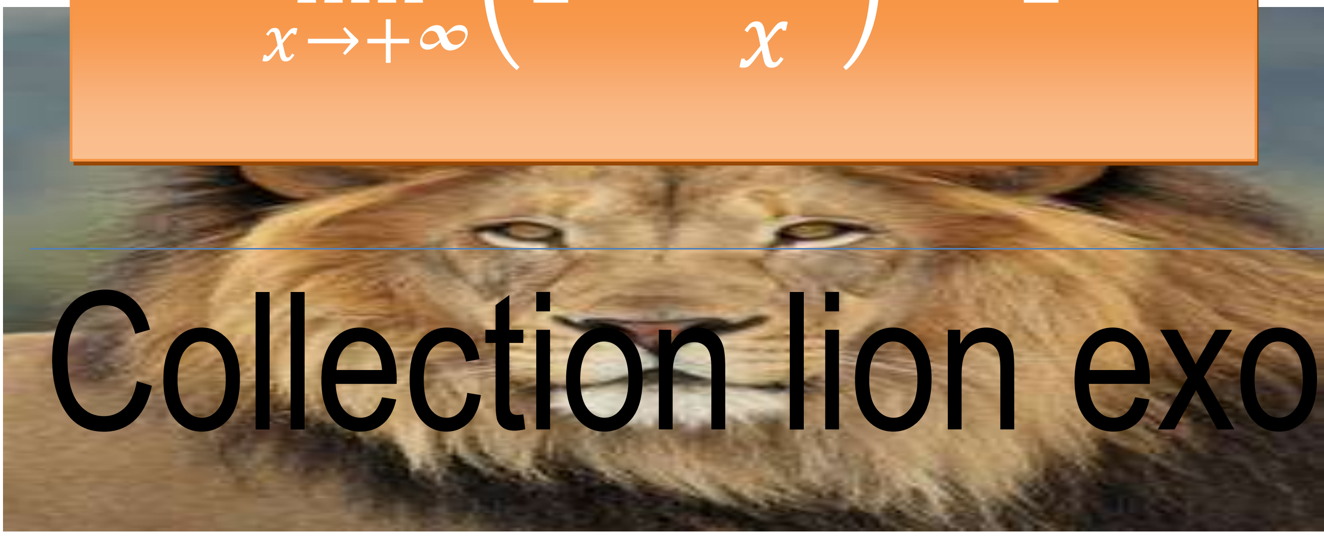
Mathématiques Tle D

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$$



Collection lion exo

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \, [P(A) \neq 0]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Conception: SANOE Jr Christopher

Préface

Ce que je cherche des petits trucs pour montrer ou lier l'imaginaire avec le réel au lieu de se concentrer sur les x, l'étude des fonctions, les équations sans savoir à quoi tout cela nous amène; je cherche à faire aimer les mathématiques aux autres qui les considère comme une bête noire.
La situation est bien connue et toujours aussi paradoxale : le nombre de lycéens en série scientifique est stable depuis plusieurs décennies en Côte d'Ivoire alors que dans l'enseignement supérieur, le nombre d'étudiants des filières de sciences (mathématiques, physique, chimie…) ne cesse de baisser. La réussite scolaire dans l'enseignement secondaire est conditionnée aux disciplines scientifiques : la série D, héritière des séries C, demeure pour tous les lycéens la série de référence.
Il en découle immanquablement une envie de préciser ses objectifs, d'expliciter ses choix, de décrire sa démarche afin de pouvoir la communiquer. En découle aussi une envie d'essayer de nouvelles pistes, de remettre en question certaines pratiques, d'analyser comment les choses se passent, d'affiner certains gestes professionnels, de modifier des questionnements élèves, d'en observer les effets sur leur travail et leur activité mathématique.

C'est dans cette confrontation de points de vue que « **LA COLLECTION LION EXO** » trouve sa source. Cet ouvrage n'est donc pas une collection comme les autres. Le lecteur trouvera :

- **Un cours complet qui met en évidence l'essentiel des connaissances à acquérir,**
- **Des exercices de trois niveaux de difficultés, (exercices d'introduction, d'approfondissement et de synthèse)**
- **Une correction détaillée de ces exercices pour faciliter le travail personnel et la révision**

Ce style décrit est assez rare et il nous semble de nature à apporter beaucoup à tout candidat au **baccalauréat série D** qui chercherait à inventer, à réinventer sa propre pratique pour atteindre plus aisément les objectifs nouveaux fixés à la maitrise des mathématiques en classe de terminale.

En effet, construire l'activité mathématique de chaque élève pendant toute séance, gérer la tension entre l'attendu du programme et l'exigence du socle commun, différencier en fonction des acquis, des rythmes et des besoins des élèves, sont autant d'objectifs que tout enseignant doit se donner aujourd'hui mais qui ne se réalisent pas facilement.

Or les pistes nouvelles que les auteurs ont ouvertes en cheminant côte à côte sont d'une grande pertinence et véritablement de nature à avancer efficacement sur toutes ces questions de fond, vrais enjeux de l'enseignement d'aujourd'hui. Chose rare, toutes ces pistes sont décrites minutieusement, les choix réalisés analysés finement, les raisons de tel ou tel questionnement élève pesées, les réactions d'élève pointées. La réflexion du lecteur en est d'autant mieux sollicitée, sa capacité à construire ou reconstruire à sa main, à effectuer des transferts, d'autant mieux stimulée.

Construire un projet personnel en phase avec les objectifs de l'enseignement d'aujourd'hui est, nous le savons, un vrai défi qu'il faut relever quotidiennement. Mais nous sommes sûrs que vous trouverez dans « **LA COLLECTION LION EXO** » des éléments précieux pour vous y aider

La seconde partie de « **LA COLLECTION LION EXO** » est consacrée aux neuf derniers sujets entièrement corrigés du baccalauréat (**2017, 2016, 2015, 2014,2013, 2012, 2011, 2010 ET 2009**)

Nous exprimons notre gratitude à tous ceux qui ont apporté leur appui matériel et financier pour la réalisation de cette Collection. Nous remercions l'ensemble de nos collègues pour leurs encouragements, leurs conseils, leur soutien et leurs contributions de toutes sortes.

