Table des Matières

Préface

L'année scolaire 2007/2008 a été marquée par une agitation permanente qui a affecté sérieusement les quantum horaires. C'est pour cette raison que l'académie a requis du C. P .I de Mathématiques la conception de ce fascicule. Les élèves et leurs professeurs y trouveront des résumés de cours, des exercices types couvrant tout le programme et des conseils pour aider à la préparation des examens. L'académie exprime sa gratitude à Monsieur Moussa Faye C. P. I de Mathématiques pour la promptitude de sa réaction, la qualité du travail accompli, le sérieux et l'abnégation dont il a toujours fait montre dans l'exécution de son travail

L'inspecteur d'Académie

INTRODUCTION GENERALE

Ce document est conçu pour vous, **élèves de troisième** et ne peut se substituer en aucun cas au cours de votre professeur. Il vient au contraire pour **l'appuyer** et contient :

- Quelques conseils pour une bonne préparation au B F E M
- Rappels de cours accompagnés d'exercices d'application
- Des exercices d'entraînement

Au début de chaque chapitre, vous trouverez les pré-requis et les compétences exigibles.
Par définition les **pré-requis** c'est l'ensemble des **connaissances mobilisables et indispensables** pour l'acquisition de nouvelles connaissances
Les compétences exigibles comme son nom l'indique constituent l'ensemble des savoir-faire, capacités, aptitudes, attendues de vous à l'issue de chaque leçon. Toutes les activités proposées en classe, les évaluations (devoirs surveillés, examens) sont normalement conçues en fonction de ces compétences exigibles
Pour toute leçon, vous devez tout faire pour asseoir les pré-requis. Ceci facilite sa compréhension
Quand vous apprenez une quelconque leçon, ou quand vous vous exercez, ayez toujours à l'esprit les compétences exigibles sur lesquelles vous pourriez être évalués
Les exercices d'entraînement ne sont pas du tout difficiles, faites tout pour les traiter. Il suffit d'un petit effort personnel .**En mathématiques, l'effort personnel est d'une importance capitale et est irremplaçable**
Il est à souligner que certains exercices sont tirés du guide pédagogique de la classe de troisième qui a été révisé par les conseillers pédagogiques en 2005.Ains ils sont souvent en adéquation avec le programme scolaire en vigueur
Ce document pourrait donc au-delà des élèves, aider le jeune professeur confronté au problème de documentation, dans ses préparations

Quelques conseils pour la préparation au B F E M

Au cours de l'année

-Apprendre ses leçons **au jour le jour**
-Avant de se lancer sur les travaux dirigés donnés sur une leçon quelconque, il faut au préalable bien l'étudier, assimiler les exercices d'application
-Retenir et comprendre les théorèmes, définitions et propriétés
-Ne pas apprendre en écoutant la musique ou en regardant la télévision, cela fatigue le cerveau
-Bien dormir quand on a sommeil
-Faire du sport si possible, cela facilite le sommeil
- Réviser périodiquement les leçons déjà faites, cela vous facilitera les révisions de fin d'année
-Eviter d'apprendre par cœur les solutions des exercices mais faire tout pour les comprendre
-Poser des questions au professeur sur toutes notions non bien comprises
-Eviter de fréquenter tout groupe de travail de plus de 10 élèves et où l'on perd beaucoup de temps sur des choses inutiles
-Apprendre dans un endroit calme
-Ne négliger aucune matière, aucune leçon

La veille de l'épreuve

-Eviter les veillées nocturnes à la veille de l'examen
-Eviter d'apprendre jusqu'à des heures tardives, il est préférable même de se reposer, cela vous permettra d'être dans de bonnes dispositions pour réfléchir
-Eviter de trop penser à l'examen car cela pourrait vous conduire à des insomnies
-Préparer votre pièce d'identité
-Préparer votre matériel géométrique (équerre, compas, règle, rapporteur)
- Préparer au moins deux stylos bleus, un crayon noir et une gomme

Le jour j

Après être entré dans la salle, le surveillant vous demandera de garder sur votre table, le strict nécessaire, tout le reste sera déposé le long du mûr. Ce strict nécessaire comporte les outils d'écriture, les outils de dessin, une gomme, éventuellement votre convocation et une pièce d'identité
Le sujet est distribué
Lisez l'épreuve en entier
Relevez les points attribués aux différents exercices, déterminer le temps à passer alors sur chaque exercice. Votre épreuve dure 2 heures, laissez vous 15min en fin d'épreuve, cela veut dire que vous disposez de 105min pour acquérir 20 points. Un exercice à 4 points devra être effectué en : $\frac{105 \times 4}{20} = 21\,\text{min}$

Un exercice à 8 points devra être effectué en : $\frac{105 \times 8}{20} = 42\,\text{min}$

Choisir le premier exercice à chercher. Le mieux est de choisir que l'ont sait savoir traiter parce que l'on a déjà réussi un exercice similaire. Réussir le premier exercice rapidement met en confiance et donne des forces pour des exercices difficiles
Ce premier exercice étant choisi, notez au brouillon l'heure du début de votre recherche et le temps que vous disposez pour cet exercice. Notez l'heure finale. Relisez complètement de nouveau l'exercice. Commencez votre recherche au brouillon, recopiez régulièrement au propre en refaisant les calculs
Respectez la numérotation des questions et faites-la apparaître clairement.
Encadrez les résultats, et si vous ne traitez pas une question, mettez le numéro et laissez une ligne blanche

Si vous « butez » sur une question, ne passez pas trop de temps, admettez le résultat et cherchez les questions suivantes

Contrôlez le temps qui vous reste et si vous dépassez le temps imparti, prenez un nouvel intercalaire pour un nouvel exercice, le correcteur peut apprécier de ne pas avoir plusieurs exercices sur une même copie
Prenez le dernier quart d'heure pour une relecture de votre copie, encadrez les résultats que vous auriez oubliés, corrigez les fautes d'orthograghe, contrôlez la numérotation des questions puis numérotez vos pages

Activités Numériques

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

Révisions sur le calcul algébrique

1°) égalités remarquables

Quels que soient les nombres réels a et b on :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Attention : Il ne faut pas oublier le double produit $2ab$ dans le développement de $(a+b)^2$ *et* $(a-b)^2$. C'est une erreur très grave

Quelques erreurs à éviter

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 ; (a-b)^2 = a^2 - b^2$

Dans IR, on ne peut pas factoriser $a^2 + b^2$ et $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Ces égalités remarquables servent à factoriser ou développer des expressions littérales

Application

Exercice 1 : Factoriser les expressions suivantes :

a) $A = x^3 - x$; $B = x^4 - x^2$; $C = 4x^2 - 9 + (x+1)(2x-3)$ $D = x^2 + 10x + 25 + 4x(x+5)$

b) On donne l'expression $E = (3x-1)^2 + (1-3x)(x+4)$

b1) Développer E

b2) Factoriser E

Solution

(On essaie de faire apparaître pour A *et* B la différence de deux carrés, pour cela, il suffit de factoriser par un facteur convenable)

a) $A = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$;

$B = x^2(x-1)(x+1)$; $C = (2x-3)(2x+3) + (x+1)(2x-3) = (2x-3)[(2x+3) + (x+1)]$

$C = (2x-3)(2x+3+x+1) = (2x-3)(3x+4)$

$D = (x+5)^2 + 4x(x+5) = (x+5)(x+5+4x) = (x+5)(5x+5) = 5(x+5)(x+1)$

b) $E = (3x-1)^2 + (1-3x)(x+4)$

b1) $E = 9x^2 - 6x + 1 + x + 4 - 3x^2 - 12x = 6x^2 - 17x + 5$

b2) $E = (1-3x)^2 + (1-3x)(x+4) = (1-3x)[(1-3x) + (x+4)] = (1-3x)(5-2x)$. Ici on a utilisé le fait que $(3x-1)^2 = (1-3x)^2$ O n pouvait aussi procéder comme suit :

b2) $E = (3x-1)^2 - (3x-1)(x+4) = (3x-1)[(3x-1) - (x+4)] = (3x-1)(3x-1-x-4)$

$E = (3x-1)(2x-5) = (1-3x)(5-2x)$

Attention : Un exemple d'erreur très fréquente chez les élèves

Factoriser $F = (16x^2 - 25) + x(4x+5) + (4x+5)$

Certains ont tendance à procéder ainsi :

$F = (4x-5)(4x+5) + x(4x+5) + (4x+5) = (4x+5)[(4x-5) + x + 0]$

$F = (4x+5)(5x-5)$; Ce qui est faux .En lieu et place de 0, on doit mettre 1

La solution juste est : $F = (4x+5)[(4x-5) + x + 1] = (4x+5)(5x-4)$

En effet $(4x+5) = (4x+5) \times 1$

Exercice 2

Calculer mentalement

$31^2 - 29^2$; 95^2 ; 19×21

Solution : On utilise les égalités remarquables

$31^2 - 29^2 = (31-29)(31+29) = 2 \times 60 = 120$

$95^2 = (100-5)^2 = 10000 - 1000 + 25 = 9025$

$19 \times 21 = (20-1)(20+1) = 20^2 - 1 = 400 - 1 = 399$

Exercice d'entraînement

Factoriser les expressions suivantes :

$3t - t(t+2)$; $y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}$; $27x^2 - 12$; $(3x+1)^2 - (x-5)^2$;$16x^4 - 16x^3 + 4x^2$;

$xy + x + y + 1$;$9x^2 + 6x + 1 - 5x(3x+1) + 3x^3 + x^2$

N B Ces révisions sur le calcul algébrique de la classe de 4eme constituent des pré-requis pour certains thèmes de la classe de 3eme. Il vous est donc indispensable de maîtriser ces quelques rappels pour mieux affronter le programme de 3eme

Chapitre1 : Racine carrée

PRÉ-REQUIS :

Egalités usuelles ; Pythagore.

COMPETENCES EXIGIBLES

Connaître la définition et la notation de la racine carrée d'un nombre positif ou nul;
Calculer la valeur exacte ou une valeur approchée d'une racine carrée
Connaître la notation IR.
Calculer une valeur numérique d'une expression littérale dans IR
Connaître et utiliser les propriétés de la racine carrée
Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient
Comparer des réels avec des radicaux
Connaître et utiliser les propriétés de la valeur absolue d'un réel
Ecrire sans radical la racine carrée du carré d'un nombre
Déterminer la valeur exacte d'une expression comportant un radical
Déterminer une valeur approchée d'une expression comportant un radical :
- à partir d'un encadrement de ce radical
- ou avec la calculatrice

1°) Définition et notation

Soit **a un nombre rationnel positif ou nul**. On appelle racine de a, le nombre positif ou nul dont le carré est à a. On le note $\sqrt{a}$

Conséquence immédiate de la définition

On a : $3^2 = 9 \quad et \quad (-3)^2 = 9$, le nombre positif dont le carré est 9 est 3 donc $\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{0} \quad = 0;$

Attention : On ne peut pas parler de la racine carrée d'un nombre réel négatif

2°) Propriétés

a) $a \in IR_+; \quad b \in IR_+, \quad on \quad a \quad \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad = \sqrt{ab}$

b) $a \in IR_+; \quad b \in IR^*{}_+, \quad on \quad a \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$; en particulier $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$

Attention : les élèves ont tendance à mémoriser les formules sans se préoccuper des conditions de positivité sur a et b et cela entraîne des erreurs très graves pour la résolution de certains exercices

Si $a \leq 0 \quad et \quad b \leq 0 \quad on \quad a \quad ab \geq 0 \quad donc \quad \sqrt{ab} \quad existe$ mais on ne peut parler ni de $\sqrt{a}$ ni de $\sqrt{b}$

Exemple : $(-3)\times(-4) = 12$ donc $\sqrt{12} = \sqrt{(-3)\times(-4)}$ **existe** mais $\sqrt{-3}$ **et** $\sqrt{-4}$ **ne sont pas définis** on n'a pas donc $\sqrt{(-3)\times(-4)} = \sqrt{-3} \times \sqrt{-4}$

Ces propriétés permettent de simplifier des calculs

Exemple : $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$; $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}} = \frac{9}{2}$

Erreur fréquente Certains qui apprennent mal leur leçon ont tendance à commettre l'erreur suivante : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b} \quad ou \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$

Voici quelques contre-exemples pour illustrer la fausseté de ces résultats :

$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et on voit bien que $7 \neq 5$ donc $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$

$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$ et $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ donc $\sqrt{25} - \sqrt{9} \neq \sqrt{25-9}$

Remarquons en outre que $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ est défini alors que $\sqrt{2-5}$ n'est pas défini

Remarque importante

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ et $|-3| = 3$ donc $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 = |3|$

Pour tout réel a , $\sqrt{a^2} = |a|$

Pour comparer 2 nombres positifs il suffit de comparer leurs carrés

$\left(\sqrt{a^2}\right)^2 = a^2$ et $|a|^2 = a^2$; on a : $\left(\sqrt{a^2}\right)^2 = |a|^2$ donc $\sqrt{a^2} = |a|$

Ce résultat est d'une importance capitale et servira beaucoup dans les résolutions de problèmes en 3[eme] et même dans les classes ultérieures

Si $\boxed{a \geq 0 \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = a}$

Equation : $\underline{x^2 = a}$

Si a = 0 ; on a x = 0 et $S = \{0\}$

Si a<0 ; pas de solution $S = \Phi$

Si a>0 on a $x^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2$; $x = \sqrt{a}$ *ou* $x = -\sqrt{a}$ et $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$

Exemple Résoudre $x^2 = 5$; on a $S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

<u>Comparaison de réels comportant des radicaux</u>.

Propriétés :

- Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrées.

Quels que soient les réels positifs a et b,

a < b si et seulement $a^2 < b^2$.

Conséquence

-Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

a et b étant positifs,

$\sqrt{a} < \sqrt{b}$ si et seulement si a < b

<u>Expressions conjuguées ; rendre rationnel le dénominateur d'un quotient.</u>

Vocabulaire

L'expression conjuguée de $\left(a + \sqrt{b}\right)$ est $\left(a - \sqrt{b}\right)$

L'expression conjuguée de $\left(a - \sqrt{b}\right)$ est $\left(a + \sqrt{b}\right)$.

Méthode

Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant un radical (ou des radicaux) , on multiplie le numérateur et le dénominateur de ce quotient par l'expression conjuguée du dénominateur.

Remarque : $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$. (On a multiplié le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}$).

<u>Application</u>

<u>Exercice 1</u>

Simplifier $A = \sqrt{75} + 2\sqrt{147} - 9\sqrt{48}$ et $B = \sqrt{36} - 3\sqrt{72} + \sqrt{98}$

<u>Solution</u> :

On peut décomposer en produit de facteurs premiers chacun de ces nombres

$75 = 3 \times 5^2$;$147 = 7^2 \times 3$ *et* $48 = 2^4 \times 3$

$A = \sqrt{3 \times 5^5} + 2\sqrt{3 \times 7^2} - 9\sqrt{3 \times 2^4} = 5\sqrt{3} + 14\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 17\sqrt{3}$

$B = 6 - 6\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 6 - 13\sqrt{2}$

<u>Exercice 2</u>

1°) Calculer $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$ *et* $\left(1-\sqrt{5}\right)^2$

2°) On donne $X=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ et $Y=\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

a) Simplifier X *et* Y (écrire avec un seul radical)

b) Calculer $X+Y$ *et* $X-Y$

Solution

1°) on a $\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = 6+2\sqrt{5}$ *et* $\left(1-\sqrt{5}\right)^2 = 6-2\sqrt{5}$

2°)

a) $X=\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = \left|1-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-1$ *et* $Y=\sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = \left|1+5\right| = 1+\sqrt{5}$

b) $X+Y=2\sqrt{5}$ *et* $X-Y=-2$

Exercice 3

On donne $a=5-2\sqrt{6}$ *et* $b=5+2\sqrt{6}$

1°) Calculer $a\times b$. Que peut-on en déduire ?

2°) Calculer a^2 ; b^2 *et* $\dfrac{a}{b}$

3°) Vérifier que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ est un entier naturel

4°) Soit $X=\sqrt{49-20\sqrt{6}}$ et $Y=\sqrt{49+20\sqrt{6}}$

Ecrire X *et* Y avec un seul radical

Solution

1°) $a\times b = 5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 25-24=1$

A et b sont inverses, c'est-à-dire $a=\dfrac{1}{b}$

2°) $a^2 = 49-20\sqrt{6}$; $b^2 = 49+20\sqrt{6}$

$\dfrac{a}{b} = a\times\dfrac{1}{b} = a^2 = 49-20\sqrt{6}$

3°) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2}{ab}+\dfrac{b^2}{ab} = \dfrac{a^2+b^2}{ab} = a^2+b^2 = 98$; ce qui est bien un entier naturel

4°) On trouve $X=5-2\sqrt{6}$ et $Y=5+2\sqrt{6}$

Exercice 4

On considère les expressions :

$H(x)=4(x+\sqrt{3})^2-4\sqrt{3}(x+\sqrt{3})+3$ *et* $G(x)=(2x+\sqrt{3})^2$

1°) Développer, réduire et ordonner $H(x)$ *et* $G(x)$

2°) En déduire une factorisation de $H(x)$ *et* $G(x)$

Solution

1°) Développons, réduisons et ordonnons $H(x)$ *et* $G(x)$

$H(x)=4\left(x^2+2\sqrt{3}x+3\right)-4\sqrt{3}x-12+3 = 4x^2+8\sqrt{3}x+12-4\sqrt{3}x-12+3$

$H(x)=4x^2+4\sqrt{3}x+3$

$G(x)=4x^2+4\sqrt{3}x+3$

2°) $H(x)= \quad G(x)=\left(2x+\sqrt{3}\right)^2$

Exercices d'entraînement

Exercice1

1°) On considère $X = \sqrt{300} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{75}$; simplifier X en le mettant sous la forme : $X = a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers relatifs

2°) Calculer $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2$ puis écrire avec un seul radical $Y = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

Exercice 2

On donne : a = $\dfrac{2-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$ b = $3\sqrt{18} + \sqrt{128} - \sqrt{338}$ c = $\sqrt{2} - 3$

1°) Rendre rationnel le dénominateur de a

2°) simplifier b.

3°) Calculer c². En déduire que $p = \dfrac{6-\sqrt{8}}{3\sqrt{5-6\sqrt{2}}}$ est un rationnel que l'on déterminera

Exercice 3

Ecrire le plus simplement possible

B = $5\sqrt{300} + \sqrt{27} - 3\sqrt{147}$; C = $\dfrac{\sqrt{6-\sqrt{11}} \times \sqrt{6+\sqrt{11}}}{5}$

Exercice4

On donne les expressions : P = $[(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 1][(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 1]$ et q = $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

1°) Calculer p puis rendre rationnel le dénominateur de q.

2°) Montre que $\dfrac{p+q^2}{p-2q} \in ID$.

Trouver une valeur approchée de q à 10^{-2} prés par défaut sachant que $1{,}41 \prec \sqrt{2} \prec 1{,}42$

Exercice5

Ecrire le plus simplement possible

A = $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{3}} \times \sqrt{3+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$; $B = \dfrac{-3\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)}{\sqrt{45} - \sqrt{18}}$; $C = \dfrac{\left(\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{12}\right)}{\sqrt{54}}$

D = $\left(\sqrt{5} - 2\sqrt{80}\right) \times \dfrac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5} - 2\sqrt{80}\right)^2}$ E = $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} - \dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ F = $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

G = $\sqrt{76 - 2\sqrt{37 - \sqrt{\dfrac{21}{25} + \dfrac{1}{25} \times \sqrt{6 + \sqrt{103 - 2\sqrt{\dfrac{9}{4}}}}}}}$

Exercice 6

On donne un triangle ABC rectangle en A tel que AC = $\sqrt{3} - 1$ et BC = $2\sqrt{2}$.

1°) Calculer AB² puis en déduire que AB = $\sqrt{3} + 1$. En déduire l'aire du triangle ABC.

2°) Calculer $\dfrac{1}{AC}$ sans radical au dénominateur et en déduire un encadrement de $\dfrac{1}{AC}$ d'amplitude 0,01 sachant que $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$.

Exercice7

ABCD est un carré de côté x. Le point O est le milieu de [CD]. Le cercle (C) de centre O et de rayon OA coupe la demi-droite [DC) au point E. Calcule le quotient $\frac{DE}{DA}$.

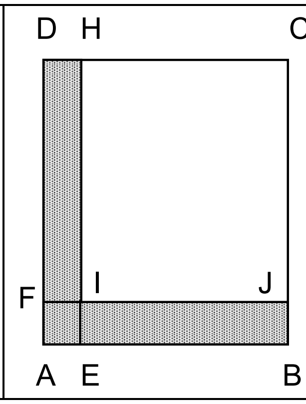
On pose $k=\frac{DE}{DA}$. Calcule k^2-k-1

Exercice 8

ABCD et CHIJ sont des carrés de côtés respectifs. $5\sqrt{3} - 1$ et $\sqrt{27}$. (voir figure ci-contre)

Calcule :

a) l'aire du carré ABCD ;
b) l'aire du carré CHIJ ;
c) la longueur AE ;
d) le périmètre du rectangle CDFJ ;
e) l'aire de la surface coloriée ;
f) le périmètre de la surface coloriée.



Chapitre 2 : Equations et Inéquations du 1er degré à une inconnue

PRÉ-REQUIS

1 - Équations du type : $ax + b = 0$ dans Q
2 - Inéquations du type : $ax + b \leq 0$ dans Q
3 -Intervalles dans Q : intersection et réunion
4 - Représentation graphique sur une droite de l'ensemble des solutions d'une inéquation.
5 - Conditions pour qu'un produit soit nul.
6 - Factorisation et Développement.
7 - Valeur absolue - Distance.

