CORRIGES DES EXERCICES

Fomesoutra.com

ça soutra !

NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

CORRIGES DES EXERCICES

MATHS

TLE D

BY TEHUA

2025

EXERCICE 1

1 f d'écriture complexe $z'=-3z+1-5i$

$a=-3\in\mathbb{R}$ et $a\neq 1$ donc f est une homothétie

- de rapport $k=|-3|=3$
- de centre le point Ω d'affixe ω tel que $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1-5i}{1-(-3)}=\frac{1-5i}{4}=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$

2 f d'écriture complexe $z'=(1+i)z-i$

$a=1+i\notin\mathbb{R}$ et $|1+i|=\sqrt{2}\neq 1$ donc f est une similitude plane directe

- de rapport $k=|1+i|=\sqrt{2}$
- d'angle $\theta=\arg(a)=\arg 1+i$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

- de centre le point Ω d'affixe ω tel que $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-i}{1-(1+i)}=\frac{-i}{-i}=1$

3 f d'écriture complexe $z'=z+1+i$

$a=1\in\mathbb{R}$ donc f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b=1+i$

4 f d'écriture complexe $z'=iz-1+2i$

$a=i\notin\mathbb{R}$ et $|a|=|i|=1$ donc f est une rotation

- d'angle $\theta=\arg(a)=\arg(i)$

$\cos\theta=\frac{0}{1}=0$ et $\sin\theta=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

- de centre le point Ω d'affixe ω tel que

$$\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1+2i}{1-i}=\frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i+2i-2}{2}=\frac{-1+3i}{2}=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}i$$

EXERCICE 2 Ecriture complexe de f.

1 f est l'homothétie de centre O et de rapport 2.

$z'=az+b$

$k=|a|=2 \Rightarrow a=2$ ou $a=-2$

$\omega=\frac{b}{1-a}=0 \Rightarrow b=0$

Donc l'écriture complexe de f est: $z'=2z$

❷ f est la rotation de centre Ω d'affixe i et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

$$z'=az+b$$

$$\left.\begin{array}{l} k=|a|=1 \\ \theta=\arg(a)=-\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \; a=e^{-i\frac{\pi}{2}}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$$

$$\omega=\frac{b}{1-a} \;\Rightarrow\; b=\omega(1-a)=i\left(1-(-i)\right)=i(1+i)=i-1=-1+i$$

Donc l'écriture complexe de f est : $z'=-iz-1+i$

❸ f est la similitude directe de centre $\Omega(1-2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

$$z'=az+b$$

$$\left.\begin{array}{l} k=|a|=\sqrt{2} \\ \theta=\arg(a)=\frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow a=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1+i$$

$$\omega=\frac{b}{1-a} \;\Rightarrow\; b=\omega(1-a)=(1-2i)(1-(1+i))=(1-2i)(-i)=-i-2=-2-i$$

Donc l'écriture complexe de f est : $z'=(1+i)z-2-i$

EXERCICE 3

A, B, C et D ont pour affixes : $Z_A=-1-i$, $Z_B=i$, $Z_C=1+3i$ et $Z_D=5+i$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{S}{\curvearrowright}} \\ \hline A & C \\ B & D \\ [AB] & [CD] \end{array}$$

❶ Déterminons le rapport k et l'angle θ de S.

- $k=\frac{CD}{AB}=\frac{|Z_D-Z_C|}{|Z_B-Z_A|}=\frac{|(5+i)-(1+3i)|}{|i-(-1-i)|}=\frac{|4-2i|}{|1+2i|}=\frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=\sqrt{4}=2$

- $\theta=mes\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)=\arg\left(\frac{Z_D-Z_C}{Z_B-Z_A}\right)=\arg\left(\frac{4-2i}{1+2i}\right)$

$$\frac{4-2i}{1+2i}=\frac{(4-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{4-8i-2i-4}{5}=\frac{-10i}{5}=-2i \;\Rightarrow \theta=\arg(-2i)=-\frac{\pi}{2}$$

② Déterminons l'écriture complexe f associée à S.

$f(z)=az+b$

$S(A)=C \Leftrightarrow az_A+b=z_C \quad (1)$

$S(B)=D \Leftrightarrow az_B+b=z_D \quad (2)$

$$(1)-(2) \Rightarrow a\left(z_A-z_B\right)=z_C-z_D \Rightarrow a=\frac{z_C-z_D}{z_A-z_B}=\frac{-4+2i}{-1-2i}=\frac{4-2i}{1+2i}=-2i$$

$$(2)\Rightarrow az_B+b=z_D \Leftrightarrow b=z_D-az_B=(5+i)-(-2i)\times i=5+i+2i\times i=5+i-2=3+i$$

D'où l'écriture complexe f est: $f(z)=-2iz+3+i$

③ Déterminons l'affixe de Ω le centre de S.