Enfin, nous espérons que « **LA COLLECTION LION EXO** » répondra à l'attente et aux besoins des utilisateurs (professeurs et élèves). Afin d'en améliorer les prochaines éditions, nous accueillerons avec reconnaissance les remarques, les critiques et les suggestions qu'ils voudront bien nous faire et, par avance, nous les en remercions.

SANOE Jr. Christopher

« La collection lion exo »

32 BP 42 Abidjan 32

(00225): 01 02 11 66 54 / 06 79 75 14 / 08 21 16 60

Email : christophersanoe@gmail.com

SOMMAIRE

Introduction

Une fonction étant définie, on peut (théoriquement) calculer l'image $f(a)$ d'un élément a de son ensemble de définition. Toutefois, dans la pratique, on ne connaîtra a que par une valeur approchée. Il n'y a aucune raison à priori de penser que l'image d'une valeur approchée de $a$est une image approchée utilisable de $f(a)$. C'est pourquoi il est important de connaître le comportement de la fonction lorsque$x$ se rapproche de a. De même pour connaître l'évolution future de phénomènes modélisés par des fonctions, il peut être intéressant d'envisager le comportement de ces fonctions lorsque la variable x devient très grande.

Les préoccupations concernant les notions de limites remontent à l'antiquité. Ces préoccupations furent celles des philosophes **(Aristote (384-322))** autant que celles des mathématiciens. On retrouve ces problèmes tout au long de l'histoire des mathématiques, mais il fallut attendre le **XIX è siècle** pour que les recherches qui fondèrent solidement les mathématiques conduisent à une définition correcte de la notion de limite (Bolzano **(1781-1848)) Cauchy (1789- 1857), Abel (1802-1829), Riemann (1826-1866)**.

L'émergence du concept de limite fut longue et malaisée, contrariée par les difficultés associées aux notions d'infini, d'infiniment petit et d'infiniment grand.

« L'infini, plus qu'aucune autre question jusqu'ici, a profondément ému l'âme de l'homme ; l'infini ; plus peut être qu'aucune autre idée, a exercé une action stimulante et féconde sur son entendement. Mais aussi l'infini, plus *aucune autre notion, a besoin d'être élucidé. » Hilbert, « sur l'infini », 4juin 1925*.

FICHE DE COURS

I) Limites et continuité en a

I-1Définiion :

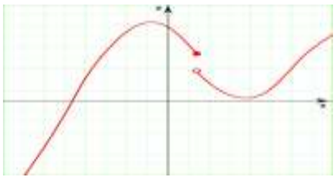
soit une fonction f d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et deux nombres réels a et l.

On dit que l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a, si la distance entre $f(x)$ et l devient aussi petite que l'on veut lorsque x élément de $\mathcal{D}_f$ est de plus en plus proche de a.

On note : $\lim_{x\to a} f(x) = l$

Remarque : a peu appartenir ou ne pas appartenir à $\mathcal{D}_f$

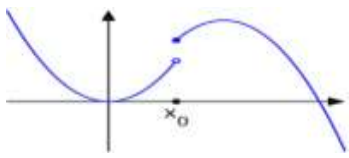
I-2) Limite à gauche – Limite à droite



Soit $a$et$l$ deux réels. f est une fonction et D_f son ensemble de définition.

Définition : On dit que$f$ admet une limite à gauche en $a$égale à l lorsque la restriction g de f à$\boldsymbol{D_f} \cap]-\infty; \boldsymbol{a}[$ admet en a une limite égale à l.

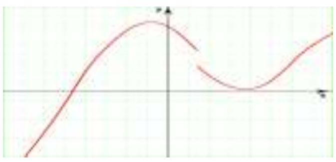
On note : $\lim_{\substack{x\to a \\ <}} \boldsymbol{f(x)} = \lim_{x\to a} \boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{l}$.



On dit que$f$ admet une limite à droite en $a$égale à l lorsque la restriction g de f à $\boldsymbol{D_f} \cap]\boldsymbol{a}; +\infty[$admet en a une limite égale à l.

On note : $\lim_{\substack{x\to a \\ >}} \boldsymbol{f(x)} = \lim_{x\to a} \boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{l}$.

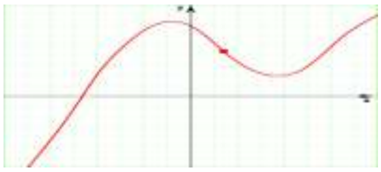
Propriété



Soient $a$et l deux nombres réels et f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si $a \notin I$, alors on a : f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égale à l.

Donc : $\lim_{\substack{x\to a \\ <}} \boldsymbol{f(x)} = \lim_{\substack{x\to a \\ >}} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{l}$.



Si $a \in I, f$ admet une limite l en a si et seulement si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égale à l.

Donc : $\lim_{\substack{x\to a \\ <}} \boldsymbol{f(x)} = \lim_{\substack{x\to a \\ >}} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{f(a)}$

Dans ces conditions, on dit que la fonction **f est continue en a**

Idée intuitive: soit $(\mathcal{C}f)$ la représentation graphique de f dans le repère (O,i,j).

f est continue si l'ont peut tracer la courbe $(\mathcal{C}f)$ sans « lever le crayon», autrement dit sans interruption (discontinuité)

Remarque 1 :

Les fonctions polynômes, sinus, cosinus, racine carrée .... ou valeur absolue ainsi que les sommes, produits, quotients et composées de ces fonctions sont continues sur tout intervalle où elles sont définies ! On ne démontrera donc pas la continuité de ces fonctions usuelles.

Remarque2 : Dire qu'une fonction admet une limite en un point d'abscisse a de son ensemble de définition c'est dire que la fonction f est continue en a.

I-3) Prolongement par continuité

f est une fonction d'ensemble de définition D_f, a un nombre réel n'appartenant pas à D_f.

On suppose que f admet une limite finie l en a.

