quad 1000e = 3742,\underline{42}$

$10e = 37,\underline{42}$

$1000e - 10e = 3705 \Leftrightarrow 990e = 3705$

$$\boxed{e = \frac{247}{66}}$$

• $f = 7,0\underline{134}$ $\quad 10000f = 70.134,\underline{134}$

$10f = 70,\underline{134}$

$10000f - 10f = 70.064$

$\Leftrightarrow 9990f = 70.064 \Leftrightarrow f = \frac{70.064}{9990}$

$$\boxed{f = \frac{35032}{4995}}$$

2/ Ecrivons les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombres premiers

$$A = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 \div \left(\frac{27}{32}\right)}{\frac{16 \times 15}{10^2} \div \frac{20}{49}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{64}{27} \cdot \frac{32}{27}}{\frac{16 \times 15}{2^2 \cdot 5^2} \cdot \frac{49}{20}} = \frac{3 \cdot 2^6 \cdot 2^5 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5}{2 \cdot 3^3 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3 \times 5 \cdot 7^2}$$

$$\boxed{A = \frac{2^{10} \cdot 5^2}{3^6 \cdot 7^2}}$$

$$B = \frac{(0,6)^2 \times 54}{9^2 \times 7 \times 0,4} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 2 \cdot 3^3}{3^4 \cdot 7 \times \frac{2}{5}}$$

$$= \frac{3^2 \times 2 \cdot 3^3 \times 5}{3^4 \cdot 7 \times 2 \times 5^2} = \frac{3}{7 \times 5}$$

$$\boxed{B = \frac{3}{5 \times 7}}$$

$$C = \frac{(0,6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{18^2 \times 5^8 \times (0,8)^3 \times (0,4)^4}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times (3 \times 2^2)^5 \times (2 \times 3^3)^3}{(2 \times 3^2)^2 \times 5^8 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4}$$

$$= \frac{3^2 \times 3^5 \times 2^{10} \times 2^3 \times 3^9 \times 5^3 \times 5^4}{2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 5^8 \times 2^6 \times 2^4}$$

$$\boxed{C = \frac{2 \times 3^{12}}{5^3}}$$

$$D=\frac{(3^4\times 2^{-3})^3}{(9^{-1}\times 2^2)^4}=\frac{3^{12}\times 2^{-6}}{3^{-8}\times 2^8}=\frac{3^{12}\times 3^8}{2^8 . 2^6}$$

$$\boxed{D=\frac{3^{20}}{2^{14}}}$$

$$E=\frac{10^2\times 3^3}{8\times 5^2}\div\sqrt{\frac{2^5\times 3^9}{6}}$$

$$=\frac{2^2.5^2.3^3}{2^3.5^2}\div\sqrt{\frac{2^5\times 3^9}{2\times 3}}$$

$$=\frac{2^2.5^2.3^3}{2^3.5^2}\div\sqrt{2^4\times 3^8}=\frac{2^2\times 3^3}{2^3.2^2.3^4}$$

$$\boxed{E=\frac{1}{2^3\times 3}}$$

EXERCICE N°2

1/ Ecrivons plus simplement les expressions suivantes:

$$A=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{ab-ac-ba+bc+ac-bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$$

$$\boxed{A=0}$$

$$B=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^3b-a^3c-b^3a+b^3c+ac^3-bc^3}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^3b-b^3a+c(b^3-a^3+ac^2-bc^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{ab(a^2-b^2)+c[b^3-a^3+c^2(a-b)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{ab(a-b)(a+b)+c[(b-a)(b^2+ab+a^2)+c^2(a-b)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2b+ab^2-b^2c-abc-ca^2+c^3)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(a-b)[ab(a-c)+b^2(a-c)+c(c^2-a^2)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)(ab+b^2-c(a+c))}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)(ab+b^2-ac-c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)[a(b-c)+b^2-c^2]}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=a+b+c$$

$$\boxed{B=a+b+c}$$

$$C=\frac{\left(\sqrt[4]{a^8b^{12}c^4}\right)^3}{\sqrt[3]{a^6b^3c^9}}\cdot\frac{d^4}{(a^{-3}c^{-5})^2}\cdot\frac{b^{-4}.c^{-2}}{(a^2d^3)^2}$$

$$=\frac{(a^2.b^3.c)^3}{a^2.b.c^3}.d^4.a^6.c^{10}.\frac{1}{a^4d^6.b^4c^2}$$

$$=\frac{a^6b^9c^3d^4a^6c^{10}}{a^2bc^3a^4d^6b^4c^2}$$

$$\boxed{C=\frac{a^6.b^4c^8}{d^2}}$$

$$D=\frac{\left(\sqrt[3]{a^6b^9c^3}\right)^2}{(a^2b^4c)^3}=\frac{(a^2b^3c)^2}{a^6b^{12}c^3}=\frac{a^4b^6c^2}{a^6b^{12}c^3}$$

$$\boxed{D=\frac{1}{a^2b^6c}}$$

2/ Simplifions les expressions suivantes

$$E=(\sqrt{11}+\sqrt{10})^{10}\times(\sqrt{10}-\sqrt{11})^{11}$$

$$E = (\sqrt{11}+\sqrt{10})^{10} \times (\sqrt{10}-\sqrt{11})^{10} \cdot (\sqrt{10}-\sqrt{11})$$
$$= [(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\sqrt{10}-\sqrt{11})]^{10} \cdot (\sqrt{10}-\sqrt{11})$$
$$= (10-11)^{10}(\sqrt{10}-\sqrt{11}) = (-1)^{10}(\sqrt{10}-\sqrt{11})$$
$$=$$
$$\boxed{E = \sqrt{10}-\sqrt{11}}$$

$$F = (\sqrt{7}-\sqrt{5})^5(\sqrt{7}+\sqrt{5})^4$$
$$= (\sqrt{7}-\sqrt{5})^4(\sqrt{7}+\sqrt{5})^4(\sqrt{7}-\sqrt{5})$$
$$= [(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})]^4(\sqrt{7}-\sqrt{5})$$
$$= 2^4(\sqrt{7}-\sqrt{5})$$
$$\boxed{F = 16(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$$

$$G = \left(\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^2$$
$$= \sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$
$$= 2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$$
$$\boxed{G = 2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$$

EXERCICE N°3

1/ Comparaison de x et y dans chacun des cas suivants :

a/ $x=\sqrt{6}-\sqrt{7}$, $y=\sqrt{3}-\sqrt{10}$

$x<0$ $y<0$

$x^2=(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2 = 13-2\sqrt{42}$

$y^2=(\sqrt{3}-\sqrt{10})^2 = 13-2\sqrt{30}$

$30<42 \Rightarrow \sqrt{30}<\sqrt{42}$

$\iff -2\sqrt{30} > -2\sqrt{42} \iff 13-2\sqrt{30} > 13-2\sqrt{42}$

$\iff x^2 < y^2 \iff |x| < |y|$

$\iff -x < -y \iff x > y.$

$$\boxed{\sqrt{6}-\sqrt{7} > \sqrt{3}-\sqrt{10}}$$

b/ $x=\sqrt{13}+\sqrt{8}$, $y=\sqrt{14}+\sqrt{7}$

$x>0$ et $y>0$.

$x^2 = \sqrt{13}+\sqrt{8} = 21+2\sqrt{104}$

$y^2 = (\sqrt{14}+\sqrt{7})^2 = 21+2\sqrt{98}$

$98<104 \iff \sqrt{98}<\sqrt{104}$

$\iff 2\sqrt{98} < 2\sqrt{104}$

$\iff 21+2\sqrt{98} < 21+2\sqrt{104}$

$\iff y^2 < x^2 \iff |x| \;\; |y| \iff x \;\; y.$

$$\boxed{\sqrt{13}+\sqrt{8} > \sqrt{14}+\sqrt{7}}$$

c/ $x = 7-3\sqrt{5}$ $y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$x-y = \dfrac{11-5\sqrt{5}}{2}$ $(5\sqrt{5})^2 = 125$

$11^2 = 121$

$121 < 125$

$\iff \sqrt{121} < \sqrt{125} \iff 11 < 5\sqrt{5}$

$\iff \dfrac{11-5\sqrt{5}}{2} < 0$

$\iff x-y<0$ soit $x<y$

$$\boxed{7-3\sqrt{5} < \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

2/ x et y sont deux réels strictement positifs. Comparons :

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \text{ et } \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x^2+y^2+2xy}{4}$$
$$= \frac{2x^2+2y^2-x^2-y^2-2xy}{4}$$
$$= \frac{x^2+y^2-2xy}{4} = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+, \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

$$\boxed{\forall (x;y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+, \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}}$$

3/ a et b étant deux réels strictement positifs, démontrons les inégalités suivantes :

i/ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$

$a>0$ et $b>0 \Rightarrow \begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ ab > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

$$\boxed{\forall a>0 \text{ et } b>0,\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2}$$

ii/ $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} = \frac{b(a+b)+a(a+b)-ab}{ab(a+b)}$

$= \frac{a^2+b^2+ab}{ab(a+b)}$

$a>0$ et $b>0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+ab>0 \\ a+b>0 \\ ab>0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{a^2+b^2+ab}{ab(a+b)} > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

$$\boxed{\forall a>0 \text{ et } b>0,\ \frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

iii/ si $a<b$ alors $a<\sqrt{ab}<b$

$a<b \Rightarrow \begin{cases} a^2 < ab \\ \text{et} \\ ab < b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| < \sqrt{ab} \\ \text{et} \\ \sqrt{ab} < |b| \end{cases}$

or $|a| = a$ et $|b| = b$ car $a>0$ et $b>0$

On a donc : $\begin{cases} a<\sqrt{ab} \\ \text{et} \\ \sqrt{ab}<b \end{cases}$ soit $a<\sqrt{ab}<b$

$$\boxed{0<a<b \Rightarrow a<\sqrt{ab}<b}$$

iv/ $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$(\sqrt{a+b})^2 = a+b$; $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$

$a>0$ et $b>0 \Rightarrow 2\sqrt{ab} > 0$

$\Rightarrow a+b+2\sqrt{ab} > a+b$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

car $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ et $\sqrt{a+b}>0$

$$\boxed{\forall a>0 \text{ et } b>0,\ \sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

EXERCICE N°4

1/ Comparons $c = \sqrt{2}-\sqrt{5}$ et $d = \sqrt{3}-2$

$2<5$ et $3<4 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}<\sqrt{5} \\ \text{et} \\ \sqrt{3}<2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}-\sqrt{5}<0$ et $\sqrt{3}-2<0$ soit $c<0$ et $d<0$

$c^2 = 7-2\sqrt{10}$ $\quad d^2 = 7-4\sqrt{3}$.

$(4\sqrt{3})^2 = 48$ $\quad (2\sqrt{10})^2 = 40$

$40 < 48 \Leftrightarrow (2\sqrt{10})^2 < (4\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow 2\sqrt{10} < 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 7-2\sqrt{10} > 7-4\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow c^2 > d^2$

$\Leftrightarrow |c| > |d|$

$\Leftrightarrow -c > -d \Leftrightarrow c < d.$

$\boxed{\sqrt{2}-\sqrt{5} < \sqrt{3}-2}$ $c < d.$

Déduisons-en la comparaison de $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{d}$.

$c < d \Leftrightarrow \frac{1}{c} > \frac{1}{d}.$

$\boxed{\frac{1}{c} > \frac{1}{d}.}$

Donnons alors l'ordre dans lequel sont rangés les réels : $\frac{-7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ et $\frac{-7}{2-\sqrt{3}}$

$\frac{-7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{7}{c}$

$\frac{-7}{2-\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}-2} = \frac{7}{d}$

or $\frac{1}{c} > \frac{1}{d} \Leftrightarrow \frac{7}{c} > \frac{7}{d}$. soit

$\boxed{\frac{-7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} > \frac{-7}{2-\sqrt{3}}}$

2/ Soit a et b deux réels non nuls.

Comparons $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ et 2

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}.$

1er cas a et b ont même signe

On a: $\begin{cases}(a-b)^2 \geq 0 \\ \text{et} \\ ab > 0\end{cases} \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

2e cas a et b sont de signes contraires

On a: $\begin{cases}(a-b)^2 \geq 0 \\ \text{et} \\ ab < 0\end{cases} \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq 2$

En résumé on a:

$$\boxed{\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2 \text{ si a et b ont m̂ signe} \\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq 2 \text{ si a et b sont de signes contraires}\end{cases}}$$

3/ Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Montrons que:

$$\frac{p}{q} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{p+3q}{p+q} > \sqrt{3}.$$

$\frac{p+3q}{p+q} > \sqrt{3} \Rightarrow p+3q > \sqrt{3}(p+q)$

$\Rightarrow (1-\sqrt{3})p > (\sqrt{3}-3)q$

$\Rightarrow (1-\sqrt{3})p > q\sqrt{3}(1-\sqrt{3})$

$\Rightarrow p < q\sqrt{3}$ car $1-\sqrt{3} < 0$

$\Rightarrow \frac{p}{q} < \sqrt{3}.$

De plus $\frac{p}{q} < \sqrt{3} \Rightarrow p < q\sqrt{3}$ or $1-\sqrt{3} <$

$\Leftrightarrow (1-\sqrt{3})p > (1-\sqrt{3})q\sqrt{3}$

$\Rightarrow p - p\sqrt{3} > q\sqrt{3} - 3q$

$\Rightarrow p+3q > (p+q)\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{p+3q}{p+q} > \sqrt{3}.$

Conclusion

$$\frac{p}{q} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{p+3q}{p+q} > \sqrt{3}$$

EXERCICE N°5

1/ Soient x et y deux nombres réels

a./ Développons $(y-x)(x^2+xy+y^2)$

$$(y-x)(x^2+xy+y^2) = yx^2+xy^2+y^3-x^3-x^2y-xy^2$$
$$= y^3-x^3.$$

$$\boxed{(y-x)(x^2+xy+y^2) = y^3-x^3}$$

b./ Démontrons que:

$$y^2+xy+x^2 = \left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2$$

$$\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2 = y^2+\frac{x^2}{4}+xy+\frac{3}{4}x^2$$
$$= y^2+xy+x^2$$

$$\boxed{y^2+xy+x^2 = \left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2}$$

c./ Déduisons des questions précédentes que: si $x \le y$ alors $x^3 \le y^3$

$x \le y \Rightarrow y-x \geqslant 0$

$\Rightarrow (y-x)\left[\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2\right] \geqslant 0$

car $\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2 \geqslant 0$

$\Rightarrow (y-x)(y^2+xy+x^2) \geqslant 0$

$\Rightarrow y^3-x^3 \geqslant 0 \Rightarrow x^3 \le y^3$

Conclusion :

$$\boxed{\text{si } x \le y \text{ alors } x^3 \le y^3}$$

2/ a, b et c étant des réels strictement positifs :

a./ Montrons que $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

$\forall a>0$ et $b>0$, $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0$

$(\Leftrightarrow) \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqslant 0 (\Leftrightarrow) \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$

d'où $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

$$\boxed{\forall a>0 \text{ et } b>0,\ \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}}$$

b./ Déduisons-en la comparaison de $\sqrt{c}(a+b)$ et $2\sqrt{abc}$.

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \le a+b$ car $2>0$

$(\Rightarrow) 2\sqrt{c}.\sqrt{ab} \le \sqrt{c}(a+b)$ car $\sqrt{c}>0$

$(\Rightarrow) 2\sqrt{abc} \le \sqrt{c}(a+b)$.

$$\boxed{2\sqrt{abc} \le \sqrt{c}(a+b)}$$

c./ Montrons que:

$3\sqrt{abc}+\sqrt{a}(b+c)+\sqrt{b}(a+c)+\sqrt{c}(a+b) = (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$.

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}) = a\sqrt{b}+a\sqrt{c}+\sqrt{abc}+b\sqrt{a}+\sqrt{abc}+b\sqrt{c}+\sqrt{abc}+c\sqrt{a}+c\sqrt{b}$

$= 3\sqrt{abc}+\sqrt{a}(b+c)+\sqrt{b}(a+c)+\sqrt{c}(a+b)$

On a donc:

$$\boxed{3\sqrt{abc}+\sqrt{a}(b+c)+\sqrt{b}(a+c)+\sqrt{c}(a+b) = (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})}$$

d./ En utilisant la propriété de la question b./ déduisons que:

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}) \geqslant 9\sqrt{abc}$

D'après b/ on a: $\begin{cases} \sqrt{a}(b+c) \geqslant 2\sqrt{abc} \\ \sqrt{b}(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc} \\ \sqrt{c}(a+b) \geqslant 2\sqrt{abc} \end{cases}$

$(\Rightarrow) \sqrt{a}(b+c)+\sqrt{b}(a+c)+\sqrt{c}(a+b) \geqslant 6\sqrt{abc}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{abc}+\sqrt{a}(b+c)+\sqrt{b}(a+c)+\sqrt{c}(a+b)\geq 9\sqrt{abc}$

On en déduit que :

$$\boxed{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})\geq 8\sqrt{abc}}$$

EXERCICE N°6

Soit a un nombre réel.

1/ On suppose $0<a<1$

a/ Comparons a et a^2 ; a et $\sqrt{a}$; a et $\frac{1}{a}$

- $a-a^2=a(1-a)>0$ car $a>0$ et $a<1$

$\Leftrightarrow a-a^2>0 \Leftrightarrow a>a^2$

$$a>a^2$$

- $a>a^2 \Leftrightarrow \sqrt{a}>\sqrt{a^2}$ or $\sqrt{a^2}=|a|=a$

$$\sqrt{a}>a.$$

- $0<a<1 \Rightarrow a^2<1$

$\Rightarrow a^2-1<0 \Rightarrow \frac{a^2-1}{a}<0$

$\Rightarrow a-\frac{1}{a}<0 \Rightarrow a<\frac{1}{a}$

$$a<\frac{1}{a}.$$

b/ Rangeons dans l'ordre croissant

$1, a, \sqrt{a}, a^2$ et $\frac{1}{a}$

$a^2<a<\sqrt{a}$ De plus on a :

$0<a<1 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{a}<1\\ \text{et}\\ 1<\frac{1}{a}\end{cases}$ d'où :

$$\boxed{a^2<a<\sqrt{a}<1<\frac{1}{a}}$$

2/ On suppose $a>1$

Rangeons dans l'ordre croissant : $1, a, \sqrt{a}, a^2$ et $\frac{1}{a}$.

- $a-a^2=a(1-a)<0$ car $a>1$

On a donc : $a<a^2$

- $a<a^2 \Leftrightarrow \sqrt{a}<a$.
- $a^2-1>0 \Leftrightarrow \frac{a^2-1}{a}>0 \Rightarrow a-\frac{1}{a}>0 \Rightarrow a>\frac{1}{a}$
- $a>1 \Leftrightarrow \frac{1}{a}<1<a$.

Dans l'ordre croissant on a :

$$\boxed{\frac{1}{a}<1<\sqrt{a}<a<a^2}$$

EXERCICE N°7

1/ Soient trois réels a, b et c de l'intervalle $]0;1]$

a/ Démontrons que :

$(ab-1)(ac-1)(bc-1)\leq 0$

$\begin{cases}0<a\leq 1\\0<b\leq 1\\0<c\leq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<ab\leq 1\\0<ac\leq 1\\0<bc\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ab-1\leq 0\\ac-1\leq 0\\bc-1\leq 0\end{cases}$

d'où $(ab-1)(ac-1)(bc-1)\leq 0$

$$\boxed{(ab-1)(ac-1)(bc-1)\leq 0}$$

b/ Déduisons-en que :

$a+b+c+\frac{1}{abc}\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc$

$(ab-1)(ac-1)(bc-1)\leq 0$

$\Rightarrow (a^2bc-ab-ac+1)(bc-1)\leq 0$

$\Rightarrow a^2b^2c^2-a^2bc-ab^2c+ab-abc^2+ac+bc-1\leq 0$

$\Leftrightarrow a^2b^2c^2+ab+ac+bc\leq a^2bc+ab^2c+abc^2+1$

Divisons les deux membres de l'inégalité précédente on obtient :

$abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq a+b+c+\frac{1}{abc}$

soit

(1) $\boxed{a+b+c+\frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc}$

2/ Soient les réels x, y, z et t tels que : $0 < x \leq y \leq z \leq t$.

Démontrons que :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x} \geq \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{t}{z}+\frac{x}{t}$$

a/ En utilisant les résultats de 1/

$$0 < x \leq y \leq z \leq t \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{x}{y} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{y}{z} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{z}{t} \leq 1 \end{cases}$$

Posons $a = \frac{x}{y}$ $b = \frac{y}{z}$ et $c = \frac{z}{t}$ dans la relation (1). On a:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{1}{\frac{xyz}{yzt}} \geq \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{t}{z}+\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x} \geq \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{t}{z}+\frac{x}{t}.$$

Conclusion:

$$\boxed{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x} \geq \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{t}{z}+\frac{x}{t}}$$

b/ En démontrant que:

$$(z-x)(t-y)(yt-xz) \geq 0$$

$$0 < x \leq y \leq z \leq t \Rightarrow \begin{cases} z-x \geq 0 \\ t-y \geq 0 \\ \begin{cases} 0 < x \leq y \\ 0 < z \leq t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z-x \geq 0 \\ t-y \geq 0 \\ xz \leq yt \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-x \geq 0 \\ t-y \geq 0 \\ yt-xz \geq 0 \end{cases} \quad \text{d'où}$$

(2) $\underline{(z-x)(t-y)(yt-xz) \geq 0}$

$(2) \Rightarrow (zt-yz-xt+xy)(yt-xz) \geq 0$

$\Rightarrow yzt^2 - xz^2t - y^2zt + xyz^2 - xyt^2 + x^2zt + xy^2t - x^2yz \geq 0$

$\Leftrightarrow yzt^2 + xyz^2 + x^2zt + xy^2t \geq xz^2t + y^2zt + xyt^2 + x^2yz$

En divisant les deux membres de l'inégalité précédente par $xyzt > 0$ on obtient

$$\frac{t}{x}+\frac{z}{t}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z} \geq \frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{t}{z}+\frac{x}{t}$$

Ce qui donne finalement:

$$\boxed{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x} \geq \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{t}{z}+\frac{x}{t}}$$

EXERCICE N°8

Soient x et y deux nombres réels tels que : $0 < x < y$.

On pose $a = \frac{x+y}{2}$, $g = \sqrt{xy}$; $h = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

1/ Démontrons que $x < h$ et $a < y$

$$h = \frac{2xy}{x+y}$$

• $h - x = \frac{2xy}{x+y} - x = \frac{2xy - x^2 - xy}{x+y}$

$= \frac{xy - x^2}{x+y} = \frac{x(y-x)}{x+y}$

$$0 < x < y \Rightarrow \begin{cases} y-x > 0 \\ x+y > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x(y-x)}{x+y} > 0$$

$\Rightarrow h - x > 0 \Rightarrow x < h$

• $y - a = y - \frac{x+y}{2} = \frac{2y-x-y}{2} = \frac{y-x}{2}$

$x < y \Leftrightarrow y - x > 0 \Rightarrow y - a > 0$

$\Rightarrow a < y.$

Conclusion :

$$\boxed{x < h \quad et \quad a < y.}$$

2/ Démontrons que $g < a$.

$a^2 - g^2 = \frac{(x+y)^2}{4} - xy = \frac{(x-y)^2}{4} \geq 0$.

$a^2 - g^2 > 0 \Leftrightarrow g^2 < a^2$

$\Leftrightarrow g < a$ car $\left| \begin{array}{l} g>0 \\ et \\ a>0 \end{array} \right.$.

$$\boxed{g < a}$$

3/ Démontrons que $g^2 = ah$.

$h = \frac{2xy}{x+y}$ $\quad ah = \frac{x+y}{2} \times \frac{2xy}{x+y}$

$= xy = (\sqrt{xy})^2 = g^2$

d'où $\boxed{g^2 = ah}$

Déduisons-en que $h < g$.

On sait que $g < a \Leftrightarrow gh < ah$ car $h > 0$

$\Leftrightarrow gh < g^2$

$\Leftrightarrow h < g$ car $g > 0$

d'où $\boxed{h < g}$

4/ Rangeons dans l'ordre croissant x, y, a, g et h

D'après tout ce qui précède on a :

$x < h < g < a < y$.

EXERCICE N°9

1/ x, y et z sont trois nombres réels

a/ Démontrons que $2xy \leq x^2 + y^2$ (1)

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$, $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$

d'où $2xy \leq x^2 + y^2$ (1)

b/ En utilisant (1) et deux autres inégalités du même type, démontrons que : $xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2$

Par analogie à (1) on a :

$$\begin{cases} 2xy \leq x^2 + y^2 \\ 2xz \leq x^2 + z^2 \\ 2yz \leq y^2 + z^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2xy + 2xz + 2yz \leq x^2 + y^2 + x^2 + z^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow 2(xy + xz + yz) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2)$

d'où :

$$\boxed{xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2}$$

2/ a/ Démontrons que pour tous nombres réels a et b on a :

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

b/ On suppose de plus que a et b sont positifs.

Démontrons qu'alors on a :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3 + b^3}{2}$$

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{8}$

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{a^3 + b^3}{2} = \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{8} - \frac{a^3 + b^3}{2}$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{a^3+b^3}{2} = \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-4a^3-4b^3}{8}$$
$$= \frac{-3a^3+3a^2b+3ab^2-3b^3}{8}$$
$$= \frac{3a^2(b-a)+3b^2(a-b)}{8}$$
$$= \frac{-3(a-b)(a^2-b^2)}{8}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{a^3+b^3}{2} = -\frac{3}{8}(a-b)^2(a+b) \leq 0$$

car $a \geq 0$ et $b \geq 0$

On a alors $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{a^3+b^3}{2} \leq 0$

d'où $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$

$$\boxed{\forall\ a \geq 0 \text{ et } b \geq 0,\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}}$$

EXERCICE N° 10

1/ Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle $]0;1]$

a/ Signe de $(1-a)(1-b)$

$$\begin{cases} 0 < a \leq 1 \\ 0 < b \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-a \geq 0 \\ \text{et} \\ 1-b \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1-a)(1-b) \geq 0}$$

b/ Comparons $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ et $1+\frac{1}{ab}$

$(1-a)(1-b) \geq 0 \Leftrightarrow 1-a-b+ab \geq 0$

$\Leftrightarrow a+b \leq 1+ab$

Divisons les deux nombres de l'inégalité précédente par $ab > 0$ on a :

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq 1+\frac{1}{ab}}$$

2/ a, b, c et d désignent quatre nombres réels. Démontrons que :

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

$(ac+bd)^2 = a^2c^2+b^2d^2+2abcd$

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 = b^2c^2+a^2d^2-2abcd$

$= (bc-ad)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$\boxed{\text{Quels que soient } a,b,c \text{ et } d \text{ réels} \quad (ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

3/ a, b, c et d sont des nombres réels strictement positifs tels que :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

a/ Comparons $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+d}$

a, b, c et d étant des nombres réels strictement positifs,

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow ad-bc < 0$

$$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{ab+ad-ab-bc}{b(b+d)}$$
$$= \frac{ad-bc}{b(b+d)} < 0 \text{ car}$$

$ad-bc < 0$ et $b(b+d) > 0$

Ce qui nous permet d'écrire :

$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} < 0$ soit $\boxed{\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}}$

b/ Comparons $\frac{c}{d}$ et $\frac{a+c}{b+d}$

$$\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{bc+cd-ad-cd}{d(b+d)}$$
$$=\frac{bc-ad}{d(b+d)}>0 \text{ car}$$

$ad<bc$ et $d(b+d)>0$

Ceci nous permet d'écrire :

$\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}>0$ soit $\boxed{\frac{c}{d}>\frac{a+c}{b+d}}$

EXERCICE N°11

1/ Dans chacun des cas suivants, déterminons les encadremens de :

$x+y$; $x-y$; x^2 ; $\frac{1}{x}$; $\frac{x}{y}$.

a/ $2,1<x<2,2$ et $3,3<y<3,4$

$$\begin{cases}2,1<x<2,2\\3,3<y<3,4\end{cases} \Rightarrow 5,4<x+y<5,6$$

$$\Rightarrow 2,1^2<x^2<2,2^2 \Rightarrow 4,41<x^2<4,84$$

$$2,1<x<2,2 \Rightarrow \frac{1}{2,2}<\frac{1}{x}<\frac{1}{2,1}$$
$$\Rightarrow 0,45<\frac{1}{x}<0,47$$

$$\begin{cases}2,1<x<2,2\\3,3<y<3,4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2,1<x<2,2\\-3,4<-y<-3,3\end{cases}$$
$$\Rightarrow -1,3<x-y<-1,1$$

$$\begin{cases}2,1<x<2,2\\3,3<y<3,4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2,1<x<2,2\\\frac{1}{3,4}<\frac{1}{y}<\frac{1}{3,3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2,1}{3,4}<\frac{x}{y}<\frac{2,2}{3,3} \Rightarrow 0,61<\frac{x}{y}<0,66$$

En recapitulatif on a:

$5,4<x+y<5,6$	$-1,3<x-y<-1,1$.	
$4,41<x^2<4,84$	$0,45<\frac{1}{x}<0,47$	$0,61<\frac{x}{y}<0,66$

b/ $-1,5<x<-1,4$ et $5<y<5,1$

$$\begin{cases}-1,5<x<-1,4\\5<y<5,1\end{cases} \Rightarrow 3,5<x+y<3,7$$

$$\begin{cases}-1,5<x<-1,4\\-5,1<-y<-5\end{cases} \Rightarrow -6,6<x-y<-6,4$$

$$-1,5<x<-1,4 \Rightarrow (-1,4)^2<x^2<(-1,5)^2$$
$$\Rightarrow 1,96<x^2<2,25$$

$$-1,5<x<-1,4 \Rightarrow \frac{1}{-1,4}<\frac{1}{x}<\frac{1}{-1,5}$$
$$\Rightarrow -0,71<\frac{1}{x}<-0,66$$

$$\begin{cases}-1,5<x<-1,4\\5<y<5,1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1,4<-x<1,5\\\frac{1}{5,1}<\frac{1}{y}<\frac{1}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1,4}{5,1}<\frac{-x}{y}<\frac{1,5}{5} \Rightarrow -\frac{1,5}{5}<\frac{x}{y}<-\frac{1,4}{5,1}$$
$$\Rightarrow -0,3<\frac{x}{y}<-0,2$$

En recapitulatif on a:

$3,5<x+y<3,7$	$-6,6<x-y<-6,4$	
$1,96<x^2<2,25$	$-0,71<\frac{1}{x}<-0,66$	$-0,3<\frac{x}{y}<-$

c/ $-4,1<x<-4$ et $-0,9<y<-0,8$

$$\begin{cases}-4,1<x<-4\\-0,9<y<-0,8\end{cases} \Rightarrow -5<x+y<-4,8$$

$$\begin{cases}-4,1<x<-4\\-0,9<y<-0,8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4,1<x<-4\\0,8<-y<0,9\end{cases} \Rightarrow -3,3<x-y<$$

$$-4,1<x<-4 \Rightarrow (-4)^2<x^2<(-4,1)^2$$
$$\Rightarrow 16<x^2<16,81$$

$$-4,1<x<-4 \Rightarrow \frac{1}{-4}<\frac{1}{x}<\frac{1}{-4,1}$$

$$-0,25<\frac{1}{x}<-0,24$$

$$\begin{cases} -4{,}1 < x < -4 \\ -0{,}9 < y < -0{,}8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 < -x < 4{,}1 \\ -\frac{1}{0{,}8} < \frac{1}{y} < -\frac{1}{0{,}9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 < -x < 4{,}1 \\ \frac{1}{0{,}9} < -\frac{1}{y} < \frac{1}{0{,}8} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{0{,}9} < \frac{x}{y} < \frac{4{,}1}{0{,}8}$$

$$\Rightarrow 4{,}44 < \frac{x}{y} < 5{,}12$$

En recapitulatif on a:

$-5 < x+y < -4{,}8$	$-3{,}3 < x-y < -3{,}1$	
$16 < x^2 < 16{,}8$	$-0{,}25 < \frac{1}{x} < -0{,}24$	$4{,}44 < \frac{1}{y} < 5{,}12$

2./ <u>Déterminons l'encadrement</u>

de $K = \frac{x+y}{xy}$ lorsque:

<u>$2 < x < 3$ et $-9 < y < -8$</u>

$$K = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\begin{cases} 2 < x < 3 \\ -9 < y < -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} < \frac{1}{y} < -\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{8} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2} - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{24} < K < \frac{7}{18} \Rightarrow 0{,}208 < K < 0{,}388$$

On a donc

$$\boxed{\frac{5}{24} < K < \frac{7}{18} \text{ ou } 0{,}208 < K < 0{,}388}$$

Autre methode.

$$\begin{cases} 2 < x < 3 \\ -9 < y < -8 \end{cases} \Rightarrow -7 < x+y < -5$$

$$\begin{cases} 2 < x < 3 \\ -9 < y < -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ 8 < -y < 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 16 < -xy < 27$$

$$\Rightarrow -27 < xy < -16$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{16} < \frac{1}{xy} < -\frac{1}{27}$$

$$\begin{cases} -7 < x+y < -5 \\ -\frac{1}{16} < \frac{1}{xy} < -\frac{1}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 < -(x+y) < 7 \\ \frac{1}{27} < -\frac{1}{xy} < \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{27} < \frac{x+y}{xy} < \frac{7}{16}$$

On a donc

$$\boxed{\frac{5}{27} < K < \frac{7}{16} \text{ ou } 0{,}185 < K < 0{,}437}$$

3./ Soient a et b deux nombres réels vérifiant : $b < a < b+1$ et $-5 < b < -3$

<u>Encadrons $a+b$ et $a-2b$</u>

cherchons d'abord l'encadrement de a

$$\begin{cases} b < a < b+1 \\ -5 < b < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a-b < 1 \\ -5 < b < -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -5 < a < -2$$

$$\begin{cases} -5 < b < -3 \\ -5 < a < -2 \end{cases} \Rightarrow -10 < a+b < -5$$

$$\begin{cases} -5 < a < -2 \\ -5 < b < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 < a < -2 \\ 6 < -2b < 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 < a-2b < 8$$

On a donc :

$-10 < a+b < -5$	$1 < a-2b < 8$

EXERCICE N°12

On donne x et y des réels tels que

$-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y < 1$

1./ <u>Démontrons que: $-1 \leq xy \leq 1$</u>

$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |x| \leq 1 \\ 0 \leq |y| \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 0 \leq |x| \cdot |y| \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq |xy| \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq xy \leq 1$

$$\boxed{-1 \leq xy \leq 1}$$

2/ Developpons :

$(1-x)(1-y)$ et $(1+x)(1+y)$.

$(1-x)(1-y) = 1-x-y+xy$

$(1+x)(1+y) = 1+x+y+xy$.

$$\boxed{\begin{array}{l} (1-x)(1-y) = 1-x-y+xy \\ (1+x)(1+y) = 1+x+y+xy \end{array}}$$

3/ Démontrons que: $|x+y| \leq 1+xy$.

$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq -x \leq 1 \\ -1 \leq -y \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 1-x \leq 2 \\ 0 \leq 1-y \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow (1-x)(1-y) \geq 0$

$\Rightarrow 1-x-y+xy \geq 0 \Rightarrow x+y \leq 1+xy \ (1)$

$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 1+x \leq 2 \\ 0 \leq 1+y \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow (1+x)(1+y) \geq 0$

$\Rightarrow 1+x+y+xy \geq 0 \Rightarrow -1-xy \leq x+y \ (2)$

(1) et (2) $\Rightarrow -1-xy \leq x+y \leq 1+xy \ (3)$

De plus :

$-1 \leq xy \Rightarrow 1+xy \geq 0 \ (4)$

$\begin{cases} -1-xy \leq x+y \leq 1+xy \\ 1+xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x+y| \leq 1+xy$.

$$\boxed{|x+y| \leq 1+xy}$$

EXERCICE N°13

1/ Démontrons que pour $a > b \geq 0$

a/ $\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}$

$\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a-b}.(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$= \dfrac{\sqrt{a-b}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{(a-b)\sqrt{a-b}}$

$= \dfrac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(a-b)\sqrt{a-b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}$

$$\boxed{\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}}$$

b/ $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2 = 2(a+b)$

Posons $x = \sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}$ $\quad y = \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$x^2 = a + \sqrt{a^2-b^2}$ $\quad y^2 = a - \sqrt{a^2-b^2}$

$xy = \sqrt{(a+\sqrt{a^2-b^2})(a-\sqrt{a^2-b^2})}$

$= \sqrt{a^2-(a^2-b^2)} = \sqrt{b^2} = b$ car $b \geq 0$

$(x+y)^2 = a+\sqrt{a^2-b^2} + 2b + a - \sqrt{a^2-b^2}$

$= 2(a+b)$

$$\boxed{\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2 = 2(a+b)}$$

2/ Soit $x = \sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{8}$ et

$y = \sqrt{162} - \sqrt{72} + \sqrt{18}$

Rangeons par ordre croissant

$\frac{x+y}{2}$; $\sqrt{xy}$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

$x = \sqrt{98}+\sqrt{32}-\sqrt{8} = 7\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$x = 9\sqrt{2}$

$y = \sqrt{162}-\sqrt{72}+\sqrt{18} = 9\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

$y = 6\sqrt{2}$

$\frac{x+y}{2} = \frac{15}{2}\sqrt{2}$; $\sqrt{xy} = 2\sqrt{27}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{5\sqrt{2}}{36}$

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{225}{2}$; $xy = 108$

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{25}{648}$

$\frac{25}{648} < 108 < \frac{225}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2 < \left(\sqrt{xy}\right)^2 < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{x}+\frac{1}{y} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}}$$

EXERCICE N°14

1-/ Démontrons que pour tout nombre naturel non nul n : $1-\frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1-\frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1-\frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}}$$

2-/ Déduisons-en une expression plus simple du produit :

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{20^2}\right)$

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{20^2}\right) =$

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\cdots\frac{19}{20}\times\frac{21}{20} = \frac{21}{40}$

$$\boxed{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{20^2}\right) = \frac{21}{40}}$$

3-/ n étant un nombre entier naturel, écrivons sans radical au dénominateur l'expression $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

4-/ Déduisons-en une expression plus simple de la somme :

$S = \frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

$S = 1+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}$

$= \sqrt{100} = 10$

$$\boxed{\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = 10}$$

EXERCICE N°15

1-/ Soit n un nombre entier naturel $n \geq 2$. On pose : $S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

a-/ Calculons $S-\frac{1}{2}S$

$S-\frac{1}{2}S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\cdots-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}$

$= 1-\frac{1}{2^{n+1}}$

$$\boxed{S-\frac{1}{2}S = 1-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

b·/ Déduisons-en la valeur de S en fonction de n

$S - \frac{1}{2}S = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\boxed{S = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}$$

Déduisons-en l'inégalité $S < 2$

Quel que soit n entier naturel ≥ 2

$-\frac{1}{2^{n+1}} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1$

$\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 2$

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad S < 2}$$

2·/ Soit a_1, a_2, a_3 et a_4 des nombres réels positifs. A, Q, R et S sont les nombres réels positifs définis par :

$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$

$Q^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4}, \quad Q \geq 0$

$R = (a_1 - A) + (a_2 - A) + (a_3 - A) + (a_4 - A)$

$S = (a_1 - A)^2 + (a_2 - A)^2 + (a_3 - A)^2 + (a_4 - A)^2$

a·/ Démontrons que la valeur de R est indépendante de a_1, a_2, a_3 et a_4

$R = (a_1 - A) + (a_2 - A) + (a_3 - A) + (a_4 - A)$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - 4A = 4A - 4A = 0$

$$\boxed{R = 0}$$

b/ Exprimons S en fonction de A et Q

$S = (a_1 - A)^2 + (a_2 - A)^2 + (a_3 - A)^2 + (a_4 - A)^2$

$S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2A(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 4A^2$

$= 4Q^2 - 2A.4A + 4A^2$

$= 4Q^2 - 8A^2 + 4A^2 = 4Q^2 - 4A^2$

$$\boxed{S = 4(Q^2 - A^2)}$$

. Déduisons-en une inégalité entre A et Q.

$S \geq 0 \Leftrightarrow 4(Q^2 - A^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow Q^2 - A^2 \geq 0 \Leftrightarrow Q^2 \geq A^2$

$\Leftrightarrow Q \geq A$ car Q et A sont positifs

$$\boxed{Q \geq A}$$

EXERCICE N°16

1·/ Démontrons que pour tous nombres réels a et b : $|a+b| \leq |a| + |b|$

$|a+b|^2 = |(a+b)^2| = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2$

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \; x \leq |x|$

donc : $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \leq |ab|$

$\Leftrightarrow 2ab \leq 2|ab| \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2$

$\Leftrightarrow |a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$\Leftrightarrow |a+b| \leq |a| + |b|$

Conclusion :

$$\boxed{\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2, \quad |a+b| \leq |a| + |b|}$$

Condition dans laquelle on a : $|a+b| = |a| + |b|$

$|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow |a+b|^2 = (|a| + |b|)^2$

$a^2+2ab+b^2 = a^2+2|ab|+b^2$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 = a^2+2|ab|+b^2$

$\Leftrightarrow ab = |ab| \Leftrightarrow ab \geq 0$

On a :

$$\boxed{|a+b| = |a|+|b| \text{ ssi } ab \geq 0 \text{ c'est à dire } a \text{ et } b \text{ ont même signe}}$$

3-/ <u>Utilisons l'égalité $a = a+b-b$ et la question 1-/ pour montrer que $|a|-|b| \leq |a+b|$</u>

$a = a+b-b \Leftrightarrow |a| = |a+b-b|$

$\Leftrightarrow |a| = |(a+b)+(-b)| \leq |a+b|+|-b|$

or $|-b| = |b|$ On a donc

$|a| \leq |a+b|+|b|$ d'où :

$|a|-|b| \leq |a+b|$

$$\boxed{\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2,\ |a|-|b| \leq |a+b|}$$

4-/ <u>Utilisons le résultat de la question 2-/ pour resoudre les équations suivantes</u>

a-/ $|x^2-3x+1| = x^2+|-3x+1|$ (E).

D'après 2-/ (E) $\Leftrightarrow x^2(-3x+1) \geq 0$

Posons $-3x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

<u>Tableau de signe de $x^2(-3x+1)$</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, $x^2(-3x+1)$ a donc le signe de $-3x+1$.

x	$-\infty$	0		$1/3$	$+\infty$
$x^2(-3x+1)$	$+$	0	$+$	0	$-$

On déduit l'ensemble solution

$$\boxed{S =]-\infty; \tfrac{1}{3}]}$$

b-/ $|x^2+2x-4| = |x^2-4|+2|x|$ (E')

$2|x| = |2x|$

D'après 2-/ (E') $\Leftrightarrow 2x(x^2-4) \geq 0$.

Posons $2x(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow 2x(x+2)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$ ou $x = 2$

signe de $2x(x^2-4)$

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x(x^2-4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

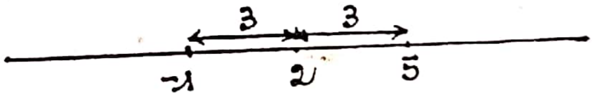
On en déduit l'ensemble solution:

$$\boxed{S = [-2;0] \cup [2;+\infty[}$$

EXERCICE N°17

1-/ <u>Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$</u>

a-/ $|x-2| = 3 \Leftrightarrow d(2;x) = 3$.



$$\boxed{S = \{-1;5\}}$$

b-/ $|3-x| = -5$ impossible car

$\forall a \in \mathbb{R}$, $|a| \geq 0$

$$\boxed{S = \emptyset}$$

c-/ $|x+1| = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$$\boxed{S = \{-1\}}$$

d-/ $|2x-6| = 4 \Leftrightarrow 2|x-3| = 4 \Leftrightarrow |x-3| = 2$

$\Leftrightarrow d(3;x) = 2$

$$S=\{1;5\}$$

2./ Résolution d'inéquations dans $\mathbb{R}$

a./ $|x-1|<2 \Leftrightarrow d(1;x)<2$

$$S=]-1;3[$$

b./ $|1-3x|\geq 6 \Leftrightarrow 3|x-\frac{1}{3}|\geq 6$

$\Leftrightarrow |x-\frac{1}{3}|\geq 2$

$\Leftrightarrow d(\frac{1}{3};x)\geq 2$

$$S=]-\infty;-\frac{5}{3}]\cup[\frac{7}{3};+\infty[$$

c./ $|4x-2|\leq 4 \Leftrightarrow 4|x-\frac{1}{2}|\leq 4$

$\Leftrightarrow |x-\frac{1}{2}|\leq 1$

$\Leftrightarrow d(\frac{1}{2};x)\leq 1$

$$S=[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}]$$

d./ $|x+5|>0$ Vrai pour tout $x\neq -5$

$$S=\mathbb{R}-\{-5\}$$

e./ $|x-3|\leq 0 \Rightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

$$S=\{3\}$$

f./ $|x-6|<0$ impossible car:

$\forall a\in\mathbb{R}, |a|\geq 0$

$$S=\emptyset$$

g./ $|x+1|\geq 0$ Vraie pour tout x réel

$$S=\mathbb{R}$$

h./ $1\leq|x-1|\leq 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|\geq 1 \Leftrightarrow d(1;x)\geq 1 \\ |x-1|\leq 3 \Leftrightarrow d(1;x)\leq 3 \end{cases}$$

$$S=[-2;0]\cup[2;4]$$

3./ Discussion et résolution

a./ $|-3x+2|=m$ (1)

$\Leftrightarrow 3|x-\frac{2}{3}|=m \Leftrightarrow |x-\frac{2}{3}|=\frac{m}{3}$.

1er cas $m<0$

(1) est impossible, $S=\emptyset$

2e cas $m=0$

(1) $\Leftrightarrow -3x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

$$S=\{\frac{2}{3}\}$$

3e cas $m>0$

(1) $\Leftrightarrow d(\frac{2}{3};x)=\frac{m}{3}$.

$$S=\{\frac{2-m}{3};\frac{m+2}{3}\}$$

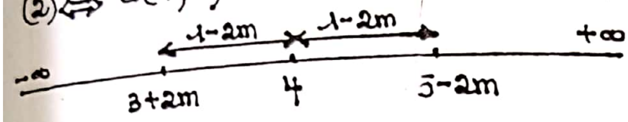
b./ $|x-4|>1-2m$ (2)

Posons $1-2m=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

m	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$1-2m$	$+$	0	$-$

1^{er} cas $m<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-2m>0$

(2) $\Leftrightarrow d(4;x) > 1-2m$



$$\boxed{S =]-\infty; 2m+3[\cup]5-2m; +\infty[}$$

2^e cas $m=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-2m=0$

(2) $\Leftrightarrow |x-4|>0 \Leftrightarrow x \neq 4$

$$\boxed{S=\mathbb{R}-\{4\}}$$

3^e cas $m>\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-2m<0$

(2) est toujours vraie pour tout x réel

$$\boxed{S=\mathbb{R}}$$

4·/ a·/ Représentons graphiquement

$I=\left\{x\in\mathbb{R}, \left|\frac{1}{2}x-1\right| \leq 3\right\}$

$\left|\frac{1}{2}x-1\right| \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-2| \leq 3$

$\Leftrightarrow |x-2| \leq 6 \Leftrightarrow d(2;x) \leq 6$

b·/ Soit $x\in I$, encadrons $d(-5;x)$

$x \in I \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 8$

$\Leftrightarrow -4+5 \leq x+5 \leq 8+5$

$\Leftrightarrow 1 \leq x+5 \leq 13$

d'où $1 \leq |x+5| \leq 13$

On en déduit alors que :

si $x\in I$, $1 \leq |x+5| \leq 13$.

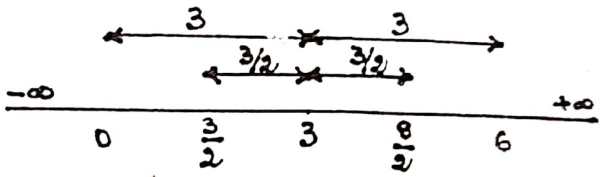
EXERCICE N° 18

1·/ Résolution graphique d'équat°s et d'inéquations dans $\mathbb{R}$

a·/ $3 \leq |-2x+6| \leq 6$

$\Leftrightarrow 3 \leq 2|x-3| \leq 6 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq |x-3| \leq 3$

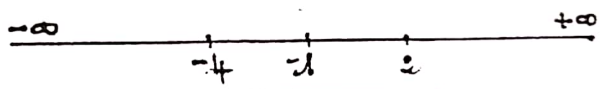
$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq d(3;x) \leq 3$



$$\boxed{S=\left[0;\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2};6\right]}$$

b·/ $|x-2| > |x+4|$

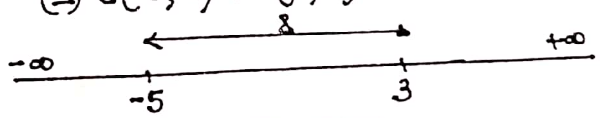
$\Leftrightarrow d(2;x) > d(-4;x)$



$$\boxed{S=]-\infty;-1[}$$

c·/ $|x+5|+|x-3|=8$

$\Leftrightarrow d(-5;x)+d(3;x)=8$



$$\boxed{S=[-5;3]}$$

d·/ $|2x+6|+|4-2x|=3$

$\Leftrightarrow 2|x+3|+2|x-2|=3$

$\Leftrightarrow |x+3|+|x-2|=\frac{3}{2}$

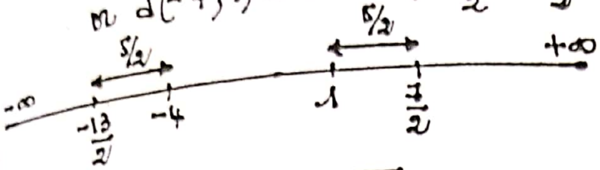
$\Leftrightarrow d(-3;x)+d(2;x)=\frac{3}{2}$ or $d(-3;2)=5>\frac{3}{2}$

$$\boxed{S=\emptyset}$$

e/ $|x-1|+|x+4|=10$

$\iff d(1;x)+d(-4;x)=10$

or $d(-4;1)=5<10$; $\frac{10-5}{2}=\frac{5}{2}$



$$\boxed{S=\left\{-\frac{13}{2};\frac{7}{2}\right\}}$$

f/ $|x+a|+|x-a|=2a$, $a\in\mathbb{R}$ (1)

1er cas $a<0$ (1) est impossible.

$$\boxed{S=\emptyset}$$

2e cas $a=0$

(1) $\iff |x|+|x|=0 \iff 2|x|=0 \iff x=0$

$$\boxed{S=\{0\}}$$

3e cas $a>0$

(1) $\iff d(-a;x)+d(a;x)=2a$

or $d(-a;a)=|2a|=2a$

d'où $\boxed{S=[-a;a]}$

g/ $|x+a|+|x-a|=2a+1$, $a\in\mathbb{R}$ (2)

$2a+1=0 \iff a=-\frac{1}{2}$

a	$-\infty$ $-1/2$ $+\infty$
2a+1	$-$ 0 $+$

1er cas $a<-\frac{1}{2}$

(2) $\iff |x+a|+|x-a|=2a+1<0$ impo

$$\boxed{S=\emptyset}$$

2e cas $a=-\frac{1}{2}$

(2) $\iff |x-\frac{1}{2}|+|x+\frac{1}{2}|=0$ impossible

$$\boxed{S=\emptyset}$$

3e cas $a>-\frac{1}{2}$

(2) $\iff d(-a;x)+d(a;x)=2a+1$

$x=-\frac{2a+1}{2}$ ou $x=\frac{2a+1}{2}$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{2a+1}{2};\frac{2a+1}{2}\right\}}$$

2/ Répondons par vrai ou faux aux affirmations suivantes

a/ si $|x|=|y|$ alors $x=y$ Faux

$|-2|=|2|$ mais $-2\neq 2$

b/ si $x^2=y^2$ alors $|x|=|y|$ Vraie

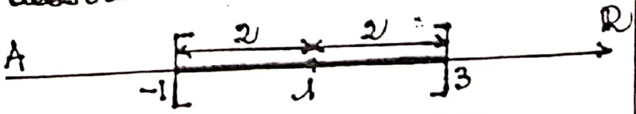
c/ si $|x|\geq|y|$ alors $x\geq y$ Faux

$|-5|>|2|$ mais $-5<2$.