Soit ω l'affixe de Ω

$$\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{3+i}{1-(-2i)}=\frac{3+i}{1+2i}=\frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3-6i+i+2}{5}=\frac{5-5i}{5}=1-i$$

EXERCICE 4 BAC 2000. Session normale

① Les images par S des points O et A sont :

$$z_{O'}=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}z_O-\sqrt{3}+i=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\times 0-\sqrt{3}+i=-\sqrt{3}+i \Rightarrow S(O)=B$$

$$z_{A'}=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}z_A-\sqrt{3}+i=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\times \sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i=\sqrt{3}+i \Rightarrow S(A)=A$$

② Les éléments caractéristiques de S.

L'écriture complexe de la similitude directe S est : $z'=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}z-\sqrt{3}+i$.

Cette écriture a la forme $z'=az+b$ avec $a=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ et $b=-\sqrt{3}+i$

$a=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\notin\mathbb{R}$ et $\left|\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$ donc S est une similitude

plane directe :
- de rapport $k=|a|=\left|\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{3}$
- d'angle

$$\theta=\arg a=\arg\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{6} \quad car \quad \begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\text{Re } a}{|a|}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2ex] \sin\theta=\dfrac{\text{Im } a}{|a|}=\dfrac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

- de centre le point $A\left(\sqrt{3}+i\right)$ car S(A) = A

③ Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2 et (C') son image par S.

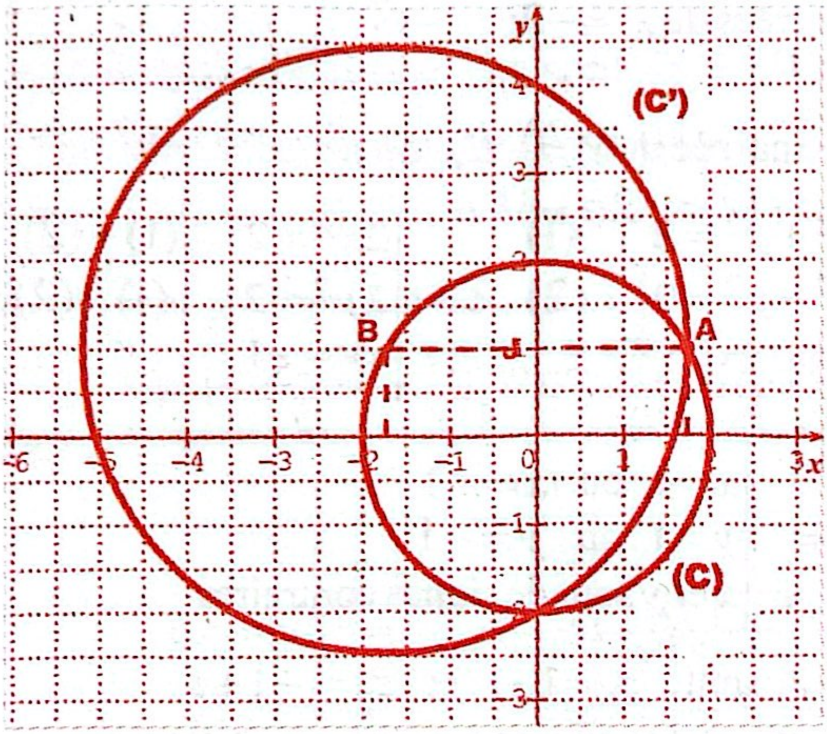
ⓐ Nature et éléments caractéristiques de (C').

L'image d'un cercle par une similitude est un cercle donc (C') est un cercle.

Les éléments caractéristiques de (C') sont :

- Son rayon $R' = k \times R = \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$
- Son centre O'= S(O) = B

b Construction de (C').