Alors la fonction φ définie par $\begin{cases} \forall x \epsilon D_f, \varphi(x) = f(x) \\ \varphi(a) = l \end{cases}$ est continue en a et est appelé **prolongement par continuités de f en a.**

I-4) Limites de fonctions composées

Propriété

f et g sont des fonctions a, l, l' sont des nombres réels ou $-\infty$ ou $+\infty$.

Si $\lim_{x\to a} g(x) = l$ et si $\lim_{x\to l} f(x) = l'$, alors $\lim_{x\to a}[f \circ g(x)] = l'$

I-5) Limites de $\sqrt{f}$ et $|f|$

Propriété

soit f une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$; l un nombre réel positif ou nul, l' nombre réel.

- Si $\mathbf{\lim_{x\to a} f(x) = l}$ **alors** $\mathbf{\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}}$
- Si $\mathbf{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$ **alors** $\mathbf{\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = +\infty}$
- Si $\mathbf{\lim_{x\to a} f(x) = l'}$ **alors** $\mathbf{\lim_{x\to a} |f(x)| = |l'|}$
- Si $\mathbf{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$ **alors** $\mathbf{\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty}$
- Si $\mathbf{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}$ **alors** $\mathbf{\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty}$

II) CONTINUITE SUR UN INTERVALLE

II-1) Fonction continue sur un intervalle

Soit **K** un intervalle, on dit que f es continue sur $\boldsymbol{K}$, si f est continue en tout élément de $\boldsymbol{K}$

Propriété :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle ou un singleton.

L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé ou un singleton.

Conséquences :

Si f est continue sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ alors $\boldsymbol{f}([\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]) = [\boldsymbol{m}; \boldsymbol{M}]$

m est le minimum de f sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$

M est le maximum de f sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$

II-2) Foncions continues et strictement monotones

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}$ tel que $a < b$.

Soit f une fonction admettant une limite à droite en a et une limite à gauche en b

Si f est continue et strictement croissante sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ alors $\boldsymbol{f}([\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]) = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}); \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})]$

Si f est continue et strictement croissante sur $]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[$ alors $\boldsymbol{f}(]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[) = \left]\lim_{\substack{x\to a \\ >}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) ; \lim_{\substack{x\to b \\ <}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right[$

Si f est continue et strictement décroissante sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ alors $f([\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]) = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}); \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]$

Si f est continue et strictement décroissante sur $]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[$ alors $\boldsymbol{f}(]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[) = \left]\lim_{\substack{x\to b \\ <}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) ; \lim_{\substack{x\to a \\ >}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right[$

Théorème 1

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$. Sa bijection réciproque f^{-1} est une fonction continue et de même sens de variation que la fonction f.

Théorème 2

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout m de $f(I)$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans I.

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]a, b[$.

III)Notion d'asymptote

III-1) Définitions

Soit f une fonction et $(\mathcal{C})$sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J)

- Lorsque f a une limite finie l en $-\infty$ ou en $+\infty$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
- Lorsque fa une limite infinie à gauche ou à droite de x_0,. On dit , que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe$(\mathcal{C})$
- Lorsqu'il existe une fonction affine $x \mapsto ax + b$ $t$el que la fonction $f(x) - (ax + b)$a pour limite 0 en $-\infty$ ou en $+\infty$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
- Lorsque$\frac{f(x)}{x}$ admet une limite infinie en $-\infty$ ou en $+\infty$, on dit que la courbe $(\mathcal{C})$admet une branche parabolique de direction (OJ).
- Lorsque $\frac{f(x)}{x}$admet une limite 0 en $-\infty$ ou en $+\infty$, on dit que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OI)

III-2) POSITION D'UNE COURBE PAR RAPPORT A UNE DROITE.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dont $(\mathcal{C}_f)$ est sa courbe représentative dans un repère (O, I, J) et (Δ) une droite d'équation $y = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$).

Pour étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) sur l'intervalle K de I, il suffit d'étudier le signe de$f(x) - (ax + b)$:

Si $f(x) - (ax + b) > 0$ pour tout x élément de K, alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (Δ) $sur\ K$.

Si $f(x) - (ax + b) < 0$ pour tout x élément de K, alors $(\mathcal{C}_f)$ est en-dessous de (Δ) $sur\ K$.

IV) Fonction du type :$\boldsymbol{x \longmapsto \sqrt[n]{x}}$; $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*)$ et $\boldsymbol{x \longmapsto x^r}$; $(\boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}^*; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^*)$

IV-1) Fonction du type :$\boldsymbol{x \longmapsto \sqrt[n]{x}}$

a) Définition

n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle fonction racine $n^{ième}$ la bijection réciproque de la fonction : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$x \longmapsto x^n$$

b) Propriétés

x et y étant des nombres réels positifs ou nuls et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

$x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$; $\sqrt[n]{y} \geq 0$; $\left(\sqrt[n]{y}\right)^n = \sqrt[n]{y^n} = y$

$x^n = y \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{n}}$; $y^{\frac{1}{n}} \geq 0$ et $\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n = (y^n)^{\frac{1}{n}} = y$

IV-2) Fonction du type :$\boldsymbol{x \longmapsto x^r}$; $(\boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}^*; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^*)$

a) Définition

r étant un nombre rationnel non nul, on appelle fonction puissance d'exposant r la fonction : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$x \longmapsto x^r$$

b) Propriétés

r et r' étant des nombres rationnels non nuls, x et y des nombres réels strictement positifs,

$\boldsymbol{x^r \times y^r = (xy)^r}$; $\boldsymbol{\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r}$; $\boldsymbol{(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}}$ **et** $\boldsymbol{x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}}$

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en x_0 (on calculera éventuellement les limites à gauche et à droite en x_0).