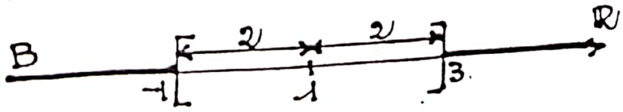
d/ si $x^2\leq y^2$ alors $\sqrt{x}\leq\sqrt{y}$ Vraie

EXERCICE N°19

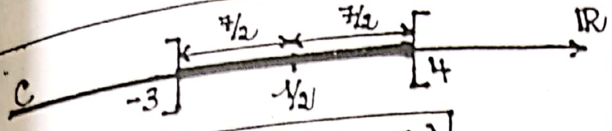
Caractérisons par une inégalité du type $|x-a|\leq r$; $|x-a|\geq r$, $|x-a|<r$ ou $|x-a|>r$ les nombres réels x appartenant aux ensembles A, B, C et D représentés géométriquement ci dessous



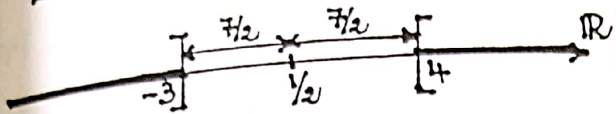
$$\boxed{A=\{x\in\mathbb{R}/\ |x-1|\leq 2\}}$$



$$\boxed{B=\{x\in\mathbb{R}/\ |x-1|>2\}}$$



$$\boxed{C = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{7}{2} \right\}}$$



$$\boxed{D = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| x - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{7}{2} \right\}}$$

EXERCICE N°20

1/ Résolution dans $\mathbb{R}$ d'équations

a/ $E(x) = 2 \iff 2 \leq x < 3$

$$\boxed{S = [2 ; 3[}$$

b/ $2E(x) - 1 = 0 \iff E(x) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \emptyset}$$

c/ $|E(x)| = 3 \Rightarrow E(x) = -3$ ou $E(x) = 3$

$E(x) = -3 \iff -3 \leq x < -2$

$E(x) = 3 \iff 3 \leq x < 4$

$$\boxed{S = [-3 ; -2[\cup [3 ; 4[}$$

d/ $E(|x|) = 1 \iff 1 \leq |x| < 2$

$\Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 1 \ (1) \\ \text{et} \\ |x| < 2 \ (2) \end{cases}$

(1) $\iff x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[= S_1$

(2) $\iff x \in]-2 ; 2[= S_2$

$S = S_1 \cap S_2$

$$\boxed{S =]-2 ; -1] \cup [1 ; 2[}$$

e/ $E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \mathbb{Z}}$$

f/ $|E(x)| = x \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ E(x) = x \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{et} \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\boxed{S = \mathbb{Z}^+}$$

g/ $E\left(\sqrt{|x|} - \frac{1}{3}\right) = 1 \iff 1 \leq \sqrt{|x|} - \frac{1}{3} < 2$

$\iff \frac{4}{3} \leq \sqrt{|x|} < \frac{7}{3} \iff \frac{16}{9} \leq |x| < \frac{49}{9}$

$\iff \begin{cases} |x| \geq \frac{16}{9} \ (1) \\ \text{et} \\ |x| < \frac{49}{9} \ (2) \end{cases}$

(1) $\iff x \in \left]-\infty ; -\frac{16}{9}\right] \cup \left[\frac{16}{9} ; +\infty\right[= S_1$

(2) $\iff x \in \left]-\frac{49}{9} ; \frac{49}{9}\right[= S_2$

$S = S_1 \cap S_2$

$$\boxed{S = \left]-\frac{49}{9} ; -\frac{16}{9}\right] \cup \left[\frac{16}{9} ; \frac{49}{9}\right[}$$

h/ $|E(x) - 5| = 6 \iff \begin{cases} E(x) - 5 = -6 \ (1) \\ \text{ou} \\ E(x) - 5 = 6 \ (2) \end{cases}$

(1) $\iff E(x) = -1 \iff -1 \leq x < 0$

(2) $\iff E(x) = 11 \iff 11 \leq x < 12$

$$\boxed{S = [-1 ; 0[\cup [11 ; 12[}$$

2/ Résolution dans $\mathbb{R}$ d'inéquations

a/ $E(x) \leq x$ (1) $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$ car d'après la définition de la partie entière on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x < E(x) + 1$

$$\boxed{S = \mathbb{R}}$$

b./ $E(x) \geq x \Rightarrow \begin{cases} E(x) > x \text{ impossible} \\ \text{ou} \\ E(x) = x \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\boxed{S = \mathbb{Z}}$$

c./ $E(x) < x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \mathbb{R} - \mathbb{Z}}$$

d./ $E(x) > x$ impossible.

$$\boxed{S = \emptyset}$$

e./ $0 < E(x) < 2 \Leftrightarrow E(x) = 1$ car

$]0;2[\cap \mathbb{Z} = \{1\}$

$\Leftrightarrow 1 \leq x < 2$

$$\boxed{S = [1; 2[}$$

f./ $|E(x)| < 2 \Leftrightarrow -2 < E(x) < 2$ (1)

$]-2;2[\cap \mathbb{Z} = \{-1; 0; 1\}$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) = -1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0 \\ \text{ou} \\ E(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1 \\ \text{ou} \\ E(x) = 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2 \end{cases}$

$S = [-1; 0[\cup [0; 1[\cup [1; 2[= [-1; 2[$

$$\boxed{S = [-1; 2[}$$

g./ $|E(x)| \geq 1 \Leftrightarrow E(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \notin [0;1[$

$$\boxed{S = \mathbb{R} - [0;1[=]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[}$$

h./ $|E(x) - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < E(x) - 1 < 1$

$\Leftrightarrow 0 < E(x) < 2 \Leftrightarrow E(x) = 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x < 2$

$$\boxed{S = [1; 2[}$$

3./ Soit la fonction f définie par :

$f(x) = (x-2)(x+1)$

a./ Développons $f(x)$

$f(x) = (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$

$$\boxed{f(x) = x^2 - x - 2}$$

b./ Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - x - 2 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$

$$\boxed{S = \{-1; 2\}}$$

c./ Déduisons-en les solutions de l'équation : $[E(x)]^2 - E(x) - 2 = 0$ (1)

Posons $E(x) = t$

(1) $\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$. t est solution de l'équation précédente. On a donc :

$t_1 = -1 \qquad t_2 = 2$

$E(x) = t_1 \Leftrightarrow E(x) = -1 \Leftrightarrow x \in [-1; 0[$

$E(x) = t_2 \Leftrightarrow E(x) = 2 \Leftrightarrow x \in [2; 3[$

$$\boxed{S = [-1; 0[\cup [2; 3[}$$

EXERCICE N°21

1./ Soit la fonction g définie sur $[-2; 2]$ par : $g(x) = E(x) - 2|x|$

a./ Montrons que g est une fonction affine par intervalles

$\forall x \in [-2; -1[$, $E(x) = -2$ et $|x| = -x$

$g(x) = 2x-2$

$\forall x \in [-1;0[$, $E(x) = -1$, $|x| = -x$

$g(x) = -1-2(-x) = 2x-1$

$\forall x \in [0;1[$, $E(x) = 0$, $|x| = x$

$g(x) = 0-2x = -2x$

$\forall x \in [1;2[$, $E(x) = 1$, $|x| = x$

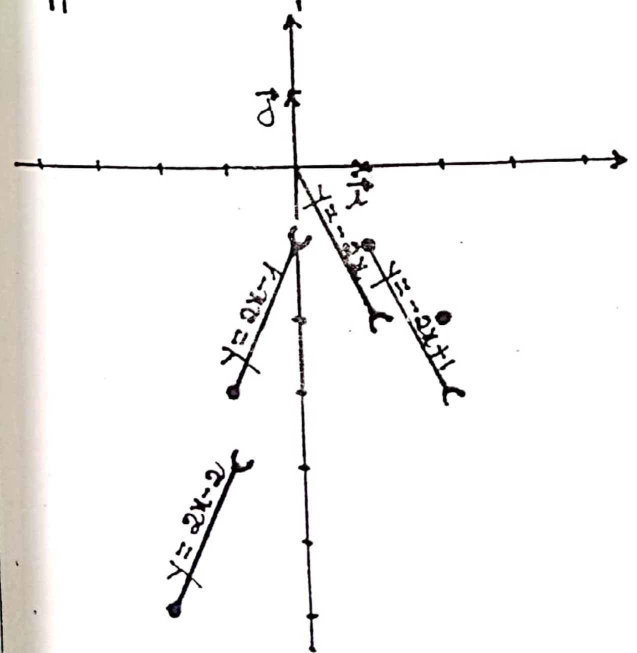
$g(x) = 1-2x$

$g(2) = E(2) - 2|2| = 2-4 = -2$

En résumé on a:

$$\begin{cases} g(x) = 2x-2, \text{ si } x \in [-2;-1[\\ g(x) = 2x-1, \text{ si } x \in [-1;0[\\ g(x) = -2x, \text{ si } x \in [0;1[\\ g(x) = -2x+1, \text{ si } x \in [1;2[\\ g(2) = -2 \end{cases}$$

b/ <u>Représentons g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$</u>



A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER
ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

2/ Soit f la fonction définie sur $[-4;4]$ par $f(x) = |x| - E(\frac{x}{2})$.

a/ <u>Montrons que f est une fonction affine par intervalles</u>

$\forall x \in [-4;-2[$ on a:

$$\begin{cases} |x| = -x \\ -2 \leq \frac{x}{2} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ E(\frac{x}{2}) = -2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow f(x) = -x-(-2) = -x+2$

$\forall x \in [-2;0[$ on a: $-1 \leq \frac{x}{2} < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ E(\frac{x}{2}) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = -x-(-1) = -x+1$$

$\forall x \in [0;2[$ on a: $|x| = x$ et $0 \leq \frac{x}{2} < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = x \\ E(\frac{x}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x$$

$\forall x \in [2;4[$ on a: $|x| = x$ et $1 \leq \frac{x}{2} < 2$

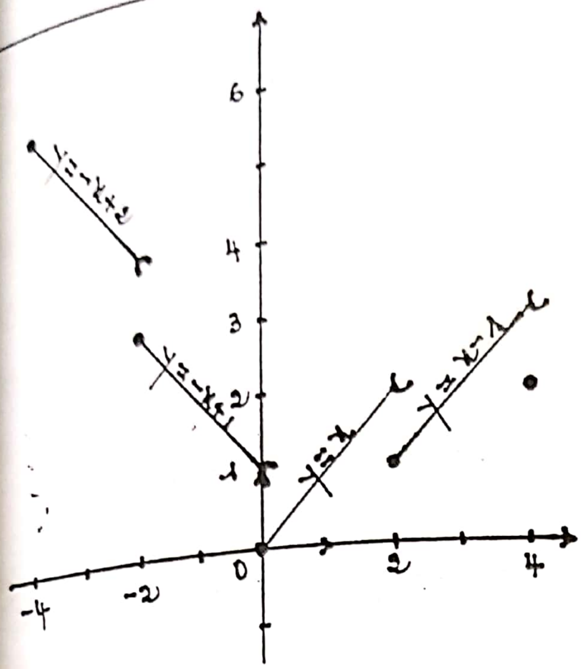
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = x \\ E(\frac{x}{2}) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x-1$$

$f(4) = |4| - E(2) = 4-2 = 2$

En résumé on a:

$$\begin{cases} f(x) = -x+2 \text{ si } x \in [-4;-2[\\ f(x) = -x+1 \text{ si } x \in [-2;0[\\ f(x) = x \text{ si } x \in [0;2[\\ f(x) = x-1 \text{ si } x \in [2;4[\\ f(4) = 2 \end{cases}$$

b/ <u>Représentation de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.</u>



EXERCICE N°22

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne :

$$f : [-3;3] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{E(x)}$$ où $E(x)$

désigne la partie entière de x.

1/ Ensemble de définition de f.

$\mathcal{D}f = \{x \in [-3;3] / E(x) \neq 0\}$

Posons $E(x) = 0 \Leftrightarrow x \in [0;1[$

$$\boxed{\mathcal{D}f = [-3;3] - [0;1[= [-3;0[\cup [1;3]}$$

2/ Construisons soigneusement la représentation graphique de f.

Montrons d'abord que f est une fonct° affine par intervalles.

$\forall x \in [-3;-2[$, $E(x) = -3 \Rightarrow f(x) = -\frac{x}{3}$

$\forall x \in [-2;-1[$, $E(x) = -2 \Rightarrow f(x) = -\frac{x}{2}$

$\forall x \in [-1;0[$, $E(x) = -1 \Rightarrow f(x) = -x$

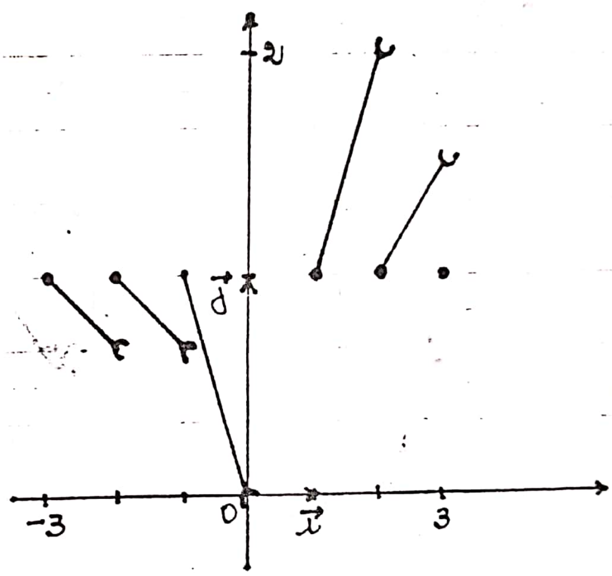
$\forall x \in [1;2[$, $E(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$

$\forall x \in [2;3[$, $E(x) = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2}$

$f(3) = \frac{3}{E(3)} = \frac{3}{3} = 1$

En résumé on a :

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = -\frac{x}{3} & \text{si } x \in [-3;-2[\\ f(x) = -\frac{x}{2} & \text{si } x \in [-2;-1[\\ f(x) = -x & \text{si } x \in [-1;0[\\ f(x) = x & \text{si } x \in [1;2[\\ f(x) = \frac{x}{2} & \text{si } x \in [2;3[\\ f(3) = 1 \end{cases}}$$



3/ Déterminons l'ensemble des antécédents de 1 par f

Cet ensemble est l'ensemble solution de l'équation : $x \in \mathcal{D}f$, $f(x) = 1$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}f \\ E(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}f \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$S = \mathcal{D}f \cap \mathbb{Z} = \{-3;-2;-1;1;2;3\}$

$$\boxed{S = \{-3;-2;-1;1;2;3\}}$$

EXERCICE N°23

1/ Déterminons l'ensemble de définition des fonctions suivantes sous forme d'intervalle ou la reunion d'intervalles.

a/ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{E(x)-x}$

$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R} / E(x) - x \neq 0\}$

Posons $E(x) - x = 0 \Leftrightarrow E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}}$$

b/ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{|E(x)|-x}$

$\mathcal{D}g = \{x \in \mathbb{R} / |E(x)| - x \neq 0\}$

Posons $|E(x)| - x = 0 \Leftrightarrow |E(x)| = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \text{et} \\ E(x) = x \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\boxed{\mathcal{D}g = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^+ = \mathbb{R} - \mathbb{N}}$$

c/ $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{3}{|x+1| - |3x-2|}$

$\mathcal{D}h = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| - |3x-2| \neq 0\}$

Posons $|x+1| - |3x-2| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3x-2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ x+1 = -3x+2 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{D}h &= \mathbb{R} - \left\{\tfrac{1}{4}; \tfrac{3}{2}\right\} \\ &=]-\infty; \tfrac{1}{4}[\cup]\tfrac{1}{4}; \tfrac{3}{2}[\cup]\tfrac{3}{2}; +\infty[\end{aligned}}$$

d/ $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{2E(x)-1}$

$\mathcal{D}k = \{x \in \mathbb{R} / 2E(x) - 1 \neq 0\}$

Posons $2E(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow E(x) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

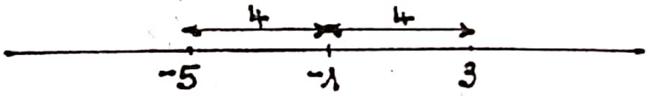
$$\boxed{\mathcal{D}k = \mathbb{R}}$$

e/ $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto |x+1| - 4$

$\mathcal{D}p = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| - 4 \geqslant 0\}$

$|x+1| - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow |x+1| \geqslant 4$

$\Leftrightarrow d(-1; x) \geqslant 4$



$$\boxed{\mathcal{D}p =]-\infty; -5] \cup [3; +\infty[}$$

f/ $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{6-2x}}{2x\sqrt{5+x}}$

$\mathcal{D}q = \{x \in \mathbb{R} / 6 - 2x \geqslant 0,\ x \neq 0 \text{ et } 5 + x > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3,\ x \neq 0 \text{ et } x > -5\}$

$$\boxed{\mathcal{D}q =]-5; 0[\cup]0; 3]}$$

g/ $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto \dfrac{1-x}{x+3}$

$\mathcal{D}v = \left\{x \in \mathbb{R} / x + 3 \neq 0 \text{ et } \dfrac{1-x}{x+3} \geqslant 0\right\}$

Posons $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$
$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x		-3		1	
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{1-x}{x+3}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

4/ (1): $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^-$

$x \longmapsto \dfrac{x-4}{2-x}$

$$D_u = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ / \, 2-x \neq 0 \text{ et } \frac{x-4}{2-x} \leq 0 \right\}$$

Posons $2-x = 0 \iff x = 2$

$x-4 = 0 \iff x = 4$

x	0		2		4		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2-x}{x-4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$\boxed{D_u = [0\,;\, 2[\,\cup\, [4\,;+\infty[}$$

2/ Soit f et g deux fonctions numériques à variable réelle définies par :

$$f(x) = \frac{2-x}{x+1} \qquad g(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

Déterminons le domaine de définition de certaines fonctions

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\boxed{D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-3; -1\}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{ x \in D_{f\cap g} / \, g(x) \neq 0 \}$$

Posons $g(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \left\{-3; -1; \frac{1}{2}\right\}}$$

$$D_{\sqrt{f}} = \{ x \in D_f / \, f(x) \geq 0 \}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} / \, x \neq -1 \text{ et } \frac{2-x}{x+1} \geq 0 \right\}$$

Posons $2-x = 0 \iff x = 2$

$x+1 = 0 \iff x = -1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2-x}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$\boxed{D_{\sqrt{f}} = \,]-1; 2]}$$

$$D_{g\circ f} = \{ x \in D_f / \, f(x) \in D_g \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} / \, x \neq -1 \text{ et } f(x) \neq -3 \}$$

Posons $\dfrac{2-x}{x+1} = -3 \iff 2-x = -3x-3$

$\iff 2x = -5 \iff x = -\frac{5}{2}$

$$\boxed{D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}; -1\right\}}$$

$$D_{f\circ g} = \{ x \in D_g / \, g(x) \in D_f \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} / \, x \neq -3 \text{ et } g(x) \neq -1 \}$$

Posons $g(x) = -1 \iff 2x-1 = -x-3$

$\iff 3x = -2 \iff x = \frac{-2}{3}$

$$\boxed{D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}; -1\right\}}$$

$$D_{f\circ f} = \{ x \in D_f / \, f(x) \in D_f \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} / \, x \neq -1 \text{ et } f(x) \neq -1 \}$$

Posons $f(x) = -1 \iff 2-x = -x+1$ impossible

$$\boxed{D_{f\circ f} = \mathbb{R} - \{-1\}}$$

$$D_{g\circ g} = \{ x \in D_g / \, g(x) \in D_g \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} / \, x \neq -3 \text{ et } g(x) \neq -3 \}$$

Posons $g(x) = -3 \iff 2x-1 = -3x-9$

$\iff 5x = -8 \iff x = -\frac{8}{5}$

$$\boxed{D_{g\circ g} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{8}{5}; -3\right\}}$$

EXERCICE N°24

1/ Déterminons le domaine de définition des fonctions suivantes définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

a/ $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1-|x|}{2-x}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2 - x \neq 0 \text{ et } 1 - |x| \neq 0\}$$

Posons $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$
$1 - |x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1; 2\}}$$

b/ $$g(x) = \frac{1 + \frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}}{1 - \frac{1-x}{1-\frac{1}{x}}}$$

Posons $D(x) = \frac{1-x}{1-\frac{1}{x}}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0, 1 + \frac{1}{x} \neq 0, 1 - \frac{1}{x} \neq 0 \text{ et } D(x) \neq 1\}$$

Posons $1 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$D(x) = 1 \Leftrightarrow x(1-x) = x - 1 \Rightarrow x = -1$

$$\boxed{D_g = \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}}$$

c/ $h(x) = \frac{x^2}{|x| - 3}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / |x| - 3 \neq 0\}$$

Posons $|x| - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$

$$\boxed{D_h = \mathbb{R} - \{-3; 3\}}$$

d/ $p(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 3}$

$$D_p = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3 \neq 0\}$$

Posons $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.

$$\boxed{D_p = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}}$$

e/ $q(x) = |x| + \sqrt{x - 2}$

$$D_q = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \geq 0\}$$

$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

$$\boxed{D_q = [2; +\infty[}$$

f/ $v(x) = \frac{2 + \sqrt{|x| + 2}}{\sqrt{|x| - 3}}$

$$D_v = \{x \in \mathbb{R} / |x| - 3 > 0\}$$

$|x| - 3 > 0 \Leftrightarrow |x| > 3$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

$$\boxed{D_v =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[}$$

2/ <u>Déterminons le domaine de définition de</u>: $k :]-4; 4[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{3x+1}{|x| - 2}$

$$D_k = \{x \in]-4; 4[/ |x| - 2 \neq 0\}$$

Posons $|x| - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$

$$\boxed{D_k =]-4; 4[- \{-2; 2\}}$$

EXERCICE N°25

1/ Soit l'application $f : [0; 6] \longrightarrow \mathbb{R}$

telle que: $\begin{cases} \text{si } x \in [0; 2],\ f(x) = 2x - 1 \\ \text{si } x \in]2; 3],\ f(x) = -x + 3 \\ \text{si } x \in]3; 6],\ f(x) = 2\left(\frac{x}{3} - 1\right) \end{cases}$

a/ <u>Trouvons par calcul l'image réciproque de $]0; 1]$ et de $[3; 5]$</u>

* L'image réciproque de $]0; 1]$ est l'ensemble solution de l'inéquation:

$x \in [0; 6]$, $0 < f(x) \leq 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x - 1 \leq 1 \text{ si } x \in [0; 2] \text{ (a)} \\ \text{ou} \\ 0 < -x + 3 \leq 1 \text{ si } x \in]2; 3] \text{ (b)} \\ 0 < 2\left(\frac{x}{3} - 1\right) \leq 1 \text{ si } x \in]3; 6] \text{ (c)} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

(a) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 2x \leq 2 \\ \text{et} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \text{et} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2} ; 1\right]$

(b) $\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < -x \leq -2 \\ x \in]2;3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ x \in]2;3] \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in]2;3[$

(c) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{x}{3} - 1 \leq \frac{1}{2} \\ x \in]3;6] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x \leq \frac{9}{2} \\ x \in]3;6] \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \left]3 ; \frac{9}{2}\right]$

$$\boxed{f^{-1}([0;1]) = \left]\frac{1}{2};1\right] \cup]2;3[\cup \left]3;\frac{9}{2}\right]}$$

* L'image réciproque de $[3;5]$ est l'ensemble solution de l'inéquation

$x \in [0;6]$, $3 \leq f(x) \leq 5$ (2)

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq 2x-1 \leq 5 \text{ si } x \in [0;2] \text{ (d)} \\ 3 \leq -x+3 \leq 5 \text{ si } x \in]2;3] \text{ (e)} \\ 3 \leq 2\left(\frac{x}{3}-1\right) \leq 5 \text{ si } x \in]3;6] \text{ (f)}. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \text{ si } x \in [0;2] \\ -2 \leq x \leq 0 \text{ si } x \in]2;3] \\ \frac{15}{2} \leq x \leq \frac{21}{2} \text{ si } x \in]3;6] \end{cases}$

$\Rightarrow x = 2$

$$\boxed{f^{-1}([3;5]) = \{2\}}$$

b-/ Trouvons graphiquement l'image directe de $[2;6]$

Représentons d'abord f dans le plan rapporté à un repère orthonormé

$y = 2x-1$

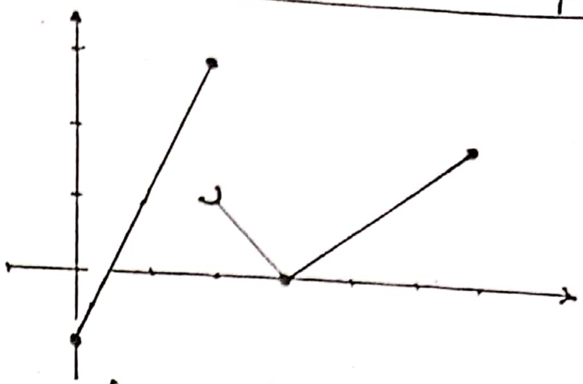
x	0	2
y	-1	3

$y = -x+3$

x	2	3
y	1	0

$y = 2\left(\frac{x}{3}-1\right)$

x	3	6
y	0	2



Graphiquement on a:

$$\boxed{f([2;6]) = [0;2] \cup \{3\}}$$

3-/ Dans la suite de l'exercice on pose $f(x) = E(x-5)$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

a-/ Calculs

$f(1) = E(1-5) = E(-4) = -4$

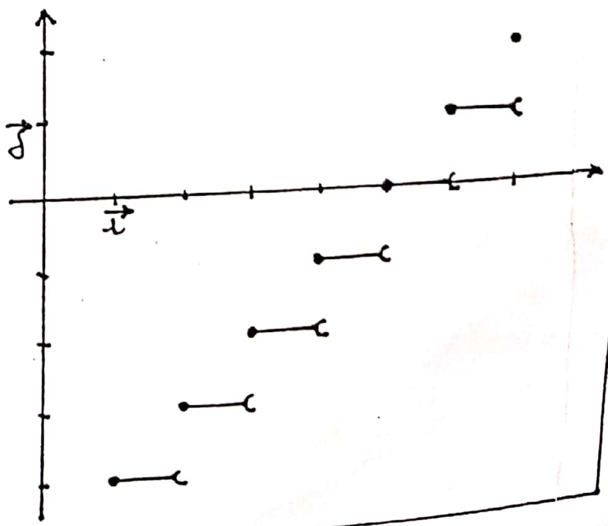
$f(5) = E(5-5) = E(0) = 0$

$f(2{,}1) = E(2{,}1-5) = E(-2{,}9) = -3$.

$f(3) = E(3-5) = E(-2) = -2$

x	1	2,1	3	5
$f(x)$	-4	-3	-2	0

b-/ Représentation graphique sur $[1;7]$



c-/ Ensemble S des réels vérifiant :

$$3 \leq f(x) \leq 15$$

$3 \leq f(x) \leq 15 \Leftrightarrow 3 \leq E(x-5) \leq 15$

$\Leftrightarrow 3 \leq E(x) - 5 \leq 15$

$\Leftrightarrow 8 \leq E(x) \leq 20$

$\Leftrightarrow x \in [8 ; 21[$

$$\boxed{S = [8 ; 21[}$$

EXERCICE N°26

1-/ Résolvons dans IR l'inéquation

$$|-1 + E(x)| \leq 4 \quad (1)$$

(1) $\Leftrightarrow -4 \leq -1 + E(x) \leq 4$

$\Leftrightarrow -3 \leq E(x) \leq 5$

$\Leftrightarrow -3 \leq x < 6$

$$\boxed{S = [-3 ; 6[}$$

2-/ a-/ Déterminons deux majorants et deux minorants de l'ensemble S

- Deux minorants : $-5 ; -4$
- Deux majorants : $6 ; 7$

b-/ Maximum et minimum de S

S n'admet pas de maximum mais admet un minimum qui est -3.

c-/ Soit S' $S \cap \mathbb{Z}$

$S' = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$

Maximum et minimum de S' :

Maximum $= 5$; Minimum $= -3$.

EXERCICE N°27

On considère la fonction

$$f : [-3 ; 3] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}\left(xE(x) + E(x) - 2\right)$$

1-/ Déterminons f(x) pour x appartenant à chacun des ensembles :

$\forall x \in [-3 ; -2[$, $E(x) = -3 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

$\forall x \in [-2 ; -1[$, $E(x) = -2 \Rightarrow f(x) = -x - 2$

$\forall x \in [-1 ; 0[$, $E(x) = -1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

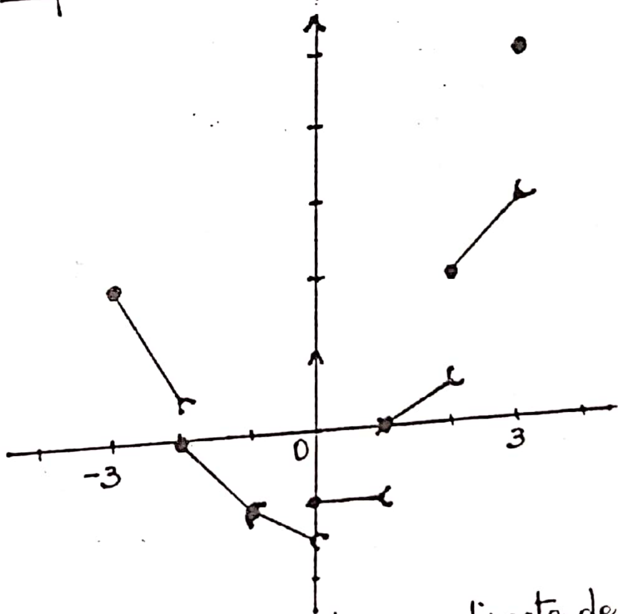
$\forall x \in [0 ; 1[$, $E(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -1$

$\forall x \in [1 ; 2[$, $E(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$\forall x \in [2 ; 3[$, $E(x) = 2 \Rightarrow f(x) = x$

$f(3) = \frac{1}{2}(3.3 + 3 - 2) = 5.$

2-/ Traçons la courbe de f dans un repère



3-/ Déterminons l'image directe de chacun des intervalles $[-3 ; 0[$ et $[-1 ; 3]$ par f

Graphiquement on a :

$f([-3 ; 0[) =]-\frac{3}{2} ; 0] \cup]\frac{1}{2} ; 2]$

$$f([-3;0[) = \left]-\frac{3}{2};0\right] \cup \left]\frac{1}{2};2\right]$$

$$f([-1;3]) = \left]-\frac{3}{2};-1\right] \cup \left[0;\frac{1}{2}\right[\cup [2,3[\cup \{5\}$$

4-/ Déterminons l'image réciproque des intervalles $[-1;2]$ et $[3;5]$ par f.

Graphiquement on a:

$$f^{-1}([-1;2]) = [-3;-1] \cup [0;2]$$

$$f^{-1}([3;5]) = \{3\}$$

EXERCICE N°28

1-/ Soit A l'ensemble des inverses des nombres entiers naturels non nuls.

a-/ Démontrons que 1 est le maximum de A

- $\frac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow 1 \in A$ (1)
- De plus soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a:

$$n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \quad (2)$$

(1) et (2) nous permettent de conclure que 1 est le maximum de A

b-/ Démontrons que l'ensemble A mais n'admet pas de minimum

Pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{n} > 0$; On en déduit que 0 est un minorant de A autrement dit A est minoré par 0.

- Supposons que A possède un minimum m.

Il existe donc un entier naturel non nul n tel que : $m = \frac{1}{n}$.

$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{n+1} \in A$.

de plus $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < m$.

$\frac{1}{n+1}$ est donc strictement inferieur à m et appartient à A, ce qui est contradictoire puisque m est le minimum de A.

Conclusion

A est minoré mais n'admet pas de minimum.

2-/ On considère l'ensemble B des nombres réels pouvant s'écrire sous la forme $\frac{n}{n+1}$ où n est un nombre entier naturel quelconque.

a-/ Démontrons que B admet 0 pour minimum

Pour $n = 0$, $\frac{n}{n+1} = \frac{0}{0+1} = 0$

donc $0 \in B$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n+1} \geq 0$

Conclusion:

B admet 0 pour minimum

b-/ Démontrons que B est majoré par 1 mais n'admet pas de maximum

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n+1} < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.

1 est donc un majorant de B.

- Supposons que B admet pour maximum M. Il existe donc un entier naturel n tel que $M = 1 - \frac{1}{n+1}$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n+2} \in B$

$n+1 < n+2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow -\frac{1}{n+2} > -\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n+1}$

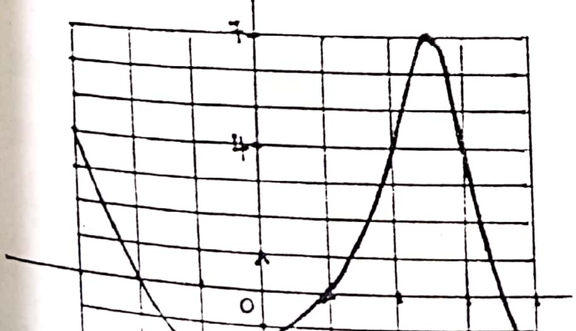
$1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$ est donc strictement supérieur à M et appartient à B, ce qui est contradictoire puisque M est le maximum de B.

Conclusion

B est majoré par 1 mais n'admet pas de maximum.

EXERCICE N°29

(Cf) est la courbe représentative d'une fonction f, définie sur $[-3;4]$



1-/ Déterminons graphiquement l'image par f de chacun des nombres réels: $-3; -2; 3; 4$

Graphiquement on a:

$f(-3) = 4 \quad f(-2) = 0 \quad f(3) = 4 \quad f(4) = -2$

2-/ Déterminons graphiquement les antécédents par f de chacun des nombres réels: $-2; 0; 4$.

Graphiquement on a:

- les antécédents de -2 par f sont: -1 et 4
- les antécédents de 0 par f sont: -2; 1 et $3,5$
- les antécédents de 4 par f sont: -3; 2 et 3

3-/ Déterminons graphiquement l'image directe de l'intervalle $]-2;2]$ puis celle de l'intervalle $]1;3]$ par f

Graphiquement on a:

$f(]-2;2]) = [-2;4]$

$f(]1;3]) =]0;7]$

4-/ Déterminons graphiquement l'image réciproque par f des intervalles $[-2;4[$ et $[0;7[$

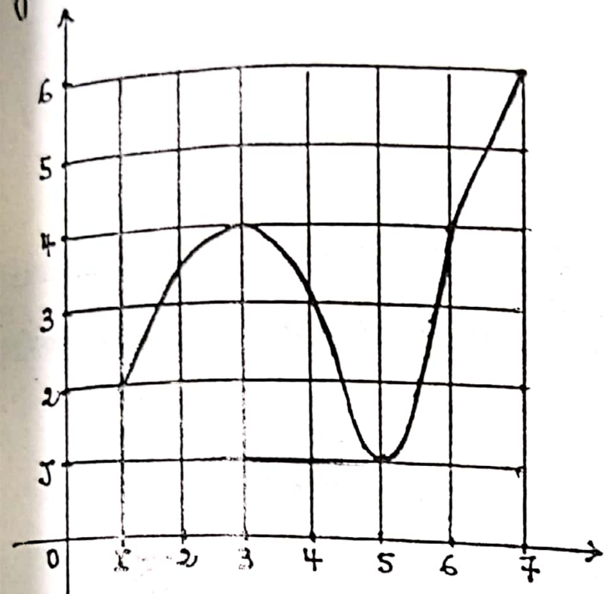
Graphiquement on a:

$f^{-1}([-2;4[) =]-3;2[\cup]3;4]$

$f^{-1}([0;7[) = [-3;-2] \cup [1;\frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2};\frac{7}{2}]$

EXERCICE N°30

(Cf) est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[1;7]$



1/ Déterminons graphiquement l'image directe de chacun des intervalles suivants : $[1;5]$; $[3,5;6]$; $[3;5]$; $[1;7]$

Graphiquement on a :

$f([1;5]) = [1;4]$

$f([3,5;6]) = [1;4]$

$f([3;5]) = [1;4]$; $f([1;7]) = [1;6]$

2/ Déterminons graphiquement l'ensemble des antécédents de chacun des nombres suivants : 1 ; 2 ; 4 ; 6.

$f^{-1}(1) = \{5\}$; $f^{-1}(2) = \{1; 4,4; 5,7\}$

$f^{-1}(4) = \{3; 6\}$; $f^{-1}(6) = \{7\}$

3/ Déterminons graphiquement l'image réciproque de chacun des intervalles suivants : $[1;4]$; $[4;6]$; $[2;4]$

$f^{-1}([1;4]) = [1;6]$

$f^{-1}([4;6]) = \{3\} \cup [6;7]$

$f^{-1}([2;4]) = [1;4,4] \cup [5,7;6]$

4/ En utilisant la courbe (Cf) résolvons l'équation : $E\left(\frac{1}{2}f(x)\right) = 2$

$$E\left(\frac{1}{2}f(x)\right) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 7 \\ \text{et} \\ 2 \le \frac{1}{2}f(x) < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 7 \\ 4 \le f(x) < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 7 \\ \text{et} \\ x = 3 \text{ ou } 6 \le x < 7 \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{3\} \cup [6;7]}$$

EXERCICE N°31

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = |x+2| + |3-2x| - |x|$

1/ Ecrivons g(x) sans le symbole de valeur absolue

Posons $x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
$3-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	-2		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$	

$$\forall x \in]-\infty;-2], \begin{cases} x+2 \le 0 \Leftrightarrow |x+2| = -x-2 \\ 3-2x > 0 \Rightarrow |3-2x| = 3-2x \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = -x-2+3-2x+x = -2x+1$$

$\forall x \in [-2;0]$, $\begin{cases} x+2 \geq 0 \Leftrightarrow |x+2| = x+2 \\ 3-2x \geq 0 \Leftrightarrow |3-2x| = 3-2x \\ x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x) = x+2+3-2x+x = 5$$

$\forall x \in [0;\frac{3}{2}]$, $\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow |x+2| = x+2 \\ 3-2x \geq 0 \Rightarrow |3-2x| = 3-2x \\ x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x) = x+2+3-2x-x = -2x+5$$

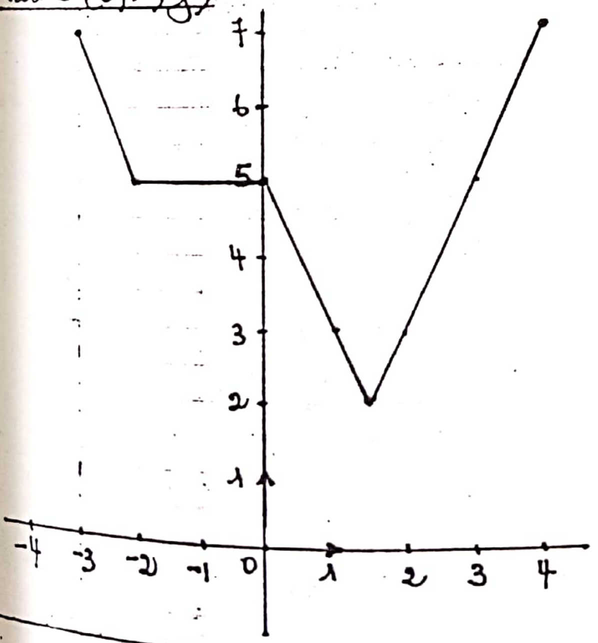
$\forall x \in [3/2;+\infty[$ $\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow |x+2| = x+2 \\ 3-2x \leq 0 \Rightarrow |3-2x| = -3+2x \\ x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x) = x+2-3+2x-x = 2x-1$$

En résumé on a :

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \in]-\infty;-2] \\ 5 & \text{si } x \in [-2;0] \\ -2x+5 & \text{si } x \in [0;3/2] \\ 2x-1 & \text{si } x \in [3/2;+\infty[\end{cases}}$$

2/ Représentation graphique de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$



3/ Déterminons graphiquement puis algébriquement l'image directe de chacun des intervalles $]-4;0]$; $]1;2[$.

Graphiquement on a:

$$g(]-4;0]) = [5;9[\; ; \; g(]1;2[) = [2;3[$$

Algébriquement on a:

$$]-4;0] =]-4;-2] \cup [-2;0]$$

$-4 < x \leq -2 \Leftrightarrow 4 \leq -2x < 8 \Leftrightarrow 5 \leq -2x+1 < 9$
$\Rightarrow 5 \leq g(x) < 9$

$-2 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow g(x) = 5$ d'où

$$g(]-4;0]) = [5;9[$$

$$]1;2[=]1;\tfrac{3}{2}] \cup [3/2;2[$$

$1 < x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -3 \leq -2x < -2 \Leftrightarrow 2 \leq -2x+5 < 3$
$\Rightarrow 2 \leq g(x) < 3$

$\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow 3 \leq 2x < 4 \Rightarrow 2 \leq 2x-1 < 3$
$\Rightarrow 2 \leq g(x) < 3$

Conclusion :

$$g(]1;2[) = [2;3[$$

4/ Déterminons graphiquement puis algébriquement l'image réciproque de $\{1\}$; $[0;2]$; $]2;5]$; $\{5\}$

Graphiquement on a:

$$g^{-1}(\{1\}) = \emptyset \; ; \; g^{-1}([0;2]) = \{\tfrac{3}{2}\}$$

$$g^{-1}(]2;5]) = [-2;\tfrac{3}{2}[\cup]\tfrac{3}{2};3]$$

$$g^{-1}(\{5\}) = [-2;0] \cup \{3\},$$

Algébriquement :

– l'image réciproque de $\{1\}$ est l'ensemble solution de l'équation $g(x) = 1$

$$g(x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 = 1 \text{ et } x \le -2 \\ 5 = 1 \text{ et } -2 \le x \le 0 \\ -2x+5 = 1 \text{ et } 0 \le x \le \frac{3}{2} \\ 2x-1 = 1 \text{ et } x \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ et } x \le -2 \text{ impossible} \\ 5=1 \text{ et } -2 \le x \le 0 \text{ impossible} \\ x=2 \text{ et } 0 \le x \le \frac{3}{2} \text{ impossible} \\ x=1 \text{ et } x \ge \frac{3}{2} \text{ impossible} \end{cases}$$

On a donc $S = \emptyset$ d'où

$$g^{-1}(\{1\}) = \emptyset$$

- L'image réciproque de $[0;2]$ est l'ensemble solution de l'inéquat° : $0 \le g(x) \le 2$

$$0 \le g(x) \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le -2x+1 \le 2 \text{ et } x \le -2 \\ 0 \le 5 \le 2 \text{ et } -2 \le x \le 0 \\ 0 \le -2x+5 \le 2 \text{ et } 0 \le x \le \frac{3}{2} \\ 0 \le 2x-1 \le 2 \text{ et } x \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \text{ et } x \le -2 \text{ imp} \\ 0 \le 5 \le 2 \text{ et } -2 \le x \le 0 \text{ imp} \\ \frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2} \text{ et } 0 \le x \le \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \text{ et } x \ge \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$ $\quad S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ d'où

$$g^{-1}([0;2]) = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

- L'image réciproque de $]2;5]$ est l'ensemble solut° de l'inéquat° $2 < g(x) \le 5$

$$2 < g(x) \le 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < -2x+1 \le 5 \text{ et } x \le -2 \\ 2 < 5 \le 5 \text{ et } -2 \le x \le 0 \\ 2 < -2x+5 \le 5 \text{ et } 0 \le x \le \frac{3}{2} \\ 2 < 2x-1 \le 5 \text{ et } x \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x < \frac{1}{2} \text{ et } x \le -2 \Rightarrow x = -2 \\ 2 < 5 \le 5 \text{ et } -2 \le x \le 0 \Rightarrow -2 \le x \le 0 \\ 0 \le x < \frac{3}{2} \text{ et } 0 \le x \le \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \le x < \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} < x \le 3 \text{ et } x \ge \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < x \le 3 \end{cases}$$

$S = \{-2\} \cup [-2;0] \cup [0; \frac{3}{2}[\cup]3/2 ; 3]$

$\Rightarrow S = [-2; \frac{3}{2}[\cup]3/2; 3]$ d'où

$$g^{-1}(]2;5]) = [-2; \tfrac{3}{2}[\cup]\tfrac{3}{2}; 3]$$

- L'image réciproque de $\{5\}$ est l'ensemble solution de l'équation $g(x) = 5$

$$g(x) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 = 5 \text{ et } x \le -2 \\ 5 = 5 \text{ et } -2 \le x \le 0 \\ -2x+5 = 5 \text{ et } 0 \le x \le \frac{3}{2} \\ 2x-1 = 5 \text{ et } x \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ et } x \le -2 \Rightarrow x = -2 \\ 5 = 5 \text{ et } -2 \le x \le 0 \Rightarrow -2 \le x \le 0 \\ x = 0 \text{ et } 0 \le x \le \frac{3}{2} \Rightarrow x = 0 \\ x = 3 \text{ et } x \ge \frac{3}{2} \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

On a : $S = [-2;0] \cup \{3\}$ d'où

$$g^{-1}(\{5\}) = [-2;0] \cup \{3\}$$

EXERCICE N°32

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Soit l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto OM$$

1/ Calculons les images des points O, I, $A(-1;1)$; $B(3;-4)$; $C(-2;1)$ et $E(2;1)$

$f(O) = OO = 0 =$ zéro

$f(I) = OI = 1$; $f(A) = OA = \sqrt{2}$

$f(B) = OB = 5$; $f(C) = OC = \sqrt{5}$

$f(E) = OE = \sqrt{5}$.

2-/ Déterminons l'image directe du plan $\mathcal{P}$.

$\forall M \in \mathcal{P}$, $OM \ge 0 \Leftrightarrow f(M) \ge 0$.

$$f(\mathcal{P}) = \mathbb{R}^+$$

3-/ Déterminons si cela est possible les antécédents des nombres : $-2 ; 0 ; 2$

$f(M) = -2 \Leftrightarrow OM = -2$ impossible.

$$f^{-1}(-2) = \emptyset$$

$f(M) = 0 \Leftrightarrow OM = 0 \Leftrightarrow M$ confondu à O

$$f^{-1}(0) = \{O\}$$

$f(M) = 2 \Leftrightarrow OM = 2 \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(O; r=2)$

$$f^{-1}(2) = \mathscr{C}(O; r=2).$$

4-/ Soit (D) la droite d'équation $y = 1$.

a-/ Pour le point M de (D) d'abscisse x, calculons $f(M)$

$M \in (D) \Rightarrow M(x;1)$.

$f(M) = OM = \sqrt{x^2+1}$

$$f(M) = \sqrt{x^2+1}$$

b-/ Déterminons les points de (D) dont l'image est 2 par f

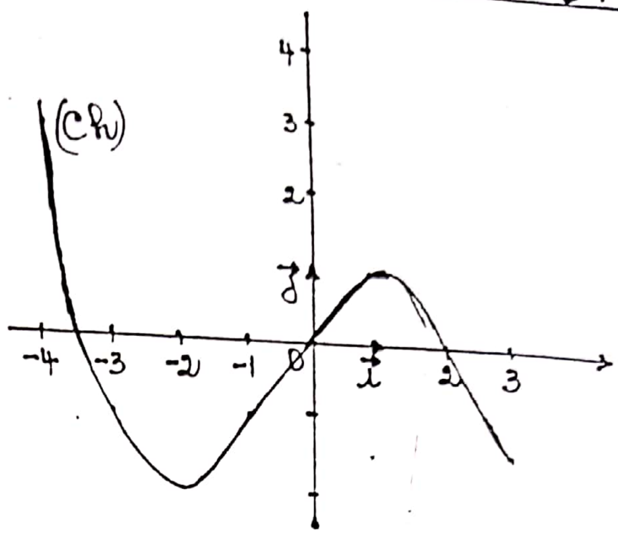
$f(M) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow x^2+1 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.

Les points de (D) dont l'image par f est 2 sont : $R(-\sqrt{3};1)$ et $S(\sqrt{3};1)$.

EXERCICE N°33

Soit h la fonction numérique définie sur $[-4;3]$ dont voici ci-la courbe représentative (C_h) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$.



1-/ A partir de la courbe (C_h), étudions le sens de variation de h

h est décroissante sur $[-4;-2]$ et sur $[1;3]$ puis croissante sur $[-2;1]$

Illustrons ces variations dans le tableau ci-dessous

x	-4		-2		1		3
$h(x)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$

2-/ Résolvons graphiquement les équations suivantes

a-/ $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3,5$ ou $x = 0$ ou $x = 2$

$$\boxed{S = \{-3,5 ; 0 ; 2\}}$$

b-/ $|h(x)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq h(x) \leq 1$

$\Leftrightarrow x \in [-3,75 ; -3] \cup [-1 ; 2,5]$

$$\boxed{S = [-3,75;-3] \cup [-1;2,5]}$$

c-/ $E(h(x)) = -2 \Leftrightarrow -2 \leq h(x) < -1$

$\Leftrightarrow x \in]-3;-1[\cup]2;5;3]$

$$\boxed{S =]-3;-1[\cup]2,5;3]}$$

d./ $h(E(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) = -3,5 \text{ imp} \\ \text{ou} \\ E(x) = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \\ \text{ou} \\ E(x) = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \end{cases}$

$$\boxed{S = [0;1[\cup [2;3[}$$

3./ Soit m un réel.

Discutons suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équat° $h(x) = m$

Posons (E): $h(x) = m$

(E) vient du système $\begin{cases} y = h(x) \\ y = m \end{cases}$

Les solutions de (E) sont donc les abscisses des points d'intersection de (Ch) avec la droite d'équation $y = m$.

Voici les résultats de notre discussion

* $m < -2$ ou $m > 3$ (E) n'a pas de solut°
* $m \in \{-2\} \cup]1;3]$ (E) admet une solut°
* $m \in]-2;-1,5[$ ou $m = 1$ (E) admet 2 solutions
* $m \in [-1,5;1[$ (E) admet 3 solutions

EXERCICE N°34

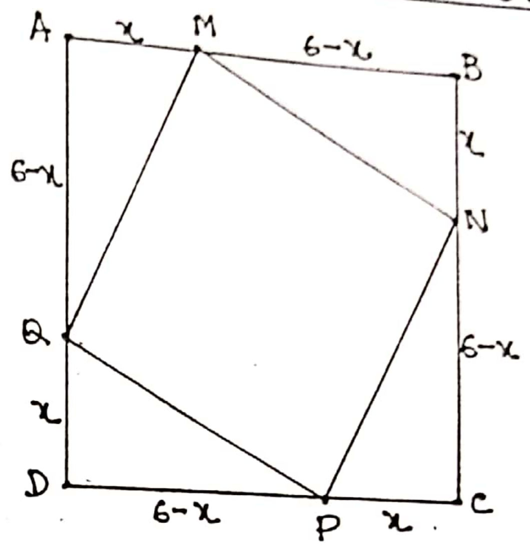
Soit ABCD un carré tel que AB = 6

On construit les points M, N, P et Q respectivement sur [AB], [BC], [CD] [AD] tels que:

$AM = BN = CP = DQ = x$.

1./ Calculons MN^2 en fonction de x

le triangle MBN est rectangle en B



$$MN^2 = x^2 + (6-x)^2 = 2x^2 - 12x + 36$$

$$\boxed{MN^2 = 2x^2 - 12x + 36}$$

2./ Démontrons que MNPQ est un carré

On remarque que: $MN = NP = PQ = QM$

De plus: soit S_1 la surface des quadrilatère MNPQ on a:

$$S_1 = 36 - 4 \cdot \frac{x(6-x)}{2} = 36 - 2x(6-x)$$

$$= 2x^2 - 12x + 36 = MN^2$$

$S_1 = MN^2$

Conclusion

MNPQ est un carré.

3./ Soit f la fonction qui, à chaque valeur de x, associe l'aire du carré MNPQ.

a./ Intervalle I sur lequel f est définie

$M \in [AB] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6$.

$$\boxed{I = [0;6]}$$

b./ Démontrons que pour tout x élément de I on a: $f(x) = 2(x-3)^2 + 18$

On sait que :

$f(x) = 2x^2 - 12x + 36$

$= 2(x^2 - 6x + 18)$

$= 2[(x-3)^2 - 9 + 18]$

$= 2[(x-3)^2 + 9] = 2(x-3)^2 + 18$

$\boxed{f(x) = 2(x-3)^2 + 18}$

c-/ <u>Déterminons le sens de variat° de f sur chacun des intervalles :</u>

<u>$[0;3]$ et $[3;6]$</u>

Soit u et v deux réels tel que :

$0 \leq u < v \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq u-3 < v-3 \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq (v-3)^2 < (u-3)^2 \leq 9$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2(v-3)^2 < 2(u-3)^2 \leq 18$

$\Leftrightarrow 18 \leq 2(v-3)^2 + 18 < 2(u-3)^2 + 18 \leq 36$

$\Leftrightarrow 18 < f(v) < f(u) \leq 36$

f est donc décroissante sur $[0;3]$

Supposons à présent que :

$3 \leq u < v \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq u-3 < v-3 \leq 3$

$\Rightarrow 0 \leq (u-3)^2 < (v-3)^2 \leq 9$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2(u-3)^2 < 2(v-3)^2 \leq 18$

$\Leftrightarrow 18 \leq 2(u-3)^2 + 18 + 2(v-3)^2 + 18 \leq 36$

$\Leftrightarrow 18 \leq f(u) < f(v) \leq 36$

f est donc croissante sur $[3;6]$

<u>Conclusion</u>

f est décroissante sur $[0;3]$ et croissante sur $[3;6]$.

d-/ <u>Déterminons le minimum de f</u>

f étant décroissante sur $[0;3]$ et croissante sur $[3;6]$, f admet un minimum en 3 ; ce minimum est : $f(3) = 18$.

Le minimum de f est $f(3) = 18$

4/a-/ <u>Déterminons par calcul : $f([0;6])$ après avoir déterminé $f([0;3])$ et $f([3;6])$</u>

$f([0;3]) = [f(3); f(0)]$ car f est décroissante sur $[0;3]$.

$f(0) = 36$; $f(3) = 18$

• $f([0;3]) = [18; 36]$

$f([3;6]) = [f(3); f(6)]$ car f est croissante sur $[3;6]$ or $f(6) = 36$

• $f([3;6]) = [18; 36]$

$f([0;6]) = f([0;3]) \cup f([3;6])$

$= [18;36] \cup [18;36]$

$= [18;36]$.