EXERCICE 5 BAC blanc 2009. Lycée Mamie Fêtai de Bingerville

1 Déterminons les nombres b et c tels que : $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$

$$P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c) \Leftrightarrow P(z) = z^4 + bz^3 + cz^2 + 2iz^2 + 2ibz + 2ic$$

$$\Leftrightarrow P(z) = z^4 + bz^3 + (c + 2i)z^2 + 2ibz + 2ic$$

Or $P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$

D'où : $z^4 + bz^3 + (c+2i)z^2 + 2ibz + 2ic = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$

Par identification, on a :

- $b = -4(1+i)$
- $c + 2i = 12i \Leftrightarrow c = 12i - 2i = 10i$

Donc $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 - 4(1+i)z + 10i)$

2 Résolvons dans ℂ, l'équation : P(z) = 0

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 2i)(z^2 - 4(1+i)z + 10i) = 0$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2i = 0 \text{ ou } z^2 - 4(1+i)z + 10i = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 = -2i \quad (1) \quad \text{ou} \quad z^2 - 4(1+i)z + 10i = 0 \quad (2)$$

- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (1): $z^2=-2i$

Les nombres $z\in\mathbb{C}$ tels que $z^2=-2i$ sont les racines carrées de $Z=-2i$

Il s'agit donc de déterminer les racines carrées de $Z=-2i$

Déterminons les racines carrées de $Z=-2i$

$|Z|=|-2i|=2$

Soit $z=x+iy$ une racine carrée de $Z=-2i$, on a :

$$\begin{cases} x^2+y^2=|Z| \\ x^2-y^2=\mathrm{Re}(Z) \\ 2xy=\mathrm{Im}(Z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 & (1) \\ x^2-y^2=0 & (2) \\ 2xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 & (1)+(2) \\ 2y^2=2 & (1)-(2) \\ xy=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \\ xy<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ou } x=-1 \\ y=1 \text{ ou } y=-1 \\ x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires} \end{cases}$$

Les racines carrées de $Z=-2i$ sont : $z_1=1-i$ et $z_2=-1+i$

Les solutions de l'équation (1) sont : $z_1=1-i$ et $z_2=-1+i$

- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (2): $z^2-4(1+i)z+10i=0$

$\Delta=[-4(1+i)]^2-4\times1\times10i=16(1+i)^2-40i$

$\Delta=16(1+2i-1)-40i=16(2i)-40i=32i-40i$

$\Delta=-8i$

Déterminons les racines carrées de $\Delta=-8i$

$|\Delta|=|-8i|=8$

soit $\delta=x+iy$ une racine carrée de $\Delta=-8i$, on a :

$$\begin{cases} x^2+y^2=|\Delta| \\ x^2-y^2=\mathrm{Re}(\Delta) \\ 2xy=\mathrm{Im}(\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=8 & (1) \\ x^2-y^2=0 & (2) \\ 2xy=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=8 & (1)+(2) \\ 2y^2=8 & (1)-(2) \\ xy=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=4 \\ xy<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ ou } x=-2 \\ y=2 \text{ ou } y=-2 \\ x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires} \end{cases}$$

Les racines carrées de $\Delta=-8i$ sont : $\delta=2-2i$ et $\delta'=-2+2i$

$$z_3=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{4(1+i)+2-2i}{2}=\frac{4+4i+2-2i}{2}=\frac{6+2i}{2}=3+i$$

$$z_4=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{4(1+i)-2+2i}{2}=\frac{4+4i-2+2i}{2}=\frac{2+6i}{2}=1+3i$$

Les solutions de l'équation (2) sont: $z_3=3+i$ et $z_4=1+3i$

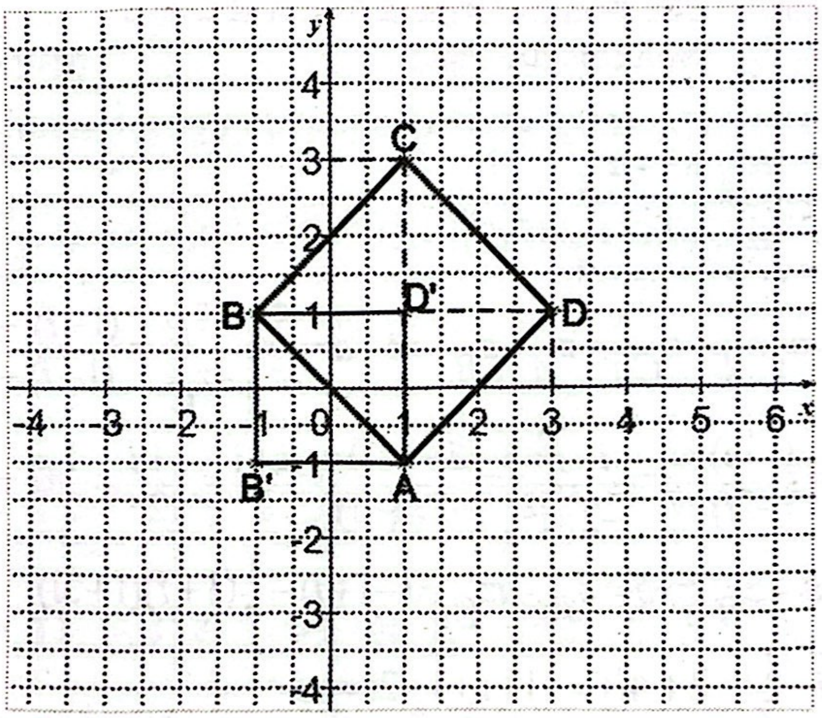
- Finalement les solutions de l'équation $p(z)=0$ sont:

$z_1=1-i$; $z_2=-1+i$; $z_3=3+i$ et $z_4=1+3i$

$$S_{\mathbb{C}}=\{1-i\ ;\ -1+i\ ;\ 3+i\ ;\ 1+3i\}$$

3 $Z_A=1-i,\ Z_B=-1+i,\ Z_C=1+3i$ et $Z_D=3+i$

a Figure.



b Démontrons que ABCD est un carré.

- **Montrons que ABCD est un parallélogramme**

$$Z_{\overline{AB}}=Z_B-Z_A=(-1+i)-(1-i)=-2+2i$$

$$Z_{\overline{DC}}=Z_C-Z_D=(1+3i)-(3+i)=-2+2i$$

$$Z_{\overline{AB}}=Z_{\overline{DC}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD \text{ est un parallélogramme.}$$

- **Déterminons la mesure des côtés [AB] et [BC].**

$$\left.\begin{array}{l} AB=|Z_B-Z_A|=|(-1+i)-(1-i)|=|-2+2i|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \\ BC=|Z_C-Z_B|=|(1+3i)-(-1+i)|=|2+2i|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}. \end{array}\right| AB=BC$$

- **Déterminons la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$**

$$mes\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}\right)=\arg\left(\frac{(1+3i)-(-1+i)}{(1-i)-(-1+i)}\right)=\arg\left(\frac{2+2i}{2-2i}\right)$$

$$\frac{2+2i}{2-2i}=\frac{2(1+i)}{2(1-i)}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

$$mes\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\frac{2+2i}{2-2i}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ (BA)\perp(BC)$$

CONCLUSION

ABCD est un parallélogramme dont 2 côtés consécutifs ont même mesure et forment un angle droit : ABCD est un carré.

4 Soit S la similitude directe transformant A en A et C en B.

a Déterminons l'écriture complexe de S.

$z'=az+b$

$S(A)=A \Leftrightarrow az_A+b=z_A \quad (1)$

$S(C)=B \Leftrightarrow az_C+b=z_B \quad (2)$

$$(1)-(2)\ \Rightarrow\ a\left(z_A-z_C\right)=z_A-z_B\ \Rightarrow\ a=\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{(1-i)-(-1+i)}{(1-i)-(1+3i)}=\frac{2-2i}{-4i}$$

$$\Rightarrow\ a=\frac{1-i}{-2i}=\frac{(1-i)\times i}{(-2i)\times i}=\frac{i-i^2}{-2\times i^2}=\frac{i-(-1)}{-2\times(-1)}=\frac{i+1}{2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}(1+i)$$

$$(2)\Rightarrow az_C+b=z_B \Leftrightarrow b=z_B-az_C=(-1+i)-\frac{1}{2}(1+i)(1+3i)$$

$$\Rightarrow\ b=-1+i-\frac{1}{2}(-2+4i)=-1+i+1-2i=-i$$

D'où l'écriture complexe de S est : $z'=\frac{1}{2}(1+i)z-i$

b Déterminons les éléments caractéristiques de S.

- $S(A)=A \Leftrightarrow A(1-i)$ est le centre de la similitude S
- Le rapport $k=\frac{1}{2}|1+i|=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- L'angle $\theta=\arg\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)$

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

c Déterminons l'image du point B par S

Soit $B'=S(B)$

$$z_{B'}=\frac{1}{2}(1+i)z_B-i=\frac{1}{2}(1+i)(-1+i)-i=\frac{1}{2}(-1+i-i-1)-i=-1-i$$

d S (ABCD) = ACB'D' car S (A) = A; S (C) = B; S (B) = B' et S (D) = D'

