RESUME ET EXERCICES

Fomesoutra.com
ça soutra !

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

SUJETS ET RESUME DE COURS

MATHS

TLE D

BY TEHUA
2025

Fomesoutra.com
ça soutra !

FICHE DE COURS

1. Définition

On appelle équation différentielle, toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Exemple $7f'' + 5f' - 2f = 0$; $-4f'' + f' + 3f = 0$

2 Equations différentielles du type $f' \ af = 0$

a. Définition

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, toute équation différentielle qui peut s'écrire : $f' + af = 0$ ($a \in \mathbb{R}$)

Exemple $f'' + 3f' = 0$; $5f' - 2f = 0$; $6f' = 2f$; $-7f' + f = 0$

b. Résolution

Les seules solutions de l'équation différentielle (E): $f' + af = 0$ sont les fonctions f_k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f_k(x) = ke^{-ax}$ ($k \in \mathbb{R}$)

3 Equations différentielles du type $f'' = 0$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f'' = 0$ sont les fonctions $f(x) = Ax + B$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$)

4 Equations différentielles du type $f'' \ kf$ ($k \in \mathbb{R}$)

a. Equations différentielles du type $f'' - \omega^2 f = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$)

Les seules solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f'' - \omega^2 f = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$) sont les fonctions $f(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$)

b. Equations différentielles du type $f'' + \omega^2 f = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$)

Les seules solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f'' + \omega^2 f = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$) sont les fonctions $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$)

Scanned with CamScanner

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

EXERCICE 1

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

❶ $f'+3f=0$; ❷ $f'-6f=0$; ❸ $2f'-3f=0$; ❹ $-7f'+f=0$

❺ $3f'+\frac{2}{3}f=0$; ❻ $f'+\sqrt{5}f=0$; ❼ $2f'=5f$; ❽ $-2f'=\frac{2}{5}f$

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, détermine la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

❶ $f'-2f=0$ et $f(0)=1$

❷ $f'+7f=0$ et $f(1)=2$

❸ $2f'-5f=0$ et $f(1)=0$

❹ $-f'+6f=0$ et $f(3)=3$

❺ $2f'-\frac{4}{5}f=0$ et $f(-1)=2$

❻ $f'+\sqrt{3}f=0$ et $f(0)=-5$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE

EXERCICE 3

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

❶ $f''-4f=0$ ❷ $f''+3f=0$

❸ $-3f''+15f=0$ ❹ $2f''+f=0$

EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, détermine la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales données.

❶ $4f''+f=0$ $f(0)=1$ *et* $f'(0)=0$

❷ $f''-f=0$ $f(0)=2$ *et* $f'(0)=1$

❸ $f''+\frac{1}{9}f=0$ $f(\pi)=1$ *et* $f'(\pi)=0$

Scanned with CamScanner

PROBLEMES DE SYNTHESE RESOLUS

PROBLEME Partie A du problème du bac 2002. Session normale.

On se propose de chercher les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E) : $f'(x)+2f(x)=2x-1$.

1. Démontre que la fonction g définie par $g(x)=x-1$ est solution de (E).
2. Soit (E ') l'équation différentielle : $f'(x)+2f(x)=0$.
   a. Résous (E ').
   b. Soit k un nombre réel.
   Démontre que les fonctions $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $f_k(x)=ke^{-2x}+x-1$ sont solutions de (E).
3. a. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontre que si f est solution de (E) alors $f-g$ est solution de (E ').
   b. Déduis-en les solutions de (E).

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

EXERCICE 1

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

1. $f'-5f=0$; 2. $f'+7f=0$; 3. $7f'=-2f0$; 4. $f'+f=0$

5. $3f'+\frac{2}{3}f=0$; 6. $-2f'+\sqrt{3}f=0$; 7. $f'=-2f$; 8. $3f'+\frac{1}{2}f=0$

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, détermine la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

1. $f'-f=0$ et $f(2)=0$; 2. $2f'+3f=0$ et $f(0)=5$
3. $-3f'+f=0$ et $f(1)=0$; 4. $-f'+6f=0$ et $f(3)=1$
5. $\frac{2}{3}f'-5f=0$ et $f(-2)=0$; 6. $f'-\frac{\sqrt{2}}{2}f=0$ et $f(1)=0$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE

EXERCICE 3

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

1. $f''-25f=0$ 2. $f''+16f=0$ 3. $f''-2f=0$
4. $-3f''+2f=0$ 5. $\frac{1}{2}f''+8f=0$ 6. $16f''+f=0$

Scanned with CamScanner