$\boxed{f([0;6]) = [18;36]}$

b-/ <u>Déterminons par calcul l'ensemble des antécédents de 20 par f</u>

L'ensemble des antécédents de 20 par f est l'ensemble solution de l'équation

$f(x) = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I \\ 2(x-3)^2 + 18 = 20 \ (1) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow (x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow x-3 = -1$ ou $x-3 = 1$

$(\Leftrightarrow)\ x = 2$ ou $x = 4$ or $2 \in I$ et $4 \in I$

L'ensemble des antécédents de 20 par f est $\{2;4\}$.

c-/ <u>Valeurs de x pour lesquelles on a:</u>

$$\underline{20 \leq f(x) \leq 26}$$

$$20 \leq f(x) \leq 26 \Rightarrow \begin{cases} x \in I \\ \text{et} \\ 20 \leq 2(x-3)^2+18 \leq 26 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x \in I \\ 1 \leq (x-3)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I \\ \text{et} \\ -2 \leq x-3 \leq -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in I \\ \text{et} \\ 1 \leq x-3 \leq 2 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x \in I \\ \text{et} \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in I \\ 4 \leq x \leq 5 \end{cases}.$$

L'ensemble E des valeurs de x pour lesquelles on a: $20 \leq f(x) \leq 26$ est:

$$E = [1;2] \cup [5;6]$$

EXERCICE N° 35

Dans le plan muni du repère (O,I,J) on donne les points $A(-3;1)$, $B(-1;3)$, $C(1;3)$, $D(2;5)$, $E(5;1)$, $F(7;2)$. On désigne par f la fonction affine par intervalles dont la représentation graphique est:

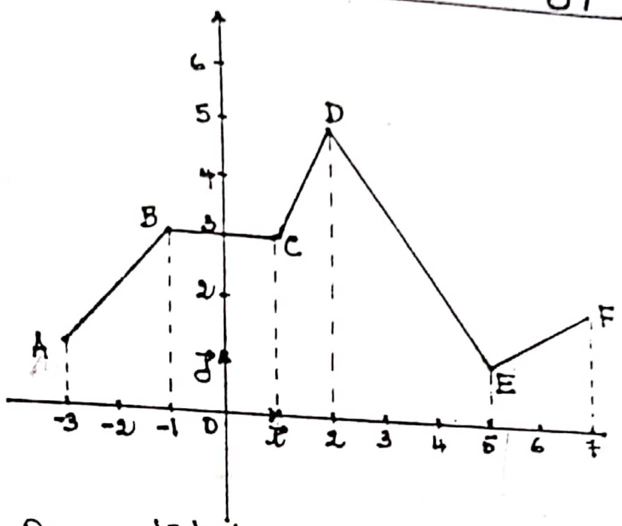
$$[AB[\cup [BC[\cup [CD[\cup [DE[\cup [EF]$$

1-/ <u>Déterminons f par une formule explicite sur chaque intervalle</u>

On peut facilement montrer que:

(AB): $y = x+4$; (BC): $y = 3$; (CD): $y = 2x+1$

(DE): $y = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{3}$; (EF): $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$



On en déduit que:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } -3 \leq x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -\frac{4}{3}x + \frac{23}{3} & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & \text{si } 5 \leq x < 7 \end{cases}$$

2-/ <u>Calculons $f(-1,5)$, $f(0,5)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5,5)$</u>

$f(-1,5) = -1,5 + 4 = 2,5$; $f(0,5) = 3$

$f(2) = -\frac{8}{3} + \frac{23}{3} = 5$; $f(4) = \frac{-16}{3} + \frac{23}{3} = \frac{7}{3}$

$f(5,5) = \frac{1}{2}(5,5) - \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$

En résumé on a:

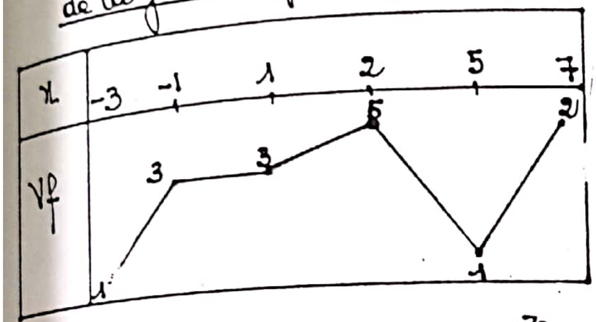
x	$-1,5$	$0,5$	2	4	$5,5$
$f(x)$	$2,5$	3	5	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{4}$

3-/ <u>Déterminons l'ensemble des antécédents de chacun des nombres réels suivants</u>: -1; $-0,5$; 0; 1; 2; 3; $3,5$; 4 et 5

* -1; $-0,5$ et 0 n'ont pas d'antécédents
* les antécédents de 1 sont: -3 et 5
* les antécédents de 2 sont: -2; $\frac{17}{4}$ et 5
* $f^{-1}(3) = [-1;1] \cup \{3,5\}$

* $f^{-1}(3,5)=\left\{\frac{5}{4};\ \frac{25}{8}\right\}$
* $f^{-1}(4)=\left\{\frac{3}{2};\ \frac{11}{4}\right\}$; $f^{-1}(5)=\{2\}$

4-/ Dressons le tableau de variation de la fonction f



5-/ Déterminons graphiquement l'image de certains intervalles

$f([-3;-1,5]) = [1;\ 2,5] = \left[1;\ \frac{5}{2}\right]$

Par calcul on a:

$f([-3;-1,5]) = [f(-3);\ f(-1,5)]$ car f est croissante sur $[-3;-1,5]$

or $f(-3)=1$ et $f(-1,5) = 2,5 = \frac{5}{2}$

d'où $f([-3;-1,5]) = \left[1;\ \frac{5}{2}\right]$

• Graphiquement :

$f([-0,5;\ 0,5]) = \{3\}$

Par calcul on a:

f est constante sur $[-1;1]$ or $\forall x \in [-1;1]$ $f(x)=3$. De plus $[-0,5;\ 0,5] \subset [-1;1]$

d'où $f([-0,5;\ 0,5]) = \{3\}$

• Graphiquement

$f([3;4]) = \left[\frac{7}{3};\ \frac{11}{3}\right]$

Par calcul on a:

$f([3;4]) = [f(4);\ f(3)]$ car f est décroissante sur $[3;4]$

De plus $f(4) = \frac{7}{3}$ et $f(3) = \frac{11}{3}$ d'où

$f([3;4]) = \left[\frac{7}{3};\ \frac{11}{3}\right]$

• Graphiquement

$f([4;6]) = \left[1;\ \frac{7}{3}\right]$

Par calcul on a:

$[4;6] = [4;5] \cup [5;6]$

$f([4;6]) = f([4;5]) \cup f([5;6])$
$= [f(5);\ f(4)] \cup [f(5);\ f(6)]$ car f est décroissante sur $[4;5]$ et croissante sur $[5;6]$.

De plus : $f(4) = \frac{7}{3}$; $f(5) = 1$ et $f(6) = \frac{3}{2}$

$f([4;6]) = \left[1;\ \frac{7}{3}\right] \cup \left[1;\ \frac{3}{2}\right] = \left[1;\ \frac{7}{3}\right]$

$f([4;6]) = \left[1;\ \frac{7}{3}\right]$.

• Graphiquement

$f([-3;4]) = [1;\ 5]$.

Par calcul on procède comme précédemment en écrivant :

$[-3;4] = [-3;-1] \cup [-1;1] \cup [1;2] \cup [2;4]$

On détermine aisément l'image directe de chacun de ces intervalles et on fait l'union de ces images directes pour obtenir l'intervalle $[1;5]$.

6-/ Déterminons graphiquement l'image réciproque de certains intervalles

$f^{-1}([-1;0]) = \emptyset$; $f^{-1}([-0,5;\ 0,5]) = \emptyset$

$f^{-1}([1;2]) = [-3;-2] \cup \left[\frac{17}{4};\ 7\right]$.

$f^{-1}([2;3]) = [-2;1] \cup [7/2; \frac{17}{4}] \cup \{7\}$

$f^{-1}([1;5]) = [-3;7]$

On pourra obtenir le même résultat par calcul en résolvant des inéquations

EXERCICE N°36

Dans chacun des cas suivants, étudions le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle D, en utilisant le signe du rapport $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, où a et b sont deux nombres réels distincts de D

1/ $f(x) = -3x^2+2x+8$; $D = [-1/3;+\infty[$

$f(a)-f(b) = -3a^2+2a+3b^2-2b$

$= -3(a^2-b^2)+2(a-b)$

$= (a-b)(2-3a-3b)$

$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = 2-3(a+b)$

$\forall$ a et b réels distincts de $[-1/3;+\infty[$

on a: $a+b > \frac{2}{3} \Leftrightarrow -3(a+b) < -2$

$\Leftrightarrow 2-3(a+b) < 0$

$\Leftrightarrow \frac{f(a)-f(b)}{a-b} < 0$

On en déduit que:

f est strictement décroissante sur $D = [-1/3;+\infty[$

2/ $f(x) = \sqrt{x^2+4x+7}$; $D =]-\infty;-2]$.

$f(a)-f(b) = \sqrt{a^2+4a+7} - \sqrt{b^2+4b+7}$

$= \frac{(a^2+4a+7)-(b^2+4b+7)}{\sqrt{a^2+4a+7}+\sqrt{b^2+4b+7}}$

$f(a)-f(b) = \frac{(a-b)(a+b+4)}{\sqrt{a^2+4a+7}+\sqrt{b^2+4b+7}}$

$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{a+b+4}{\sqrt{a^2+4a+7}+\sqrt{b^2+4b+7}}$

$\forall$ a et b réels distincts de $]-\infty;-2]$

On a: $a+b<-4 \Leftrightarrow a+b+4<0$

$\Leftrightarrow \frac{a+b+4}{\sqrt{a^2+4a+7}+\sqrt{b^2+4b+7}} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{f(a)-f(b)}{a-b} < 0$ On en déduit que:

f est strictement décroissante sur $D =]-\infty;-2]$

3/ $f(x) = x+\frac{5}{x}$; $D =]0;\sqrt{5}]$

$f(a)-f(b) = \left(a+\frac{5}{a}\right)-\left(b+\frac{5}{b}\right)$

$= \frac{a^2b+5b-ab^2-5a}{ab}$

$= \frac{(a-b)(ab-5)}{ab}$

$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{ab-5}{ab} = 1-\frac{5}{ab}$

$\forall$ a et b réels distincts de $]0;\sqrt{5}]$ on a:

$0<ab<5 \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{ab} \Leftrightarrow -1 > \frac{-5}{ab}$

$\Rightarrow 1-\frac{5}{ab} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{f(a)-f(b)}{a-b} < 0$ On en déduit que:

f est strictement décroissante sur $D =]0;\sqrt{5}]$

EXERCICE N°37

1/ Soit f la fonction définie par:

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

a/ <u>Déterminons l'ensemble de définition de f.</u>

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\}$

Posons $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$\boxed{D_f = \mathbb{R}-\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$

b./ Vérifions que, si $u \in D_f$ et $v \in D_f$,

$$f(u)-f(v) = \frac{-2(u-v)}{(u-1)(v-1)}$$

si $u \in D_f$ et $v \in D_f$ on a:

$$f(u)-f(v) = \frac{u+1}{u-1} - \frac{v+1}{v-1}$$

$$= \frac{(u+1)(v-1)-(v+1)(u-1)}{(u-1)(v-1)}$$

$$= \frac{uv-u+v-1-uv-u+v+1}{(u-1)(v-1)}$$

$$\boxed{f(u)-f(v) = \frac{-2(u-v)}{(u-1)(v-1)},\ u \neq 1 \text{ et } v \neq 1}$$

c./ Déduisons-en que f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$

- $u<v<1 \Rightarrow \begin{cases} -2(u-v)>0 \\ u-1<0 \text{ et } v-1<0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2(u-v)>0 \\ (u-1)(v-1)>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-2(u-v)}{(u-1)(v-1)} > 0.$$

$$\Rightarrow f(u)-f(v)>0$$

$u<v<1 \Rightarrow f(u)>f(v).$

$\boxed{\text{f est donc strictement décroissante sur }]-\infty;1[}$

- $1<u<v \Rightarrow \begin{cases} -2(u-v)>0 \\ u-1>0 \\ v-1>0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{-2(u-v)}{(u-1)(v-1)} > 0 \Leftrightarrow f(u)-f(v)>0$

$1<u<v \Rightarrow f(u)>f(v)$

$\boxed{\text{f est donc strictement décroissante sur }]1;+\infty[}$

2./ Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{2x-5}{3x+2}$$

Inspirons nous de la méthode utilisée dans la question 1./ pour démontrer que g est strictement croissante sur $]-\infty;-\frac{2}{3}[$ et sur $]-\frac{2}{3};+\infty[$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 3x+2 \neq 0\}$

Posons $3x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$.

$D_g = \mathbb{R}-\{-\frac{2}{3}\} =]-\infty;-\frac{2}{3}[\cup]-\frac{2}{3};+\infty[$

Soit u et v deux réels différents de $-\frac{2}{3}$.

$$g(u)-g(v) = \frac{2u-5}{3u+2} - \frac{2v-5}{3v+2}$$

$$= \frac{19(u-v)}{(3u+2)(3v+2)}$$

- $u<v<-\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} 19(u-v)<0 \\ 3u+2<0 \\ 3v+2<0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{19(u-v)}{(3u+2)(3v+2)} < 0$$

$\Rightarrow g(u)-g(v)<0 \Rightarrow g(u)<g(v)$

$u<v<-\frac{2}{3} \Rightarrow g(u)<g(v).$

On en déduit que g est strictement croissante sur $]-\infty;-\frac{2}{3}[$

- $-\frac{2}{3}<u<v \Rightarrow \begin{cases} 19(u-v)<0 \\ 3u+2>0 \\ 3v+2>0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{19(u-v)}{(3u+2)(3v+2)} < 0 \Leftrightarrow g(u)-g(v)<0$

$\Rightarrow g(u)<g(v)$; g est croissante sur $]-\frac{2}{3};+\infty[$

EXERCICE N°38

1/ Egalité de fonctions

a/ $f(x) = x$; $g(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

$D_f = \mathbb{R}$ $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f = D_g$.

De plus : $\forall x \in D_g$, $g(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x = f(x)$

Comme $D_f = D_g$ et que $\forall x \in D_f$, $g(x) = f(x)$ les fonctions f et g sont égales

b/ $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1}$ $g(x) = |x|+1$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x|-1 \neq 0\}$

Posons $|x|-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$

$D_f = \mathbb{R}-\{-1;1\}$; $D_g = \mathbb{R}$

$D_f \neq D_g$, les fonctions f et g ne sont donc pas égales.

c/ $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x-2}$; $g(x) = \frac{-x^2-2}{x^2-x-2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0$ et $x-2 \neq 0\}$

Posons $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$
$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$D_f = \mathbb{R}-\{-1;2\}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2-x-2 \neq 0\}$

Posons $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0$
$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=2$

$D_g = \mathbb{R}-\{-1;2\} = D_f$.

De plus : $\forall x \in D_f$, $f(x) = \frac{x-2-x(x+1)}{(x+1)(x-2)}$

$= \frac{-x^2-2}{x^2-x-2} = g(x)$

Comme $D_f = D_g$ et que $\forall x \in D_f$, $f(x) = g(x)$ les fonctions f et g sont égales

2/ Dans chacun des cas suivants montrons que les fonctions f et g coïncident sur un intervalle que nous préciserons

a/ $f(x) = 2-|x-1|$; $g(x) = x+1$

$\forall x \in]-\infty;1]$, $x-1 \leq 0$

$\Rightarrow |x-1| = -x+1 \Rightarrow f(x) = 2-(-x+1)$
$= 2+x-1$
$= x+1$
$= g(x)$

$\forall x \in]-\infty;1]$, $f(x) = g(x)$. Les fonctions f et g coïncident sur $]-\infty;1]$

b/ $f(x) = \frac{2+3|x|}{|x|+1}$; $g(x) = \frac{2-3x}{1-x}$

$\forall x \leq 0$, $|x| = -x \Rightarrow f(x) = \frac{2-3x}{1-x} = g(x)$

Les fonctions f et g coïncident donc sur $]-\infty;0]$.

c/ $f(x) = |x| - E(x)$; $g(x) = -x+2$

$\forall x \in [-2;-1[$, $E(x) = -2$ et $|x| = -x$

$\Leftrightarrow f(x) = -x-(-2) = -x+2 = g(x)$

Les fonctions f et g coïncident sur $[-2;-1[$

3/ Soit u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$u(x) = \frac{2x+1}{x} - \frac{ax}{x+1}$; $v(x) = \frac{-x^2+3x+1}{x(x+1)}$

Déterminons a pour que les fonctions u et v soient égales.

$D_u = \mathbb{R}-\{-1;0\}$ $D_v = \mathbb{R}-\{-1;0\}$

$D_u = D_v$.

Les fonctions u et v sont égales ssi

$u(x) = v(x) \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x} - \frac{ax}{x+1} = \frac{-x^2+3x+1}{x(x+1)}$

$\Leftrightarrow (2x+1)(x+1) - ax^2 = -x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow (2-a)x^2+3x+1 = -x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow 2-a = -1 \Leftrightarrow a = 3.$

$\boxed{\text{Pour } a=3, \text{ les fonctions u et v sont égales}}$

EXERCICE N°39

1./ <u>Trouvons la forme canonique de chacune des fonctions polynômes suivantes et factorisons si possible</u>

a./ $f(x) = 2x^2+5x+2$

$= 2\left(x^2+\frac{5}{2}x+1\right)$

$= 2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}+1\right]$

$\boxed{f(x) = 2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right]}$ Forme canoniq

$f(x) = 2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right]$

$= 2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]$

$= 2\left(x+\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)$

$= 2(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{f(x) = (x+2)(2x+1)}$ Forme Factorisée

b./ $g(x) = 3x^2-7x+6$

$= 3\left(x^2-\frac{7}{3}x+2\right)$

$= 3\left[\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36}+2\right]$

$\boxed{g(x) = 3\left[\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 + \frac{23}{36}\right]}$ Forme canonique

Il est impossible de factoriser $g(x)$

c./ $h(x) = -x^2+3x-2$

$= -(x^2-3x+2)$

$= -\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}+2\right]$

$\boxed{h(x) = -\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]}$ Forme canonique

$h(x) = -\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$

$= -\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

$= -\left(x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{h(x) = -(x-2)(x-1)}$ Forme Factorisée

d./ $p(x) = -6x^2+19x-15$

$= -6\left(x^2-\frac{19}{6}x+\frac{5}{2}\right)$

$= -6\left[\left(x-\frac{19}{12}\right)^2 - \frac{361}{144}+\frac{5}{2}\right]$

$\boxed{p(x) = -6\left[\left(x-\frac{19}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}\right]}$ Forme canoniq

$p(x) = -6\left[\left(x-\frac{19}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}\right]$

$= -6\left[\left(x-\frac{19}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2\right]$

$= -6\left(x-\frac{19}{12}-\frac{1}{12}\right)\left(x-\frac{19}{12}+\frac{1}{12}\right)$

$= -6\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$\boxed{p(x) = -(3x-5)(2x-3)}$ Forme, Factorisée

2./ <u>Etudions suivant les valeurs de x le signe des polynômes ci-dessus</u>

- $f(x) = 2x^2+5x+2 = (x+2)(2x+1)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+2=0$ ou $2x+1=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0				

Conclusion :

$\forall x \in \{-2; -\frac{1}{2}\}$, $f(x) = 0$

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$, $f(x) > 0$

$\forall x \in]-2; -\frac{1}{2}[$, $f(x) < 0$

• $g(x) = 3x^2 - 7x + 6 = 3\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{23}{36}\right]$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{23}{36} > 0$

$\Leftrightarrow 3\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{23}{36}\right] > 0 \Rightarrow g(x) > 0$

Conclusion :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$

• $h(x) = -x^2 + 3x - 2$

$= -(x-2)(x-1) = (-x+2)(x-1)$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x+2$		+	|	+	0	−	
$x-1$		−	0	+	|	+	
$h(x)$		−	0	+	0	−	

Conclusion

$\forall x \in \{1; 2\}$, $h(x) = 0$

$\forall x \in]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$, $h(x) < 0$

$\forall x \in]1; 2[$, $h(x) > 0$

• $p(x) = -6x^2 + 19x - 15$

$= -(3x-5)(2x-3) = (-3x+5)(2x-3)$

$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ ou $x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$3/2$		$5/3$		$+\infty$
$-3x+5$		+	|	+	0	−	
$2x-3$		−	0	+	|	+	
$p(x)$		−	0	+	0	−	

Conclusion

$\forall x \in \left\{\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right\}$, $p(x) = 0$

$\forall x \in]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]5/3; +\infty[$, $p(x) < 0$

$\forall x \in]3/2; \frac{5}{3}[$, $p(x) > 0$

EXERCICE N°40

1/ Factorisons

a/ $P(x) = x^3 - 8 = x^3 - 2^3$

$\boxed{P(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)}$

b/ $Q(x) = x^6 - 729$

$= (x^3)^2 - 27^2 = (x^3 - 27)(x^3 + 27)$

$= (x^3 - 3^3)(x^3 + 3^3)$

$\boxed{Q(x) = (x-3)(x^2 + 3x + 9)(x+3)(x^2 - 3x + 9)}$

c/ $R(x) = 625x^4 - 16$

$= (25x^2)^2 - 4^2$

$= (25x^2 - 4)(25x^2 + 4)$

$\boxed{R(x) = (5x-2)(5x+2)(25x^2 + 4)}$

d/ $S(x) = x^6 + 6x^3 + 9$

$= (x^3)^2 + 2 \times 3x^3 + 3^2$

$\boxed{S(x) = (x^3 + 3)^2}$

e/ $T(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$

$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2$

$\boxed{T(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}$

f/ $U(x) = x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$

$= (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2$

$\boxed{U(x) = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)}$

2/ <u>Développons, réduisons puis ordonnons suivant les puissances décroissantes de x les polynômes suivants</u> :

a/ $P(x) = (x^2+5)^2 + (2x-3)^3$

$P(x) = x^4 + 10x^2 + 25 + 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

$\boxed{P(x) = x^4 + 8x^3 - 26x^2 + 54x - 2}$

b/ $Q(x) = (x^2+1)^3 + (x^4-1)^3$

$Q(x) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 + x^{12} - 3x^8 + 3x^4 - 1$

$\boxed{Q(x) = x^{12} - 3x^8 + x^6 + 6x^4 + 3x^2}$

c/ $R(x) = (x-1)^2(x+1)^3$

$= [(x-1)(x+1)]^2(x+1)$

$= (x^2-1)^2(x+1)$

$= (x^4 - 2x^2 + 1)(x+1)$

$\boxed{R(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}$

d/ $S(x) = (x^2+2x+3)^3$

$= (x^2+2x+3)^2(x^2+2x+3)$

$= (x^4 + 4x^2 + 9 + 4x^3 + 6x^2 + 12x)(x^2+2x+3)$

$= (x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9)(x^2+2x+3)$

$= x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^5 + 8x^4 + 12x^3 + 10x^4 + 20x^3$

$+ 30x^2 + 12x^3 + 24x^2 + 36x + 9x^2 + 18x + 27$

$\boxed{S(x) = x^6 + 6x^5 + 21x^4 + 44x^3 + 63x^2 + 54x + 27}$

EXERCICE N°41

Soit le polynôme P défini par:

$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$

1/ a/ Calculons $P(1)$

$P(1) = 2 + 5 - 1 - 6 = 7 - 7 = 0$

$\boxed{P(1) = 0}$

b/ Déduisons-en qu'il existe un polynôme Q du second degré tel que : $P(x) = (x-1)Q(x)$

$P(1) = 0$, donc il existe un polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)Q(x)$.

Or $d^\circ P = d^\circ(x-1) + d^\circ Q$

$\Leftrightarrow 3 = 1 + d^\circ Q \Leftrightarrow d^\circ Q = 2$

Q est donc de degré 2.

Posons $Q(x) = ax^2 + bx + c$

$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

Par identification on a:

$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = 5 \\ c - b = -1 \\ -c = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \\ c = 6 \end{cases}$

$Q(x) = 2x^2 + 7x + 6.$

c/ Factorisons $Q(x)$ après avoir trouvé sa forme canonique

$Q(x) = 2x^2 + 7x + 6$

$= 2\left(x^2 + \frac{7}{2} + 3\right)$

$= 2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + 3\right]$

$= 2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right]$

$= 2\left(x + \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{7}{4} - \frac{1}{4}\right)$

$= 2(x+2)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

$\boxed{Q(x) = (x+2)(2x+3)}$

2/ a/ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $Q(x) = 0$

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x+2)(2x+3)=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=-\frac{3}{2}$

$\boxed{S=\left\{-2;-\frac{3}{2};1\right\}}$

b/ Etudions le signe de P(x) suivant les valeurs de x

x	$-\infty$	-2		$-3/2$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Conclusion

$\forall x \in \left\{-2;-\frac{3}{2};1\right\}$, $P(x)=0$

$\forall x \in]-\infty;-2[\cup]-\frac{3}{2};1[$, $P(x)<0$

$\forall x \in]-2;-\frac{3}{2}[\cup]1;+\infty[$, $P(x)>0$

3/ Déterminons le domaine de définition des fonctions suivantes :

a/ $f(x)=\frac{1}{P(x)}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / P(x)\neq 0\}$

Posons $P(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=-\frac{3}{2}$ ou $x=1$

$\boxed{D_f=\mathbb{R}-\left\{-2;-\frac{3}{2};1\right\}}$

b/ $g(x)=\sqrt{P(x)}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R} / P(x)\geq 0\}$

or $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-2;-\frac{3}{2}\right]\cup[1;+\infty[$

$\boxed{D_g=\left[-2;-\frac{3}{2}\right]\cup[1;+\infty[}$

EXERCICE N°42

1/ Déterminons le polynôme P de degré 2 qui s'annule en -2 et 1 et qui prend la valeur 6 en 0

1ère méthode

$P(-2)=P(1)=0 \Leftrightarrow P(x)=a(x+2)(x-1)$

$P(0)=6 \Leftrightarrow -2a=6 \Leftrightarrow a=-3$

$\boxed{P(x)=-3(x+2)(x-1)}$

2e méthode

Posons $P(x)=ax^2+bx+c$

$\begin{cases}P(-2)=0\\P(1)=0\\P(0)=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a-2b+c=0\\a+b+c=0\\c=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a-2b=-6\\a+b=-6\\c=6\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6a=-18 \Rightarrow a=-3\\b=-6-a=-6+3=-3\\c=6\end{cases}$

On a donc :

$\boxed{P(x)=-3x^2-3x+6}$

2/ Etudions le signe de P(x) suivant les valeurs de x

$P(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$-3(x+2)$	$+$	0	$-$		$-$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Conclusion

$\forall x \in \{-2;1\}$ $P(x)=0$

$\forall x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$, $P(x)<0$

$\forall x \in]-2;1[$, $P(x)>0$

3·/ Déterminons l'ensemble S des valeurs de x vérifiant : $|P(x)| = -P(x)$

$|P(x)| = -P(x) \Leftrightarrow P(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$

$$\boxed{S =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[}$$

4·/ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(|x|) \geq 0$

$P(|x|) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq |x| \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$$\boxed{S = [-1; 1]}$$

5·/ Déterminons l'image réciproque de $\mathbb{R}^+$ par P.

L'image réciproque de $\mathbb{R}^+$ par P est l'ensemble solution de l'inéquation

$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 1]$

$$\boxed{P^{-1}(\mathbb{R}^+) = [-2; 1]}$$

EXERCICE N°43

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = (x^2-1)^2 + (2x)^2$

1·/ Développons, réduisons et ordonnons le polynôme P.

$P(x) = (x^2-1)^2 + (2x)^2$

$= x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

$$\boxed{P(x) = x^4 + 2x^2 + 1}$$

2·/ Factorisons P.

$$\boxed{P(x) = (x^2+1)^2}$$

3·/ Trouvons deux nombres entiers p et q tels que $p^2 + q^2 = 101^2$

On sait que $101^2 = (100+1)^2$

$= (10^2+1)^2 = (x^2+1)^2$ avec $x = 10$

d'après les questions 1·/ et 2·/,

$101^2 = (10^2-1)^2 + (2\times10)^2$

On en déduit que :

$$\boxed{p = 99 \text{ et } q = 20}$$

EXERCICE N°44

1·/ Démontrons qu'il existe un unique polynôme P de degré 3, qui s'annule en 0 et vérifie pour tout nombre réel x : $P(x+1) - P(x) = x^2$

Posons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0 \Leftrightarrow P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$P(x+1) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$

$= ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + a+b+c$

$P(x+1) - P(x) = 3ax^2 + (3a+2b)x + a+b+c$

$P(x+1) - P(x) = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a+2b = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$

$a = \frac{1}{3};\ b = -\frac{1}{2};\ c = \frac{1}{6}$.

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x}$$

2·/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

Démontrons que : $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = P(n+1) - P(1)$

$P(x+1) - P(x) = x^2$ (1).

Remplaçons dans (1), x par 1, 2, 3 jusqu'à n; on a:

$$1^2 = P(2) - P(1)$$
$$2^2 = P(3) - P(2)$$
$$3^2 = P(4) - P(3)$$
$$\vdots$$
$$n^2 = P(n+1) - P(n)$$

En additionnant membres à membres les n égalités obtenues et en simplifiant on a:

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = P(n+1) - P(1)}$$

b/ Déduisons-en que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = P(n+1) - P(1) = P(n+1)$

car $P(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$

$$P(n+1) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1)$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1\right]$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n)$$

$$P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On en déduit donc que:

$$\boxed{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

c/ Vérifions ce résultat par quelques exemples

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

$\frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 30$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$; $\frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 55$

EXERCICE N°45

1/ Démontrons que, pour tout nombre réel x : $x^3 = \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$$
$$= \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 - x^4 + 2x^3 - x^2}{4}$$
$$= \frac{4x^3}{4} = x^3$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, x^3 = \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2}$$

2/ Soit f le polynôme défini par:

$$f(x) = \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$$

Démontrons que: $f(x+1) - f(x) = x^3$

$$f(x+1) = \left[\frac{(x+1)^2 - (x+1)}{2}\right]^2 = \left(\frac{x^2+2x+1-x-1}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2$$

$$f(x+1) - f(x) = \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2 = x^3$$

d'après la question 1/

$$\boxed{f(x+1) - f(x) = x^3} \ (1).$$

3/ En utilisant une méthode analogue à l'exercice précédent, démontrons que: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Remplaçons dans (1), x par 1, 2, ⋯ n

On a:
$$f(2) - f(1) = 1^3$$
$$f(3) - f(2) = 2^3$$
$$\vdots$$
$$f(n+1) - f(n) = n^3$$

En additionnant membres à membres les n égalités obtenues et en simplifiant on a :

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = f(n+1)-f(1)$$

or $f(1)=0$ et $f(n+1) = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

On conclut donc que :

$$\boxed{1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

EXERCICE N°46

Soit b, c, d et e des nombres réels, a un nombre réel non nul et f le polynôme défini pour tout nombre réel x par : $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

1./ On considère la propriété (P) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}.$$

a./ Démontrons que si f vérifie (P) et α est une racine non nulle de f, alors $\frac{1}{\alpha}$ est également une racine de f

α est une racine non nulle de f entraîne $f(\alpha)=0 \iff \frac{f(\alpha)}{\alpha^4}=0$ or si f vérifie (P) alors $\frac{f(\alpha)}{\alpha^4} = f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$$\iff f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$$

Conclusion

$$\boxed{\text{si } f \text{ vérifie (P) et } \alpha \text{ est une racine non nulle de } f \text{ alors } \frac{1}{\alpha} \text{ est également une racine de } f}$$

À FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

b./ Démontrons que f vérifie la propriété (P) ssi $\begin{cases} a=e \\ \text{et} \\ b=d \end{cases}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}+e$$

f vérifie (P) $\iff f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$

$$\iff x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

$$\iff a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

Par identification on a : $\begin{cases} a=e \\ b=d \end{cases}$

Conclusion

$$\boxed{f \text{ vérifie (P) ssi } \begin{cases} a=e \\ b=d \end{cases}}$$

Déduisons-en en particulier que 0 n'est pas racine de f.

$f(0)=e$ or $\begin{cases} e=a \\ \text{et} \\ a\neq 0 \end{cases} \iff f(0)\neq 0$

$$\boxed{0 \text{ n'est donc pas racine de } f}$$

c./ Application

Soit le polynôme f défini par :

$$f(x) = 2x^4-13x^3+24x^2-13x+2$$

Mettons f sous la forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1

$$f(2) = 2.(2)^4-13.2^3+24.2^2-13.2+2$$

$$= 32-104+96-26+2 = 130-130 = 0$$

$f(2)=0 \iff f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ car f vérifie (P).

f(x) peut donc se mettre sous la forme

$f(x) = (x-2)(2x-1)Q(x)$

$= (2x^2-5x+2)Q(x)$ où Q(x) est un polynôme de degré $4-2=2$.

Par division euclidienne on a:

$B(x) = x^2-4x+1 = (x-2)^2-3$

$= (x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$

Finalement on a:

$$\boxed{f(x) = (x-2)(2x-1)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}$$

2/ On suppose désormais que f vérifie la propriété (p).

a/ Démontrons que, pour tout nombre réel x non nul :

$$\frac{f(x)}{x^2} = a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c$$

f vérifie (p) $\Leftrightarrow \begin{cases} a=e \\ b=d \end{cases}$

$\frac{f(x)}{x^2} = ax^2+bx+c+\frac{d}{x}+\frac{e}{x^2}$

$= ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}$

$= a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c$

$$\boxed{\frac{f(x)}{x^2} = a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c}$$

b/ Soit α un nombre réel non nul.

Démontrons que α est une racine de f ssi $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ est une racine du polynôme g défini pour tout nombre réel x par: $g(x) = ax^2+bx+c-2a$

$\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ f(\alpha)=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha^2} = 0$

$\Leftrightarrow a\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+b\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+c=0$

$\Leftrightarrow a\left[\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\right]+b\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+c=0$

$\Leftrightarrow a\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+c-2a=0$

$\Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}$ est racine du polynôme g.

Conclusion

$$\boxed{\begin{array}{l} f(\alpha)=0 \Leftrightarrow g\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=0 \text{ avec} \\ g(x) = ax^2+bx+c-2a \end{array}}$$

c/ Application

Soit f et g les polynômes définis par:

$f(x) = 6x^4-35x^3+62x^2-35x+6$

$g(x) = 6x^2-35x+50$ pour tout x réel

Déterminons les racines de g puis celles de f

En utilisant la forme canonique,

$g(x) = 6\left[\left(x-\frac{35}{12}\right)^2-\frac{25}{144}\right]$

$= 6\left(x-\frac{35}{12}+\frac{5}{12}\right)\left(x-\frac{35}{12}-\frac{5}{12}\right)$

$= 6\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{10}{3}\right)$

Les racines de g sont les solutions de l'équation $g(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{10}{3}$

$$\boxed{\text{Les racines de g sont donc } \frac{5}{2} \text{ et } \frac{10}{3}}$$

Les racines de f sont solutions des équations :

$x+\frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ (1) $\quad x+\frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ (2)

(1) $\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $x=2$

(2) $\Leftrightarrow 3x^2-10x+3=0 \Leftrightarrow (3x-1)(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ou $x=3$

$$\boxed{\text{Les racines de f sont : } \frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 2;\ 3.}$$

EXERCICE N°47

Soit a, b deux nombres réels distincts. On définit le polynôme P par :
$P(x) = a^2(b-x) + b^2(x-a) + x^2(a-b)$

1/ Démontrons qu'il existe un polynôme P_1 tel que, pour tout nombre réel x : $P(x) = (x-a)(x-b)P_1(x)$

$P(a) = a^2(b-a) + b^2(a-a) + a^2(a-b)$
$= (a-b)(-a^2+a^2) + b^2 \times 0$

$P(a) = 0$

$P(b) = a^2(b-b) + b^2(b-a) + b^2(a-b)$
$= a^2 \times 0 + (a-b)(-b^2+b^2)$

$P(b) = 0$

$P(a) = P(b) = 0$, il existe donc un polynôme P_1 tel que pour tout nombre réel x : $P(x) = (x-a)(x-b)P_1(x)$

2/ * Degré de P_1

Le degré de P est égal à la somme des degrés de $x \mapsto x-a$, de $x \mapsto x-b$ et de P_1. Soit $2 = 1+1+d°$

Le polynôme P_1 est de degré 0. C'est donc un polynôme constant.

* Déterminons P_1

$P(0) = a^2b - ab^2 = ab(a-b)$

$P(0) = abP_1 = ab(a-b) \iff P_1 = a-b$

$P_1(x) = a-b$
et
$P(x) = (x-a)(x-b)(a-b)$

EXERCICE N°48

1/ Déterminons les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel x on ait : $a(x^2+9) + b(x^2-9) = 6^3$

$a(x^2+9) + b(x^2-9) = 6^3$

$\iff (a+b)x^2 + 9(a-b) = 6^3$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 9(a-b)=6^3 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=24 \end{cases} \iff \begin{cases} a=12 \\ b=-12 \end{cases}$$

$a = 12$	$b = -12$

2/ Déterminons les nombres réels c et d tels que pour tout nombre réel x on ait : $c(x+3) + d(x-3) = 12$

$c(x+3) + d(x-3) = 12 \iff (c+d)x + 3(c-d) = 12$

Par identification on a :

$$\begin{cases} c+d=0 \\ 3(c-d)=12 \end{cases} \iff \begin{cases} c+d=0 \\ c-d=4 \end{cases} \iff \begin{cases} c=2 \\ d=-2 \end{cases}$$

$c = 2$	$d = -2$

3/ On considère la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \dfrac{6^3}{x^4-81}$

a/ Déterminons l'ensemble de définition D_f de f.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^4-81 \neq 0\}$

Posons $x^4-81 = 0 \iff (x^2-9)(x^2+9) = 0$

$\iff x^2-9=0$ car $x^2+9 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff (x-3)(x+3)=0 \iff x=-3$ ou $x=3$.

$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-3; 3\}}$

b-/ Déduisons de la première question qu'il existe deux nombres réels α' et β' tels que, pour tout x de D_f on ait :

$$f(x) = \frac{\alpha'}{x^2+9} + \frac{\beta'}{x^2-9}.$$

$$f(x) = \frac{\alpha'}{x^2+9} + \frac{\beta'}{x^2-9} = \frac{\alpha'(x^2-9)+\beta'(x^2+9)}{x^4-81} = \frac{6^3}{x^4-81}$$

$\Leftrightarrow \beta'(x^2+9)+\alpha'(x^2-9) = 6^3$

$\Leftrightarrow \beta' = 12$ et $\alpha' = -12$

$$\boxed{\forall x \in D_f,\ f(x) = \frac{12}{x^2-9} - \frac{12}{x^2+9}}$$

c-/ Démontrons qu'il existe trois nombres réels α, β et γ tels pour tout x élément de D_f, on ait :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x+3} + \frac{\beta}{x-3} + \frac{\gamma}{x^2+9}$$

$$= \frac{\beta(x+3)+\alpha(x-3)}{x^2-9} + \frac{\gamma}{x^2+9}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} \beta(x+3)+\alpha(x-3) = 12 \\ \gamma = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3,\ \alpha = -3 \\ \gamma = -12 \end{cases}$$

$\alpha = -3$	$\beta = 3$	$\gamma = -12$

$$\boxed{\forall x \in D_f,\ f(x) = \frac{3}{x-3} - \frac{3}{x+3} - \frac{12}{x^2+9}}$$

EXERCICE N°49

1-/ On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{3x^2-x+4}{-x+2}$.

Trouvons un polynôme P de degré 1 et un nombre réel c tel que pour tout nombre réel x différent de 2 :

$$f(x) = P(x) + \frac{c}{-x+2}$$

1ère méthode : identification

Posons $P(x) = ax+b$

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{-x+2}$$

$$= \frac{(ax+b)(-x+2)+c}{-x+2}$$

$$= \frac{-ax^2+(2a-b)x+2b+c}{-x+2}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} -a = 3 \\ 2a-b = -1 \\ 2b+c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -5 \\ c = 14 \end{cases}$$

$P(x) = -3x-5 \qquad c = 14$

$$\boxed{f(x) = -3x-5+\frac{14}{-x+2}}$$

2e méthode

Procédons par division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-x+4 & -x+2 \\ \cline{2-2} -3x^2+6x & -3x-5 = P(x) \\ \hline 5x+4 & \\ -5x+10 & \\ \hline c = 14 & \end{array}$$

$P(x) = -3x-5 \qquad c = 14$

$$\boxed{f(x) = -3x-5+\frac{14}{-x+2}}$$

2-/ On considère la fraction rationnelle g définie par : $g(x) = \frac{x^3-5x^2+10}{x-4}$,

Trouvons un polynôme Q de degré 2 et un nombre réel c tels que pour tout nombre réel x différent de 4 :

$$g(x) = Q(x) + \frac{c}{x-4}$$

1ère méthode : identification

Posons $Q(x) = mx^2+nx+p$ on a:

$$g(x) = mx^2+nx+p+\frac{c}{x-4}$$
$$= \frac{(mx^2+nx+p)(x-4)+c}{x-4}$$
$$= \frac{mx^3+(n-4m)x^2+(p-4n)x+c-4p}{x-4}$$

Par identification on a:

$$\begin{cases} m=1 \\ n-4m=-5 \\ p-4n=0 \\ c-4p=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ p=4 \\ c=26 \end{cases}$$

$Q(x) = x^2+x+4 \qquad c=26$

$$\boxed{g(x) = x^2+x+4+\frac{26}{x-4}}$$

2e méthode : Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+10 & x-4 \\ \cline{2-2} -x^3+4x^2 & x^2+x+4 = Q(x) \\ \hline x^2+10 & \\ -x^2+4x & \\ \hline 4x+10 & \\ -4x+16 & \\ \hline c=26 & \end{array}$$

$$\boxed{Q(x) = x^2+x+4 \qquad c=26}$$

$$g(x) = x^2+x+4+\frac{26}{x-4}$$

EXERCICE N°50

1/ Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par: $g(x) = x^2-2x+5$

a/ Ensemble de définition de g

$$\boxed{D_g = \mathbb{R}}$$

b/ Trouvons la forme canoniq de $g(x)$.

$g(x) = x^2-2x+5$

$g(x) = (x-1)^2-1+5 = (x-1)^2+4$

$$\boxed{g(x) = (x-1)^2+4}$$

c/ Montrons que g admet un minimum. Précisons ce minimum et le nombre réel pour lequel ce minimum est atteint

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+4 \geq 4$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 4$

g admet donc pour minimum 4.

De plus $g(1) = 4$. Ce minimum est donc atteint pour $x = 1$

d/ Etudions le sens de variation de g sur $]-\infty;1]$ et sur $[1;+\infty[$

soit u et v deux réels tels que:

- $u < v \leq 1 \Leftrightarrow u-1 < v-1 \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq (v-1)^2 < (u-1)^2$

$\Leftrightarrow 4 \leq (v-1)^2+4 < (u-1)^2+4$

$\Rightarrow g(v) < g(u)$

$\Rightarrow g$ décroissante sur $]-\infty;1]$

- $1 \leq u < v \Leftrightarrow 0 \leq u-1 < v-1$

$\Leftrightarrow 0 \leq (u-1)^2 < (v-1)^2$

$\Rightarrow 4 \leq (u-1)^2+4 < (v-1)^2+4$

$\Rightarrow g(u) < g(v)$

$\Rightarrow g$ croissante sur $[1;+\infty[$

Conclusion :

g est décroissante sur $]-\infty;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

2/ On donne la fonction

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{|x^2+x-2|}{x+2}$

a/ Domaine de définition de h

$Dh = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$

Posons $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

$\boxed{Dh = \mathbb{R} - \{-2\}}$

b/ Etude du signe de $N(x) = x^2+x-2$

$N(x) = (x+2)(x-1)$

$N(x) = 0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$N(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion

$\forall x \in \{-2;1\}$, $N(x) = 0$

$\forall x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$, $N(x) > 0$

$\forall x \in]-2;1[$, $N(x) < 0$

Ecrivons $|x^2+x-2|$ sans les barres de valeur absolue

$\forall x \in]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$, $x^2+x-2 \geq 0$

$\Leftrightarrow |x^2+x-2| = x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

$\forall x \in [-2;1]$, $x^2+x-2 \leq 0$

$\Leftrightarrow |x^2+x-2| = -(x^2+x-2)$
$= -(x+2)(x-1)$

$$\boxed{|x^2+x-2| = \begin{cases} x^2+x-2 \text{ si } x \in]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[\\ -(x^2+x-2) \text{ si } x \in [-2;1] \end{cases}}$$

c/ Trouvons une écriture simplifiée de $h(x)$.

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2} \text{ si } x \in]-\infty;-2[\cup [1;+\infty[\\ \dfrac{-(x^2+x-2)}{x+2} \text{ si } x \in]-2;1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x+2} \text{ si } x < -2 \text{ ou } x \geq 1 \\ \dfrac{-(x+2)(x-1)}{x+2} \text{ si } -2 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} x-1 \text{ si } x < -2 \text{ ou } x \geq 1 \\ -x+1 \text{ si } -2 < x \leq 1 \end{cases}}$$

• Dressons le tableau de variation de h

h est croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $[1;+\infty[$

h est décroissante sur $]-2;1]$

Tableau de variations de h

x	$-\infty$		-2 ‖		1		$+\infty$
$h(x)$		↗	-3 ‖ 3	↘	0	↗	

3/ Soit $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{2x^2-3x+4}{x-1}$

a/ Domaine de définition de k

$Dk = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\}$ Posons $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$\boxed{Dk = \mathbb{R} - \{1\}}$

b/ Montrons qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que:

$\forall x \in Dk$, $k(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

$k(x) = \dfrac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}$

$k(x) = \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1} = \frac{2x^2-3x+4}{x-1}$

Par identification on a:

$\begin{cases} a=2 \\ b-a=-3 \\ c-b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=3 \end{cases}$

$a=2$	$b=-1$	$c=3$

$\boxed{\forall x \in D_k,\ k(x) = 2x-1+\frac{3}{x-1}}$

EXERCICE N°51

On donne la fonction :

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto ax^2+bx+c$

1/ Soit (C) la représentation graphique de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Déterminons les réels a, b, c pour que (C) passe par les points : $A(-4;-5)$ $B(-2;3)$ et $E(-1;4)$

Les conditions ci-dessus se traduisent par: $\begin{cases} g(-4)=-5 \\ g(-2)=3 \\ g(-1)=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a-4b+c=-5 \\ 4a-2b+c=3 \\ a-b+c=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a-b=-4 \\ 3a-b=-1 \\ a-b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=-3 \\ b=3a+1 \\ c=4-a+b \end{cases}$

$a=-1$	$b=-2$	$c=3$

2/ Soient les fonctions f et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par:

$f(x) = -x^2-2x+3$ et $h(x)=4(x+3)$

a/ Mettons f(x) sous forme canonique

$f(x) = -x^2-2x+3 = -(x^2+2x-3)$

$= -[(x+1)^2-1-3]$

$\boxed{f(x) = -[(x+1)^2-4]}$

b/ Montrons que f admet un maximum sur son ensemble de définition:

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2-4 \geq -4$

$\Leftrightarrow -[(x+1)^2-4] \leq 4$

$\forall x \in D_f=\mathbb{R},\ f(x) \leq 4.$

f admet donc un maximum sur son ensemble de définition. Ce maximum est 4.

c/ Etude du sens de variation de f sur $]-\infty;-1]$ et sur $[-1;+\infty[$

Soit u et v deux réels

- $u<v\leq -1 \Leftrightarrow u+1<v+1\leq 0$

$\Leftrightarrow 0\leq (v+1)^2<(u+1)^2$

$\Leftrightarrow -4\leq (v+1)^2-4<(u+1)^2-4$

$\Leftrightarrow -[(u+1)^2-4]<-[(v+1)^2-4]\leq 4$

Soit $f(u)<f(v)\leq 4$

f est donc croissante sur $]-\infty;-1]$

- $-1\leq u<v \Leftrightarrow 0\leq u+1<v+1$

$\Leftrightarrow 0\leq (u+1)^2<(v+1)^2$

$\Leftrightarrow -4\leq (u+1)^2-4<(v+1)^2-4$

$\Leftrightarrow -[(v+1)^2-4] < -[(u+1)^2-4] \leq 4$

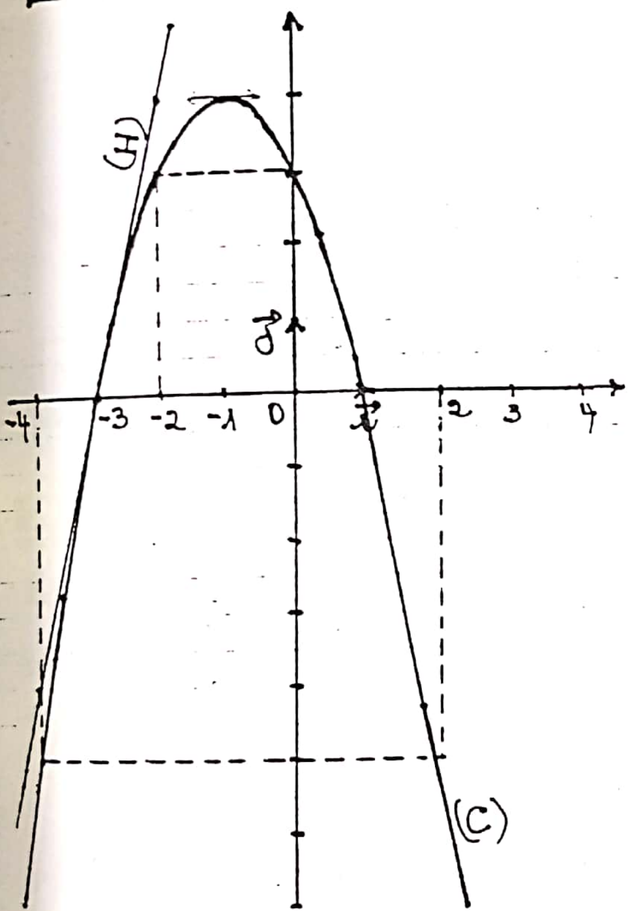
Soit $f(v) < f(u) \leq 4$

f est donc décroissante sur $[-1;+\infty[$.

d-/ Construction de (C) avec soins

Tableau de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	0	3	4	3	0	-5



e-/ Déterminons graphiquement et algébriquement l'image réciproque :

- de $\{-5\}$

graphiquement : $f^{-1}(\{-5\}) = \{-4;2\}$

algébriquement l'image réciproque de $\{-5\}$ est l'ensemble solution de l'équation : $f(x) = -5 \Leftrightarrow -(x+1)^2+4 = -5$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1-3)(x+1+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -4$

$$\boxed{f^{-1}(\{-5\}) = \{-4;2\}}$$

- de $\{3\}$

Graphiquement : $f^{-1}(\{3\}) = \{-2;0\}$

Algébriquement l'image réciproque de $\{3\}$ est l'ensemble solution de l'équation : $f(x) = 3 \Leftrightarrow -x^2-2x+3 = 3$

$\Leftrightarrow -x^2-2x = 0$

$\Leftrightarrow -x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$

$$\boxed{f^{-1}(\{3\}) = \{-2;0\}}$$

- de $]-\infty;0]$

Graphiquement on a :

$f^{-1}(]-\infty;0]) =]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$

Algébriquement l'image réciproque de $]-\infty;0]$ est l'ensemble solution de l'inéquation : $f(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow -(x+3)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) \geq 0$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+3)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f^{-1}(]-\infty;0]) =]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$

f-/ Contruction de la courbe H de h sur le même graphique que (C)

(Voir figure ci-contre)

g/ Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équat° $f(x) = h(x)$

$f(x) = h(x) \iff f(x) - h(x) = 0$

$\iff -(x+3)(x-1) - 4(x+3) = 0$

$\iff (x+3)(-x+1-4) = 0$

$\iff (x+3)(-x-3) = 0$

$\iff x+3 = 0 \iff x = -3$

$\boxed{S = \{-3\}}$

Comparons $f(x)$ et $h(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, -(x+3)^2 \leq 0 \iff f(x) - h(x) \leq 0$

$\iff f(x) \leq h(x)$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq h(x)}$

EXERCICE N°52

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = (x+2)^2 - 1$$

1/ Etude des variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty; -2]$ et $[-2; +\infty[$

Soit u et v deux réels tels que :

- $u < v \leq -2 \iff u+2 < v+2 \leq 0$

$\iff 0 \leq (v+2)^2 < (u+2)^2$

$\iff -1 \leq (v+2)^2 - 1 < (u+2)^2 - 1$

$\iff -1 \leq f(v) < f(u)$

f est donc décroissante sur $]-\infty; -2]$

- $-2 \leq u < v \iff 0 \leq u+2 < v+2$

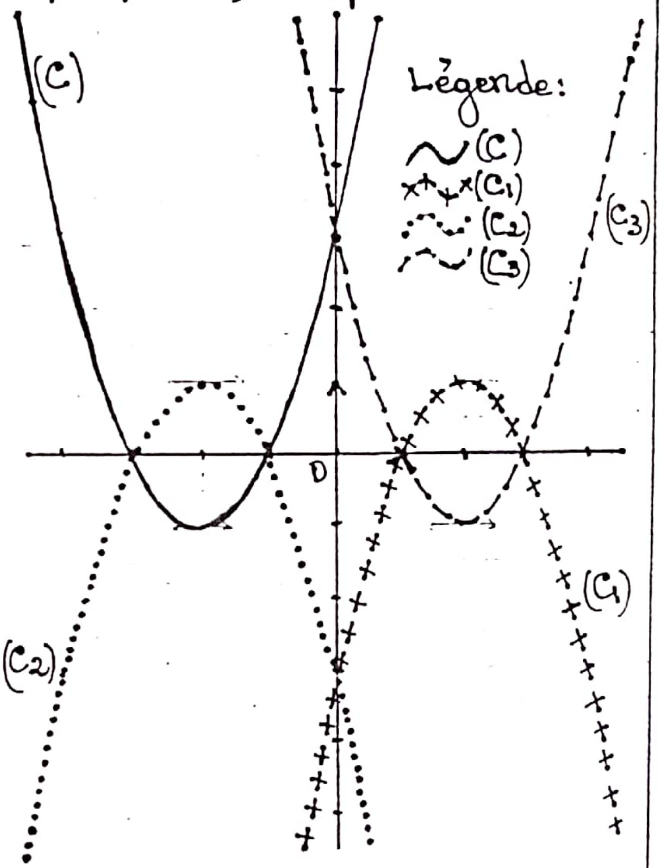
$\iff 0 \leq (u+2)^2 < (v+2)^2$

$\iff -1 \leq (u+2)^2 - 1 < (v+2)^2 - 1$

$\iff -1 \leq f(u) < f(v)$

f est croissante sur $[-2; +\infty[$

Traçons la représentation graphique (C) de f



2/ – Tracer de $(C_1) = S_O(C)$
Voir figure

– Equation de (C_1).

