MATHS

TA_4

MATHS

Terminale A4

Table des matières

CHAPITRE I : EQUATIONS-INEQUATIONS, SYSTEMES

I. équation et inéquation du type : $ax+b$ (1er degré)

A- équations

Une équation de la forme $ax+b=0$, où a et b sont des nombres réels est appelée équation du 1er degré ou équation d'ordre 1.Cette équation admet :

- Une solution unique si $a \neq 0$ Cette solution est $\frac{-b}{2a} \Rightarrow$ $\mathbf{S}=\left\{\frac{-\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right\}$
- Aucune solution si $a=0$ et $b \neq 0$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{S}=\phi$

  Exemple : Résoudre dans IR les équations suivantes :

  $a)\ -3x+2=0$

  $b)\ x+1=x-2$

  $c)\ 4x+6=0$

  $d)\ 3x-1=0$

  $e)\ 2(x-1)\ +3(x+1)\ =x-1$

Solution

a) $-3x+2=0 \Rightarrow -3x=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{3} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{S}=\left\{\frac{2}{3}\right\}}$$

$b)\ x\ +1=x-2 \Rightarrow x-x+1-2=0 \Rightarrow 0x-1=0;\ a=0 \Rightarrow$

$$\boxed{\mathrm{S}=\phi}$$

c) $4x+6=0 \Rightarrow 4x=-6 \Rightarrow x=\frac{-6}{4} \Rightarrow x=\frac{-3}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathrm{S}=\left\{\frac{-3}{2}\right\}}$$

d) $3x-1=0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow X=\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathrm{S}=\left\{\frac{1}{3}\right\}}$$

$$e)\left\{\begin{array}{c} 2(x-1)\ +\ 3(x-1)\ =\ x-1 \\ \Rightarrow 2x-2+3x-1=\ x-1 \\ \Rightarrow 5x-x-3+1=0 \\ \Rightarrow 4x-2=0\ \ 4x=2\ \ x=\dfrac{2}{4}\ \ x\ =\ \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\mathrm{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

B- inéquations

Pour résoudre les inéquations du premier degré, il suffit d'étudier le signe du polynôme

$P(x) = ax + b$. Pour ce fait, on détermine une racine de P. C'est-à-dire une solution de l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \quad x = \frac{-b}{a}$

X	$-\infty$ $\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b \ (a \neq 0)$	Signe contraire du signe de a	Signe de a

Exemple : Résoudre les inéquations :

$a)\ x + 1 \geq 0$

$b)\ 1 - x \geq 0$

$c)\ 2x - 1 < 0$

$d)\ 2x + 4 > 0$

$e)\ 2(x - 1) > x + 1$

Solution

1ere Méthode: $x + 1 \geq 0$

$\Rightarrow x \geq -1$

$\boxed{\boldsymbol{S} = [-\mathbf{1};\ +\infty[}$

2eme Méthode: $x + 1 \geq 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

X	$-\infty$ -1	$+\infty$
$x + 1$	-	+

$\boxed{\boldsymbol{S} = [-\mathbf{1};\ +\infty[}$

b) $1 - x \geq 0$

1ère Méthode: $1 - x \geq 0$

$\Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$

$\boxed{\boldsymbol{S} =]-\infty; \mathbf{1}]}$

2ème Méthode: $1 - x \geq 0$

$\Rightarrow -x \geq -1 \quad \Rightarrow x \leq 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	-	

$\boxed{S =]-\infty;\ 1]}$

$c)\ 2x-1\ <0$

1[ère] **Méthode**: $2x-1\ <0$

$\Rightarrow 2x<1\ \Rightarrow x\ <\frac{1}{2}$

$\boxed{\mathbf{S}\ =\ \left]-\infty;\ \frac{1}{2}\right[}$

2[ème] **Méthode:** $2x-1\ <0$

$\Rightarrow\ 2x-1\ =0\ \Rightarrow 2x\ =\ 1\ \ \Rightarrow x\ =\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	+	-	

$\boxed{\mathbf{S}\ =\ \left]-\infty;\ \frac{1}{2}\right[}$

d) $2x-4\ >\ 0$

1[ère] **Méthode:** $2x-4\ >0$

$\Rightarrow 2x>4\ \Rightarrow\ \ x\ >\frac{4}{2}\ \ \Rightarrow\ x\ >2$

$\boxed{\mathbf{S} =]\mathbf{2};+\infty\ [}$

2[ème] **Méthode:** $2x-4>0$

$\Rightarrow\ 2x-4\ =\ 0$

$\Rightarrow 2x\ =4$

$\Rightarrow\ x\ =\frac{4}{2}$

$\Rightarrow x\ =2$

X	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x-4$	-	+	

$\boxed{\mathbf{S} =]\mathbf{2};+\infty\ [}$

$e)\ 2(x-1)\ > (x+1)$

$\Rightarrow 2x-2\ > x+1$

$\Rightarrow 2x-x-2-1>0$

$\Rightarrow x\ -3\ >0$

$\Rightarrow x>3$

$\boxed{\boldsymbol{S} =]\,\mathbf{3};\ +\infty\,[}$

C- équation et inéquation du second degré

1- équation

On considère le polynôme P définie par

$P(x) = ax^2 + bx + c\ avec\ a \neq 0\ O$ù $a, b, c\ sont\ des\ réels$

Résoudre l'équation P(x)=0 revient à déterminer au préalable les racines de P afin de déterminer la forme factorisée.

$P(x)\ = ax2 + bx + c$ $\quad$ $\mathrm{P} = \left[(x+\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}})^2\ -\ \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

On pose: $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta < 0$ alors P n'est pas factorisable, d'où $\boldsymbol{S} = \phi$
- Si $\Delta = 0$ alors P a une racine unique $\frac{-\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$ et $\mathrm{P}(x) = \mathrm{a}(x+\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}})^2$ d'où $\mathbf{S} = \left\{\frac{\mathbf{-b}}{\mathbf{2a}}\right\}$
- Si $\Delta > 0$ alors P a 2 racines distincts x_1 et x_2 telles que :
  $\mathbf{X_1} = \frac{-\boldsymbol{b}-\sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}}$ **et** $\mathbf{X_2} = \frac{-\boldsymbol{b}+\sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}}$
  D'où la forme factorisée de $P\ est\ \boldsymbol{P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$

  $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x_1}\ ;\ \boldsymbol{x_2}\}$

NB : Le nombre réel Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant du polynôme P.

Exemple : Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 - x - 6 = 0$
2) $x^2 - 2x + 3 = 0$
3) $-x^2 + 3x - 5 = 0$
4) $3x^2 - 6x + 3 = 0$
5) $x^2 + x - 12 = 0$
6) $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)(x-5)$

Solution

1) $x^2 - x - 6 = 0$

On pose: $\Delta = 1 + 24$
$\Delta = 25$
$\Delta = 5^2$

$X_1 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2}$; $X_1 = -2$

$X_2 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2}$; $X_2 = 3$

S= {-2; 3}

1) $x^2-2x+3=0$

On pose: $\Delta=4-12$

$\Delta=-8$

$\Delta<0$ donc **S=ϕ**

3) $-x^2+3x-5=0$

On pose $\Delta=9-20$

$=-11$

$\Delta<0 \Rightarrow$ **S=ϕ**

4) $3x^2-6x+3=0$

$\Rightarrow x^2-2x+1=0$

$\Delta=24-24$

$\Delta=0 \Rightarrow x=\frac{6}{6}=1$

S= {1}

5) $x^2+x-12=0$

On pose: $\Delta=1+48$

$\Delta=49$

$\Delta=7^2$

$x_1=\frac{-1-7}{2}=\frac{-8}{2}=-4$

$x_2=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=3$

S= {-4; 3}

6) $4x^2+4x+1=(2x+1)(x-5)$

$4x^2+4x+1=2x^2-10x+x-5$

$4x^2+4x+1-2x^2+9x+5=0$

$2x^2+13x+6=0$

On pose: $\Delta=13^2-4\times12$

$\Delta=13^2-48$

$\Delta=169-48$

$\Delta=121$

$\Delta=11^2$

$x_1=\frac{-13-11}{4}=-6$ $x_2=\frac{-13+11}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

S= {-6 ; $\frac{-1}{2}$}

Remarque: Le calcul de Δ n'est pas toujours indispensable pour résoudre une équation du 2nd degré. Par exemple l'équation : $2x^2+5x=0 \Leftrightarrow x(2x+5)=0$

$\Leftrightarrow$ **S= {0; $\frac{-5}{2}$}**

Quelque fois on peut simplifier les calculs en posant $b'=\frac{b}{2}$ et $\Delta'=b'^2-ac$ (discriminant réduit)

- Si Δ' <0 ⇒ pas de racine
- Si Δ =0 ⇒ racine double : $\mathbf{x_0}' = \frac{-b'}{a}$
- Si Δ' > 0 ⇒ deux racines $\mathbf{x_1} = \frac{-b'-\Delta'}{a}$ et $\mathbf{x_2} = \frac{-b'+\Delta'}{a}$

2- inéquations

Pour résoudre une inéquation du 2nd degré, il suffit d'étudier le signe du polynôme P(x).