Déterminons D' = S (D)

$$z_{D'}=\frac{1}{2}(1+i)z_D-i=\frac{1}{2}(1+i)(3+i)-i=\frac{1}{2}(3+i+3i-1)-i=\frac{1}{2}(2+4i)-i=1+i$$

EXERCICE 6 BAC 2005 SESSION NORMALE

1 a $M\in\Gamma \Leftrightarrow \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i\right|=6 \Leftrightarrow \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right)\right|=6$

$$\Leftrightarrow \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)\right|=6 \Leftrightarrow \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(z-\frac{4i}{4}\right)\right|=6$$

$$\Leftrightarrow \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-i\right|=6 \Leftrightarrow \left|1-i\sqrt{3}\right|\left|z-i\right|=6$$

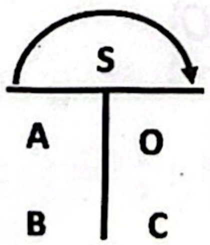
$$\Leftrightarrow 2\times\left|z-i\right|=6 \Leftrightarrow \left|z-i\right|=\frac{6}{2}$$

$M\in(\Gamma)\Leftrightarrow\left|z-i\right|=3$

b $\left|z-i\right|=3 \Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=3 \Leftrightarrow AM=3$

Donc Γ est le cercle de centre A d'affixe i et de rayon 3.

2



a $z'=az+b$

$s(A)=O \Leftrightarrow az_A+b=z_O$

$s(B)=C \Leftrightarrow \underline{az_B+b=z_C}$

$az_A-az_B=z_O-z_C$

$a\,z_A-z_B=z_O-z_C$

$$a=\frac{z_O-z_C}{z_A-z_B}=\frac{z_C-z_O}{z_B-z_A}=\frac{-4i-0}{\sqrt{3}-i}=\frac{-4i}{\sqrt{3}-i}=\frac{-4i(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}$$

$$a=\frac{-4i\sqrt{3}+4}{3+1}=\frac{4-4i\sqrt{3}}{4}=1-i\sqrt{3}$$

$az_A+b=z_O \Leftrightarrow b=z_O-az_A=0-(1-i\sqrt{3})\times i=-(1-i\sqrt{3})\times i$

$\Leftrightarrow b=-(i+\sqrt{3})=-i-\sqrt{3}=-\sqrt{3}-i$

Donc $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i$

b $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i$

$$|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

S est une similitude plane directe

- *de rapport* $k=|1-i\sqrt{3}|=2$
- *d'angle* $\theta=\arg(1-i\sqrt{3})$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{1}{2}\\ \sin\theta&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\}\ \theta=-\frac{\pi}{3}$$

- *de centre* $E(\varpi)$

$$\varpi=\frac{b}{1-a}=\frac{-\sqrt{3}-i}{1-(1-i\sqrt{3})}=\frac{-\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}}=\frac{(-\sqrt{3}-i)(-i\sqrt{3})}{(i\sqrt{3})(-i\sqrt{3})}=\frac{3i-\sqrt{3}}{3}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{3}$$

$$\varpi=\frac{-\sqrt{3}}{3}+i$$

3 a Nature et éléments caractéristiques de (C).

(C) est un cercle.

- *de rayon* $R=k\times r=2\times 3=6$
- *de centre O l'image de A par S (en effet,* $S(A)=O$*)*

b Construction de (C) et (Γ)(voir figure)

(C) : Cercle de centre O (0 ; 0) et de rayon 6.

(Γ) : Cercle de centre A (0 ; 1) et de rayon 3.