COMPÉTENCES EXIGIBLES

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations des types :
$| ax + b | = c$ et $| ax + b | = | cx + d |$.
• Résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations se ramenant au type : $ax^2 + b = 0$.
• Résoudre dans $\mathbb{R}$ des inéquations du type :
$(ax + b)(cx + d) \leq 0$.
• Résoudre dans $\mathbb{R}$ des inéquations se ramenant au type : $a x^2 + b \leq 0$.
• Résoudre des problèmes en utilisant les équations et inéquations ci-dessus.
• Vérifier qu'un nombre est solution ou non d'une équation, d'une inéquation

<u>NB</u> Il vous est souhaitable de connaître les différents de IR et de pouvoir traduire des inégalités en intervalles. Le tableau suivant vous donne la liste des intervalles de IR ? Il vous est souhaitable de les comprendre et de les mémoriser

Intervalles dans □		
écriture	intervalle	ensemble des réels x tels que
[a ; b]	fermé a, b	$a \leq x \leq b$
[a ; b[	fermé en a, ouvert en b	$a \leq x < b$
]a ; b]	ouvert en a, fermé en b	$a < x \leq b$
]a ; b[	ouvert a, b	$a < x < b$
] -∞, b]	des nombres inférieurs ou égaux à b	$x \leq b$
] -∞, b[	des nombres strictement inférieurs à b	$x < b$
[a, +∞[	des nombres supérieurs ou égaux à a	$a \leq x$
]a, +∞[	des nombres strictement supérieurs à a	$a < x$
]-∞, +∞[	de tous les réels	

<u>Rappels</u>

Exercice

Résoudre dans IR : (x + 3)(x - 2) = 0

J'applique la propriété *:*

si AB= 0 alors A = 0 ou B= 0

x + 3 = 0 ou x - 2 = 0

Soit : x = -3 ou x = 2

Les solutions de l'équation donnée sont : **-3** et **2.** On peut écrire aussi **:** S **= {-3; 2}**

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \text{ est positif} \\ -a \text{ si } a \text{ est négatif} \end{cases}$$

Remarque importante : une valeur absolue n'est jamais négative

Résultats à retenir

$|A| = |B|$ si et seulement si $A = B$ *ou* $A = -B$

$|A| = C$;avec $C \succ 0$ signifie $|A| = |C|$ et on se ramène au cas précédent

1°) $|ax + b| = c$

Si $c = 0$, on a $ax + b = 0$; *si* $a \neq 0$ *on a* $x = -\dfrac{b}{a}$

Si c < 0 , l'équation n'a pas de solution

Si c > 0 , l'équation est équivalente à $ax + b = c$ *ou* $ax + b = -c$

$a \neq 0; x = \dfrac{c-b}{a}$ *ou* $x = \dfrac{-c-b}{a}$

2°) $|ax + b| = |cx + d|$ ssi $ax + b = cx + d$ *ou* $ax + b = -cx - d$ et on poursuit la résolution

3°) $a \neq 0$, $ax^2 + b = 0$, on a $x^2 = -\dfrac{b}{a}$

Si $-\dfrac{b}{a} \prec 0$,l'équation n'a pas de solution et si $-\dfrac{b}{a} \geq 0$, l'équation admettra des solutions

Application

Exercice 1:

Résoudre dans IR, les équations suivantes

a) $|2x - 3| = 0$; b) $|-3x + 1| = -1$; c) $|2x + 5| = 4$

Solution

a) $|2x - 3| = 0$ ssi $2x - 3 = 0$, $x = \dfrac{3}{2}$; $S = \left\{ \dfrac{3}{2} \right\}$

b) $|-3x + 1| = -1$, impossible $S = \phi$

c) $|2x + 5| = 4$ ssi $2x + 5 = 4$ *ou* $2x + 5 = -4$ on trouve $x = -\dfrac{1}{2}$ *ou* $x = -\dfrac{9}{2}$

$S = \left\{ -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{2} \right\}$

Exercice 2

Résoudre dans IR l'équation : |2x - 1| = |x + 4|

Solution

|2x - 1| = |x + 4| équivaut à :

2x - 1 = x + 4 ou 2x - 1 = -x - 4

soit : x = 5 ou x = -1 donc S = {-1 ; 5}

Exercice 3

Résoudre dans IR : $4x^2 = 9$

Solution

$4x^2 - 9 = 0$ soit $(2x)^2 - 3^2 = 0$

Soit $(2x - 3)(2x + 3) = 0$

Donc $2x - 3 = 0$ ou $2x + 3 = 0$

On a $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$ $S = \{ \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \}$

On pouvait aussi procéder ainsi : $4x^2 = 9$ ssi $x^2 = \frac{9}{4}$ équivaut à: $x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ ou

$x = -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2}$

Les solutions de cette équation sont : $\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2}$. On peut écrire aussi $S = \{ \frac{3}{2} ; -\frac{3}{2} \}$

Exercice 4 Résoudre dans IR : $3x^2 + 7 = 0$

Solution

je transpose (+7) puis je divise chaque membre par 3 et j'obtiens :

$x^2 = -\frac{7}{3}$ égalité impossible car dans IR un carré n'est jamais négatif

L'équation : $3x^2 + 7 = 0$ n'admet pas de solution dans IR.

On écrit : $S = \emptyset$

Méthode

Pour résoudre une équation se ramenant à une équation produit on peut :

1 - Transposer (en général) tous les termes dans le 1° membre pour avoir 0 dans le 2°.

2 - Factoriser le 1^er^ membre

3 - Utiliser la propriété : "Un produit est nul" équivaut à "Au moins un de ses facteurs est nul" c'est-à-dire: $AB= 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B= 0$

4 - Écrire l'ensemble S des solutions

Remarque

Pour certaines équations, on développe puis on réduit avant d'appliquer la méthode.

INEQUATIONS PRODUIT DU TYPE $(ax + b)(cx + d) \leq 0$.

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

Activité

2) Résous dans IR :
$2 - x = 0$; $2 - x < 0$; $2 - x > 0$

3) Utilise les résultats obtenus pour compléter le tableau ci-dessous en remplaçant chaque point d'interrogation par la valeur ou bien le signe positif (+) ou négatif(-) qui convient

Valeurs de x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de 2 - x		?	?	?	

4) Résous dans IR :
$2 + x = 0$; $2 + x < 0$; $2 + x > 0$

5) Utilise les résultats obtenus au 3) pour compléter le tableau ci-dessous en remplaçant chaque point d'interrogation par la valeur ou le signe positif (+) ou négatif (-) qui convient

Valeurs de x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de 2 + x		?	?	?	

TRACE ÉCRITE

Exemple Résous dans IR : $(-x + 1)(2x + 5) > 0$

Il suffit de résoudre $2x + 5 < 0$ et $-x + 1 < 0$

On peut aussi chercher :

$2x + 5 = 0$ et $-x + 1 = 0$

Ceci peut être présenté ainsi :

$-x + 1 = 0$ $x = 1$	$-x + 1 < 0$ $x > 1$ $x \in]1 ; +\infty[$
$2x + 5 = 0$ $x = -\frac{5}{2}$	$2x + 5 < 0$ $x < -\frac{5}{2}$ $x \in]-\infty ; -\frac{5}{2}[$

d'où le tableau suivant :

Valeurs de x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $-x + 1$		+		+	0	-	
Signe de $2x + 5$		-	0	+		+	
Signe de $(-x+1)(2x+5)$		-	0	+	0	-	

On a alors $(-x - 1)(2x + 5) > 0$

équivaut à $x \in]-\frac{5}{2} ; 1[$

Exercices d'entraînement

Exercice 1

A l'aide d'un tableau de signes résoudre dans IR chacune des inéquations suivantes.

$x(x + 2) \geq 0$; $2x(x - 1) \leq 0$; $x^2 + 5 < 0$; $(2x + 1)(x - 3) > 0$; $(3x - 1)(x + 2) < 0$

$x^2 - \frac{4}{9} < 0$; $x^2 + 16 \geq 0$

Exercice2

On considère les expressions suivantes :

$A(x) = (2x-6)\,(-x+2) - (4x-12)\,(-3x+1) - 5(3x^2 - 9x)$ et

$B(x) = x^2 - 6x + 9 - (2x-6) - (3-x)\,(x+2)$

1°) Factoriser $A(x)$ et $B(x)$

Soit l'expression $C(x) = (x-3)\,(2x-3)$

2°) Résoudre dans IR, $C(x) \leq 0$

On donne $D(x) = \dfrac{-5x(x-3)}{(x-3)\,(2x-3)}$

3°) Donner la condition d'existence de $D(x)$ puis simplifier $D(x)$

Soit $E(x) = \dfrac{-5x}{2x-3}$

4°) Calculer $E\left(\sqrt{2}\right)$ en rendant rationnel le dénominateur

5°) Résoudre $|E(x)| = 2$

<u>Exercice 3</u>

On donne f(x)= (3x – 2)(x – 4)+ x(x + 2)

Montrer que f(x) + 1 = $(2x - 3)^2$. En déduire une factorisation de f(x). Résoudre dans R : f(x) = 0 et f(x) $\leq$ x – 1 .

On donne q(x) = $\dfrac{(4x+1)(x-2)}{f(x)}$

Trouver la condition d'existence de q. simplifier q(x).

Calculer q(1 - $\sqrt{3}$). Ecrire le résultat avec un dénominateur rationnel.

<u>Exercice 4</u>

On donne les expressions $A(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{1}{2}$ et $B(x) = \dfrac{1}{2}(4x-3)^2 - A(x)$

Calculer 2A(x) puis en déduire une factorisation de A(x).

Factoriser B(x) puis résoudre dans IR l'inéquation B(x) > 0.

Donner un encadrement au centième prés de B($\sqrt{2}$) sachant que : 1,414 < $\sqrt{2}$ < 1,415.

<u>Exercice 5</u>

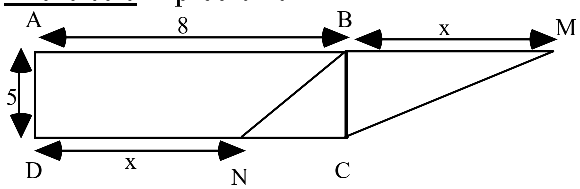
Résoudre dans IR les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} 8 - x \leq 3x \\ -3x \leq 9 - 5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 15 + x \leq 6x \\ 6x - 10 \leq 5 + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12 + 7x \leq 13x \\ 16 + x \geq 8x - 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2 \leq 3x - 4 \\ 2 + 8x \geq 7x + 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \leq 10 + x \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - 11 \geq -5x + 13 \\ 4x + 23 \geq 8 + x \end{cases}$

Exercice 6 problème



Sur la figure ci-dessus ABCD est un rectangle
M et N sont tels que :
BM = DN = x., $N \neq D$ et $N \neq C$.
1°) Exprimer l'aire du triangle BCM en fonction de x.
2°) Exprimer l'aire du triangle BCN en fonction de x.
3°) Exprimer l'aire du trapèze ABND en fonction de x.
4°) Trouver les valeurs de x telles que :
a) L'aire de BCN soit inférieure à celle de BCM.
b) La différence de l'aire de BCM et celle de BCN soit inférieure à l'aire du trapèze ABND.

<u>Chapitre3</u> : <u>Equations et systèmes d'équations du 1^er^ degré à deux inconnues</u>

PRÉ-REQUIS

Représentation graphique d'une droite dans le plan.

<u>COMPÉTENCES EXIGIBLES</u>

• Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une équation du premier degré à deux inconnues.
• Vérifier qu'un couple de réels est solution ou non d'une équation à deux inconnues du type indiqué
• Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations à deux inconnues du type indiqué par substitution, par addition, par comparaison.
• Reconnaître la position relative des droites dont les équations interviennent dans le système.
• Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations à deux inconnues du type indiqué

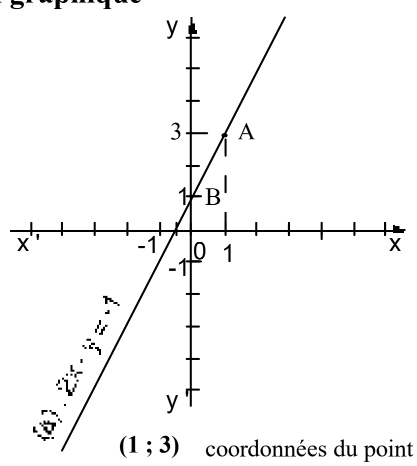
<u>1°) Equation à deux inconnues du type</u> : $ax + by + c = 0$ où les inconnues sont x et y.

Vocabulaire

$2x - y + 1 = 0$ est une équation du 1er degré à deux inconnues;
Si l'on remplace x par 1 on obtient :
$2x1 - y + 1 = 0$ et par suite : $y = 3$.
On dit que le couple (1 ; 3) est une solution de l'équation : $2x - y + 1 = 0$.

Vérifie que (1; 0) est aussi une solution de l'équation : $2x - y + 1 = 0$.

Représentation graphique



(1 ; 3) coordonnées du point A
est une solution de $2x - y = -1$

Méthode graphique

Pour trouver graphiquement les solutions de l'équation du 1er degré à deux inconnues $ax + by + c = 0$, on trace dans un repère la droite (□) d'équation $ax + by + c = 0$.

Remarque

Une équation du 1er degré à deux inconnues admet une infinité de solutions.

2°) <u>Systèmes d'équations à deux inconnues du type</u> :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

a) <u>Méthodes de résolution : substitution ; comparaison ; addition</u>

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 200 & (1) \\ x + y = 1600 & (2) \end{cases}$$

Résoudre le système, c’est trouver l’ensemble des solutions communes aux deux équations.

<u>Méthode par substitution</u>

J’exprime y en fonction de x dans l’équation (2) ci dessus.

J’obtiens : $y = 1600 - x$

Je remplace y par 1600 - x dans (1), j’obtiens

L’équation $2x - 3(1600 - x) = 200$

Que je résous : $2x - 3(1600 - x) = 200$

Équivaut à $2x - 4800 + 3x = 200$

Équivaut à $2x + 3x = 200 + 4800$

Équivaut à $5x = 5000$

Équivaut à $x = 1000$

Je remplace x par cette valeur dans

$y = 1600 - x$

J’obtiens : $y = 1600 - 1000$

C’est-à-dire $y = 600$

Je conclus que le couple de réels (1000 ; 600) est la solution du système.

On note $S = \{(1000,600)\}$

Méthode par substitution

1 - Substituer y en fonction de x
2 - Remplacer dans la deuxième équation y par son expression en fonction de x
3 - Résoudre l'équation en x obtenue
4 -Remplacer dans l'expression de y, x par sa valeur (si elle existe) pour obtenir une valeur de y
5 - Le couple solution est (x,y).

Remarque : on peut aussi substituer x en fonction de y.

<u>Méthode par combinaison ou par addition</u>

$$\begin{cases} 2x - 3y = 200 & (1) \\ x + y = 1600 & (2) \end{cases}$$

Je multiplie chaque membre de (2) par 3.

J’obtiens le système $\begin{cases} 2x - 3y = 200 \\ 3x + 3y = 4800 \end{cases}$

J’additionne membre à membre les deux équations et j'obtiens : $2x - 3y + 3x + 3y = 200 + 4800$

Je résous cette équation

$2x + 3x = 200 + 4800$ équivaut à $5x = 5000$

Soit $x = 1000$

Je remplace x par cette valeur dans (1). J’obtiens : $1000 + y = 1600$ soit $y = 600$

Je conclus que le couple de réels (1000 ; 600) est la solution du système.

On note $S = \{(1000,600)\}$

Méthode par addition

1° Choisir des nombres permettant d'annuler par sommation membre à membre les x ou les y.
2° Multiplier les équations par ces nombres
3° Additionner membre à membre les nouvelles équations obtenues
4° Résoudre l'équation en x (ou en y)
5° Remplacer la valeur trouvée pour x (respectivement y) dans une des équations pour obtenir une valeur de y (respectivement x)
6° Vérifier la solution obtenue
7° L e nombre (x,y) est la solution.

<u>Méthode par comparaison</u>

$$\begin{cases} 2x - 3y = 200 & (1) \\ x + y = 1600 & (2) \end{cases}$$

J'exprime y en fonction de x à partir de (1) et (2); j'obtiens : $\begin{cases} y = \dfrac{2x - 200}{3} \\ y = 1600 - x \end{cases}$

D'où je tire l'équation :

$\dfrac{2x - 200}{3} = 1600 - x$

Je résous cette équation :

$\dfrac{2x - 200}{3} = 1600 - x$

Équivaut à 2x - 200 = 4800 - 3x

Équivaut à 2x + 3x = 4800 + 200

Équivaut à 5x = 5000

Équivaut à x = 1000

Je remplace x par cette valeur dans y = 1600 - x ; j'obtiens : y = 1600 - 1000

C'est-à-dire y = 600

Je vérifie en remplaçant x et y dans les deux équations.

Je conclus que le couple de réels (1000 ; 600) est la solution du système.

On note $S = \{(1000,600)\}$

Méthode par comparaison

Exprimer y en fonction de x (respectivement x en fonction de y) dans les deux équations

Obtenir une équation en x (respectivement y) à partir des deux équations

Résoudre cette équation en x (respect y)

Reporter la valeur de x (respect y) pour obtenir y (respect x)

Le couple (x, y) est la solution

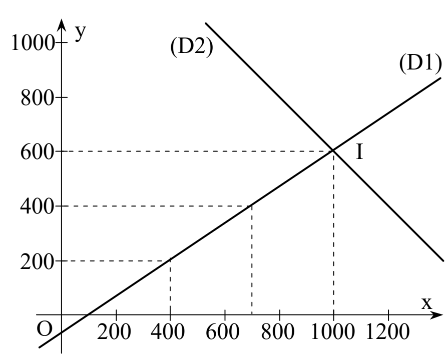
Remarque : La solution peut être notée S = {(x,y)}

<u>b) Méthode graphique</u>

On trace dans un même repère orthonormé les droites (D1) et (D2) d'équations respectives

2x - 3y = 200 et x + y = 1600

(Prends 1 cm pour 200)



Les droites (D_1) et (D_2) se coupent au point I de coordonnées (1000 ; 600)

Méthode graphique

On trace les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives :

(D1) : 2x - 3y = 200

(D2) : x + y = 1600

Les coordonnées du point I d'intersection (1000 ; 600) constituent la solution du système.

Remarques :

- Si les droites sont sécantes, il y une seule solution (coordonnées du point d'intersection).
- Si les droites sont strictement parallèles, il n'y a pas de solution (pas de point d'intersection).
- Si les droites sont confondues, il y a une infinité de solutions (l'ensemble des coordonnées des points de la droite.)

Application

Exercice 1

Résoudre dans IR^2, les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x - y = -4 & (1) \\ -x + y = 3 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 1 & (1) \\ 2x + y = 4 & (2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - \frac{3}{2}y = 2 & (1) \\ 2x - 3y = 4 & (2) \end{cases}$

Solution

a) $\begin{cases} 2x - y = -4 & (1) \\ -x + y = 3 & (2) \end{cases}$

N B : Puisqu'on n'a pas imposé une méthode de résolution pour cet exercice, l'élève est libre d'utiliser la méthode la plus opportune

Pour le 1er système, la méthode par addition est mieux indiquée ; ainsi si on additionne membre à membre les deux équations on obtient :

(1) + (2) = $2x - y - x + y = -4 + 3$, soit $x = -1$

On remplace x par -1 dans (2) et on obtient : - (-1) + y = 3 , soit 1 + y = 3 , donc y = 2

$S = \{(-1{,}2)\}$

(C'est le cas où les deux droites sont sécantes)

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 1 & (1) \\ 2x + y = 4 & (2) \end{cases}$

On peut multiplier chaque membre de (1) par - 2, on obtient : $\begin{cases} -2x - y = -2 & (1) \\ 2x + y = 4 & (2) \end{cases}$

On additionne membre à membre les deux équations et on obtient :-2x –y +2x + y = 2 ; soit 0 = 2 , ce qui est impossible

$S = \phi$

(C'est le cas où les deux droites sont strictement parallèles)

c) $\begin{cases} x - \frac{3}{2}y = 2 & (1) \\ 2x - 3y = 4 & (2) \end{cases}$

On peut multiplier chaque membre de (1) par 2 et on obtient le système suivant :

$\begin{cases} 2x - 3y = 4 & (1) \\ 2x - 3y = 4 & (2) \end{cases}$

On constate que dans (1) et (2) on obtient la même équation, c'est la même droite, les deux droites sont confondues, on a ainsi une infinité de solutions
Les solutions peuvent se présenter ainsi :

On exprime x en fonction de y, $2x-3y=4$, $x=\dfrac{3y+4}{2}$

$$S=\left\{\left(\frac{3y+4}{2},y\right)y\in IR\right\}$$

Ou bien

On peut aussi exprimer y en de x, 2x – 3y = 4, $y=\dfrac{2x-4}{3}$ et $S=\left\{(x,\dfrac{2x-4}{3}),x\in IR\right\}$

Ou bien encore :

$S=\{(x,y) \in IR^2 \quad tels \quad que: \ 2x-3y=4\}$

Remarque importante : la grande difficulté des élèves se situe à ce niveau, la plupart mettent $\underline{S=IR}$, c'est qui est faux car cela voudrait dire que toutes les droites sont confondues avec IR

N B

Il arrive parfois et même au B F E M qu'on propose à résoudre des systèmes de trois équations à deux inconnues, mais cela ne doit pas poser de problème car résoudre un tel système revient à voir si les trois droites sont concourantes ou non

Méthode

On choisit deux équations parmi les trois et on résout le système à deux équations.
-Si on trouve l'ensemble vide, pas la peine de continuer on peut conclure directement que $S=\phi$
- Si on trouve une infinité de solutions, on prend l'une des équations et on résout le système en le complétant avec l'autre équation non prise dans la résolution du 1^er^ système
- Si on trouve un couple de réels, on vérifie est-ce que ce couple est solution de l'équation restante. S'il est solution alors ce couple est solution du système à trois équations et s'il n'est pas solution alors $S=\phi$

Mais pour la classe de troisième, en général les deux types d'exemples de systèmes de trois équations à deux inconnues qu'on pourrait poser aux élèves sont les suivants :

Exemple1

Résoudre dans IR^2, le système $\begin{cases} 2x-y=0 & (1) \\ x-2y=-3 & (2) \\ -3x+y=-1 & (3) \end{cases}$

Solution

Pour cet exercice il est plus judicieux de résoudre le système composé des équations (1) et (3) car il suffira d'additionner membre à membre les deux équations et on obtient directement la valeur de x

Résolvons donc (1) et (3) $\begin{cases} 2x-y=0 & (1) \\ -3x+y=-1 & (3) \end{cases}$

Après addition membre à membre on obtient $x=1$ et on remplaçant x dans (1) on obtient $y=2$

On vérifie maintenant si le couple de réels (1,2) vérifie l'équation (2).

En remplaçant x et y par leurs valeurs respectives dans (2)
On obtient : $1-2\times 2=1-4=-3$
L'équation (2) est vérifiée par le couple de réels (1,2) , qui est donc solution du système initial
$S=\{(1,2)\}$

Les trois droites sont concourantes

Exemple 2

Résoudre dans IR², le système suivant : $\begin{cases} 3x+y=-3 & (1) \\ -y+x=-1 & (2) \\ 2x+3y=4 & (3) \end{cases}$

Pour cet exemple l'élève doit faire beaucoup attention, avant de penser à résoudre il doit au préalable permuter les positions de x et y dans (2) et on obtient : $\begin{cases} 3x+y=-3 & (1) \\ x-y=-1 & (2) \\ 2x+3y=4 & (3) \end{cases}$

On résout le système $\begin{cases} 3x+y=-3 & (1) \\ x-y=-1 & (2) \end{cases}$

Par la méthode d'addition on obtient : $x=-1$ et $y=0$ et on vérifie maintenant si ce couple de réels vérifie l'équation (3)
$2\times -1+3\times 0=-2+0=-2$ Et $-2\neq 4$. Le couple (-1,0) ne vérifie pas la troisième équation
$S=\phi$

Les trois droites ne sont pas concourantes

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Résous chacun des systèmes suivants par la méthode de substitution.

a) $\begin{cases} x - y = \dfrac{3}{4} \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = -4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 & (1) \\ 3x - y - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Exercice 2

Résous chacun des systèmes suivants par la méthode de combinaison.