Pour étudier le signe de p(x), on calcule son discriminant et on utilise l'un des tableaux suivants :

- Si Δ' <0, P n'a pas de racine

x	$-\infty$ $+\infty$
P(x)	Signe de a

- Si Δ =0, P admet une racine double alors $P(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$ $+\infty$
P(x)	Signe de a	Signe de a

- Si Δ > 0 alors P a 2 racines distincts et la forme factorisée de P est $P(x)= a(x-x_1)(x-x_2)$

x	$-\infty$	x_1	x_2 $+\infty$
$x-x_1$	-	+	+
$x-x_2$	-	-	+
$P(x)= a(x-x_1)(x-x_2)$	Signe de a	Signe contraire de a	Signe de a

L'étude de signe du polynôme P permet de résoudre dans IR les inéquations

Exemple : Dans chacun des cas suivants, étudier le signe du polynôme P et en déduire les solutions de l'inéquation P(x) ≤0.

a) $P(x) = -2x^2-4x+6$
b) $P(x) = 3x^2-6x+3$
c) $P(x) = -x^2+3x-5$
d) $P(x) = (2x-3)(x+5)$

Solution

$P(x)= -2x^2-4x+6$ on pose : $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta= (-4)^2-4(-2)(6)$

$\Delta=16+48$

$\Delta=64$

$\Delta=8^2$

Δ > 0, donc P a deux racines distinctes qui sont : $X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{4-8}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{4+8}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$

La forme factorisée de P est : **P(x)= -2(x-1) (x+3)**

Tableau de signe :

x	$-\infty$ -3	1	$+\infty$
X+3	-	+	+
x-1	-	-	+
(x-1)(x+3)	+	-	+
-2(x-1) (x+3)	-	+	-

S=]-∞;-3] U [1; + ∞ [

b) $P(x) = 3x^2-6x+3$

On pose $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta= (-6)^2-4(3) \times(3)$

$\Delta=36-36$

$\Delta=0$

Donc P admet une racine double: $x_o = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2x3} = \frac{6}{6} = 1$

La forme factorisée de P est : **$P(x)=3(x-1)^2= 3(x-1)(x-1)$**

Tableau de signe

X	$-\infty$ 1	$+\infty$
x-1	-	+
x-1	-	+
$(x-1)^2$	+	+
$3(x-1)^2$	+	+

S= {1}

c) $P(x) = -x^2 +3x-5$

On pose $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta= (3)^2-4(-1) \times(-5)$

$\Delta=9-20$

$\Delta=-11$

$\Delta< 0$, P n'a pas donc de racine. P(x) est toujours du même signe que a=-1

D'où le tableau

x	$-\infty$ $+\infty$
P(x)	-

S= IR=]-∞ ; + ∞ [

d) P(x) = (2x-3) (x+5)

On a déjà la forme factorisée de P et les 2 racines sont : -5 et $\frac{3}{2}$

Tableau de signe

X	$-\infty$	-5	$\frac{3}{2}$ $+\infty$
X+5	-	+	+
2x-3	-	-	+
P(x)	+	-	+

S = [-5 ; $\frac{3}{2}$]

D- équations et inéquations du degré 3 (ordre 3)

On considère le polynôme P tel que $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

Pour résoudre une inéquation de type P(x) = 0 ou une inéquation de type P(x) ≥ 0 ou P(x) ≤0 ; il faut :

- Rechercher une racine évidente de P si elle, existe puis déterminer un polynôme du 2nd degré Q tel P(x)= (x - α) Q(x). Le calcul des coefficients de Q peut être fait à partir de l'égalité des polynômes (identification) ou par division Euclidienne ou encore par la méthode de Horner.
- Dresser le tableau de signe de p(x) et en déduire les solutions de l'équation donnée impliquant P.

Exemple : On considère le polynôme P définie par :

$P(x)= -2x^3+3x^2+5x-6$

a)Vérifier que (2) est une racine de P.

b) Déterminer un polynôme Q tel que P(x)=(x-2) Q(x)

c)Résoudre P(x)=0

d) Résoudre P(x) ≥0 et P(x) <0

Solution

$P(x)=-2x^3+3x^2+5x-6$

a) Vérifions que 2 est racine :
$P(2) = -2(2^3) + (3)\times 2^2+5\times 2-6$

$P(2)=-16+12+10-6$
$P(2)=-22+22$
$P(2)=0$ d'où 2 est racine de P.

b) Déterminons un polynôme Q

Procédons par division euclidienne :

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^3+3x^2+5x-6 & x-2 \\
\cline{2-2}
+2x^3-4x^2 & -2x^2-x+3 \\
\cline{1-1}
-x^2+5x-6 & \\
+x^2-2x-6 & \\
\cline{1-1}
3x-6 & \\
-3x+6 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Méthode de Horner

	-2	3	5	-6
2		-4	-2	6
	-2	-1	3	0
	a	B	C	

D'où $P(x)=(x-2)(-2x^2-x+3)$

c) Résolvons $P(x)=0$

$(x-2)(-2x^2-x+3)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ou $-2x^2-x+3=0$ $a=-2, b=-1, c=3$

$\Leftrightarrow x=2$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-1)^2-4(-2)\times(3)$

$\Delta=1+24$

$\Delta=25$

$\Delta=5^2$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1=\frac{1-5}{-4}=\frac{-4}{-4}=1$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2=\frac{1+5}{-4}=\frac{6}{-4}=\frac{-3}{2}$

$\mathbf{S=\{\frac{-3}{2};1;2\}}$

d) Résoudre $P(x)\geq 0$ et $P(x)<0$

$P(x)=-2(x-2)(x-1)(x+\frac{3}{2})$

Tableau de signe :

X	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{-3}{2}$	1	2	$+\infty$
$(x+\frac{3}{2})$	-	+	+	+
(x-1)	-	-	+	+
(x-2)	-	-	-	+
$(x-2)(x-1)(x+\frac{3}{2})$	-	+	-	+
$-2(x-2)(x-1)(x+\frac{3}{2})$	+	-	+	-

$P(X) \geq 0 \Rightarrow$ $S=]-\infty; \frac{3}{2}]$ U [1; 2]

$P(x) < 0 \Rightarrow$ $S=] \frac{3}{2}; 1[$U$] 2; +\infty [$

Exercice d'Application

On considère le polynôme P de définie par : $P(x)= x^3-3x^2-4x+12$

a)Vérifier que P (-2)=0

b) En déduire un polynôme Q de degré 2 tel que P(x)= (x+2) Q(x)

c) Factoriser Q(x)

d) Etudier le signe de P(x)

e) En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$

Résolution

Soit $P(x)= x^3-3x^2-4x+12$

a) Vérifions que P (-2)=0

$P (-2) = (-2)^3+-3\times(-2)^2-4(-2) +2$

$P (-2)=-8-12+8+12$

$P (-2)=0$

b) Déduisons en Q(x)

Procédons par la division euclidienne

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2-4x+12 & x+2 \\ \hline -x^3+2x^2 & x^2-5x+6 \\ \quad -5x^2-4x+12 & \\ \quad\ +5x+10x & \\ \qquad 6x+1 & \\ \qquad -6x-12 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Donc : $P(x)= (x+2)(x^2-5x+6)$

c) Factorisons Q(x)

$Q(x)= x^2 - 5x + 6$ $\qquad$ a=1 ; b= -5 ; c=6

On pose: $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta= (-5)^2-4(6)(1)$
$\Delta= 25-24$
$\Delta=1$

$X_1= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \quad X_1= \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} =2$

$X_2= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \quad X_2= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Donc **Q(x)=(x-2) (x-3)**

d) Etudions le signe de P(x)
P(x) = (x+2) (x-2) (x-3)
D'où le tableau de signe

x	$-\infty$ -2	2	3	$+\infty$
x+2	-	+	+	+
x-2	-	-	+	+
x-3	-	-	-	+
P(x)	-	+	-	+

e) Les solutions de $P(x) \leq 0$
$\Rightarrow$ **S=]-∞; −2] U [2; 3]**

E- équations et inéquations bicarrées

E1. équations bicarrées

On considère un polynôme P tel que $P(x)= ax^4+bx^2+c$.
Pour résoudre une équation de type P(x)=0, on procède par un changement de variable en posant $X=x^2$ pour ramener l'expression ax^4+bx^2+c à une expression du 2nd degré de variable X. L'équation ax^4+bx^2+c est appelée une équation bicarrée.

Exemple : Résoudre dans IR, les équations :

a) $2x^4+5x^2-3=0$
b) $X^4-6x^2+9= 0$
c) $X^4+x^2+2= 0$
d) $X^4-4x^2+3=0$

Résolution

a) $2x^4+5x^2-3=0$ Posons : $X= x^2$;

L'équation devient: $2X^2+5X-3=0$ a=2 ; b=5 ; c=-3

$\Delta=b^2-4ac \quad \Delta= (5)^2-4(2)(-3)$
$\Delta= (5)^2-4(2)(-3)$
$\Delta=25+24 \quad \Delta= 49$
$\Delta= 7^2$

$X_1= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \quad X_1= \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} =-3$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$X_1=-3$ ou $X_2=\frac{1}{2}$ or $X= x^2$

Donc: $x^2=-3$, impossible

$x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=+\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ $x=+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **S=** $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; +\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

b) $x^4-6x^2+9=0$ posons : $X= x^2$, L'équation devient: $X^2-6X+9=0$; a=1 ; b=-6 ; c=9

On pose: $\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (-6)^2-4\times9$

$\Delta= 36-36$

$\Delta=0$; on a une racine double : $X = \frac{6}{2} = 3$

$x^2=3 \Rightarrow x= +\sqrt{3}$ ou $x=- \sqrt{3}$ **S=** $\{-\sqrt{3}; +\sqrt{3}\}$

c) $x^4+x^2+2=0$ on pose $X=x^2$

$X^2+X+2=0$ a=1; b= 1; c=2

On pose: $\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (1)^2-4\times1\times2$

$\Delta=-7$; $\Delta <0$ donc **S=ϕ**

e) $X^4-4x+3=0$ on pose $X= x^2$

$X^2-4X+3=0$ a=1 ; b=-4 ; c=3

On pose: $\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (-4)^2-4\times1\times3$

$\Delta=16-12^2$

$\Delta=4=2^2$

$X_1= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1= \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} =1$

$X_2= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2= \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$x^2 = 1 \Rightarrow x=-1$ ou $x=1$

$x^2 = 3 \Rightarrow x=-\sqrt{3}$; $x=+\sqrt{3}$ **S=** $\{-\sqrt{3}; -1; 1; +\sqrt{2}\}$

e2. Inéquations

Pour résoudre une inéquation bicarrée, on procède par le même chemin en posant $x^2= X$; puis on étudie le signe du polynôme.

