

**RESUMÉ : BARYCENTRE****1S<sub>2</sub>/1S<sub>1</sub>**

# Institut MBACKÉ MATHS

*Plus vous vous exercez, plus vous vous améliorez*

**MATHEMATIQUES****COURS BARYCENTRE****GEOMETRIE**

**CORRECTION DE LA SERIE ET EXPLICATION DU COURS EN VIDEO DISPONIBLE DANS NOS COURS EN LIGNE**

**+221 70 713 09 21****YOUTUBE : MBACKE MATHS****PROF : MBACKE MATHS****ANNEE : 2024-2025****NIVEAU : 1S<sub>2</sub>/1S<sub>1</sub>**

## **BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÉRÉS**

### **1.POINT PONDÉRÉ**

#### **1.a Définition**

Soit  $A$  un point du plan et  $\alpha$  un nombre réel

Le couple  $(A, \alpha)$  s'appelle un point pondéré ou massif. Le réel  $\alpha$  s'appelle le poids ou la masse de  $A$ .

On dit que le point  $A$  est affecté du coefficient  $\alpha$  ou de la masse algébrique  $\alpha$

### **2.BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÉRÉS**

#### **2.a Définition**

Soit  $(A; \alpha)$  et  $(B; \beta)$  deux points pondérés du plan tels que :  $\alpha + \beta \neq 0$

Il existe un unique point  $G$  vérifiant l'égalité :  $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

**WWW.MBACKEMATHS.COM || COURS PRIVÉS EN LIGNE || (+221) 70 713 09 21**

**1**

Le point  $G$  est appelé le barycentre des points pondérés  $(A; \alpha)$  et  $(B; \beta)$ . On dit aussi que  $G$  est le barycentre du système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$

### Remarque

- ◇ Si  $\alpha \neq 0$  et  $\beta = 0$ , alors  $G = A$
- ◇ Si les points  $A$  et  $B$  sont confondus, alors :  $G = A = B$
- ◇ Si  $\alpha + \beta = 0$  alors il n'existe pas de barycentre pour les points pondérés  $(A; \alpha)$  et  $(B; \beta)$
- ◇ Si  $G$  est le barycentre du système pondérés  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ , alors  $G$  est le point de la droite  $(AB)$  tel que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{BA}$$

La relation  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$  assure l'existence, l'unicité et la construction du point  $G$

### **EXERCICE D'APPLICATION**

1) Soit  $A, B$  et  $C$  trois points du plan tels que  $2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ .

Montrer que le point  $B$  est le barycentre des deux points  $A$  et  $C$  en précisant leurs poids

2) Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan et  $G$  le point tel que :

$$\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} . \text{ Montrer que } G \text{ est le barycentre des points}$$

$(A; 1)$  et  $(B; \beta)$  où  $\beta$  est un réel à déterminer

3) Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan et  $M$  un point de la droite  $(AB)$ .

$$\text{On pose } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$$

a) Montrer que  $M$  est le barycentre du système pondéré

$(A; 1 - t)$  et  $(B; t)$

b) Montrer que si  $t = \frac{2}{7}$ , alors  $M$  est aussi le barycentre du système ponéré  $(A; 5)$  et  $(B; \gamma)$  où  $\gamma$  est un réel à déterminer

4) Montrer que  $G$  est le barycentre des points pondérés

$(A; x)$  et  $(B; y)$  où  $x$  et  $y$  sont des réels à déterminer dans chacun des cas suivants :

$$\vec{GA} - 2\vec{GB} = \vec{0}; \frac{2}{3}\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{GB}$$

$$\vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{BA}; 9\vec{AG} + 8\vec{AB} = \vec{0}$$

### 3. HOMOGÉNÉITÉ DU BARYCENTRE

#### Proposition

Si  $G$  est le barycentre du système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$  alors  $G$  est aussi le barycentre du système pondéré  $\{(A; k\alpha); (B; k\beta)\}$  pour tout réel  $k$  non nul. En d'autres termes :

Le barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre non nul.