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ 5x + 3y = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 29 \\ 3x - 4y = -14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y\sqrt{3} = \sqrt{2} \\ 4x + y\sqrt{3} = 1 \end{cases}$

Exercice 3

Résous chacun des systèmes suivants par la méthode de comparaison.

a) $\begin{cases} 2y + x = 5 \\ -y + 7 = x + 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -y + 4 = x - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Exercice 4

Résous graphiquement les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x + y = 2 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Exercice 5

Résous chacun des systèmes suivants par la méthode de ton choix.

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 7y = 3 \\ 5x + 6y = -12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -6x + 2y - 7 = 0 \\ y - 3x = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

Exercice 6

Résous les systèmes suivants par la méthode la plus indiquée.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 7 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{5} = 5 \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{2} = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{4}y = 11 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x\sqrt{2} - 5y\sqrt{3} = 17 \\ x\sqrt{6} + y = \sqrt{3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ x + 5y - 13 = 0 \\ -3x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -x + y - 3 = 2 \\ -2x + 2y + 1 = 7 \\ 3x - 2y - 4 = 3 \end{cases}$

Exercice 7

Un disquaire a vendu 28 coffrets les uns à 3 600 F, les autres à 4 500 F. Pour cette vente il a encaissé 103 500 F.

Combien a-t-il vendu de coffrets de chaque sorte ?

Exercice 8

1°) Résoudre dans IR^2 ; $\begin{cases} 2x + y = 55 \\ 4x + 3y = 125 \end{cases}$

Après leur « B.F.EM Blanc », un groupe d'élèves d'une classe de 3^{eme} pour se distraire, décide d'aller à une soirée dansante .Le prix du billet d'entrée est 1000^f pour un garçon et 500^f pour une fille .Pour le groupe, le prix total des billets d'entrée est 27500^f
Ce même groupe assiste le lendemain à un concert Le prix d'une place est 2000^f pour un garçon et 1500^f pour une fille. Le prix total pour le groupe est 62500^f
2°) Déterminer le nombre de garçons et de filles qui composent ce groupe d'élèves

Chapitre 4 : Statistiques

PRÉ-REQUIS

Vocabulaire de base.
Organisation des données.
Classement des données statistiques (séries brutes, séries ordonnées).
Calcul des effectifs, fréquences, pourcentages et moyennes.
Détermination de valeurs d'un caractère et des effectifs d'une série statistique à l'aide d'un diagramme, du mode.
Représentation (diagramme en bâtons, à bandes, circulaires, semi-circulaires).
Interprétation de données statistiques.
Projection orthogonale
Thalès

COMPÉTENCES EXIGIBLES

- Regrouper en classes une série brute.
- Déterminer les tableaux des effectifs et des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes.
- Construire un histogramme
- Interpréter un graphique représentant une série statistique.
- Construire un diagramme cumulatif.
- Déterminer la moyenne, la classe modale.
- Déterminer, graphiquement et par le calcul, la médiane.

I- Vocabulaire

1) Population

L'ensemble sur lequel on recueille les données est appelé population.

2) Individu

Tout élément de la population est appelé individu.

3) Echantillon

Un échantillon est un sous ensemble de la population.

Remarque :
Lorsque l'effectif de l'échantillon est n, on dit qu'on a un échantillon de taille n.

4) Caractères

Un caractère est toute information qu'on peut étudier sur la population.

Exemple 1: considérons l'ensemble des élèves d'une classe.
L'ensemble des élèves de la classe est une population.
Chaque élève de la classe est un individu
Un sous ensemble d'élèves de la classe forme un échantillon
Sur cette population, on peut étudier :

- le caractère « âge »
- le caractère «taille »
- le caractère «nationalité »

Exemple 2: considérons l'ensemble des entreprises du Sénégal en 2000.
L'ensemble de ces entreprises est une population.
Chaque entreprise est un individu
Un sous ensemble d'entreprises forme un échantillon
Sur cette population d'entreprises, on peut étudier

- le caractère « nombre d'employés »
- le caractère « chiffre d'affaires de l'année 2000 »

Remarque 1
Un caractère est quantitatif ou qualitatif
a) Un caractère est quantitatif, lorsqu'il est mesurable.

Exemple : Sur une population d'étudiants, les caractères taille en centimètres et poids en kg sont quantitatifs.

b) Un caractère est qualitatif, lorsqu'il n'est pas mesurable

Exemple : Sur une population d'étudiants, les caractères «nationalité » et «situation matrimoniale » sont qualitatifs.

Remarque 2

Un caractère quantitatif est discret ou continu.

i) Un caractère est discret lorsqu'il prend des valeurs isolées

ii) Un caractère est continu lorsqu'il est susceptible de prendre toutes les valeurs d'un intervalle.

Exemple : Sur une population d'étudiants, le caractère « taille »

Remarque : dans le cadre du programme, on ne parlera pas explicitement de caractère continu.

5) Modalité

On appelle modalité toute valeur possible d'un caractère.

Exemple 1 :

Sur une population d'étudiants, les modalités du caractère « mention obtenue au bac » sont :

Passable, Assez Bien, Bien, Très Bien.

Exemple 2 : Considérons une population formée de quatre enfants d'une même famille, âgés respectivement de 12 ; 8 ; 3 et 1 ans. Chacune de ces valeurs est une modalité du caractère âge.

Remarque

Dans le cas d'un caractère continu, les modalités sont appelées des classes. Une classe est un intervalle du type [a ; b [, il est obtenu par regroupement des valeurs du caractère.

On admet que le centre d'une classe [a ; b[est $c = \frac{a+b}{2}$ et l'amplitude est égale à b - a.

<u>i) Effectif d'une modalité</u>

On appelle effectif d'une modalité M, le nombre d'individus pour lesquels le caractère prend la valeur M.

On appelle effectif d'une classe, le nombre d'individus pour lesquels le caractère prend une valeur appartenant à cette classe

<u>ii) Fréquence d'une modalité</u>

Soit N l'effectif total d'une population. Si n_i représente l'effectif d'une modalité M_i alors la fréquence de cette modalité est $f_i = \frac{n_i}{N}$ ou $f_i = \frac{100 \times n_i}{N}$ % lorsqu'elle est exprimée en pourcentage.

Soit N l'effectif total d'une population. Si n_i représente l'effectif d'une classe $[a_i ; b_i[$ alors la fréquence de cette classe est $f_i = \frac{n_i}{N}$ ou $f_i = \frac{100 \times n_i}{N}$ % lorsqu'elle est exprimée en pourcentage.

6) <u>Effectifs cumulés</u>

Soit X une variable statistique à caractère quantitatif dont les modalités sont notées dans l'ordre croissant $x_1, x_2, .., x_n$

On appelle effectif cumulé croissant de la modalité x_i, le nombre d'individus pour lesquels X prend au plus la valeur x_i.

On appelle effectif cumulé décroissant de la modalité x_i, le nombre d'individus pour lesquels X prend au moins la valeur x_i.

7) <u>Fréquences cumulées</u>

Soit X une variable statistique à caractère quantitatif dont les modalités sont notées dans l'ordre croissant $x_1, x_2, ..., x_n$

On appelle fréquence cumulée croissante de la modalité x_i, le rapport de l'effectif cumulé croissant de x_i par l'effectif total.

On appelle fréquence cumulée décroissante de la modalité x_i, le rapport de l'effectif cumulé décroissant de x_i par l'effectif total.

Remarque ;

Dans le cas où les modalités sont des classes, on définit de même les effectifs et fréquences cumulés

II- Tableaux

1) Tableaux statistiques

Un tableau statistique permet de rendre compte des modalités, des effectifs et des fréquences.

Modalités	x_1	x_2	x_3	...	x_p	Total
Effectifs	n_1	n_2	n_3	...	n_p	N
Fréquences	f_1	f_2	f_3	...	f_p	1

Remarque : Série statistique et distribution statistique

Soit X une variable discrète dont les modalités notées dans l'ordre croissant x_1 ,x_2,.. .,x_p, sont d'effectifs respectifs n_1, n_2, n_3,....,n_p et de fréquences respectives f_1, f_2, f_3.. .., f_p.

On appelle série statistique, l'ensemble noté G_x défini par : $G_X = \{(x_i, n_i); 1 \leq i \leq p\}$.

On appelle distribution, l'ensemble noté D_x défini par : $D_X = \{(x_i, f_i); 1 \leq i \leq p\}$.

Dans le cas d'une variable continue dont les classes sont $[a_i,b_i[$, $1 \leq i \leq p$, d'effectifs respectifs n_1, n_2, n_3... .,n_p et de fréquences f_1, f_2, f_3....,f_p.

La série statistique est $G_X = \{(c_i ; n_i) ; 1 \leq i \leq p\}$ et la distribution est $D_X = \{(c_i, f_i) ; 1 \leq i \leq p\}$, où c_i est le centre de la classe $[a_i,b_i[$.

2) Tableau cumulatif

Un tableau cumulatif, permet de rendre compte des modalités, des effectifs et des fréquences cumulés

Modalités	x_1	x_2	x_3	...	x_p	Total
Effectifs	n_1	n_2	n_3	...	n_P	N
Fréquences	f_1	f_2	fa	...	f_p	1
E.C.C.	n_1	$n_1+ n_2$	$n_1+ n_2+ n_3$	...	N	
E.C.D.	N	$N-n_1$	$N-n_1 - n_2$	...	n_p	
F. C. C.	f_1	f_1+f_2	$f_1+f_2+f_3$	...	1	
F.C.D.	1	$1 - f_1$	$1- f_1 - f_2$	...	f_P	

Exemple

Enoncé : Le tableau ci-dessous représente la répartition des notes d'une classe à l'issue d'un devoir surveillé de mathématiques. Dresser le tableau des effectifs cumulés, et calculer les fréquences.

Classes	[0 ;2 [	[2 ; 4 [	[4 ; 6 [	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ;12[	[12 ;14[	[14 ;16[
N_i	11	25	18	10	6	5	3	2

Correction

Classes	[0 ;2 [	[2 ; 4 [	[4 ; 6 [	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ;12[	[12 ;14[	[14 ;16[
N_i	11	25	18	10	6	5	3	2
f_i	0,14	0,31	0,23	0,12	0,08	0,06	0,04	0,02
ECC	11	36	54	64	70	76	78	80
ECD	80	69	44	26	16	10	5	2

III)- Paramètres de position

a) Le mode

Le mode d'un caractère est la modalité qui a l'effectif le plus élevé. C'est la valeur qui a la plus grande fréquence.

Dans le cas où les modalités sont des classes, on parle de classe modale et on prend comme mode le centre de cette classe modale.

Remarque
Le mode est facile à déterminer et d'interprétation rapide, mais il n'est pas souvent unique et n'existe même pas parfois.

b) La médiane
C'est toute valeur qui partage la série statistique ordonnée en deux séries de même effectif.
Exemple 1 (Cas discret)
Soit la série de données : 4 - 4 - 5 - 6 - 6.-7 -8- 8-9- 9-10 La médiane est 7.
Exemple 2 (Cas discret) Soit la série de données : *4 - 4 - 5 - 6 -* 6.-7 -8- 8-9- 9-10-12
On admet que la médiane est égale à : $\frac{7+8}{2} = 7{,}5$

Exemple 3 (Cas où on a des classes)
On donne le tableau suivant

Classes	[2;4[	[4;6[	[6; 10[	[10; 14[	[14 ; 20[	[20 ; 25[	Total
Effectifs	10	12	32	40	60	26	180
E. C. C.	10	22	54	94	154	180	

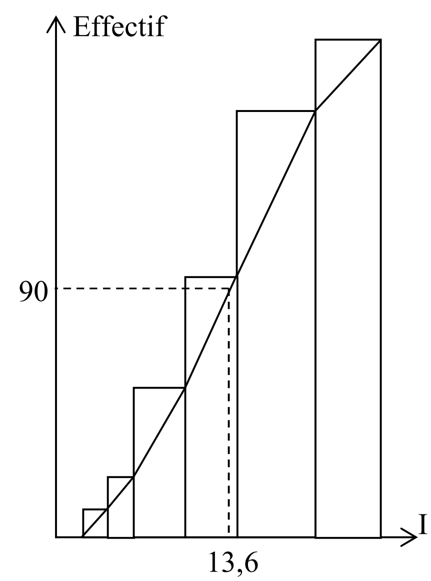
Déterminer la médiane suivant la méthode par interpolation affine et la méthode graphique.
Dans le polygone des effectifs cumulés croissants, la médiane est l'abscisse du point d'ordonnée $\frac{N}{2}$
Dans l'exemple ci-dessus, $\frac{N}{2}$ est égal à 90.

Méthode par interpolation affine
Pour trouver la médiane, on repère d'abord l'intervalle médian. L'intervalle médian est le premier intervalle dont l'effectif cumulé croissant est au moins égal $\frac{N}{2}$

On applique la formule $\frac{Me-a_m}{\frac{N}{2}-N_{m-1}} = \frac{b_m-a_m}{N_m-N_{m-1}}$
pour déterminer la médiane Me où :
$[a_m ; b_m[$ est l'intervalle médian ; N_{m-1} l'effectif cumulé croissant de la classe $[a_{m-1} ; b_{m-1}[$
N_m l'effectif cumulé croissant de la classe $[a_m ; b_m[$

Dans l'exemple ci-dessus, l'intervalle médian est [10 ; 14[, en appliquant la formule on a
$\frac{Me-10}{90-54} = \frac{14-10}{94-54}$ D'où Me =13,

Polygone des effectifs cumulés croissants



Méthodes graphiques
Elles consistent à déterminer la médiane par simple lecture graphique.

- **Méthode 1**

On trace le polygone des effectifs cumulés croissants ou le polygone des effectifs cumulés décroissants, puis la droite d'équation y = $\frac{N}{2}$. L'abscisse du point d'intersection des deux courbes correspond à la médiane.

- **Méthode 2**

On trace le polygone des fréquences cumulées croissantes ou le polygone des fréquences cumulées décroissantes, puis la droite d'équation y = 0,5 . L'abscisse du point d'intersection des deux courbes correspond à la médiane.

- **Méthode 3**

On trace le polygone des effectifs cumulés croissants et le polygone des effectifs cumulés décroissants. L'abscisse du point d'intersection des deux courbes correspond à la médiane.

- **Méthode 4**

On trace le polygone des fréquences cumulées croissantes et le polygone des fréquences cumulées décroissantes. L'abscisse du point d'intersection des deux courbes correspond à la médiane.

c) Moyenne arithmétique

Soit X une variable discrète dont les modalités notées dans l'ordre croissant $x_1, x_2, \ldots, x_p$, sont d'effectifs respectifs

$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p$ et de fréquences respectives f_1, £$_2$,$f_3, \ldots, f_p$.

La moyenne arithmétique de cette série est le réel noté en général $\overline{x}$ et défini par la formule

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{p} n_i x_i \ = \sum_{1}^{p} f_i x_i$$

Dans le cas où les modalités sont des classes : $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{p} c_i n_i$ où les c_i sont les centres des classes.

La moyenne est la valeur autour de laquelle tournent toutes les valeurs de la série.

Disposition pratique pour le calcul de la moyenne

x_i	4	5	6	7	9	Total
n_i	15	5	5	10	20	55
n_i x_i	60	25	30	70	180	360

$$\overline{x} = \frac{360}{55} = \frac{72}{11}$$

Remarques

1) Le mode, la médiane et la moyenne sont des paramètres de position.
2) Insuffisance des caractéristiques de position

Soit la série X : 10 ; 30 ; 30 ; 50 ; 50 ; 70 ; 70 ; 90 ; 90

Et la série Y : 48 ; 48 ; 49 ; 50 ; 50 ; 50 ; 51 ; 51 ; 52

Ces 2 séries ont le même mode, la même médiane et la même moyenne pourtant la distribution des valeurs de Y est plus étroite que celle de X.

Activité1

On considère la série ordonnée de notes suivante:

6 ;6 ;6 ;7 ;7 ;7 ;9 ;10 ;11 ;12 ;14 ;16

Quelle est la note qui sépare la série en deux parties de même effectif ?

Activité 2

Soit la série ordonnée suivante :

6 ; 6 ; 8 ; 11 ; 12 ; 14 ; 14 ; 15 ; 16 ; 16

Y a t'il une note qui sépare la série en deux parties de même effectif ?

Activité 3

A partir du tableau ci-dessous, trace le diagramme des effectifs cumulés croissants.

Taille	[1,60;1,65	[[1,65;1,7 0	[[1,70;1,75	[1,75;1,80	[1,80;1,85[
Effectif	2	4	10	8	2
E. C.C	2	6	16	24	26
E.C.D	26	24	20	10	2

N étant l'effectif total, cherche graphiquement l'antécédent de N/2.

Trouve l'image de N/4, celle de N/2 et de 3N/4. Interprète le résultat

Médiane

Définition : La médiane d'une série statistique est une valeur réelle telle que 50% des valeurs de la série lui soient supérieures ou égales.

<u>Médiane d'un caractère discret</u>

a) Effectif total impair

$\underbrace{6;6;6;7;7;7;}_{\text{6 notes}}\ \boxed{9}\ \underbrace{;9;10;11;12;14;16}_{\text{6 notes}}$

médiane

La note 9 qui sépare les autres notes en 2 groupes de même effectif est la médiane

b) <u>Effectif total pair</u>

médiane

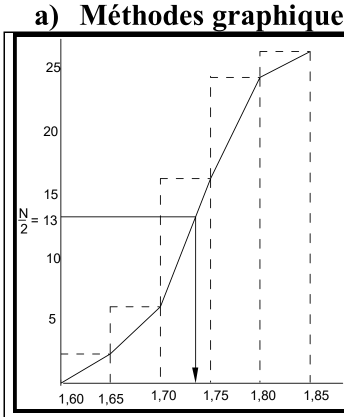
$\underbrace{6;6;8;11;12}_{\text{5 notes}}\quad 14:\underbrace{14;15;16:16}_{\text{5 notes}}$

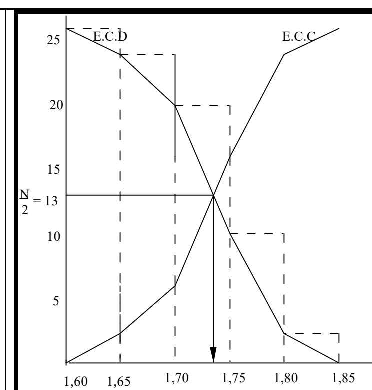
Toute note comprise entre 12 et 14 est une note médiane ;]12 ; 14 [est l'intervalle médian.

On prend parfois le centre de l'intervalle médian (ici 13) pour médiane.

<u>Médiane dans le cas continu</u>

a) Méthodes graphiques





Méthodes
La médiane s'obtient :

- en prenant l'abscisse du point d'intersection du diagramme des effectifs cumulés croissants et de celui des effectifs cumulés décroissants
- ou en prenant l'abscisse du point d'ordonnée N/2 sur le diagramme des effectifs cumulés croissants ou celui des effectifs cumulés décroissants.

Remarque
Les valeurs obtenues par la méthode graphique sont des valeurs approchées de la médiane et peuvent être différentes selon la méthode utilisée.

Quartiles
Les modalités correspondant à N/4, 2N/4 = N/2 et 3N/4 sont appelés les quartiles respectivement première quartile, deuxième quartile ou médiane et troisième quartile.
Le premier quartile sépare l'effectif total N en deux parties d'effectifs respectifs $\frac{1}{4}N$ et $\frac{3}{4}N$.

Le troisième quartile sépare l'effectif total N en deux parties d'effectifs respectifs $\frac{3}{4}N$ et $\frac{1}{4}N$

.
Pour les obtenir, on utilise la même méthode que pour la médiane.

Application
Exercice 1 :

Durée en min	< 3	[3,6[	[6,9[	[9,12[	[12,15[	≥15
Nombre de communications	20	25	15	13	9	8

1) Combien de communications ont duré moins de 6 min ?
2) Combien de communications ont duré au moins 12 minutes ?
3) Combien de communications ont duré au moins 9 min et moins de 15 min ?

Solution
1) Le nombre de communications qui ont duré moins de 6 min est : 20+25 = 45
45 communications ont duré moins de 6 min
2) le nombre de communications qui ont duré au moins 12 min, signifie le nombre de communications dont la durée est supérieure ou égale à 12, cela donne 9+8 = 17
17 communications ont duré au moins 12 min
3) Le nombre de communications qui ont duré au moins 9 min et moins de 15 min ,signifie le nombre de communications dont la durée est supérieure ou égale à 9 min et strictement inférieure à 15 min ,cela donne 13 +9 = 22
Au total 22 communications ont duré au moins 9 min et moins de 15 min

Exercice 2 :
Au cours d'un mois, on a recensé le nombre de voitures immatriculées dans chaque ville d'un pays donné.
Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous

Nombre de voitures	5	13	15	17	25	80
Nombre de villes	3	4	2	3	7	1

1) Que signifie le nombre 13 ? Que signifie le nombre 4 ?
2) Combien de voitures ont été immatriculées dans ce mois ?

3) Quel est le mode de cette série ?
4) Dans combien de villes il y a au plus 20 voitures neuves par mois ?

Solution :

1) Le nombre 13 est une modalité du caractère : « nombre de voitures immatriculées » ; le nombre 4 indique le nombre de ville où on a immatriculé 13 véhicules dans le mois.
2) Le nombre total de voitures immatriculées dans ce mois est de :

$5x3 + 13x4 + 15x2 + 17x3 + 25x7 + 80 = 403$.

C'est l'effectif total.

3) Le mode de cette série est 25.

4) Le nombre de villes où sont immatriculées au plus 20 voitures est de :

$3 + 4 +2 + 3 = 12$

Exercices d'entraînement

Exercice 1:

On considère les deux séries de scores :

12- 13 – x – 14 – 12 – 10.

9 – 7 - 11 – x – 17 – 15 – 12.

Déterminer x pour que ces deux séries aient la même moyenne.

Exercice 2

Lors de la journée nationale de solidarité aux enfants orphelins, on a relevé les contributions en francs CFA de trente élèves d'une classe de 3^{eme} dans un collège de la commune de Fatick

100-50-150-200-20-25-175-125-100-50-200-50-250-75-100-100-120-75-125-200-100-50-30-200-100-50-50-10-25-100

On a regroupé les différentes contributions en intervalles (classes) d'amplitude 50

Contributions	[0;50[	[50;100[	[100;150[	[150;200[	[200;250[	[250;300[
Effectifs						
ECC						

ECC signifie Effectifs Cumulés Croissants

1°) Compléter le tableau ci-dessus

2°) Quelle est la classe modale de cette série statistique

3°) Représenter sur un même dessin l'histogramme et le polygone des effectifs cumulés croissants

Exercice 3

Voici la répartition des 64 professeurs d'un collège suivant leur âge

Age (ans)	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[
Fréquence en %	37,5	43,75	12,5	6,25

a) Calculer les effectifs de chaque classe d'âge.
b) Déterminer à un an prés l'âge moyen des professeurs de collège.
c) Calculer les effectifs cumulés croissants de chaque classe.
d) Représenter graphiquement le diagramme des effectifs cumulés croissants
e) En utilisant le théorème de Thalès, calculer l'âge m médian.