Exemple :_Résoudre dans IR l'inéquation :

$x^4-5x^2+4\leq0$

Posons $X=x^2 \Rightarrow X^2-5X+4\leq0$ a=1; b=-5 ; c=4

$\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (-5)^2-4\times1\times4$

$\Delta= 25-16$

$\Delta=9 \Rightarrow \Delta= 3^2$ d'où le polynôme admet deux racines distinctes

$X_1= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1= \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} =1$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$x^2 = 1 \Rightarrow$ x=-1 ou x=1

$x^2 = 4 \Rightarrow x=-2$; $x=+2$

$\Rightarrow P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

Tableau de signe

x	-∞	-2	-1	1	2 +∞
X+2	-	+	+	+	+
X+1	-	-	+	+	+
x-1	-	-	-	+	+
X+1	-	-	-	-	+
P(x)	+	-	+	-	+

$P(x) \leq 0 \Rightarrow$ **S= [-2; −1] U [1; 2]**

b) $2x^4-5x+7\leq 0$ on pose $X=x^2$

$2X^2-5X+7\leq 0$ a=2; b=-5 ; c= 7

$\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (-5)^2-4\times 2\times 7$

$\Delta=-39$

$\Delta <0$ donc le signe est celui de *a* ; *a* est positif.

x	-∞ +∞
P(x)	+

$P(x) \leq 0 \Rightarrow$ **S=ϕ**

c) $-3x^4+6x^2-3\leq 0$ on pose $X=x^2$

$-3X^2+6X-3\leq 0$ a=-3 ; b=6 ; c=-3

$\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (6)^2-4(-3) \times (-3)$

$\Delta=36-36 \Rightarrow \Delta=0$ donc P a une racine double $x_o = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2x(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$

$P(x)=-3(X-1)^2$

$P(x) \leq 0 \Rightarrow -3(X-1)^2\leq 0$ Or $X=x^2$

$\Rightarrow -3[(x-1)(x+1)]^2\leq 0$

$\Rightarrow -3(x-1)^2(x+1)^2\leq 0$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
-3	-	-	-	
$(x+1)^2$	+	+	+	
$(x-1)^2$	+	+	+	
$-3(x-1)^2(x+1)^2$	-	-	-	

S=IR

F- équations et inéquations liant deux fractions rationnelles

F1. Équations

Soit P, Q, R et S quatre polynômes. Les équations liant deux fractions sont de la forme : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$

Résoudre de telles équations revient à résoudre l'équation : P(x)×S(x)=R(x) ×Q(x), avec Q(x) ≠0 et S(x) ≠0

Exemple : Résoudre dans IR :

a) $\frac{1}{x-2} = \frac{x-7}{x-2}$

Condition d'existence :

L'équation existe si et seulement si x-2≠0 → x≠2 ; Le domaine d'existence est **IR/ {2}**

$\frac{1}{x-2} = \frac{x-7}{x-2}$ ⇔ x-2 = (x-2)(x-7)

⇔ (x-2)-(x-2)(x-7)=0

⇔(x-2)(-x+8)=0

⇔X=2 ou x=8 or 2 n'appartient pas au domaine de définition donc **S= {8}**

Exercice d'application

b) Résoudre dans IR : $\frac{3-2x}{4x+5} = 0$; $\frac{x-1}{x+1} = \frac{-2x+3}{x-2}$; $\frac{3x+3}{4} + 2x = \frac{3x+5}{2}$

Inéquation de type : $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq \frac{R(x)}{S(x)}$

Pour résoudre une inéquation liant 2 fractions rationnelles :

- On détermine la condition d'existence ;
- On établit f(x)=$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{R(x)}{S(x)}$ puis on étudie le signe de f(x) après avoir réduit au même dénominateur.

Attention : $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq \frac{R(x)}{S(x)}$ n'est pas équivalent à P(x)×S(x) ≤R(x)×Q(x).

c) Exemple : Résoudre dans IR $\frac{2x-5}{x+1} \leq \frac{1-3x}{x-3}$

L'inéquation existe si et seulement si : x+1≠0 et x-3≠0

⇔x ≠ -1 et x ≠ 3 **x ϵ IR\ $\{-1;3\}$**

$\frac{2x-5}{x+1} \leq \frac{1-3x}{x-3}$ ⇔ $\frac{2x-5}{x+1} - \frac{1-3x}{x-3}$ ≤0

⇔$\frac{(2x-5)(x-3)-(x+1)(1-x)}{(x+1)(x-3)}$ ≤0

$\Leftrightarrow \frac{5x^2-9x+14}{(x+1)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow 5x^2 -9x+14 \leq 0$ on pose $\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (-9)^2 - 4\times 5 \times 14$

$\Delta = -199 < 0$

Tableau de signe

x	$-\infty$ -1	3	$+\infty$
$5x^2 -9x+14$	+	+	+
X+1	-	+	+
x-3	-	-	+
F(x)	+	-	+

S=]−1; 3[

Exercice d'application

Résoudre dans IR :

a) $\frac{-x+3}{x+1} < \frac{x-2}{x-4}$

b) $\frac{-5x+4}{x+1} < 1$

c) $\frac{x-1}{x+3} > 0$

d) $\frac{x-2}{3x+1} \leq \frac{1-x}{x+2}$

CHAPITRE 2 : ETUDE DE FONCTION

I. Rappels sur la Notion de limites et de continuité

1. Limites de référence :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$	
$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} X^n = \begin{cases} +\infty \text{ si n est paire} \\ -\infty \text{ si n est impaire} \end{cases}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	
$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} a =$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a =$	$\lim\limits_{x\to b} a = a$

Exemple: Calculer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}$;

f) $\lim\limits_{x\to 2} (x+1)$; g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x-2}$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x)$; i) $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2$

Résolution

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$;

f) $\lim\limits_{x\to 2} (x+1) = 3$; g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{-1}{2}$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$; i) $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty$

Limite des fonctions polynômes et fonctions rationnelles

A retenir :

- ✓ La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^6+3x^2+1$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2+1$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3+x^2+1$

Resolution

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^6+3x^2+1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^6 = +\infty$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2+1 = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3+x^2+1 = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$

- ✓ La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-3x+2}{3x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{3x^2}\right) = \frac{2}{3}$$

Attention : $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{2^2-2x2+1}{2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{0^2-3x0+2}{3x0^2-1} = -2$$

Limite à gauche, limite à droite

Elle se calcul à gauche et à droite de la valeur interdite du domaine de définition.

Exemple: Calculer la limite à gauche et à droite dans chacun des cas suivants :

a) $F(x)=\frac{3x-1}{x+1}$ a= -1

b) $\frac{x^2-2x+1}{x-2}$ a= 2

Calculons la limite à gauche et à droite :

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(-1)-1}{0-} = \frac{-4}{0-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(-1)-1}{0+} = \frac{-4}{0+} = -\infty$$

Utilisation du tableau du signe

x	$-\infty$	1	$+\infty$
-4	-	||	-
X+1	-	||	+
	+	||	-

D'où $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-2x+1}{x-2} = \frac{2^2-2x2+3}{0+} = \frac{3}{0+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-2x+1}{x-2} = \frac{2^2-2x2+3}{0-} = \frac{3}{0-} = -\infty$$

Utilisation du tableau de signe

x	$-\infty$	2	$+\infty$
3	+	||	+
x-2	-	||	+
	-	||	+

D'où $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

1.2. notion d'asymptotes

a- asymptotes parallèles aux axes du repère

A RETENIR : Lorsqu'une fonction admet pour limite un nombre réel a en $+\infty$ ou en $-\infty$; alors la droite d'équation y = a est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction.

Exemple : Calculer la limite en l'infini de f et en déduire d'éventuelles asymptotes.

a) $F(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2}$ b) $f(x)=\frac{3x-6}{x^2+1}$ c) $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$

Solution

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$

Donc la droite d'équation y = 1 est asymptote Horizontale à la courbe (C_f).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{3x-6}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{3x-6}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0$

Donc la droite d'équation y=0 est asymptote horizontale à la courbe (C_f).

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}(x) = -\infty$

Donc il n'existe pas d'asymptote horizontale.

- Lorsqu'une fonction admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ à gauche ou à droite en x_o ; alors la droite d'équation $x = x_o$ est une asymptote verticale à la courbe.

Exemple : Calculer les limites à gauche et à droite et en déduire d'éventuelles asymptotes :

a) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ a=-1; b) $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$ a=2

Solution:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1^-}\left(\frac{-2}{0-}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1^+}\left(\frac{-2}{0-}\right) = -\infty$

Donc la droite d'équation X= -1 est asymptote à (C_f).

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-}\left(\frac{3x-2}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to 2^-}\left(\frac{4}{0-}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+}\left(\frac{3x-2}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to 2^+}\left(\frac{4}{0+}\right) = +\infty$

Donc la droite d'équation X=2 est asymptote à (C_f).

b- Asymptote Oblique

A RETENIR : soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative. Lorsqu'il existe une quantité y= ax+b telle que : $\lim_{x\to\infty} [f(x)-(ax+b)]= 0$ alors la droite d'équation y= ax+b est dite asymptote

Oblique de (C).