$(C_1) : y = -f(-x) = -(-x+2)^2 + 1$

3/ – Tracer de $(C_2) = S_{(OI)}(C)$
Voir figure ci-dessous

– Equation de (C_2).

$(C_2) : y = -f(x) = -(x+2)^2 + 1$

4/ Tracer de $(C_3) = S_{(OJ)}(C)$ Voir Fig
Eq : $y = f(-x) = (-x+2)^2 - 1$

EXERCICE N°53

Le plan est muni du repère (O, I, J)

On considère les fonctions

ques f et g définies par :

$f(x) = x|x|$ et $g(x) = x^3$.

1./ Etudions les variations de f

On sait que $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Soit u et v deux réels tels que :

- $u < v \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq v^2 < u^2$

$\Leftrightarrow -u^2 < -v^2 < 0$

$\Leftrightarrow f(u) < f(v)$

f est donc croissante sur $]-\infty; 0]$

- $0 \leq u < v \Leftrightarrow 0 \leq u^2 < v^2$

$\Leftrightarrow f(u) < f(v)$

f est donc croissante sur $[0; +\infty[$

Conclusion

f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Construction de la courbe (Cf)

(Voir figure ci-contre)

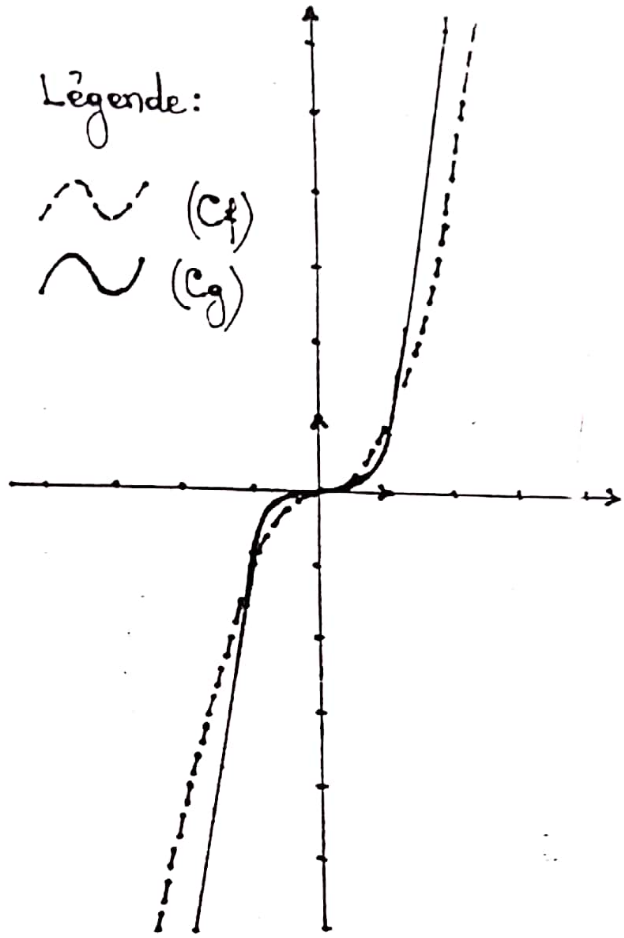
2./ Traçons sur le même graphique la courbe représentative (Cg) de g

(Voir figure ci-contre)

3./ a./ Résolution de l'équation f(x) = g(x)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow x|x| - x^3 = 0$



$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - x^3 = 0 \text{ si } x \leq 0 \ (1) \\ \text{ou} \\ x^2 - x^3 = 0 \text{ si } x \geq 0 \ (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow -x^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$

(2) $\Rightarrow x^2(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

$$\boxed{S = \{-1; 0; 1\}}$$

b./ Comparons pour tout nombre réel x, f(x) et g(x)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion

$\forall x \in \{-1; 0; 1\}$, $f(x) = g(x)$

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; 1[$, $f(x) > g(x)$

$\forall x \in]-1; 0[\cup]1; +\infty[$, $f(x) < g(x)$

EXERCICE N°54

Soit la fonction f_m définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f_m(x) = mx^2 - 2(m+1)x - 3m + 2$ où m est un paramètre réel. Soit (C_m) la courbe représentative de f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1./ Donnons suivant les valeurs de m la nature de courbe (C_m)

- $m > 0$: (C_m) est une parabole dont la concavité est tournée vers le haut.
- $m = 0$: (C_0) est la droite d'équation
$$y = -2x + 2$$
- $m < 0$: (C_m) est une parabole dont la concavité est tournée vers le bas

2./ Montrons que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées

Posons $y = f_m(x)$

$\Leftrightarrow y = mx^2 - 2(m+1)x - 3m + 2$

$\Leftrightarrow y = mx^2 - 2mx - 2x - 3m + 2$

$\Leftrightarrow y + 2x - 2 = m(x^2 - 2x - 3)$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1) = 0 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{et} \\ y = -4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ \text{et} \\ y = 4 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Toutes les courbes } (C_m) \text{ passent par deux points fixes } A(3;-4) \text{ et } B(-1;4)}$

3./ Déterminons m pour que la courbe (C_m) passe par le point $E(4;-1)$

(C_m) passe par $E(4;-1)$ ssi

$f_m(4) = -1 \Leftrightarrow 16m - 8m - 8 - 3m + 2 = -1$

$\Leftrightarrow 5m = 5 \Leftrightarrow m = 1$

$\boxed{\text{La valeur de } m \text{ pour laquelle } (C_m) \text{ passe par } E(4;-1) \text{ est } m = 1}$

4./ Dans la suite de l'exercice on pose $m = 1$. On désigne f_1 par g et (C_1) par $(\mathscr{C})$.

a./ Donnons l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

$g(x) = f_1(x) = x^2 - 4x - 1$

$$\boxed{g(x) = x^2 - 4x - 1}$$

b./ Etudions le sens de variation de g sur $]-\infty; 2]$ et sur $[2; +\infty[$

Soit u et v deux réels.

- La forme canonique de $g(x)$ est : $g(x) = (x-2)^2 - 5$
- $u < v \leq 2 \Leftrightarrow u - 2 < v - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq (v-2)^2 < (u-2)^2$

$\Leftrightarrow -5 \leq (v-2)^2 - 5 < (u-2)^2 - 5$

$\Leftrightarrow g(v) < g(u)$

g est donc décroissante sur $]-\infty; 2]$

• $2 \le u < v \Leftrightarrow 0 \le u-2 < v-2$

$\Leftrightarrow 0 \le (u-2)^2 < (v-2)^2$

$\Leftrightarrow -5 \le (u-2)^2-5 < (v-2)^2-5$

$\Leftrightarrow g(u) < g(v)$

g est donc croissante sur $[2;+\infty[$

c./ <u>Déterminons les points d'intersection de (C) avec les axes du repère</u>

- Intersection de (C) avec (Ox)

$g(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-5=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=-\sqrt{5} \Leftrightarrow x=2-\sqrt{5} \\ \text{ou} \\ x-2=\sqrt{5} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{5}. \end{cases}$$

(C) coupe l'axe (Ox) en deux points $P(2-\sqrt{5};0)$ et $Q(2+\sqrt{5};0)$

- Intersection de (C) avec (Oy)

$g(0)=-1$.

(C) coupe (Oy) en $R(0;-1)$.

d./ <u>Construction soignée de (C).</u>

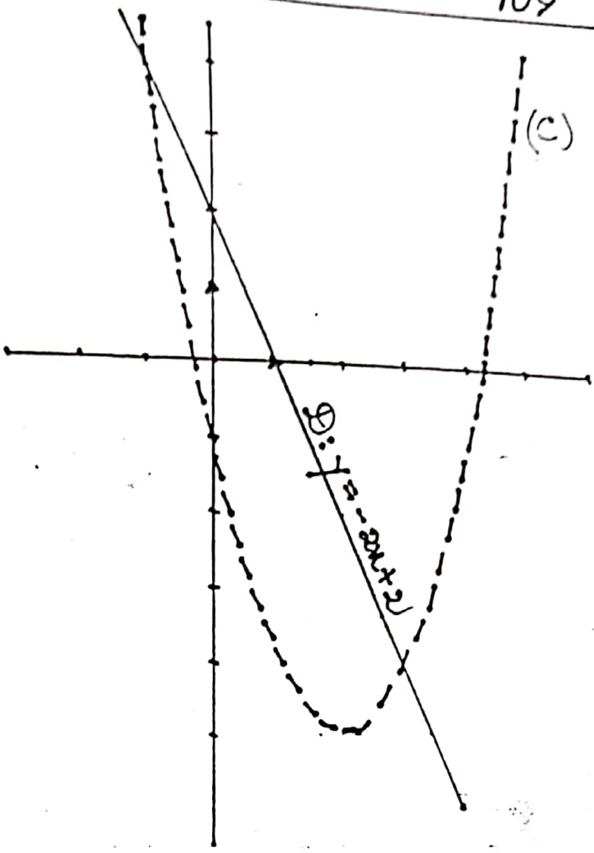
(Voir figure ci-contre)

5./ Soit (D) la droite d'équation

$y=-2x+2$

a./ <u>Construction de (D) dans le même repère que (C)</u> (Voir figure)

b./ <u>Déterminons graphiquement puis par calcul l'ensemble solution de l'inéquation : $g(x) \geq -2x+2$</u>



Graphiquement on a :

$S=]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$

Par calcul on a :

$g(x) \geq -2x+2 \Leftrightarrow x^2-4x-1 \geq -2x+2$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-1) \geq 0$

Posons $(x-3)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=-1$

Signe de $(x-3)(x+1)$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-3)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

On en déduit que :

$S=]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$

c./ Construction de (C') sur

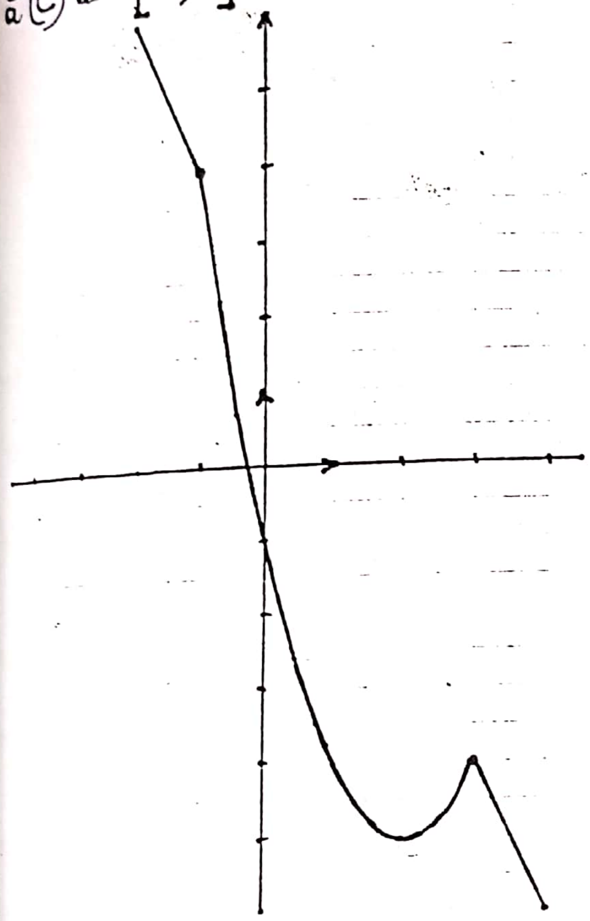
(Voir figure à la page suivante)

$h(x) = \min(g(x)\,;\,-2x+2)$

D'après la question précédente on a:

$$h(x) = \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3 \\ g(x) & \text{si } -1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

(C') est donc confondue à $(\mathcal{D})$ sur $]-\infty;-1]$ et sur $[3;+\infty[$ puis confondue à (C) sur $[-1;3]$



EXERCICE N°55

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^2 - 4x - 3$.

a-/ Déterminons la forme canonique de $f(x)$

$$f(x) = x^2 - 4x - 3$$
$$= (x-2)^2 - 4 - 3$$

$$\boxed{f(x) = (x-2)^2 - 7}$$

b-/ Montrons que la fonction f admet un minimum en 2

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 7 \geq -7$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq -7$ or $f(2) = -7$.

$\boxed{f \text{ admet donc pour minimum } -7 \text{ en } 2}$

c-/ Etude des variations de f sur $]-\infty;2]$ et sur $[2;+\infty[$

Soit a et b deux réels

- $a < b \leq 2 \Leftrightarrow a-2 < b-2 \leq 0$
  $\Leftrightarrow 0 \leq (b-2)^2 < (a-2)^2$
  $\Leftrightarrow -7 \leq (b-2)^2 - 7 < (a-2)^2 - 7$
  $\Rightarrow f(b) < f(a)$
- $2 \leq a < b \Leftrightarrow 0 \leq a-2 < b-2$
  $\Leftrightarrow 0 \leq (a-2)^2 < (b-2)^2$
  $\Leftrightarrow -7 \leq (a-2)^2 - 7 < (b-2)^2 - 7.$
  $\Leftrightarrow f(a) < f(b)$

Conclusion

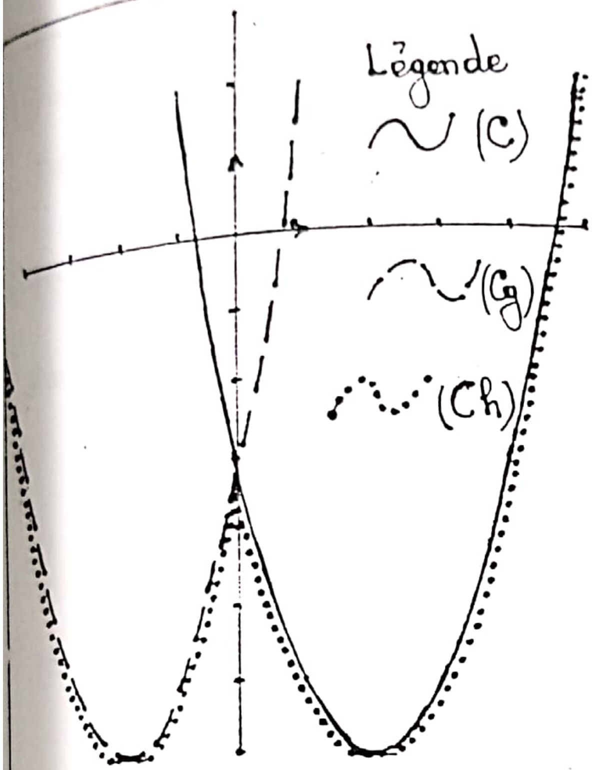
f est décroissante sur $]-\infty;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$

d-/ Construction de la courbe (C) représentative de f

Tableau de valeurs

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	-3	-6	-7	-6	-3	2

Pour la construction, Voir page suivante



2-/ Soit les fonctions g et h définies par : $g(x) = f(-x)$ et $h(x) = f(|x|)$

a-/ Construction de la courbe (Cg) de g à partir de (C)

(Cg) est l'image de (C) dans la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées (OY). (Voir figure ci-dessus)

b-/ Montrons que h coïncide avec g sur $\mathbb{R}^-$ et que h coïncide avec f sur $\mathbb{R}^+$

$\forall x \leq 0$, $|x| = -x$ et $h(x) = f(-x) = g(x)$

$\forall x \geq 0$, $|x| = x$ et $h(x) = f(x)$.

Conclusion

h coïncide avec g sur $\mathbb{R}^-$ et coïncide avec f sur $\mathbb{R}^+$.

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

c-/ Déduisons-en la construction de la courbe (Ch) représentative de h dans le même repère que (C) et (Cg).

D'après la question précédente, (Ch) est confondue à (Cg) sur $]-\infty; 0]$ puis confondue à (C) sur $[0; +\infty[$

EXERCICE N°56

1-/ Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$

a-/ $\left|\frac{x-1}{x}\right| = x^2+3x-4$ (1)

Posons $x^2+3x-4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 1$

Signe de x^2+3x-4

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{x-1}{x}\right|^2 = (x^2+3x-4)^2 \text{ et} \\ x^2+3x-4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2} = (x-1)^2(x+4)^2 \\ x \leq -4 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2\left[x^2(x+4)^2-1\right] = 0 \\ x \leq -4 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(x^2+4x-1)(x^2+4x+1) = 0 \quad (a) \\ x \leq -4 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

$$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ x^2+4x-1 = 0 \quad (b) \\ x^2+4x+1 = 0 \quad (c) \end{cases}$$

Posons $I =]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$

(b) $\Leftrightarrow (x+2)^2-5=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-\sqrt{5} \in I \\ \text{ou} \\ x=-2+\sqrt{5} \notin I \end{cases}$

(c) $\Leftrightarrow (x+2)^2-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-\sqrt{3} \notin I \\ \text{ou} \\ x=-2+\sqrt{3} \notin I \end{cases}$

Finalement on a:

$$\boxed{S=\{-2-\sqrt{5};1\}}$$

b/ $\dfrac{x^4-3x^2-1}{x-2} = x+2$ (2).

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4-3x^2-1=(x-2)(x+2) \text{ (a)} \\ \text{et} \\ x \neq 2 \end{cases}$

(a) $\Leftrightarrow x^4-3x^2-1 = x^2-4$

$\Leftrightarrow x^4-4x^2+3=0$ $(x^2-1)(x^2-3)=0$

$\Leftrightarrow x=-\sqrt{3}$ ou $x=-1$ ou $x=1$ ou $x=\sqrt{3}$

$$\boxed{S=\{-\sqrt{3};-1;1;\sqrt{3}\}}$$

c/ $|x^2-|x^2-1|| = 1$ (3)

Posons $f(x)=|x^2-|x^2-1||$

Signe de x^2-1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+	

$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 \text{ si } x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\\ -x^2+1 \text{ si } x \in [-1;1] = S_2 \end{cases}$

Posons $S_1 =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in S_1 \\ |2x^2-1| \text{ si } x \in S_2 \end{cases}$

(3) $\Leftrightarrow x \in S_1$ ou $(2x^2-1)^2 = 1$ (a)

(a) $\Leftrightarrow (2x^2-1)^2-1=0$

$\Leftrightarrow (2x^2-2)(2x^2)=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=0$ ou $x=1$

$S = S_1 \cup \{-1;0;1\}$

$$\boxed{S=]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\cup \{0\}}$$

2/ Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$

a/ $|2x-5| = |7-x|$

$\Leftrightarrow (2x-5)^2-(7-x)^2=0$

$\Leftrightarrow (2x-5-7+x)(2x-5+7-x)=0$

$\Leftrightarrow (3x-12)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=4$ ou $x=-2$

$$\boxed{S=\{-2;4\}}$$

b/ $|x^2-5x+13| = |6x-15|$ (2)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+13 = 6x-15 \text{ (a)} \\ \text{ou} \\ x^2-5x+13 = -6x+15 \text{ (b)} \end{cases}$

(a) $\Leftrightarrow x^2-11x+28=0$ En utilisant la forme canonique et en factorisant on obtient : $(x-4)(x-7)=0$

$\Leftrightarrow x=4$ ou $x=7$

(b) $\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=1$

$$\boxed{S=\{-2;1;4;7\}}$$

c/ $|4x^2-x-9| = |3x^2-5x-3|$ (3)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-x-9 = 3x^2-5x-3 \text{ (a)} \\ \text{ou} \\ 4x^2-x-9 = -3x^2+5x+3 \text{ (b)} \end{cases}$

(a) $\Leftrightarrow x^2+4x-6=0 \Leftrightarrow (x+2)^2-10=0$

$\Leftrightarrow x=-2-\sqrt{10}$ ou $x=-2+\sqrt{10}$

(b) $\Leftrightarrow 7x^2-6x-12=0$

$\Leftrightarrow 7\left(x^2-\frac{6}{7}x-\frac{12}{7}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{7}\right)^2-\frac{9}{49}-\frac{12}{7}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{7}\right)^2-\frac{93}{49}=0 \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{93}}{7}$ ou $x=\frac{3+\sqrt{93}}{7}$

$$\boxed{S=\left\{-2-\sqrt{10};-2+\sqrt{10};\frac{3-\sqrt{93}}{7};\frac{3+\sqrt{93}}{7}\right\}}$$

3°/ Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$

a/ $x^2-13x+36=0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x-9)=0 \Leftrightarrow x=4$ ou $x=9$

$$\boxed{S=\{4;9\}}$$

b/ $x^4-13x^2+36=0$ (1)

Posons $X=x^2$

(1) devient $X^2-13X+36=0$

$\Leftrightarrow X=4$ ou $X=9$

$x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$; $x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

$$\boxed{S=\{-3;-2;2;3\}}$$

c/ $(2x+1)^4-13(2x+1)^2+36=0$ (2)

Posons $t=2x+1$

(2) devient $t^4-13t^2+36=0$

D'après la question précédente, on a:

$t=-3$ ou $t=-2$ ou $t=2$ ou $t=3$

$2x+1=-3 \Leftrightarrow x=-2$; $2x+1=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

$2x+1=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$; $2x+1=3 \Leftrightarrow x=1$

$$\boxed{S=\left\{-2;-\frac{3}{2};\frac{1}{2};1\right\}}$$

d/ $(2x^2+1)^4-13(2x^2+1)^2+36=0$

En procédant comme précédemment,

on a: $\begin{cases} 2x^2+1=-3 & (a)\\ 2x^2+1=-2 & (b)\\ 2x^2+1=2 & (c)\\ 2x^2+1=3 & (d)\end{cases}$

(a) $\Leftrightarrow 2x^2=-4$ impossible

(b) $\Leftrightarrow 2x^2=-3$ impossible

(c) $\Leftrightarrow 2x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(d) $\Leftrightarrow 2x^2=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$

$$\boxed{S=\left\{-1;-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};1\right\}}$$

EXERCICE N°57

1/ Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équat:

$\frac{|1-|x||}{2-|x|}=1+|x|$ (1) Posons $t=|x|$

(1) $\Leftrightarrow \frac{|1-t|}{2-t}=1+t$, $t\neq 2$

$\Leftrightarrow |1-t|=(2-t)(1+t)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-t)^2=(2-t)^2(1+t)^2 & (a)\\ 0\leq t<2.\end{cases}$ Posons $I=[0;2[$

(a) $\Rightarrow (1-t)^2=(-t^2+t+2)^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1-t=-t^2+t+2 & (b)\\ \text{ou}\\ 1-t=t^2-t-2 & (c)\end{cases}$

(b) $\Leftrightarrow t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow (t-1)^2-2=0$

$\Leftrightarrow t=1-\sqrt{2}\notin I$ ou $t=1+\sqrt{2}\notin I$

(c) $\Leftrightarrow t^2-3=0 \Leftrightarrow t=-\sqrt{3}\notin I$ ou $t=\sqrt{3}\in I$

$|x|=t \Leftrightarrow |x|=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$

$$\boxed{S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}}$$

2/ On considère l'équation suivante

$$(E): \frac{1+\dfrac{1+x}{1+\dfrac{1}{x}}}{1-\dfrac{1-x}{1-\dfrac{1}{x}}}=1$$

Résolvons (E) en précisant à chaque étape de la résolution, les contraintes sur l'inconnue

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1+\dfrac{x(1+x)}{x+1}}{1-\dfrac{x(1-x)}{x-1}}=1 \text{ avec } x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x}{1+x}=1 \text{ avec } x\neq 0 \text{ et } x\neq -1$$

(E) est vraie pour $x\neq -1$; $x\neq 0$ et $x\neq 1$

$$\boxed{S=\mathbb{R}-\{-1;0;1\}}$$

3/ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{x^2+|x|+2}{x^2-|x|+2}=2 \quad (1)$$

Posons $t=|x|$ on a: $x^2=t^2$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{t^2+t+2}{t^2-t+2}=2$$

$\Leftrightarrow t^2+t+2=2(t^2-t+2)$, $t\geq 0$

$\Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \quad t\geq 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t-2)=0 \quad t\geq 0$

$\Leftrightarrow t=1$ ou $t=2$

$|x|=1 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$

$|x|=2 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$

$$\boxed{S=\{-2;-1;1;2\}}$$

EXERCICE N°58

1/ On considère l'équation :

$$(E): 3\sqrt{9-x^2}=x$$

a/ Précisons les contraintes sur l'inconnue

L'ensemble $\mathcal{D}$ des valeurs de x pour lesquelles (E) a un sens est:

$$\mathcal{D}=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 0 \text{ et } 9-x^2\geq 0\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 0 \text{ et } -3\leq x\leq 3\}$$

$$\boxed{\mathcal{D}=[0;3]}$$

b/ Résolution de (E) dans $\mathbb{R}$

$$(E) \Rightarrow \begin{cases} 9(9-x^2)=x^2 \\ x\in[0;3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2=81 \\ x\in[0;3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{9}{\sqrt{10}}=\frac{9\sqrt{10}}{10}$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{9\sqrt{10}}{10}\right\}}$$

2/ De la même façon résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation:

$$(E'): x^2-\sqrt{4-x^2}+2=0$$

$$(E') \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=x^2+2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2=(x^2+2)^2 \\ 4-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+5x^2=0 \\ -2\leq x\leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x^2+5)=0 \Leftrightarrow x=0 \\ -2\leq x\leq 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=0$

$$\boxed{S=\{0\}}$$

EXERCICE N°59

Soit S le capital initial du marchand. Soit x l'avoir du marchand la première, y celui de la 2^e année et z celui de la 3^e année. Les conditions de l'énoncé nous permettent d'écrire :

$$x = (S-100) + \frac{1}{3}(S-100) = \frac{4}{3}(S-100)$$

$$y = (x-100) + \frac{1}{3}(x-100) = \frac{4}{3}(x-100)$$

$$y = \frac{4}{3}\left[\frac{4}{3}S - \frac{400}{3} - 100\right] = \frac{16S - 2800}{9}$$

$$z = (y-100) + \frac{1}{3}(y-100) = \frac{4}{3}(y-100)$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{16S-2800}{9} - 100\right] = \frac{64S - 14800}{27}$$

$$z = 2S \Leftrightarrow \frac{64S - 14800}{27} = 2S$$

$$\Leftrightarrow 64S - 14800 = 54S$$

$$\Leftrightarrow 10S = 14800 \Leftrightarrow S = 1480$$

Le capital initial du marchand est :

$S = 1480$ livres

EXERCICE N°60

Soit S la somme qu'avait la dame charitable au début de sa promenade. Soit x, y et z l'avoir de la dame lorsqu'elle quittait respectivement le 1er, 2^e et le 3^e mendiant. On a :

$$x = S - \left(\frac{S}{2} + 100\right) = \frac{S}{2} - 100$$

$$y = x - \left(\frac{x}{2} + 100\right) = \frac{x}{2} - 100$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{S}{2} - 100\right) - 100 = \frac{S}{4} - 150$$

$$z = y - \left(\frac{y}{2} + 100\right) = \frac{y}{2} - 100$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{S}{4} - 150\right) - 100 = \frac{S}{8} - 175$$

Or $z = 100 \Leftrightarrow \frac{S}{8} - 175 = 100$

$$\Leftrightarrow S = 8 \times 275 = 2200$$

La somme qu'avait la dame charitable au début de sa promenade est

$S = 2200$F

EXERCICE N°61

Soit S la somme dont disposait la personne au départ. Soit x l'avoir à la sortie du 1er magasin, y celui à la sortie du second magasin.

$$x = S - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S$$

$$y = x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x = \frac{3}{8}S$$

De plus : $y - 500 = 400 \Leftrightarrow y = 900$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}S = 900 \Leftrightarrow S = 2400$$

La somme dont disposait la personne au départ est $S = 2400$F

EXERCICE N°62

Résolution d'inéquations dans $\mathbb{R}$

a/ $\frac{x-2}{x+1} < \frac{2x+5}{x}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} - \frac{2x+5}{x} < 0, \quad x \neq -1 \text{ et } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-2)-(x+1)(2x+5)}{x(x+1)} < 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2+9x+5}{x(x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+9x+5}{x(x+1)} > 0$$

Posons $x^2+9x+5=0 \iff \left(x+\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}+5=0$

$\iff \left(x+\frac{9}{2}\right)^2-\frac{61}{4}=0$

$\Rightarrow x=\frac{-9-\sqrt{61}}{2}$ ou $x=\frac{-9+\sqrt{61}}{2}$

Posons $a=\frac{-9-\sqrt{61}}{2}$ $\quad b=\frac{-9+\sqrt{61}}{2}$

$x^2+9x+5=(x-a)(x-b)$

x	$-\infty$		a		-1		b		0		$+\infty$
$x-a$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-b$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+9x+5		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x+1)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2+9x+5}{x(x+1)}$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

$$\boxed{S=\left]-\infty;\frac{-9-\sqrt{61}}{2}\right[\cup\left]-1;\frac{-9+\sqrt{61}}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[}$$

b/ $\frac{2}{(x-1)^2}\leq\frac{1}{x^2+1}\iff\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+1}\leq 0$

$\iff\frac{2(x^2+1)-(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\leq 0$, $x\neq 1$

$\iff\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}\leq 0$, $x\neq 1$

$\iff\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\leq 0$, $x\neq 1\iff x=-1$

$$\boxed{S=\{-1\}}$$

c/ $x-\frac{2}{|x|}\leq\frac{2-|x|}{x}$ (3), $x\neq 0$

On sait que : $|x|=\begin{cases}x \text{ si } x\geq 0\\ -x \text{ si } x\leq 0\end{cases}$

(3) $\iff\begin{cases}x+\frac{2}{x}\leq\frac{2+x}{x}, & x<0 \ (a)\\ x-\frac{2}{x}\leq\frac{2-x}{x}, & x>0 \ (b)\end{cases}$

(a) $\Rightarrow x+\frac{2}{x}\leq 1+\frac{2}{x}\iff x\leq 1$

(a) $\iff\begin{cases}x\leq 1\\ \text{et}\\ x<0\end{cases}\iff x<0$; $S_a=]-\infty;0[$

(b) $\iff x-\frac{2}{x}-\frac{2-x}{x}\leq 0$, $x>0$

$\iff\frac{x^2+x-4}{x}\leq 0$, $x>0$

$\iff x^2+x-4\leq 0$, $x>0$

Posons $x^2+x-4=0\iff\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{17}{4}=0$

$x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<0$ ou $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}>0$

Posons $a=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ $\quad b=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$\begin{cases}x^2+x-4\leq 0\\ x>0\end{cases}\iff\begin{cases}(x-a)(x-b)\leq 0\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-b\leq 0\\ x>0\end{cases}$

car $\forall x>0$, $x-a>0$

$\iff\begin{cases}x\leq b\\ x>0\end{cases}\Rightarrow x\in]0;b]=S_2$

$S=S_a\cup S_2$

$$\boxed{S=]-\infty;0[\cup\left]0;\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]}$$

d/ $\frac{x}{x^2-1}\leq\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$, $x\neq -1$ et $x\neq 1$

$\iff\frac{x}{x^2-1}\leq\frac{2x}{x^2-1}\iff\frac{-x}{x^2-1}\leq 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-x}{x^2-1}$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

$$\boxed{S=]-1;0]\cup]1;+\infty[}$$

e/ $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}\leq\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}$

$\iff\frac{2x-5}{(x-1)(x-4)}\leq\frac{2x+5}{(x+1)(x+4)}\iff\frac{10(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-16)}\leq 0$

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$

$x^2-16=0 \Leftrightarrow x=-4$ ou $x=4$

x		-4		-2		-1		1		2		4	
x^2-4	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-16	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{10(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-16)}$	$+$		$-$	0	$+$		$-$		$+$	0	$-$		$+$

$$\boxed{S=]-4;-2]\cup]-1;1[\cup[2;4[}$$

f/ $\frac{3x-1}{x^2-1} \geq \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x^2-1}-\frac{2}{x+1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x-1-2(x-1)}{x^2-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \geq 0$, $x \neq -1$ et $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$\boxed{S=]1;+\infty[}$$

g/ $|x^2-5x-15| < |6x+13|$

$\Leftrightarrow (x^2-5x-15)^2-(6x+13)^2<0$

$\Leftrightarrow (x^2-5x-15-6x-13)(x^2-5x-15+6x+13)<0$

$\Leftrightarrow (x^2-11x-28)(x^2+x-2)<0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x-7)(x+2)(x-1)<0$

x		-2		1		4		7	
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-7$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)=(x-4)(x-7)(x+2)(x-1)$

$$\boxed{S=]-2;1[\cup]4;7[}$$

h/ $|2x^2-x+1| \geq |5x^2-3x-22|$

$\Leftrightarrow (2x^2-x+1)^2-(5x^2-3x-22)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (2x^2-x+1-5x^2+3x+22)(2x^2-x+1+5x^2-3x-22) \geq 0$

$\Leftrightarrow (-3x^2+2x+23)(7x^2-4x-21) \geq 0$

Posons $-3x^2+2x+23=0$

$\Leftrightarrow -3\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{23}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{23}{3}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{70}{9}=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{70}}{3}$ ou $x=\frac{1+\sqrt{70}}{3}$

Posons $a=\frac{1-\sqrt{70}}{3}$ $b=\frac{1+\sqrt{70}}{3}$

$-3x^2+2x+23=-3(x-a)(x-b)=p(x)$

Posons $7x^2-4x-21=0$

$\Leftrightarrow 7\left(x^2-\frac{4}{7}x-3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{7}\right)^2-\frac{4}{49}-3=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{7}\right)^2-\frac{151}{49}=0$

$x=c=\frac{2-\sqrt{151}}{7}$ ou $x=d=\frac{2+\sqrt{151}}{7}$

$7x^2-4x-21=7(x-c)(x-d)=q(x)$

x	$-\infty$		a		c		d		b		$+\infty$
$x-a$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-b$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-c$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-d$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$q(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

avec $g(x)=p(x)\cdot q(x)$

$$\boxed{S=\left]\frac{1-\sqrt{70}}{3};\frac{2-\sqrt{151}}{7}\right[\cup\left]\frac{2+\sqrt{151}}{7};\frac{1+\sqrt{70}}{3}\right[}$$

EXERCICE N°63

1./ Résolution dans $\mathbb{R}$ d'inéquations

a./ $\frac{|x+1|}{1-|x|} \leq 1$ (1)

(1) n'a de sens que si $x \neq -1$ et $x \neq 1$

Posons $f(x) = \frac{|x+1|}{1-|x|}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	

$\forall x \in]-\infty;-1[$, $\begin{cases} x+1<0 \Leftrightarrow |x+1| = -x-1 \\ x<0 \Leftrightarrow |x| = -x \end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-x-1}{1+x} = -1$

$\forall x \in]-1;0]$, $\begin{cases} x+1>0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \\ x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x \end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{1+x} = 1$

$\forall x \geq 0$ et $x \neq 1$, $\begin{cases} x+1>0 \Leftrightarrow |x+1| = x+1 \\ x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x \end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{1-x}$

(1) $\Leftrightarrow f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 1 \text{ si } x<-1 \\ 1 \leq 1 \text{ si } -1<x\leq 0 \\ \frac{x+1}{1-x} \leq 1 \text{ si } x\geq 0 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$

$\frac{1+x}{1-x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x} \leq 0$

$\begin{cases} \frac{x+1}{1-x} \leq 1 \\ x\geq 0 \text{ et } x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1-x} \leq 0 \\ x \geq 0 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1-x<0 \\ x \geq 0 \text{ et } x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x>1$ ou $x=0$

$$\boxed{S =]-\infty;-1[\cup]-1;0] \cup]1;+\infty[}$$

b./ $|x+2| \leq (x-1)|3x-2|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 \leq (x-1)^2(3x-2)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(3x-2)^2 - (x+2)^2 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \big((x-1)(3x-2)-(x-2)\big)\big((x-1)(3x-2)+(x+2)\big) \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x^2-6x+4)(3x^2-4x^2+4) \geq 0 \ (a) \\ x \geq 1 \end{cases}$

$3x^2-6x+4 = 3(x^2-2x+\frac{4}{3})$

$= 3\left[(x-1)^2+\frac{1}{3}\right]$

$3x^2-4x+4 = 3(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3})$

$= 3\left[(x-\frac{2}{3})^2+\frac{8}{9}\right]$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} 3\left[(x-1)^2+\frac{1}{3}\right] > 0 \\ \text{et} \\ 3\left[(x-\frac{2}{3})^2+\frac{8}{9}\right] > 0 \end{cases}$

De tout ce qui précède on déduit

$$\boxed{S = [1;+\infty[}$$

c./ $|x^2-5x+3| \leq 2x-3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-5x+3)^2 \leq (2x-3)^2 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-5x+3)^2 - (2x-3)^2 \leq 0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-5x+3-2x+3)(x^2-5x+3+2x-3) \leq 0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-7x+6)(x^2-3x) \leqslant 0 \\ x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

Posons $x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=6$

Posons $x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$

x	$-\infty$		0		1		3		6		$+\infty$
$p(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$q(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$p(x) = x^2-7x+6 = (x-1)(x-6)$

$q(x) = x^2-3x = x(x-3)$

$g(x) = p(x)\cdot q(x)$

Posons $S_1 = [0;1] \cup [3;6]$

$S = S_1 \cap [3/2;+\infty[= [3;6]$

$$\boxed{S=[3;6]}$$

2/ Soit x le montant des ventes $f(x)$ et $g(x)$ les rénumérations du représentant commercial si le choix était le mode 1 ou mode 2 respectivement on a:

$f(x) = 100.000 + \frac{5}{100}x$ mode 1

$g(x) = 120.000 + \frac{2}{100}x$. mode 2

Le mode 1 est avantageux ssi

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \frac{5}{100}x + 100000 > \frac{2}{100}x + 120000$

$\Leftrightarrow \frac{5}{100}x - \frac{2}{100}x > 120000 - 100000$

$\Leftrightarrow \frac{3}{100}x > 20000 \Leftrightarrow x > \frac{2.000000}{3}$

Le mode 1 est avantageux si le montant des ventes dépasse 666.666,67F

EXERCICE N°64

1/ L'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan est muni de la base $(\vec{i},\vec{j})$ et les vecteurs $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ définis par:

$\vec{U_1} = (3+\sqrt{2})\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{U_2} = 7\vec{i}+(3-\sqrt{2})\vec{j}$.

<u>Colinéarité de $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$</u>

$$\det(\vec{U_1},\vec{U_2}) = \begin{vmatrix} 3+\sqrt{2} & 7 \\ 1 & 3-\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})-7$$

$$= 9-2-7 = 0$$

$\det(\vec{U_1},\vec{U_2}) = 0$ donc les vecteurs $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ sont colinéaires

2/ $\vec{W_1} = \vec{i}+x\vec{j}$ $\quad \vec{W_2} = x\vec{i}+\vec{j}$

<u>Valeurs de x pour lesquelles $\vec{W_1}$ et $\vec{W_2}$ sont colinéaires</u>

$$\det(\vec{W_1},\vec{W_2}) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = 1-x^2$$

$\vec{W_1}$ et $\vec{W_2}$ sont colinéaires ssi

$\det(\vec{W_1},\vec{W_2}) = 0 \Leftrightarrow 1-x^2=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$

$\vec{W_1}$ et $\vec{W_2}$ forment une base ssi ils ne sont pas colinéaires, soit $x \neq -1$ et $x \neq 1$.

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $(\vec{W_1},\vec{W_2})$ est une base est $\mathbb{R} - \{-1;1\}$

3/ Soit $\vec{U}\binom{a}{b}$ et $\vec{V}\binom{c}{d}$ deux vecteurs quelconques et k un nombre réel.

a./ Comparons $\det(\vec{u},\vec{v})$ et $\det(\vec{v},\vec{u})$

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\det(\vec{v},\vec{u}) = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = cb - ad$$

$$= -(ad - bc) = -\det(\vec{u},\vec{v})$$

$$\boxed{\det(\vec{v},\vec{u}) = -\det(\vec{u},\vec{v})}$$

b./ Calculons $\det(k\vec{u},\vec{v})$ en fonction de $\det(\vec{u},\vec{v})$

$$\det(k\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} ka & c \\ kb & d \end{vmatrix} = kad - kbc$$

$$= k(ad - bc)$$

$$\boxed{\det(k\vec{u},\vec{v}) = k\det(\vec{u},\vec{v})}$$

c./ Soit $\vec{w}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Démontrons que :

$\det(\vec{w},\vec{u}+\vec{v}) = \det(\vec{w},\vec{u}) + \det(\vec{w},\vec{v})$

$$\det(\vec{w},\vec{u}+\vec{v}) = \begin{vmatrix} e & a+c \\ f & b+d \end{vmatrix}$$

$$= e(b+d) - f(a+c)$$

$$= (eb - fa) + (ed - fc)$$

$$= \begin{vmatrix} e & a \\ f & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\det(\vec{w},\vec{u}+\vec{v}) = \det(\vec{w},\vec{u}) + \det(\vec{w},\vec{v})}$$

EXERCICE N° 65

1./ On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dont les couples de coordonnées dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ sont respectivement : $(1;3)$; $(-2;1)$; $(0;2)$

a./ Ecrivons chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

$\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$	$\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$	$\vec{w} = 2\vec{j}$

b./ Trouvons les coordonnées des vecteurs : $\vec{u}+\vec{v}$, $\frac{3}{2}\vec{u}+2\vec{v}$, $5\vec{u}-\frac{1}{5}\vec{v}$

$$\vec{u}+\vec{v} = (\vec{i}+3\vec{j}) + (-2\vec{i}+\vec{j}) = -\vec{i}+4\vec{j}$$

$$\frac{3}{2}\vec{u}+2\vec{v} = \frac{3}{2}(\vec{i}+3\vec{j}) + 2(-2\vec{i}+\vec{j}) = -\frac{5}{2}\vec{i} + \frac{13}{2}\vec{j}$$

$$5\vec{u}-\frac{1}{5}\vec{v} = 5(\vec{i}+3\vec{j}) - \frac{1}{5}(-2\vec{i}+\vec{j}) = \frac{27}{5}\vec{i} + \frac{74}{5}\vec{j}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \quad \frac{3}{2}\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{5\vec{u}-\frac{1}{5}\vec{v}\begin{pmatrix} 27/5 \\ 74/5 \end{pmatrix}}$$

2./ Dans la suite de l'exercice on pose $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$

a./ Trouvons a pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 6.$$

$$\boxed{a = 6}$$

b./ Trouvons b pour que $\vec{w}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

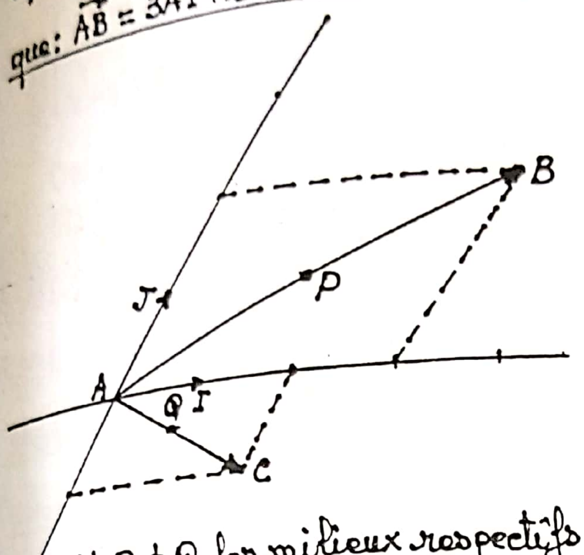
$\vec{w}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{w},\vec{v}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{2}}$$

3./ Soit $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ une base de $\mathcal{V}$.

a/ Construisons les points B et C tels que: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AJ}$; $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AJ}$.



b/ Soit P et Q les milieux respectifs de [AB] et [AC]

Coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{QA}$ dans la base $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$
$$= -3\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{AJ}+2\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AJ}$$
$$= -\overrightarrow{AI}-3\overrightarrow{AJ}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} \text{ dans } (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})}$$

$$\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}$$

$$\boxed{\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix} \text{ dans } (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})}$$

$$\overrightarrow{QA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$$

$$\boxed{\overrightarrow{QA}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \text{ dans } (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})}$$

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER, ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER.

EXERCICE N°66

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le point $A(-2;3)$, les vecteurs $\vec{U} = \vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{V} = \vec{i}-\vec{j}$.

1/ Démontrons que $(\vec{U}, \vec{V})$ est une base de $\mathcal{V}$.

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ on a :

$\vec{U}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\det(\vec{U}, \vec{V}) = \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix} = 1\times(-1)-1\times1 = -2$$

$$\boxed{\det(\vec{U}, \vec{V}) \neq 0 \text{ donc } (\vec{U}, \vec{V}) \text{ est une base de } \mathcal{V}.}$$

2/ Coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$

$$\begin{cases}\vec{i}+\vec{j} = \vec{U}\\\vec{i}-\vec{j} = \vec{V}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{U}+\frac{1}{2}\vec{V}\\\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{U}-\frac{1}{2}\vec{V}\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Dans la base } (\vec{U}, \vec{V}) \text{ on a: } \vec{i}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \ \vec{j}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

3/ Soit M le point de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(x';y')$ dans le repère $(A, \vec{U}, \vec{V})$

Exprimons x' et y' en fonction de x et y

$\overrightarrow{AM} = x'\vec{U}+y'\vec{V}$, $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} = -2\vec{i}+3\vec{j}$

$$\overrightarrow{AM} = x'(\vec{i}+\vec{j})+y'(\vec{i}-\vec{j})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM} = (x'+y')\vec{i}+(x'-y')\vec{j}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x'+y')\vec{i} + (x'-y')\vec{j} - 2\vec{i} + 3\vec{j}$

$\Leftrightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = (x'+y'-2)\vec{i} + (x'-y'+3)\vec{j}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'-2 = x \\ x'-y'+3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x'+1 = x+y \\ 2y'-5 = x-y \end{cases}$

On a donc

$$\boxed{\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y-1) \\ y' = \frac{1}{2}(x-y+5) \end{cases}}$$

Déduisons-en les coordonnées du point O dans le repère $(A, \vec{U}, \vec{V})$

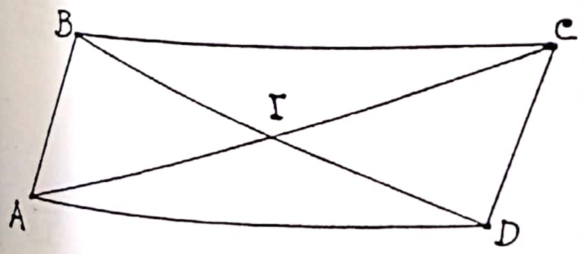
Soit (x', y') les coordonnées de O dans le repère $(A, \vec{U}, \vec{V})$ et $(x; y)$ ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a : $x=0$ et $y=0$

En utilisant la question précédente on a : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(0+0-1) = -\frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}(0-0+5) = \frac{5}{2} \end{cases}$

Dans le repère $(A, \vec{U}, \vec{V})$ O a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$

EXERCICE N°67

Dans le plan P construisons un parallélogramme ABCD de centre I



1/ a/ Montrons que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$

(AB) et (AC) sont les supports respectifs d'un côté et d'une diagonale d'un même parallélogramme. (AB) et (AC) ne sont donc pas parallèles. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, d'où $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.

b/ Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ donnons les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \text{ dans } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \text{ dans } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$$

$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\boxed{\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \text{ dans } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$= 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\boxed{\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \text{ dans } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$$

2/ On considère les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ dont les coordonnées dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont respectivement :

$(2; -1)$ $(3; 1)$ $(\alpha; 2)$

a/ Trouvons le nombre réel α pour que les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ soient colinéaires

$\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont colinéaires ssi

$\det(\vec{V},\vec{W}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & \alpha \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 6 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 6$

$\boxed{\alpha = 6}$

b/ Montrons que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ne sont pas colinéaires

$\det(\vec{U},\vec{V}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3 = 5 \neq 0$

$\det(\vec{U},\vec{V}) \neq 0$ donc $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ne sont pas colinéaires

c/ Trouvons dans la base $(\vec{U},\vec{V})$ les coordonnées des vecteurs : $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{CI}$ et $\vec{BD}$

$\begin{cases} \vec{U} = 2\vec{AB} - \vec{AC} \\ \vec{V} = 3\vec{AB} + \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} = \frac{1}{5}(\vec{U}+\vec{V}) \\ \vec{AC} = -\frac{3}{5}\vec{U} + \frac{2}{5}\vec{V} \end{cases}$

$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$

$= -\frac{1}{5}(\vec{U}+\vec{V}) - \frac{3}{5}\vec{U} + \frac{2}{5}\vec{V}$

$= -\frac{4}{5}\vec{U} + \frac{1}{5}\vec{V}.$

$\boxed{\vec{BC}\left(-\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right) \text{ dans } (\vec{U},\vec{V})}$

$\vec{CD} = \vec{BA} = -\vec{AB} = -\frac{1}{5}\vec{U} - \frac{1}{5}\vec{V}$

$\boxed{\vec{CD}\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right) \text{ dans } (\vec{U},\vec{V})}$

$\vec{CI} = -\frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{3}{10}\vec{U} - \frac{1}{5}\vec{V}.$

$\boxed{\vec{CI}\left(\frac{3}{10};-\frac{1}{5}\right) \text{ dans } (\vec{U},\vec{V})}$

$\vec{BD} = -2\vec{AB} + \vec{AC} = -\frac{2}{5}(\vec{U}+\vec{V}) - \frac{3}{5}\vec{U} + \frac{2}{5}\vec{V}$

$= -\vec{U}$

$\boxed{\vec{BD}(-1;0) \text{ dans } (\vec{U},\vec{V})}$

EXERCICE N°68

PARTIE A

Soit f la fonction à variable réelle x définie par : $f(x) = x^2+2x-3$.

1/ Trouvons la forme canonique de $f(x)$

$f(x) = x^2+2x-3 = (x+1)^2-1-3$

$\boxed{f(x) = (x+1)^2-4}$

Factorisons $f(x)$

$f(x) = (x+1)^2-4 = (x+1+2)(x+1-2)$

$\boxed{f(x) = (x+3)(x-1)}$

2/ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x+3=0$ ou $x-1=0$

$\Leftrightarrow x=-3$ ou $x=1$

$\boxed{S = \{-3;1\}}$

PARTIE B

$\vec{U_1} = (m-3)\vec{i} + 4m\vec{j}$; $\vec{U_2} = -\vec{i} + (m+1)\vec{j}$

1/ Valeurs de m pour lesquelles $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ sont colinéaires

$\det(\vec{U_1},\vec{U_2}) = \begin{vmatrix} m-3 & -1 \\ 4m & m+1 \end{vmatrix}$

$= (m-3)(m+1)+4m$

$= m^2-2m-3+4m$

$= m^2+2m-3$

$\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{U_1},\vec{U_2})=0$

$\Leftrightarrow m^2+2m-3=0 \Leftrightarrow m=-3$ ou $m=1$

$\boxed{\text{les valeurs de } m \text{ pour lesquelles } \vec{U_1} \text{ et } \vec{U_2} \text{ sont colinéaires pour } m\in\{-3;1\}}$

2./ On suppose $m=-1$

a./ Montrons que $(\vec{U_1},\vec{U_2})$ est une base de $\mathcal{V}$.

Pour $m=-1$, $\det(\vec{U_1},\vec{U_2}) = -4 \neq 0$.