Exercice 4

La surveillante d'une classe de 3°, a relevé les absences des élèves pendant le 1° semestre. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Absences	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;16[	[16 ;20[
Nombre d'élèves	30	8	4	x	8

Sachant que la moyenne de la série est 7,2 ;

1°) montrer que l'effectif manquant x est 10.

2°) Représenter le diagramme semi-circulaire de cette série.
3°) Compléter la série avec la ligne des effectifs cumulés croissants.
4°) Calculer le pourcentage d'élèves qui ont comptabilisé au moins 12 absences.
5°) Représenter graphiquement le polygone des effectifs cumulés croissants.
6°) Déterminer la médiane en utilisant le théorème de Thalès.

Exercice 5

Soit le tableau statistique suivant :

Notes	[0 ;4[	[4 ;8[	[8 ; 12[	[12 ;16[	[16 ;20[
Effectifs	5	x	3	y	6
Centre					
E.C.C					
E.C.D					
Fréquences					

1°) Sachant que l'effectif total est 20 et que la moyenne est 10, montrer que (x ; y) le couple solution du système : $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 4y = 26 \end{cases}$

2°) Résoudre ce système
3°) Compléter le tableau avec les centres des classes, les effectifs cumulés croissants, les E.C.C et les fréquences.
4°) Déterminer la médiane en appliquant le théorème de Thalès.

Exercice 6

Une association désirant faire une étude sur l'âge de ses trente adhérents, a relevé les âges suivants :

31	55	49	41	28	28	59	30	48	49
47	25	27	52	34	34	59	45	32	59
20	64	27	32	40	48	34	56	69	37

1) Définis la population étudiée et son caractère.
2) Classe les données dans un tableau, en calculant pour chaque valeur du caractère l'effectif correspondant.
3a) Regroupe ces données en classes d'amplitude 5 ans, de 20 ans jusqu'à 70 ans.
[20; 25[, [25; 30[,…… [65; 70[
3b) Calcule la moyenne
3c) Représente par un histogramme, la répartition des membres de cette association, selon leur classe d'âge.
4) Calcule les fréquences de chaque classe d'âge.
Tu donneras les résultats sous forme de fractions irréductibles.
5) Détermine la classe modale.

Exercice 7

Dans un CEM le tableau des effectifs a été taché et on a récupéré les résultats suivants :

	Filles	Garçons	Totaux
6e			117
5e	30		
4e		56	79
3e	15	41	
Totaux	115		345

1) Complète le tableau des effectifs.

2) Dans un repère, trace les diagrammes en bâtons représentant, d'une part, le nombre de filles, d'autres part, le nombre de garçons (en fonction de la classe).
La partie du diagramme représentant le nombre de filles sera tracée en bleu.
La partie du diagramme représentant le nombre de garçons sera tracée en rouge.

Chapitre 5 : Inéquations et systèmes d'inéquations du 1er degré à 2 inconnues

PRE-REQUIS

Régionnement du plan

COMPÉTENCES EXIGIBLES

• Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une inéquation à deux inconnues du type indiqué.

• Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux inéquations à deux inconnues des types indiqués.

• Vérifier qu'un couple de réels est solution ou non d'une inéquation ou d'un système d'inéquations à 2 inconnues des types indiqués.

1) Inéquation à deux inconnues du type : $ax + by + c \leq 0$

ACTIVITÉS PRÉPARATOIES

Deux nombres x et y sont tels que le double du premier ajouté au second donne un nombre plus petit que 3.

a) Traduis cette phrase par une inéquation :

$$2x + y < 3$$

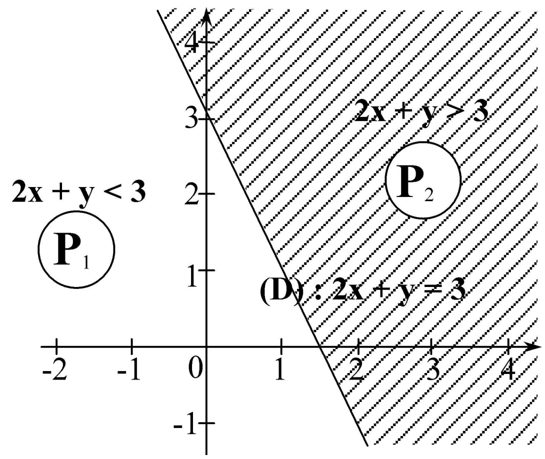
b) $2x + y < 3$ est une inéquation du 1er degré à deux inconnues

c) Pour résoudre graphiquement cette inéquation

- je trace la droite (D) d'équation : $2x + y = 3$. Le plan est alors partagé en demi-plans P_1 et P_2 de frontière (D)

- Je remplace x et y par les coordonnées (0 ; 0) de l'origine O dans $2x + y$. J'obtiens: $2(0) + 0 = 0$

Or : $0 < 3$, donc les coordonnées de l'origine O vérifient l'inéquation. J'en déduis que le demi-plan P_1, sans la frontière (D), qui contient l'origine O convient.



Le demi-plan P_2, avec la frontière (D), ne convient pas : je le hachure.

Remarque : Si l'inégalité était au sens large $(\leq)$,la frontière (D) allait faire partie de la solution

TRACE ÉCRITE

Méthode graphique de résolution de $ax + by + c > 0$

1. Tracer dans un repère la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$

2. Choisir un point M extérieur à la droite (généralement O (0,0) si la droite ne passe par l'origine)

3. Déterminer si les coordonnées (x_0, y_0) de M_0 sont solutions de l'inéquation $ax + by + c > 0$ pour cela :

a) Calculer l'expression $ax_0 + by_0 + c$

b) Comparer le résultat à 0 :

Si $ax_0 + by_0 + c > 0$ alors (x_0, y_0) est une solution ; donc le demi-plan contenant M_0 est solution

Si $ax_0 + by_0 + c < 0$ (x_0, y_0) alors n'est pas solution ; donc le demi-plan ne contenant pas M0 est solution

4. Hachurer le demi-plan qui n'est pas solution

TRACE ÉCRITE

Méthode graphique de résolution de ax + by + c > 0

1. Tracer dans un repère la droite (D) d'équation ax + by + c = 0
2. Choisir un point M_0 extérieur à la droite (généralement O (0,0))
3. Déterminer si les coordonnées (x_0, y_0) de M_0 sont solutions de l'inéquation ax + by + c > 0 pour cela :
   a) Calculer l'expression $ax_0 + by_0 + c$
   b) Comparer le résultat à 0 :
      Si $ax_0 + by_0 + c > 0$ alors (x_0, y_0) est une solution ; donc le demi-plan contenant M_0 est solution
      Si $ax_0 + by_0 + c < 0$ (x_0, y_0) alors n'est pas solution ; donc le demi-plan ne contenant pas M_0 est solution
4. Hachurer le demi-plan qui n'est pas solution

2) Résolution de système d'inéquations à deux inconnues des types précédents

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES SUITE

Les nombres x et y du 1) sont aussi tels que la somme de l'opposé du premier et du triple du second et de 1 est inférieur à 2.

a) Traduis cette phrase par une inéquation :

Les nombres x et y cherchés sont donc ceux qui vérifient à la fois l'inéquation 2x + 3y < 3 et l'inéquation - x + 3y + 1≤ 2

Pour montrer qu'on s'intéresse aux deux inéquations, on les écrit l'une au dessous de l'autre et on les relie par une accolade. On obtient un système d'inéquations du 1er degré à deux inconnues

$$\begin{cases} 2x + y < 3 & (1) \\ -x + 3y + 1 \leq 2 & (2) \end{cases}$$

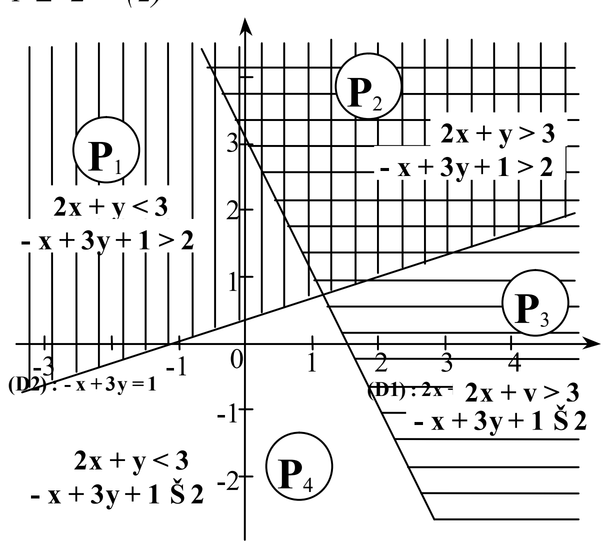
Résolution graphique d'un système

- J'utilise le même repère.
- Je résous graphiquement l'inéquation (1) pour cela, je trace la droite (D1) :
  2x + y = 3 (Cf. paragraphe 1)
- Je résous graphiquement l'inéquation (2) pour cela, je trace la droite (D2) : - x + 3y + 1 = 2
- Le plan est alors partagé en 4 zones P1, P2, P3 et P4.

Les zones P1 et P4 représentent les solutions de l'inéquation (1)

Les zones P3 et P4, avec la frontière (D2), représentent les solutions de l'inéquation (2).

La zone P4 non hachurée représente l'ensemble des solutions du système.



Exercices d'entraînement

Exercice1

1°) Résous graphiquement dans IR^2, le système d'inéquations $\begin{cases} y + 2x \geq 1 \\ y - x < 0 \end{cases}$

Exercice 2

Résous graphiquement chaque système.

a $\begin{cases} 2x - y + 3 \leq 0 \\ y - 2x + 1 \leq 0 \end{cases}$ b $\begin{cases} 2x + 3y \geq 0 \\ x - 2y + 1 < 0 \end{cases}$

c $\begin{cases} x - y + 3 \leq 0 \\ 2x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$ d $\begin{cases} 4x + y - 5 > 0 \\ -2x + y + 1 < 0 \end{cases}$

Exercice 3

Résous graphiquement chaque système.

a) $\begin{cases} x - y + 3 \leq 0 \\ 2x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ x + 2y < -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y < 3 \\ x > -2 \\ y > 2x - 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \\ y > -x + 3,5 \end{cases}$

Exercice 4

1°) Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

$\begin{cases} x - 2y + 3 \leq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ x - 2 \leq 0 \\ y - 1 \leq 0 \end{cases}$ Montrer que les solutions du système (2) sont l'intérieur d'un triangle dont on déterminera les coordonnées des sommets A, B et C.

Chapitre 6 : Applications affines, applications affines par intervalles

PRE-REQUIS

Application linéaire, vecteur, équations.

COMPÉTENCES EXIGIBLES

• Déterminer l'expression littérale d'une application affine connaissant :
- les images de deux réels
- le coefficient de l'application affine et l'image d'un réel par cette application.

• Utiliser l'expression littérale d'une application affine pour :
- calculer des images ou des antécédents
- établir des tableaux de valeurs.

• Représenter graphiquement une application affine dans un repère orthonormal.

• Utiliser la représentation graphique d'une application affine pour déterminer une image ou un antécédent

• Tracer la représentation graphique d'une application affine par intervalles du type :
$x \to |a x + b|$

Définition

Soit a et b deux réels donnés.
On appelle application affine f de coefficient a et de terme constant b la correspondance qui à chaque réel x associe le nombre réel $ax+b$ On dit que l'application affine f est définie par :
$f(x)=ax+b$

N B **Si** $f(x_0)=y_0$ alors on dit que y_0 est l'image de x_0 par f ou x_0 est l'antécédent de y_0

Exemples

$f(x)=-x+3$; $g(x)=2x$, $h(x)=5$

Exercice1

On donne $f(x)=2x-1$

Calculer $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\frac{1}{2})$

Solution

$f(0)=2\times 0-1=0-1=-1$; $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}-1$; $f(\frac{1}{2})=2\times\frac{1}{2}-1=1-1=0$

Exercice 2

1°) Déterminer l'application affine f telle que $f(1)=-1 \quad et \quad f(3)=1$

2°) Calculer l'antécédent de 3

Solution

1°) L'application f est de la forme : $f(x)=ax+b$

$f(1)=a\times 1+b=a+b=-1$ et $f(3)=3a+b=1$

$a \quad et \quad b$ sont solutions du système : $\begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+b=1 \end{cases}$

On trouve $\boxed{a=1 \quad et \quad b=-2 \quad et \quad f(x)=x-2}$

2°) soit x_0 l'antécédent de 3, on a $f(x_0)=3 \quad soit \quad x_0-2=3 \quad donc \quad x_0=2+3=5$

5 est l'antécédent de 3

Activité

On donne l'application affine f(x) = 2x + 1

1) Complète le tableau suivant :

x	0	1	2	1.5	-1	-2	-0.5
f(x)							

2) Place les points de coordonnées (x, f(x)) dans un repère orthonormal

3) Que constates tu ?

4) Que peux-tu déduire de cette représentation graphique ?

2. Représentation graphique

La représentation graphique d'une application affine définie par f(x) = a x + b est la droite ayant pour équation y = a x + b.

a est appelé coefficient directeur (ou pente) de la droite d'équation y = a x + b.

b est appelé l'ordonnée à l'origine.

Remarques

Si x = 0 alors y = b. La représentation graphique de f passe par le point de coordonnées (0; b);

Cas particuliers

- La représentation graphique d'une application linéaire est une droite qui passe par l'origine et par le point de coordonnées (1, a).
Le vecteur de coordonnées (1, a) est un vecteur directeur de cette droite. (voir figure1)
- La représentation graphique d'une application constante est une droite qui est parallèle à l'axe des abscisses. (voir figure 2)

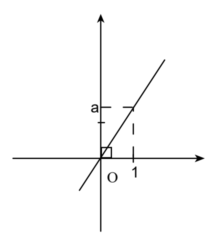


figure 1

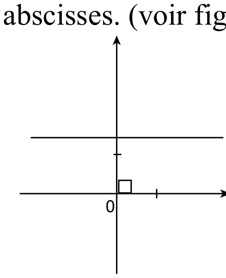
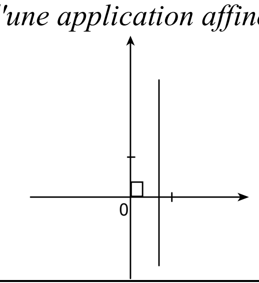


figure 2

Attention : Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'est pas la représentation graphique d'une application affine.



<u>Exemple d'application affine par intervalle</u>

Représente graphiquement l'application affine définie par :

Si $x \leq -1$ alors f(x) = x + 3

Si $-1 < x \leq 1$ alors f(x) = 2

Si $1 < x$ alors f(x) = -2x + 4

Pour représenter graphiquement f on peut procéder de la manière suivante :

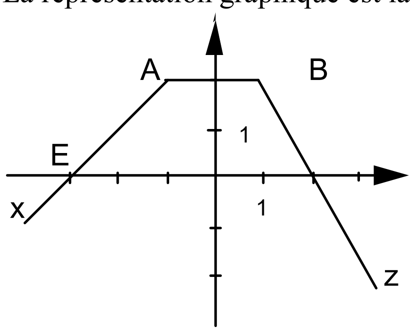
Sur] $-\infty$, -1] f(x) = x + 3

on sait que la représentation graphique de

$f(x) = x + 3$ est une droite; comme $x \leq -1$ alors la représentation graphique de f est ici une demi-droite
Il suffit alors de connaître 2 points.
Pour $x = -1$: on a alors le point A (-1, 2)
on choisit un autre point :
pour $x = -3$ on a le point E (-3, 0)
La représentation graphique est la demi droite fermée d'origine A contenant le point E
- Sur]-1, 1] $f(x) = 2$

On a ici une application constante
Comme $-1 < x \leq 1$ donc la représentation graphique est une partie de droite horizontale
Pour tracer cette droite il suffit d'avoir deux points.
On peut prendre $x = 1$: on a le point B (1,2).
On choisit un autre point $x = 0$ on a C (0, 2)
La représentation graphique est le "segment"]AB] ouvert en A et fermé en B contenant C.
- Sur] 1, $+\infty$] $f(x) = -2x + 4$

On a encore une partie de droite.
On peut prendre $x = 2$: on a le point D (2, 0)
On choisit un autre point $x = 3$ on a F (3, -2)
La représentation graphique est la demi-droite ouverte en B contenant les points D et F.



Remarque : La représentation graphique d'une application affine par intervalles est constituée de segments de droites ou de demi-droites.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Détermine les applications affines f, g et h telles que :
$f(-1) = 1$ et $f(-3) = -1$; $g(0) = 4$ et $g(1) = -3$
$h\left(\frac{3}{2}\right) = 2$ et $h(1) = 1$

Exercice 2

1) f est l'application affine définie par :

$f: x \longrightarrow -3x + \frac{1}{4}$

a) Calcule les images par f de : $-\frac{1}{3}$; 0 ; 1 ; -2

b) Calcule le nombre qui a pour image

$-\frac{3}{4}$ par f

2) Soit f une application affine telle que :
$f(x) = x\sqrt{2} + 3$
a) Calcule $f(1)$; $f(\sqrt{2})$; $f(-\sqrt{2})$; $f(\sqrt{50})$
b) Calcule les nombres qui ont pour images 3 ; 4 ; et $3 - \sqrt{2}$

Exercice 3

1°) Résoudre dans IR^2, le système $\begin{cases} -a+b=3 \\ 2a+b=-3 \end{cases}$

2°)

a) Déterminer l'expression littérale de l'application affine f vérifiant $f(-1)=3 \quad et \quad f(2)=-3$

b) Déterminer l'antécédent de -1 par f

Exercice 4 (B F EM 2003)

On considère les expressions suivantes :

H(x) = $4(x+\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}(x+\sqrt{3})+3$, G(x) = $(2x+\sqrt{3})^2$

1°) Développer, réduire et ordonner H(x) et G(x)

2°) En déduire une factorisation de H(x)

3°) On pose Q(x) = $\sqrt{H(x)}$

a) Résoudre l'équation Q(x) = $2\sqrt{3}$

b) Dans un repère orthonormal ($\vec{O}, \vec{I}, \vec{J}$), représenter Q

Exercice 5 (BFEM 1996)

1°) On pose A=2x - 3. Calculer A^2.

En déduire une factorisation de $g(x)=4x^2-12x+8$

2°) Résoudre dans IR g(x)=0 puis $g(x) \leq 0$.

3°) Le prix à payer pour un trajet en taxi comprend une prise en charge et une somme proportionnelle au nombre de km parcourus. Ali a payé 500f pour un trajet de 4 km ; Pape a payé 725f pour un trajet de 8,5 km.

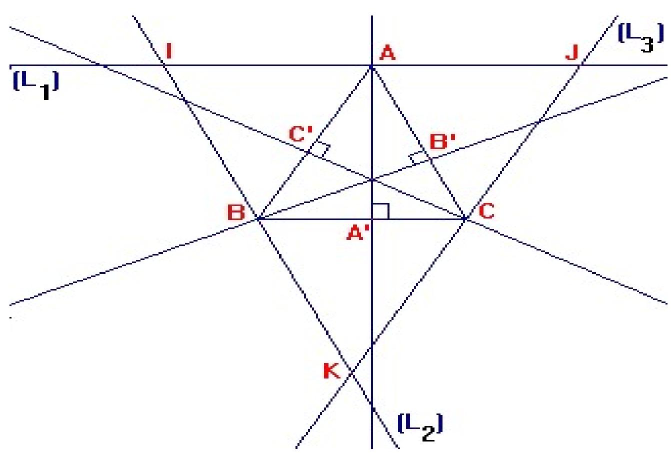
a) Déterminer le prix du km et la prise en charge.

b) Déterminer l'application qui définit la somme à payer en fonction du nombre de km parcourus.

c) Représenter graphiquement une telle application.

d) Déterminer graphiquement le prix à payer pour 10 km.

Activités Géométriques



Chapitre 1 : Thalès

PRÉ-REQUIS

1 Signification de l'écriture $\frac{AB}{CD}$.

2 Droite des milieux.

3 Deux sécantes coupées par trois droites parallèles et équidistantes.

COMPÉTENCES EXIGIBLES

Reconnaître une configuration de Thalès.

Connaître et utiliser le théorème de Thalès pour calculer des longueurs.

Connaître et utiliser la réciproque du théorème de Thalès pour justifier que des droites sont parallèles.

Connaître et utiliser la propriété relative à l'aire.

Connaître et utiliser le théorème de Thalès pour :

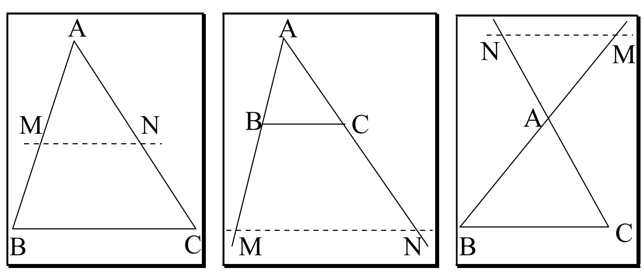
- partager un segment dans un rapport donné
- placer un point d'abscisse connue sur une droite graduée.

1)Théorème direct

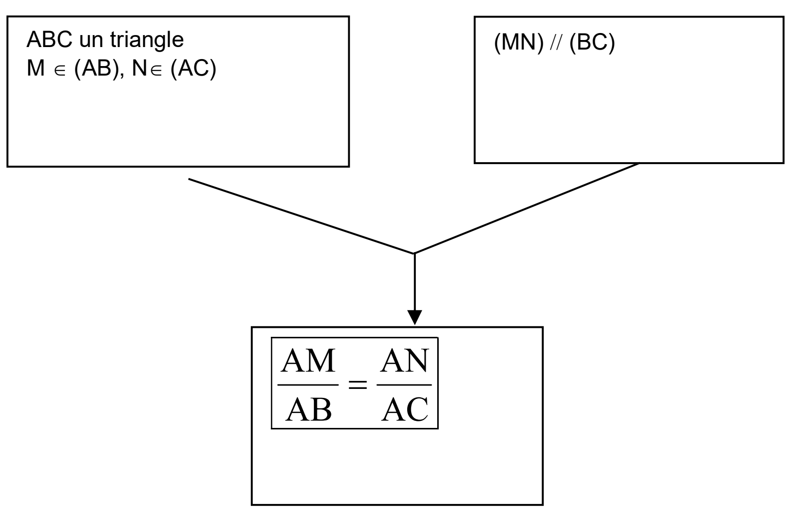
Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (BC).