Exercice d'application

1- Soit la fonction définie par : $f(x) = \frac{-x^2+3x-1}{x+2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Calculer les limites aux bornes de D_f.

c) Déterminer 3 réels a, b, et c tels que $\forall\, x \in D_f$, f(x)= ax+b + $\frac{c}{x+2}$

d) Démontrer qu'il existe une asymptote oblique à (C_f).

2- Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition et calculer les limites aux bornes du domaine.

a) f(x)= x+1 ;

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2-2x+3$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$;

d) $f(x) = \frac{1}{x+1}$;

e) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$;

f) $f(x) = \frac{-x3+x+1}{x+1}$

Solution

1- Soit $f(x) = \frac{-x^2+3x-1}{x+2}$

a) Déterminons le domaine de définition

f existe si et seulement si : $x+2\neq0 \rightarrow x \neq -2$

$\mathbf{D_f= IR/\{-2\}}$

b) Calculons les limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x^2+3x-1}{x+2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2}{x}\right) = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-x^2+3x-1}{x+2} \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-x^2}{x} \right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(\frac{-4-6-1}{0^-} \right) = \frac{-11}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{-4-6-1}{0^+} \right) = \frac{-11}{0^-} = -\infty$

Donc la droite d'équation X= -2 est asymptote verticale

c) Déterminons trois réels a, b, et c

→Par identification :

$f(x) = ax+b+\frac{c}{x+2} \rightarrow f(x) = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$

$\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}$

$\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}$

$\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+x(2a+b)+2b+c}{x+2}$

Par identification : $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3-2a = 5 \\ c = 1-2b = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a = -1} \\ \mathbf{b = 5} \\ \mathbf{c = -9} \end{cases}$

$f(x) = -x + 5 - \frac{9}{x+2}$

→ Par division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} -x^2+3x+1 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{+x^2+2x} & -x+5 \\ 5x+1 & \\ \underline{-5x-10} & \\ -9 & \end{array}$$

D'où : $f(x) = -x + 5 + \frac{(-9)}{x+2} \rightarrow f(x) = -x + 5 - \frac{9}{x+2}$

d- Démontrons qu'il existe une asymptote horizontale :

Posons : y = -x+5

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [(-x+5) - \frac{9}{x+2} - (-x+5)]$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - y] = \lim -\frac{9}{x} = 0$

D'où la droite d'équation : y= -x+5 est une asymptote oblique.

2) Déterminons le domaine de définition et calculons les limites aux bornes de D_f :

a) f(x) = x+1

D_f= IR=]$-\infty$; $+\infty$[

Lim f(x) = Lim(x+1) = $-\infty$
x→ $-\infty$

Lim f(x) = Lim(x+1) = $+\infty$
x→ $+\infty$ x→ $+\infty$

b) f(x) = $\frac{1}{3}$ x^2-2x+3

D_f= IR=]$-\infty$; $+\infty$[

Lim f(x) = Lim($\frac{1}{3}$ x^2-2x+3)
X→ $-\infty$ x→ $-\infty$

Lim f(x) = Lim($\frac{1}{3}$ x^2) = $+\infty$
x→ $-\infty$ x→ $-\infty$

Lim f(x) = Lim($\frac{1}{3}$ x^2) = $+\infty$
x→ $+\infty$ x→ $+\infty$

c) f(x) = $\frac{1}{x}$

f existe si et seulement si:

x ≠ 0 D_f = IR/{0} ou **D_f =]$-\infty$; $\mathbf{0}$[U]$\mathbf{0}$;** $+\infty$[

lim f(x) = lim($\frac{1}{x}$) = $\frac{1}{+\infty}$ = 0
x→ $-\infty$ x→ $-\infty$

lim f(x) = lim($\frac{1}{x}$) = $\frac{1}{+\infty}$ = 0
x→ $+\infty$ x→ $+\infty$

Donc la droite (D) : y = 0 est asymptote horizontale

lim f(x) = lim($\frac{1}{x}$) = $\frac{1}{0^-}$ = $-\infty$
x→ 0^- x→ 0^-

lim f(x) = lim($\frac{1}{x}$) = $\frac{1}{0^+}$ = $+\infty$
x→ 0^+ x→ 0^+

Donc la droite (D) : X = 0 est asymptote verticale.

d) f(x) = $\frac{1}{x+1}$

f existe si et seulement si : x+1 ≠0 → x≠ -1

D_f = IR\{-1} ou D_f =]$-\infty$; $-\mathbf{1}$[U] $-$ $\mathbf{1}$; $+\infty$[

lim f(x) = lim($\frac{1}{x}$) = $\frac{1}{-\infty}$ = 0

$x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x}) = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (\frac{1}{x}) = \frac{1}{1^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (\frac{1}{x}) = \frac{1}{1^+} = +\infty$

Donc la droite (D) : X = 0 est asymptote verticale.

e) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

f existe si et seulement si : $x-3 \neq 0 \to x \neq 3$

D_f = IR\{ 3 } ou D_f = $]-\infty\,; 3[$ U $]3\,;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{x}{x}) = \frac{1}{1} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x}{x}) = \frac{1}{1} = 1$

Donc la droite (D) : y = 1 est asymptote horizontale.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (\frac{3-2}{0^-}) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (\frac{3-2}{0^+}) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Donc la droite (D) : X= 3 est asymptote vertical.

f) $f(x) = \frac{-x^3+x^2+1}{x+1}$

f existe si et seulement si : $x+1 \neq 0 \to x \neq -1$

D_f = IR\{ -1 } ou D_f = $]-\infty\,; -1[$ U $]-1\,;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{-x^3}{x}) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{-x^3}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = (\frac{-(-1)^3+(-1)^2+1}{0^-}) = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim f(x) = (\frac{-(-1)^3+(-1)^2+1}{0^+}) = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$x \to -1^+$

Donc la droite **(D) : X = -1** est asymptote verticale.

II. notion de dérivée

Définition : Soit f une fonction

L'ensemble des nombres réels en les quels f est dérivable, est appelé *ensemble de dérivabilité*

La fonction $x \to f'(x)$ est appelé dérivée (ou fonction dérivée) de f

2.1. Dérivées des fonctions élémentaires

$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	Ensemble de dérivée
$f(x)$	$f'(x)$	IR
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	IR
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	IR
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	IR*
$F(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	IR
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$

Exemple : $f(x) = 2 \to f'(x) = 0$

$f(x) = 2x \to f'(x) = 2$

$f(x) = x^4 \to f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \to f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x = x \to$ $\mathbf{f'(x) = x}$

2.2. Dérivée et opération sur les fonctions

Fonction mère	Dérivée
F(x)	F'(x)
k.U(x), k $\in IR^*$	k.U'(x) k $\in IR^*$
U(x) + V(x)	U'(x) + V'(x)
U(x)×V(x)	U'(x)V(x) + V'(x)U(x)
$\frac{1}{U(x)}$	$\frac{-U'(x)}{U(x)}$
$\frac{U(x)}{v(x)}$	$\frac{U'V - V'U}{v^2}$
$U(x)^n$	$nU'.U^{n-1}$
$\sqrt{U(x)}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée

a) f(x)= -x
b) $f(x)=2x^2$
c) $f(x)=\frac{-3}{x}$
d) $f(x) = 2\sqrt{x}$
e) $f(x) = 2x^2 -3x-5$
f) $f(x) = 2x^4 + \frac{4}{3}x^3-x^2+3$
g) $f(x) = \frac{1}{x+2}$
h) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
i) $f(x) = \frac{3x}{x+2}$
j) $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-2}$
k) $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$
l) $F(x) = (x+1)^6$
m) $F(x) = (x^2-2)^3$

Solution

a) f(x) = -x **D_f= IR**

f'(x) = -1

b) $f(x) = 2x^2$ $\quad$ **D_f = IR**

$f'(x) = 4x$

c) $f(x) = \frac{-3}{x}$ $\quad$ **D_f = IR**

$f'(x) = -3 \times (\frac{1}{x})'$ $\quad \rightarrow \quad$ **$f'(x) = \frac{3}{x^2}$**

d) $f(x) = 2\sqrt{x}$ $\quad$ **D_f= [0; +∞[**

$f'(x) = 2\times (\sqrt{x})'$

$f'(x) = 2\times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad \rightarrow$ **$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$**

e) $f(x) = 2x^2-3x-5$ $\quad$ **D_f = IR**

$f'(x) = (2x^2)' - (3x)' - (5)'$

$f'(x) = 4x - 3$

f) $2x^4+\frac{4}{3}x^3-x^2+3$ $\quad$ **D_f = IR**

$f'(x) = (2x^4)' + (\frac{4}{3}x^3)'-(x^2)'+(3)'$

$f'(x) = 8x^3+4x^2-2x$

g) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ $\quad$ **D_f= IR\{-2}**

$U= x+2 \rightarrow U' = 1$

$f'(x) = \frac{-1}{U^2}$ $\rightarrow$ **$f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$**

h) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $\quad$ **D_f= IR\{-1;1}**

$U = x^2-1 \rightarrow U' = 2x$

$f'(x) = \frac{-U'}{U^2}$ $\rightarrow$ **$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$**

i) $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ $\quad$ **D_f= IR\{-2}**

$U = 3x \rightarrow U' = 3$

$V= x+2 \rightarrow V' = 1$

$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{V^2}$

$f'(x) = \frac{3(x+2)-1(3x)}{(x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$

j) $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-2}$ **D_f= IR\{2}**

$U = 3x^2-2x+1 \rightarrow U' = 6x-2$

$V = x-2 \rightarrow V' = 1$

$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{U^2}$

$f'(x) = \frac{(6x-2)(x-2)-1(3x^2-2x+1)}{(x-2)^2}$

$f'(x) = \frac{6x^2-12x-2x-2x+4-3x^2+2x-1}{(x-2)^2}$ $\rightarrow$ **$f'(x) = \frac{3x^2-12x+3}{(x-2)^2}$**

k) $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$ **D_f= IR\{2}**

$U = x+1 \rightarrow U' = 1$

$V = 2-x \rightarrow V' = -1$

$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{V^2}$

$f'(x) = \frac{1(2-x)-(-1)(x+1)}{(2-x)^2}$

$f'(x) = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2}$ $\rightarrow$ **$f'(x) = \frac{3}{(2-x)^2}$**

l) $f(x) = (x^2-2)^3$ **D_f= IR**

Posons: $U = x^2-2 \rightarrow U' = 2x$

$f'(x) = (U^n) = nU'U^{n-1}$

$f'(x) = 3\times (2x) \times(x^2-2)^2$ $\rightarrow$ **$f'(x) = 6x(x^2-2)^2$**

2. 3. Dérivée et application

a- Sens de variation d'une fonction

Pour déterminer le sens de variation d'une fonction, nous déterminons le signe de la dérivée sur l'ensemble de définition :

- ✓ Si f'(x) est positive sur une partie(ou l'intégralité) de l'ensemble alors f est croissante

  (Strictement croissante).