$\boxed{(\vec{U_1},\vec{U_2}) \text{ est donc une base de } \mathcal{V}.}$

b./ Déterminons les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{U_1},\vec{U_2})$

$\begin{cases} \vec{U_1} = -4\vec{i}-4\vec{j} \\ \vec{U_2} = -\vec{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = -\vec{U_2} \\ \vec{j} = \frac{1}{4}(-\vec{U_1}+4\vec{U_2}) \end{cases}$

$\vec{i}(0;-1)$	$\vec{j}(-\frac{1}{4};1)$

c./ Soit $\vec{V_1} = 2\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{V_2} = 2\vec{U_1}+\vec{U_2}$

Déterminons les coordonnées de $\vec{V_1}$ dans la base $(\vec{U_1},\vec{U_2})$ et les coordonnées de $\vec{V_2}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

On montre que $\vec{V_1} = -\frac{1}{4}\vec{U_1}-\vec{U_2}$

et $\vec{V_2} = -9\vec{i}-8\vec{j}$

$\boxed{V_1(-\frac{1}{4};-1) \qquad V_2(-9;-8)}$

EXERCICE N°69

On considère dans le plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{i},\vec{j})$ les trois vecteurs :

$\vec{U_1}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{U_2}\begin{pmatrix}2\alpha-\beta\\ \alpha+2\beta-4\end{pmatrix}$, $\vec{U_3}\begin{pmatrix}\alpha-3\beta+2\\ -3\alpha+3\beta-2\end{pmatrix}$

1./ Calculons les coordonnées $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{S} = \vec{U_1}+\vec{U_2}+\vec{U_3}$

$\vec{S}\left| \begin{array}{l} X = 3+2\alpha-\beta+\alpha-3\beta+2 = 3\alpha-4\beta+5 \\ Y = -2+\alpha+2\beta-4-3\alpha+3\beta-2 = -2\alpha+5\beta-8 \end{array}\right.$

$\boxed{\vec{S}\begin{pmatrix}3\alpha-4\beta+5\\ -2\alpha+5\beta-8\end{pmatrix}}$

Déduisons-en la relation qui doit exister entre α et β pour que $\vec{S}$ soit colinéaire au vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

$\vec{S}$ colinéaire à $\vec{V}$ ssi

$\det(\vec{S},\vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3\alpha-4\beta+5 & -3 \\ -2\alpha+5\beta-8 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 4(3\alpha-4\beta+5)+3(-2\alpha+5\beta-8) = 0$

$\Leftrightarrow 6\alpha-\beta-4 = 0 \Leftrightarrow \beta = 6\alpha-4$

$\boxed{\vec{S} \text{ est colinéaire à } \vec{V} \text{ ssi } \beta = 6\alpha-4}$

Déterminons alors les coordonnées de $\vec{S}$

$X = 3\alpha-4(6\alpha-4)+5 = -21\alpha+21$

$Y = -2\alpha+5(6\alpha-4)-8 = 28\alpha-28$

$\boxed{\vec{S}\begin{pmatrix}-3(7\alpha-7)\\ 4(7\alpha-7)\end{pmatrix} \qquad \vec{S} = (7\alpha-7)\vec{V}}$

2-/ Valeurs de α et β pour lesquelles le vecteur $\vec{S}$ est nul.

$$\vec{S}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha-4\beta+5=0 \\ -2\alpha+5\beta-8=0 \end{cases}$$

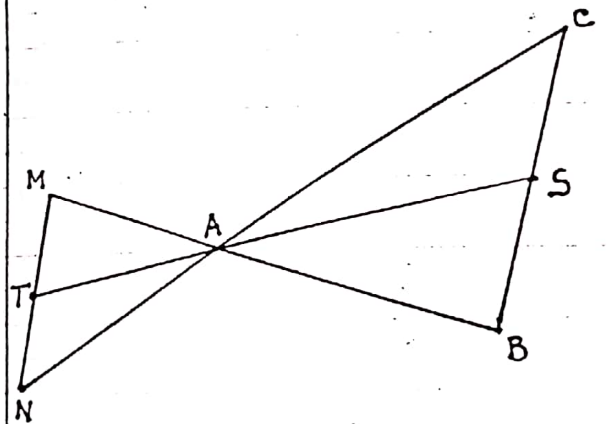
La résolution de ce système donne

$$\boxed{\alpha=1 \quad \beta=2}$$

EXERCICE N°70

1-/ Soit ABC un triangle quelconque.

a-/ Construisons les points M et N tels que : $\vec{AM}=-\frac{2}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AN}=-\frac{2}{3}\vec{AC}$



b-/ Démontrons que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

$$\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AN}=-\vec{AM}+\vec{AN}$$
$$=\frac{2}{3}\vec{AB}-\frac{2}{3}\vec{AC}$$
$$=-\frac{2}{3}(\vec{BA}+\vec{AC})$$
$$\vec{MN}=-\frac{2}{3}\vec{BC}$$

Les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires

Les droites (MN) et (BC) sont donc parallèles.

c-/ Soient S et T les milieux respectifs de [BC] et [MN].

Démontrons que les points A, S et T sont alignés.

$$\vec{AT}=\vec{AN}+\vec{NT}=-\frac{2}{3}\vec{AC}-\frac{1}{2}\vec{MN}$$
$$=-\frac{2}{3}\vec{AC}+\frac{1}{3}\vec{BC}$$
$$=-\frac{1}{3}\vec{AC}-\frac{1}{3}\vec{AC}+\frac{1}{3}\vec{BC}$$
$$=-\frac{1}{3}\vec{AC}+\frac{1}{3}(\vec{BC}+\vec{CA})$$
$$=-\frac{1}{3}\vec{AC}+\frac{1}{3}\vec{BA}$$
$$\vec{AT}=-\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AC})$$

$$\vec{AS}=\vec{AB}+\vec{BS}=\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}$$
$$=\vec{AB}+\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{AC})$$
$$=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}AC$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(-3\vec{AT})$$
$$\vec{AS}=-\frac{3}{2}\vec{AT}$$

$\Rightarrow$ (AS) // (AT) or ces deux droites passent par A ; elles sont donc confondues d'où les points A, S et T sont alignés.

2-/ $(\vec{i},\vec{j})$ et $(\vec{u},\vec{v})$ sont deux bases de $\mathcal{V}$ telles que :

$$\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}, \quad \vec{j}=\frac{7}{6}\vec{u}+\vec{v}.$$

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

$$\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}=\vec{i}+2\left(\frac{7}{6}\vec{u}+\vec{v}\right)$$
$$=\vec{i}+\frac{7}{3}\vec{u}+2\vec{v}$$

$(\Leftrightarrow)\ \vec{i} = \vec{u} - \frac{7}{3}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{4}{3}\vec{u} - 2\vec{v}$

$\vec{j} = \frac{7}{6}\vec{u} + \vec{v}$

Dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ on a:
$\vec{i}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{j}\begin{pmatrix} 7/6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{j} = \frac{7}{6}\vec{u} + \vec{v} = \frac{7}{6}(\vec{i} + 2\vec{j}) + \vec{v}$

$\vec{v} = \vec{j} - \frac{7}{6}\vec{i} - \frac{7}{3}\vec{j} = -\frac{7}{6}\vec{i} - \frac{4}{3}\vec{j}$

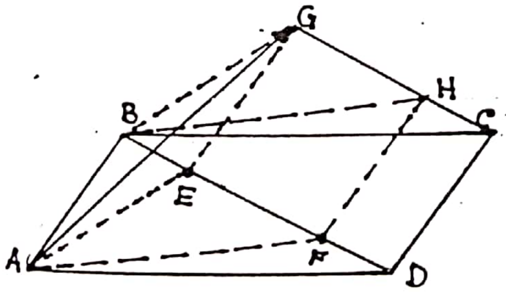
Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ on a:
$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -7/6 \\ -4/3 \end{pmatrix}$

EXERCICE N°71

Soit ABCD un parallélogramme non aplati. E et F deux points du plan éléments de la droite (BD).

1/ Plaçons les points G et H tels que:

$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AE}$ et $\vec{AH} = \vec{AB} + \vec{AF}$



2/ Montrons que les points C, G et H sont alignés

$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AE} \ (\Leftrightarrow) -\vec{AB} + \vec{AG} = \vec{AE}$

$(\Leftrightarrow)\ \vec{BG} = \vec{AE}$ $(\Leftrightarrow)$ ABGE est un parallélogramme $(\Leftrightarrow)$ $\vec{AB} = \vec{EG}$ or $\vec{AB} = \vec{DC}$

On démontre de façon analogue que $\vec{AB} = \vec{FH}$

Finalement on a:

$\vec{AB} = \vec{EG} = \vec{FH} = \vec{DC}$

Les points C, G et H sont donc les images respectives des points D, F et E par la translation de vecteurs $\vec{AB}$

Or D, F et E sont alignés d'où C, G et H sont alignés.

3/ On pose $\vec{BE} = x\vec{BD}$ et $\vec{BF} = y\vec{BD}$

Choix de x et y pour que:

a/ $G \in (AB)$ et $H \in (DC)$.

Pour avoir $\begin{cases} G \in (AB) \\ \text{et} \\ H \in (DC) \end{cases}$ il suffit que E soit confondu à B et F confondu à D. $(\Leftrightarrow) \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Pour avoir $G \in (AB)$ et $H \in (DC)$ il faut choisir $x = 0$ et $y = 1$

c/ C soit le milieu de [GH]

C milieu de [GH] si D milieu de [EF]. $(\Leftrightarrow)$ $\vec{EF} = 2\vec{ED}$.

$\vec{BF} = \vec{BE} + \vec{EF} = \vec{BE} + 2\vec{ED}$

$= \vec{BE} + 2(\vec{EB} + \vec{BD})$

$= -\vec{BE} + 2\vec{BD}$

$= -x\vec{BD} + 2\vec{BD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BF} = (2-x)\overrightarrow{BD}$

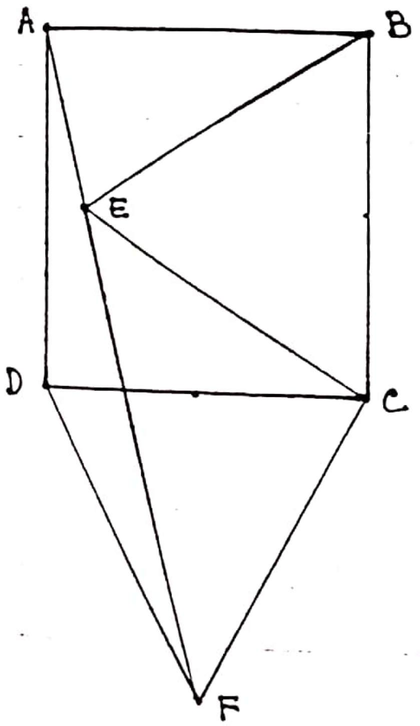
or $\overrightarrow{BF} = y\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow y = 2-x$

Pour que C soit milieu de [GH] il faut choisir x et y de telle sorte que l'on ait $x+y=2$

EXERCICE N°72

A./ Soit ABCD un carré.

1./ Construisons les points E et F tels que : BCE et CDF soient équilatéraux ; BCE situé à l'intérieur du carré ABCD et CDF à l'extérieur



2./ On considère le repère (B, C, A)

a./ Déterminons les coordonnées des points A, B, C, D, E et F dans ce repère

$A(0;1)$; $B(0;0)$; $C(1;0)$; $D(1;1)$

$E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $F\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

b./ Démontrons que les points A, E et F sont alignés

$\overrightarrow{AE}\begin{vmatrix} x_E - x_A = \frac{1}{2} \\ y_E - y_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{AF}\begin{vmatrix} x_F - x_A = 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_F - y_A = -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4}-1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$\det(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (AE) \parallel (AF)$ or (AE) et (AF) passent par A. Les droites (AE) et (AF) sont donc confondues.

Les points A, E et F sont alignés

B./ Soit ABC un triangle de centre de gravité G, I le milieu de [BC].

1./ Démontrons que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$

G centre de gravité de ABC nous permet d'écrire : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Pour tout point M du plan on a :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})$$

$$= 3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$$

$$= 3\overrightarrow{MG} \text{ car } \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$\boxed{\forall M \in \mathcal{P},\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}}$

I milieu de $[BC] \Leftrightarrow \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Pour tout point M du plan on a:

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}$

$= 2\overrightarrow{IA} - (\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})$

$= 2\overrightarrow{IA}$ car $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\boxed{\forall M \in \mathcal{P},\ 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}}$

2/ Ensemble (E) des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires ssi $3\overrightarrow{MG}$ et $2\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (MG) // (IA)$

M appartient donc à la parallèle à (AI) passant par G, or $G \in (AI)$

(E) est donc la droite (AI)

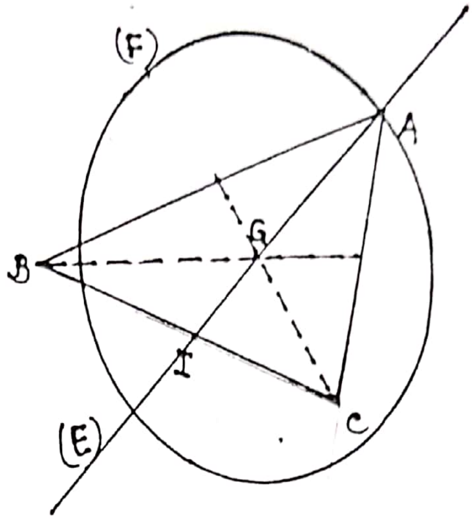
3/ Ensemble (F) des points M du plan tels que:

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = \|2\overrightarrow{IA}\|$

$\Leftrightarrow MG = \frac{2}{3} IA$. or $AG = \frac{2}{3} IA$.

(F) est le cercle de centre G et passant par A.

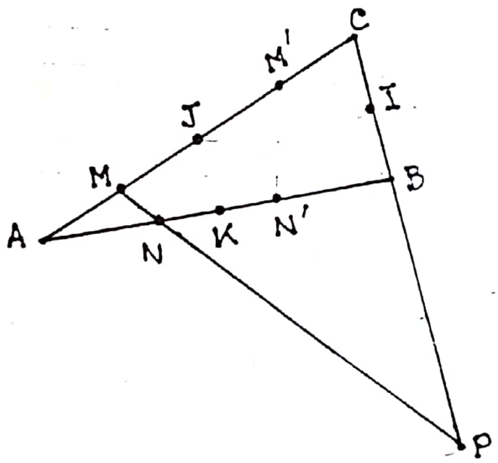


EXERCICE N°73

Soit ABC un triangle et M, N et P les points définis par:

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{CB}$

1/ Faisons une figure soignée



2/ Exprimons $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$

$\boxed{\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}}$

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}$

$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$

$= 3\overrightarrow{AB} - \frac{8}{4}\overrightarrow{AC}$

$$\boxed{\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{AB} - \frac{9}{4}\overrightarrow{AC}}$$

3-/ Démontrons que les points M, N et P sont alignés

$\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{AB} - \frac{9}{4}\overrightarrow{AC} = 9\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{MP} = 9\overrightarrow{MN}$ On en déduit que les points M, N et P sont alignés.

4-/ Soit I, J et K les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

Soit M' le symétrique de M par rapport à J, N' le symétrique de N par rapport à K et P' le symétrique de P par rapport à I.

a-/ Exprimons $\overrightarrow{M'N'}$ et $\overrightarrow{M'P'}$ en fonct° de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$$\boxed{\overrightarrow{M'N'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}}$$

$\overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{CP'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BP}$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{M'P'} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{9}{4}\overrightarrow{AC}$

$$\boxed{\overrightarrow{M'P'} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{9}{4}\overrightarrow{AC}}$$

b-/ Démontrons que les points M', N' et P' sont alignés

$\overrightarrow{M'P'} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{9}{4}\overrightarrow{AC}$

$= -3\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{M'P'} = -3\overrightarrow{M'N'}$

$\overrightarrow{M'P'}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont colinéaires d'où les points M', N' et P' sont alignés

EXERCICE N°74

1-/ Dans le plan vectoriel $\vec{P}$ on donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que

$2\vec{u} + 5\vec{v} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$

Montrons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$2\vec{u} + 5\vec{v} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$

$\Leftrightarrow 2\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v} - 5\vec{v}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{3}\vec{u} = -\frac{14}{3}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{14}{5}\vec{v}$

$\vec{u} = -\frac{14}{5}\vec{v}$ et $-\frac{14}{5} < 0$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires de sens opposés

2-/ On donne dans le plan P trois points non alignés A, B, C

a-/ Justifions que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\vec{P}$

A, B et C ne sont pas alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donc une base de $\vec{P}$.

b/ Soit M un point de P tel que :

$\vec{AM} = \vec{BM} + \vec{CM}$

Déterminons les réels x et y pour que $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$

$\vec{AM} = \vec{BM} + \vec{CM} \iff \vec{AM} = \vec{BA} + \vec{AM} + \vec{CA} + \vec{AM}$

$\iff -\vec{AM} = \vec{BA} + \vec{CA}$

$\iff \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

On en déduit que :

$x = 1$	$y = 1$

Déduisons-en les coordonnées de $\vec{BC}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$

$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$

$$\boxed{\vec{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{AB}, \vec{AC})}$$

3/ Soit $\beta = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\vec{P}$ et deux vecteurs :

$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + b\vec{j}$.

a/ Déterminons le réel b pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & b \end{vmatrix} = 0 \iff 2b + 1 = 0 \iff b = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{b = -\frac{1}{2}}$$

b/ Soit b = 2. Prouvons que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base β' de $\vec{P}$

Pour b = 2, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 5 \neq 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires, d'où $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base β' de $\vec{P}$.

c/ Calculons dans la base β', les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

$$\begin{cases} 2\vec{i} - \vec{j} = \vec{u} \\ \vec{i} + 2\vec{j} = \vec{v} \end{cases} \iff \begin{cases} 5\vec{i} = 2\vec{u} + \vec{v} \\ -5\vec{j} = \vec{u} - 2\vec{v} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{i} = \frac{2}{5}\vec{u} + \frac{1}{5}\vec{v} \\ \vec{j} = -\frac{1}{5}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Dans la base } (\vec{u}, \vec{v}) : \quad \vec{i}\begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \quad \vec{j}\begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}}$$

EXERCICE N°75

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.

Dans chacun des cas ci dessous, démontrons que le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$ et déterminons les coordonnées des vecteurs :

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $-4\vec{i} + \vec{j}$, $3\vec{i} + 2\vec{j}$ dans cette base.

1/ $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{j}, \vec{i}) \iff \vec{i} = \vec{v}$ et $\vec{j} = \vec{u}$

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 - 1 = -1 \neq 0$.

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \text{ est donc une base de } \mathcal{V}}$$

$\vec{i} = \vec{v} = 0\vec{u} + 1\vec{v} \iff \vec{i}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{j} = \vec{u} = 1.\vec{u} + 0\vec{v} \iff \vec{j}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-4\vec{i} + \vec{j} = -4\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} - 4\vec{v}$

$\iff -4\vec{i} + \vec{j}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$3\vec{i}+2\vec{j} = 3\vec{v}+2\vec{u} = 2\vec{u}+3\vec{v}$

$3\vec{i}+2\vec{j}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

Dans la base $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{j},\vec{i})$:

$\vec{i}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{j}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $-4\vec{i}+\vec{j}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$; $3\vec{i}+2\vec{j}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

2/ $(\vec{u},\vec{v})=(-\vec{i},-\vec{j}) \Leftrightarrow \vec{i}=-\vec{u},\ \vec{j}=-\vec{v}$

Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v})=1-0=1\neq 0$

$(\vec{u},\vec{v})$ est donc une base de $\mathcal{V}$.

$\vec{i}=-\vec{u}=-1.\vec{u}+0\vec{v} \Leftrightarrow \vec{i}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{j}=-\vec{v}=0\vec{u}-1\vec{v} \Leftrightarrow \vec{j}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$-4\vec{i}+\vec{j}=4\vec{u}-\vec{v} \Leftrightarrow -4\vec{i}+\vec{j}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

$3\vec{i}+2\vec{j}=-3\vec{u}-2\vec{v} \Leftrightarrow 3\vec{i}+2\vec{j}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

Dans la base $(\vec{u},\vec{v})=(-\vec{i},-\vec{j})$

$\vec{i}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $-4\vec{i}+\vec{j}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, $3\vec{i}+2\vec{j}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

3/ $(\vec{u},\vec{v})=(2\vec{i},-\vec{j}) \Leftrightarrow \vec{i}=\frac{1}{2}\vec{u},\ \vec{j}=-\vec{v}$

Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v})=-2-0=-2\neq 0$

$(\vec{u},\vec{v})$ est donc une base de $\mathcal{V}$

$\vec{i}=\frac{1}{2}\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{u}+0\vec{v} \Leftrightarrow \vec{i}\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$

$\vec{j}=-\vec{v}=0\vec{u}-1.\vec{v} \Leftrightarrow \vec{j}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$-4\vec{i}+\vec{j}=-4.\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}=-2\vec{u}-\vec{v} \Leftrightarrow -4\vec{i}+\vec{j}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

$3\vec{i}+2\vec{j}=3.\frac{1}{2}\vec{u}-2\vec{v}=\frac{3}{2}\vec{u}-2\vec{v} \Leftrightarrow 3\vec{i}+2\vec{j}\begin{pmatrix}3/2\\-2\end{pmatrix}$

Dans la base $(\vec{u},\vec{v})=(2\vec{i},-\vec{j})$

$\vec{i}\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$; $-4\vec{i}+\vec{j}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$; $3\vec{i}+2\vec{j}\begin{pmatrix}3/2\\-2\end{pmatrix}$

4/ $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{i},\vec{i}+\vec{j})$

$\Leftrightarrow \vec{i}=\vec{u},\ \vec{j}=-\vec{u}+\vec{v}$

Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v})=1-0=1\neq 0$.

$(\vec{u},\vec{v})$ est donc une base de $\mathcal{V}$.

$\vec{i}=\vec{u}=1.\vec{u}+0\vec{v} \Leftrightarrow \vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{j}=-\vec{u}+\vec{v} \Leftrightarrow \vec{j}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$-4\vec{i}+\vec{j}=-4\vec{u}-\vec{u}+\vec{v}=-5\vec{u}+\vec{v} \Leftrightarrow -4\vec{i}+\vec{j}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$

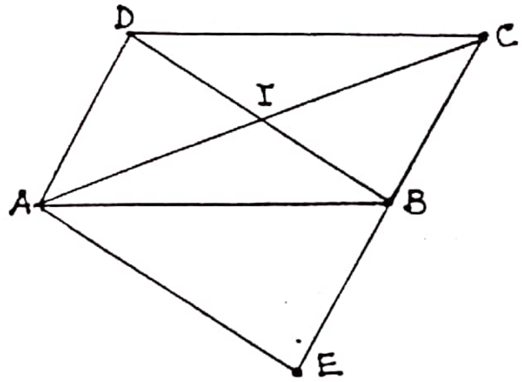
$3\vec{i}+2\vec{j}=3\vec{u}-2\vec{u}+2\vec{v}=\vec{u}+2\vec{v} \Leftrightarrow 3\vec{i}+2\vec{j}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Dans la base $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{i},\vec{i}+\vec{j})$

$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{j}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$; $-4\vec{i}+\vec{j}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$; $3\vec{i}+2\vec{j}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

EXERCICE N°76

Soit le parallélogramme ABCD et I le point d'intersection de ses diagonales



1/ Justifions que $(\vec{AB},\vec{AD})$ est une base de $\mathcal{V}$

(AB) et (AD) sont les supports de deux

côtés consécutifs d'un parallélogramme (AB) et (AD) ne sont donc pas parallèles.
$\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas colinéaires
d'où $(\vec{AB}, \vec{AD})$ est une base de $\mathcal{V}$.

Déterminons dans cette base les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par:

$$\vec{u} = \vec{AC}+\vec{BD}+3(\vec{CB}-\vec{BA})+2(\vec{AD}-\vec{BC})-2(\vec{ID}-\vec{IA})$$

$$\vec{AC}+\vec{BD} = \vec{AB}+\vec{BC}+\vec{BA}+\vec{AD} = 2\vec{AD}$$

$$\vec{CB}-\vec{BA} = \vec{AB}-\vec{AD}$$

$$\vec{AD}-\vec{BC} = \vec{0}\ ;\ \vec{ID}-\vec{IA} = \vec{AI}+\vec{ID} = \vec{AD}$$

$$\vec{u} = 2\vec{AD}+3(\vec{AB}-\vec{AD})-2\vec{AD} = 3\vec{AB}-3\vec{AD}$$

$$\boxed{\text{Dans la base } (\vec{AB}, \vec{AD}),\ \vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}}$$

2/- Construction du point E défini par: $\vec{AE} = \vec{AB} - \vec{AD}$

$$\vec{AE} = \vec{AB}-\vec{AD} \Leftrightarrow \vec{AE} = \vec{AB}-\vec{AB}-\vec{BD}$$

$$\vec{AE} = \vec{DB}$$

E est donc le point tel que ADBE soit un parallélogramme. (Voir figure)

* ABCD et ADBE sont des parallélogrammes $\Leftrightarrow \begin{cases}\vec{DA} = \vec{CB}\\ \vec{DA} = \vec{BE}\end{cases} \Leftrightarrow \vec{CB} = \vec{BE}$

Les points C, B et E sont donc alignés
Les vecteurs $\vec{CB}$ et $\vec{CE}$ sont colinéaires; ils ne forment donc pas une base de $\mathcal{V}$.

3/* Donnons les coordonnées des points B, C, D, E et I dans le repère (A, B, D)

B(1; 0) C(1; 1) ; D(0, 1) E(1; −1)

$I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

* Donnons les coordonnées des points B, C, D, E et I dans le repère $(B, \vec{AB}, \vec{AC})$

$B(0, 0)$; $\vec{BC} = \vec{BA}+\vec{AC} = -\vec{AB}+\vec{AC}$

$\Leftrightarrow C(-1; 1)$

$\vec{BD} = \vec{BC}+\vec{CD} = -\vec{AB}+\vec{AC}-\vec{AB}$
$= -2\vec{AB}+\vec{AC}$

$\Leftrightarrow D(-2; 1)$

$\vec{BE} = -\vec{BC} = \vec{AB}-\vec{AC}$

$\Leftrightarrow E(1; -1)$

I milieu de [BD] $\Leftrightarrow I(-1; \frac{1}{2})$

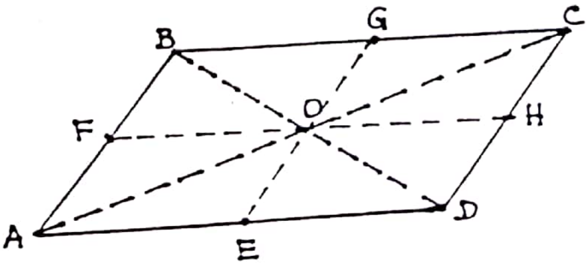
Finalement dans le repère $(B, \vec{AB}, \vec{AD})$

$B(0; 0)$; $C(-1; 1)$, $D(-2; 1)$; $E(1; -1)$

$I(-1; \frac{1}{2})$

EXERCICE N°77

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Les points E, F, G et H sont les milieux respectifs de:
[AD], [AB], [BC] et [CD]



1/ <u>Justifions que $(\vec{ED}, \vec{EO})$ est une base de $\mathcal{V}$</u>

On montre que les points E, D et O ne sont pas alignés. $(\vec{ED}, \vec{ED})$ est donc une base de $\mathcal{V}$.

2/ <u>Déterminons dans cette base les coordonnées des vecteurs :</u>

<u>$\vec{EH}$, $\vec{EB}$, $\vec{EG}$, $\vec{EA}$, $\vec{FC}$, $\vec{AC}$ et $\vec{GD}$</u>

$\vec{EH} = \vec{ED} + \vec{DH} = \vec{ED} + \vec{EO}$

$$\boxed{\vec{EH}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{ED}, \vec{EO})}$$

$\vec{EB} = \vec{EO} + \vec{OB} = \vec{EO} + \vec{DO} = \vec{EO} + \vec{DE} + \vec{EO}$
$= -\vec{ED} + 2\vec{EO}$

$$\boxed{\vec{EB}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{ED}, \vec{EO})}$$

$\vec{EG} = 2\vec{EO} = 0\vec{ED} + 2\vec{EO}$

$$\boxed{\vec{EG}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{ED}, \vec{EO})}$$

$\vec{EA} = -\vec{ED} = -\vec{ED} + 0\vec{EO}$

$$\boxed{\vec{EA}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{ED}, \vec{EO})}$$

$\vec{FC} = \vec{FH} + \vec{HC} = 2\vec{ED} + \vec{EO}$

$$\boxed{\vec{FC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{ED}, \vec{EO})}$$

$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = 2\vec{ED} + 2\vec{EO}$

$$\boxed{\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{ED}, \vec{EO})}$$

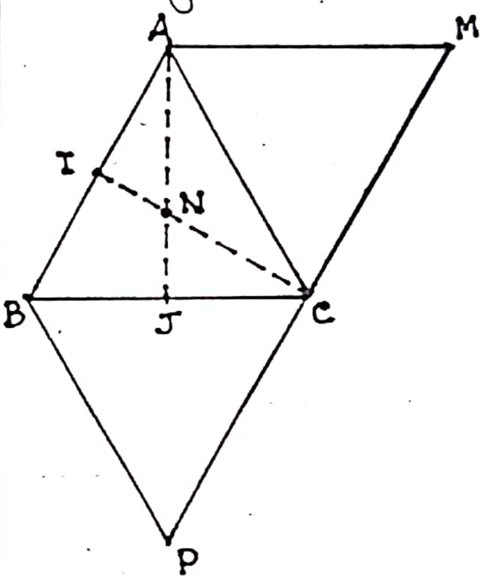
$\vec{GD} = \vec{GE} + \vec{ED} = \vec{ED} - 2\vec{EO}$

$$\boxed{\vec{GD}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{ED}, \vec{EO})}$$

EXERCICE N°78

Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB = 4cm. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC]

1/ Figure.



a/ <u>Construction du triangle ABC ainsi que les points I et J</u> (Voir Figure)

b/ <u>Construction des points M, N et P définis par :</u>

$\vec{BM} = \vec{AM} + \vec{CM}$; $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$
et $\vec{PC} = \vec{PA} - \vec{PB}$

$\vec{BM} = \vec{AM} + \vec{CM} \Leftrightarrow \vec{BM} + \vec{MC} = \vec{AM}$
$\Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{BC}$

- M est le point tel que BAMC soit un parallélogramme.
- N est le centre de gravité du triangle ABC autrement dit le point d'intersection des droites (AJ) et (CI).

$\vec{PC} = \vec{PA} - \vec{PB} \Leftrightarrow \vec{PC} = \vec{BP} + \vec{PA} = \vec{BA}$

$\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CP}$.

• P est l'image de C par la translation de vecteur $\vec{AB}$ ou encore le point tel que ABPC soit un parallélogramme.

2·/ a·/ Démontrons que les points B, M et N sont alignés

(BN) est une médiane du triangle ABC

(BN) passe donc par le milieu du segment [AC].

De plus, BAMC est un parallélogramme

(BM) coupe [AC] en son milieu.

Les droites (BN) et (BM) sont confondues

Les points B, M et N sont donc alignés

b·/ Démontrons que les points M, C et P sont alignés

BAMC et BACP sont des parallélogrammes $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} = \vec{MC} \\ \text{et} \\ \vec{AB} = \vec{CP} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{MC} = \vec{CP}$

Les points M, C et P sont donc alignés

3·/ a·/ Démontrons que $(\vec{IB}, \vec{IJ})$ est une base de $\mathcal{V}$

ABC est un triangle, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].

Les points I, B et J ne sont donc pas alignés ; on en déduit que $\vec{IB}$ et $\vec{IJ}$ ne sont pas colinéaires.

D'où $(\vec{IB}, \vec{IJ})$ est une base de $\mathcal{V}$.

b·/ Déterminons dans la base $(\vec{IB}, \vec{IJ})$ les coordonnées des vecteurs : $\vec{AB}$, $\vec{BP}$, $\vec{AM}$ et $\vec{AN}$

$\vec{AB} = 2\vec{IB} = 2\vec{IB} + 0.\vec{IJ}$

$$\boxed{\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{IB}, \vec{IJ})}$$

$\vec{BP} = \vec{BC} + \vec{CP} = 2\vec{BJ} + 2\vec{IB}$

$= 2(\vec{IB} + \vec{BJ}) = 2\vec{IJ}$

$\vec{BP} = 0.\vec{IB} + 2\vec{IJ}$

$$\boxed{\vec{BP}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{IB}, \vec{IJ})}$$

$\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM} = \vec{BP} + 2\vec{BI}$

$= 2\vec{IJ} - 2\vec{IB}$

$\vec{AM} = -2\vec{IB} + 2\vec{IJ}$

$$\boxed{\vec{AM}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{IB}, \vec{IJ})}$$

$\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AJ} = \frac{2}{3}(\vec{AI} + \vec{IJ})$

$= \frac{2}{3}\vec{IB} + \frac{2}{3}\vec{IJ}$

$$\boxed{\vec{AN}\begin{pmatrix}2/3\\2/3\end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{IB}, \vec{IJ})}$$

c·/ Déduisons les coordonnées des points A, B, C, I, J, P, M et N dans le repère $(I, \vec{IB}, \vec{IJ})$

$\vec{IA} = -\vec{IB} \Leftrightarrow \vec{IA} = -\vec{IB} + 0.\vec{IJ}$

$$\boxed{A(-1; 0) \text{ dans } (I, \vec{IB}, \vec{IJ})}$$

$\vec{IB} = 1\vec{IB} + 0.\vec{IJ}$

$$\boxed{B(1; 0) \text{ dans } (I, \vec{IB}, \vec{IJ})}$$

$\vec{IC} = \vec{IA} + \vec{AC} = -\vec{IB} + \vec{BP}$

$= -\vec{IB} + 2\vec{IJ}$

$\boxed{C(-1; 2) \text{ dans } (I, \vec{IB}, \vec{IJ})}$

I étant l'origine du repère, $I(0;0)$

$\vec{IJ} = 0\vec{IB} + 1\vec{IJ} \iff J(0;1)$

$\vec{IP} = \vec{IB} + \vec{BP} = \vec{IB} + 2\vec{IJ}$

$\boxed{P(1; 2) \text{ dans } (I, \vec{IB}, \vec{IJ})}$

$\vec{IM} = \vec{IC} + \vec{CM} = -\vec{IB} + 2\vec{IJ} - 2\vec{IB}$

$= -3\vec{IB} + 2\vec{IJ}$

$\boxed{M(-3; 2) \text{ dans } (I, \vec{IB}, \vec{IJ})}$

$\vec{IN} = \frac{1}{3}\vec{IC} = \frac{1}{3}(-\vec{IB} + 2\vec{IJ})$

$= -\frac{1}{3}\vec{IB} + \frac{2}{3}\vec{IJ}$

$\boxed{N(-1/3; 2/3) \text{ dans } (I, \vec{IB}, \vec{IJ})}$

EXERCICE N°79

Soit A, B, C trois points non alignés et I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On note respectivement a, b, c, p les distances BC, AC, AB et le périmètre du triangle ABC.

1/ Colinéarité de deux des trois vecteurs $\vec{AI}$, $\vec{BI}$, $\vec{CI}$.

Les vecteurs $\vec{AI}$, $\vec{BI}$, $\vec{CI}$ sont des vecteurs des bissectrices des angles du triangle ABC.

Il est donc impossible de trouver deux vecteurs colinéaires parmi les trois.

2/ Soit D le point tel que :

$\vec{AD} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$.

Démontrons que les vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AI}$ sont colinéaires.

Soit les points B' et C' tels que :

$\vec{AB'} = b\vec{AB}$ et $\vec{AC'} = c\vec{AC}$

$\|\vec{AB'}\| = b\|\vec{AB}\| = bc$

$\|AC'\| = c\|\vec{AC}\| = bc$

Le quadrilatère AB'DC' est un losange. Le point D appartient donc à la bissectrice de l'angle $(\vec{AB'}, \vec{AC'}) = (\vec{AB}, \vec{AC})$. Or I est lui aussi un point de la bissectrice de l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$. Les points A, D et I sont donc alignés.

Conclusion

$\boxed{\text{Les vecteurs } \vec{AD} \text{ et } \vec{AI} \text{ sont colinéaires}}$

3/ a/ Démontrons qu'il existe un réel α tel que :

$(\alpha - b - c)\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$

D'après la question qui précède, les vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AI}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel α tel que :

$\vec{AD} = \alpha\vec{AI}$ or $\vec{AD} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$

$\Rightarrow \alpha\vec{AI} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$

$\Leftrightarrow \alpha\vec{AI} = b(\vec{AI} + \vec{IB}) + c(\vec{AI} + \vec{IC})$

$\Rightarrow \alpha\vec{IA} - b\vec{IA} - c\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha - b - c)\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$

Conclusion

Il existe un réel α tel que:

$(\alpha - b - c)\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ (I)

b-/ Démontrons de même qu'il existe un réel β tel que:

$a\vec{IA} + (\beta - a - c)\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$

Soit E le point tel que:

$\vec{BE} = a\vec{BA} + c\vec{BC}$

En introduisant les points A_1 et C_1 tels que $\vec{BA_1} = a\vec{BA}$; $\vec{BC_1} = c\vec{BC}$, On montre aisément comme précédemment que les vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{BI}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel β tel que $\vec{BE} = \beta\vec{BI}$

$\Leftrightarrow \beta\vec{BI} = a\vec{BA} + c\vec{BC}$

$= (a+c)\vec{BI} + a\vec{IA} + c\vec{IC}$

$\Rightarrow a\vec{IA} + (\beta - a - c)\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$

Conclusion

Il existe un réel β tel que:

$a\vec{IA} + (\beta - a - c)\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ (II)

c-/ Démontrons que: $\alpha = \beta = p$.

En identifiant (I) et (II) on a:

$$\begin{cases} \alpha - b - c = a \Rightarrow \alpha = a + b + c = p \\ \beta - a - c = b \Rightarrow \beta = b + a + c = p \end{cases}$$

Conclusion:

$\alpha = \beta = p$.

d-/ Déduisons-en que:

$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$

En remplaçant α par p dans (I) on a: $(p - b - c)\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \boxed{a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}}$

Application

4-/ Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(1;1)$ $B(1;4)$, $C(5;1)$ et on appelle $(\mathscr{C})$ le cercle inscrit dans le triangle ABC

a-/ Coordonnées du point K centre de $(\mathscr{C})$.

$a = BC = 5$; $b = AC = 4$; $c = AB = 3$

K est le barycentre du système:

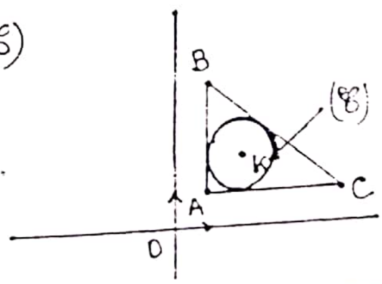
$\{(A;5), (B;4), (C;3)\}$ On montre que $K(2;2)$.

b-/ Le rayon de $(\mathscr{C})$.

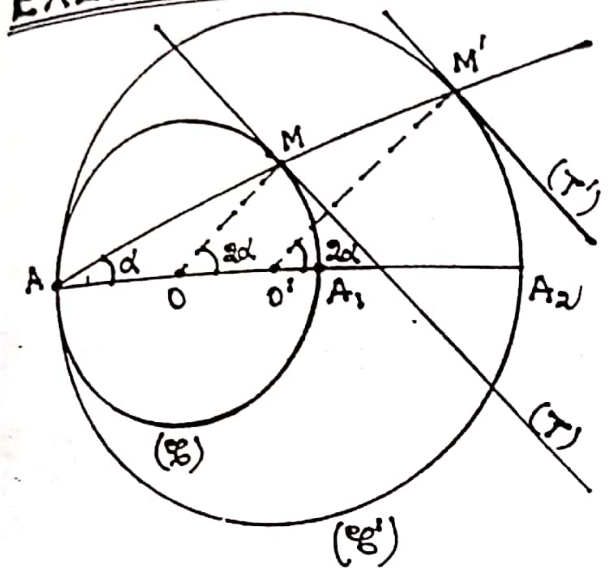
Soit R ce rayon on a: $R = d(K;(AB))$

On montre que $R = 1$

c-/ Traçons $(\mathscr{C})$



EXERCICE N°80



Montrons que les droites (T) et (T') sont parallèles

Soient A_1 et A_2 les points diamétralement opposés à A sur (C) et (C') respectivement.

Posons $\widehat{MAA_1} = \alpha$ on a: $\widehat{M'AA_2} = \alpha$

les angles $\widehat{MAA}$ et $\widehat{MOA_1}$ sont associés car $\widehat{MAA_1}$ est inscrit, $\widehat{MOA_1}$ est au centre et les deux interceptent le mame arc $\widehat{MA_1}$.

Ce qui entraîne $\widehat{MOA_1} = 2\alpha$.

On démontre de manière analogue que $\widehat{M'O'A_2} = 2\alpha$

Or les angles $\widehat{MOA_1}$ et $\widehat{M'O'A_2}$ sont des angles correspondants formés par les droites (OM) et (O'M') et la sécante (OO'); on en déduit que (OM) // (O'M')

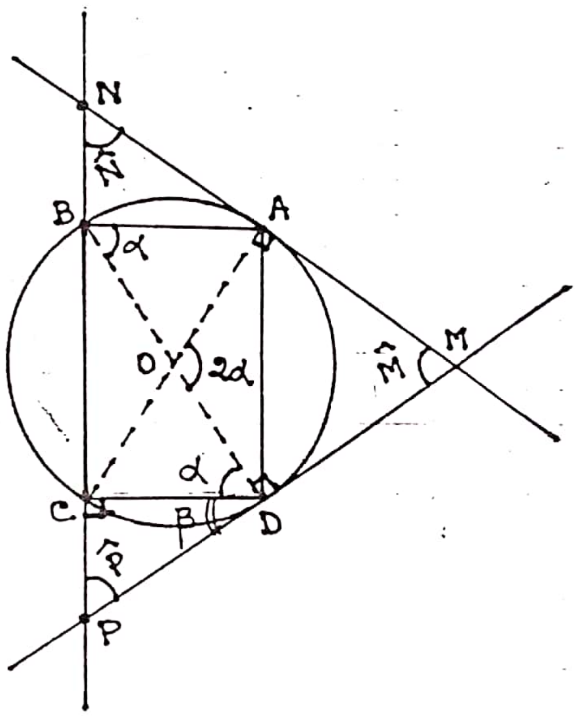
De plus (T) ⊥ (OM) et (T') ⊥ (O'M')

$$\begin{cases} (OM) \parallel (O'M') \\ (T) \perp (OM) \\ (T') \perp (O'M') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (T) \perp (O'M') \\ (T') \perp (O'M') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T) \parallel (T).$$

Les tangentes (T) et (T') sont donc parallèles.

EXERCICE N°81



Démontrons que le triangle MNP est équilatéral

$\cos\alpha = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60°$

Dans le quadrilatère OAMD, on a:

$$2\alpha + \hat{A} + \hat{D} + \hat{M} = 360 \Leftrightarrow \hat{M} = 360 - 2\alpha - \hat{A} - \hat{D}$$

$$\hat{M} = 360 - 120 - 180 = 60°$$

$$\hat{M} = 60°$$

Dans le triangle CPD, $\hat{C} = 90°$, $\hat{P} = 90 - 60 = 30°$

$\hat{P} = 180 - 90 - 30 = 60°$

$\hat{P} = 60°$

On démontre aisément que $\hat{N} = 60°$

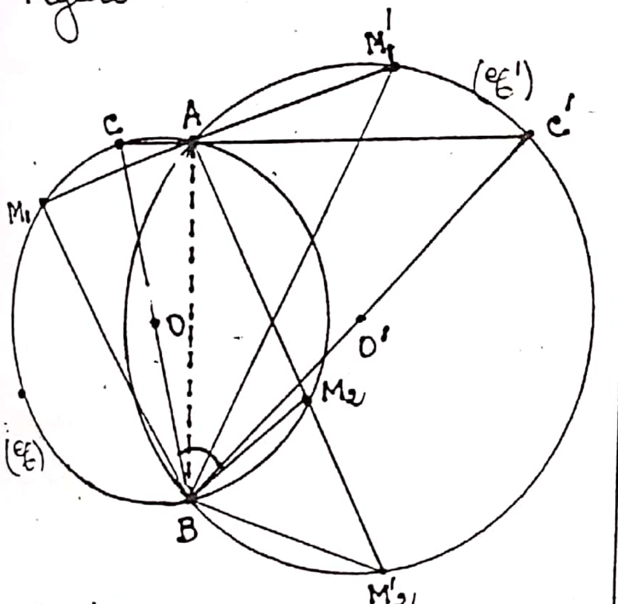
Dans le triangle MNP on a:

$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = 60°$ d'où MNP est un triangle équilatéral.

EXERCICE N°82

Soit deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, de centres respectifs O et O', sécants en deux points A et B. On appelle C le symétrique de B par rapport à O et C' le symétrique de B par rapport à O'

Figure



1/ Démontrons que les points C, A et C' sont alignés

$\begin{cases} C = S_O(B) \\ B \in (\mathscr{C}) \\ A \in (\mathscr{C}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [BC] \text{ est un diamètre de } (\mathscr{C}) \\ A \in (\mathscr{C}) \end{cases}$

$\Rightarrow$ ABC est rectangle en A

$\Rightarrow (AB) \perp (AC)$ (1)

On démontre de façon analogue que $(AB) \perp (AC')$. (2)

(1) et (2) $\Rightarrow (AC) \parallel (AC')$ or (AC) et (AC') passent par A $\Rightarrow$ (AC) et (AC') sont confondues. On en déduit donc que:

$\boxed{\text{les points C, A et C' sont alignés.}}$

2/ Soit M_1 un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et B, appartenant au demi-plan de frontière (AB) contenant C. On appelle M'_1 le point d'intersect° de (AM_1) avec $(\mathscr{C}')$.

Démontrons que mes $\widehat{CBC'}$ = mes $\widehat{M_1BM'_1}$

- les angles $\widehat{AM_1B}$ et $\widehat{ACB}$ sont inscrits sur le cercle $(\mathscr{C})$ et interceptent le même arc $\widehat{AB}$; ils ont donc la même mesure : mes $\widehat{AM_1B}$ = mes $\widehat{ACB}$.
- les angles $\widehat{AM'_1B}$ et $\widehat{AC'B}$ sont inscrits sur le cercle $(\mathscr{C}')$ et interceptent le même arc $\widehat{AB}$; ils ont donc la même mesure: mes $\widehat{AM'_1B}$ = mes $\widehat{AC'B}$.

Or : mes $\widehat{ACB}$ = mes $\widehat{C'CB}$ et mes $\widehat{AC'B}$ = mes $\widehat{CC'B}$

mes $\widehat{AM_1B}$ = mes $\widehat{M'_1M_1B}$.

De plus :

mes $\widehat{M'_1M_1B}$ + mes $\widehat{M_1M'_1B}$ + mes $\widehat{M_1BM'_1}$ = mes $\widehat{CC'B}$ + mes $\widehat{BCC'}$ + mes $\widehat{BC'C}$ = 180°

On en déduit que:

mes $\widehat{CBC'}$ = mes $\widehat{M_1BM'_1}$

3/ Soit M_2 un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et B, appartenant à l'arc d'extrémités A et B ne contenant pas C

On appelle M'_2 le point d'intersection de (AM_2) avec $(\mathscr{C}')$.

Démontrons que $mes\,\widehat{CBC'} = mes\,\widehat{M_2BM'_2}$

Les angles $\widehat{AM_2B}$ et $\widehat{AM_1B}$ sont supplémentaires car ils sont inscrits sur $(\mathscr{C})$ et interceptent deux arcs différents de mêmes extrémités.

Or $\widehat{AM_2B}$ et $\widehat{BM_2M'_2}$ sont supplémentaires donc $\widehat{BM_2M'_2}$ et $\widehat{AM_1B}$ ont même mesure

$mes\,\widehat{BM_2M'_2} = mes\,\widehat{AM_1B} = mes\,\widehat{C'CB}$

On démontre également, de façon très aisée que $mes\,\widehat{BM'_2M_2} = mes\,\widehat{BC'C}$

On en déduit donc que:

$$mes\,\widehat{CBC'} = mes\,\widehat{M_2BM'_2}$$

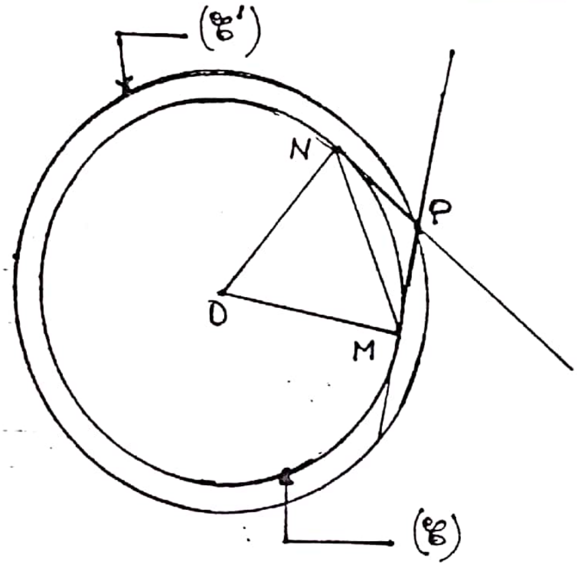
4/ Conclusion

Lorsque M parcourt le cercle $(\mathscr{C})$ privé des points A et B, les angles $\widehat{MBM'}$ ont une mesure constante qui est celle de l'angle $\widehat{CBC'}$.

EXERCICE N°83

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon R, M et N deux points qui décrivent le cercle $(\mathscr{C})$ de façon à ce que la distance MN reste toujours égale au rayon R de $(\mathscr{C})$. Soit P le point d'intersection des tangentes en M et N au cercle $(\mathscr{C})$.

1/ Pour M et N donnés sur $(\mathscr{C})$, démontrons que P appartient à un cercle $(\mathscr{C}')$ que nous déterminerons



La droite (OP) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MON}$. car OMN est équilatéral

Ceci nous permet d'écrire que:

$mes\,\widehat{PON} = 30°$ or OPN est rectangle en N. On a alors:

$$\cos 30° = \frac{ON}{OP} = \frac{R}{OP}$$

$$\Leftrightarrow OP = \frac{R}{\cos 30°} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

$$OP = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

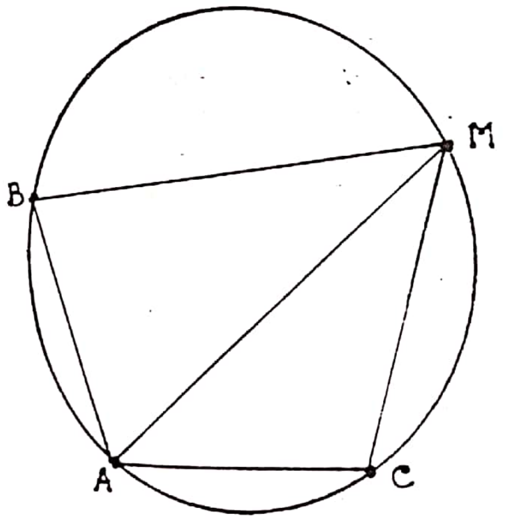
P appartient donc au cercle $(\mathscr{C}')$ de centre O et de rayon $R' = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

2°/ Réciproquement, P étant un point de ($\mathscr{C}'$), démontrons que l'on peut trouver deux points M et N de ($\mathscr{C}$) tels que P soit le point d'intersection des tangentes en M et N au cercle ($\mathscr{C}$).

A partir de la figure on peut aisément démontrer l'existence des points M et N et conclure.

EXERCICE N°84

1°/ Soit ABMC un quadrilatère inscriptible tel que le triangle ABC soit isocèle en A



Démontrons que la droite (MA) est la bissectrice issue de M dans le triangle BMC

ABC isocèle en A $\Leftrightarrow$ AB = AC

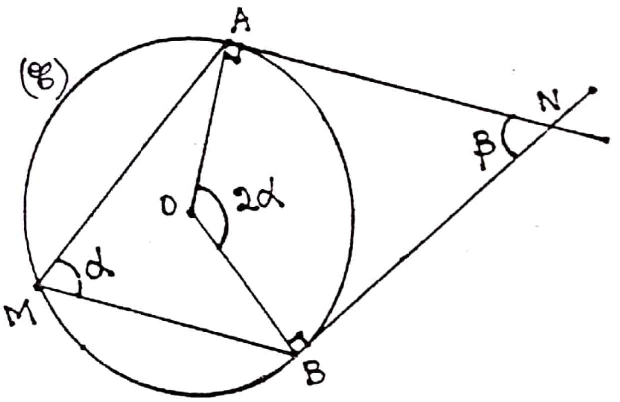
$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$.

Les angles $\widehat{BMA}$ et $\widehat{AMC}$ sont donc deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur. Ils ont par conséquent la même mesure.

mes $\widehat{BMA}$ = mes $\widehat{AMC}$.

La droite (MA) est donc la bissectrice issue de M dans le triangle BMC

2°/ Soit A et B deux points d'un cercle ($\mathscr{C}$) non diamétralement opposés. On choisit un point M sur ($\mathscr{C}$) n'appartenant pas à $\widehat{AB}$. Les tangentes en A et B au cercle ($\mathscr{C}$) se coupent en N.



Trouvons la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ pour que mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$

Soit O le centre de ($\mathscr{C}$).

Dans le quadrilatère AOBN on a:

$2\alpha + \beta + 2 \times 90° = 360° \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 180°$

$\alpha = \beta \Leftrightarrow 2\alpha + \alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 60°$

$\alpha = 60° \Leftrightarrow 2\alpha = 120° = \frac{2\pi}{3}$.