$a)\ f(x)=\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}, x_0=4$; $b) f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\ , x_0=2$; $c)\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}\ , x_0=0$

Exercice 2

Calculer : $a)\quad \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)\ ;\ b)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(\sqrt{x^2+x}+x)^3}$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

a) $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$; b) $f(x)=x+2+\sqrt{x^2-3x+1}$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}$; $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+\tan x\right)$;c) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$; d) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{2x}$; e) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{5x}$

f) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{5x}$; g) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\tan 5x}$; h) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos 2x}$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de f en x_0

a) $f(x)=3x^2-5x-7\ , x_0=2$, b) $f(x)=\sqrt{4-x}, x_0=4; c)\ f(x)=\frac{3x^2-5x-7}{8x^3-5x+3}, x_0=1$

$$d)\ f(x)=\frac{x-4}{x+2}; x_0=-2$$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\ pour\ x>2 \\ f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}\ \ pour\ x\leq 2\end{cases}$ Etudier la continuité de f en 2.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer a pour que f soit continue en x_0

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{x},\ \ si\ x\in\mathbb{R}^* \\ f(0)=a \qquad\qquad ;\ x_0=0\end{cases};\ \begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1}, si\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \\ f(1)=a \qquad ; \qquad x_0==1\end{cases}$$

Exercice 8

Soit la fonction $f: x\longmapsto\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

1) Calculer la limite de la fonction f en 1.
2) En déduire une fonction g, prolongement par continuité de f en 1.

Exercice 9

Sot f la function numérique définie par:$f(x)=x^3+x+1$

1) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
2) Déterminer $f([-1;2])$.
3) Montrer que f est une bijection de $[-2;3]$ sur un intervalle J à préciser.
4) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ a une unique solution réelle dans $[-1;0]$
5) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2}près de cette solution.

Exercice 10

Soit $f(x)=\ \frac{3x-2}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Interpréter graphiquement chaque résultat en termes d'asymptotes.

b) Préciser la position de la courbe par rapport à celle qui est parallèle à (OI).

Exercice 11

Soit $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $(\mathcal{C})$sa courbe représentative.

a) Trouver trois nombres a, b et c tels que pour tout $x \epsilon \mathbb{R}\backslash\{1\}; f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]$et interpréter graphiquement le résultat.

c) Étudier la position de $(\mathcal{C})$et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $y = ax+b$.

Exercice 12

Soit $f(x)=\frac{x^3-2x^2-1}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $(\mathcal{C})$sa courbe représentative.

a) Trouver quatre nombre réels a, b , c et d tels que pour tout nombre réel$x$, $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$

b) En déduire que $(\mathcal{C})$admet une asymptote dont on précisera l'équation.

Exercice13

Ecris sous la forme a^q $(a \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q})$

$a)\ \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$; $b)\ \frac{4\times\sqrt[3]{4}\times 2\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$; $c)\ \frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$; $d)\ \sqrt{\sqrt{3}}+\sqrt[4]{1875}+\sqrt[4]{243}$

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

Exercice 1

1) Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{5x-2}-\sqrt{x+1})$; $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{5-x}-\sqrt{1-x})$

b) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1-x}+2x)$; $\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$

2) Calculer les limites en $-\infty$ et en$+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-2}{1-x}$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

a) $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2+1}+5x}{3x-1}$; b) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$; c) $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$.; $d)\ f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$

exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta}{|x^2-\gamma|}$

Déterminer les nombres réelsα, β, γ sachant que $\lim_{x\to1} f(x)=-2, \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $et \lim_{x\to0} f(x)=1$

Exercice 4

Sot$f$ la fonction numérique définie par:$f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{x+3}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe representative dans un repère (O, I, J).

a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définitionD_f.

b) Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale dont vous préciserez une équation.

c) Démontrer qu'il existe trois réelsa, b et c tels que pour tout $x \epsilon \mathbb{R}\backslash\{-3\}$ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$

d) En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 5

Soit $f(x)=x^3+4x^2+6x+1$ définie sur $\mathbb{R}$

Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

Donner un encadrement de α à 10^{-3}près.

Exercice 6

On considère la fonction : $f:]-1;+\infty[\ \to\ ]-4;+\infty[$

$$x \to x^2+2x-3$$

1) Justifier que f est une bijection.
2) Déterminer la bijection réciproque de f.
3) Etablir le tableau de variation de f^{-1}
4) Construire la représentation graphique de f, en déduire celle de f^{-1}.

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1 : Calculons les limites de la fonction f en x_0

a) $\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=4$

b) $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{1+x^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}=\begin{cases}-\infty\ si\ x\to 0_<\\+\infty\ si\ x\to 0_>\end{cases}$

Exercice 2 :

a) **Il faut utiliser l'expression conjuguée pour le calcul de cette limite car les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure.**

Soit $\sqrt{x^2+x}+x=\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{\sqrt{x^2+x}-x}=\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$

Pour lever l'indétermination, il faut encore factoriser !

$\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=\frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}-x}=\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\frac{x}{-x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]}=\frac{1}{-\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]}$

On obtient : $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]}=-\frac{1}{2}$

b) **Grâce à la règle de calcul de limite de fonctions composées, on établit que :** $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(\sqrt{x^2+x}+x)^3}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=-8$

Exercice 3 :

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{1}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{1}{x})}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{3}$

car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ **et** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2+\sqrt{x^2-3x+1})(x+2-\sqrt{x^2-3x+1})}{x+2-\sqrt{x^2-3x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+4-x^2+3x-1}{(x+2-\sqrt{x^2-3x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7x+3}{(x+2-\sqrt{x^2-3x+1}}=$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(7+\frac{3}{X})}{x(1+\frac{2}{x}+\sqrt{(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7+\frac{3}{X}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}}=\frac{7}{2}$ **Car** $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2+\sqrt{x^2-3x+1})=\lim_{x\to+\infty}\left[x+2+\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=$

$\lim_{x\to+\infty}\left[x+2+|x|\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+2-x\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}x(1+\frac{2}{x}+\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=+\infty$