- ✓ Si f'(x) est négative sur une partie de cet ensemble (ou l'intégralité), alors f est décroissante (strictement décroissante) sur cet ensemble.
- ✓ Si f' est nulle alors, on dit que f est constante.

Remarque : Etudier les variations d'une fonction revient à dresser le tableau de signe et le tableau de variation.

Exemple : Etudier les variations des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3-3x-1$
b) $f(x) = 2x^2-x+4$

c) $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

Solution

a) $f(x) = x^3-3x-1$ **D_f= IR**

$f'(x) = 3x^2-3 \rightarrow f'(x) = 3(x^2-1) \rightarrow$ **$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$**

posons $f'(x)= 0 \rightarrow 3(x-1)(x+1)= 0 \rightarrow x= 1$ ou $x= -1$

<u>Tableau de variation</u>

X	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x+1		-		+		+	
x-1		-		-		+	
f'(x)		+		-		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$f(-1)=1$	↘	$f(1)= -3$	↗	$+\infty$

$\forall x \in]-\infty\ ; -1[\ \cup\ [1\ ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $]-\infty\ ; -1[\ \cup\ [1\ ; +\infty[$;

$\forall x \in]-1\ ; -1[$; $f'(x) <$, 0 d'où f est décroissante sur $]-1\ ; 1[$.

b) $f(x) = 2x^2-x+4$ **D_f= IR**

$f'(x) = 4x-1$; $f'(x) = 0 \rightarrow 4x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x) = 4x-1$		-		+	
f(x)	$+\infty$	↘	$f(\frac{1}{4})$	↗	$+\infty$

$\forall x \in]-\infty\ ; \frac{1}{4}[$, $f'(x) <$, 0 d'où f est décroissante sur $]-\infty\ ; \frac{1}{4}\ [$;

$\forall x \in]\frac{1}{4} ; +\infty\ [$, $f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $]\frac{1}{4}$; $+\infty$ [.

c) $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-2}$ **D_f= IR\{2}**

Calcul de la dérivée :

$U = 3x^2-2x+1 \;\rightarrow U' = 6x-2$

$V = x-2 \rightarrow \; V' = 1$

$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{V^2} \rightarrow f'(x) = \frac{(6x-2)(x-2)-(6x-2)}{(x-2)^2}$

$f'(x) = \frac{6x^2-20x+6}{(x-2)^2}$

$\forall x \in D_f, (x-2)^2 > 0$ donc f' est du signe du numérateur

$6x^2-20x+6=0 \;\rightarrow 3x^2-10x+3=0$

$$\Delta' = (5)^2 - 9 \;\rightarrow \Delta' = 16$$

$$\Delta' = 4^2$$

$X_1 = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$; et $X_2 = \frac{5+4}{3} = 3$

$f'(x) = 3(x - \frac{1}{3})(x-3)$

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$X - \frac{1}{3}$		-		+	‖	+		+	
x-3		-		-	‖	-		+	
f'(x)		+		-	‖	-		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$f(\frac{1}{3})$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	f(3)	↗	$+\infty$

$\forall x \in]-\infty ; \frac{1}{3}[\cup]3 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{3}[\cup]3 ; +\infty[$;

$\forall x \in]\frac{1}{3} ; 2[\cup]2 ; 3[$; $f'(x) < 0$ d'où f est décroissante sur $]\frac{1}{3} ; 2[\cup]2 ; 3[$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad D_f = IR^*$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$\forall x \in D_f , \frac{-1}{x^2} < 0$ d'où f est strictement décroissante.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		-	‖	-	
f(x)	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

b- Détermination d'une équation de la tangente au point d'abscisse x_o

La courbe d'une fonction peut atteindre en un point M_o d'abscisse x_o une tangente dont l'équation est donnée par :

(T) : $y = f'(x_o)(x-x_o)+f(x_o)$

Exemple : Soit $f(x) = x^2+2x+3$

a) Calculer la dérivée de f(x)
b) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 3

Solution

a) Calcul de la dérivée
$f'(x) = 2x+2$
b) Une équation de la tangente au point d'abscisse 3

(T) : $y = f'(x_o)(x-x_o)+f(x_o)$

$X_o = 3 \rightarrow f'(3) = 2\times3+2 \quad f'(3) = 8$ et $f(3) = 3^2 + 2 \times 3 + 3 = 18$

Donc : (T) : $y = 8(x-3) + 18$

$Y = 8x-24+18 \quad (T)$: **$y = 8x-6$**

2. 4. Dérivées successives

Une fonction peut être dérivée plusieurs fois. La première dérivée de f est f'. La 2ème dérivée de f est f'' ; la 3ème dérivée de f est f''' ou f^3. La n-ième dérivée de f est f^n.

Exemple : Calculer les trois premières dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2-2x+1$
b) $g(x) = 3x^3-6x^2+x-3$

Solution

c) $f(x) = 3x^2-2x+1$
$f'(x) = 6x-2+0$
$f''(x) = 6$
$f'''(x) = 0$

d) $g(x) = 3x^3-6x^2+x-3$
$g'(x) = 9x^2-12x+1$
$g''(x) =18x-12$
$g^3(x) = 18$
$g^4(x) = 0$

III. étude de fonction

A- parité :

Une fonction est dite paire si et seulement si son ensemble de définition est symétrique par rapport à O.

$\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$

Exemple: $f(x) = x^2+1$

$f(-x) = (-x)^2+1 = x^2+1$

Donc la fonction f est paire.

Une fonction est dite impaire si son ensemble de définition est symétrique par rapport à O et $\forall x \in D_f$: $f(-x) = f(x)$

2- Centre de symétrie

Pour démontrer qu'un point $A\binom{a}{b}$ est centre de symétrie, il suffit de démontrer que : $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{b} = 2 \Leftrightarrow f(a-h) + f(a+h) = 2b$

3- Axe de symétrie

Pour démontrer qu'une droite X= a est axe de symétrie alors il suffit juste de prouver que : $f(a-h) = f(a+h)$

B. fonction logarithme népérien

Définition : On appelle fonction logarithme népérien, la fonction notée *lnx* définie sur]0 ; +∞[, qui s'annule en 1.

Propriété fondamentale de la fonction logarithme

La fonction logarithme népérien est caractérisée par trois propriétés fondamentales qui sont:

- Son domaine de définition] 0 ; +∞[
- ln(1) = 0 (racine évidence)
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (dérivée)

a) Ensemble de définition de fonction composé avec ln : lnU

La fonction lnU existe si et seulement si U existe et U>0

Exemple : Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction f.

a) $F(x) = \ln(4x-8)$
b) c) $h(x) = \ln(\frac{x-2}{3x+9})$
c) $G(x) = \ln(-3x+4)$
d) d) $k(x) = \ln(x^2-3x+4)$

Solution

a) $F(x) = \ln(4x-8)$ f(x) existe si et seulement si $4x-8 >0 \rightarrow x > 2$

D_f =] 2 ; +∞[

b) $g(x) = \ln(-3x+4)$ g(x) existe si et seulement si $-3x+4>0 \rightarrow -3x > -4 \rightarrow 3x< 4 \rightarrow x< \frac{4}{3}$

D_g=]-∞ ; $\frac{4}{3}$[

c) $h(x) = \ln(\frac{x-2}{3x+9})$ f(x) existe si et seulement si $\frac{x-2}{3x+9} > 0$ et $3x+9 \neq 0$

$x-2 = 0 \rightarrow x = 2$; $3x+9 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$

X	$-\infty$	-3		2 $+\infty$
3x+9	-	‖	+	+
x-2	-	‖	-	+
$\frac{x-2}{3x+9}$	+	‖	-	+

D_h=]-∞; -3[U] 2 ; +∞[

d) $k(x) = \ln(x^2-3x+4)$ k(x) existe si et seulement si : $x^2-3x+4 > 0$

$x^2-3x+4 = 0$ $a = 1; b = -3; c = 4 \rightarrow \nabla = (-3)^2-4(1)\times(4)\ \ 0 \rightarrow \nabla = 9 - 16\ 0 \rightarrow \nabla = -7 < 0$

Alors le signe est celui de a ; a> 0 on en déduit que ;$\forall x \in$ IR, $x^2-3x+4 > 0$; **D_K= IR**

b) Variation de ln et ses conséquences

Variation : La fonction ln étant définie sur]0;+ ∞ [et ayant pour dérivée $(\frac{1}{x})$ une fonction strictement croissante.