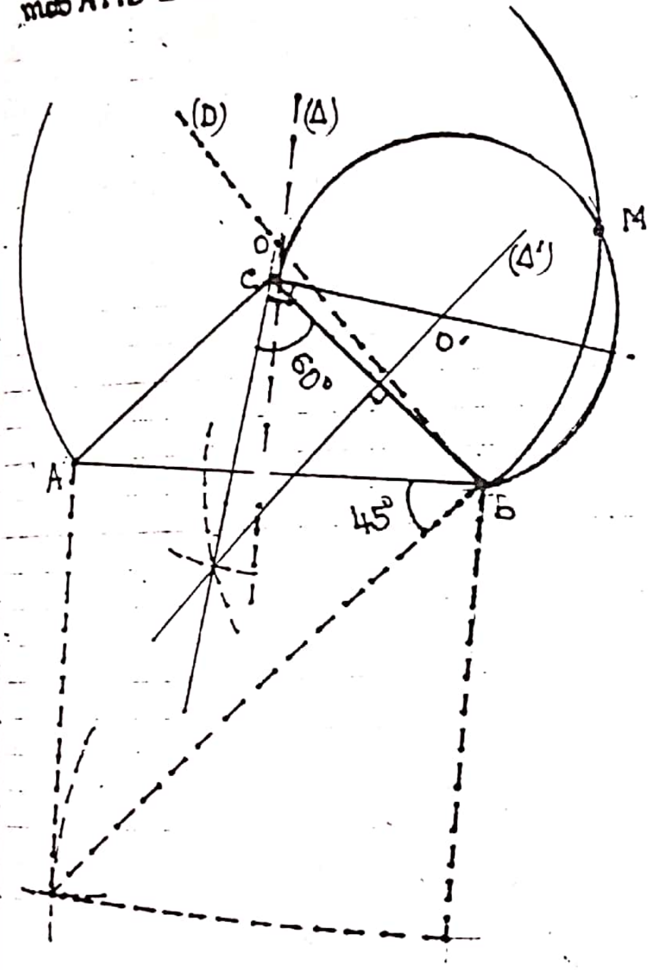
Pour que mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$ il faut que $\widehat{AB} = \frac{c}{3}$ avec c = circonférence de ($\mathscr{C}$)

EXERCICE N°85

1/ Soit ABC un triangle tel que $AB = 6cm$, $BC = 4cm$ et $mes\widehat{ABC} = 40°$

Construisons à la règle et au compas un point M tel que :

$mes\widehat{AMB} = 45°$ et $mes\widehat{BMC} = 60°$



EXERCICE N°86

Pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\pi]$, on définit les nombres $A(x)$ et $B(x)$ par:

$A(x) = \cos(-x) + \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$

$B(x) = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos(x - \frac{\pi}{2})$

Mettons $A(x)$ et $B(x)$ sous la forme la plus simple possible

$A(x) = \cos(-x) + \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$

On sait que : $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$A(x) = \cos x - \sin x + \sin x - \cos x = 0$

$B(x) = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos(x - \frac{\pi}{2})$

On sait que: $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$

$B(x) = \sin x + \cos x + \sin x - \sin x$

$= \sin x + \cos x$

Conclusion

$A(x) = 0$	$B(x) = \sin x + \cos x$

EXERCICE N°87

1/ Démontrons que:

$\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{4\pi}{10} + \cos\frac{6\pi}{10} = 0$

On sait que: $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\cos\frac{9\pi}{10} = \cos(\pi - \frac{\pi}{10}) = -\cos\frac{\pi}{10}$

$\cos\frac{6\pi}{10} = \cos(\pi - \frac{4\pi}{10}) = -\cos\frac{4\pi}{10}$

$\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{4\pi}{10} + \cos\frac{6\pi}{10} =$

$\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{4\pi}{10} - \cos\frac{4\pi}{10} = 0$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{4\pi}{10} + \cos\frac{6\pi}{10} = 0}$$

2/ x étant la mesure principale d'un angle orienté, démontrons que:

a/ $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

$(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x$

or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\boxed{(\cos x+\sin x)^2 = 1+2\sin x\cos x}$$

b/ $(\cos x-\sin x)^2 = 1-2\sin x\cos x$

$(\cos x-\sin x)^2 = \cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x$

$= 1-2\sin x\cos x$

$$\boxed{(\cos x-\sin x)^2 = 1-2\sin x\cos x}$$

c/ $\cos^4 x+\sin^4 x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x$.

On sait que :

$(\cos^2 x+\sin^2 x)^2 = \cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \cos^4 x+\sin^4 x = 1^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$\boxed{\cos^4 x+\sin^4 x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x}$$

d/ $\cos^4 x-\sin^4 x = \cos^2 x-\sin^2 x$

$\cos^4 x-\sin^4 x = (\cos^2 x)^2-(\sin^2 x)^2$

$= (\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$= 1\times(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$$\boxed{\cos^4 x-\sin^4 x = \cos^2 x-\sin^2 x}$$

e/ $\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x = 1$

$\sin^4 x-\cos^4 x = -(\cos^4 x-\sin^4 x)$

$= -(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$= \sin^2 x-\cos^2 x$

$\sin^4 x-\cos^4 x+2 \quad = \sin^2 x-\cos^2 x+2\cos^2 x$

$= \sin^2 x+\cos^2 x = 1$

$$\boxed{\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x = 1}$$

3/ x étant la mesure principale d'un angle orienté non droit, démontrons que : $\tan^2 x-\sin^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x$

$\tan^2 x-\sin^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x$

$= \dfrac{\sin^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}.\sin^2 x$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\sin^2 x = \tan^2 x\sin^2 x$

$$\boxed{\tan^2 x-\sin^2 x = \tan^2 x\sin^2 x}$$

EXERCICE N°88

1/ Calculons $\cos x$ sachant que:

$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$

On sait que $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1-\sin^2 x$

$= 1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1-\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$ ou $\cos x = \dfrac{1}{2}$

De plus $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\cos x = -\frac{1}{2}}$$

2/ Calculons $\sin\dfrac{\pi}{5}$ et $\tan\dfrac{\pi}{5}$ sachant que : $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\sin^2\dfrac{\pi}{5} = 1-\cos^2\dfrac{\pi}{5}$

$= 1-\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1-\dfrac{6+2\sqrt{5}}{16}$

$= \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$

$\sin\dfrac{\pi}{5} = \pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$ $\quad 0 < \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\dfrac{\pi}{5} > 0$

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}$$

$$\tan^2\frac{\pi}{5} = \frac{\sin^2\pi/5}{\cos^2\pi/5} = \frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$\tan^2\frac{\pi}{5} = 5-2\sqrt{5} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{5} = \pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

or $\tan\frac{\pi}{5} > 0$

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

3-/ Calculons $\sin\frac{\pi}{10}$ et $\tan\frac{\pi}{10}$ sachant que: $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$$\sin^2\frac{\pi}{10} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{10+2\sqrt{5}}{16} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16}$$

$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}$ car $\sin\frac{\pi}{10} > 0$

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\tan^2\frac{\pi}{10} = \frac{\sin^2\pi/10}{\cos^2\pi/10} = \frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}} = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}$$

$\tan\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ car $\tan\frac{\pi}{10} > 0$

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}}$$

3-/ Calculons $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$ sachant que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

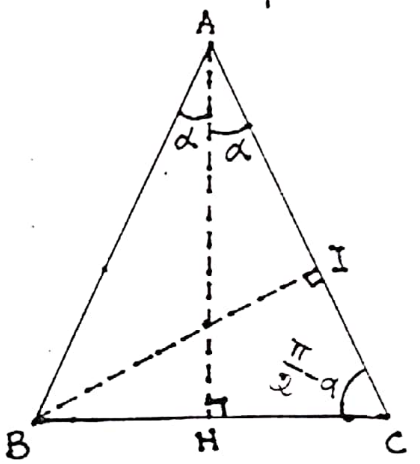
$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

$$\tan^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sin^2\pi/12}{\cos^2\pi/12} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^2$$

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}}$$

EXERCICE N°89

Soit un nombre réel α tel que: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que: $mes(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = 2\alpha$. H et I sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A et B. On pose: $a = AB$



1-/ Démontrons que $BC = 2a\sin\alpha$

ABC étant isocèle en A et H le pied de la hauteur issue de A, on peut dire que H est milieu de [BC] et (AH) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})$

Considérons le triangle AHB rectangle en H on a: $\sin\alpha = \frac{BH}{AB}$

$\Leftrightarrow BH = AB\sin\alpha = a\sin\alpha$

or $BH = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow \frac{BC}{2} = a\sin\alpha$

$\Leftrightarrow BC = 2a\sin\alpha$

$$\boxed{BC = 2a\sin\alpha}$$

2-/ Démontrons que: $BI = BC\cos\alpha$

Considérons le triangle BIC rectangle

on I on a :

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{BI}{BC}$ or $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{BI}{BC} \Leftrightarrow BI=BC\cos\alpha$

$$\boxed{BI=BC\cos\alpha}$$

3/ Démontrons que : $BI=a\sin 2\alpha$

Considérons le triangle ABI rectangle en I on a : $\sin 2\alpha=\frac{BI}{AB}=\frac{BI}{a}$

$\Leftrightarrow BI=a\sin 2\alpha$

$$\boxed{BI=a\sin 2\alpha}$$

4/ Déduisons-en que : $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$BI=BC\cos\alpha=a\sin 2\alpha$

or $BC=2a\sin\alpha$

$\Leftrightarrow a\sin 2\alpha=2a\sin\alpha\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

EXERCICE N°90

Soit α et β deux nombres réels.

On rappelle que :

* si $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ alors $\sin\alpha=\cos\beta$
* $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$

1/ Démontrons que :

$16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}=1$

$\frac{\pi}{24}+\frac{11\pi}{24}=\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{24}+\frac{7\pi}{24}=\frac{\pi}{2}$

$\sin\frac{11\pi}{24}=\cos\frac{\pi}{24}$ et $\sin\frac{7\pi}{24}=\cos\frac{5\pi}{24}$

Posons $E=16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}$

$E=16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}$

$=4\left(2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\right)\left(2\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}\right)$

$=4\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$ or $\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$

$=4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}=1$

$$\boxed{16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}=1}$$

2/ x est un nombre réel distinct de $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

a/ Soit $A=16\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x$

En calculant $A\sin x$, montrons que $A=\frac{\sin 16x}{\sin x}$

$A\sin x=16\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x$

$=8(2\sin x\cos x)\cos 2x\cos 4x\cos 8x$

$=8\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 8x$

$=4(2\sin 2x\cos 2x)\cos 4x\cos 8x$

$=4\sin 4x\cos 4x\cos 8x$

$=2(2\sin 4x\cos 4x)\cos 8x$

$=2\sin 8x\cos 8x=\sin 16x$

$A\sin x=\sin 16x$

On en déduit que :

$$\boxed{A=\frac{\sin 16x}{\sin x}}$$

b/ Déduisons-en la valeur exacte du nombre : $B = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$

$16B = 16\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$

$= \frac{\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)}{\sin\frac{\pi}{15}} = \frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{15}\right)}{\sin\frac{\pi}{15}}$

or $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{15}\right) = -\sin\frac{\pi}{15}$. d'où

$16B = -1$ soit $B = -\frac{1}{16}$

$$\boxed{B = -\frac{1}{16}}$$

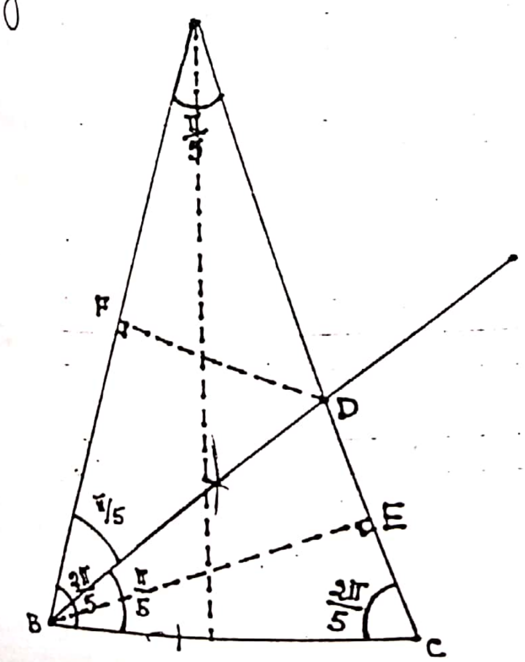
EXERCICE N°91

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que :

$BC = a$ et $\text{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{5}$

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté [AC] en D.

Figure.



1°/ Démontrons que $AD = BD = a$

ABC isocèle en A $\Leftrightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \frac{2\pi}{5}$

or $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = \pi \Leftrightarrow \widehat{BAC} + \frac{4\pi}{5} = \pi$

$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = \frac{\pi}{5}$

(BD) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$

$\Leftrightarrow \widehat{DBA} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{\pi}{5}$

Dans le triangle DBC on a :

$\widehat{BDC} + \widehat{DBC} + \widehat{BCD} = \pi \Leftrightarrow \widehat{BDC} + \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \pi$

$\Leftrightarrow \widehat{BDC} = \frac{2\pi}{5}$

$\widehat{BAC} = \widehat{DBA} \Leftrightarrow$ ABD est isocèle en D.

$\Leftrightarrow AD = BD$ (1)

De plus $\widehat{BDC} = \widehat{BCA} = \widehat{BCD} = \frac{2\pi}{5}$

$\Leftrightarrow$ BDC est isocèle en B.

$\Leftrightarrow BD = BC$ or $BC = a$ (2)

(1) et (2) $\Leftrightarrow AD = BD = a$.

$$\boxed{AD = BD = a}$$

2°/ Démontrons que :

$AB = 2a\cos\frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a\cos\frac{2\pi}{5}$

Considérons le triangle ADB isocèle en D. Soit F le pied de la hauteur issue de D, F est milieu de [AB]. On pourra écrire : $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{AF}{AD} = \frac{AB}{2AD} = \frac{AB}{2a}$

$\Leftrightarrow \boxed{AB = 2a\cos\frac{\pi}{5}}$

Considérons le triangle BDC isocèle en B. Soit E le pied de la hauteur issue de B, E est milieu de [DC]. On peut alors écrire :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{DE}{BD} = \frac{CD}{2BD} = \frac{CD}{2a}$$

$$\Leftrightarrow CD = 2a\cos\frac{2\pi}{5}$$

$AB = 2a\cos\frac{\pi}{5}$	$CD = 2a\cos\frac{2\pi}{5}$

<u>Déduisons-en que</u> : $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$

$$AB - CD = AC - CD = AD = a$$

$$\Leftrightarrow 2a\cos\frac{\pi}{5} - 2a\cos\frac{2\pi}{5} = a$$

$$\Leftrightarrow 2a\left(\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}\right) = a$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}}$$

3./ On appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC)

<u>Calculons BH en fonction de a de deux manières différentes</u>

- <u>Première manière</u>

ABC isocèle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC) $\Rightarrow$ H milieu de [BC] $\Leftrightarrow BH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

$$\boxed{BH = \frac{a}{2}} \quad (3)$$

- <u>Deuxième manière</u>

Considérons le triangle AHB rectangle en H on a : $BH = AB\cos\frac{2\pi}{5}$

$$BH = 2a\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$\boxed{BH = 2a\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}} \quad (4)$$

<u>Déduisons-en que</u> : $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$

(3) et (4) $\Leftrightarrow 2a\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{a}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}}$$

4./ En remarquant que : $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$, calculons $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Posons $x = \cos\frac{\pi}{5}$ et $y = \cos\frac{2\pi}{5}$ on a :

$$\left(\cos\frac{\pi}{5} + \cos 2\pi/5\right)^2 = \left(\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ car $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ et $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

5./ <u>Calculons</u> $\sin\frac{\pi}{5}$

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{5}$$

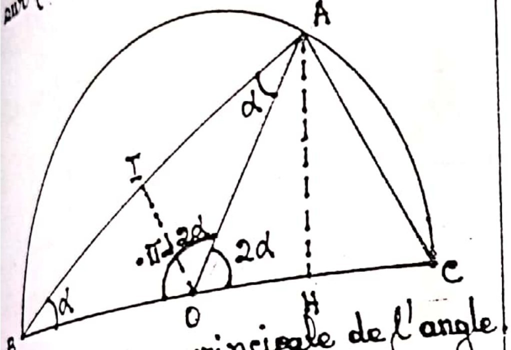
$$= 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$= \frac{10-2\sqrt{5}}{16} \quad \text{or } \sin\frac{\pi}{5} > 0$$

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

EXERCICE N°92

Soit un demi-cercle de centre O et de diamètre $BC = 2$, A un point de ce demi-cercle tel que $\widehat{COA}$ soit aigu.
On note H le projeté orthogonal de A sur (BC) et I celui de O sur (AB).



α est la mesure principale de l'angle $(\widehat{\vec{BC},\vec{BA}})$

1/ Démontrons que I est le milieu de [AB] et que $OH = \cos 2\alpha$

Le triangle OAB est isocèle en O car $OA = OB = 1$. La hauteur issue du point O du triangle OAB est médiatrice du segment [AB].

I est donc milieu de [AB]

OAB isocèle en O et $(\widehat{\vec{BC},\vec{BA}}) = \alpha \Rightarrow$

$(\widehat{\vec{BO},\vec{BA}}) = (\widehat{\vec{AB},\vec{AO}}) = \alpha$ et

$(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) = \pi - 2\alpha \Rightarrow (\widehat{\vec{OH},\vec{OA}}) = 2\alpha$

Dans le triangle OAH rectangle en H on a: $\cos 2\alpha = \frac{OH}{OA}$ or $OA = 1$

$$\boxed{OH = \cos 2\alpha}$$

2/ Exprimons AB en fonction de $\cos\alpha$

Considérons le triangle OIB rectangle en I on a:

$\cos\alpha = \frac{BI}{BO}$ or $BO = 1$

$\Leftrightarrow BI = \cos\alpha$ or $BI = \frac{AB}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \cos\alpha$ soit $AB = 2\cos\alpha$

$$\boxed{AB = 2\cos\alpha}$$

3/ Démontrons que:

$BH = 2\cos^2\alpha$ et $OH = 2\cos^2\alpha - 1$

On sait d'après Pythagore (cours de 3e) que: $AB^2 = BC \cdot BH$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\alpha = 2BH \Leftrightarrow BH = 2\cos^2\alpha$.

$BH = BO + OH \Leftrightarrow OH = BH - BO$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

$BH = 2\cos^2\alpha$	$OH = 2\cos^2\alpha - 1$

4/ Déduisons-en que:

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\begin{cases} OH = \cos 2\alpha \\ OH = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

De plus $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

5/ Application

Calculons $\cos\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

On sait que : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Posons $\alpha = \frac{\pi}{8}$ on a :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\pi/4}{2} = \frac{1+\sqrt{2}/2}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\pi/4}{2} = \frac{1-\sqrt{2}/2}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Or $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ d'où :

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Posons $\alpha = \frac{\pi}{12}$ on a :

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\pi/6}{2} = \frac{1+\sqrt{3}/2}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\pi/6}{2} = \frac{1-\sqrt{3}/2}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

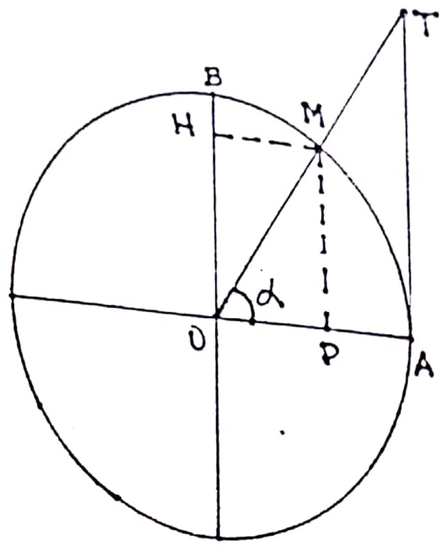
$\cos\frac{\pi}{12} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{12} > 0$ d'où

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

EXERCICE N°93

Soit $\alpha \in]-\pi/2; \pi/2[$, M son image sur le cercle trigonométrique. On appelle A l'image de zéro, T le point d'intersection de (OM) et de la tangente en A au cercle trigonométrique.

1/ Figure (Voir ci-contre)



2/ Calculons l'aire du triangle OAT en fonction de α

Soit S cette aire on a :

$S = \frac{1}{2}$ OA. AT avec $OA = 1$.

$S = \frac{1}{2}|\overline{AT}|$

Soit P et H les projetés orthogonaux respectifs sur (OA) et sur (OB), B étant l'image de $\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique. On a : $\overline{OP} = \cos\alpha$, $\overline{OH} = \sin\alpha$

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{AT} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} \cdot \overline{OA}$$
$$= \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$\overline{AT} = \tan\alpha$ d'où

$$\boxed{S = \frac{1}{2}|\tan\alpha|}$$

3/ Calculons, en fonction de α, l'aire de la région du plan limitée par les segments [OA], [OM] et l'arc $\widehat{AM}$.

Soit S_1 cette aire on a :

$S_1 = \frac{OA^2}{2} \times |\alpha|$ (α en radians)

$$\boxed{S_1 = \frac{1}{2}|\alpha|}$$

4/ Démontrons que $|\alpha| \leq |\tan\alpha|$

$S_1 \leq S \left(=\frac{1}{2}|\alpha| \leq \frac{1}{2}|\tan\alpha| \leq |\tan\alpha|\right.$

On a donc :

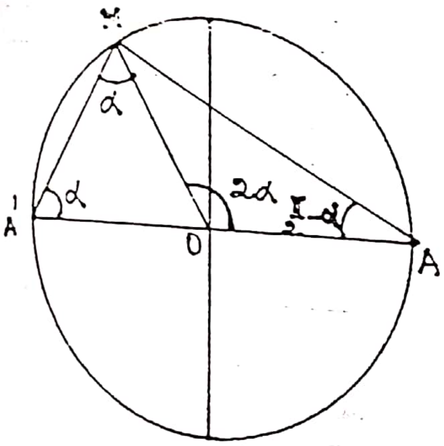
$$\boxed{|\alpha| \leq |\tan\alpha|}$$

EXERCICE N°94

Soit $\alpha \in]-\pi/2 ; \pi/2[$, M l'image de 2α sur le cercle trigonométrique.

On appelle A l'image de zéro, A' le symétrique de A par rapport à O

Figure :



1/ Calculons en fonction de α, la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{A'M}})$

$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{A'M}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'O}, \overrightarrow{A'M}})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ car

$(\overrightarrow{A'O}, \overrightarrow{A'M})$ est inscrit, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ est au centre et les deux interceptent le même arc. Or $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = 2\alpha$

$$\boxed{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{A'M}) = \alpha}$$

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER.

2/ Dans le triangle AA'M, calculons AM en fonction de $\sin|\alpha|$

Le triangle AA'M est rectangle en M car AA' est un diamètre et M un point du cercle trigonométrique.

$\sin|\alpha| = \frac{AM}{A'A} = \frac{AM}{2}$ d'où

$$\boxed{AM = 2\sin|\alpha|}$$

3/ Longueur de l'arc $\widehat{AM}$

$\widehat{AM} = OA.|2\alpha| = 2|\alpha|$ car $OA = 1$

$$\boxed{\widehat{AM} = 2|\alpha|}$$

4/ Démontrons que :

$\sin|\alpha| = |\sin\alpha|$ et que : $|\sin\alpha| \leq |\alpha|$

Si $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha \geq 0$

Si $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$, $\sin\alpha \leq 0$

$$\sin|\alpha| = \begin{cases} \sin\alpha \text{ si } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\ -\sin\alpha \text{ si } -\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$|\sin\alpha| = \begin{cases} \sin\alpha \text{ si } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\ -\sin\alpha \text{ si } -\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0 \end{cases}$$

On en déduit que : $\sin|\alpha| = |\sin\alpha|$

$$\boxed{\sin|\alpha| = |\sin\alpha|}$$

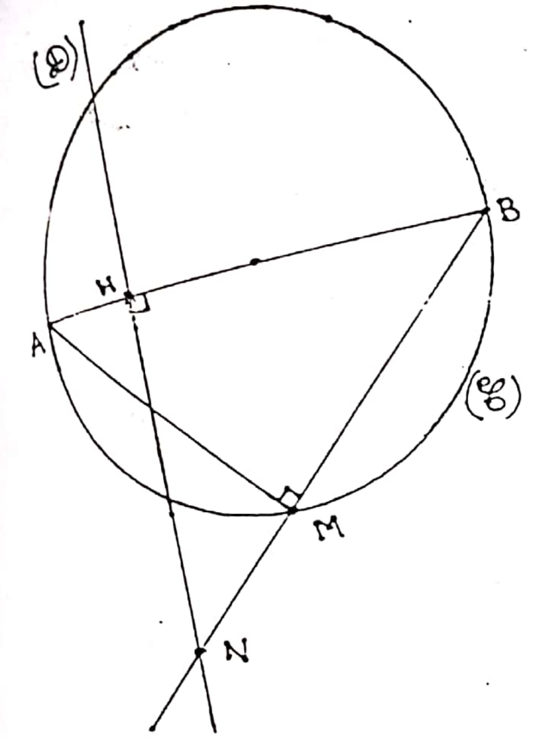
$AM \leq \widehat{AM} \Leftrightarrow 2\sin|\alpha| \leq 2|\alpha|$

or $\sin|\alpha| = |\sin\alpha|$

$\Leftrightarrow 2|\sin\alpha| \leq 2|\alpha|$ soit $\boxed{|\sin\alpha| \leq |\alpha|}$

EXERCICE N°95

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$, H un point de $[AB]$, $(\mathscr{D})$ la perpendiculaire à (AB) en H. Soit M un point de $(\mathscr{C})$. La droite (BM) coupe $(\mathscr{D})$ en N.



1-/ Démontrons que: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM})$

$= \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AM}$

$[AB]$ est un diamètre de $(\mathscr{C})$ et M un point de $(\mathscr{C})$, le triangle AMB est donc rectangle en M $\Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ or B, M et N sont alignés; donc $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN} = 0$

d'où $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA}$

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA}}$

2-/ Déduisons-en que le produit scalaire $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN}$ reste constant lorsque M décrit $(\mathscr{C})$

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA}$

Le projeté orthogonal de N sur (AB) est le point H

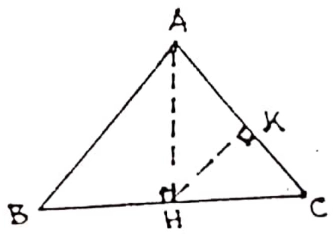
$\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA}$. Or la position des points A, B et H est fixe et ne dépend pas de celle de M

Conclusion : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN}$ reste constant lorsque M décrit $(\mathscr{C})$

EXERCICE N°96

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que: $AB = 3$ et $BC = 4$

Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), K le projeté orthogonal de H sur (AC)



1-/ Calculons AH

Considérons le triangle AHC rectangle en H on a: $HC = \frac{1}{2}BC = 2$ $AC = 3$

Appliquons le théorème de Pythagore

$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Leftrightarrow AH^2 = AC^2 - HC^2$

$AH^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Leftrightarrow AH = \sqrt{5}$

$$\boxed{AH = \sqrt{5}}$$

2/ Calculons $\vec{AK}.\vec{AC}$ de deux manières différentes et Déduisons-en la valeur de AK

$\vec{AK}.\vec{AC} = \|\vec{AK}\|.\|\vec{AC}\|.\cos(\vec{AK},\vec{AC})$

or $\vec{AK}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires de même sens $\Rightarrow (\widehat{\vec{AK},\vec{AC}}) = 0$ et $\cos(\vec{AK},\vec{AC}) = 1$

$\vec{AK}.\vec{AC} = AK.AC = 3AK$

$$\boxed{\vec{AK}.\vec{AC} = 3AK} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} AH^2 = \vec{AH}.\vec{AH} &= \vec{AH}(\vec{AC}+\vec{CH}) \\ &= \vec{AH}.\vec{AC} + \vec{AH}.\vec{CH} \\ &= \vec{AH}.\vec{AC} \text{ car } \vec{AH} \perp \vec{CH} \\ &= (\vec{AK}+\vec{KH})\vec{AC} \\ &= \vec{AK}.\vec{AC} + \vec{KH}.\vec{AC} \\ &= \vec{AK}.\vec{AC} \text{ car } \vec{KH} \perp \vec{AC} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\vec{AK}.\vec{AC} = AH^2} \quad (2)$$

Déduisons-en la valeur de AK

(1) et (2) $\Rightarrow 3AK = AH^2$

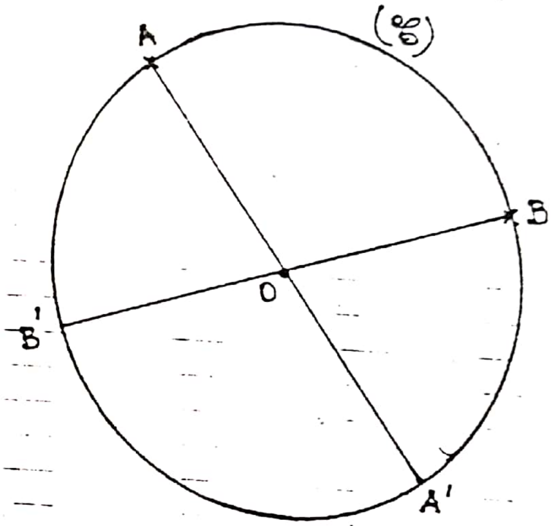
$\Leftrightarrow \boxed{AK = \frac{1}{3}AH^2}$

$AK = \frac{1}{3}(\sqrt{5})^2 = \frac{5}{3}$

$$\boxed{AK = \frac{5}{3}}$$

EXERCICE N°97

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r. On considère sur $(\mathscr{C})$ deux points A et B et leurs symétriques respectifs A' et B' par rapport à O



1/ Démontrons que:

$\vec{AA'}.\vec{AB'} = \vec{BB'}.\vec{BA'}$ et $\vec{AA'}.\vec{AB} = \vec{BB'}.\vec{BA}$

$$\begin{aligned} \vec{AA'}.\vec{AB'} &= (\vec{AB}+\vec{BA'})\vec{AB'} \\ &= \vec{AB}.\vec{AB'} + \vec{BA'}.\vec{AB'} \end{aligned}$$

[BB'] est un diamètre de $(\mathscr{C})$, A un point de $(\mathscr{C})$ $\Rightarrow$ le triangle BAB' est rectangle en A $\Rightarrow \vec{AB}.\vec{AB'} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{AA'}.\vec{AB'} &= \vec{BA'}.\vec{AB'} \\ &= \vec{BA'}(\vec{AB}+\vec{BB'}) \\ &= \vec{BB'}.\vec{BA'} + \vec{BA'}.\vec{AB} \end{aligned}$$

[AA'] est un diamètre de $(\mathscr{C})$, B un point de $(\mathscr{C})$ $\Rightarrow$ le triangle ABA' est rectangle en B $\Leftrightarrow \vec{BA'}.\vec{AB} = 0$ d'où

$$\boxed{\vec{AA'}.\vec{AB'} = \vec{BB'}.\vec{BA'}}$$

$\overrightarrow{[illegible]A'}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'A'}).\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'A'}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{B'A'}.\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AB} = 0$

$= (\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA'}).\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{B'B}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{B'B}.\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{BA'}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\boxed{\overrightarrow{[illegible]A'}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}}$

[illegible]/ Démontrons que les sommes:

$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'}$ sont constantes lorsque A et B parcourent $(\mathscr{C})$

$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{BB'}(\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{BA})$

$= \overrightarrow{BB'}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})$

$= 2\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BB'}$ car O milieu de [AA']

$= 2r.(2r)\cos 0$

$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA} = 4r^2$

$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'}$

$= \overrightarrow{AA'}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'})$

$= \overrightarrow{AA'}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB'})$

$= 2\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AA'}$ car O milieu de [BB']

$= 2r.(2r)\cos 0$

$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'} = 4r^2$

Les sommes $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BB'}.BA$ et

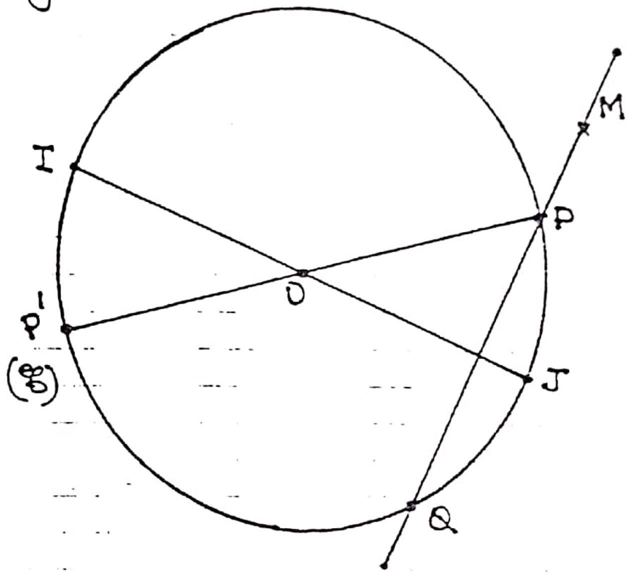
$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA'}$ sont donc constantes lorsque A et B parcourent $(\mathscr{C})$

EXERCICE N°98

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r, M un point quelconque du plan.

Soit [IJ] un diamètre de $(\mathscr{C})$

Figure



1/ Démontrons que le produit scalaire $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}$ ne dépend pas du diamètre [IJ] choisi

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OI})(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OJ})$

$= MO^2 + \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ})$

or O milieu de [IJ] ce qui entraîne $(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = MO^2 - OI^2$

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = MO^2 - r^2$

Le produit scalaire $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}$ est donc indépendant du diamètre [IJ] choisi

2/ Une droite passant par M coupe $(\mathscr{C})$ en deux points P et Q soit P' le symétrique de P par rapport à O.

Démontrons que: $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MP'}$

$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}(\overrightarrow{MP'}+\overrightarrow{P'Q})$

$= \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MP'} + \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{P'Q}$

P' symétrique de P par rapport à O $\Rightarrow$ [PP'] est un diamètre de $(\mathscr{C})$. De plus $Q \in (\mathscr{C})$. Ceci nous permet de dire que le triangle PQP' est rectangle en Q. Or M, P et Q sont alignés $\Rightarrow$ $(MP) \perp (P'Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{P'Q} = 0$ d'où

$$\boxed{\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MP'}}$$

3./ Déduisons que $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$ reste constant lorsque P décrit $(\mathscr{C})$

$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MP'}$

[PP'] est un diamètre de $(\mathscr{C})$. Donc d'après 1./, $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MP'} = MO^2 - r^2$

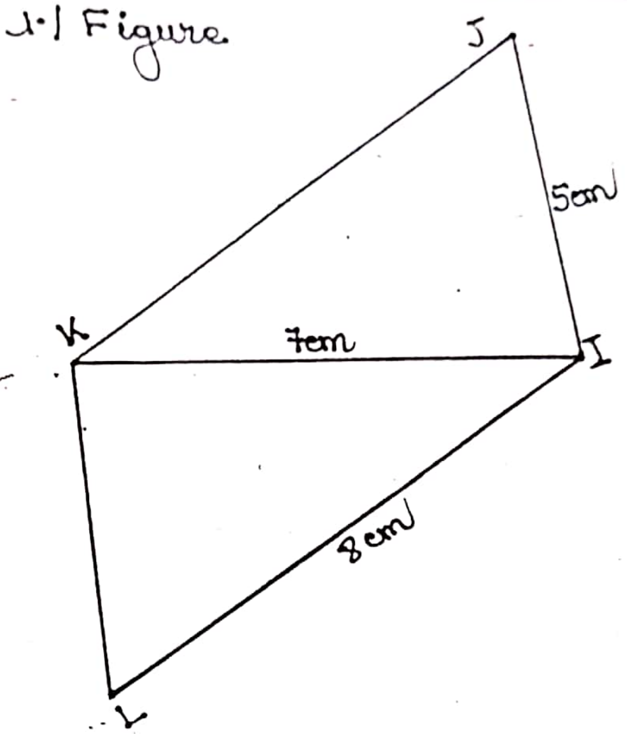
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = MO^2 - r^2$ indépendant de la position de P.

$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$ reste donc constant lorsque P décrit $(\mathscr{C})$

EXERCICE N°99

Soit IJKL un parallélogramme tel que: IJ = 5cm ; IL = 8cm et IK = 7cm

1./ Figure



2./ Calculons: $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LK}$

$$\boxed{\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LK} = \frac{LI^2+LK^2-IK^2}{2}}$$

$\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LK} = \frac{64+25-49}{2}$, LK = IJ

$$\boxed{\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LK} = 20}$$

Déduisons-en la mesure en dégré de l'angle $\widehat{ILK}$

$\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LK} = LI.LK.\cos(\widehat{ILK})$

$\Leftrightarrow \boxed{\cos(\widehat{ILK}) = \frac{\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LK}}{LI.LK}}$

$\cos(\widehat{ILK}) = \frac{20}{8\times 5} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{\widehat{ILK} = 60°}$

3./ Calculons $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IJ}$ et $(\overrightarrow{IL}-\overrightarrow{IJ})^2$

$\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IJ} = IL.IJ\cos(\widehat{LIJ})$

or $\widehat{ILK}$ et $\widehat{LIJ}$ sont deux angles consécutifs dans le parallélogramme, ils sont donc supplémentaires ; d'où $\widehat{LIJ} = 120°$

$\vec{IL}.\vec{IJ} = IL.IJ\cos 120°$

$= 8\times 5\cos 120° = 8\times 5\times(-\frac{1}{2})$

$\boxed{\vec{IL}.\vec{IJ} = -20}$

$(\vec{IL}-\vec{IJ})^2 = IL^2 + IJ^2 - 2\vec{IL}.\vec{IJ}$

$= 64 + 25 + 2\times 20$

$\boxed{(\vec{IL}-\vec{IJ})^2 = 129}$

Déduisons-en la mesure de la diagonale LJ

$(\vec{IL}-\vec{IJ})^2 = (\vec{JI}+\vec{IL})^2 = (\vec{JL})^2 = JL^2$

$\Leftrightarrow LJ^2 = 129 \Leftrightarrow LJ = \sqrt{129}$

$\boxed{LJ = \sqrt{129}}$

EXERCICE N°100

Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$

$M \longmapsto \vec{MA}.\vec{MB}$

1/ On appelle O le milieu de $[AB]$.

Déterminons $f(A)$, $f(B)$ et $f(O)$

$f(A) = \vec{AA}.\vec{AB} = \vec{0}.\vec{AB} = 0$

$f(B) = \vec{BA}.\vec{BB} = \vec{BA}.\vec{0} = 0$

$f(O) = \vec{OA}.\vec{OB} = -OA^2 = -\frac{AB^2}{4}$

$f(A) = 0$	$f(B) = 0$	$f(O) = -\frac{AB^2}{4}$

2/ Montrons que :

$\forall M \in \mathcal{P},\ f(M) = OM^2 - \frac{AB^2}{4}$

$\forall M \in \mathcal{P},\ f(M) = \vec{MA}.\vec{MB}$

$= (\vec{MO}+\vec{OA}).(\vec{MO}+\vec{OB})$

$= MO^2 + \vec{OA}.\vec{OB} + \vec{MO}(\vec{OA}+\vec{OB})$

O milieu de $[AB] \Leftrightarrow \vec{OA}+\vec{OB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{OA} = -\vec{OB}$

$\Leftrightarrow f(M) = OM^2 - OA^2 + \vec{MO}.\vec{0}$; $OA^2 = \frac{AB^2}{4}$

$\boxed{\forall M \in \mathcal{P},\ f(M) = OM^2 - \frac{AB^2}{4}}$

3/ Si $AB = 2$, déterminons l'ensemble des points M du plan tel que : $f(M) = 0$

$f(M) = 0 \Leftrightarrow OM^2 - \frac{AB^2}{4} = 0$

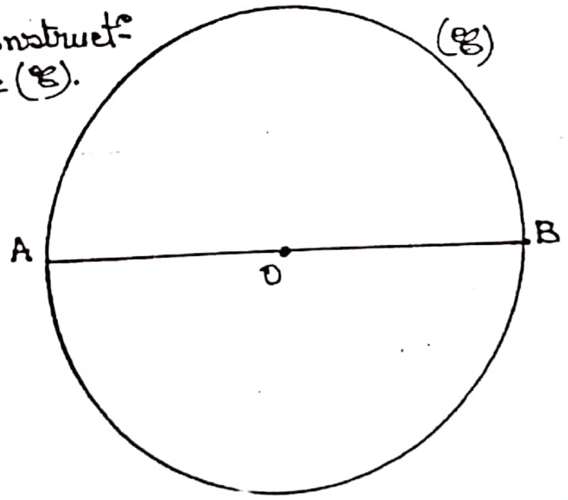
$\Leftrightarrow OM^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$OM^2 = 1 \Leftrightarrow OM = 1$

L'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan tel que $f(M) = 0$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

Remarque : $OA = OB = 1$ avec O milieu de $[AB]$. $(\mathcal{C})$ est donc le cercle de diamètre $[AB]$

Construct° de $(\mathcal{C})$.



EXERCICE N°101

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$. On considère les points $A(2;-3)$ et $B(2;1)$.

1/ Déterminons une équation de l'ensemble (C) des points M tels que

$$AM^2 + BM^2 = 40$$

Soit $M(x;y)$ un point du plan

$M \in (C) \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = 40$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + (x-2)^2 + (y-1)^2 = 40$

$\Leftrightarrow 2(x-2)^2 + (y+3)^2 + (y-1)^2 = 40$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 18 = 40$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y = 11$

(C) a pour équation :

$$\boxed{x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0}$$

2/ Soit I le milieu du segment [AB]. Démontrons que pour tout point M du plan on a :

$$AM^2 + BM^2 = 2MI^2 + 8$$

I milieu de [AB] $\Leftrightarrow IA = IB = \frac{AB}{2}$

I($\quad \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

$AM^2 + BM^2 = \vec{AM}^2 + \vec{BM}^2$

$= (\vec{AI} + \vec{IM})^2 + (\vec{BI} + \vec{IM})^2$

$= AI^2 + IB^2 + 2IM^2 + 2\vec{IM}(\vec{IA} + \vec{IB})$

$= 2MI^2 + 2IA^2$

$= 2MI^2 + 2\frac{AB^2}{4}$

$= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

or $AB = \sqrt{(2-2)^2 + (1+3)^2} = 4$; $\frac{AB^2}{2} = 8$

En définitive on a :

$$\boxed{AM^2 + BM^2 = 2MI^2 + 8}$$

Utilisons cette propriété pour retrouver les résultats de la première question

$AM^2 + BM^2 = 40 \Leftrightarrow 2MI^2 + 8 = 40$

$\Leftrightarrow MI^2 = 16$; $I(2;-1)$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 16$

d'où $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$.

3/ Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 5$

$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = (\vec{AI} + \vec{IM})(\vec{BI} + \vec{IM})$

$= -IA^2 + IM^2 + \vec{IM}(\vec{AI} + \vec{BI})$

$= IM^2 - \frac{AB^2}{4} = IM^2 - 4$

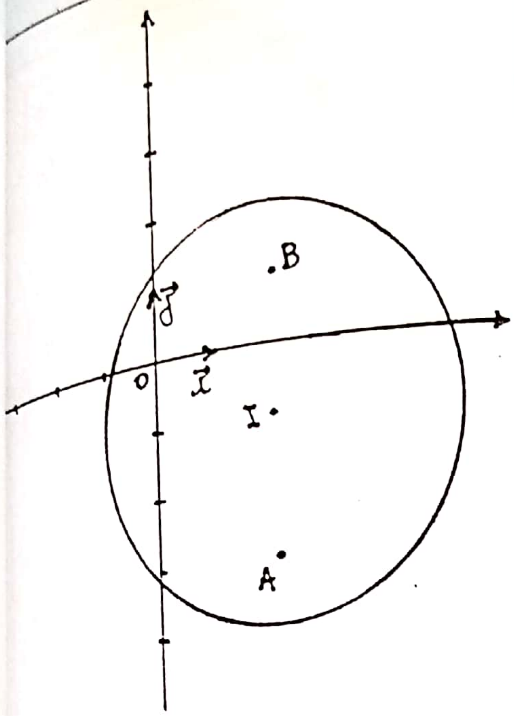
$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 5 \Leftrightarrow IM^2 - 4 = 5$

$\Leftrightarrow IM = 3$.

L'ensemble (C') des points M du plan tels que : $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 5$ est le cercle de centre $I(2;-1)$ et de rayon 3.

Construction de (C')

(Voir figure à la page suivante)



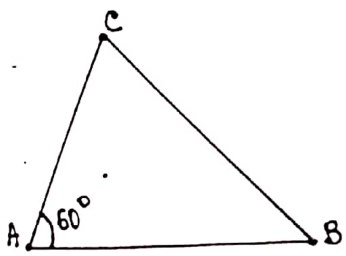
EXERCICE N°102

Soit ABC un triangle tel que :

mes $\hat{A} = 60°$; $AC = 3$; $AB = 5$.

On appelle R le rayon de son cercle circonscrit et S son aire.

Déterminons BC, $\hat{B}$, $\hat{C}$, R et S.



$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos\hat{A}}$$

$$BC^2 = 25 + 9 - 2\times5\times3\cos 60° = 19$$

$$\boxed{BC = \sqrt{19}}$$

$$\boxed{\cos\hat{B} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC}}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{25+19-9}{2\times5\sqrt{19}} = 0{,}803$$

$$\boxed{\hat{B} = 36{,}59°}$$

$$\boxed{\cos\hat{C} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC.BC}}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{9+19-25}{2\times3\sqrt{19}} = 0{,}115$$

$$\boxed{\hat{C} = 83{,}41°}$$

$$\boxed{R = \frac{BC}{2\sin\hat{A}}} \qquad \boxed{S = \frac{1}{2}AB.AC\sin\hat{A}}$$

$$R = \frac{\sqrt{19}}{2\sin 60°} = 2{,}52$$

$$S = \frac{1}{2}\times5\times3.\sin 60° = 6{,}50$$

$$\boxed{R = 2{,}52} \qquad \boxed{S = 6{,}50}$$

EXERCICE N°103

Soit ABC un triangle. On appelle S son aire. On pose :

$a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

On sait que : mes $\hat{A} = 45°$, $b = 3$ et $S = 3$.

Déterminons la longueur de chacun des côtés et les angles de ce triangle

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{2S}{b\sin\hat{A}}}$$

$$c = \frac{2\times3}{3\sin 45°} = 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{c = 2\sqrt{2}}$$

$$\boxed{a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}.}$$

$$a^2 = 9+8-2.3.2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

$$\boxed{a=\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{5+8-9}{4\sqrt{10}} = 0,316$$

$$\boxed{\hat{B} = 71,57°}$$

$$\boxed{\cos\hat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

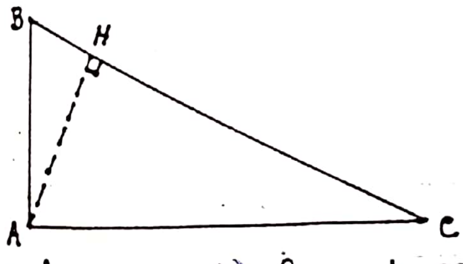
$$\cos\hat{C} = \frac{5+8-8}{6\sqrt{5}} = 0,447.$$

$$\boxed{\hat{C} = 63,43°}$$

EXERCICE N°104

Soit ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC)

Démontrons que si ABC est rectangle en A alors: $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$



D'après le cours de la classe de 3e sur le thèoreme de Pythagore on a:

$AH.BC = AB.AC$ et $AB^2+AC^2 = BC^2$ lorsque ABC est rectangle en A.

$\Rightarrow AH^2.BC^2 = AB^2.AC^2$

$AH^2(AB^2+AC^2) = AB^2.AC^2$

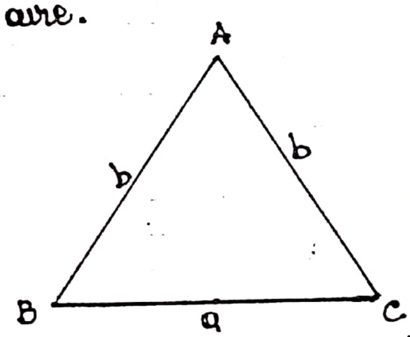
$$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{AB^2+AC^2}{AB^2.AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Conclusion

> Si ABC est rectangle en A et H est le projeté orthogonal de A sur (BC) alors : $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$

EXERCICE N°105

Soit ABC un triangle isocèle de base [BC]. On pose $a = BC$, $b = CA = AB$. Soit r le rayon de son cercle inscrit, R celui de son cercle circonscrit et S son aire.



1/ Démontrons que si le triangle ABC est équilatéral alors $R = 2r$

ABC équilatéral $\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC = BC \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

On sait que:

$R = \frac{AC}{2\sin\hat{B}}$, $r = \frac{2S}{AB+AC+BC}$ avec

$S = \frac{1}{2} AB.BC\sin\hat{B}$

Avec la condition ABC équilatéral et en posant $AB = AC = BC = c$ on a:

$R = \frac{c}{2\sin\pi/3} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$ $\quad S = \frac{1}{2}c^2\sin\frac{\pi}{3}$

$R = \frac{c\sqrt{3}}{3}$ $S = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$

$r = \frac{2S}{3c} = \frac{1}{2}\frac{c\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}R \Leftrightarrow R = 2r$

Conclusion

$\boxed{\text{Si le triangle ABC est équilatéral alors } R = 2r}$

2./ On suppose le triangle ABC isocèle

a./ Démontrons que $r = \frac{2S}{a+2b}$

On sait que: $r = \frac{2S}{AB+AC+BC}$ or

$AB = AC = b$ et $BC = a$ On a donc:

$$\boxed{r = \frac{2S}{a+2b}}$$

b./ Démontrons que $R = \frac{ab^2}{4S}$

On sait que: $R = \frac{AB.AC.BC}{4S}$

or $AB = AC = b$ et $BC = a$ d'où

$$\boxed{R = \frac{ab^2}{4S}}$$

c./ Démontrons que: $\cos\hat{B} = \frac{a}{2b}$

En exploitant la relation d'Al-Kashi on a: $\cos\hat{B} = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB.BC}$

$AB = AC = b$ $BC = a$

$\Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{b^2+a^2-b^2}{2ab} = \frac{a^2}{2ab} = \frac{a}{2b}$

$$\boxed{\cos\hat{B} = \frac{a}{2b}}$$

Déduisons que $\sin^2\hat{B} = \frac{4b^2-a^2}{4b^2}$

On sait que $\sin^2\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2\hat{B} = 1 - \cos^2\hat{B}$.

$= 1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2$

$\sin^2\hat{B} = 1 - \frac{a^2}{4b^2} = \frac{4b^2-a^2}{4b^2}$

$$\boxed{\sin^2\hat{B} = \frac{4b^2-a^2}{4b^2}}$$

Exprimons S^2 en fonction de a et b

$S = \frac{1}{2} AB.BC.\sin\hat{B}$

$S^2 = \frac{1}{4} AB^2.BC^2\sin^2\hat{B}$

$= \frac{1}{4} a^2b^2.\frac{4b^2-a^2}{4b^2} = \frac{a^2(4b^2-a^2)}{16}$

$$\boxed{S^2 = \frac{a^2(4b^2-a^2)}{16}}$$

d./ Déduisons des questions a./ b./ et c./ que si $R = 2r$ alors le triangle ABC est équilatéral

$R = \frac{AC}{2\sin\hat{B}} = \frac{b}{2\sin\hat{B}}$; $R^2 = \frac{b^2}{4\sin^2\hat{B}} = \frac{b^4}{4b^2-a^2}$ (1)

$r = \frac{2S}{a+2b} \Leftrightarrow r^2 = \frac{4S^2}{(a+2b)^2}$

$= \frac{a^2(4b^2-a^2)}{4(a+2b)^2}$

$r^2 = \frac{a^2(2b-a)}{4(a+2b)}$ (2)

$R = 2r \Leftrightarrow R^2 = 4r^2 \Leftrightarrow \frac{b^4}{4b^2-a^2} = \frac{a^2(2b-a)}{(a+2b)}$

$\Leftrightarrow \frac{b^4}{2b-a} = a^2(2b-a)$

$\Leftrightarrow b^4 = a^2(2b-a)^2$

$\Leftrightarrow b^2 = a(2b-a) \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$

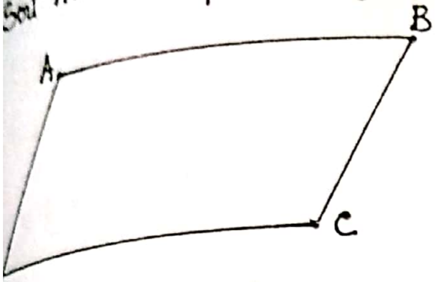
$AC = AB = b$ $BC = a$

$a = b \Leftrightarrow AB = AC = BC \Rightarrow ABC$ équilatéral

$\boxed{\text{Conclusion: } R = 2r \Leftrightarrow ABC \text{ équilatéral}}$

EXERCICE N°106

Soit ABCD un parallélogramme.