SI (MN) est parallèle à (BC) **alors** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

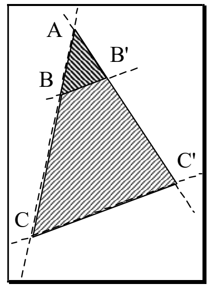
Configuration



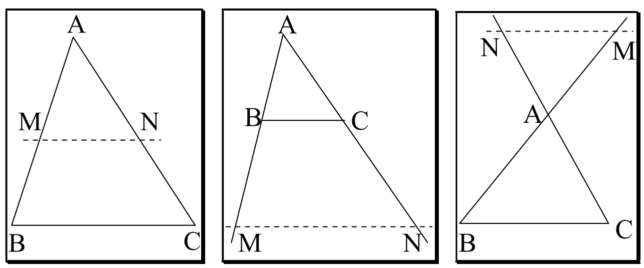
Déductogramme



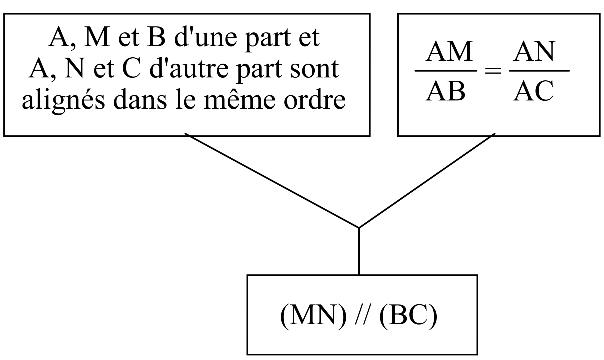
2) <u>Conséquence :</u>
Si deux triangles sont en position de Thalès alors les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.



<u>3) Réciproque du théorème de Thalès</u>
Soit un triangle ABC.
Si les points A, M et B d'une part et A, N et C d'autre part sont alignés <u>dans le même ordre</u>
Et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
Alors (MN) et (BC) sont parallèles.
<u>Configuration</u>



<u>Déductogramme</u>



4) <u>Partage d'un segment dans un rapport donné</u>
a) Construire les 2/3, les 5/3 ... d'un segment.
Énoncé
Trace un segment [AB]. Construis sur la droite (AB) un point C et un point D tels que : $AC = \frac{2}{3}AB$ et $AD = \frac{5}{3}AB$

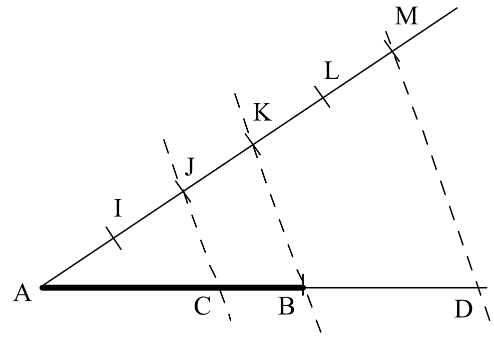
Solution

Je trace une demi-droite d'origine A. Sur cette demi-droite je place (par exemple au compas) 5 points I, J, K, L et M tels que :

$$AI = IJ = JK = KL = LM$$

Je trace parallèlement à (KB) une droite passant par J et une droite passant par M. Elles coupent la droite (AB) en C et D tels que :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AJ}{AK} = \frac{2}{3} \quad et \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AB} = \frac{5}{3}$$



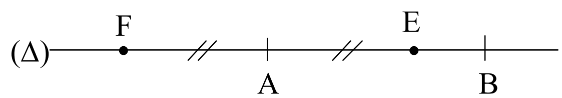
b) Construire sur une droite donnée un point d'abscisse donnée.

Énoncé

Trace une droite graduée (D), muni d'un repère (A; B). Construis sur (D) les points E et F d'abscisses respectifs $\frac{2}{3}$ et $\frac{-2}{3}$.

Solution

Pour construire le point E d'abscisse 2/3, je construis les 2/3 du segment [AB] (voir 4) a)). Le point F d'abscisse - 2/3 est le symétrique du point E par rapport à A.



5) Construire une quatrième proportionnelle.

Énoncé

Trace trois segments de longueurs : a = 4 cm, b = 6 cm et c = 2,4 cm.

Construis un segment de longueur t tel que at = bc.

Solution

Je trace deux demi-droites [Ox) et [Oy) de même origine. Je marque sur [Ox) deux points A et B tels que :

$$OA = 4 \text{ cm} \quad \text{et} \quad OB = 6 \text{ cm}.$$

Je marque sur [Oy) le point C tel que :

$$OC = 2{,}4 \text{ cm}.$$

Je trace la parallèle à (AC) passant par B. Elle coupe [Oy) en D tel que :

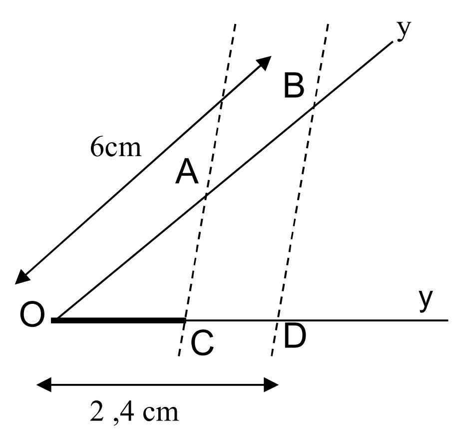
$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{t} \quad .$$

Ainsi le segment [OD] répond à la question.

Je peux vérifier en mesurant ce segment et en comparant avec le résultat obtenu par calcul :

$$t = \frac{bc}{a} = \frac{6 \text{ x } 2{,}4}{4} = 3{,}6 \text{ cm}$$

a = 4cm ; b = 6 cm ; c = 2,5 cm



<u>Application</u>

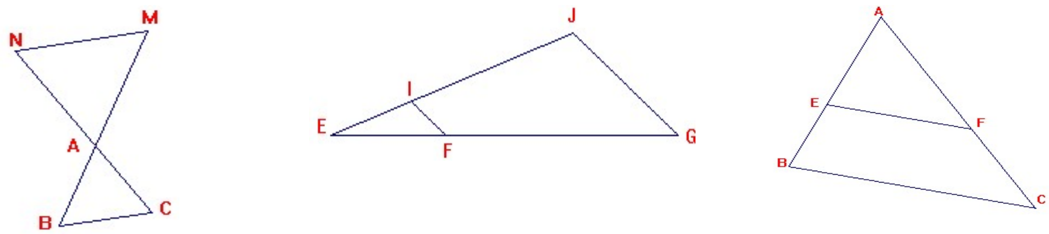
<u>Exercice 1</u>:

Dans chacun des cas de figures, calculer la longueur inconnue.

1) MN) // (JG) AB = 22 AC = 26; AM = 34, AN = ?

(IF) // (JG), EJ = 6, 4 EI = 2; FG = 5, 5; EF =?

(AB) // (EF); AE = 3; AF = 4 EB = 2,1; FC = ?



Solution

1) $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$. Donc $\frac{AN}{26} = \frac{34}{22}$ et AN = 26 × $\frac{34}{22}$ = $\frac{13\,x\,34}{11}$

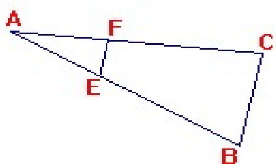
2) $\frac{EI}{EJ} = \frac{EF}{EG} = \frac{IF}{JG}$. On a aussi : $\frac{EI}{IJ} = \frac{EF}{FG}$ avec IJ = EJ – EI = 6,4 – 2 = 4,4.

Donc : $\frac{2}{4{,}4} = \frac{EF}{5{,}5}$; d'où : EF = $\frac{2 \times 5{,}5}{4{,}4} = \frac{5{,}5}{2{,}2} = \frac{55}{22}$ = 2,5cm.

3) $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$. Donc : $\frac{3}{2{,}1} = \frac{4}{FC}$; d'où FC = $\frac{4 \times 2{,}1}{3} = \frac{8{,}4}{3}$ = 2,8cm.

<u>Exercice</u> 2 :

Compléter le tableau ci-dessous qui concerne la figure dans laquelle les droites (EF) et (BC) sont parallèles.



AB	AC	BC	AE	AF	EF
6	9	10	2		
15	12	6		2	
8	10	12			4
		9	5	4	6

Solution :

1) AB = 6 ; AC = 9 ; BC = 10 ; AE = 2. Calculons AF et EF.

On a : $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$. Donc : $\frac{2}{6} = \frac{AF}{9} = \frac{EF}{10}$ et AF = $\frac{2 \times 9}{6} = \frac{18}{6}$ = 3, EF = $\frac{20}{6} = \frac{10}{3}$.

2) AB = 15 ; AC = 12 ; BC = 6 ; AF = 2. Calculons AE et EF.

On a : $\frac{AE}{15} = \frac{2}{12} = \frac{EF}{6}$. Donc : AE = $\frac{15 \times 2}{12} = \frac{5}{2}$ =2,5 et EF = $\frac{6 \times 2}{12}$ = 1.

3) AB = 8 ; AC = 10 ; BC = 12 ; EF = 4. Calculons AE et AF.

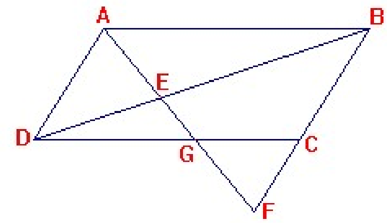
On a : $\frac{AE}{8} = \frac{AF}{10} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Donc : AE = $\frac{8}{3}$ et AF = $\frac{10}{3}$.

4) BC = 9 ; AE = 5 ; AF = 4 ; EF = 6. Calculons AB et AC.

On a : $\frac{5}{AB} = \frac{4}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.Donc, AB = $\frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}$ = 7,5 et AC= $\frac{4 \times 3}{2}$ = 6.

Exercice 3

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. Le point E est un point quelconque de la diagonale [BD]. La droite (AE) coupe (DC) en G et (BC) en F.



Montrer que : $\frac{EB}{ED} = \frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA}$

En déduire que : $EA^2 = EF \times EG$.

Solution

Les triangles AED et BEF sont en position de Thalès car (AD) // (BF).

On peut donc écrire : $\frac{EB}{ED} = \frac{EF}{EA}$ (1)

Les triangles ABE et DEG sont en position de Thalès car (AB) // (DG).

On peut donc écrire : $\frac{EB}{ED} = \frac{EA}{EG}$ (2).

D'après (1) et (2) on a : $\frac{EB}{ED} = \frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA}$; on en tire : $EA^2 = EF \times EG$

Exercices d'entraînement

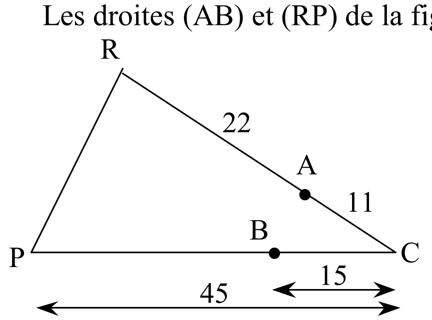
Exercice 1

Soit une droite graduée dont le repère (A;B) est tel que : AB = 10 cm. Construis sur cette droite les points d'abscisses :

1) $\frac{5}{7}$; $-\frac{5}{7}$; $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{5}{3}$; $-\frac{5}{3}$; $\frac{-3}{4}$

Exercice 2

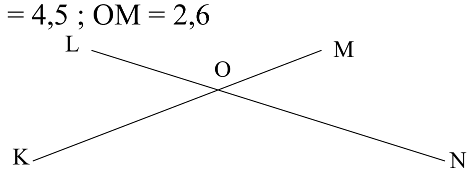
Les droites (AB) et (RP) de la figure ci-dessous sont-elles parallèles ?



Exercice 3

On donne pour la figure ci-dessous :

LO = 3 ; OK = 3,9 ; ON = 4,5 ; OM = 2,6



Les droites (LM) et (KN) sont-elles parallèles ?

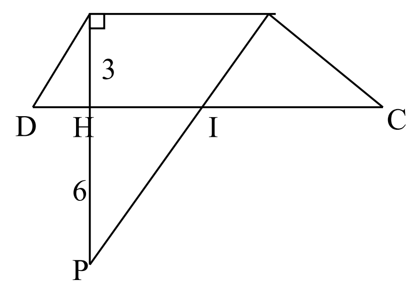
<u>Exercice 4</u>

1°) soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB= 4cm ; AC= 6cm. Calculer BC

2°) Soit E un point du segment $[AB]$ tel que AE=2 cm et F un point du segment $[AC]$ tel que AF= 3 cm. Montrer que les droites (BC) et (EF) sont parallèles puis calculer EF

<u>Exercice 5</u>

Dans la figure ci-contre, ABCD est un trapèze.
1°) Calculer HI, BP puis BI.
2°) Montrer que si DH = 2 alors les droites (PI) et (AD) sont parallèles.
La figure n'est pas à l'échelle.



Chapitre 2 : Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

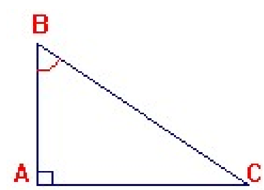
PRÉ-REQUIS

Théorème de Pythagore ; complémentarité des angles aigus d'un triangle rectangle ; racines carrées.

COMPÉTENCES EXIGIBLES

Connaître la définition et la notation du cosinus dans un triangle rectangle.
Calculer le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant un cosinus et une autre longueur
Connaître la définition et la notation du sinus d'un angle aigu d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
Calculer le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant un sinus et une autre longueur.
Connaître la définition et la notation de la tangente dans un triangle rectangle.
Calculer la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant une tangente et une autre longueur.
Déterminer une valeur approchée (à l'aide de la machine à calculer ou d'une table trigonométrique) d'un angle aigu d'un triangle rectangle connaissant son sinus ou son cosinus ou sa tangente.
Connaître et utiliser la relation : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.
Connaître et utiliser la relation entre le cosinus et le sinus d'angles complémentaires.
Connaître et utiliser les cosinus, sinus et tangente d'un angle de mesure 30°, 45° ou 60°.

Soit ABC un triangle rectangle en A



1) Cosinus d'un angle aigu

Définition - Notation

• Dans un triangle rectangle le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport : $\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$.

• Le cosinus de l'angle $\hat{B}$ est noté $\cos\hat{B}$. $\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}$

- Remarque : Si $\hat{B}$ est un angle aigu alors : $0 < \cos\hat{B} < 1$

2) Sinus d'un angle aigu

Définition - Notation

• Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au rapport : $\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

• Le sinus de l'angle $\hat{B}$ est noté $\sin\hat{B}$. $\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$

- Remarque : Si $\hat{B}$ est un angle aigu alors : $0 < \sin\hat{B} < 1$

3) Tangente d'un angle aigu :

Définition - Notation

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au rapport $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

• La tangente de l'angle $\hat{B}$ est noté tan $\hat{B}$. $\tan \hat{B} = \dfrac{AC}{AB}$

Remarque : $\tan \hat{B} = \dfrac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}$

3) Relation entre le sinus et le cosinus d'un même angle aigu :

Pour tout réel α on a : $\boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1}$

Remarque : On note que $(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$

Démonstration : Soit ABC un triangle rectangle en A. On pose $\hat{B} = \alpha$.

$\cos \alpha = \dfrac{AB}{BC}$; $\cos^2 \alpha = (\dfrac{AB}{BC})^2 = \dfrac{AB^2}{BC^2}$; $\sin \alpha = \dfrac{AC}{Bc}$; $\sin^2 \alpha = (\dfrac{AC}{BC})^2 = \dfrac{AC^2}{BC^2}$

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \dfrac{AB^2}{BC^2} + \dfrac{AC^2}{BC^2} = \dfrac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$

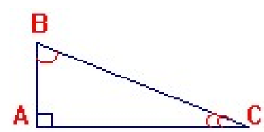
D'après le théorème de Pythagore : $AB^2+AC^2=BC^2$; donc : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha == \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$

5) Sinus et cosinus d'angles complémentaires :

- Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.
- Dans un triangle rectangle, les tangentes des deux angles complémentaires sont inverses l'une de l'autre.

Justification :

Soit ABC un triangle rectangle en A. Les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires ($\hat{B} + \hat{C}$ =90°).

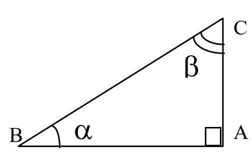


- $\sin \hat{B} = \dfrac{AC}{BC}$ et $\cos \hat{C} = \dfrac{AC}{BC}$ donc : $\sin \hat{B} = \cos \hat{C}$
- $\sin \hat{C} = \dfrac{AB}{BC}$ et $\cos \hat{B} = \dfrac{AB}{BC}$ donc : $\sin \hat{C} = \cos \hat{B}$
- $\tan \hat{B} = \dfrac{AC}{AB}$ et $\tan \hat{C} = \dfrac{AB}{AC}$ donc : $\tan \hat{B}$ et $\tan \hat{C}$ sont inverses.

Propriétés

Le cosinus d'un angle aigu est égal au sinus de son complémentaire.

Configuration



Traduction mathématique

Si $\alpha + \beta = 90°$,

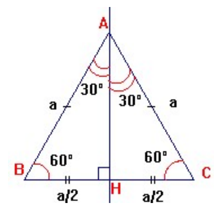
alors $\sin \beta = \cos \alpha$ et $\cos \beta = \sin \alpha$

5) <u>Cosinus, sinus et tangente d'angle de mesure : 30°, 45°, 60°</u>

$\hat{B}$	**30°**	**45°**	**60°**
sin $\hat{B}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos $\hat{B}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan $\hat{B}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

<u>Justification</u> :

- **<u>Angles de 30° et 60°</u> :**



Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et H le pied de la hauteur issue de A.
Cette hauteur issue de A est en même temps bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et médiatrice de [BC].
ABH triangle rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$ $AH^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ $AH^2 = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$; donc: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\sin B\hat{A}H = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \sin 30°$$

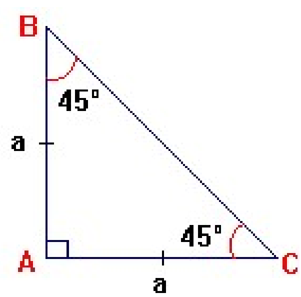
$$\cos B\hat{A}H = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30° \; ; \quad \boxed{\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

- Les angles de mesures 30° et 60° sont complémentaires donc :

$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \boxed{\cos 60° = \frac{1}{2}}$$

- **<u>Angle de 45°</u> :**



Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sommet A.
ABC est un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = a^2 + a^2$
$BC^2 = 2a^2$
$BC = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = \sqrt{2}\; a = a\sqrt{2}$ cos

$$\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$$

Les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires donc: $\cos \hat{B} = \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45°$

Remarque : Pour les tangentes des angles de 30°, 45° et 60°, calculer les rapports $\frac{\sin 30°}{\cos 30°};\frac{\sin 45°}{\cos 45°};\frac{\sin 60°}{\cos 60°}$

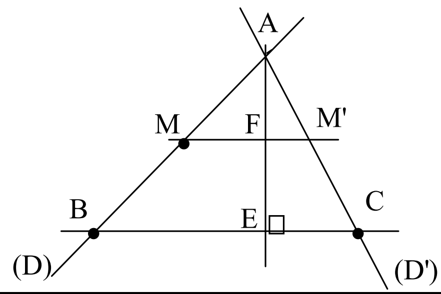
Application :

Exercice 1

(Démonstration du théorème de Thalès en utilisant la projection orthogonale)

1° Partie

Soit (D) et (D') deux droites sécantes en A, B un point de (D), C un point de (D') et M un point quelconque de (D). La droite passant par M et parallèle à (BC) coupe (D') en M'.



Soit E le projeté orthogonal de A sur (BC), et F le point d'intersection de (AE) et (MM').

Justifie que : $\frac{AF}{AM}=\frac{AE}{AB}$. En déduire que : $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AM'}$

Solution

- On a M qui appartient à (D) donc à la droite (AB) : A, M et B sont alignés.
De même pour les points A, M' et C. (MM') est parallèle à (BC).
- (MM') et (BC) étant parallèles d'une part et (AE) étant perpendiculaire à (BC) d'autre part, alors (AE) est perpendiculaire à (MM'). D'où les triangles AEB et AFM sont rectangles respectivement en E et F.

On a : $\widehat{BAE}=\widehat{MAF}$ *donc on a :* $\cos(\widehat{BAE})=\cos(\widehat{MAF})$

Or dans le triangle ABE, $\cos(\widehat{BAE})=\frac{AE}{AB}$ *et dans le triangle AMF,* $\cos(\widehat{MAF})=\frac{AF}{AM}$

Conclusion $\boxed{\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AM}}$

c) *De même* $\cos(\widehat{CAE})=\cos(\widehat{M'AF})$ *d'où :* $\boxed{\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AM'}}$

$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AM}$ *équivaut à* $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AM}$ *de même :* $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AM'}$ *équivaut à* $\frac{AE}{AF}=\frac{AC}{AM'}$

On a donc : $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AM'}$, *d'où :* $\boxed{\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AM'}}$

Exercice 2

Établis les égalités : (a $\in$]0°,90°[ )

1) $1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}$

2) $1-2\sin^2 a=2\cos^2 a-1$

3) $(\cos a+\sin a)(\cos a-\sin a)=2\cos^2 a-1$

4) $1+\frac{1}{\tan^2 a}=\frac{1}{\sin^2 a}$.

Solution

Puisque $a \in \left]0^0, 90^0\right[$ alors $\cos a \neq 0$; $\sin a \neq 0$; $\tan a \neq 0$

1) On a $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ On divise les deux membres de l'égalité par $\cos^2 a$ et on obtient : $\dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{1}{\cos^2 a}$; $\dfrac{\cos^2 a}{\cos^2 a} + \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{1}{\cos^2 a}$; soit $1 + \left(\dfrac{\sin a}{\cos a}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2 a}$

Et donc $1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$

2) $1 - 2\sin^2 a = 1 - 2(1 - \cos^2 a) = 1 - 2 + 2\cos^2 a = 2\cos^2 a - 1$

3)

$(\cos a + \sin a)(\cos a - \sin a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a = 2\cos^2 a - 1$

4) On peut diviser les deux membres de l'égalité $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ par $\sin^2 a$ comme à la première question mais on adopte la méthode suivante :

On part du résultat : $1 + \dfrac{1}{\tan^2 a} = \dfrac{1}{\sin^2 a}$.

Mais $1 + \dfrac{1}{\tan^2 a} = 1 + \dfrac{\cos^2 a}{\sin^2 a}$ *et on a* $1 + \dfrac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \dfrac{1}{\sin^2 a}$

On multiplie par $\sin^2 a$ les deux membres de la dernière égalité

$\sin^2 a\left(1 + \dfrac{\cos^2 a}{\sin^2 a}\right) = \sin^2 a\left(\dfrac{1}{\sin^2 a}\right)$ En simplifiant on obtient : $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$; ce qui est vrai

Exercices d'entraînement

Exercice 1

RSU est un triangle rectangle en U ; RS = 3, SU = 2, RU = $\sqrt{5}$.

Calcule $\cos \hat{R}$, $\sin \hat{R}$, $\cos \hat{S}$, $\sin \hat{S}$, $\tan \hat{S}$.

Exercice 2

Trace un demi-cercle (C) de diamètre AB = 10 et place M sur (C) tel que AM = 6.