Conséquences : ∀a, b ∈IR*, on a :

- Si a= b ↔lna = lnb
- Si a>b↔lna> lnb
- Si a<b ↔lna< lnb

Cas particulier :

- Si a<1 → lna< lnb or ln1 = 0 alors lna< 0
- Si a>1→ lna > ln1 or ln1 0 alors lna> 0

c) Le nombre e

lne = 1 ; e ≈ 2.718 ; lnx = 1 → x= e^1 = e ; $\ln e^x = x$

d) Propriétés algébriques

∀a ∈ IR_+^* et ∀b ∈ IR_+^*, on a :

- Ln(a.b) = lna+lnb
- $\ln(\frac{1}{a})$= -lna
- $\ln(\frac{a}{b})$ = lna - lnb
- $\ln(a^n)$ = nlna

Ecrire plus simplement :

- $\ln(\frac{2}{3})$ = ln2-ln3
- $\ln(2\sqrt{2}) = \ln2+\ln\sqrt{2} \rightarrow \ln2+\frac{1}{2}\ln2 = \frac{3}{2}\ln2$
- $\ln4 = \ln2^2 = 2\ln2$

e) Equations et Inéquation comportant ln

1. Equations :

Pour résoudre les équations comportant ln, il faut :

- ✓ Déterminer la condition d'existence de l'inéquation
- ✓ Utiliser les propriétés algébriques des fonctions ln pour en déduire une équation plus simple.

- **Equation du type lnU = k**

a) $Ln(2x+6) = 0$
b) $Ln(3x+2) = 5$
c) $Lnx + 2 = 3$
d) $Ln(x+2) = 0$
e) $Ln(x^2- 3x+4)$
f) $Lnx = -3$

Solution

a) $\ln(2x+6) = 0$ cette équation existe si $2x+6 > 0 \rightarrow 2x > -6 \rightarrow x > -3 \rightarrow x \in]-3 ; +\infty[$

$\ln(2x+6) = 0 \rightarrow \ln(2x+6) = \ln 1 \rightarrow 2x+6 = 1 \rightarrow 2x = - 5 \rightarrow x = \frac{-5}{2} \in]-3 ; +\infty[$

S = $\{ \frac{-5}{2} \}$

b) $\ln(3x+2) = 5$ cette équation existe si $3x+2 > 0 \rightarrow 3x > -2 \rightarrow x > \frac{-2}{3} \rightarrow x \in]\frac{-2}{3} ; +\infty[$

$\ln(3x+2) = 5 \rightarrow e^{\ln(3x+2)} = e^5 \rightarrow 3x+2 = e^5 \rightarrow 3x = e^5-2 \rightarrow x = \frac{e^5-2}{3} \rightarrow x \in]\frac{-2}{3} ; +\infty[$

S = $\{ \frac{e^5-2}{3} \}$

- **Equation du type lnU = lnV**

Résoudre dans chacun des cas suivants les équations :

a) $Ln(x+1) = \ln(2x-2)$
b) $Ln(x+3) = \ln(-x-7)$
c) $Ln(x-1) + \ln(x+1) = 0$
d) $Ln(2x-2) + \ln(2x+2) = \ln 3$

Solution

a) $Ln(x+1) = \ln(2x-2)$ cette équation existe si $x+1 > 0$ et $2x - 2 > 0 \rightarrow x > -1$ et $x > 1$
$\rightarrow x \in]\frac{-2}{3} ; +\infty[$

b) $Ln(x+3) = \ln(-x-7)$ cette équation existe si $x+3 > 0$ et $- x - 7 > 0 \rightarrow x > -3$ et $x < -7$
L'équation n'a pas de solution

- **Utilisation d'inconnu Auxiliaire**

Pour résoudre les équations du types : $a(\ln x)^2 + b(\ln x)+c = 0$. On procède par changement de variable en posant : $X = \ln x$

On se ramène ainsi à une du 2^{nd} degrés.

Exemple : Résoudre dans chacun des cas suivants les équations suivantes :

- $\ln^2 x+5\ln x-6 = 6$
- $\ln^4-\ln^2 x = 0$
- $\ln^2 x+\ln x+12 = 0$
- $\ln^3+\ln^2 x + 2\ln x = 0$

Exercice d'application

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^3+2x^2-5x-6$

1- Calculer P(-1)

2- Ecrire P(x) sous forme d'un produit de deux polynômes

3- Résoudre dans IR les équations :

a- $P(x) = 0$

b- $(\ln x)^3+2(\ln)^2-5\ln x = 6$

2. Les Inéquations

Résoudre les inéquations comportant ln revient à utiliser le même procédé que la précédente partie :

- ✓ Déterminer le domaine d'existence
- ✓ Ramener sous forme $\ln a < \ln b$

b_1- Les inéquations de type $\ln U > k$ ou $\ln U < k$

Exemple : $\ln(2x+6) < 0$; $\ln(2x+6)>0$; $1-\ln(x)> 0$; $\ln(3x+2)\leq 5$

b_2- Inéquations du type $\ln U < \ln V$ ou $\ln U > \ln V$

Exemple : $\ln(3x+6) < \ln(2x-1)$; $\ln x + \ln(x+1) < \ln x$; $\ln(2x+6) < \ln(-x-1)$; $\ln(4x-3) < \ln(x+1)$

B_3- Utilisation d'inconnu Auxiliaire

Exemple : $-4\ln^2x+8\ln x-4$; $-\ln^3+ \ln^2 + 2\ln x\leq 0$

f) Représentation graphique

1- Limites de référence de la fonction ln

$*\lim\limits_{x\to 0^>}(\ln x) = -\infty$; $*\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x) = +\infty$; $*\lim\limits_{x\to 0^>}(x\ln x) = 0$;

$*\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{\ln x}{x}) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{\ln x}{x-1}) = 1$; $*\lim\limits_{x\to 0^>}(\frac{\ln(x+1)}{x}) = 1$

Exemple : Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(4x+5)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(\frac{x+2}{x-1})$; $\lim\limits_{x\to +\infty} [2x+\ln x]$

3- Dérivée

La dérivée de la fonction ln(x) est $\frac{1}{x}$

- Détermination de la dérivée d'une fonction composée avec ln : la dérivée d'une fonction composé avec ln est $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$

Exemple : Dans chacun des cas suivants déterminer la dérivée de f puis dresser son tableau sur son D_f :

a) $f(x) = \ln(x+1)$

b) $g(x) = 2x+\ln(x+2)$

c)h(x) = ln(4x+3)

Solution

a) f(x) = ln(x+1)

f'(x)= $\frac{U'}{U}$

f'(x) = [ln(x+1)]'

f'(x) = $\frac{(x+1)'}{(x+1)}$ → **f'(x) =** $\frac{1}{(x+1)}$

b) g(x) = 2x+ln(x+2)

g'(x) = [2x+ln(x+2)]'

g'(x) = 2+$\frac{(x+2)'}{(x+2)}$

g'(x) = $\mathbf{2+\frac{1}{x+2}}$

c) h(x) = ln(4x+3)

h'(x) = [ln(4x+3)]'

h'(x) = $\frac{(4x+3)'}{(4x+1)}$

h'(x) = $\frac{4}{4x+3}$

4- Représentation graphique de la fonction ln

Récapitulatif :

D_f =]0 ; +∞[

Lim lnx = -∞
x→ $0^>$

Lim lnx = +∞
x→ +∞

Dérivée : (lnx)' = $\frac{1}{x}$

Variation : $\frac{1}{x}$ >0 alors la fonction lnx est strictement croissante

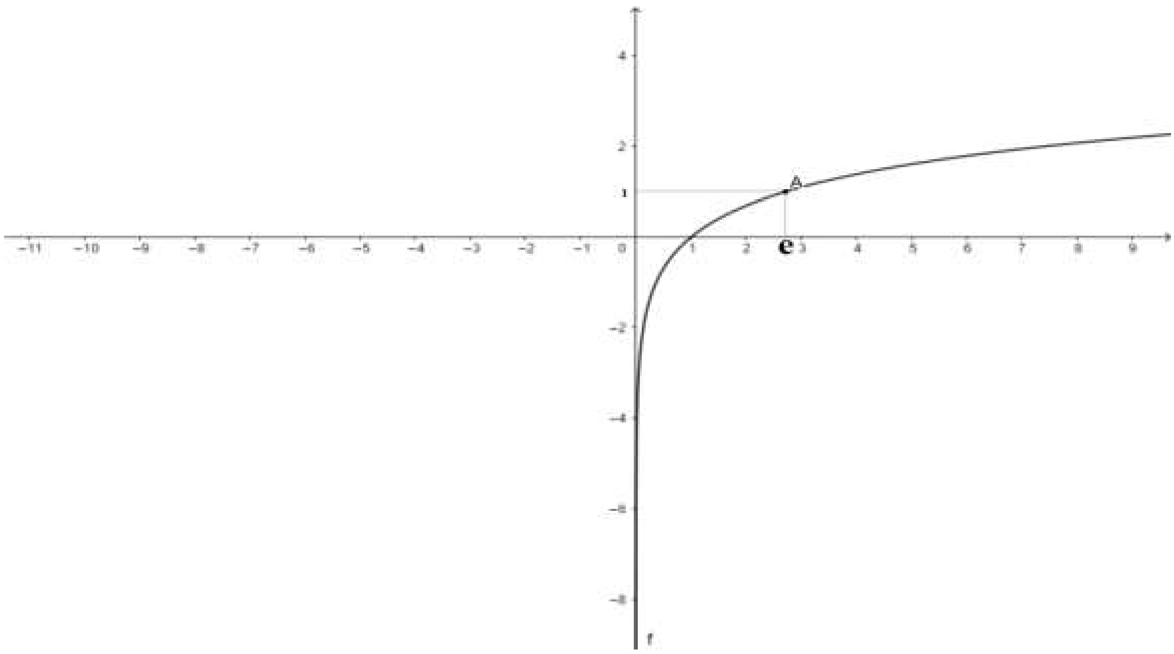
Asymptote : la droite (D) : X = 0 est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction lnx.