Cette propriété s'appelle : homogénéité du barycentre

#### EXERCICE D'APPLICATION

1) Soit  $G$  le barycentre des points  $(A; \sqrt{8})$  et  $(B; -\sqrt{2})$

Montrer que  $G$  est le barycentre des points  $(A; -2)$  et  $(B; 1)$

2) Soit  $E$  le barycentre des points  $(F; 1)$  et  $(B; \sqrt{2-1})$

Montrer que  $E$  est le barycentre des points  $(F; \sqrt{2} + 1)$  et  $(H; 1)$

3) Soit  $K$  le barycentre des points  $(N; \frac{m^2-1}{2})$  et  $(M; \frac{m-2}{2m})$  où  $m \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

Montrer que  $K$  est le barycentre des points  $(N; m + 1)$  et  $(M; \frac{1}{m})$

### Remarque

1) Si  $G$  est barycentre des points pondérés  $(A; \alpha)$  et  $(B; \beta)$  (meme poids) alors  $G$  est le milieu du segment  $[AB]$ . On dit aussi que  $G$  est le centre de gravité des points  $A$  et  $B$

2) Si  $G$  est le barycentre des points  $(A; \alpha)$  et  $(B; \beta)$ .

Alors  $G$  est aussi le barycentre des point pondérés  $(A; \frac{\alpha}{\alpha+\beta})$  et  $(B; \frac{\beta}{\alpha+\beta})$

avec  $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$ . Donc ,lors d'une étude de barycentre de deux points pondérés, on peut supposer que la somme de leurs poids égale à 1 et considérer les poits  $t$  et  $1 - t$  avec  $t \in \mathbb{R}$ . A titre d'exemple.....

## **4. POSITION DU BARYCENTRE**

### Proposition

Soit  $G$  le barycentre du système  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$  avec  $\alpha\beta \neq 0$

◇ Si  $\alpha\beta > 0$  alors  $G$  appartient au segment  $[AB]$

◇ Si  $\alpha\beta < 0$  et  $|\alpha| > |\beta|$  alors  $G \notin [AB]$  et  $G \in [BA]$

◇ Si  $\alpha\beta < 0$  et  $|\alpha| < |\beta|$  alors  $G \notin [AB]$  et  $G \in [AB]$

Application parmi les points  $E, F$  et  $G$  suivants, déterminer ceux qui appartiennent à la droite  $(AB)$  et n'appartiennent pas au segment  $[AB]$

a)  $E$  est le barycentre des points pondérés  $(A; -3)$  et  $(B; -5)$

b)  $2\vec{FA} + 7\vec{FB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

c)  $A$  est le barycentre des points pondérés  $(G; -5)$  et  $(B; 2)$

## 5. PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU BARYCENTRE

### Proposition

Soit  $(A; \alpha)$  et  $(B; \beta)$  deux points pondérés du plan tels que  $\alpha + \beta \neq 0$   
Le point  $G$  est le barycentre du système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$  si et seulement si, pour tout  $M$  du plan  $(P)$  :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$$

$$\text{C'est-à-dire } \overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MB}$$

### EXERCICE D'APPLICATION

- 1) Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan  $(P)$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tels que :
  - a)  $\|7\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| = 3AB$
  - b)  $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = MA$
  - c)  $\|5\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{BM}\| \leq \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$
- 2) Soit  $ABC$  un triangle. On considère le point  $G$  barycentre des points pondérés  $(A, 2)$  et  $(B, 3)$ 
  - a) Construire le point  $G$  puis simplifier la somme vectorielle :  
 $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$  où  $M$  un point du plan
  - b) Déterminer et tracer l'ensemble  $(D)$  des points  $M$  tels que :  
 $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  soient colinéaires
- 3) Soit  $ABCD$  un carré de côté  $a$ . Déterminer et construire chacun des ensemble suivants :

$$E_1 = \{M \in (P) / \|-5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 2a\}$$

$$E_2 = \{M \in (P) / \|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| \leq 2a\}$$

$$E_3 = \{M \in (P) / a \leq \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| \leq 2a\}$$

$$E_4 = \{M \in (P) / \|\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\| \leq \|\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}\|\}$$

$$E_5 = \{M \in (P) / 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\}$$

## 6. COORDONNÉES DU BARYCENTRE

Soit  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  un repère du plan

Si G est le barycentre du système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$  alors :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OB}$$