Exercice 4:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{sinx}{x}}=1$ **car** $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\tan x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{sinx}{cosx}\right)=1$ **car** $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$; $\lim_{x\to 0} sinx=0$ **et** $\lim_{x\to 0} cosx=1$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{xcosx}=\frac{sinx}{x}\times\frac{1}{cosx}=1$ **car** $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$ **et** $\lim_{x\to 0} cosx=1$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{2}$ **car** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{tan2x}{2x}\times\frac{2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\frac{tan2x}{2x}=\frac{2}{5}$ **car** $\lim_{x\to 0}\frac{tan2x}{2x}=\lim_{X\to 0}\frac{\tan X}{X}=1$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{5}$ **car** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}(\frac{\tan 2x}{\tan 5x}\times\frac{2x}{2x}\times\frac{5x}{5x})=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}\times\frac{tan2x}{2x}\times\frac{5x}{tan5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\times\frac{1}{\frac{tan5x}{5x}}=\frac{2}{5}$ **car** $\lim_{x\to 0}\frac{tan2x}{2x}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{tan5x}{5x}=1$

h) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\times\frac{1}{cos2x}=1$ **car** $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$ **et** $\lim_{x\to 0} cos2x=1$

Exercice 5 :

f **est continue en** x_0 **si et seulement si** $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

a) $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(3x^2-5x-7)=3\times 2^2-5\times 2-7=12-10-7=-5$ **et** $f(2)=-5$

$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = -5$ Alors f est continue en 2

Ou bien f est une fonction polynôme, elle est continue en tout élément de $\mathbb{R}$ en particulier en 2.

b) $\lim_{x\to 4} f(x)$=$\lim_{x\to 4}\sqrt{4-x}$=$\sqrt{4-4}$=0 et $f(4) = 0$ alors $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4) = 0$ Alors f est continue en 4

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$=$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x-7}{8x^3-5x+3}$=$\frac{3\times1^2-5\times1-7}{8\times1^3-5\times1+3}$=$-\frac{3}{2}$ et $f(1) = -\frac{3}{2}$ alors $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = -\frac{3}{2}$ Alors f est continue en 1

d) $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x+2 \neq 0\}$. On a : $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ $-2 \notin D_f$ alors f n'est pas continue en -2

Exercice 6

$\lim_{x\to 2_>} f(x) = \lim_{x\to 2_>}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$=$\lim_{x\to 2_>}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2(\sqrt{x+2}+2)}$=$\lim_{x\to 2_>}\frac{x+2-4}{(x-2(\sqrt{x+2}+2)}$=$\lim_{x\to 2_>}\frac{x-2}{(x-2(\sqrt{x+2}+2)}$=$\lim_{x\to 2_>}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$=$\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to 2_<} f(x)$=$\lim_{x\to 2_<}(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4})$=$\frac{1}{4}2^2-\frac{3}{4}$=$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

On a :$\lim_{x\to 2_>} f(x)$=$\lim_{x\to 2_<} f(x)$=$f(2) = \frac{1}{4}$. Alors f est continue en 2.

Exercice 7

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$=$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}$=$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x}$=$\lim_{x\to 0}(x-1)$= -1 et $f(0) = a$

Alors $a = -1$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)$=$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1}$=$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}$=$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1-x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}$=$\lim\limits_{x\to 1}\frac{-x+1}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}$=

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$=$-\frac{1}{2}$ et $f(1) = a$ Alors a=$-\frac{1}{2}$

Exercice 8

L'ensemble de définition de f est $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x-1 \neq 0\}$. On a : $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

1) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$ $(cette\ limite\ présente\ une\ forme\ d'indétermination \frac{0}{0})$

$\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{3x^2+1}-2)(\sqrt{3x^2+1}+2)}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)} = \frac{3x^2+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)} = \frac{3x^2-3}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}$==$\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}$==$\frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+1}+2}$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+1}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

2) Ona :$\begin{cases} 1 \notin D_f \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} f(x) = \frac{3}{2}\end{cases}$ Donc f admet un prolongement par continuité en x_0=1. Soit g la fonction numérique définie

par:$\begin{cases} g(x) = f(x) & si\ \ x \neq 1 \\ g(1) = \frac{3}{2}\end{cases}$ g ainsi définie est le prolongement par continuité de f en x_0=1

Exercice 9

1) On a $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}(x^3+x+1) = \lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$

et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(x^3+x+1) = \lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$

$\forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2+1$comme$3x^2+1 > 0\ sur\ \mathbb{R}$ (Δ< 0); alors $\forall\ x \in \mathbb{R} f'(x) > 0$. f est continue et strictement

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2)Déterminons $f([-1;2])$

f est une fonction continue et strictement croissante sur$[-1;2]$alors $f([-1;2]) = [f(-1);f(2)] = [-1;11]$

3) Montrons que f est une bijection de $[-2;3]$ sur un intervalle J à préciser

f est une fonction continue et strictement croissante sur $[-2;3]$alors f est une bijection de $[-2;3]$vers $f([-2;3]) = [f(-2);f(3)]$ $= [-9;31]$.Donc $J = [-9;31]$

4) $\forall\ x \in [-1;0]$, f est une fonction continue et strictement croissante alors f est une bijection de $[-1;0]$vers $f([-1;0]) = [f(-1);f(0)] = [-1;1]$ or Or $0 \in [-1;1]$. Il existe donc un unique nombre réel α tel que : $f(\alpha) = 0$ sur $[-1;0]$.