1) Nature de AMB ? Justifie.

2) Calcule $\cos \widehat{MAB}$ et $\sin \widehat{MBA}$.

3) Détermine graphiquement une mesure approchée de $\widehat{MAB}$ et de $\widehat{MBA}$.

Exercice 3

On te donne une valeur trigonométrique ; déduis-en l' autre valeur demandée :

cos a = 0.6 ; sin a = ? tan a = ?

sin b = $\dfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, cos b = ?

sin c = $\dfrac{8}{15}$, cos c = ? tan c = ?

cos t = $\dfrac{1}{3}$, sin t = ?

Exercice 4

On considère un triangle isocèle MNP de sommet M tel que : MN = 7cm, NP = 4cm
Soit I et J les milieux respectifs de ([NP] et [MP].

1) Construire le cercle circonscrit à MNP. Indiquer la position de son centre O.
2) Montrer que sin $\widehat{PMI} = \frac{2}{7}$. En déduire cos $\widehat{PMI} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.
3) Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle MNP, puis en donner une valeur approchée.

Exercice 5

ABC est un triangle rectangle en C : BC = 3 cm et $\hat{B}$ = 60°. Construire le triangle ABC

1°) Calculer AB puis AC sachant que cos 60° = $\frac{1}{2}$

2) Soit I un point de [AC] tel que AI = $\frac{2}{5}$ AC, placer I.

3) La parallèle à (BC) passant par I coupe (AB) en N. Calculer IN et AN.
4) Soit E le point de [BC) tel que BE = 8 cm, calculer AE.
5) Soit H et J les projetés orthogonaux respectifs de C et I sur (AE). Construire H et J.
Montrer que $\frac{AJ}{AH} = \frac{2}{5}$. Montrer que (NJ) et (BH) sont parallèles.

Exercice 6

1°) a) Construire un cercle ($\mathcal{C}$) de centre I et de rayon 4 cm. A et B sont deux points de ($\mathcal{C}$) diamétralement opposés.
Placer un point M sur($\mathcal{C}$) tel que AM = 4 cm.
b) Quelle est la nature du triangle AMI ?
c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BIM}$.
2°) K est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par I et la droite (AM).
  a) Justifier que AMB est un triangle rectangle.
  b) En remarquant que cos $\widehat{BAM}$ = cos K$\hat{A}$I, calculer AK et KI.
3°) Le point H est le projeté orthogonal de M sur (AB).
a) Calculer cos $\hat{B}$ de deux manières différentes
b) Exprimer BH en fonction de cos $\hat{B}$ puis démontrer que BH = $\frac{BM^2}{AB}$.

4°) Placer le point E sur le segment [AM] tel que AE = 3 cm.
La parallèle à (IM) passant par E coupe le segment [AI] en F.
Quelle est la nature du triangle AEF ?

Chapitre 3 : Angle au centre- Angles inscrits

PRÉ-REQUIS

Le cercle, les angles, les arcs et les secteurs angulaires.

COMPÉTENCES EXIGIBLES

Connaître le vocabulaire : angle inscrit

Reconnaître les configurations de l'angle au centre et de l'angle inscrit interceptant le même arc

Connaître et utiliser la relation entre l'angle au centre et l'angle inscrit interceptant le même arc

Connaître et utiliser les propriétés des angles inscrits interceptant le même arc pour

- justifier une égalité d'angles ;
- déterminer la mesure d'un angle.

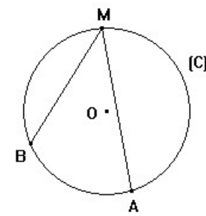
Définition

On appelle angle inscrit dans un cercle, un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les côtés sont sécants à ce cercle.

L'angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle.

L'angle $\widehat{AMB}$ est inscrit dans le cercle de centre O.

L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre

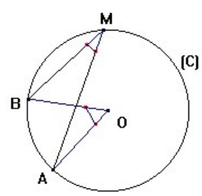


Définition :

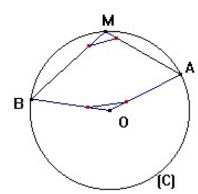
L'arc intercepté par un angle inscrit dans un cercle est l'arc de ce cercle ne contenant pas son sommet.

L'angle inscrit et l'angle au centre interceptant le même arc sont dits associés

Exemple



$\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$



$\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$

Longueur d'arc de cercle

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

Soit A et B deux points d'un cercle de centre O et de rayon r.

La longueur l de arc $\overset{\frown}{AB}$ est : $l = r\alpha$ où $\alpha = \text{mes}\,\widehat{AOB}$ en radians

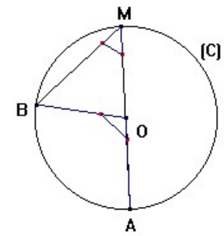
Propriété 1

Un angle inscrit a une mesure égale à la moitié de celle de l'angle au centre associé.

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$

Démonstration : Montrons que $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

a) On suppose que [MA] est un diamètre. On considère le triangle MOB isocèle en O,



on a : $\widehat{BOM} + \widehat{BMO} + \widehat{OBM} = \pi$

or $\widehat{OBM} = \widehat{BMO}$ donc on a :

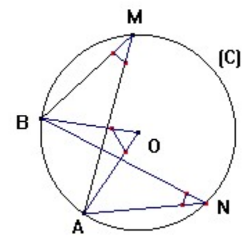
$\widehat{BOM} + 2\widehat{AMB} = \pi$ d'où $\widehat{BOM} = \pi - 2\widehat{AMB}$

On sait d'autre part que : $\widehat{AOB} + \widehat{BOM} = \pi$; en remplaçant dans cette égalité $\widehat{BOM}$ par sa valeur on a :

$\widehat{AOB} + \pi - 2\widehat{AMB} = \pi$. Par suite on a : $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

Propriété2

Deux angles inscrits interceptant le même arc de cercle sont égaux.



En effet, on a $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ et

$\widehat{ANB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ donc $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

Propriété 3

Deux angles inscrits dans le même cercle sont égaux si et seulement si ils interceptent des arcs de même longueur.

Démonstration

$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'NB'} = \frac{1}{2}\widehat{A'OB'}$ or les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{A'B'}$ ont même longueur c'est-à-dire que r × $\widehat{AOB}$ = r × $\widehat{A'OB'}$ avec r rayon du cercle donc on a : $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ d'où

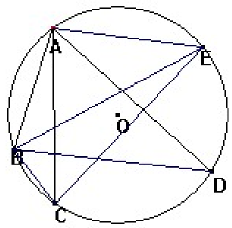
$\widehat{AMB} = \widehat{A'NB'}$

Réciproquement si $\widehat{AMB} = \widehat{A'NB'}$ alors les deux arcs interceptés ont même longueur.

N B : En général les exercices proposés sur ce chapitre sont des applications directes du cours. Il vous suffit de bien comprendre les définitions et propriétés précédentes pour pouvoir faire les exercices proposés

Exercices d'entraînement

Exercice 1



1) Cite les angles inscrits de sommet A.
2) Cite les angles inscrits ayant pour sommet un point autre que A et qui interceptent le même arc qu'un angle inscrit de sommet A.

Exercice 2

On considère un quadrilatère convexe ABCD inscrit dans un cercle C(O,R) de rayon R tel que $\widehat{DCA} = 30°$ et $\widehat{CAB} = 45°$.
1) Déterminer les angles $\widehat{DOA}$ et $\widehat{BOC}$.
2) Déterminer les longueurs DA et CB.

Exercice 2

Construis un triangle ABC isocèle en A, le cercle circonscrit *C* (O,R) et les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ qui coupent le cercle respectivement en M et N.
Établis l'égalité: $\widehat{ANC} = \widehat{AMB}$.

Exercice 3

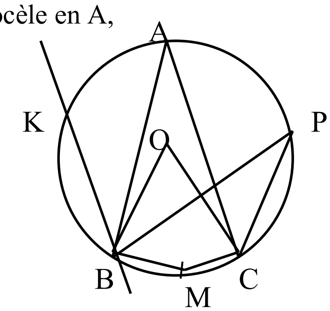
On considère un quadrilatère ABCD dont les sommets sont sur un même cercle *C* (O, R) et tels que $\widehat{DAB} = 105°$ et $\widehat{ABC} = 85°$. Détermine les mesures des autres angles de ce quadrilatère.

Exercice 4

ABCD est un parallélogramme tel que $A\hat{D}C = 60°$. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
1°) Faire une figure.
2°) Comparer les angles $A\hat{B}C$ et $A\hat{D}C$. Justifier.
3°) En déduire que $A\hat{O}C = 2A\hat{D}C$. Calculer AÔC.

Exercice 5

Dans la figure ci-dessous ABC est un triangle isocèle en A, inscrit dans le cercle de centre O (rayon = 3 cm).
Sachant que BÂC = 25°, (KB) // (AC)
calculer $B\hat{O}C, B\hat{P}C, A\hat{B}C, B\hat{M}C, A\hat{B}K$



Exercice 6

ABC est un triangle inscrit dans un cercle de centre O et de diamètre [AD] tel que B soit sur l'arc $\overset{\frown}{AD}$ ne contenant pas C.
La parallèle à (BD) passant par C coupe (AB) en E.
1°) Montrer que (CE) est une hauteur du triangle ABC.
2°) Calculer $A\hat{C}B, A\hat{O}B, O\hat{B}A$ si $B\hat{D}A = 70°$.

Chapitre 4 : Géométrie dans l'espace

Pré-requis

Patron de solides : pavé droit, cube, cylindre, prisme droit, sphère
Position relative de droites et plans dans l'espace.
Parallélisme et orthogonalité dans l'espace.
Cercle, arc de cercle, longueur d'un arc de cercle

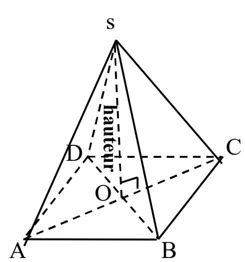
Compétences exigibles

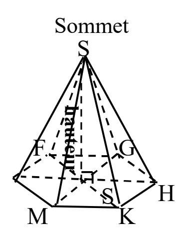
Faire une représentation plane d'une pyramide régulière et d'un cône de révolution.
Connaître la définition d'une pyramide régulière et d'un cône de révolution.
Calculer l'aire latérale d'une pyramide et celle d'un cône de révolution
Calculer le volume d'une pyramide régulière et celui d'un cône de révolution
Calculer le volume d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution, obtenue par agrandissement ou par réduction
Calculer le volume d'un tronc de cône et d'un tronc de pyramide
Réaliser un patron d'une pyramide régulière et d'un cône de révolution.
Utiliser les théorèmes de Pythagore et de Thalès dans l'espace
Connaître la définition d'une pyramide
Faire une représentation plane :
-d'un cône et d'une section de cône suivant un plan parallèle à sa base
-d'une pyramide et d'une section de pyramide suivant un plan parallèle à sa base

Définitions

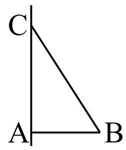
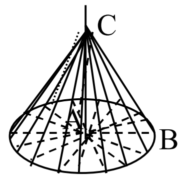
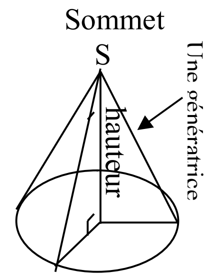
Soit un polygone contenu dans un plan et S un point n'appartenant pas à ce plan.
Lorsqu'on joint le point S aux différents sommets de ce polygone, on obtient une pyramide de sommet S et de base le polygone.

La hauteur est la droite perpendiculaire au plan de base et passant par le sommet S





Lorsque la base est un polygone régulier et les arrêtes sont de même lonugueur, la pyramide est régulière.

Voici représenté sur la figure 1, un triangle ABC rectangle en A .  fig 1  fig 2	* Lorsque l'on fait tourner le triangle rectangle autour d'un de ses côtés de l'angle droit, on obtient un cône de révolution. * Le point B décrit le cercle * Le segment [AB] engendre le disque de base *D*. 
On fait faire au triangle ABC un tour complet autour de la droite (AC) qui reste fixe (voir fig. 1) Le résultat de ce déplacement est représenté sur la figure 2 1° Le point B décrit quelle figure ? 2° Le segment [AB] engendre quelle surface ? On dira que le segment [CB] engendre une surface conique et le triangle ABC un cône de révolution.	**Vocabulaire** *Le segment [CB] engendre la surface conique S *Le triangle ABC engendre le cône de révolution *La base est un disque dont le périmètre est égal à la longueur de l'arc de la surface latérale S. *Tout segment joignant le sommet et un point quelconque du cercle de base est appelé une génératrice du cône. La droite issue du sommet et passant par le centre du cercle de base est la hauteur du cône. Elle est perpendiculaire au plan de base.

L'aire de la pyramide est la somme de l'aire de la surface de base et l'aire de la surface latérale.

L'aire du cône est la somme de l'aire du disque et l'aire de la surface latérale :

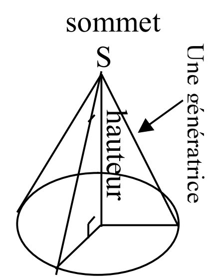
Soit A la surface latérale :

Appelons R la longueur d'une génératrice, r le rayon du disque de base, h la hauteur et α l'angle au sommet du cône.

La longueur l d'un arc étant proportionnelle l'angle au centre qui l'intercepte

Angle au centre	360°	α°
Longueur de l'arc	2π r	l

On a : $l = \frac{2x\pi xRx\alpha}{360}$ (1)



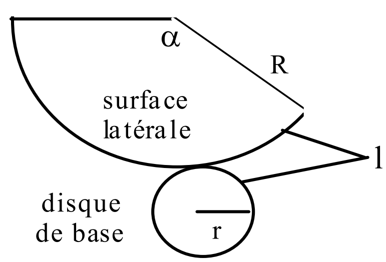
La longueur de l'arc étant égale au périmètre du disque de base, on a :

$l = 2\pi \mathbf{r}$ (2)

De (1) et (2) on tire la relation :

D' où $\alpha = \frac{\mathbf{360\ r}}{\mathbf{R}}$

$l = \begin{cases} \text{- longueur de l'arc (surface latérale)} \\ \text{- périmètre du disque de base} \end{cases}$



$\frac{r}{R} = \frac{a}{360}$ d'où $\alpha = \frac{360r}{R}$.

$I = \begin{cases} -\textit{longueur de l'arc (surface lathérale)} \\ -\textit{périmètre du disque de base} \end{cases}$

$A = \frac{\alpha R^2}{2}$ en remplaçant α par sa valeur on obtient $A = \pi Rr$.

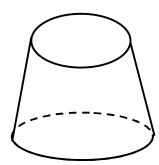
L'aire du disque de base est πr^2 .

Donc l'aire totale est égale à : $\pi Rr + \pi r^2$.

Volume :
Le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution est :
$V = \frac{1}{3} \times (\text{Aire de Base}) \times \text{hauteur}$

SECTION D'UN CÔNE PAR UN PLAN PARALLÈLE À LA BASE

Propriété
La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un cercle dont le centre appartient à la hauteur du cône d'origine
Vocabulaire
La partie ayant la forme ci- dessous obtenue par section d'un cône suivant un plan parallèle est appelée un tronc de cône.
.



Propriété
Si on multiple par k les longueurs d'un cône C d'aire A et de volume V, on obtient un cône C' d'aire A' et de volume V' telle que :
$A' = k^2 \times A$ et $V' = k^3 \times V$

Propriété
Lorsque $k > 1$ on dit que c'est un agrandissement de C.
Lorsque $0 < k < 1$ on dit que c'est une réduction

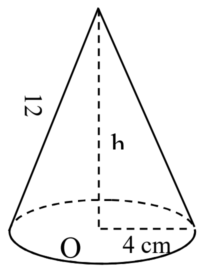
Propriété
La section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à sa base est un polygone régulier de même nature que celui de la base.
Le centre de la section appartient à la hauteur de la pyramide.
Vocabulaire
La partie de la pyramide restée dans l'eau obtenue par section suivant un plan parallèle est appelée un tronc de pyramide.
Propriété
Si on multiple par un nombre k strictement positif, les longueurs d'une pyramide P d'aire A et de volume V, on obtient une pyramide P' d'aire A' et de volume V' telle que :
$A' = k^2 \times A$ et $V' = k^3 \times V$
Vocabulaire
- Lorsque $k > 1$ on dit que P' est un agrandissement de P.
- Lorsque $0 < k < 1$ on dit que P' est une réduction de P.

Application :

Exercice 1

On donne le cône représenté ci-contre

1) Calcule le périmètre du disque de base.
2) Que représente ce périmètre pour la surface latérale.
3) Déduis-en la mesure en degré de l'angle au sommet S du secteur circulaire définissant la surface latérale de ce cône.
4) Dessine la figure F, réunion de la surface latérale et la base.
5) Calcule la hauteur du cône obtenu.



Solution :

On sait que :

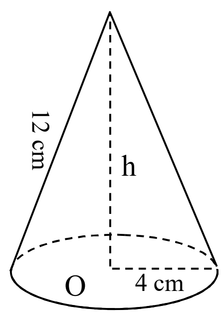
- le rayon de l'arc est :

R = 12 cm

1) Le rayon du disque de base est r = 4 cm

donc le périmètre est :

P = 2 x 4 x π = 25,12 cm



2) Le périmètre n'est autre que la longueur de l'arc de la surface latérale

3) D'après les questions 1 et 2 on a :

$$P = 2 \times 4 \times \pi = \frac{2\pi R\alpha}{360}$$

Ce qui donne en simplifiant par π :

$$\alpha = \frac{360 \times r}{R}$$

En remplaçant respectivement R et r par 12 et 4 , on obtient :

$\alpha = \quad = 120°$

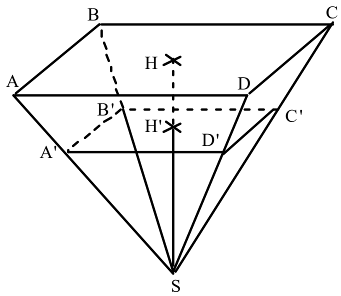
5) Pour calculer la hauteur de ce cône, on applique le théorème de Pythagore au triangle SOB rectangle en O.

$h^2 = R^2 - r^2 = 128$

Donc la hauteur h est égale à $8\sqrt{2}$

Exercice 2

Une boîte de chocolats a la forme d'une pyramide tronquée (figure ci-dessous) Le rectangle ABCD de centre H et le rectangle A'B'C'D' de centre H' sont des plans parallèles. On donne : AB = 6 cm ; BC = 18 cm ; HH' = 8 cm ; SH = 24 cm.



1) Calcule le volume V_1 de la pyramide SABCD de hauteur SH.

2) Quel est le coefficient k de la réduction qui permet de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SA'B'C'D' de hauteur SH' ?

3) Déduis en le volume V_2 de la pyramide SA'B'C'D' puis le volume V_3 de la boîte de chocolats ?

Solution

1) $V1= \frac{1}{3} \times$(aire de base) $\times$hauteur

Aire de base= $6 \times 18 = 108 cm^2$

La hauteur est SH=24cm donc $V_1 = 864cm^3$

2) Le coefficient de réduction est $k=\frac{SH'}{SH}=\frac{2}{3}$

3) Le volume la pyramide SA'B'C'D' est $V_2=k^3V_1$ soit $V_2 = 256cm^3$

Le volume V_3 de la boite est $V_3 = V1 - V_2$ soit $V_3 = 608cm^3$

Exercice 3

Une pyramide régulière a pour base un carré de côté 2 cm et une hauteur de 4 cm.

1) Calcule le volume de cette pyramide.

2) On réduit cette pyramide à l'échelle $\frac{2}{3}$; on obtient une pyramide régulière à $\frac{2}{3}$ base carrée

a) Quel est le côté de son carré de base ?

b) Quelle est sa hauteur ?

Calcule le volume V' de cette pyramide.

3) Vérifie que $V' = (\frac{2}{3})^3 \times V$

Solution

1) Calcul du volume de la pyramide

$V=\frac{1}{3} B \times h$

Aire de base B est l'aire du carré de côté c=2cm soit $B= 4cm^2$ et h= 4cm, donc $V=5.33cm^3$

2 a) Le côté de son carré de base est $c'=\frac{2}{3}c$ soit c' = 1,33cm

b) sa hauteur est $h' = \frac{2}{3}h$ soit h' = 2,66cm.

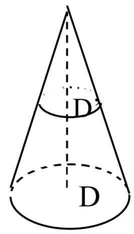
Le volume de la pyramide réduite est $V' =\frac{1}{3} B' \times h'$ avec $B' =1,77cm^2$ Donc $V' = 1,57 cm^3$

3) on a $(\frac{2}{3})^3 \times V = 1{,}57$ d'ou le résultat.

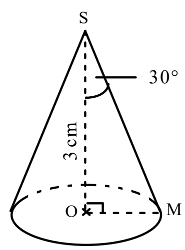
Exercices d'entraînement

Exercice 1

Un cône de révolution de sommet S a pour hauteur 15 cm et pour base un disque D de rayon 4 cm.
D' est la section de ce cône par un plan parallèle à la base; ce disque D' a pour rayon 3 cm.
a) Fais une figure
b) D' est-il une réduction de D ? À quelle échelle ?
c) Calcule le volume du cône de base D, puis déduis en le volume du cône de base D'.



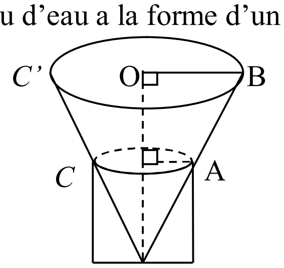
Exercice 2



a) Avec les données de cette figure, calcule le rayon OM du disque du cône.
b) On coupe ce cône par un plan parallèle à la base, au point N de [SM] tel que : $SN = \frac{5}{14} SM$
Quelle est la nature de cette section ?
c) Cette section est une réduction du disque de base. À quelle échelle ?
d) Calcule le rayon de cette section.
e) Notons O' le centre de cette section. Calcule SO'.

Exercice 3

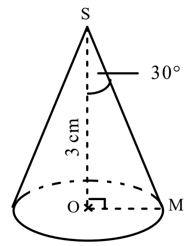
Un château d'eau a la forme d'un tronc de cône (voir dessin)



On donne OO' = OA = OS = 5 cm
1) Calcule la distance O'B.
2) Calcule le volume du cône C de sommet S et de base le disque de rayon [OA]

3) Soit C' le cône de sommet S et de base le disque de rayon [O'B]. En constatant que le cône C' est un agrandissement du cône C, montre que le volume de C' est 8 fois plus grand que celui de C.
4) Calcule alors le volume du cône C puis déduis en celui du château d'eau.

Exercice 4



a) Avec les données de cette figure, calcule le rayon OM du disque du cône.
b) On coupe ce cône par un plan parallèle à la base, au point N de [SM] tel que : SN = $\frac{5}{14}$SM.
Quelle est la nature de cette section ?
c) Cette section est une réduction du disque de base. À quelle échelle ?
d) Calcule le rayon de cette section.
e) Notons O' le centre de cette section. Calcule SO'.