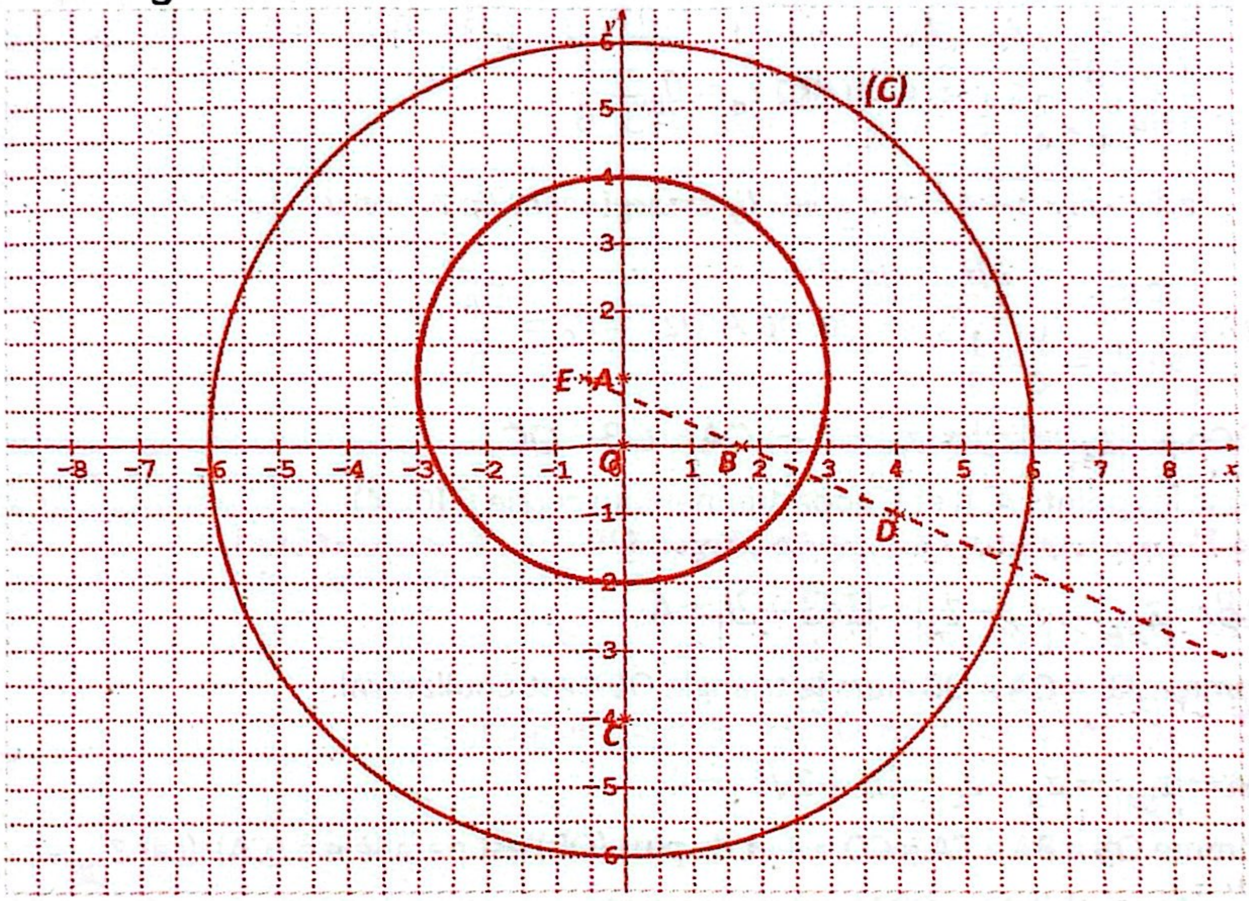
4 a Construction des points E et D.(voir figure)

b Le triangle ECD est un triangle équilatéral car : EC=ED et $Mes\,\widehat{DEC}=\frac{\pi}{3}$

c $D\in[EB]$ et $ED=2EB \Rightarrow \overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{EB} \Rightarrow z_D-z_E=2(z_B-z_E)$

$$\Rightarrow z_D=2(z_B-z_E)+z_E=2z_B-2z_E+z_E=2z_B-z_E=2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-i$$

$$\Rightarrow z_D=\frac{7\sqrt{3}}{3}-i$$



5 $z'=az+b$

$s(E)=E \quad \Leftrightarrow \quad az_E+b=z_E$

$s(C)=D \quad \Leftrightarrow \quad \underline{az_C+b=z_D}$

$az_E-az_C=z_E-z_D$

$a\;z_E-z_C=z_E-z_D$

$a=\frac{z_E-z_D}{z_E-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\varpi=\frac{b}{1-a} \Rightarrow b=\varpi\times(1-a)=z_E\times(1-a)=\frac{\sqrt{3}}{3}+i$

Donc $z'=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)z+\frac{\sqrt{3}}{3}+i$

EXERCICE 7 Bac 2004. Session normale

❶ $|z_A|=\sqrt{4^2}=4$ soit θ_A un argument de z_A, on a :

$$\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{0}{4}=0\\ \sin\theta_A=\frac{4}{4}=1\end{cases} \text{ d'où } Arg z_A=\theta_A=\frac{\pi}{2}$$

$|z_B|=\sqrt{4\times3+4}=4$ soit θ_B un argument de z_B, on a :

$$\begin{cases}\cos\theta_B=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_B=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{cases} \text{ d'où } Arg\, z_B=\theta_B=\frac{\pi}{6}$$

$|z_C|=\sqrt{4\times3+4}=4$ soit θ_C un argument de z_C, on a :

$$\begin{cases}\cos\theta_C=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_C=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{cases} \text{ d'où } Arg z_C=\theta_C=\frac{5\pi}{6}$$

❷ On a : $|z_A|=|z_B|=|z_C|=4 \Leftrightarrow OA=OB=OC$

Donc les points A, B et C appartiennent au cercle C (0 ; 4).