5) Déterminons une valeur approchée à 10^{-2}près de cette solution

Pour donner un encadrement de α, on utilise la méthode de balayage

Recherche d'un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
$f(x)$	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+

On obtient : $-0,7 < \alpha < -0,6$ et $-0,6-(-0,7) = 0,1$

Recherche d'un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2

x	-0,7	-0,69	-0,68	-0,67	-0,66	-0,65	-0,64	-0,63	-0,62	-0,61	-0,6
$f(x)$	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+

On obtient : $-\mathbf{0,69} < \alpha < -0{,}68$ et $-\mathbf{0,69}-(-\mathbf{0,68}) = \mathbf{0,01}$

Exercice 10

a) $D_f =]-\infty; \mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}; +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$=$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{1-x}$=$\lim_{x\to-\infty}(\frac{3x}{-x})$=$-3$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$=$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{1-x}$=$\lim_{x\to+\infty}(\frac{3x}{-x})$=$-3$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$=$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3$ Alors la droite d'équation $y = -3$ est asymptote « horizontale » à la courbe représentative de f en $-\infty$ $et\ en + \infty$

$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$=$\lim_{\substack{x\to1\\<}} \frac{3x-2}{1-x}$=$\lim_{\substack{x\to1\\<}}(3x-2)\times\frac{1}{1-x}$=$+\infty$ Car $\lim_{\substack{x\to1\\<}}(3x-2) = 1$ et $\lim_{\substack{x\to1\\<}} \frac{1}{1-x} = +\infty$

$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$=$\lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{3x-2}{1-x}$=$\lim_{\substack{x\to1\\>}}(3x-2)\times\frac{1}{1-x}$=$-\infty$ Car $\lim_{\substack{x\to1\\>}}(3x-2) = 1$ et $\lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1}{1-x} = -\infty$

$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$=$+\infty$ et $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$=$-\infty$, alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f.

b) Etude de la position de la courbe par rapport à l'asymptote qui est parallèle à (OI)

$f(x)-(-3) = \frac{3x-2}{1-x} + 3$=$\frac{3x-2+3-3x}{1-x}$=$\frac{1}{1-x}$. Alors le signe $f(x)-3$ dépend de celui de $1-x$.

$\forall\ x \in]-\infty; \mathbf{1}[, f(x) - 3 > 0$: la courbe est au dessus de l'asymptote.

$\forall\ x \in]\mathbf{1}; +\infty[, f(x) - 3 < 0$: la courbe est en dessous de l'asymptote.

Exercice 11

a) Il faut procéder par identification ou par la division Euclidienne : pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$=$\frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}$=$\frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}$=$\frac{ax^2+(-a+b)x-b+c}{x-1}$:

Par identification: $\frac{ax^2+(-a+b)x-b+c}{x-1}$=$\frac{x^2-3x+3}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -3 \\ c - b = 3 \end{cases}$ soit $a = 1$; $b = -2$ et $c = 1$

Donc $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]$=$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]$ $\lim_{x\to+\infty}\left[x-2+\frac{1}{x-1}-(x-2)\right]$=$\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x-1})$=0

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = 0$. Alors la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 2$ est asymptote « oblique » à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

c) Cela revient à étudier le signe de $f(x)-(x-2)$

$f(x)-(x-2)$=$\frac{1}{x-1}$. Alors le signe de $f(x)-(x-2)$ dépend du signe de $\frac{1}{x-1}$.

$\forall\ x \in]-\infty; \mathbf{1}[, f(x)-(x-2) < 0$: la courbe $(\mathcal{C})$est en dessous de $(\mathcal{D})$

$\forall\ x \in]\mathbf{1}; +\infty[, f(x)-(x-2) > 0$: la courbe $(\mathcal{C})$est au dessus de $(\mathcal{D})$

Exercice 12

a) Il faut procéder par identification ou par la division Euclidienne : pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$=$\frac{(ax+b)(x^2+1)+cx+d}{x^2+1}$=$\frac{ax^3+ax+bx^2+b+cx+d}{x^2+1}$=$\frac{ax^3+bx^2(a+c)x+b+d}{x^2+1}$:

Par identification: $\frac{ax^3+bx^2(a+c)x+b+d}{x^2+1} = \frac{x^3-2x^2-1}{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ a + c = 0 \\ b + d = -1 \end{cases}$ soit $a = 1$; $b = -2$; $c = -1$ et $d = 1$

Donc $f(x) = x - 2 + \frac{-x+1}{x^2+1}$

b) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]$=$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-2+\frac{-x+1}{x^2+1}-(x-2)\right]$=$\lim_{x\to+\infty}(\frac{-x+1}{x^2+1})$=0

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = 0$. Alors la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 2$ est asymptote « oblique » à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

Exercice 13

$a)\ \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$=$\frac{25^{\frac{1}{3}}}{5} = \frac{(5^2)^{\frac{1}{3}}}{5} = \frac{5^{\frac{2}{3}}}{5} = 5^{(\frac{2}{3}-1)} = 5^{-\frac{1}{3}}$

$b)\ \frac{4\times\sqrt[3]{4}\times2\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$=$\frac{4\times4^{\frac{1}{3}}\times2\times2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} = \frac{8\times(2^2)^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^3\times2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 2^{(3+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6})} = 2^4$

$c)\ \frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$=$\frac{2^{\frac{1}{5}}\times8^{\frac{1}{2}}}{(128^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{5}}\times(2^3)^{\frac{1}{2}}}{128^{\frac{1}{10}}} = \frac{2^{\frac{1}{5}}\times2^{\frac{3}{2}}}{(2^7)^{\frac{1}{10}}} = \frac{2^{(\frac{1}{5}+\frac{3}{2})}}{2^{\frac{7}{10}}} = \frac{2^{\frac{17}{10}}}{2^{\frac{7}{10}}} = 2^{(\frac{17}{10}-\frac{7}{10})} = 2^{\frac{10}{10}} = 2$

$d)\ \sqrt{\sqrt{3}} + \sqrt[4]{1875} + \sqrt[4]{243}$=$\sqrt{\sqrt{3}} + \sqrt[4]{3\times5^4} + \sqrt[4]{3^5} = (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + (3\times5^4)^{\frac{1}{4}} + (3^5)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}}\times(5^4)^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{5}{4}} =$
$3^{\frac{1}{4}} + 5\times3^{\frac{1}{4}} + 3^{1+\frac{1}{4}} = 6\times3^{\frac{1}{4}} + 3\times3^{\frac{1}{4}}$=$9\times3^{\frac{1}{4}}$=$3^2\times3^{\frac{1}{4}} = 3^{2+\frac{1}{4}} = 3^{\frac{9}{4}}$