Chapitre 5 : Les vecteurs

Pré- requis

Caractérisation vectorielle du parallélogramme.

Propriétés de la translation.

Propriété de Thalès.

COMPÉTENCES EXIGIBLES

Construire le vecteur somme de deux vecteurs donnés.

Connaître et utiliser la relation de Chasles.

Connaître et utiliser les propriétés de l'addition des vecteurs

Connaître et utiliser les propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.

Utiliser une égalité vectorielle pour démontrer :

- la colinéarité de vecteurs
- le parallélisme de droites
- l'alignement de points

1. Théorème et définition

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ Pour tout point du plan, si C est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ suivi de la translation de vecteur $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ est le vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

NB : Pour obtenir $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, il suffit de trouver trois points A, B et C tels que :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

2. Relation de Chasles

Des points A, B et C étant donnés on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Cette égalité traduit la relation de Chasles

3. Propriété de l'addition vectorielle

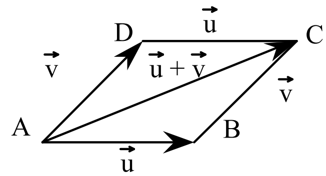
a. Commutativité :

On a toujours l'égalité vectorielle :

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Configuration :

La configuration du parallélogramme illustre la commutativité de l'addition vectorielle.



$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

b. Associativité

Propriété

On a toujours $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

NB : La commutativité et l'associativité font que pour effectuer une addition de plusieurs vecteurs, je peux changer l'ordre des termes et les regrouper à ma convenance.

Exemple $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AS}$

$= (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA}) + \overrightarrow{AS}$

$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{CS}$.

c. Le vecteur nul

Par définition, le vecteur nul est le vecteur de longueur nulle. Il est noté $\vec{0}$, et ce symbole se lit "vecteur nul" .

Pour tous les points M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens.

La translation de vecteur nul ne déplace aucun point du plan. On a toujours :

$$t_{\vec{0}}(M) = M$$

4. **Vecteurs opposés**

Deux vecteurs opposés sont deux vecteurs qui ont la même direction, des sens contraires et la même longueur.

Deux vecteurs sont opposés lorsque leur somme est égale au vecteur nul.

Ainsi **:** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$**.**

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On note **:** $\overrightarrow{BA} = - \overrightarrow{AB}$ **et** $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$**.**

Remarques importantes :

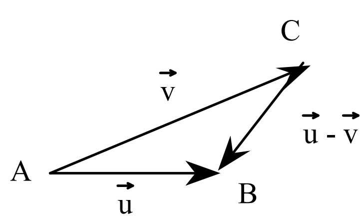
-Autre formulation de la relation de Chasles

Soient A, B, C trois points quelconques du plan. On a avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

D'où l'autre formulation de la relation de Chasles exprimant un vecteur comme différence de deux vecteurs de même origine.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$



- Milieu d'un segment

I est le milieu du segment [AB] *équivaut à* :

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ou encore à **:** $\overrightarrow{IA} = - \overrightarrow{IB}$

5) Définition

Si $k > 0$, $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$ signifie que $\overrightarrow{AC}$ a la même direction que $\overrightarrow{AB}$, le même sens que $\overrightarrow{AB}$ et pour longueur $AC = k\,AB$.

Si $k < 0$, $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$ signifie que $\overrightarrow{AC}$ a la même direction que $\overrightarrow{AB}$, le sens contraire de $\overrightarrow{AB}$ et pour longueur $AC = (-k)\,AB$.

Si $k = 0$, $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$ signifie que $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Premières propriétés

$1.\,\vec{u} = \vec{u}$

$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$

$(a + b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u}$

$a(b\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}$

Remarque : Si $k\vec{u} = \vec{0}$, alors $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

6) Vecteurs de même direction

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même direction lorsque qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$.

Remarque : Le vecteur nul n'a pas de direction.

7) Vecteurs colinéaires

a. Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils sont tous deux de même direction ou si l'un d'eux est nul.

Remarque : Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

b. Utilisation de la colinéarité

i) Trois points A, B et C sont alignés

équivaut à

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

ii) Soient I et J deux points distincts.

M appartient à la droite (IJ)

si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.

iii) Soient quatre points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles

équivaut à les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercices d'application

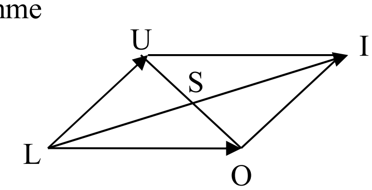
Exercice1

L, O, U sont trois points non alignés du plan. S est le milieu du segment [OU].

1. Construis le point I tel que : $LI = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU}$
2. Démontrer que $\overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU} = 2\,LS$

Solution

1. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU}$ où les deux vecteurs, de la somme ont la même origine L permet d'utiliser la configuration du parallélogramme pour construire le point I.



$\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU}$ traduit que LOIU est un parallélogramme.

2 .Pour montrer que $\overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU} = 2\overrightarrow{LS}$, il suffit de montrer que $\overrightarrow{LI} = 2\overrightarrow{LS}$ Ce qui revient à montrer que S est le milieu du segment [LI].
Pour cela, on utilise la propriété du parallélogramme qui dit : « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu ». Dans le parallélogramme LOIU, S est le milieu de [OU]. Donc S est le milieu de [LI].Par suite $\overrightarrow{LI} = 2\overrightarrow{LS}$.

Comme $\overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU} = \overrightarrow{LI}$ et $\overrightarrow{LI} = 2\overrightarrow{LS}$ on peut conclure que $\overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU} = 2\overrightarrow{LS}$

Exercice 2
Soient Q, U , A et D quatre points quelconques du plan. On note P, R, L et G les milieux respectifs de [QU], [UA], [AD] et [DQ].
1) Construis la figure.
2) Détermine la nature du quadrilatère PRLG.

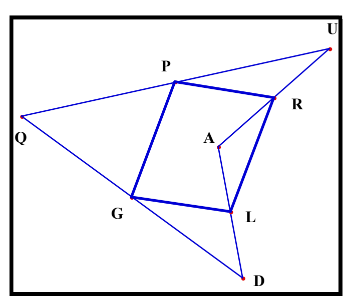
Solution
La figure permet de conjecturer que PRLG est un parallélogramme. Un chaînage arrière conduit à démontrer par exemple que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{GL}$.
On utilise le théorème des milieux sous sa forme vectorielle deux fois.
Dans le triangle QUA, P est le milieu de [UQ] et R est le milieu de [UA].

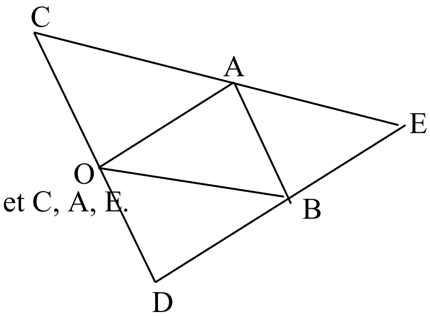
Donc $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA}$ (1)

Dans le triangle QAD, G est le milieu de [DQ] et L est le milieu de [DA].

Donc $\overrightarrow{GL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA}$ (2)

(1) et (2) entraînent que : $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{GL}$.. Donc PRLG est un parallélogramme.





<u>Exercice</u> 3

Soit O, A, B trois points distincts non alignés.

1) Construis les points C, D et E tels que **:**

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ **;** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$ **;**

$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA}$**.**

2) Vérifie que les points C, O, D sont alignés, ainsi que E, B, D et C, A, E.

3) Précise la position des points O, B et A.

<u>Solution</u>

1) On utilise la configuration du parallélogramme pour Construire les points C, D et E.

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ traduit que ABOC est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$ traduit que AODB est un parallélogramme.

$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA}$.traduit que BOAE est un parallélogramme.

2) Du parallélogramme ABOC, on tire $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AC}$.

Du parallélogramme AODB, on tire $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DB}$.

Du parallélogramme BOAE, on tire $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{EA}$.

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BA}$ entraînent que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DO}$. Donc C, O et D sont alignés.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BE}$ entraînent que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BE}$. Donc E, B et D sont alignés.

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{EA}$ entraînent que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EA}$. Donc C, A et E sont alignés.

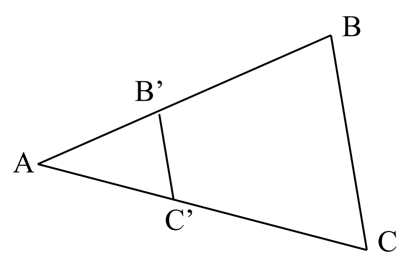
3. L'égalité $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DO}$ donne O milieu de [CD]. L'égalité $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BE}$ donne B milieu de [DE]. L'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EA}$ donne A milieu de [CE].

<u>Exercice 4</u>

Soit ABC un triangle et B' et C' les points définis par : $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

Démontre que les droites (BC) et (B´C´) sont parallèles.

<u>Solution</u>



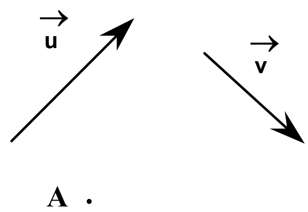
Indication : A l'aide d'une demi-droite arbitraire d'origine A, on utilise le théorème de Thalès pour construire les points B' et C'.

Pour montrer que les droites (BC) et (B'C') sont parallèles, il suffit d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{B'C'}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Pour cela, tu décomposes le vecteur $\overrightarrow{B'C'}$. La configuration du triangle B'AC' suggère la relation de Chasles : $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{AC'}$. Or on a $\overrightarrow{AB'}= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Donc $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AC'}- \overrightarrow{B'A}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{AC}+ \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. D'où les droites (BC) et (B'C') sont parallèles

Exercices d'entraînement

Exercice 1 *construction de la somme de deux vecteurs*



Construction d'un vecteur d'origine A et égal au vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ de deux façons :

1.a). Construis le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

Justifie que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.

1.b) Construis le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$ et le point E tel que $\overrightarrow{DE} = \vec{v}$. Que peux-tu dire des points E et C ? Conclus.

C'est la méthode de la "construction bout à bout".

2) Sur une autre figure, construis le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \vec{u}$, le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = \vec{v}$ et le point C tel que AICJ soit un parallélogramme. Justifie que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.

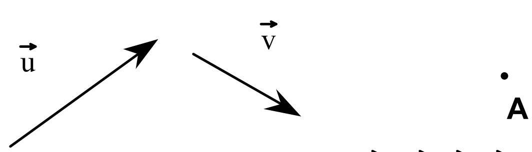
C'est *l*a méthode du parallélogramme.

Exercice 2

Soit ABCD un parallélogramme et O son centre.

Calcule $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Exercice 3



Construis les vecteurs d'origine A et égaux aux vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ **,** $\vec{u}$ **-** $\vec{v}$**, -** $\vec{u}$ **-** $\vec{v}$ **et -** $\vec{u} + \vec{v}$**.**

Exercice 4

Exprime plus simplement en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, chacun des vecteurs $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$, $\overrightarrow{w_3}$, $\overrightarrow{w_4}$, $\overrightarrow{w_5}$ définis par

$\overrightarrow{w_1}=\mathbf{2(\vec{u} + \vec{v}) - 2(\vec{u} - \vec{v})}$

$\overrightarrow{w_2}= \mathbf{\vec{u} + 2(\vec{v} -\vec{u}) - 3(\vec{u} - \vec{v})}$

$\overrightarrow{w_3}= \mathbf{3(\vec{u} -2\vec{v}) + 5(\vec{v} - \vec{u})}$**.**

$\overrightarrow{w_4} = \mathbf{3(-\vec{u} + \vec{v}) -2(2\vec{u} + \vec{v}) + 3\vec{u} + \vec{v}}$

$\overrightarrow{w_5} = \frac{1}{2}\mathbf{(4\vec{u} + 5\vec{v}) -3 (\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) - \vec{u} + \vec{v}}$

Exercice 5

1) Construis un hexagone régulier ABCDEF de centre O.

2) Complète les égalités suivantes en n'utilisant que des noms de points présents sur la figure.

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=$ ….. .; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BO}=$…..

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$ …… ; $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}=$ …. ; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}=$ …. ;$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DE}=$ … ;

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BC}=$……..

Exercice 6

Soit ABCD un parallélogramme.

1) Construis les points E, F, G et H tels que:

$\overrightarrow{DE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AF}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CH}=\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$.

2) Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ?

Exercice 7

1°) On considère un segment [AB] de milieu I.

Démontrer que pour tout point M du plan $\vec{MA}+\vec{MB}=2\vec{MI}$.

2°) ABC est un triangle, on suppose qu'il existe un point H tel que $\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{HC}=\vec{0}$. En utilisant le point I milieu de [AB], démontrer que H est un point de [IC]

Exercice 8

Soit ABC un triangle quelconque

1. Construis les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$
2. Démontre que les droites (BC) et (EF) sont parallèles (sans utiliser la réciproque de Thalès).

Exercice 9

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construis les points M et N tels que :

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$

2. Démontre que les droites (BN) et (MC) sont parallèles.

Exercice 10

Soit OAB un triangle.

1) Construis les points C et D définis par : $\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{AB}$.

2) Démontre que les points O, B et D sont alignés

Exercice 11

ABCD est un parallélogramme et M est un point quelconque du plan.

Démontrer que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

Exercice 12

1°) Construire le triangle ABC tel que AB = 5 cm, BC = 3 cm et AC = 4 cm.

2°) On pose $\vec{u}=\vec{AB}$; $\vec{v}=\vec{AC}$. Construire $\vec{u}+\vec{v}$.

3°) Placer le point E tel que $\vec{AE}=\vec{u}+\vec{v}$ puis diviser le segment [AE] en trois parties égales.

4°) On pose $\vec{w}=\vec{BC}$. Construire $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

5°) Soit G un point tel que $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$.

Démontrer que $\vec{AG}=\dfrac{\vec{AB}+\vec{AC}}{3}$ et construire G.

Chapitre 6 : Repérage

PRE-REQUIS

Repères

Vecteurs (programme de quatrième), produit d'un vecteur par un réel, somme de deux vecteurs.

Condition vectorielle d'alignement de trois points.

Parallélisme et orthogonalité de droites.

Théorème de Pythagore

COMPÉTENCES EXIGIBLES

Calculer les coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormal.

Calculer les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs.

Reconnaître, à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal, le vecteur nul, deux vecteurs égaux, deux vecteurs opposés.

Calculer les coordonnées du vecteur produit d'un vecteur par un réel.

Montrer à l'aide de leurs coordonnées que deux vecteurs sont :

-Colinéaires.

-Orthogonaux.

Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées.

Donner une équation générale d'une droite connaissant les coordonnées de deux de ses points.

Reconnaître l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées.

Déterminer l'équation réduite d'une droite.

Passer de l'équation réduite à l'équation générale si possible et inversement.

Donner une équation générale d'une droite connaissant les coordonnées d'un point et son coefficient directeur.

Représenter une droite dans un repère orthonormal à partir :

-de deux de ses points,

-d'un point et de son coefficient directeur,

-d'un point et d'un vecteur directeur ou d'une équation.

Donner une équation générale d'une droite connaissant :

-les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur

-les coordonnées d'un point et le coefficient directeur de la droite.

Reconnaître deux droites parallèles, perpendiculaires à partir de :

-leurs équations réduites,

-leurs coefficients directeurs,

-leurs vecteurs directeurs.

I. COORDONNÉES D'UN VECTEUR

1. Définition

Considérons un repère orthonormal (O,I,J).

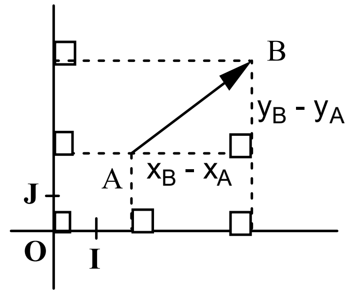
Étant donné 2 points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et un vecteur non nul $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$

-l'abscisse de $\overrightarrow{AB}$ est le nombre $x_B - x_A$

-l'ordonnée de $\overrightarrow{AB}$ est le nombre $y_B - y_A$

$x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ sont coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

on note : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$



Remarques

$\vec{U}$ (x,y) équivaut à $\vec{U} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$

2. Propriétés

a. Vecteurs égaux :

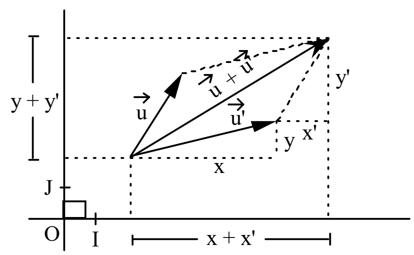
Soient deux vecteurs $\vec{U}$ (x,y) et $\vec{U}'$ (x',y') dans un repère orthonormal (O, I, J):

$\vec{U} = \vec{U}'$ équivaut à (x = x' et y = y')

b. Somme de deux vecteurs :

Soient deux vecteurs $\vec{U}$ (x, y) et $\vec{U}'$ (x', y')

on a $\vec{U} + \vec{U}' = \vec{W}$ (x + x', y + y')



c. Vecteur nul :

Le vecteur nul $\vec{O}$ a pour coordonnées (0,0)

d. Vecteurs opposés :

Dans un repère (O, I, J), deux vecteurs sont opposés si et seulement si leurs abscisses et leurs ordonnées sont opposées.

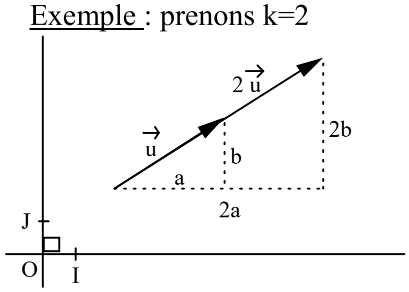
Soient $\vec{U}(x, y)$ *et* $\vec{V}(x', y')$, $\vec{U} = -\vec{V}$ *ssi* $x = -x'$ *et* $y = -y'$

e. Produit d'un vecteur par un réel :

Étant donné un vecteur $\vec{U}$ (a,b) et un nombre k .

Les coordonnées de k$\vec{U}$ sont (ka, kb).

Exemple : prenons k=2



f. Vecteurs colinéaire : (propriété admise)

Soient deux vecteurs $\vec{U}$ (x, y) et $\vec{U}'$ (x' , y')

$\vec{U}$ et $\vec{U}'$ sont colinéaires équivaut à : x y' - x' y = 0

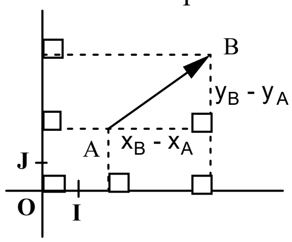
g. Vecteurs orthogonaux (propriété admise) :

Soient (O ;I ;J) un repère orthonormal ; deux vecteurs $\vec{U}$ (x,y) et $\vec{U}'$ (x',y'):

$\vec{U}$ et $\vec{U}'$ sont orthogonaux équivaut à : x x' + y y' = 0

II. DISTANCE DE DEUX POINTS

Considérons un repère orthonormal (O,I,J).



Calcul de la distance

Dans un repère orthonormal si A et B ont respectivement pour coordonnées (x_A,y_A) et(x_B, y_B) alors on a

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

III. EQUATION ET REPRESENTATION D'UNE DROITE

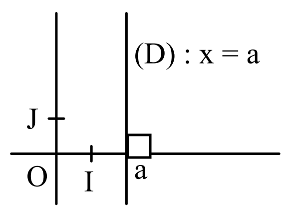
1. droites parallèles aux axes :

Propriétés : Dans un repère (O, I, J) :

si une droite (D) est parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un nombre a tel que pour tout point M (x , y) :

M appartient à (D) *équivaut à* x = a

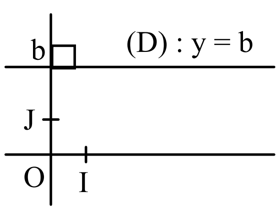
(D) a pour équation x = a



Si une droite (D) est parallèle à l'axe des abscisses, alors il existe un nombre b tel que pour tout point M (x , y) :

M appartient à (D) *équivaut à* y = b

(D) a pour équation y = b



2. Equation générale :

Propriété :

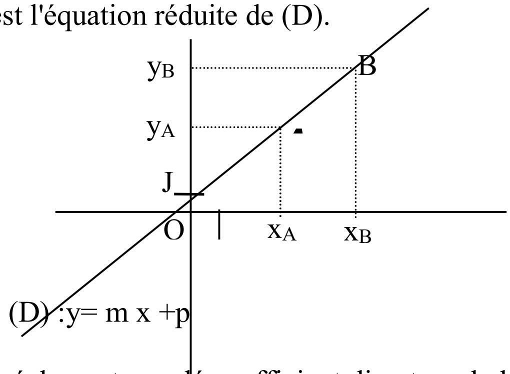
Dans un repère (O, I, J), un point M(x,y) appartient à une droite (D) si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation du type $ax + by + c = 0$ avec a, b,c étant des réels.

Ce type d'équation est appelé équation générale de (D)

3. Equation réduite ; coefficient directeur

Si $b \neq 0$, l'équation de (D) peut se mettre sous la forme $y = m x + p$

C'est l'équation réduite de (D).



Le réel m est appelé coefficient directeur de la droite (D) et p l'ordonnée à l'origine

4. Vecteur directeur :

Définition

Étant donné une droite (D) :

Pour tous points distincts A et B de (D), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (D).

Remarques :

- Si l'équation de (D) s'écrit sous la forme : $ax + by + c = 0$, alors $\vec{V}$ (-b, a) est un vecteur directeur de (D).
- Si l'équation réduite de (D) s'écrit sous la forme $y = mx + p$, alors $\vec{V}$ (1, m) est un vecteur directeur de (D).

MÉTHODE

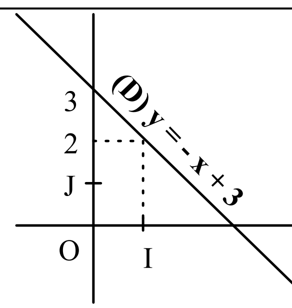
Pour construire la droite (D) : $y = a x + b$:

- je choisis deux valeurs x_1 et x_2
- je détermine les coordonnées (x_1 , $a x_1 + b$) et (x_2 , $a x_2 + b$) deux points de (D).
- je place les deux points correspondants.
- (D) est la droite passant par ces deux points.

Exemple : (D) : $y = - x + 3$

pour $x = 0$, $y = 3$

pour $x = 1$, $y = 2$



MÉTHODE DE CONSTRUCTION DE DROITE

a) Construire une droite connaissant un point et un vecteur directeur

Pour construire une droite (D) passant par un point M_0 et dont un vecteur directeur est : $\vec{U}$

- je place le point M_0.
- je construis le point M tel que $\overrightarrow{M_0M} = \vec{U}$
- (D) est la droite passant par M_0 et M.

b) Construire une droite connaissant un point et le coefficient directeur

Pour construire une droite (D) de coefficient directeur a, passant par un point M_0:

- je place le point M_0.
- je construis le point M tel que $\overrightarrow{M_0M}$ (1, a)
- (D) est la droite passant par M_0 et M.