Les points clés : lnx = 0 → x = 1 ; lne = 1

Tableau de variation :

X	0		1	e	$+\infty$
f'(x)	||	+	+	+	
f(x)	||	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Courbe représentative :



C. fonction exponentielle

1- définition et propriété

Définition : On appelle fonction exponentielle népérienne la bijection réciproque de la fonction logarithme népérienne. Elle est définie sur IR et est notée : Exp(x) ou e^x

Elle est dérivable sur IR et sa dérivée est $(e^x)' = e^x$

Propriété : $\forall x \in IR$, $e^x > 0$

$\forall y \in IR_+^*$, $e^x = y \rightarrow x = \ln y$

Exemple : $e^x = 2 \rightarrow x = \ln 2$; $e^x = 3 \rightarrow x = \ln 3$

$e^x = -1 \rightarrow$ impossible ; $e^x = 0 \rightarrow$ impossible

a- Domaine de définition d'une fonction composée avec exponentielle

La fonction e^U existe si et seulement si la fonction U existe.

Exemple : Déterminer le domaine de définition de :

a) $f(x) = e^{x^2+1}$; b) $g(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$; c) $h(x) = e^{-x}$

b- Variation et conséquences

La fonction exponentielle est strictement croissante.

$\forall a,b \in IR$, $e^a = e^b \leftrightarrow a = b$

$e^a < e^b \leftrightarrow a < b$

$e^a > e^b \leftrightarrow a > b$

c- Propriétés algébriques

$\forall a,b \in IR$, et $r \in Q$, on a :

1) $e^a e^b = e^{a+b}$
2) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
3) $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
4) $(e^a)^r = e^{ra}$

IV. Equation – Inéquations

a- Equations

Résoudre les équations comportant exponentielles revient à utiliser les propriétés algébriques et la propriété $e^x = y \rightarrow x = \ln y$

Exemple : Résoudre dans IR, les équations et inéquations :

1- $e^{x+1} = 2$	5- $e^{x+3} = e^{2x-4}$
2- $e^{x+3} = 6$	6- $e^{x+3} = e^{2x-4}$
3- $e^{2x} = 4$	7- $e^{x^2} = e$
4- $e^{2x+1} = 2$	8- $e^{x^2} = e^{x+2}$

b. inéquations

Résoudre dans IR :

1) $e^x > 2$	4) $e^{x+1} < e$
2) $e^{x+1} < 1$	5) $2e^x < 1$
3) $e^{x+1} > e^{2x-2}$	6) $e^{x^2} \geq 6$

c. Equations- Inéquations polynômiales

Ce sont les équations et inéquations du type : $ae^{2x}+be^x+c = 0$; $ae^{2x}+be^x+c \geq 0$
Pour résoudre ces types d'équations, on procède à un changement de variable en posant

$X = e^x$. Ce changement de variable nous permet de les ramener sous la forme des équations et inéquations du 2nd degré.

Exemple : Résoudre dans IR :

a) $e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$
b) $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$
c) $e^{x} - 2e^{-x} + 1 = 0$
d) $e^{2x+2} + e^{x+1} - 2 = 0$
e) $e^{2x} - e^{x} - 6 \geq 0$
f) $e^{2x} + e^{x} - 2 \leq 0$

Exercice d'application

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

a) Calculer p(-1)
b) Déterminer les réels a, b et c tels que $p(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$
c) Résoudre $p(x) = 0$
d) En déduire les solutions de $2e^{2x} - e^{x} - 5 - 2e^{-x} = 0$

V. étude graphique de la fonction exponentielle

a- Dérivée de la fonction exponentielle

Soit $f(x) = e^x$. La dérivée de la fonction f est : $f'(x) = e^x$

b- Dérivée de la fonction composée

Soit $g(x) = e^{U(x)}$

La dérivée de la fonction composée g est $g'(x) = U'e^{(x)}$

Exemple : Dériver les fonctions suivantes :

a) $F(x) = e^{-x}$

b) $F(x) = e^{4x}$

c) $f(x) = e^{x^2+1}$

d) $f(x) = e^{x^2+2x-1}$

c- Etude des limites

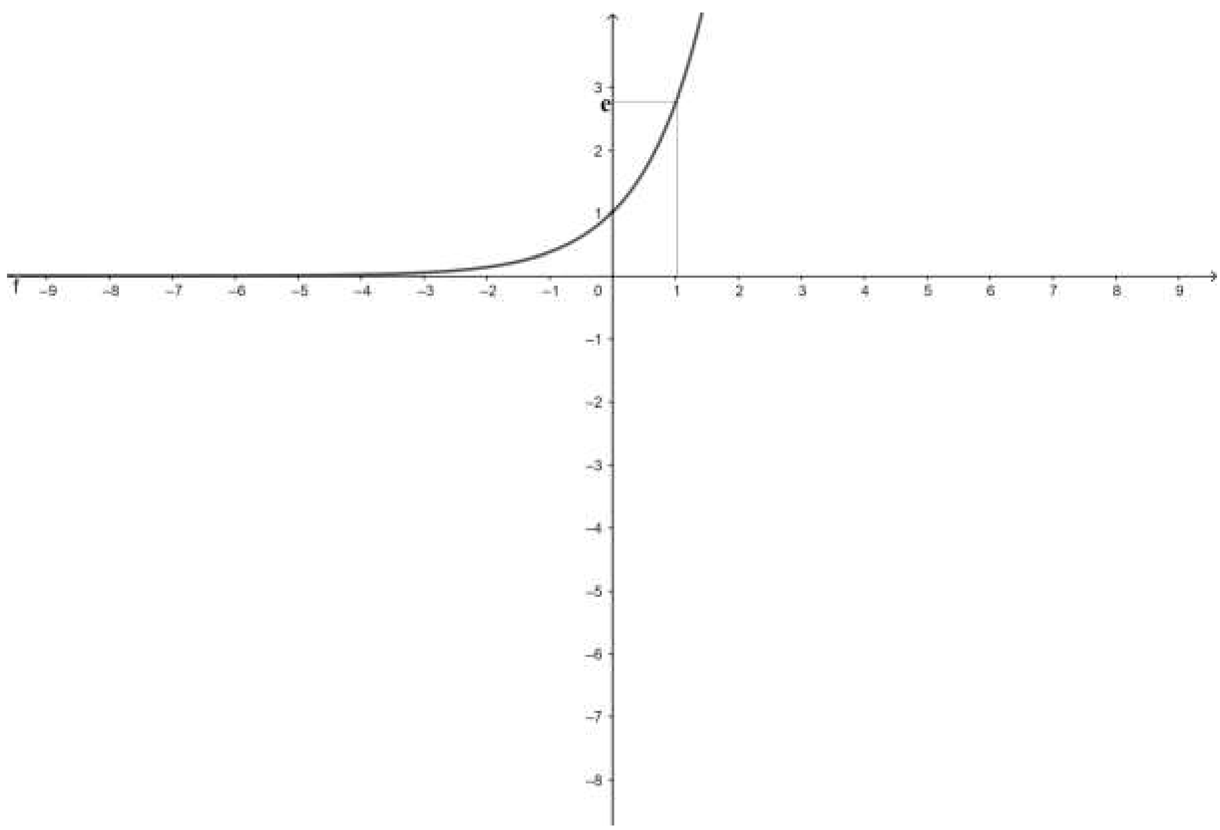
→ Limites de référence

*$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; *$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; *$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$; *$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = 0$; *$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

→ Graphe de la fonction exponentielle

Tableau de variation

X	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)'$	+			
e^x	0	1	e	$+\infty$



e
f

CHAPITRE 3 : PROBABILITE

I. dénombrement

a- cardinal d'un ensemble

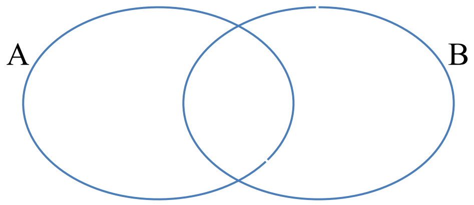
Définition : Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'élément que contient cet ensemble.

Exemple : Soit E = {1, 2, a, b, α, β } → CardE = 6

CardTA$_4$ = 53 élèves

b- Reunion de deux Ensembles

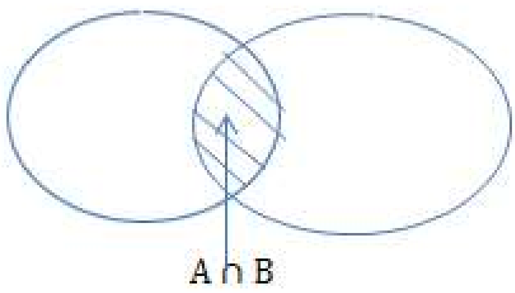
On appelle réunion de deux ensembles A et B note AUB. L'union des cardinaux des ensemble A et B. Card(AUB) = CardA + CardB.



Exemple : Soit A= {1, 2, 3, b} b= { α, β, γ}
AUB = {1, 2, 3, b,α, β, γ }

c- Intersection de deux ensembles

On appelle l'intersection de deux ensembles, l'ensemble des éléments qui appartiennent et à l'ensemble A et à l'ensemble B. On la note A∩ B.



Exemple : Soit A = {1 ; 2 ; a ; b ; a; β}

B = {4 ; a ; β ; γ }

A∩ B = {a; }

On a plus généralement :

Card (AUB) = CardA + CardB – Card (A∩ B)

Exercice d'application

Dans un groupe d'individus, 45 aiment le cinéma, 30 le sport, et 10 à la fois le sport et le cinéma. Calculer le nombre d'individus dans ce groupe.