Si  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  alors le couple de coordonnées de G est :

$$G \left( \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \right)$$

### EXERCICE D'APPLICATION

1) Dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On considère les points :  $B(2; 5)$  et  $C(5; 2)$

Soit H le barycentre des points pondérés  $(B; 2)$  et  $(C; 1)$

a) Déterminer les coordonnées du point H

b) Soit G le point du plan tel que H le barycentre des points pondérés  $(G; 2)$  et  $(O; 1)$

Déterminer les coordonnées du point G

2) Soit ABCD un parallélogramme et E le barycentre des points pondérés

$(B; 2)$  et  $(D; -1)$

Déterminer les coordonnées du point E dans le repère  $(B; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$

## II. BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDERES

### A. Definition

Soit  $(A; \alpha)$ ,  $(B; \beta)$  et  $(C; \gamma)$  trois points pondérés du plan tels que :

$$\alpha + \beta \neq 0$$

Il existe un unique point  $G$  vérifiant l'égalité :  $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Le point  $G$  est appelé le barycentre des points pondérés  $(A; \alpha)$ ,  $(B; \beta)$  et  $(C; \gamma)$ . On dit aussi que  $G$  est le barycentre du système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$

### EXERCICE D'APPLICATION

1) Soit  $A, B, C$  et  $D$  des points du plan tels que :

$7\overrightarrow{BD} + 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Montrer que le point  $D$  est le barycentre des points  $A, B$  et  $C$  en déterminant le poids de chacun d'eux

2) On considère l'égalité vectorielle :  $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 5\overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ .

Montrer que le point  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A; \alpha)$ ,  $(B; \beta)$  et  $(C; \gamma)$  où  $\beta$  et  $\gamma$  sont des réels à déterminer

3) Soit  $ABC$  un triangle et  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ . Soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A; 2)$ ,  $(B; 2)$  et  $(C; -1)$

Montrer que :  $G \in (IC)$

4) Soit  $ABC$  un triangle et  $G$  le milieu tel que  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$

Montrer que  $G$  est le barycentre du système pondéré

$\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$

## B. HOMOGÉNÉITE DU BARYCENTRE

### Proposition

Si  $G$  est le barycentre du système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$

alors  $G$  est aussi le barycentre du système pondéré

$\{(A; k\alpha); (B; k\beta); (C; k\gamma)\}$  pour tout réel  $k$  non nul. En d'autres termes :

Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre non nul.

Cette propriété s'appelle : homogénéité du barycentre

### Remarque

1) Si  $G$  est barycentre des points pondérés  $(A; \alpha)$ ,  $(B; \beta)$  et  $(C; \gamma)$  (même poids) alors  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

2) Si  $G$  est le barycentre des points  $(A; \alpha)$  et  $(B; \beta)$  et  $(C; \gamma)$ .

Alors  $G$  est aussi le barycentre des points pondérés

$(A; \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma})$ ,  $(B; \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma})$  et  $(C; \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma})$  avec  $\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} = 1$ .

Donc, lors d'une étude de barycentre de trois points pondérés, on peut supposer que la somme de leurs poids égale à 1 et considérer les poids

$t$ ,  $p$  et  $1 - t - p$  avec  $(t; p) \in \mathbb{R}^2$

## C. PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU BARYCENTRE

### Proposition

*Plus vous vous exercez, plus vous vous améliorez*

Soit  $(A; \alpha)$ ,  $(B; \beta)$  et  $(C; \gamma)$  trois points pondérés du plan tels que

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

Le point  $G$  est le barycentre du système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}; (C; \gamma)$  si et seulement si, pour tout  $M$  du plan  $(P)$  :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$$

$$\text{C'est-à-dire } \overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MC}$$