Introduction

Des techniques empiriques d'approximations de longueurs de courbes, d'aires ou de volumes étaient utilisées par **Archimède** et **Eudoxe.** Les recherches foisonnantes du **XIIe siècle** introduisent de nouvelles notions (vitesse instantanée, direction d'un mobile sur sa trajectoire, problèmes d'extremums….) qui provoquent la classification de ces anciennes techniques et aboutissent aux notions de différentielle et de dérivée. Citons entre autres les travaux de **Descartes (1596-1650),PASCAL (1623-1662)FERMAT (1601-1665),** et surtout **NEWTON (1642-1727**) et **LEIBNIZ(1646-1716)** qui travaillant indépendamment découvrent les mêmes résultats et méthodes, mais deux formes radicalement différentes, qui s'opposèrent au cours des siècles. **D'Alembert (1717-1783)** clarifie le rôle fondamental des limites dans la dérivation. Enfin, en **1821**, les fondements du calcul différentiel figurent pour la première fois dans les ouvrages d'enseignement de **CAUCHY.**

Pour préciser le comportement de la fonction f pour les valeurs de x voisines d'un réel a, on peut tenter une comparaison de f avec des fonctions connues (et en premier lieu, des fonctions du premier degré) prenant la même valeur que $f$en a.

L'étude de l'erreur commise dans ce processus d'approximation conduit à la notion de meilleure approximation affine et à celle de nombre dérivé, puis à celle de fonction dérivée.

FICHE DE COURS

II-1) DERIVATION

II-1-1) Dérivabilité en a

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a. On dit que f est dérivable en a si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie l en a.

Cette limite l est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$

II-1-2) Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite en a

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

On dit que f est **dérivable à gauche en a,** si : $\lim_{\substack{x\to a\\ <}}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ existe et est finie. Cette limite est appelée le nombre dérivée de f à gauche en a.

On note : $f'_g(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ <}}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$

La droite passant par $A(a,f(a))$ et de coefficient directeur $f'_g(a)$ est appelée la tangente à gauche à la courbe représentative de f au point A.

On dit que f est **dérivable à droite en a**si : $\lim_{\substack{x\to a\\ >}}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ existe et est finie. Cette limite est appelée le nombre dérivée de f à droite en a.

On note : $f'_d(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ >}}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$

La droite passant par $A(a,f(a))$ et de coefficient directeur $f'_d(a)$ est appelée la tangente à droite à la courbe représentative de f au point A.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a, dérivable à droite en a et $f'_g(a)=f'_d(a)$

Dérivabilité et continuité en a

Si une fonction est dérivable en a, alors elle est continue en a. la réciproque est fausse : une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a

Équation de la tangente (T) en un point A (a ;$f(a)$)

Une équation de la tangente (T) est donc : $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

Remarque : Lorsque $f'(a)=0$, la tangente à (C) au point a est parallèle à l'axe des abscisses.

Tangente verticale

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

Lorsque la limite à droite ou la limite à gauche en a de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie, la courbe représentative de f admet une demi tangente verticale au point $A\binom{a}{f(a)}$.

II-1-3) Dérivabilité sur un intervalle

Définition :Soit f une fonction.

- Si f est définie sur $]a;b[$, on dit que f est dérivable sur l'intervalle $]a;b[$ si f est dérivable en tout point de $]a;b[$
- Si f est définie sur $[a;b]$, on dit que f est dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ si f est dérivable sur l'intervalle $]a;b[$ et dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

II-1-4) Fonction dérivée

Soit f une fonction.

L'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable est appelé ensemble de dérivabilité de f.

La fonction $x \longmapsto f'(x)$ est appelé dérivée (ou fonction dérivée) de f.

CALCUL DE DERIVEES

Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(K)$. La fonction $v \circ u$ est dérivable sur K et on a :$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.

Dérivée de la réciproque d'une fonction

Propriété

Soit f une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle K, tel que $\forall x \in K, f'(x) \neq 0$.

La fonction f réalise une bijection de K vers $f(K)$.

La bijection réciproque f^{-1}est dérivable sur f(K) et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

III PRIMITIVES

Définition : Soit$f$ une fonction définie sur un intervalle K.

On appelle primitive de f sur K toute fonction F de K vers $\mathbb{R}$ telle que, pour tout élément x de k $F'(x) = f(x)$.

Propriété :Si f est une fonction continue sur un intervalle K alors $f$admet une primitive sur K.

Ensemble des primitives d'une fonction

Propriété 1 : Soit $f$une fonction admettant une primitive F sur intervalle K.

Pour tout nombre réel c, la fonction $x \longmapsto F(x) + c$est une primitive de f sur K.

Toute primitive de f sur K est de la forme $x \longmapsto F(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Propriété 2

Soit$f$ une fonction admettant une primitive sur un intervalle K.$y_0$un nombre réel et x_0 un élément de K. Il existe une seule primitive de f sur K et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	$x \mapsto a$ $(a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$
Primitive F de f	$ax + c$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$2\sqrt{x} + c$	$-\cos x + c$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$\sin x + c$	$\tan x + c$
Domaine de validité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$]0; +\infty[$ si $r \geq 0$ $]-\infty; 0[$ si $r \leq 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Fonction f	$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{u'}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u'u^r$ $(r \in \mathbb{Q}\{-1\})$	$u' \cos u$	$u' \sin u$

primitive de f	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	$2\sqrt{u}+c$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}+c$	$\sin u+c$	$-\cos u+c$
Commentaires	Sur tout intervalle où u est dérivable	Sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas	Sur tout intervalle où u est dérivable et strictement positive	Sur tout intervalle où u est dérivable et positive	Sur tout intervalle où u est dérivable	Sur tout intervalle où u est dérivable

IV GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Parité

Fonction paire

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. On dit que la fonction f est paire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de D_f, ona : $f(-x)=f(x)$.

Le repère étant orthogonal, une fonction est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe représentative.

Fonction impaire

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. On dit que la fonction f est impaire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de D_f, ona : $f(-x)=-f(x)$.

Une fonction est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe représentative.

Centre de symétrie - Axe de symétrie

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f; $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative et a et b deux nombres réels.