5. Droites parallèles ; droites perpendiculaires

Propriétés :

a. Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

b. Deux droites sont perpendiculaires si et seulement leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

c. Considérons deux droites quelconques (D) et (D') de coefficients directeurs a et a' :

si (D) // (D') alors a = a'

si a = a' alors (D) // (D')

si (D) $\perp$ (D') alors aa' = -1

si aa' = -1 alors (D) $\perp$ (D')

Application

Exercice 1

On considère un repère orthonormal (O,I,J). Soient $A(1,1)$ *et* $B(-1,-3)$.

1°) Donnez une équation générale de la droite (D) passant par A et B

2°) En déduire l'équation réduite de cette droite

3°) Calculer la distance AB

4°) Donner une équation générale de la droite (D') de vecteur directeur $\vec{U}(-2,1)$ et passant par $C(2,1)$

5°) Montrer que les droites (D) et (D') sont perpendiculaires

6°) Représenter les deux droites (D) et (D') dans le repère orthonormal (O,I,J).

Solution

1°) La droite passant par A et B, $\overrightarrow{AB}$ en est un vecteur directeur de (D)

$\overrightarrow{AB}$ (-1-1,-3-1) , $\overrightarrow{AB}$ (-2,-4)

M(x,y) appartient à (D) ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{AM}$ (x-1,y-1)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires ssi $-2\times(y-1)-(-4)(x-1)=0$ soit $-2y+2+4x-4=0$

Après simplification on obtient (D) : $2x-y-1=0$

2°) L'équation réduite de la droite (D) est : $y=2x-1$

3°) $AB=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

4°) si M(x,y) appartient à (D') alors les vecteurs $\vec{U}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{CM}$ (x-2,y-1) et $\vec{U}(-2,1)$ colinéaires ssi $-2\times(y-1)-1\times(x-2)=0$ On obtient

(D') : $x+2y-4=0$

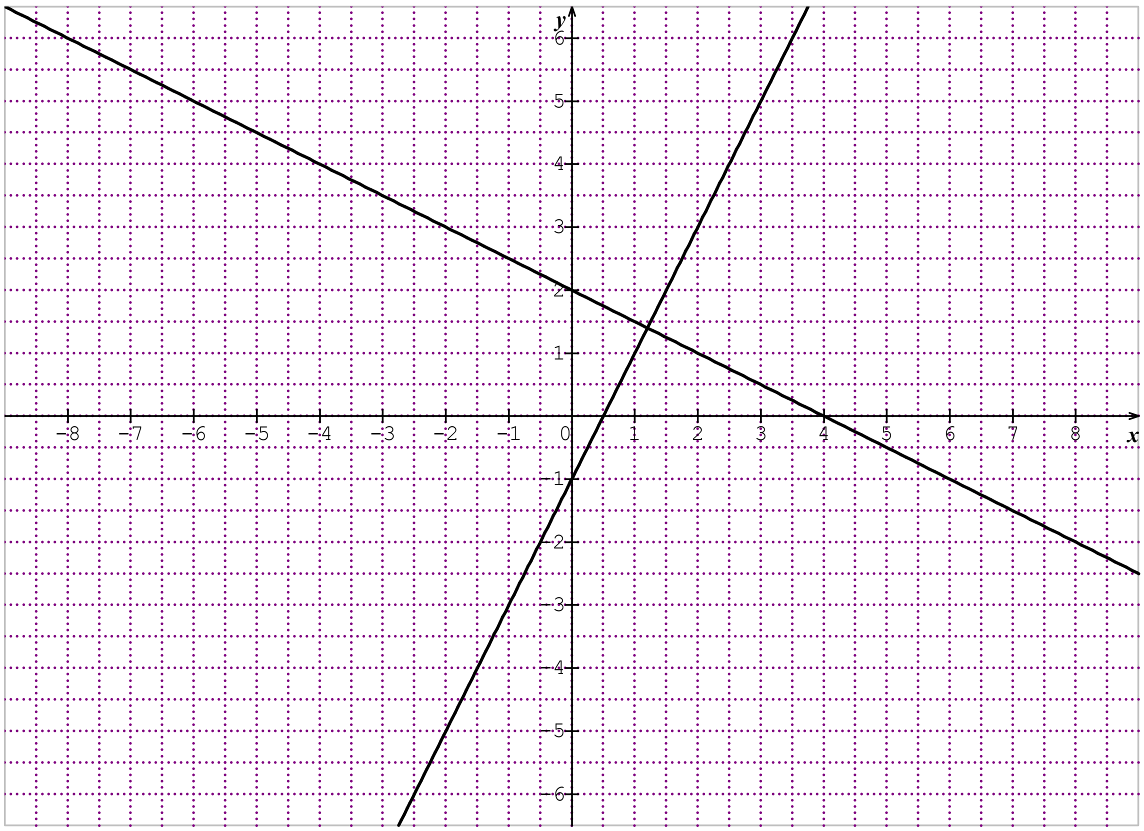
5°) L'équation réduite de (D') est : $y=-\dfrac{x}{2}+2$

Or l'équation réduite de (D) est $y = 2x - 1$

Le coefficient de (D) est 2 et celui de (D') est $-\dfrac{1}{2}$ On a : $2 \times -\dfrac{1}{2} = -1$

Ainsi les deux droites (D) et (D') sont perpendiculaires

6°) Représentation graphiques des deux droites



Exercice 2

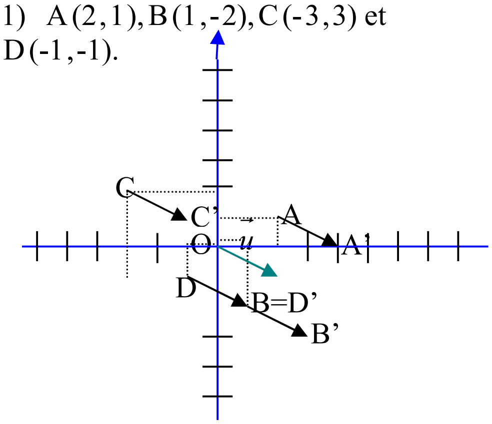
1) Dans un repère orthonormal (O,I,J), place les points :
$A(2,1), B(1,-2), C(-3,3)$ et $D(-1,-1)$.

2) On considère le vecteur $\vec{U}$ $(2,-1)$. Calcule les coordonnées des points A', B', C' et D'

tels que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \vec{U}$ Place ces quatre points dans le repère orthonormal (O,I,J).

Solution

1) $A(2,1), B(1,-2), C(-3,3)$ et $D(-1,-1)$.



2) On a : $\vec{U}\ (2,-1)$.

Coordonnées de A' : posons (x, y) le couple de coordonnées de A'.

Si $\overrightarrow{AA'} = \vec{U}$ alors $x - x_A=2$ et $y-y_A=-1$ donc x-2=2 et y-1=-1 d'où x=4 et y=0. Par conséquent A'(4,0).

Coordonnées de B' : posons (x, y) le couple de coordonnées de B'.

Si $\overrightarrow{BB'} = \vec{U}$ alors $x - x_B=2$ et $y-y_B=-1$ donc x-1=2 et y+2=-1 d'où x=3 et y=-3. Par conséquent B'(3,-3).

Coordonnées de C' : posons (x, y) le couple de coordonnées de C'.

Si $\overrightarrow{CC'} = \vec{U}$ alors $x - x_C=2$ et $y-y_C=-1$ donc x+3=2 et y-3=-1 d'où x=-1 et y=2. Par conséquent C'(-1,2).

Coordonnées de D' : posons (x, y) le couple de coordonnées de D'.

Si $\overrightarrow{DD'} = \vec{U}$ ors $x - x_D=2$ et $y-y_D=-1$ donc x+1=2 et y+1=-1 d'où x=1 et y=-2. Par conséquent D'(1,-2).

Remarque D'=B.

Exercice 3

Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J). On donne :
$A(4,-6), B(10,8), C(0,-2)$ et $D(3,5)$.

1) Démontre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

Solution

1) $\overrightarrow{AB}$ (x, y) et $\overrightarrow{CD}$ (x', y') sont colinéaires si et seulement si x y' –x' y = 0.

Or x y' –x' y = (6 ×7)- (3×14)=0 donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2) $\overrightarrow{BD}$ (-7,-3) et $\overrightarrow{CD}$ (3,7) or(-7×7) – (-3×3)=-28≠0 donc les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires

Exercice 4

Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J). On donne : $A(-1,-1)$ et $B(3,1)$.

Trouve les coordonnées de deux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$ tels que C∈(OJ) et D∈(OI).

Solution

On a $\overrightarrow{AB}$ (4, 2).

On sait que :

- si C∈(OJ) alors C a pour coordonnées (0, y), puis $\overrightarrow{AC}$ pour coordonnées (1, y+1)
- si D∈(OI) alors D a pour coordonnées (x, 0), puis $\overrightarrow{AD}$ pour coordonnées (x+1, 1)

or :

- si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ alors 4 + 2(y + 1)=0, d'où y=-3 donc C a pour coordonnées (0, -3).

- si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ alors 4(x +1)+2=0 d'où x=$\frac{-3}{2}$ donc D a pour coordonnées ($\frac{-3}{2}$,0).

Exercice 5

Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J).
On donne :

$\overrightarrow{AB}$ (-1 ,-4), $\overrightarrow{CD}$ (0 ,-3), $\overrightarrow{EF}$ (2,3).
Calcule le couple de coordonnées de :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$

Solution

L'abscisse de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ est égale à l'abscisse de $\overrightarrow{AB}$ plus celle de $\overrightarrow{CD}$ et l'ordonnée de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ est égale à l'ordonnée de $\overrightarrow{AB}$ plus celle de $\overrightarrow{CD}$

D'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées (-1,-7).

De même $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées (1,-1) et $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ pour coordonnées (2,0).

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J).
On donne les points A(-3,-1), B(2,1) et C(1,y).
Calculer y pour que A, B et C soient alignés.

Exercice 2

Le plan muni d'un repère orthonormal (O,I,J).
Construis les droites (D_1): x = -2, (D_2): x = 3, (D_3) : y = 3 et (D_4) : y = -1,5

Exercice 3

Le plan est muni du repère orthonormal (O , I , J). Dans chacun des cas suivants, calcule le coefficient directeur de la droite (AB) :

1) A(3,5) et B(1,-2)
2) A(-1,-4) et B(-3,-2)
3) A($\frac{1}{2}$,2) et B(0,-$\frac{2}{3}$)
4) A(3,0) et B(-3, $\frac{3}{4}$)

Exercice 4

Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J).
Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (L) passant par le point A et parallèle à la droite (BC) :

1) A(1,2), B(4,-3) et C(-3,2)
2) A(5,-3), B(-1,2) et C(3,2)
3) A(3,-1), B(1,0) et C(1,4)

Exercice 5
Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J).
Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (L) passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC) :
1) $A(0,-2)$, $B(4,-3)$ et $C(1,-2)$
2) $A(1,-1)$, $B(-1,2)$ et $C(3,2)$
3) $A(2,-1)$, $B(1,3)$ et $C(1,-3)$
Exercice 6
Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J).
On donne $A(3,5)$, $B(-2,2)$ et $C(-4,3)$.
Trouve le couple de coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.
Exercice 7
Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J).
On donne les points A(-2,-2), B(-4,4),
$C(2,6)$ et $D(4,0)$.
1) Démontre que [AC] et [BD] ont même milieu.
2) Démontre que : AC = BD.
3) Démontre que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$
4) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD
Exercice 8
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$. Soit les points A(3,-2) ; B(1,2) ; C(9,1)
1°) placer les points A, B et C
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis les longueurs AB, AC et BC.
En déduire que ABC est un triangle rectangle en A
3°) Déterminer les coordonnées du point I centre du cercle circonscrit au triangle ABC et son rayon R
4°) En posant ABC = α .Calculer $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$
Exercice 9
Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J).
$A(-1,4)$, $B(6,-1)$ et $C(0,-3)$ sont 3 points.
Les points A' et B' sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].
1) Détermine une équation de chacune des médianes (AA') et (BB').
Détermine le couple de coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.
2) Vérifie par un calcul que :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

Chapitre 7 : Les transformations

PRÉ-REQUIS

Isométries vues en 6è, 5è et 4è : translation, symétrie centrale, symétrie axiale, rotation.
Action successive de deux translations.

COMPETENCES EXIGIBLES

Reconnaître la transformation résultant de :
-deux symétries orthogonales successives
-deux symétries centrales successives
-deux translations successives.

Définition 1

Une transformation du plan est une application du plan dans lui-même telle que :

- Tout point du plan admet une image et une seule
- Les images de deux points distincts sont toujours deux points distincts

Exemples :la translation,la symétrie centrale,la symétrie axiale (orthogonale), la rotation
Contre-exemple la projection orthogonale n'est pas une transformation car elle ne vérifie pas la deuxième affirmation
Pour cela il suffit de considérer deux droites (D) et (D') perpendiculaires, prenez deux points A et B de (D). Soient A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B. On constate A' et B' sont confondus

Définition 2

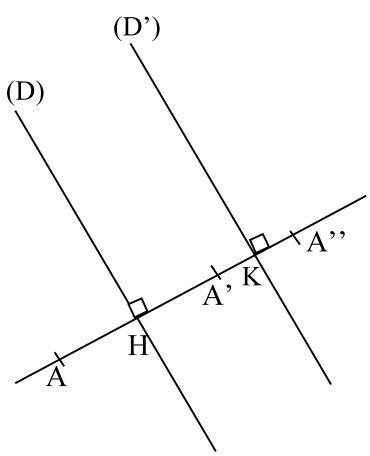
Une isométrie est une transformation qui conserve la distance
La translation, la symétrie centrale, la symétrie axiale (orthogonale) et la rotation sont des isométries

1°) Etude de deux symétries orthogonales successives par rapport à deux droites parallèles

Propriété :

(D) et (D') étant deux droites parallèles, faire la symétrie orthogonale par rapport à (D) suivie de la symétrie orthogonale par rapport à (D') revient à faire la translation de vecteur $2\overrightarrow{HK}$.

Configuration

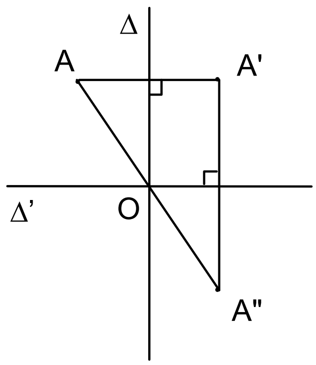


2°) Etude de deux symétries orthogonales successives par rapport à deux droites perpendiculaires

Propriété

(Δ) et (Δ') étant deux droites perpendiculaires en un point O, faire la symétrie orthogonale par rapport à (Δ) suivie de la symétrie orthogonale par rapport à (Δ') revient à faire la symétrie centrale de centre O.

Configuration

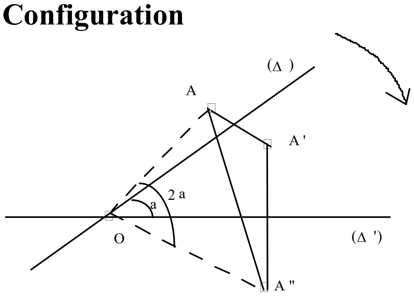


3°) Etude de deux symétries orthogonales successives par rapport à deux droites sécantes

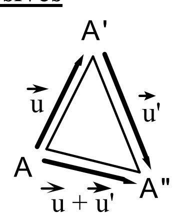
Propriété

(Δ) et (Δ') étant deux droites sécantes en O formant un angle de mesure a, faire la symétrie orthogonale par rapport à (Δ) suivie de la symétrie orthogonale par rapport à (Δ') revient à faire la rotation de centre O et d'angle de mesure 2a.

Configuration



4°) Etude de deux translations successives



Faire la translation de vecteur $\vec{u}$ *suivie de la translation de vecteur* $\vec{u'}$ *revient à faire la translation de vecteur* $\vec{u}+\vec{u'}$

5°) Etude de deux symétries centrales successives

Propriété

Faire la symétrie centrale de centre O suivie de la symétrie centrale O' revient à faire la

translation de vecteur $2\,\overrightarrow{OO'}$

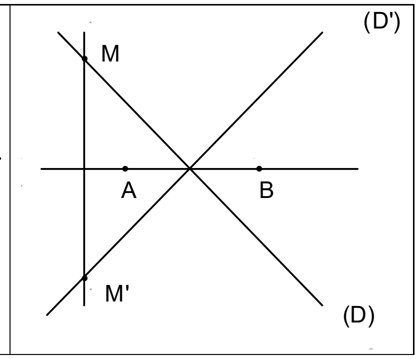
Application

Exercice 1

Soient une droite (D) et deux points A et B non situés sur (D). M étant un point quelconque de (D), détermine l'ensemble des points M' du plan tels que AM=AM' et BM=BM' lorsque M décrit (D).

Solution

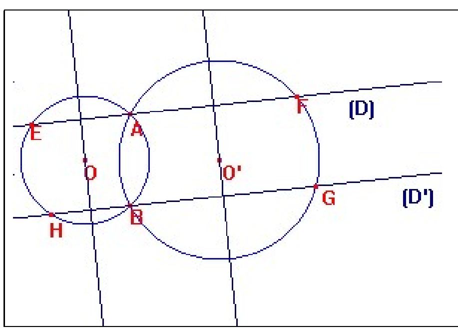
Si AM = AM' alors A appartient à la médiatrice de [MM'] ;
Si BM = BM' alors B appartient à la médiatrice de [MM'] ;
donc la droite (AB) est la médiatrice de [MM'].
Quel que soit le point M de (D), M' est son symétrique par rapport à (AB).
(D') est donc l'ensemble des symétriques M' des points M de (D).
(D') est donc la droite symétrique de (D) par rapport à (AB).



Exercice 2

1) Trace deux cercles $\mathcal{C}$ (O, r) et $\mathcal{C}$'(O', R) sécants en A et B et tels que r <R.
Par A, trace une droite (D) qui recoupe $\mathcal{C}$ en E et $\mathcal{C}$' en F. Par B, trace la droite (D') parallèle à la droite (D) ; elle recoupe $\mathcal{C}$ en H et $\mathcal{C}$' en G.
2) a) Fais une conjecture sur la nature du quadrilatère EFGH.
b) Trace respectivement par O et O' les droites (Δ) et (Δ') perpendiculaires à (D) et (D').
Vrai ou faux ?
F est l'image de E par l'action successive de la symétrie d'axe (Δ'), suivie de la symétrie d'axe (Δ).
c) Prouve la conjecture émise au 2) a).

Solution



a) Le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.
b) Vrai car (Δ) médiatrice du segment [EA] donc l'image de E par la symétrie d'axe Δ est A.
Δ' médiatrice du segment [AF] donc l'image de A par la symétrie d'axe Δ est F.
c) Montrons que EFGH est parallélogramme

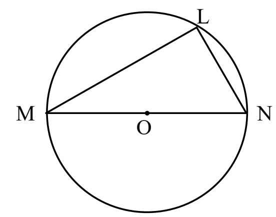
Nous savons que deux symétries orthogonales successives d'axes parallèles est une translation
Donc F et G sont les images respectives de E et H par la translation de vecteur $2\overrightarrow{MN}$.
M est le point d'intersection de (D) et de (Δ) et N celui de (D) et (Δ ').

On a alors $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{HG}$ donc le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

Exercices d'entraînement

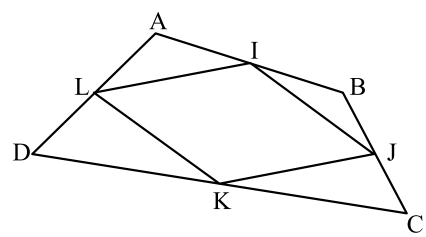
Exercice 1

On fait subir à la figure suivante l'action successive de la symétrie par rapport à la droite (LM), suivie de la symétrie par rapport à la droite (LN).
Construire directement la figure obtenue en utilisant les résultats du cours.



Exercice 2

Refaire en plus grand la figure suivante dans laquelle I, J, K et L sont les milieux des côtés du quadrilatère ABCD.



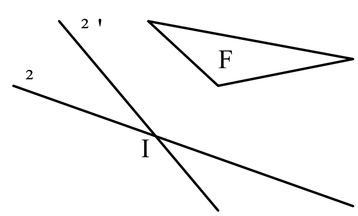
1) Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?
Justifie ta réponse.
2 a) Construis directement l'image du quadrilatère ABCD par l'action successive de la symétrie par rapport à I, suivie de la symétrie par rapport à L.
b) Quelle remarque peux-tu faire à propos de l'image de ABCD par l'action successive de la symétrie de centre J suivie de la symétrie de centre K ?
3) Construis directement l'image de ABCD, par l'action successive de la symétrie d'axe (LK), suivie de la symétrie d'axe (IJ).

Exercice 3

1) Trace un rectangle ABCD, puis son image par la rotation de centre A et d'angle 90° (on désignera par E, F et G les images respectives de B, C et D).
2) Construis l'image de toute la figure par l'action successive de :
a) la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$, suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$;
b) la symétrie par rapport à la droite (EA), suivie de la symétrie par rapport à la droite (CD) ;
c) la symétrie par rapport à D suivie de la symétrie par rapport à G.

Exercice 4

1) Construis l'image F_1 de la figure F par la symétrie par rapport à (Δ), puis l'image F_2 de F_1 par la symétrie d'axe (Δ').
2) Par quelle transformation passe-t-on de la figure F à la figure F_2 ?



Exercice 5

Soit un point A d'un cercle *C* de centre O, et le milieu I de [OA]. Soit (D) la médiatrice de [OA] et (Δ) la tangente en A au cercle *C*.
Construire l'image du cercle *C* obtenue en appliquant la symétrie par rapport à (D), puis la symétrie par rapport à (Δ).
Par quelle transformation obtient-on cette image du cercle *C* ?

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit les points A (6,5 ; 4), B (-2,5 ; -2) et (D) : y = $-\frac{3}{2}x+4$.
1°) Vérifier que la droite (D) passe par C (4 ;-2).
2°) Déterminer l'équation de (AB) et vérifier que (AB) ne passe pas par l'origine.
Démontrer que (AB) est perpendiculaire à (D).
Déterminer les coordonnées du point E commun à (AB) et (D).
Soit le point M (-1 ; 3) et soit M' le point obtenu en appliquant à M la symétrie par rapport (AB) suivie de la symétrie par rapport à (D).
Démontrer que E est le milieu de [MM'] et en déduire les cordonnées de M'.
Soit N le point obtenu en appliquant à M la symétrie de centre O suivie de la symétrie de centre E. Démontrer que $\vec{MN} = \vec{OE} + \vec{OE}$.
Déterminer les coordonnées du point N.

Documentation/sources

- Guide pédagogique de la classe de troisième
- Document stagiaire B A D 4 (Géométrie)
- Programme scolaire de 2006
- Quelques épreuves de B F E M