1/ Démontrons que :

$2(AB^2+AD^2) = AC^2+BD^2$

$DC = AB$; $AD = BC$ et $\hat{D}+\hat{C} = \pi$

En appliquant le théorème d'Al-Kashi

on a: $AC^2 = DC^2+AD^2-2DC.AD\cos\hat{D}$

$AC^2 = AB^2+AD^2-2AB.AD\cos\hat{D}$ (1) car $DC = AB$

$BD^2 = DC^2+BC^2-2DC.BC\cos\hat{C}$

$= AB^2+AD^2-2AB.AD\cos\hat{C}$ (2)

(1)+(2) donne:

$AC^2+BD^2 = 2(AB^2+AD^2)-2AB.AD(\cos\hat{D}+\cos\hat{C})$

or $\cos\hat{D}+\cos\hat{C} = 0$ d'où

$AC^2+BD^2 = 2(AB^2+AD^2)$

On a donc:

$$\boxed{2(AB^2+AD^2) = AC^2+BD^2}$$

2/ On donne $AB=4$, $AD=2$, $BD=5$

Calculons AC puis les mesures en degré des angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DAC}$

D'après ce qui précède on a:

$AC^2 = 2(AB^2+AD^2)-BD^2$

$= 2(4^2+2^2)-5^2 = 15$

$$\boxed{AC = \sqrt{15}}$$

$BD^2 = AB^2+AD^2-2AB.AD\cos\widehat{BAD}$

$\Leftrightarrow$ $$\boxed{\cos\widehat{BAD} = \frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB.AD}}$$

$\cos\widehat{BAD} = \frac{16+4-25}{2\times4\times2} = -\frac{5}{16} = -0,3125$

$$\boxed{mes\,\widehat{BAD} = 108,21°}$$

De manière analogue on a:

$\cos\widehat{DAC} = \frac{AD^2+AC^2-DC^2}{2AD.AC}$, $DC = AB$

$$\boxed{\cos\widehat{DAC} = \frac{AD^2+AC^2-AB^2}{2AD.AC}}$$

$\cos\widehat{DAC} = \frac{4+15-16}{2\times2\sqrt{15}} = 0,1936$

$$\boxed{mes\,\widehat{DAC} = 78,83°}$$

EXERCICE N°107

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de [BC] et [AC].

On pose : $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

Démontrons que: $\vec{AI}\perp\vec{BJ} \Leftrightarrow a^2+b^2 = 5c^2$

I milieu de [BC] et J milieu de [AC]

on a: $\vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ et $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.

$\vec{AI}.\vec{BJ} = (\vec{AB}+\vec{BI}).(\vec{BA}+\vec{AJ})$

$= (\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC})(\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{AC})$

$= -AB^2+\frac{1}{2}\vec{AB}(\vec{AC}-\vec{BC})+\frac{1}{4}\vec{BC}.\vec{AC}$

$= -AB^2+\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{4}\,\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2}$

$= -c^2+\frac{1}{2}c^2+\frac{a^2+b^2-c^2}{8}$

$= \frac{1}{8}(a^2+b^2-5c^2)$

$\vec{AI}\perp\vec{BJ} \Leftrightarrow \vec{AI}.\vec{BJ} = 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-5c^2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2=5c^2$

Conclusion

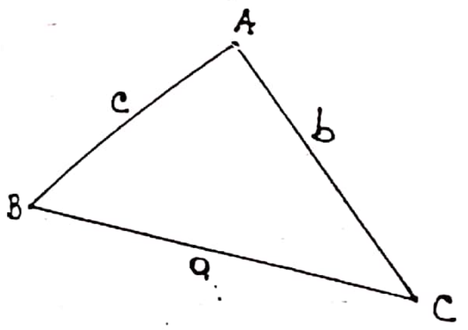
$$\boxed{\vec{AI} \perp \vec{BJ} \Leftrightarrow a^2+b^2=5c^2}$$

EXERCICE N°108

Soit ABC un triangle. On pose :

$a=BC$; $b=CA$; $c=AB$

On appelle p son demi-périmètre et S son aire. On se propose de calculer S en fonction de a, b et c.



1/ Démontrons que : $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

D'après Al-Kashi on a :

$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$ d'où

$$\boxed{\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

Déduisons-en $\sin^2\hat{A}$ en fonction de a, b, c

On sait que $\sin^2\hat{A}+\cos^2\hat{A}=1$

$\Leftrightarrow \sin^2\hat{A} = 1-\cos^2\hat{A}$

$$= 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$$

$$\boxed{\sin^2\hat{A} = \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}}$$

2/ Démontrons la formule de Héron d'Alexandrie : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

On sait que $S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$

$\Leftrightarrow S^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2\hat{A}$

$$= \frac{1}{4}b^2c^2 \cdot \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$16S^2 = 4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$$

$$= (2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)$$

$$= [a^2-(b-c)^2][(b+c)^2-a^2]$$

$$16S^2 = (a+c-b)(a+b-c)(a+b+c)(b+c-a)$$

$p=\dfrac{a+b+c}{2} \Leftrightarrow a+b+c=2p$

$p-a=\dfrac{b+c-a}{2} \Leftrightarrow b+c-a=2(p-a)$

$p-b=\dfrac{a+c-b}{2} \Leftrightarrow a+c-b=2(p-b)$

$p-c=\dfrac{a+b-c}{2} \Leftrightarrow a+b-c=2(p-c)$

$16S^2=16p(p-a)(p-b)(p-c)$

$\Leftrightarrow S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

3/ On appelle r le rayon du cercle inscrit dans ABC.

a/ Démontrons que $S=pr$

On sait d'après le cours que :

$r=\dfrac{2S}{a+b+c} \Leftrightarrow 2S=(a+b+c)r$

$S=\dfrac{a+b+c}{2}r = pr.$

$$\boxed{S=pr}$$

b/ Déduisons-en que :

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$S = pr \Leftrightarrow S^2 = p^2 r^2$

$\Leftrightarrow r^2 = \dfrac{S^2}{p^2}$

$= \dfrac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$$

c/ On appelle R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

<u>Calculons R en fonction de a, b, c</u>

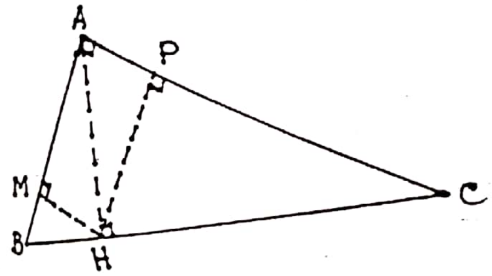
On sait que $\begin{cases} R = \dfrac{a}{2\sin\hat{A}} \Leftrightarrow \sin\hat{A} = \dfrac{a}{2R} \\ S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} \end{cases}$

$S = \frac{1}{2}bc\dfrac{a}{2R} = \dfrac{abc}{4R}$ d'où

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

EXERCICE N°109

ABC est un triangle rectangle en A. Soit [AH] la hauteur relative au côté [BC], M et P les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC) respectivement



<u>Démontrons que: $BM^2 + CP^2 + 3AH^2 = BC^2$</u>

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ or $BH^2 = BM^2 + MH^2$

$= AH^2 + BM^2 + MH^2$

$AC^2 = AH^2 + CH^2$ or $CH^2 = PH^2 + CP^2$

$AC^2 = AH^2 + CP^2 + PH^2$

$AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + BM^2 + CP^2 + PH^2 + MH^2$

$= BM^2 + CP^2 + 2AH^2 + PH^2 + AP^2$

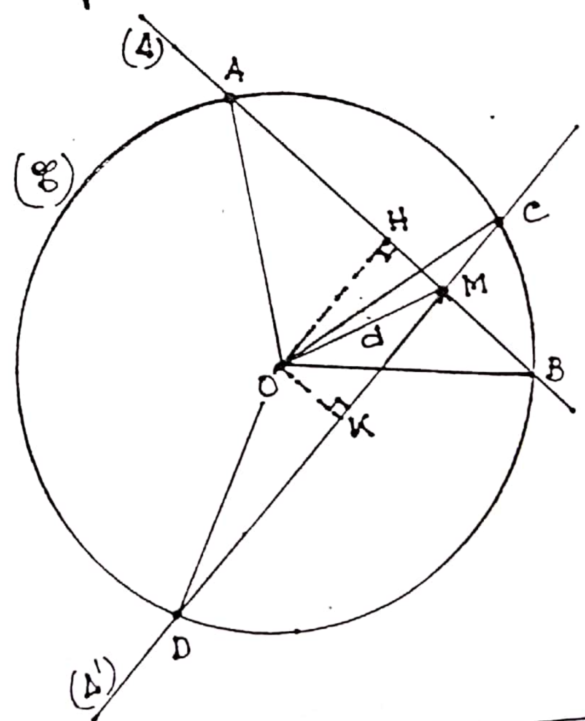
$AB^2 + AC^2 = BM^2 + CP^2 + 3AH^2$ car $AH^2 = PH^2 + AP^2$

or $AB^2 + AC^2 = BC^2$ d'où

$$\boxed{BM^2 + CP^2 + 3AH^2 = BC^2}$$

EXERCICE N°110

On considère un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon R. Soit M un point intérieur à ($\mathscr{C}$), (Δ) une droite passant par M. (Δ) coupe ($\mathscr{C}$) en deux points A et B. La droite (Δ') perpendiculaire en M à (Δ) coupe ($\mathscr{C}$) en deux points C et D. On désigne par H et K les milieux respectifs de [AB] et [CD]. et on pose d = OM



Calculons OH^2+OK^2 en fonction de d

$OH^2+OK^2 = OH^2+HM^2$ or le triangle OHM est rectangle en M

$OH^2+OK^2 = OM^2 = d^2$

$$\boxed{OH^2+OK^2 = d^2}$$

/ En utilisant le théorème de la médiane dans les triangles AOB et COD, Calculons AB^2+CD^2 en fonct° de R et d.

Les triangles AOB et COD sont isocèles en O. Les médianes issues de O à chacun de ces triangles sont confondues aux médiatrices. On a donc:

$OH^2 = OA^2 - AH^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4}$

$\Leftrightarrow AB^2 = 4(R^2 - OH^2)$

$OK^2 = OD^2 - DK^2 = R^2 - \frac{CD^2}{4}$

$\Leftrightarrow CD^2 = 4(R^2 - OK^2)$

$AB^2+CD^2 = 4(R^2-OH^2)+4(R^2-OK^2)$

$= 4[2R^2-(OH^2+OK^2)]$

$= 4(2R^2-d^2)$

$$\boxed{AB^2+CD^2 = 4(2R^2-d^2)}$$

3/ Calculons $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ en fonction de R.

$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2 = L$ Posons

$L = (\vec{MH}+\vec{HA})^2+(\vec{MH}+\vec{HB})^2+(\vec{MK}+\vec{KC})^2+(\vec{MK}+\vec{KD})^2$

$= 2MH^2+2MK^2+2HA^2+2KC^2+2\vec{MH}(\vec{HA}+\vec{HB})+2\vec{MK}(\vec{KC}+\vec{KD})$

or H milieu de [AB] et K milieu de [CD]

$\Leftrightarrow \vec{HA}+\vec{HB} = \vec{0}$ et $\vec{KC}+\vec{KD} = \vec{0}$

$L = 2(MH^2+MK^2)+2(HA^2+KC^2)$

$= 2(OK^2+OH^2)+2\left(\frac{AB^2}{4}+\frac{CD^2}{4}\right)$

$= 2d^2+\frac{1}{2}(AB^2+CD^2)$

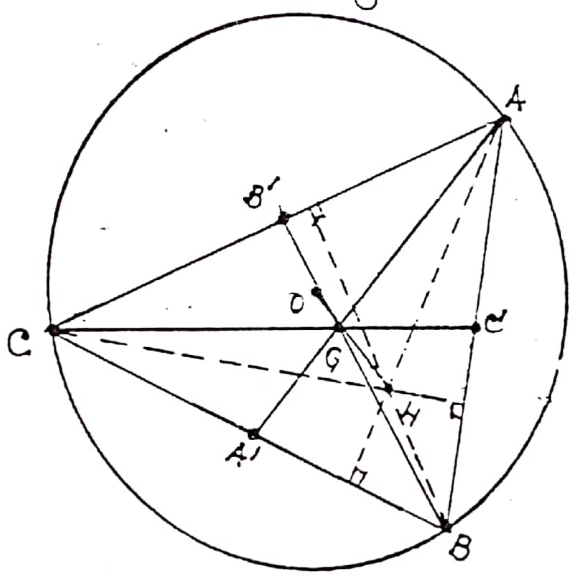
$= 2d^2+2(2R^2-d^2) = 4R^2$

$$\boxed{MA^2+MB^2+MC^2+MD^2 = 4R^2}$$

EXERCICE N° 111

Soit ABC un triangle. On considère A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB]

Soit H l'orthocentre, G le centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC



1./ Démontrons que: $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} = 3\vec{OG}$

G centre de gravité de ABC $\Leftrightarrow$

$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC} = \vec{0}$

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} = \vec{OG}+\vec{GA}+\vec{OG}+\vec{GB}+\vec{OG}+\vec{GC}$

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} = 3\vec{OG}+\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}$

$= 3\vec{OG}+\vec{0} = 3\vec{OG}$

$\boxed{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} = 3\vec{OG}}$ (1)

Montrons que: $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} = \vec{OH}+\vec{HA}+2\vec{OA'}$

$\vec{OA} = \vec{OH}+\vec{HA}$

$\vec{OB}+\vec{OC} = \vec{OA'}+\vec{A'B}+\vec{OA'}+\vec{A'C}$

$= 2\vec{OA'}+\vec{A'B}+\vec{A'C}$

or $\vec{A'B}+\vec{A'C} = \vec{0}$ car A' milieu de [BC]

d'où $\vec{OB}+\vec{OC} = 2\vec{OA'}$ On a donc:

$\boxed{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} = \vec{OH}+\vec{HA}+2\vec{OA'}}$ (2)

Déduisons-en que le vecteur $3\vec{OG}-\vec{OH}$ est orthogonal au vecteur $\vec{BC}$

(1) et (2) $\Leftrightarrow$ $3\vec{OG} = \vec{OH}+\vec{HA}+2\vec{OA'}$

$\Leftrightarrow$ $3\vec{OG}-\vec{OH} = \vec{HA}+2\vec{OA'}$

$(3\vec{OG}-\vec{OH}).\vec{BC} = (\vec{HA}+2\vec{OA'})\vec{BC}$

$= \vec{HA}.\vec{BC}+2\vec{OA'}.\vec{BC}$

Or (AH) $\perp$ (BC) et (OA') est la médiatrice du segment [BC]

$\Leftrightarrow$ (AH) $\perp$ (BC) et (OA') $\perp$ (BC).

$\Leftrightarrow$ $\vec{HA}.\vec{BC} = 0$ et $\vec{OA'}.\vec{BC} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\vec{HA}.\vec{BC}+2\vec{OA'}.\vec{BC} = 0$

$\Leftrightarrow$ $(3\vec{OG}-\vec{OH}).\vec{BC} = 0$ d'où

$\boxed{3\vec{OG}-\vec{OH} \text{ orthogonal à } \vec{BC}}$ (3)

2/ Démontrons que le vecteur $3\vec{OG}-\vec{OH}$ est orthogonal au vecteur $\vec{CA}$

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} = \vec{OH}+\vec{HB}+(\vec{OB'}+\vec{B'A})+(\vec{OB'}+\vec{B'C})$

$= \vec{OH}+\vec{HB}+2\vec{OB'}$ car B' milieu de [AC]

$\Leftrightarrow$ $3\vec{OG} = \vec{OH}+\vec{HB}+2\vec{OB'}$

$\Leftrightarrow$ $3\vec{OG}-\vec{OH} = \vec{HB}+2\vec{OB'}$

$(3\vec{OG}-\vec{OH}).\vec{CA} = (\vec{HB}+2\vec{OB'})\vec{CA}$

$= \vec{HB}.\vec{CA}+2\vec{OB'}.\vec{CA}$

(HB) $\perp$ (CA) et (OB') $\perp$ (CA)

$\Leftrightarrow$ $(3\vec{OG}-\vec{OH})\vec{CA} = 0$ on en déduit que:

$\boxed{3\vec{OG}-\vec{OH} \text{ est orthogonal à } \vec{CA}}$ (4)

3/ Démontrons que $\vec{OH} = 3\vec{OG}$

(3) et (4) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (3\vec{OG}-\vec{OH}) \perp \vec{BC} \\ (3\vec{OG}-\vec{OH}) \perp \vec{CA} \end{cases}$

or les vecteur $\vec{BC}$ et $\vec{CA}$ ne sont pas colinéaires $\Rightarrow$ $3\vec{OG}-\vec{OH} = \vec{0}$

d'où $\boxed{\vec{OH} = 3\vec{OG}}$ (5)

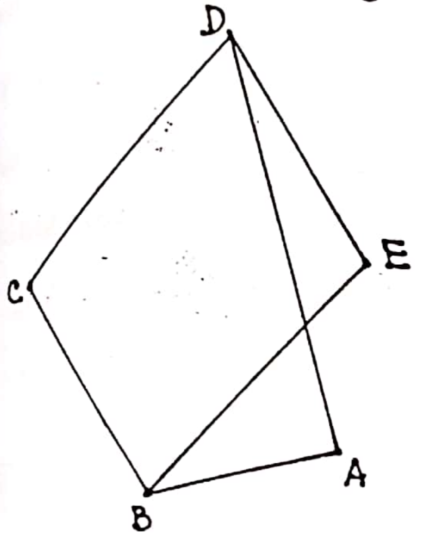
Déduisons-en que les points O, G et H sont alignés

(5) $\Rightarrow$ $\vec{OH}$ et $\vec{OG}$ sont colinéaires d'où les points O, G et H sont alignés

EXERCICE N° 112

On se propose de démontrer que la somme des carrés des longueurs des quatre cotés d'un quadrilatère est superieure ou égale à la somme des carrés des longueurs des deux diagonales.

1/ Soit ABCD un quadrilatère. On considère le point E tel que BCDE soit un parallélogramme



Démontrons que :

$$(\vec{AB}+\vec{CD})(\vec{AD}+\vec{CB}) = AE^2$$

BCDE est un parallélogramme

$\Leftrightarrow \vec{CD}=\vec{BE}$; $\vec{CB} = \vec{DE}$

$$(\vec{AB}+\vec{CD})(\vec{AD}+\vec{CB}) = (\vec{AB}+\vec{BE})(\vec{AD}+\vec{DE})$$

$$= \vec{AE}.\vec{AE} = AE^2$$

$$\boxed{(\vec{AB}+\vec{CD})(\vec{AD}+\vec{CB}) = AE^2}$$

2/ Démontrons que :

$AC^2+BD^2 = 2AB^2+AD^2+BC^2-2\vec{AB}.\vec{AD}-2\vec{BC}.\vec{BA}$

$AC^2+BD^2 = 2CD^2+CB^2+AD^2-2\vec{CB}.\vec{CD}-2\vec{DC}.\vec{DA}$

$$AC^2+BD^2 = (\vec{AB}+\vec{BC})^2+(\vec{BA}+\vec{AD})^2$$

$$= AB^2+BC^2+2\vec{AB}.\vec{BC}+BA^2+AD^2+2\vec{BA}.\vec{AD}$$

$$\boxed{AC^2+BD^2 = 2AB^2+AD^2+BC^2-2\vec{AB}.\vec{AD}-2\vec{BC}.\vec{BA}} \quad (1)$$

$$AC^2+BD^2 = (\vec{AD}+\vec{DC})^2+(\vec{BC}+\vec{CD})^2$$

$$= AD^2+DC^2+2\vec{AD}.\vec{DC}+BC^2+CD^2+2\vec{BC}.\vec{CD}$$

$$\boxed{AC^2+BD^2 = 2CD^2+CB^2+AD^2-2\vec{CB}.\vec{CD}-2\vec{DC}.\vec{DA}} \quad (2)$$

Déduisons-en que :

$$AC^2+BD^2 = AB^2+CD^2+BC^2+AD^2-\vec{AB}.\vec{AD}$$
$$-\vec{BC}.\vec{BA}-\vec{CB}.\vec{CD}-\vec{DC}.\vec{DA}$$

En additionnant membre à membre (1) et (2) on obtient :

$$2(AC^2+BD^2) = 2AB^2+2CD^2+2BC^2+2AD^2$$
$$-2\vec{AB}.\vec{AD}-2\vec{BC}.\vec{BA}-2\vec{CB}.\vec{CD}-2\vec{DC}.\vec{DA}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} AC^2+BD^2 &= AB^2+CD^2+BC^2+AD^2-\vec{AB}.\vec{AD} \\ &-\vec{BC}.\vec{BA}-\vec{CB}.\vec{CD}-\vec{DC}.\vec{DA}\end{aligned}} \quad (3)$$

3/ Déduisons des questions précédentes que : $BD^2+AC^2 \leq AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$

Posons $p = -\vec{AB}.\vec{AD}-\vec{BC}.\vec{BA}-\vec{CB}.\vec{CD}-\vec{DC}.\vec{DA}$

$$p = -(\vec{AB}.\vec{AD}+\vec{AD}.\vec{CD}+\vec{AB}.\vec{CB}+\vec{CD}.\vec{CB})$$

$$= -\left[(\vec{AB}+\vec{CD}).\vec{AD}+(\vec{AB}+\vec{CD}).\vec{CB}\right]$$

$$= -(\vec{AB}+\vec{CD})(\vec{AD}+\vec{CB}) = -AE^2$$

$(3) \Leftrightarrow AC^2+BD^2 = AB^2+CD^2+BC^2+AD^2-AE^2$

$\Leftrightarrow (AC^2+BD^2)-(AB^2+CD^2+BC^2+AD^2) = -AE^2 \leq 0$

d'où :

$$\boxed{AC^2+BD^2 \leq AB^2+CD^2+BC^2+AD^2}$$

4-/ Condition pour avoir

$AC^2+BD^2 = AB^2+CD^2+BC^2+AD^2$ (4)

(4) est satisfait ssi $AE=0$ soit A confondu à E.

$\boxed{AC^2+BD^2 = AB^2+CD^2+BC^2+AD^2 \text{ ssi ABCD est un parallélogramme.}}$

Enonçons le résultat sous forme de théorème.

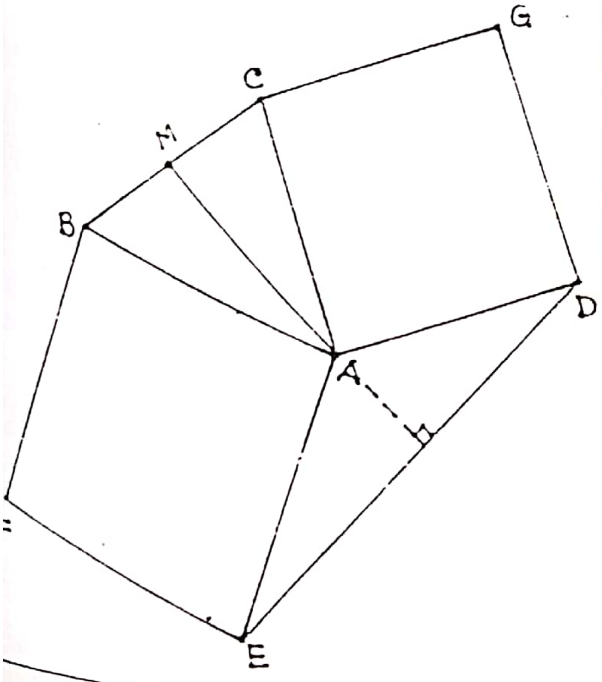
La somme des carrés des longueurs des quatre côtés d'un quadrilatère est supérieure ou égale à la somme des carrés des longueurs des deux diagonales.

Ces deux sommes sont égales ssi ce quadrilatère est un parallélogramme

EXERCICE N°113

On considère un triangle ABC. On construit le carré ABFE situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas C et le carré ACGD situé dans le demi-plan de frontière (AC) ne contenant pas B.

Figure



1°/ Comparons les angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{BAD}$

Posons $mes\,\widehat{CAB} = \alpha$ On a :

$mes\,\widehat{CAE} = mes\,\widehat{CAB} + mes\,\widehat{BAE} = \alpha + \frac{\pi}{2}$

$mes\,\widehat{BAD} = mes\,\widehat{BAC} + mes\,\widehat{CAD} = \alpha + \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{Les angles } \widehat{CAE} \text{ et } \widehat{BAD} \text{ ont même mesure}}$

2°/ Comparons les produits scalaires $\vec{AC}.\vec{AE}$ et $\vec{AD}.\vec{AB}$

$\vec{AC}.\vec{AE} = AC.AE\cos(\widehat{CAE})$

$\vec{AD}.\vec{AB} = AD.AB\cos(\widehat{BAD})$

or $AC = AD$, $AE = AB$ et $\widehat{CAE} = \widehat{BAD}$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{AC}.\vec{AE} = \vec{AD}.\vec{AB}}$

3°/ Soit M le milieu de [BC]

Calculons $\vec{AM}.\vec{ED}$.

$$\vec{AM}.\vec{ED} = (\vec{AC}+\vec{CM})(\vec{EA}+\vec{AD})$$
$$= (\vec{AC}+\tfrac{1}{2}\vec{CB})(\vec{AD}-\vec{AE})$$
$$= [\vec{AC}+\tfrac{1}{2}(\vec{CA}+\vec{AB})](\vec{AD}-\vec{AE})$$
$$= (\vec{AC}-\tfrac{1}{2}\vec{AC}+\tfrac{1}{2}\vec{AB})(\vec{AD}-\vec{AE})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\vec{AC}+\vec{AB})(\vec{AD}-\vec{AE})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\vec{AC}.\vec{AD}-\vec{AC}.\vec{AE}+\vec{AB}.\vec{AD}-\vec{AB}.\vec{AE})$$

or $\vec{AC} \perp \vec{AD}$ et $\vec{AB} \perp \vec{AE}$

$\Rightarrow \vec{AC}.\vec{AD} = 0$ et $\vec{AB}.\vec{AE} = 0$

$$\vec{AM}.\vec{ED} = \tfrac{1}{2}(\vec{AB}.\vec{AD}-\vec{AC}.\vec{AE})$$
$$= 0 \text{ car } \vec{AB}.\vec{AD} = \vec{AC}.\vec{AE}$$

$\boxed{\vec{AM}.\vec{ED} = 0}$

Déduisons que la médiane du triangle ABC est hauteur du triangle AED

$\vec{AM}.\vec{ED} = 0 \Leftrightarrow \vec{AM} \perp \vec{ED}$

M milieu de [BC] ⇒ (AM) médiane de ABC

La médiane [AM] du triangle ABC est hauteur du triangle AED.

4/ Démontrons que les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{BAC}$ sont supplémentaires

$mes\,\widehat{BAC} + mes\,\widehat{CAD} + mes\,\widehat{DAE} + mes\,\widehat{EAB} = 360°$

$\Leftrightarrow mes\,\widehat{BAC} + 90° + mes\,\widehat{DAE} + 90° = 360°$

$\Leftrightarrow mes\,\widehat{BAC} + mes\,\widehat{DAE} = 180°$

Les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{BAC}$ sont supplémentaires

5/ Comparons les produits scalaires $\vec{AD}.\vec{AE}$ et $\vec{AB}.\vec{AC}$

$\vec{AD}.\vec{AE} = AD.AE.\cos(\widehat{DAE})$

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC\cos(\widehat{BAC})$

or $\begin{cases} AD = AC \\ AE = AB \\ \widehat{DAE} \text{ et } \widehat{BAC} \text{ sont supplémentaires} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} AD = AC \\ AE = AB \\ \cos(\widehat{DAE}) + \cos(\widehat{BAC}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{AD}.\vec{AE} + \vec{AB}.\vec{AC} = 0$

$$\boxed{\vec{AD}.\vec{AE} = -\vec{AB}.\vec{AC}}$$

6/ Démontrons que les droites (CE) et (BD) sont perpendiculaires

$\vec{CE}.\vec{BD} = (\vec{CA}+\vec{AE})(\vec{BA}+\vec{AD})$

$= \vec{CA}.\vec{BA} + \vec{CA}.\vec{AD} + \vec{AE}.\vec{BA} + \vec{AE}.\vec{AD}$

$= \vec{AB}.\vec{AC} + 0 + 0 + \vec{AE}.\vec{AD}$

$= \vec{AE}.\vec{AD} + \vec{AB}.\vec{AC} = 0$ d'après 5/

$\vec{CE}.\vec{BD} = 0$

Les droites (CE) et (BD) sont donc perpendiculaires

EXERCICE N° 114

Soit ABC un triangle dont le périmètre est 24. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1/ Sachant que a, b et c sont respectivement proportionnels aux nombres 3, 4 et 5, calculons les côtés de ce triangle

$a+b+c = 24.$

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{3+4+5} = \frac{24}{12} = 2$$

$\frac{a}{3} = 2 \Leftrightarrow a = 6$; $\frac{b}{4} = 2 \Leftrightarrow b = 8$; $\frac{c}{5} = 2 \Leftrightarrow c = 10$

$a = 6$	$b = 8$	$c = 10$

2/ a/ Nature du triangle ABC

$BC = 6 \quad AC = 8 \quad AB = 10$

$BC^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2 = AB^2$

$BC^2 + AC^2 = AB^2$

Le triangle ABC est donc rectangle en C.

b/ Déterminons en degrés les angles du triangle

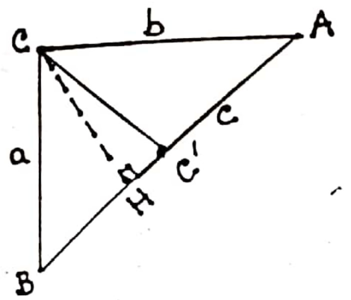
$mes\,\widehat{ACB} = 90°.$

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = 0,8 \Rightarrow mes(\widehat{BAC}) = 36,87°$

$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = 0,6 \Rightarrow mes(\widehat{ABC}) = 53,13°$

$$\boxed{mes\,\widehat{ACB} = 90° \quad mes(\widehat{BAC}) = 36,87° \quad mes(\widehat{ABC}) = 53,13°}$$

Figure à l'échelle 1/2



3/ Calculons l'aire S du triangle ABC

$S = \frac{1}{2} ab \sin\hat{C} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin 90°$
$= 24$

$$\boxed{S = 24}$$

4/ Soit H le pied de la hauteur issue du point C au triangle ABC et C' le milieu de [AB]

a/ Déterminons les côtés et les angles du triangle CC'H

$AC \times BC = CH.AB \Leftrightarrow CH = \frac{6 \times 8}{10} = 4,8$

Le triangle CHB est rectangle en H on a:

$BH^2 = CB^2 - CH^2 = 6^2 - 4,8^2 = 12,96$

$\Leftrightarrow BH = 3,6$

$BH + HC' = BC' = \frac{AB}{2}$

$\Leftrightarrow HC' = \frac{AB}{2} - BH = 5 - 3,6 = 1,4$

Le triangle CC'H est rectangle en H

$\Leftrightarrow CC'^2 = CH^2 + HC'^2 = 4,8^2 + 1,4^2 = 25$

$\Leftrightarrow CC' = 5$

CH = 4,8	HC' = 1,4	CC' = 5

$mes(\widehat{CHC'}) = 90°$

$\cos(\widehat{HCC'}) = \frac{CH}{CC'} = \frac{4,8}{5} = 0,96 \Leftrightarrow mes(\widehat{HCC'}) = 16,26°$

$\cos(\widehat{CC'H}) = \frac{HC'}{CC'} = \frac{1,4}{5} = 0,28 \Rightarrow mes(\widehat{CC'H}) = 73,74°$

$$\boxed{mes(\widehat{CHC'}) = 90° \quad mes(\widehat{HCC'}) = 16,26° \quad mes(\widehat{CC'H}) = 73,74°}$$

b/ Déterminons le rayon r du cercle inscrit dans le triangle ABC et celui r' du cercle inscrit dans le triangle CC'H

$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \times 24}{6+8+10} = 2$

$r' = \frac{2S'}{CH + HC' + CC'}$ avec $S' = \frac{1}{2} CH.HC'$

$r' = \frac{CH.HC'}{CH + HC' + CC'} = \frac{4,8 \times 1,4}{4,8 + 1,4 + 5} = 0,6$

$$\boxed{r = 2 \quad r' = 0,6}$$

EXERCICE N°115

Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On appelle R le rayon de son cercle circonscrit, S son aire et r le rayon de son cercle inscrit.

1/ Montrons que: $R = \frac{p}{\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C}}$ où p est le démi-périmètre du triangle

On sait que :

$$R=\frac{a}{2\sin\hat{A}}=\frac{b}{2\sin\hat{B}}=\frac{c}{2\sin\hat{C}}=\frac{a+b+c}{2(\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C})}$$

$$R=\frac{2p}{2(\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C})}=\frac{p}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}$$

$$\boxed{R=\frac{p}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}}$$

2/ On donne $p=10,5$; $\hat{A}=50,7°$

$\hat{B}=95,75°$ $\hat{C}=33,55°$

a/ Calculons R

$$R=\frac{10,5}{\sin 50,7+\sin 95,75+\sin 33,55}=4,52$$

$$\boxed{R=4,52}$$

b/ Déduisons-en les cotés du triangle ABC.

$R=\frac{a}{2\sin\hat{A}} \Leftrightarrow \boxed{a=2R\sin\hat{A}}$

On de manière analogue que :

$\boxed{b=2R\sin\hat{B}}$ $\boxed{c=2R\sin\hat{C}}$

$a=2\times4,52\sin 50,7=7.$

$b=2\times4,52\sin 95,75=9$

$c=2\times4,52\sin 33,55=5.$

a=7	b=9	c=5

3/ Calculons l'aire S et le rayon r.

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}=\frac{1}{2}\times7\times9\sin 33,55$$

$$\boxed{S=17,41}$$

$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\times17,41}{7+9+5}=1,66$$

$$\boxed{r=1,66}$$

EXERCICE N°116

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminons une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$

1./ $(\mathcal{D})$ passe par $A(-1;2)$ et $B(1;4)$.

Posons $(\mathcal{D})$: $y=ax+b$

$A\in(\mathcal{D}) \Leftrightarrow 2=-a+b$ (1)

$B\in(\mathcal{D}) \Leftrightarrow 4=a+b$ (2)

$$\begin{cases}-a+b=2\\ a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$$

$\boxed{(\mathcal{D})\text{ a pour équation : } y=x+3}$

2./ $(\mathcal{D})$ passe par $C(2;-5)$ et est dirigée par $\vec{u}(1;1)$

Soit $M(x;y)$ un point du plan

$M\in(\mathcal{D}) \Leftrightarrow \vec{CM}$ colinéaire à $\vec{u}$

$\Leftrightarrow \det(\vec{CM},\vec{u})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-2 & 1\\ y+5 & 1\end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow x-2-y-5=0 \Leftrightarrow y=x-7$

$\boxed{(\mathcal{D})\text{ a pour équation : } y=x-7}$

3./ $(\mathcal{D})$ passe par $D(3;-1)$ et est parallèle à la droite d'équation cartésienne

$7x-4y+3=0$

Posons (Δ) : $7x-4y+3=0$ le coefficient directeur de (Δ) est $a=\frac{7}{4}$

Posons $(\mathcal{D})$: $y=\alpha x+\beta$

$(\mathcal{D}) // (\Delta) \Leftrightarrow \alpha = a = \frac{7}{4}$.

$D \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow -1 = 3\alpha + \beta$

$\Leftrightarrow \beta = -1 - 3\alpha = -1 - \frac{21}{4} = -\frac{25}{4}$

On a donc : $y = \frac{7}{4}x - \frac{25}{4}$.

Soit : $7x - 4y - 25 = 0$

$\boxed{(\mathcal{D}) \text{ a pour équation : } 7x - 4y - 25 = 0}$

EXERCICE N°117

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminons une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$.

1°/ $(\mathcal{D})$ passe par $A\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ et admet $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Soit $M(x;y)$ un point du plan.

$M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ (1)

$\overrightarrow{AM}\left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{2}{3} \end{array} \right. \quad \vec{n}\left| \begin{array}{l} 2 \\ -7 \end{array} \right.$

(1) $\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - 7\left(y - \frac{2}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 7y + \frac{11}{3} = 0 \Leftrightarrow 6x - 21y + 11 = 0$

$\boxed{(\mathcal{D}) \text{ a pour équation : } 6x - 21y + 11 = 0}$

2°/ $(\mathcal{D})$ passe par $B(4;1)$ et est perpendiculaire à la droite d'équation $3x + 5y - 8 = 0$

Posons (Δ) : $3x + 5y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$

Le coefficient directeur de (Δ) est $a = -\frac{3}{5}$

Posons $(\mathcal{D})$: $y = \alpha x + \beta$.

$(\mathcal{D}) \perp (\Delta) \Leftrightarrow \alpha . a = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{a} = \frac{5}{3}$

$B \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow 1 = 4\alpha + \beta$

$\Leftrightarrow \beta = 1 - 4\alpha = 1 - \frac{20}{3} = -\frac{17}{3}$

$\Rightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{17}{3} \Leftrightarrow 5x - 3y - 17 = 0$

$\boxed{(\mathcal{D}) \text{ a pour équation : } 5x - 3y - 17 = 0}$

3°/ $(\mathcal{D})$ est la médiatrice du segment $[CD]$ où $C(-3;2)$ et $D(5;0)$

Soit $M(x;y)$ un point du plan

$M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow CM = DM$

$\Leftrightarrow CM^2 = DM^2$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2$

$\Leftrightarrow 16x - 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow 4x - y - 3 = 0$

$\boxed{(\mathcal{D}) \text{ a pour équation : } y = 4x - 3}$

EXERCICE N°118

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminons l'équation réduite de la droite $(\mathcal{D})$.

1°/ $(\mathcal{D})$ est la droite passant par $A(-1;3)$ et de coefficient directeur 6

Posons $(\mathcal{D})$: $y = ax + b$, $a = 6$

$A \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow 3 = -a + b \Leftrightarrow b = 3 + a = 9$

$\boxed{(\mathcal{D}) \text{ a pour équation : } y = 6x + 9}$

2/ $(\mathcal{D})$ est la droite passant par $B(\sqrt{3}; -4)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ vérifiant $Mes(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \frac{\pi}{6}$

Posons $(\mathcal{D}) : y = ax + b$ on a :

$a = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$B \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow -4 = \frac{\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = -5$

$(\mathcal{D})$ a pour équation : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 5$

EXERCICE N°119

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite $(\mathcal{D}) : -2x + 3y - 6 = 0$

1/ Déterminons une équation de la droite $(\mathcal{D}')$ image de $(\mathcal{D})$ par la translation t de vecteur $\vec{u}(1; -2)$

Soit $M(x; y)$ un point du plan, $M'(x'; y')$ son image par la translation t on a :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 1 \\ y' - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

$$M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow -2x + 3y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x' - 1) + 3(y' + 2) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x' + 2 + 3y' + 6 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x' + 3y' + 2 = 0$$

$(\mathcal{D}')$ a pour équation : $-2x + 3y + 2 = 0$

2/ Déterminons une équation de la droite $(\mathcal{D}'')$ image de $(\mathcal{D})$ par la symétrie S_A de centre $A(-3; 5)$

Soit $M(x; y)$ un point du plan, $M'(x'; y')$ son image par S_A on a :

$$A \text{ milieu de } [MM'] \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x + x'}{2} = x_A \\ \frac{y + y'}{2} = y_A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 - x' \\ y = 10 - y' \end{cases}$$

$$M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow -2x + 3y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(-6 - x') + 3(10 - y') - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x' - 3y' + 36 = 0$$

$(\mathcal{D}'')$ a pour équation : $2x - 3y + 36 = 0$

3/ Déterminons une équation de la droite $(\mathcal{D}''')$ image de $(\mathcal{D})$ par la symétrie orthogonale S d'axe $(O, \vec{i})$

Soit $M(x; y)$ un point du plan, $M'(x'; y')$ son image par S on a : $\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$

$$M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow -2x + 3y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x' - 3y' - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x' + 3y' + 6 = 0$$

$(\mathcal{D}''')$ a pour équation : $2x + 3y + 6 = 0$

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER, ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

EXERCICE N°120

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

On considère la droite (D) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1/ Vérifions si (D) passe par : $A(-2;1)$; par $B(1;-1)$

$A \in (D)$ s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} -2=-2+3t \\ \text{et} \\ 1=1-4t \end{cases} \Rightarrow t=0$$

$B \in (D)$ s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} 1=-2+3t \\ \text{et} \\ -1=1-4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ \text{et} \\ t=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ impossible}$$

Conclusion

$\boxed{(D) \text{ passe par } A \text{ mais ne passe pas par } B}$

2/ * Déterminons le point de (D) qui a pour abscisse 0

$x=0 \Leftrightarrow -2+3t=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$.

$\Rightarrow y=1-4\times\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}$

$\boxed{\text{Le point de } (D) \text{ qui a pour abscisse } 0 \text{ est le point } E\left(0;-\frac{5}{3}\right)}$

* Déterminons le point de (D) qui a pour ordonnée 0

$y=0 \Leftrightarrow 1-4t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$

$x=-2+\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}$

$\boxed{\text{Le point de } (D) \text{ qui a pour ordonnée } 0 \text{ est le point } F\left(-\frac{5}{4};0\right).}$

3/ Donnons une équation cartésienne de (D)

$$\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=-8+12t \\ 3y=3-12t \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 4x+3y=-5$

$\boxed{(D) \text{ a pour équation cartésienne : } 4x+3y+5=0}$

EXERCICE N°121

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

On considère les droites (D) et (D') de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-4t \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-t \\ y=b+mt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

où m et b sont des nombres réels.

1/ Trouvons des couples $(m;b)$ tels que (D) et (D') soient parallèles.

Soient $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ les vecteurs directeurs respectifs des droites (D) et (D') on a :

$\vec{V}(3;-4)$ $\vec{V'}(-1;m)$

$(D)\,//\,(D') \Leftrightarrow \vec{V}$ colinéaire à $\vec{V'}$

$\Leftrightarrow \det(\vec{V},\vec{V'})=0$

$\Leftrightarrow 3m-4=0 \Leftrightarrow m=\frac{4}{3}$.

$\boxed{\text{Pour tous les couples } (m;b) \text{ tels que } m=\frac{4}{3} \text{ et } b\in\mathbb{R},\ (\mathcal{D}) \text{ et } (\mathcal{D}') \text{ st parallèles}}$

2/ Trouvons $(m;b)$ pour que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ soient confondues

$(\mathcal{D})=(\mathcal{D}') \Rightarrow (\mathcal{D})//(\mathcal{D}') \Leftrightarrow m=\frac{4}{3}$

l'équation cartésienne de $(\mathcal{D})$ est : $4x+3y+5=0$ et celle de $(\mathcal{D}')$ pour $m=\frac{4}{3}$ est : $4x+3y-3b-4=0$

$(\mathcal{D})=(\mathcal{D}')$ ssi $-3b-4=5 \Leftrightarrow b=-3$.

$\boxed{(\mathcal{D})=(\mathcal{D}') \text{ ssi } m=\frac{4}{3} \text{ et } b=-3}$

EXERCICE N°122

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Trouvons un vecteur directeur puis une représentation paramétrique de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ dans chacun des cas suivants

1/ $A(3;-1)$, $B(-9;4)$ et $C(6;3)$

On montrera aisément que les droites (AB) et (AC) ont pour équations :

$(AB): 5x+12y-3=0$; $(AC): 4x-3y-15=0$

Soit (Δ) la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et $M(x;y)$ un point du plan.

$M\in(\Delta) \Leftrightarrow d(M,(AB))=d(M,(AC))$

$\Leftrightarrow \dfrac{|5x+12y-3|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{|4x-3y-15|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$\Leftrightarrow 5|5x+12y-3|=13|4x-3y-15|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(5x+12y-3)=13(4x-3y-15) \ (1) \\ 5(5x+12y-3)=-13(4x-3y-15) \ (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 3x-11y-20=0$

$(2) \Leftrightarrow 11x+3y-30=0$

On vérifie rapidement que la deuxième équation est celle de la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$.

(Δ) a donc pour équation cartésienne

$$11x+3y-30=0$$

Un vecteur directeur $\vec{V}$ de (Δ) est $\vec{V}(-3;11)$

Une représentation paramétrique de (Δ) : $\begin{cases} x=3-3t \\ y=-1+11t \end{cases}$

2/ $A(17;3)$; $B(-7;10)$ et $C(13;6)$

$(AB): 7x+24y-191=0 \quad (AC): 3x+4y-63=0$

$M(x;y)\in(\Delta)$ ssi $d(M,(AB))=d(M,(AC))$

$\Leftrightarrow \dfrac{|7x+24y-191|}{25}=\dfrac{|3x+4y-63|}{5}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-31=0 \ (1) \\ \text{ou} \\ x+2y-23=0 \ (2) \end{cases}$

Graphiquement on vérifie que l'équation (2) est celle de la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$

$$(\Delta): x+2y-23=0$$

Un vecteur directeur $\vec{V}$ de (Δ) est $\vec{V}(-2;1)$

Une représentation paramétrique de (Δ) : $\begin{cases} x = 17 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

3/ $A(1;1)$, $B(2;3)$ et $C(3;2)$

(AB) : $2x - y - 1 = 0$ (AC) : $x - 2y + 1 = 0$

$M(x;y) \in (\Delta)$ ssi $d(M,(AB)) = d(M,(AC))$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|x-2y+1|}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \ (1) \\ x-y=0 \ (2) \end{cases}$

Comme précédemment on vérifie que l'équation (2) est celle de la bissectrice intérieure de $B\hat{A}C$.

(Δ) : $x - y = 0$

Soit $\vec{V}$ un vecteur directeur de (Δ) on a : $\vec{V}(1;1)$.

Une représentation paramétrique de (Δ) est : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

EXERCICE N°123

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-4t \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Vérifions si les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ st parallèles

Soit $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ les vecteurs directeurs respectifs des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ on a :

$\vec{V}(3;-4)$ $\vec{V'}(-1;2)$

$\det(\vec{V},\vec{V'}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$

$\det(\vec{V},\vec{V'}) \neq 0$ donc $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ ne sont pas colinéaires.

Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont donc pas parallèles.

Trouvons les coordonnées de leur point d'intersection

$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-4t \end{cases} \Rightarrow 4x + 3y - 11 = 0$

$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+2t \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$

Soit $M(x;y)$ un point du plan.

$M \in (\mathcal{D}) \cap (\mathcal{D}') \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y-11=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Le point d'intersection des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ est $A(2;1)$

EXERCICE N°124

Soit $(\mathcal{D}_m)$ la droite d'équation $(m-1)x + (2m+3)y + m + 4 = 0$, le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ Déterminons le paramètre réel m pour que :

a/ $(\mathcal{D}_m)$ passe par l'origine du repère

$O \in (\mathcal{D}_m) \iff (m-1)\times 0 + (2m+3)\times 0 + m + 4 = 0$

$\iff m+4=0 \iff m=-4$

$$\boxed{m=-4}$$

b/ $(\mathcal{D}_m)$ soit parallèle à l'axe $(O,\vec{j})$

$(\mathcal{D}_m) \parallel (O,\vec{j}) \iff 2m+3=0 \iff m=-\frac{3}{2}$

$$\boxed{m=-\frac{3}{2}}$$

c/ $(\mathcal{D}_m)$ soit horizontale

$(\mathcal{D}_m)$ est horizontale ssi $m-1=0 \iff m=1$

$$\boxed{m=1}$$

d/ $(\mathcal{D}_m)$ soit parallèle à la première bissectrice

Soit $\vec{V}$ un vecteur directeur de $(\mathcal{D}_m)$ et $\vec{V'}$ un de la première bissectrice

$\vec{V}\begin{pmatrix}-2m-3\\ m-1\end{pmatrix}$; $\vec{V'}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

La condition ci-dessus est réalisée ssi $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont colinéaires

$\iff \det(\vec{V}, \vec{V'}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix}-2m-3 & 1\\ m-1 & 1\end{vmatrix} = 0$

$\iff -2m-3-m+1=0 \iff m=-\frac{2}{3}$

$$\boxed{m=-\frac{2}{3}}$$

2/ Montrons que toutes les droites $(\mathcal{D}_m)$ passent par un point fixe A dont nous déterminerons les coordonnées

$(m-1)x+(2m+3)y+m+4=0$

$\iff m(x+2y+1) = x-3y-4$

$\begin{cases}x+2y+1=0\\ x-3y-4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$

> Toutes les droites $(\mathcal{D}_m)$ passent par un point fixe $A(1;-1)$

EXERCICE N°125

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Trouvons une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre O et de rayon 5

Soit $\Omega(a;b)$ un point du plan et r un réel strictement positif.

L'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Dans cette question $a=b=0$ et $r=5$.

> L'équation cartésienne de $(\mathcal{C}_1)$ est donc : $x^2+y^2=25$

2/ Trouvons une équation du cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre $A(1;0)$ et de rayon 3

Ici $a=1$ $b=0$ et $r=3$

$(\mathcal{C}_2)$ a donc pour équation cartésienne :

$$(x-1)^2+y^2=9$$

3/ Trouvons une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}_3)$ de centre $B(-2;1)$ et passant par $C(1;5)$

Ici $a=-2$ $b=1$ et $r=BC$

$r=\sqrt{(1+2)^2+(5-1)^2} = 5$

$(\mathscr{C}_3)$ a donc pour équation cartésienne:
$$(x+2)^2+(y-1)^2=25$$

4/ Trouvons une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}_4)$ de diamètre $[EF]$ avec $E(1;5)$ et $F(-5;-2)$

Soit I le centre de $(\mathscr{C}_4)$ et r son rayon

on a: $\begin{cases} I \text{ milieu de } [EF] & (1) \\ r=\frac{1}{2}EF & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=\frac{x_E+x_F}{2}=\frac{1-5}{2}=-2 \\ y_I=\frac{y_E+y_F}{2}=\frac{5-2}{2}=\frac{3}{2} \end{cases}$

$a=-2$ $b=\frac{3}{2}$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{(-5-1)^2+(-2-5)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{85}$

$(\mathscr{C}_4)$ a donc pour équation cartésienne
$$(x+2)^2+(y-\tfrac{3}{2})^2=\frac{85}{4}$$

EXERCICE N°126

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On donne le cercle $(\mathscr{C})$ d'équation: $x^2+y^2+2x-6y-15=0$

1/ Vérifions que le point $A(2;-1)$ appartient à $(\mathscr{C})$

$x_A^2+y_A^2+2x_A-6y_A-15=4+1+4+6-15=0$

Conclusion: A appartient à $(\mathscr{C})$

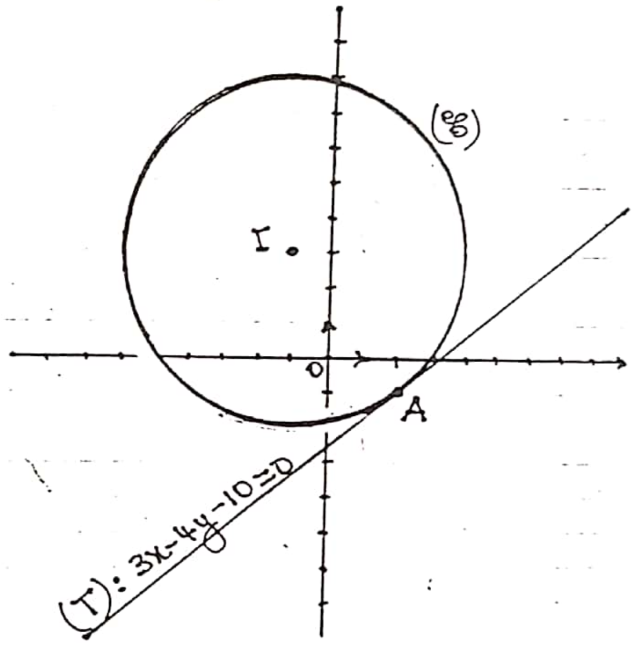
Construction de $(\mathscr{C})$, du point A et de la tangente à $(\mathscr{C})$ en A. (Voir Figure)

$x^2+y^2+2x-6y-15=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-3)^2-9-15=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=25$

$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $I(-1;3)$ et de rayon $r=5$



2/ Déterminons une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en A.

Soit $M(x;y)$ un point du plan.

$M\in(T) \Leftrightarrow \vec{IA}\perp\vec{AM} \Leftrightarrow \vec{IA}\cdot\vec{AM}=0$

$\Leftrightarrow 3(x-2)-4(y+1)=0$

$\Leftrightarrow 3x-4y-10=0$

L'équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en A est: $3x-4y-10=0$

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

Mettons cette équation sous la forme :

$x x_A + y y_A + (x + x_A) - 3(y + y_A) - 15 = 0$

$3x + 4y - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y + (x+2) - 3(y-1) - 15 = 0$

3/ Généralisation

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (1)$$

et $A(x_A ; y_A)$ un point de $(\mathscr{C})$

Démontrons que la tangente à $(\mathscr{C})$ en A a pour équation :

$$x x_A + y y_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) + c = 0$$

$A \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 - 2a x_A - 2b y_A + c = 0 \quad (2)$

Soit $M(x ; y)$ un point du plan et (T) la tangente à $(\mathscr{C})$ en A.

$M \in (T) \Leftrightarrow \vec{\Omega A} \cdot \vec{AM} = 0$, Ω étant le centre de $(\mathscr{C})$.

$(1) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2 + c = 0$

On a donc $\Omega(a ; b)$

$\vec{\Omega A} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow (x_A - a)(x - x_A) + (y_A - b)(y - y_A) = 0$

$\Leftrightarrow x x_A + y y_A - a(x - x_A) - b(y - y_A) - x_A^2 - y_A^2 = 0 \quad (3)$

d'après (2) $x_A^2 + y_A^2 = 2a x_A + 2b y_A - c$

$(3) \Leftrightarrow x x_A + y y_A - a(x - x_A) - b(y - y_A) + c - 2a x_A - 2b y_A = 0$

$\Leftrightarrow x x_A + y y_A - a(x - x_A + 2x_A) - b(y - y_A + 2y_A) + c = 0$

$\Leftrightarrow x x_A + y y_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) + c = 0$

L'équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en son point $A(x_A ; y_A)$ est donc :

$x x_A + y y_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) + c = 0$

EXERCICE N° 127

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Déterminons une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(2 ; 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$

Soit $M(x ; y)$ un point du plan.