### D. ASSOCIATIVITÉ DU BARYCENTRE

Soit  $(A; \alpha), (B; \beta)$  et  $(C; \gamma)$  trois points pondérés du plan tels que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  et  $\alpha + \beta \neq 0$

- ◆ Si G est le barycentre du système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$ , alors G est aussi le barycentre du système pondéré  $\{(H; \alpha + \beta); (C; \gamma)\}$  où H est le barycentre du système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$
- ◆ En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme de deux poids

### EXERCICE D'APPLICATION 1

1) Soit ABC un triangle et G le barycentre des points pondérés

$$(A; 3); (B; 7) \text{ et } (C; -4). \text{ Soit K le point du plan tel que : } \overrightarrow{BK} = -\frac{4}{3} \overrightarrow{BC}$$

Montrer que G est le milieu du segment [AK]

2) Soit ABC un triangle et L un point extérieur au triangle ABC et appartenant à la demi-droite [CA). On pose  $\overrightarrow{AL} = -t \overrightarrow{AC}$  avec t un nombre réel strictement positif. La droite passant par A et parallèle à la droite (BC) coupe la droite (BL) en G

- a) Montrer que G est le barycentre des points A, B et C en déterminant le poids de chacun de ces points
- b) Montrer que (CG) coupe le segment [AB] au point H barycentre des points pondérés  $(A; 1 + t)$  et  $(B; t)$

## EXERCICE D'APPLICATION 2

Soit  $ABC$  un triangle et  $P$  le point du plan tel que :

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ . Soit  $I$  le point d'intersection de  $(AP)$  et  $(BC)$  et  $G$  le barycentre des points  $(A; 1)$ ;  $(B; -3)$  et  $(P; 1)$

- 1) Construire le point  $P$  puis calculer  $\overrightarrow{IG}$  en fonction de  $\overrightarrow{IB}$
- 2) Construire le point  $G$  puis prouver que  $B$  est le centre de gravité du triangle  $GAP$
- 3) Soit  $(\Delta)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MP} - 3\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MC}\|$$

Prouver que le point  $O$  milieu du segment  $[AB]$  appartient à l'ensemble  $(\Delta)$

## E. COORDONNÉES DU BARYCENTRE

Soit  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  un repère du plan

Si  $G$  est le barycentre du système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$  alors :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{OC}$$

Si  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  et  $C(x_C; y_C)$  alors le couple de coordonnées de  $G$  est :

$$G \left( \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)$$

## EXERCICE D'APPLICATION

Dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  on considère les points :  $A(-1; 2)$ ;  $B\left(\frac{5}{2}; 7\right)$  et  $C\left(\frac{3}{2}; 5\right)$ . Soit  $G$  le point du plan tel que  $A$  soit le barycentre des points pondérés  $(B; -1)$ ,  $(C; 1)$  et  $(G; -3)$ .

Déterminer les coordonnées du point  $G$

**LA CORRECTION DES EXERCICES D'APPLICATION ET LA SERIE  
SONT DISPONIBLE DANS NOS COURS EN LIGNE INTERNATIONAL  
CONTACT WHATSAPP +221 70 713 09 21**



**Institut**  
**MBACKÉ MATHS**

*Plus vous vous exercez, plus vous vous améliorez*

2024 - 2025



INSTITUT  
MBACKÉ  
MATHS

# Cours d'encadrement en ligne

INTERNATIONAL

**Niveau**

Terminale S1/S2/S3

Première S1/S2/S3

Seconde S

Troisième

**Inscrivez  
vous vite !**

+221 70 713 09 21



ASSISTANTE  
DIRECTION

M.  
DIOP

PC

M.  
MBACKÉ  
MATHS

MATHS

ASSISTANTE  
DIRECTION

M.  
TALL

SVT

M.  
DIENG

MATHS

M.  
NDOYE

SVT



+221 70 713 09 21



www.mbackemaths.com



mbacké maths