❸ Démontrons que le triangle OBA est équilatéral.

$$AB=|z_{\overline{AB}}|=|z_B-z_A|=|2\sqrt{3}-2i|=4.$$

Comme AB = OA = OB alors le triangle OBA est équilatéral.

❹ Démontrons que OBAC est un losange.

$$CA=|z_{\overline{CA}}|=|z_A-z_C|=|2i+2\sqrt{3}|=4.$$

Comme OB = BA = CA = CO = 4 et de plus (OB) est parallèle à (CA) (car $z_{\overline{OB}}=z_{\overline{CA}}$)

Donc le quadrilatère OBAC est un losange.

❺ K est le milieu de [OA] ; S est la similitude directe de centre O telle que S (B) = K.

ⓐ Détermination de l'écriture complexe de S.

Méthode 1

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{S} \\ \hline O & O \\ B & K \end{array}$$

Le rapport k de S : $k=\frac{OK}{OB}=\frac{|z_K|}{|z_B|}=\frac{|2i|}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Car $z_k=\frac{z_O+z_A}{2}=\frac{z_A}{2}=2i$

L'angle orienté θ de S :

$$\theta=Arg(\frac{z_{\overline{OK}}}{z_{\overline{OB}}})=Arg(\frac{z_K}{z_B})=Arg(z_k)-Arg(z_B)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

Le centre de S st le point O tel que $z_O = 0$.

L'écriture complexe est donc : $z'=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.z$.

On en déduit : $z'=\frac{1}{2}(\frac{i\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})z=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z$

Méthode 2

L'écriture complexe de S est de la forme : $z'=az+b$ avec a et b des nombres complexes et $|a|\neq 1$.

S (O) = O et S(B) = K d'où :

$$\begin{cases}0=0\times a+b\\2i=a(2\sqrt{3}+2i)+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\a=\dfrac{2i}{2(\sqrt{3}+i)}=\dfrac{i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\a=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}\end{cases}$$

d'où $z'=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}z$

b L milieu de [AC] donc $z_L=\dfrac{z_C+z_A}{2}=-\sqrt{3}+3i$

$$z'_L=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}(-\sqrt{3}+3i)=\frac{1}{4}(-\sqrt{3}-3i+3i-3\sqrt{3})\Rightarrow z'_L=-\sqrt{3}$$

c (LO) est la médiatrice du segment [AC]. Or S (O) = O et S (L) = L'.

$z'_L=-\sqrt{3}$ alors L' $\in$(OI). Donc S ((OL)) = (OI).

L'image de la médiatrice (LO) est (OI).

EXERCICE 8 Bac 2008 session normale

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

Soit l'équation (E) : $Z\in\mathbb{C},\quad Z^3+(6-5i)Z^2+(1-20i)Z-14-5i=0$

1 a Vérifions que i est une solution de l'équation (E).

$i^3+(6-5i)i^2+(1-20i)i-14-5i=-20+20=0$

i est une solution de l'équation (E).

b Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2+(6-4i)Z+5-14i=0$

$\Delta=6-4i^{\;2}-4(5-14i)=8i$

$$\begin{cases}x^2+y^2=8\\x^2-y^2=0\\2xy=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2=8\\2y^2=8\\xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=4\\y^2=4\\xy>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\ \text{ou}\ x=-2\\y=2\ \text{ou}\ y=-2\\xy>0\end{cases}$$