$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \Omega M^2 = 5$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

L'équation cartésienne de $(\mathscr{C})$ est :

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

2/ Soit $A(7 ; 6)$ et $B(-3 ; 1)$

Démontrons que la droite (AB) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en un point K dont nous déterminerons les coordonnées

Equation cartésienne de (AB) :

$\vec{AB}\begin{vmatrix} -10 \\ -5 \end{vmatrix}$ soit $M(x ; y)$ $\vec{AM}\begin{vmatrix} x-7 \\ y-6 \end{vmatrix}$

$M \in (AB) \Leftrightarrow \det(\vec{AB}, \vec{AM}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -10 & x-7 \\ -5 & y-6 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -10(y-6) + 5(x-7) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0$

$(AB) : x - 2y + 5 = 0$

Intersection entre $(\mathscr{C})$ et (AB)

$M(x ; y) \in (\mathscr{C}) \cap (AB)$

$$(\Leftrightarrow)\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=5 \quad (1)\\ x-2y+5=0 \Leftrightarrow x=2y-5\end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow (2y-5-2)^2+(y-1)^2=5$

$\Leftrightarrow 5y^2-30y+45=0$

$\Leftrightarrow 5(y-3)^2=0 \Leftrightarrow y=3 \Rightarrow x=2\times 3-5=1$

$\boxed{\text{La droite (AB) est donc tangente à } (\mathscr{C}) \text{ au point } K(1;3)}$

3/ <u>Déterminons une équation de la droite $(\mathscr{D}_1)$ tangente à $(\mathscr{C})$ en $I(1;-1)$</u>

On vérifie aisément que $I \in (\mathscr{C})$

<u>1ère méthode.</u>

Soit $M(x;y)$ un point du plan on a:

$M \in (\mathscr{D}_1) \Leftrightarrow \vec{\Omega I} \perp \vec{IM}$

$\Leftrightarrow \vec{\Omega I}\cdot\vec{IM}=0 \Leftrightarrow -(x-1)-2(y+1)=0$

$\Leftrightarrow x+2y+1=0$

$\boxed{(\mathscr{D}_1) \text{ a pour équation cartesienne: } x+2y+1=0}$

<u>2e méthode</u>

L'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point I est:

$x.x_I+y y_I-2(x+x_I)-(y+y_I)=0$

$\Leftrightarrow x-y-2(x+1)-(y-1)=0$

$\Leftrightarrow -x-2y-1=0 \Leftrightarrow x+2y+1=0$

(Voir Exo 126 question 3/)

$\boxed{(\mathscr{D}_1) \text{ a donc pour équation cartésienne: } x+2y+1=0}$

<u>Vérifions que $(\mathscr{D}_1)$ passe par B.</u>

$x_B+2y_B+1=-3+2+1=0$

$\boxed{(\mathscr{D}_1) \text{ passe donc par le point B}}$

4/ a/ <u>Déterminons une équation de la droite $(\mathscr{D}_2)$ passant par A et tangente à $(\mathscr{C})$ autre que la droite (AB)</u>

Soit $H(p;q)$ le point de contact entre la droite $(\mathscr{D}_2)$ et le cercle $(\mathscr{C})$ on a:

$(\mathscr{D}_2): px+qy-2(p+x)-(q+y)=0$

$A \in (\mathscr{D}_2) \Leftrightarrow 7p+6q-2(p+7)-(q+6)=0$

$\Leftrightarrow 5p+5q-20=0$

$\Leftrightarrow p+q-4=0 \Leftrightarrow q=4-p \quad (1)$

$H \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow (p-2)^2+(q-1)^2=5$

$\Leftrightarrow (p-2)^2+(4-p-1)^2=5$

$\Leftrightarrow 2p^2-10p+13=5$

$\Leftrightarrow 2p^2-10p+8=0$

$\Leftrightarrow p^2-5p+4=0$

$\Leftrightarrow (p-1)(p-4)=0 \Leftrightarrow p=1$ ou $p=4$

* pour $p=1$, $q=3$; $H(1;3)$ est confondu au point K, contact entre (AB) et $(\mathscr{C})$

* pour $p=4$, $q=0$

$(\mathscr{D}_2)$ a donc pour équation cartesienne

$4x+0y-2(4+x)-(0+y)=0$

$\Leftrightarrow 2x-y-8=0$ soit $y=2x-8$

$\boxed{(\mathscr{D}_2) \text{ a pour équation cartésienne: } y=2x-8}$

b/ Soit (C) le point d'intersection entre (D_1) et (D_2).

<u>Démontrons que le triangle ABC est rectangle en C.</u>

Posons $C(x;y)$ on a : $\begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x-y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

$C(3;-2)$

$\vec{AC}\begin{vmatrix} -4 \\ -8 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{BC}\begin{vmatrix} 6 \\ -3 \end{vmatrix}$

$\vec{AC}\cdot\vec{BC} = (-4\times 6)+(-8)\times(-3)$

$= -24+24=0$

$\vec{AC}\cdot\vec{BC}=0 \Leftrightarrow \vec{AC}\perp\vec{BC}$

$\boxed{\text{Le triangle ABC est donc rectangle en C.}}$

<u>Déterminons une équation du cercle $(\mathscr{C}_1)$ circonscrit au triangle ABC</u>

ABC étant rectangle en C ; $(\mathscr{C}_1)$ a pour diamètre [AB].

Soit J le centre de $(\mathscr{C}_1)$, J est le milieu du segment [AB]

$\Leftrightarrow J\left(2;\frac{7}{2}\right)$

Soit r le rayon de $(\mathscr{C}_1)$ on a :

$r=\frac{1}{2}AB=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{(\mathscr{C}_1) \text{ a donc pour équation : } (x-2)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}}$

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER
ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

EXERCICE N°128

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les cercles d'équations respectives :

$$(x-2)^2+(y+3)^2-4=0$$
$$(x-5)^2+(y-1)^2-9=0$$

1°/ <u>Démontrons que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont tangents en un point A dont nous déterminerons les coordonnées</u>

Soit $M(x;y)\in(\mathscr{C})\cap(\mathscr{C}')$ on a :

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y+3)^2-4=0 \\ (x-5)^2+(y-1)^2-9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x+6y+9=0 \\ x^2+y^2-10x-2y+17=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+8y-8=0 \Leftrightarrow 3x+4y-4=0 \\ x^2+y^2-4x+6y+9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{4-3x}{4} \quad (1) \\ x^2+\left(\frac{4-3x}{4}\right)^2-4x+6\left(\frac{4-3x}{4}\right)+9=0 \quad (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow 25x^2-160x+256=0$

$\Leftrightarrow (5x-16)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{16}{5}$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}\left(4-\frac{48}{5}\right)=-\frac{7}{5}$

(2) n'a qu'une seule solution ; $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont donc tangents.

<u>Conclusion</u>

$\boxed{\text{Les cercles } (\mathscr{C}) \text{ et } (\mathscr{C}') \text{ sont tangents en } A\left(\frac{16}{5};-\frac{7}{5}\right)}$

2/ * Vérifions que l'équation :
$(x-2)^2+(y-3)^2-4-[(x-5)^2+(y-1)^2-9]=0$ (3)
est l'équation d'une droite

Après calcul, (3) $\Leftrightarrow 3x+4y-4=0$

(3) est donc l'équation d'une droite

Posons $(T): 3x+4y-4=0$

• Vérifions que (T) passe par A

$3x_A+4y_A-4=\frac{48}{5}-\frac{28}{5}-4=\frac{20}{5}-4=0$

$\boxed{\text{(T) passe donc par A}}$

3/ Vérifions que (T) est une tangente commune aux deux cercles

$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $I(2;-3)$ et de rayon 2

$(\mathscr{C}')$ est le cercle de centre $I'(5;1)$ et de rayon 3

Soient (Δ) et (Δ') les tangentes respectives à $(\mathscr{C})$ et à $(\mathscr{C}')$ en A.

Soit $M(x;y)$ un point du plan

$M\in(\Delta) \Leftrightarrow \vec{IA}.\vec{AM}=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{16}{5}-2\right)\left(x-\frac{16}{5}\right)+\left(-\frac{7}{5}+3\right)\left(y+\frac{7}{5}\right)=0$

$\Leftrightarrow 6(5x-16)+8(5y+7)=0$

$\Leftrightarrow 30x+40y-40=0$

$\Leftrightarrow 3x+4y-4=0$

(Δ) est confondue à (T).

$M\in(\Delta') \Leftrightarrow \vec{I'A}.\vec{AM}=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{16}{5}-5\right)\left(x-\frac{16}{5}\right)+\left(-\frac{7}{5}-1\right)\left(y+\frac{7}{5}\right)=0$

$\Leftrightarrow -9(5x-16)-12(5y+7)=0$

$\Leftrightarrow -45x-60y+60=0$

$\Leftrightarrow 3x+4y-4=0$

(Δ') est aussi confondue à (T)

Conclusion

$\boxed{\text{(T) est une tangente commune à } (\mathscr{C}) \text{ et } (\mathscr{C}')}$

EXERCICE N°129

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ Soit $M(x;y)$ un point du plan

Démontrons que:

$\|\vec{OM}\|=1 \Leftrightarrow$ il existe un réel t de l'intervalle $]-\pi,\pi[$ tel que : $\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\end{cases}$

$\|\vec{OM}\|=1 \Leftrightarrow \|\vec{OM}\|^2=1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

or $\forall t\in]-\pi,\pi]$, $\cos^2t+\sin^2t=1$

$\Leftrightarrow \exists t\in]-\pi;\pi]$ tq : $\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\end{cases}$

$\boxed{\|\vec{OM}\|=1 \Leftrightarrow \exists t\in]-\pi,\pi] / \begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\end{cases}}$

2/ Soit r un nombre réel strictement positif.

Déduisons de la question précédente le lieu $(\mathscr{C})$ des points $M(x;y)$ pour lesquels il existe un réel t de $]-\pi;\pi]$ tel que : $\begin{cases}x=r\cos t\\y=r\sin t\end{cases}$

$x^2+y^2 = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t$
$= r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$
$= r^2$

$x^2+y^2 = r^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{OM}\|^2 = r^2 \Leftrightarrow OM = r$

(𝒞) est donc le cercle de centre O et de rayon r

3/ Soit a, b, r trois nombres réels tels que $r > 0$

Déduisons de la question précédente le lieu (𝒞') des points $M(x;y)$ pour lesquels il existe un reel t de $]-\pi;\pi]$ tels que: $\begin{cases} x = r\cos t + a \\ y = r\sin t + b \end{cases}$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-a = r\cos t \\ y-b = r\sin t \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

(𝒞') est donc le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r

EXERCICE N°130

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On donne le cercle (𝒞) et la droite (𝒟) d'équations :

$x^2+y^2-4x-2y-8=0$ et $2x-3y+1=0$

1/ Figure: Construction des deux tangentes au cercle parallèles à (𝒟).

(Voir figure ci-contre)

2/ Déterminons les coordonnées d'un point et d'un vecteur normal de chacune des tangentes

Soit $\vec{n}$ le vecteur ; $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal de (𝒟) d'où :

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Soit $A(x_0;y_0)$ le point de contact entre (𝒞) et les deux tangentes, on a:

$\begin{cases} \overrightarrow{IA} \text{ colinéaire à } \vec{n} \ (1) \\ A \in (\mathscr{C}) \ (2) \end{cases}$

où I est le centre de (𝒞). On montre aisément que $I(2;1)$.

$(1) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{IA},\vec{n}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0-2 & 2 \\ y_0-1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -3(x_0-2)-2(y_0-1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x_0+2y_0-8 = 0$ (a)

$(2) \Leftrightarrow (x_0-2)^2+(y_0-1)^2-13 = 0$ (b)

En injectant (a) dans (b) on a:

$\begin{cases} y_0 = 4 - \frac{3}{2}x_0 \ (3) \\ (x_0-2)^2+(3-\frac{3}{2}x_0)^2-13 = 0 \ (4) \end{cases}$

$(4) \Leftrightarrow 13x_0^2 - 52x_0 = 0 \Leftrightarrow 13x_0(x_0-4) = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = 0$ ou $x_0 = 4$

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 4$

$x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = -2$

Les points sont donc : $A(0;4)$ et $B(4;-2)$

Déduisons-en les équat° des tangentes

Soit (T_A) la tangente en A à (𝒞) et (T_B)

celle en B à $(\mathscr{C})$, $M(x;y)$ un point du plan.

$M \in (T_A) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-0) - 3(y-4) = 0$

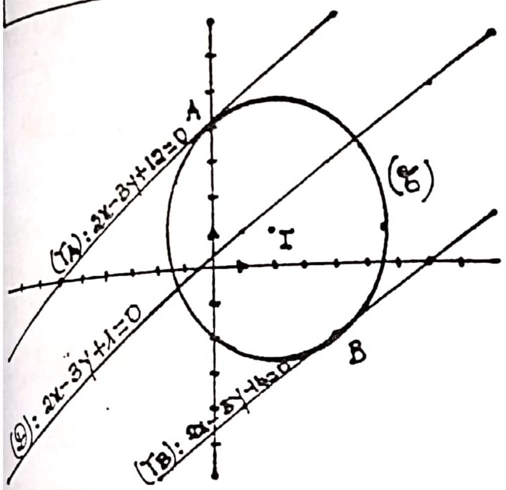
$\Leftrightarrow 2x - 3y + 12 = 0$

$M \in (T_B) \Leftrightarrow \vec{BM}\cdot\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-4) - 3(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 3y - 14 = 0$

$\boxed{(T_A) : 2x-3y+12=0 \quad (T_B) : 2x-3y-14=0}$



EXERCICE N°131

Soit $(\mathscr{C}_m)$ l'ensemble des points M du plan rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient :

$$x^2+y^2-2mx-2(m-1)y+m^2+4=0$$

où m est un paramètre réel.

1/ Discutons suivant les valeurs de m la nature de $(\mathscr{C}_m)$

$x^2+y^2-2mx-2(m-1)y+m^2+4=0$

$\Leftrightarrow (x-m)^2-m^2+(y-m+1)^2-(m-1)^2+m^2+4=0$

$\Leftrightarrow (x-m)^2+(y-m+1)^2=(m-1)^2-4$

$\Leftrightarrow (x-m)^2+(y-m+1)^2=(m+1)(m-3)$ (1)

Posons $(m+1)(m-3)=0$

$\Leftrightarrow m=-1$ ou $m=3$

m	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$(m+1)(m-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1er cas $m \in]-1;3[$

(1) $\Leftrightarrow (x-m)^2+(y-m+1)^2<0$ impossible

$(\mathscr{C}_m)$ est un ensemble vide.

2e cas $m=-1$

(1) $\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \text{et} \\ y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \text{et} \\ y=-2 \end{cases}$

$\mathscr{C}_{-1} = A(-1;-2)$

3e cas $m=3$

(1) $\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=0$

$\Leftrightarrow x=3$ et $y=2$

$\mathscr{C}_3 = B(3;2)$

4e cas : $m \in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$

$(m+1)(m-3)>0$

$(\mathscr{C}_m)$ est le cercle de centre $I_m(m;m-1)$ et de rayon

$$r=\sqrt{(m+1)(m-3)}$$

a./ Coordonnées de son centre et la valeur de son rayon dans le cas où $(\mathscr{C}_m)$ est un cercle.

Voir 4e cas : $I_m(m;m-1)$

$r=\sqrt{(m+1)(m-3)}$

-/ Déterminons l'ensemble des points Im lorsque m varie

$$\begin{cases} x = m \\ y = m-1 \\ m \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[\end{cases}$$

L'ensemble des points Im lorsque m varie est la droite (Δ): $y = x-1$ privée du segment [AB] avec $A(-1;-2)$ et $B(3;2)$

EXERCICE N°132

On considère les points $A(4;7)$, $B(-12;-3)$ et $C(13;-5)$.

1-/ Déterminons une équation des droites (AB), (AC) et (BC)

On montre aisément que:

(AB): $5x-8y+36=0$; (AC): $4x+3y-37=0$

(BC): $2x+25y+99=0$

2-/ Déterminons une équation des bissectrices intérieures du triangle ABC

Indications: Voir EXERCICE N° 122 pour la recherche de l'équation de chacune des bissectrices.

3-/ Vérifions que les trois bissectrices sont concourantes

Indications:

Déterminer le point d'intersection I de deux bissectrices et vérifier que I appartient à la troisième bissectrice.

- Equation du cercle inscrit dans le triangle ABC

Ce cercle a pour centre I et pour rayon $r = d(I,(\Delta))$ où (Δ) est l'une des bissectrices. Ce cercle a donc pour équation :

$$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2 = r^2.$$

Les questions 4-/ et 5-/ sont très faciles à traiter.

EXERCICE N°133

On considère les points $A\binom{0}{3}$, $B\binom{-4}{0}$ et $C\binom{0}{-2}$

1-/ Déterminons les points I et J de l'axe des abscisses, équidistants des droites (AB) et (AC)

On montre aisément que:

(AB): $3x-4y+12=0$

(AC): $x=0$

Soit $M(a;b)$ un point de l'axe des abscisses on a: $M(a;0)$

$$d(M;(AB)) = \frac{|3a+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3a+12|}{5}$$

$$d(M;(AC)) = |a|$$

M équidistant des droites (AB) et (AC)

$\Leftrightarrow |3a+12| = 5|a|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+12 = 5a \Leftrightarrow a = 6 \\ \text{ou} \\ 3a+12 = -5a \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Les points de l'axe des abscisses équidistants des droites (AB) et (AC) sont $I\left(-\frac{3}{2};0\right)$ et $J(6;0)$

2/ <u>Ecriture d'une équation cartésienne du cercle de diamètre [IJ]</u>

Soit K milieu de [IJ] on a:

$K\left(\frac{9}{4};0\right)$ Posons $r = \frac{1}{2} IJ$ on a:

$r = \frac{15}{4}$

Le cercle de diamètre [IJ] a pour centre $K\left(\frac{9}{4};0\right)$ et pour rayon

$$r = \frac{15}{4}$$

Son équation est donc:

$$\left(x-\frac{9}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{225}{16}$$

<u>Vérifions que ce cercle passe par A</u>

$$\left(0-\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2 = \frac{81}{16} + 9 = \frac{81+144}{16} = \frac{225}{16}$$

Ce cercle passe donc par A.

3/ <u>Déterminons une équation de la tangente à ce cercle en A</u>

Soit (T) cette tangente; $M(x;y)$ un point du plan.

$M \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{KA} = 0$

$\Leftrightarrow (x-0)\times\left(0-\frac{9}{4}\right) + (y-3)\cdot(3-0) = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{9}{4}x + 3y - 9 = 0$

$$\boxed{(T) : -9x + 12y - 36 = 0}$$

EXERCICE N°134

Soit A, B et C trois points du plan deux à deux distincts tels que:

$$\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{BC}$$

Déterminons le rapport de:

1/ <u>l'homothétie de centre A qui transforme C en B</u>

Soit h_1 cette homothétie et k_1 son rapport.

h_1	
A	A
C	B

Il nous reste à trouver le réel k_1 tel que: $\overrightarrow{AB} = k_1 . \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 5(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow k_1 = \frac{4}{5}$

> Le rapport de l'homothétie h_1 de centre A qui transforme C en B est $k_1 = \frac{4}{5}$

2/ <u>l'homothétie de centre B qui transforme A en C.</u>

Il revient à trouver le réel k_2 tel que : $\overrightarrow{BC} = k_2 \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

> Le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme A en C est $k_2 = -\frac{1}{4}$

> A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

3/ L'homothétie de centre C qui transforme A en B.

Il revient de trouver le réel k_3 tel que : $\vec{CB} = k_3 . \vec{CA}$

$\vec{AC} = 5\vec{BC} \Leftrightarrow \vec{CA} = 5\vec{CB} \Leftrightarrow \vec{CB} = \frac{1}{5}\vec{CA}$

Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme A en B est $k_3 = \frac{1}{5}$

EXERCICE N°135

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts.

Déterminons dans chacun des cas suivants le rapport de l'homothétie de centre A transformant B en C

1/ $\vec{AC} + 3\vec{AB} = \vec{0}$

$\vec{AC} + 3\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AC} = -3\vec{AB}$

Le rapport est $k_1 = -3$.

2/ $\vec{BC} - 4\vec{BA} = \vec{0}$

$\vec{BC} - 4\vec{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{AC} - 4\vec{BA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AC} = -3\vec{AB}$

Le rapport est $k_2 = -3$.

3/ $\vec{BC} = 2\vec{BA}$

$\vec{BC} = 2\vec{BA} \Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{AC} = 2\vec{BA}$

$\Leftrightarrow \vec{AC} = -\vec{AB}$

Le rapport est $k_3 = -1$

Remarque : Ici $C = S_A(B)$

EXERCICE N°136

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On considère l'application h du plan dans lui-même qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 3 \end{cases}$

1/ Démontrons qu'il existe un unique point I tel que $h(I) = I$

Posons $I(x_I; y_I)$

$h(I) = I \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 2x_I - 1 \Leftrightarrow x_I = 1 \\ y_I = 2y_I + 3 \Leftrightarrow y_I = -3 \end{cases}$

Il existe donc un unique point I tel que $h(I) = I$: c'est $I(1; -3)$

2/ Démontrons que h est une homothétie dont nous donnerons le centre et le rapport

$\vec{IM} = (x-1)\vec{i} + (y+3)\vec{j}$

$\vec{IM'} = (x'-1)\vec{i} + (y'+3)\vec{j}$

$= (2x-1-1)\vec{i} + (2y+3+3)\vec{j}$

$= (2x-2)\vec{i} + (2y+6)\vec{j}$

$= 2(x-1)\vec{i} + 2(y+3)\vec{j}$

$= 2[(x-1)\vec{i} + (y+3)\vec{j}]$

$\vec{IM'} = 2\vec{IM}$

h est donc l'homothétie de centre $I(1; -3)$ et de rapport $k = 2$

3./ Caractérisons h^{-1}

On sait que $h(I)=I \Leftrightarrow h^{-1}(I)=I$

De plus $\overrightarrow{IM'}=2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IM'}$

h^{-1} est donc l'homothétie de centre $I(1;-3)$ et de rapport $\frac{1}{2}$

EXERCICE N°137

Soit h l'homothétie de centre $A(1;-2)$ et de rapport $k=-2$

1/ Déterminons l'expression analytique de h

Soit $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ deux points du plan. $M'=h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}=-2\overrightarrow{AM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-1=-2(x-1) \\ y'+2=-2(y+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=-2x+3 \\ y'=-2y-6 \end{cases}$$

L'expression analytique de h est :

$$\begin{cases} x'=-2x+3 \\ y'=-2y-6 \end{cases}$$

2/ Nature et expression analytique de h^{-1}.

- Nature

h^{-1} est l'homothétie de centre $A(1;-2)$ et de rapport $-\frac{1}{2}$

- Expression analytique

$M'=h^{-1}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-1=-\frac{1}{2}(x-1) \\ y'+2=-\frac{1}{2}(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y'=-\frac{1}{2}y-3 \end{cases}$$

L'expression analytique de h^{-1} est :

$$\begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y'=-\frac{1}{2}y-3 \end{cases}$$

3./a/ Equation de la droite $(\mathcal{D}')$ image par h de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $2x-3y+5=0$

$$\begin{cases} x'=-2x+3 \\ y'=-2y-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3-x'}{2} \\ y=\frac{-6-y'}{2} \end{cases}$$

$M\in(\mathcal{D}) \Leftrightarrow 2x-3y+5=0$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{3-x'}{2}\right)-3\left(\frac{-6-y'}{2}\right)+5=0$$

$$\Leftrightarrow 2(3-x')-3(-6-y')+10=0$$

$$\Leftrightarrow -2x'+3y'+34=0$$

$(\mathcal{D}')$ a pour équation : $-2x+3y+34=0$

b/ Déterminons l'équation de la droite $(\Delta)=h^{-1}(\mathcal{D})$

$M'\in(\mathcal{D}) \Leftrightarrow 2x'-3y'+5=0$

$$\Leftrightarrow 2(-2x+3)-3(-2y-6)+5=0$$

$$\Leftrightarrow -4x+6y+29=0$$

(Δ) a pour équation : $-4x+6y+29=0$

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER
ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

EXERCICE N°138

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles de centres respectifs $A(1;3)$, $A'(-1;1)$ et de rayons respectifs $r=2$ et $r'=4$

1°/ Démontrons qu'il existe deux homothéties h_1 et h_2 qui transforment $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$

Soit h une homothétie de rapport k ; $h(\mathscr{C}) = \mathscr{C}' \Rightarrow r' = |k| r$

$\Leftrightarrow 4 = 2|k| \Leftrightarrow |k| = 2$

$\Leftrightarrow k = -2$ ou $k = 2$

Il existe donc deux homothéties h_1 de rapport $k_1 = 2$ et h_2 de rapport $k_2 = -2$ qui transforment $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$

2°/ a°/ Éléments caractéristiques de h_1 et h_2

Soit I le centre de h_1 et J celui de h_2

$h_1(\mathscr{C}) = \mathscr{C}' \Rightarrow h_1(A) = A'$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} = -2\overrightarrow{IA}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_I = -2(1 - x_I) \\ 1 - y_I = -2(3 - y_I) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1}{3} \\ y_I = \frac{7}{3} \end{cases}$ $I\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$

$h_2(\mathscr{C}) = \mathscr{C}' \Rightarrow h_2(A) = A'$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JA'} = 2\overrightarrow{JA}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_J = 2(1 - x_J) \\ 1 - y_J = 2(3 - y_J) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_J = 3 \\ y_J = 5 \end{cases}$ $J(3;5)$

h_1 est l'homothétie de centre $I\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$ et de rapport $k_1 = -2$

h_2 est l'homothétie de centre $J(3;5)$ et de rapport $k_2 = 2$

b°/ Expression analytique de h_1 puis celle de h_2

Voir EXO 137 : 1°/ On trouve aisément les expressions analytiques

$h_1 : \begin{cases} x' = -2x + 1 \\ y' = -2y + 7 \end{cases}$ $h_2 : \begin{cases} x' = 2x - 3 \\ y' = 2y - 5 \end{cases}$

EXERCICE N°139

1°/ Oui $I = S_A(B)$

2°/ Oui $\overrightarrow{AI} = -5\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AI} = -5\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \frac{6}{5}\overrightarrow{IA}$

d'où $k = \frac{6}{5}$

3°/ Impossible car I, A et B doivent être alignés.

4°/ Impossible car tout le plan sera invariant point par point (application identique.

5°/ Oui I est le milieu de $[AB]$

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER
ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

EXERCICE N°140

1/ Oui ; même plusieurs.

Pour les questions 2/ et 3/ c'est impossible. (Voir cours)

EXERCICE N°141

Soit A, B, C trois points non alignés

A tout point M du plan, on associe le point M' définie par : $3\overrightarrow{AM'} - 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

Désignons par f l'application telle que $f(M) = M'$.

1/ Déterminons les images A', B' et C' respectives de A, B et C par f.

$f(A) = A' \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

A' est donc l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$f(B) = B' \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB'} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BB'} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})$

B' est l'image de B par la translation de vecteur $\vec{v} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})$

$f(C) = C' \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AC'} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{CC'} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

C' est l'image de C par la translation de vecteur $\vec{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

2/ Trouvons un point invariant par f.

Soit I le point invariant par f on a :

$f(I) = I \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$

Le point invariant par f est le point I tel que ABCI soit un parallélogramme

3/ Démontrons que f est une homothétie dont nous donnerons le centre et le rapport

$3\overrightarrow{AM'} - 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM'}) - 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IM'} - 2\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$ or $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IM'} - 2\overrightarrow{IM} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IM}$.

f est donc l'homothétie de centre I et de rapport $k = \frac{2}{3}$

EXERCICE N°142

Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$, G son centre de gravité et A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB]

1/ Précisons les points :

$r_{(B,\pi/3)}(C)$, $r_{(A,\pi/3)}(B)$, $r_{(C,\pi/3)}(A)$

On sait que ABC est un triangle équilatéral direct. On en déduit que :

$r_{(B,\pi/3)}(C) = A$, $r_{(A,\pi/3)}(B) = C$, $r_{(C,\pi/3)}(A) = B$.

2/ Déterminons le centre et l'angle d'une rotation qui transforme A en B, B en C et C en A.

Soit r' cette rotation et I son centre.

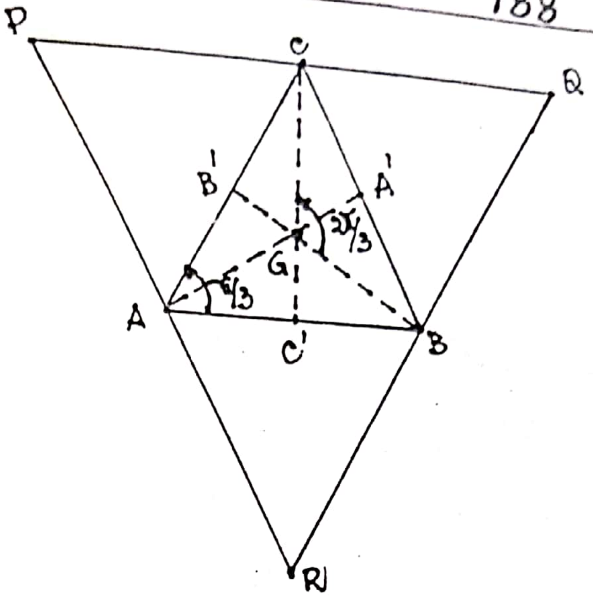
On a: $\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r'} \\ I & I \\ A & B \\ B & C \\ C & A \end{array}$ $\Leftrightarrow$ I est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB], [BC] et [CA]. I est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Or ABC est équilatéral d'où I est confondu au centre de gravité G. De plus on a: $(\widehat{\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}}) = \frac{2\pi}{3}$

La rotation qui transforme A en B, B en C et C en A est la rotation r' de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

3/ Construisons les points P, Q et R tels que : $P = r_{(A,\pi/3)}(C)$, $Q = r_{(C,\pi/3)}(B)$
$R = r_{(B,\pi/3)}(A)$ (Voir figure)

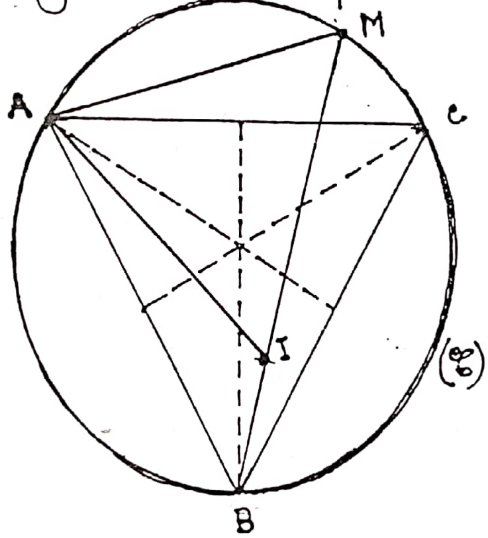
Démontrons que le triangle PQR est équilatéral.

Les triangles CPA, CQB, ARB sont des triangles équilatéraux dont la longueur des côtés est la même que celle de ABC. On en déduit que:
$PQ = PR = QR = 2AB$ d'où PQR est un triangle équilatéral.



EXERCICE N°143

Soit ABC un triangle équilatéral direct, $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit, M un point de l'arc $\widehat{AC}$, I le point du segment [MB] tel que $MI = MA$



1/ Démontrons que le triangle AMI est équilatéral

$MI = MA \Rightarrow AMI$ est isocèle en M
$\Leftrightarrow \widehat{MAI} = \widehat{AIM}$.

De plus $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ACB}$ ont la même mesure car ils sont des angles inscrits qui intercaptant le même arc $\widehat{AB}$

or $I \in [MB]$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$.

$\Leftrightarrow \widehat{AMI} = \widehat{AMB} = \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$.

On sait également que:

$\widehat{AMI} + \widehat{MAI} + \widehat{AIM} = \pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2\widehat{MAI} = \pi \Leftrightarrow \widehat{MAI} = \frac{\pi}{3}$.

Finalement on a:

$\widehat{AMI} = \widehat{MAI} = \widehat{AIM} = \frac{\pi}{3}$ d'où le triangle AMI est équilatéral.

2/ <u>Déterminons l'image de I par la rotation de centre A transformant B en C</u>

Soit r cette rotation.

On sait que $\begin{cases} AB = AC \\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

r est donc la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

AMI est un triangle équilatéral direct $\Leftrightarrow \begin{cases} AI = AM \\ (\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AM}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

On en déduit que $r(I) = M$.

3/ <u>Déduisons-en que: MA+MC = MB</u>

$\begin{cases} r(B) = C \\ r(I) = M \end{cases} \Rightarrow MC = IB.$

car la rotation conserve la distance.

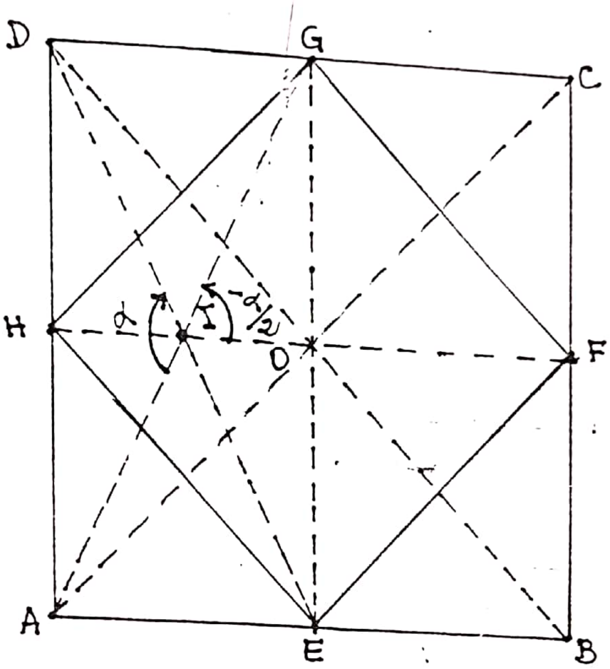
$I \in [MB] \Leftrightarrow MB = MI + IB$

$= MA + MC.$

$MA + MC = MB.$

EXERCICE N° 144

Soit ABCD un carré tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$. On note E, F, G et H les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].



1/ <u>Démontrons qu'il existe une rotation qui transforme A en D et B en A.</u>

Les points A, B et D ne sont pas alignés. Il existe donc une rotation qui transforme A en D et B en A.

Son centre est nécessairement le point d'intersection des médiatrices des segments [AD] et [AB]. Ce point n'est rien d'autre que le centre O du carré ABCD. De plus $Mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{2}$

La rotation qui transforme A en D et B en A est le quart de tour indirect de centre O autrement dit la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

2/ Démontrons qu'il existe une rotation qui transforme B en D et A en A.

On sait que $AB = AD$ et $Mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme B en D et A en A.

3/ Démontrons qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en F.

On démontre aisément qu'il s'agit de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

4/ a/ Démontrons qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en E

Le quadrilatère ADGE est un rectangle soit I son centre. La rotation de centre I transforme A en D et G en E

b/ Soit α la mesure principale de son angle.

Démontrons que $\tan(-\alpha/2) = 2$

$$\tan(-\alpha/2) = \frac{GO}{IO} = \frac{2IO}{IO} = 2$$

$$\tan\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = 2$$

Déduisons-en à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de α

$$\tan(-\alpha/2) = 2 \Rightarrow -\alpha/2 = 63{,}43°$$

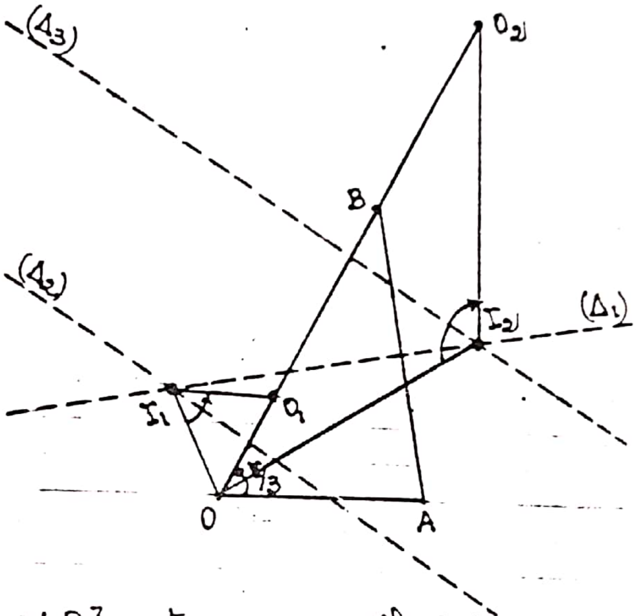
$$\Rightarrow \alpha = -126{,}86°$$

$$\boxed{\alpha = -126{,}86°}$$

EXERCICE N°145

Soit OAB un triangle non isocèle tel que : $Mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$. Soit O_1, O_2 les points de (OB) tels que :

$$O_1B = O_2B = OA.$$



1/ Démontrons que s'il existe une rotation transformant A en B et (OA) en (OB) :

a/ Son centre est sur la médiatrice du segment [AB]

Soit r cette rotation et I son centre

on a: $r(A) = B \Rightarrow IA = IB$ d'où le centre I de r est sur la médiatrice du segment [AB].

b/ L'image de O est soit O_1 soit O_2

Posons $r(O) = O'$ On a:

O	O'
A	B

$\Rightarrow O'B = OA$ car r est une isométrie. Or $O_1B = OA$ et $O_2B = OA$ d'où

L'image de O est soit O_1 soit O_2

c-/ Déduisons-en que son angle a pour mesure $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$

Soit θ l'angle de la rotation on a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r} \\ A & B \\ O & O_1 \end{array} \Rightarrow \theta = (\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{O_1B}})$$

$= (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ car $\overrightarrow{O_1B}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires de même sens.

$\theta = \pi/3$

ou

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r} \\ A & B \\ O & O_2 \end{array} \Rightarrow \theta = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O_2B}})$$

$= (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O_2B})$

$= (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) - (\overrightarrow{BO_2}, \overrightarrow{BO})$

$= \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$.

Conclusion

L'angle de la rotation est $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$.

2-/ Démontrons qu'il existe deux rotations et deux seulement transformant A en B et (OA) en (OB). Construisons leurs centres et donnons leurs angles

(Δ_1) = médiatrice de $[AB]$

(Δ_2) = médiatrice de $[OO_1]$

(Δ_3) = médiatrice de $[OO_2]$

Posons $I_1 = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$; $I_2 = (\Delta_1) \cap (\Delta_3)$

Les deux rotations sont :

r_1 de centre I_1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

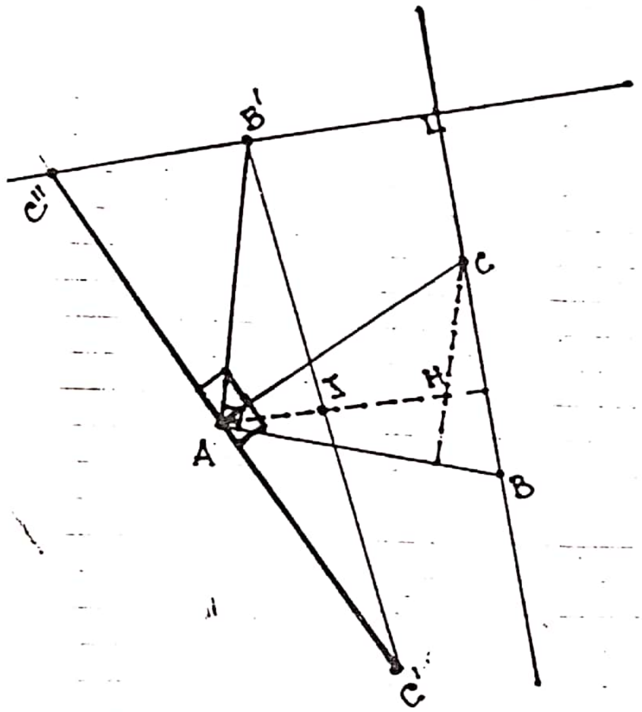
r_2 de centre I_2 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

EXERCICE N°146

Soit un triangle ABC et H son orthocentre. On note r le quart de tour direct de centre A et r' le quart de tour indirect de centre A.

1-/ Construisons les points $B' = r(B)$, $C' = r'(C)$ et $C'' = r(C)$



2-/ Démontrons que (BC) est perpendiculaire à (B'C'').

r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r} \\ B & B' \\ C & C'' \end{array} \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C''}}) = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ (BC) perpendiculaire à (B'C'')

3-/ Image de la droite (AH) par l'homothétie de centre C' et de rapport 2

Soit h cette homothétie.

$C' = r'(C) \Rightarrow (AC) \perp (AC')$ (1)

$C'' = r(C) \Rightarrow (AC) \perp (AC'')$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow (AC') // (AC'') \Rightarrow A, C'$ et C'' sont alignés. De plus $AC' = AC = AC''$ donc A est milieu de $[C'C'']$ $\Rightarrow h(A) = C''$

L'image de (AH) est parallèle à (AH) et passe par C''. Or $(C''B') // (AH)$ car elles sont toutes deux perpendiculaires à (BC)

L'image de la droite (AH) par l'homothétie de centre C' et de rapport 2 est la droite $(C''B')$

4/ Démontrons que (AH) est une médiane du triangle $AB'C'$

Posons $I = (AH) \cap (C'B')$. On montre aisément que $h(I) = B' \Rightarrow I$ milieu de $[C'B']$ d'où (AH) est une médiane du triangle $AB'C'$

EXERCICE N°147

Soit (Δ) une droite et O un point extérieur à cette droite

1/ a/ Construisons l'image (Δ') de (Δ) par le quart de tour direct de centre O. Ecrivons et justifions le programme de construction.

Soit r le quart de tour direct de centre O.

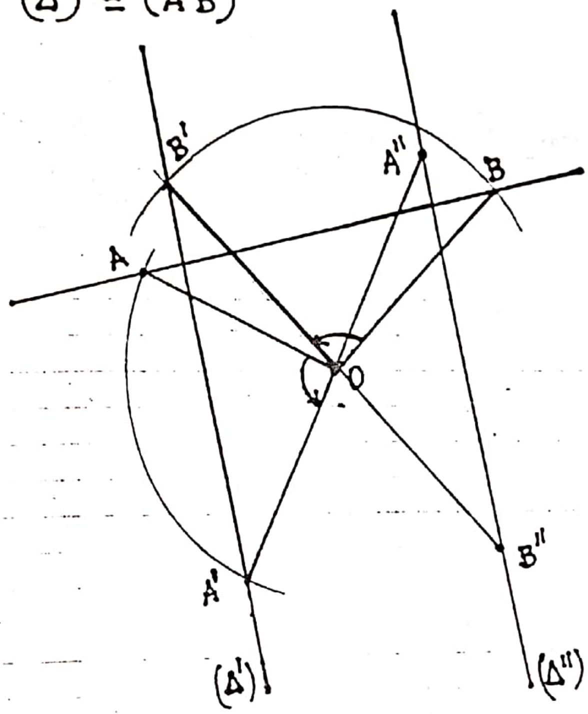
Soit A et B points distincts de (Δ)

- Construire les images A', B' respectives de A et B par r.

$r(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OA' \\ (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$r(B) = B' \Leftrightarrow \begin{cases} OB = OB' \\ (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$(\Delta') = (A'B')$



b/ Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{u'}$ un vecteur directeur de (Δ'). mesures principales possibles de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$

Ces mesures sont : $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

2/ Considérons à présent le quart de tour indirect r' de centre O, $\Delta'' = r'(\Delta)$

Posons $B'' = r'(B)$ $A'' = r'(A)$, $(\Delta'') = (A''B'')$

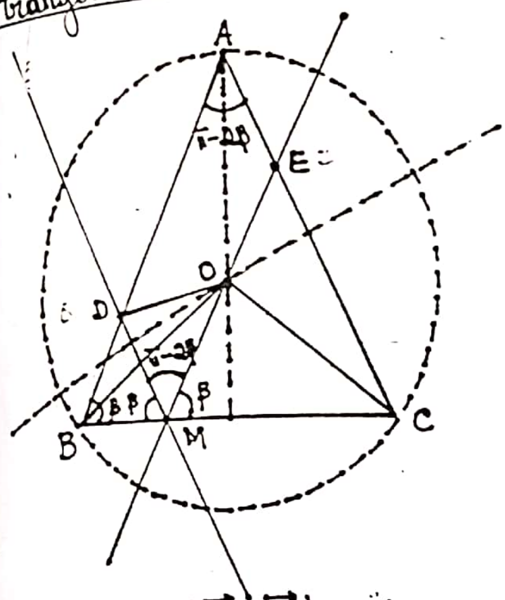
Voir Figure. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ), $\vec{u''}$ un vecteur directeur de (Δ'')

mes $(\vec{u}, \vec{u''}) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$

EXERCICE N° 148

Soit ABC un triangle isocèle de base [BC], O le centre de son cercle circonscrit.

1/ Déterminons la rotation de centre O transformant A en C.



Posons Mes $(\vec{OA}, \vec{OC}) = \alpha$.

La rotation recherchée est la rotation r de centre O et d'angle α.

Image de B par cette rotation

$\begin{cases} OB = OA \\ (\vec{OB}, \vec{OA}) = \alpha \end{cases} \Rightarrow r(B) = A$

l'image de B par cette rotation est A.

2/ Démontrons que E est l'image de D par cette rotation

Posons $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \beta$

$(DM) // (AC)$; $\widehat{DMB}$ et $\widehat{ACB}$ sont deux angles correspondants formés par deux droites (DM) et (AC) parallèles et la secante (BC)

$(\Leftrightarrow)$ $\widehat{DMB} = \beta$; $DBM = \beta \Rightarrow DB = DM$.

On demontre de même que $EMC = \beta$

On en déduit que $DME = \pi - 2\beta$

De plus $\widehat{BAC} = \pi - 2\beta$

Dans le quadrilatère ADME les angles opposés $\hat{A}$ et $\hat{M}$ ont la même mesure $\pi - 2\beta$. Le quadrilatère ADME est donc un parallélogramme. On a donc : $AE = DM = DB$.

$\begin{cases} r(B) = A \\ BD = AE \end{cases} \Leftrightarrow r(D) = E.$

E est l'image de D par cette rotation

Déduisons-en que la médiatrice de [DE] passe par un point fixe quand M parcourt [BC]

D'après ce qui précède $r(D) = E$.

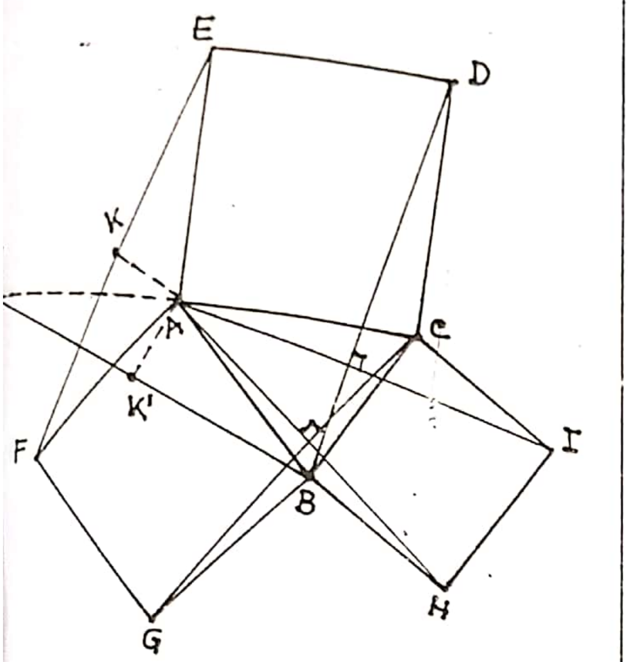
Lorque M parcourt [BC], la médiatrice de [DE] passe par le centre O de r, centre du cercle circonscrit à ABC

EXERCICE N° 149

A l'extérieur d'un triangle direct ABC, on construit les carrés ACDE, ABGF, BHIC.

1/ Déterminons la rotation transformant le triangle ACI en le triangle DCB

soit r cette rotation on a :



$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r} \\ A & D \\ C & C \\ I & B \end{array}$$

r a pour centre C. Soit θ son angle on a : $\theta = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = -\pi/2$

La rotation transformant le triangle ACI en le triangle DCB est la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autrement dit le quart de tour indirect de centre C.

<u>Déduisons-en que (AI) est perpendiculaire à (BD)</u>

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r} \\ A & D \\ I & B \end{array} \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{DB}}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{DB}$$

<u>Conclusion :</u>

Les droites (AI) et (BD) sont perpendiculaires

2/ <u>Démontrons que les droites (CG) et (AH) sont perpendiculaires</u>

Soit r' le quart de tour direct de centre B, r' transforme A en G et H en C

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r'} \\ A & G \\ H & C \end{array} \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{GC}}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{GC}$$

<u>Conclusion :</u>

Les droites (AH) et (GC) sont perpendiculaires

3/ <u>Construisons l'image du triangle AFE par le quart de tour direct de centre A</u>

Soit r'' ce quart de tour on a :

$r''(A) = A$; $r''(F) = B$; Posons $r''(E) = E'$

L'image du triangle AFE par r'' est le triangle ABE'

4/ <u>Démontrons que l'image K' du milieu K de [EF] par r'' appartient à la droite parallèle à (BC) passant par A</u>

A milieu de [CE']. De plus on sait que toute rotation transforme le milieu d'un segment en le milieu du segment image d'où K' est milieu de [E'B]. En appliquant la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle E'BC, on conclut que (AK') // (BC) d'où le résultat

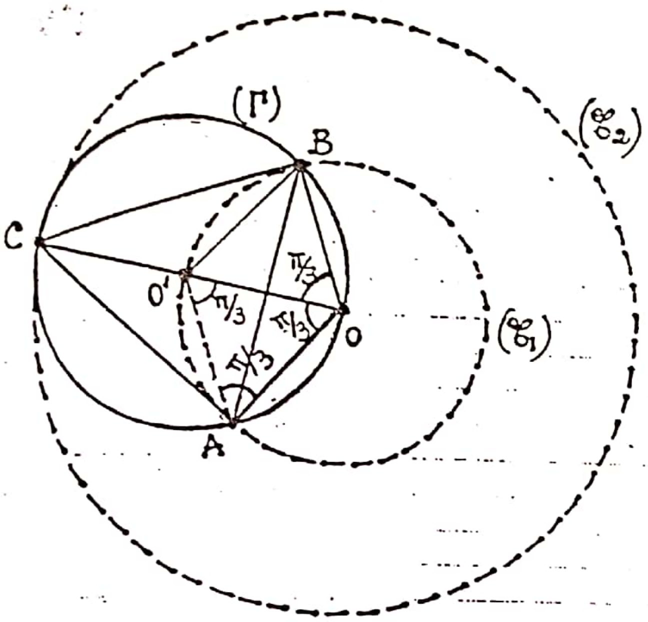
<u>Déduisons-en que (AK) est une hauteur du triangle ABC</u>

$$\begin{cases} (AK) \perp (AK') \\ (AK') \parallel (BC) \end{cases} \Rightarrow (AK) \perp (BC)$$

(AK) est donc une hauteur du triangle ABC

EXERCICE N°150

Soit $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ deux cercles de même centre O et de rayons respectifs R et 2R. Soit A un point de $(\mathscr{C}_1)$ et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$



1/ Déterminons et construisons l'image (Γ) de $(\mathscr{C}_1)$ par r.

$(\mathscr{C}_1)$ étant un cercle, (Γ) est aussi un cercle car toute rotation transforme un cercle en un cercle.

Soit O' le centre (Γ) et R' son rayon

On. $O' = r(O)$ et $R' = R$

(Γ) est donc le cercle de centre $O' = r(O)$ et de rayon R (m̂ rayon que $(\mathscr{C}_1)$)

Démontrons que (Γ) et $(\mathscr{C}_2)$ sont tangents en un point C

Soit C le point diamétralement opposé à O sur (Γ) on a:

$C \in (\Gamma)$ et $OC = 2R \Rightarrow C \in (\mathscr{C}_2)$.

Les cercles (Γ) et $(\mathscr{C}_2)$ sont donc tangents en C, symétrie de O par rapport à O' centre de (Γ).

2/ Les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et (Γ) se coupent en A et en un deuxième point B.

Démontrons que le triangle ABC est équilatéral

$O'A = OA = O'O = OB = O'B = R$

Les triangles OO'A et OO'B sont équilatéraux. Les angles $\widehat{AC}$ et $\widehat{BOC}$ ont la même mesure car ils sont inscrits et interceptent le même arc.

$\widehat{BAC} = \widehat{BOC} = \pi/3$.

On démontre de même que $\widehat{ABC} = \widehat{AOC}$ soit $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ et partant que $\widehat{ACB} = \pi/3$

Conclusion:

Le triangle ABC est équilatéral.

Calculons AB en fonction de R.

$$\frac{AB}{2} = O'A \sin\frac{\pi}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = R\sqrt{3}$$

$$\boxed{AB = R\sqrt{3}}$$