Exercice d'application 2

On interroge 50 enfants à propos du sport qu'ils pratiquent : 25 pratiquent le football ; 22 le tennis et 16 le basketball. 5 pratiquent les 3 sports, 12 pratiquent le foot et le basket. 8 pratiquent le tennis et le basket et 7 pratiquent le tennis et le football.

Peut- on affirmer que chacun de ces enfants pratiquent au moins un de ces sports ?

Déterminer le nombre :

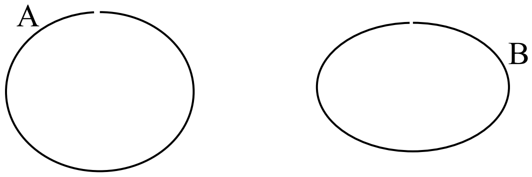
a) Qui pratiquent uniquement le football
b) Qui ne pratiquent pas le football.
c) Qui pratiquent le tennis et le basket, mais ne pratiquent pas le football.

d- Complémentaire d'un Ensemble

Deux ensembles A et $\overline{A}$ sont complémentaires lorsque l'union (réunion) des deux forment un seul ensemble E. CardE = CardA+ Card$\overline{A}$.

e- Ensemble disjoints

Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque les éléments de A n'appartiennent pas à B. Card(A∩B) = 0



II. Outils d'Analyse Combinatoire

a- Arbre de decision

Exemple$_1$: un buffet est compose de 3 entrées; 5 résistances et 4 déserts.
Combien de plats différents comportant une entrée, une résistance et un désert peut- on former ? Utiliser l'arbre de décision.
Exemple$_2$: Une femme a dans sa garde-robe deux jupes, 3 chemises et de vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. Déterminer à l'aide d'un arbre le nombre de manières différentes de s'habiller en utilisant un arbre de décision.

b- Tableau à double Entrée

Un tableau à double entrée est un tableau qui permet d'avoir un résultat composé de deux éléments appartenant à deux ensembles différents. A×B est l'ensemble des éléments (a, b) où a∈A et b∈ B.
Card (A×B) = CardA× CardB.
Exemple: 8 amis vont à une soirée et devaient être accompagnés chacun de son épouse. A la dernière minute, une des femmes est indisponible et ne peut accompagner son mari.
A l'ouverture de la soirée, ils forment des couples pour danser.

a) Combien de possibilités a-t-on de former des couples ?
b) Combien a-t-on de possibilité de former des couples tels qu'aucun homme ne danse avec sa femme ?

c- P-uplet ou p-liste

Soit E un ensemble non vide ayant n éléments, p un entier naturel non nul. Une p-liste ou

p-uplet d'élément de E est une suite de p élément de E.
Le nombre de p-liste de E est n^p.
Dans le cadre usuel, un p-liste se traduit par un tirage successif avec remise de p objets parmi n objets.
Exemple$_1$: Combien y a-t-il de numéro de téléphone à 8 chiffres commençant par un 6 ?
Exemple$_2$: Au loto sportif, on coche l'une des trois cases du bulletin pour chacun des 18 matchs sélectionnés.
Quel est le nombre total de choix possible pour un jeu.

d- Arrangement

Soit E un ensemble non vide à n élément et p un entier naturel inférieur à n. Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p élément de E tous ordonnés.
Le nombre d'arrangement est : $\mathbf{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$
Dans le cadre usuel, un arrangement se traduit par un tirage successif sans remise de p élément parmi n éléments.
Par convention : $A_n^0 = 1$
Exemple : Une course de chevaux comporte 20 chevaux portant les numéros 1 à 20.

- Combien de tiercé dans l'ordre peut- on obtenir ?
- Combien de mot (ayant un sens ou non) de 5 lettres distincts peut-on former en utilisant les lettres de l'alphabet français ?
- Une urne contient 10 boules. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Combien de résultats distincts peut- on obtenir ?

e- Permutation

Une permutation d'éléments E est une suite ordonnée de tous les éléments de E.
Une permutation de n éléments est : n! $A_n^n = n!$
n! : factoriel de n.
Exemple : Combien y a-t-il de possibilité de faire asseoir 7 personnes sur 7 chaises ?
Combien d'anagrammes peut- on former avec les mots : TERMINALE ?

f- Combinaison

Soit E un ensemble de n élément et p un entier naturel tels que $p \leq n$.
Une combinaison de p éléments pris parmi n éléments est :
$\mathbf{C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A_n^p}{p!}}$
Dans le cadre usuel, une combinaison introduit la notion du tirage simultanée de p éléments parmi n éléments.
Exemple$_1$: Déterminer le nombre de comité de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes.
Exemple$_2$: On tire simultanément et au hasard 6 boules de 49 boules distinctes. Combien y a-t-il de résultat possible ?
→ **Principe de somme et produit** : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes simultanément et au hasard (l'ensemble de ces 5 cartes est appelé mains).
Déterminer le nombre de main

a) Total
b) Qui contiennent exactement '3as'
c) Qui contienne au moins '1as'

Solution

Données : n= 32 cartes ; p = 5 cartes
Déterminons :
a- Le nombre total est : $C_{32}^5 = \frac{32!}{5!27!} = 201376$

b- Le nombre de mains qui contienne exactement 3as est :
$C_4^3.C_{28}^2 = 1512$

c- Le nombre de mains qui contienne au moins un as est :

$C_4^1.C_{28}^4 + C_4^2.C_{28}^3 + C_4^3.C_{28}^2 + C_4^4.C_{28}^1$
D'une manière littérale, le mot 'ou' se traduit par une somme et le mot 'et' se traduit par un produit.
Exemple : On tire au hasard une main de 6 mains d'un jeu de 32 cartes.

1- Donner le nombre de mains total qu'on peut obtenir.
2- Donner le nombre de mains ayant exactement deux piques.
3- Donner le nombre de mains ayant 4 as.
4- Donner le nombre total de mains ayant au moins deux trèfles.

III. probabilité

3.1. Vocabulaire en Probabilité

Expérience ou variable aléatoire : C'est une expérience dont on ne peut prévoir l'issue avant qu'elle n'ait été complètement réalisée.
Univers des possibilités : L'ensemble de tous les résultats possibles à l'issue d'une expérience aléatoire.
Evénement : C'est une partie de l'univers. C'est-à-dire l'ensemble des éventualités de l'expérience aléatoire.
Evénement certain : C'est l'univers de l'expérience aléatoire c'est-à-dire l'évènement qui est réalisé à l'issue de l'expérience. On le note souvent Ω.
Evénement Impossible : C'est un évènement qui ne peut être réalisé à l'issue de l'expérience est noté $\emptyset$.
Evénement élémentaire : C'est un évènement n'ayant qu'une seule éventualité. Soient A et B deux évènements d'une expérience aléatoire.

- On dit que A est inclut dans B ($A \subset B$) si toute réalisation de A entraine la réalisation de B.
- On note $A \cap B$ l'évènement intersect des évènements A et B, et est l'évènement pour lequel A et B sont à la fois.
- On note AUB l'évènement réunion des évènements A et B pour lequel l'évènement A est réalisé ou B est réalisé.
- A et B sont deux évènement incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que E et B sont deux évènements contraires si B est l'ensemble des éventualités pour les quels A n'est pas réalisé. $B = \overline{A}$
- A et B sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

Exemple : On lance un dé et on s'intéresse au numéro porté sur la face supérieure du dé.

1- Quel est le cardinal de l'univers Ω ?
2- On note A l'évènement obtenir 'un nombre paire'. Quel est le cardinal de A ?
3- On note B l'évènement obtenir 'un nombre à deux chiffres'. Quel est le cardinal de B ?
4- 'C', est l'évènement obtenir un nombre inférieur à 10. Quel est le cardinal de C ?
5- Définissez l'évènement $\overline{A}$ et donnez le cardinal de A.
Solution
1- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \text{Card } \Omega = 6$

2- $A = \{2, 4, 6\} \rightarrow cardA = 3$
3- B est un évènement impossible ; CardB = 0.
4- 'C', est un évènement certain donc CardC = CardΩ = 6
5- $\overline{A}$ est l'évènement obtenir un nombre impaire ; son cardinal est Card$\overline{A}$ = 3.

Exemple$_2$: 1-On tire simultanément et au hasard 4 jetons d'un sac opaque contenant 32 jetons indiscernable au toucher, numérotés de 1 à 32.
Soit Ω, l'univers associé à cette épreuve. Calculer CardΩ.

2-Soit A l'évènement obtenir exactement 3 jetons dot les numéros sont inférieurs ou égaux à 9. Calculer CardA.

3-Définir $\overline{A}$ puis en déduire Card($\overline{A}$)

3-2 Probabilité d'un évènement

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est définie et est noté Ω. En supposant que les évènements élémentaires sont équiprobables, la fréquence de réalisation de A est appelée la probabilité que l'évènement A soit réalisé est

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{CardA}}{\mathbf{Card\Omega}} = \frac{\textbf{Nombre de cas favorable à la realisation de A}}{\textbf{Nombre de Cas possibles}}$$

- La probabilité d'un évènement incertain est P (∅)= 0
- La probabilité d'un évènement Certain est P (Ω) = 1

Bibliographie

- CIAM terminale Littéraire, Edicef 2006
- Excellence en Mathématique Terminale A, S, E, NMI Education 2014

Partenariat
Lycée Saint François Xavier
Label 109

Livret à ne pas vendre

Contact
info@label109.org

Télécharger gratuitement les applications et livres numériques sur le site:
http://www.tchadeducationplus.org

Mobile et WhatsApp: 0023566307383

Rejoignez le groupe: https://www.facebook.com/groups/tchadeducationplus