$d=2+2i\quad ou\quad d'=-2-2i$

$$x_1=\frac{-6+4i+2+2i}{2}=\frac{-4+6i}{2}=-2+3i$$

$$x_2=\frac{-6+4i-2-2i}{2}=\frac{-8+2i}{2}=-4+i$$

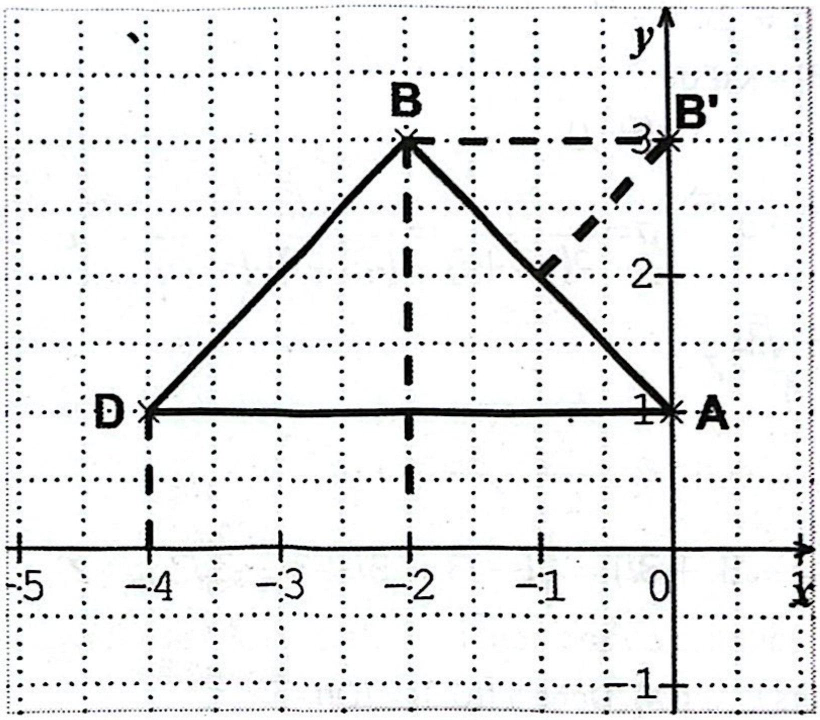
$S_{\mathbb{C}}=\{-2+3i\ ;\ -4+i\}$

c Résolvons à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E).

$Z^3+(6-5i)Z^2+(1-20i)Z-14-5i=(z-i)\ Z^2+(6-4i)Z+5-14i$

$S_{\mathbb{C}}=\{i;\ -2+3i\ ;\ -4+i\}$

2 a Plaçons les points A, B et D d'affixes $u = i$; $v = -2+3i$ et $t = -4+i$ dans le repère.



b Ecriture du nombre complexe $Z=\dfrac{u-v}{t-v}$ sous forme trigonométrique.

$$Z=\frac{u-v}{t-v}=\frac{i-(-2+3i)}{(-4+i)-(-2+3i)}=\frac{2-2i}{-2-2i}=\frac{1-i}{-1-i}=\frac{(1-i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

$$|Z|=1 \quad \arg Z=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad Z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

c Déduisons que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

$$Z=\frac{u-v}{t-v}=\frac{Z_A-Z_B}{Z_D-Z_B}=i.$$

Donc le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

3 S est la similitude directe de centre A qui transforme D en B.

B' est l'image de B par S.

a Justifions que le triangle ABB' est rectangle isocèle en B'.

S (A) = A; S (D) = B; S (B) = B' donc S (ADB) = ABB'.

Or ADB est rectangle isocèle en B donc ABB' est rectangle isocèle en B'.

(Car toute similitude directe conserve les angles)

b Déduisons la construction du point B' (voir figure ci-dessus).

ABB' est isocèle en B' donc B' appartient à la médiatrice de [AB].

ABB' est rectangle en B' donc B' appartient au cercle de centre le milieu de [AB].

4 a Déterminons l'écriture complexe de S.

S (A)= A ; S (D)= B

$$z' = az + b$$

$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A \Leftrightarrow z_A = az_A + b \\ S(D)=B \Leftrightarrow z_B = az_D + b \end{array}\right| \Rightarrow z_A - z_B = az_A - az_D = a(z_A - z_D)$$

$$\Rightarrow a = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_D} = \frac{i-(-2+3i)}{i-(-4+i)} = \frac{2-2i}{4} = \frac{1}{2}(1-i)$$

$$z_A = az_A + b \Leftrightarrow b = z_A - az_A = z_A(1-a)$$

$$\Leftrightarrow b = i\left(1-\frac{1}{2}(1-i)\right) = i\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

D'où $z' = \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{1}{2}(-1+i)$

b Calculons l'affixe de B'.

$$B' = S(B) \Leftrightarrow z_{B'} = \frac{1}{2}(1-i)z_B + \frac{1}{2}(-1+i) = \frac{1}{2}(1-i)(-2+3i) + \frac{1}{2}(-1+i)$$

$$\Leftrightarrow z_{B'} = \frac{1}{2}(-2+3i+2i+3) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1+5i) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow z_{B'} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{6}{2}i = 3i$$