Centre de symétrie

Le point $A\binom{a}{b}$ est un centre de symétrie de$(\mathcal{C})$ si et seulement si $\forall\, x \in D_f; 2a-x \in D_f$ et $f(2a-x)+f(x)=2b$ ou $\forall\, x \in \mathbb{R}; a-x \in D_f$; $a+x \in D_f$ et $f(a-x)+f(a+x)=2b$

Axe de symétrie

La droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de$(\mathcal{C})$ si et seulement si $\forall\, x \in D_f; 2a-x \in D_f$ et $f(2a-x)=f(x)$ ou $\forall\, x \in \mathbb{R}; a-x \in D_f$; $a+x \in D_f$ et $f(a-x)=f(a+x)$

Plan d'étude d'une fonction

- ►Ensemble de définition D_f.
- ►Éventuelle parité ou périodicité (pour réduire l'ensemble d'étude).
- ►Limites ou valeurs de f aux bornes des intervalles constituant D_f et éventuelles asymptotes.
- ►Existence et détermination de f'(en utilisant les opérations ou la définition) puis signe de $f'(x)$.
- ►Tableau de variation récapitulant les résultats précédents.
- ►Recherche éventuelle d'un centre ou d'un axe de symétrie.
- ►Tracé de la courbe après avoir placé :
  - les axes du repère avec la bonne unité ;
  - les points particuliers (tangente horizontale ou verticale, intersection avec les axes, ...) ;
  - les éventuelles asymptotes.

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, calculer en utilisant, la définition, le nombre dérivé de la fonction f enx_0.

$a)\ f(x) = -3x^2 + 4x + 5, x_0 = 2; b)\ f(x) = \frac{2-3x}{x-2}, x_0 = -\frac{1}{2}$; c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}, x_0 = 1;$

$$d)\ f(x)\sqrt{2x+5}, x_0 = -\frac{1}{2}$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse x_0.

$a)\ f(x) = x^2 - 3x - 1, x_0 = -2;\quad b)\ f(x) = \frac{x^3+1}{x}, x_0 = \frac{1}{3}$; c) $f(x) = \frac{2-3x}{x-2}, x_0 = 0$;

$d)\ f(x) = \sqrt{2x-3}$, $x_0 = 2.$

Exercice 3

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto -x^5 + x^3 - 4; b)\ x \longmapsto (x^2+1)^4$; $c)\ x \longmapsto (5x+2)^3(3-4x)$;

$d)\ x \longmapsto \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}; e)x \longmapsto \sqrt{x^2-3x}$; $f)\ x \longmapsto \frac{\sqrt{x-1}}{3x-2}$

Exercice 4

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes

$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$; $c)\ \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{x-2}$

Exercice 5

Soit la fonction $f: x \longrightarrow \frac{x^2-3x+1}{x+1}$et $(\mathcal{C})$sa courbe représentative.

1) Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

2) Existe-t-il des points de $(\mathcal{C})$où la tangente a pour coefficient directeur -4 ?

3) Existe-t-il des points de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à la droite (Δ)d'équation$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$?

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+1}$. a et b sont des nombres réels.

1. Déterminer a et b pour que la tangente (T) à la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de la fonction f, au point d'abscisse 0 ait pour équation : $y = 3x + 2$.
2. Préciser la position de (T) par rapport à $(\mathcal{C})$.

Exercice 7

Étudier la parité des fonctions suivantes, interpréter chaque résultat.

a) $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2-4}$ sur $\mathbb{R}$\{-2 ;2}   b) $g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$

Exercice 8

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+3}$définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que la courbe représentative $(\boldsymbol{\mathcal{C}})$de f admet la droite d'équation $x = 1$ comme axe de symétrie.

Exercice 9

Soit $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$\ {-1}. Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$représentative de f admet le point $\Omega(-1;-2)$comme centre de symétrie.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive de la fonction f sur un intervalle K que l'on précisera.

a) $f(x) = 3x^2 - x + 7$ b) $f(x) = 5x - 2 + \frac{4}{x^2}$ c) $f(x) = (2x^2+1)^2$

d) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^4}$ e) $f(x) = 3(3x-2)^3$; $f)\ f(x) = 4x(x^2-1)^3$

g) $f(x) = x^3(x^4-5)$

Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur un intervalle k.

a) $f(x) = \frac{3x-1}{(3x^2-2x-1)^5}$ et $K = \left]-\frac{1}{3};1\right[$ b) $f(x) = \frac{2}{(1+x)^4}$ et $K=]-1;+\infty[$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ et $K=]0;+\infty[$ d) $f(x) = \frac{3x^2+2}{2(x^3+2x)^3}$ et $K=]-\infty;0[$

Exercice 12

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur un intervalle que l'on précisera.

a) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$; c) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Exercice 13

Soit la fonction $f: \longmapsto \frac{x^3-x^2-8x-8}{(x-2)^2}$

1) Déterminer trois nombres réels $a, betc\ telsque$: $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$

2) En déduire les primitives de f sur $]2;+\infty[$.

3) Déterminer celle qui s'annule en 3.

PROBLEME

Soit la fonction numérique f définie sur $[-2;+\infty[$par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{2x+4} \text{ si } x < 0. \\ f(x) = -x^2 + 2x + 2 \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$la représentation graphique dans le plan muni d'un repère (O, I, J). OI=OJ=1,5 cm.

PARTIE A

1) a)- Étudier la continuité de f en 0.

b)- Démontrer que$(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on précisera les équations.

c)- Étudier la dérivabilité de f en -2. Interpréter graphiquement le résultat.

d)- Sur qu'el intervalle f est-elle dérivable?

e)- Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$en $+\infty$.

f)- Démontrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$.

2) a)- Démontrer que le signe de $f'(x)$ est celui consigné dans le tableau ci-dessous.

x	-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	▨	+	▨	+	0	−	

b)- En déduire le tableau de variation de f.

PARTIE B

Soit g, la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$.

1. a)- Démontrer que g est une bijection de $[1;+\infty[$vers un intervalle K à préciser.

   b)- Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\propto$ et que $2 < \propto < 3$.

   c)- Donner un encadrement de $\propto$ à 10^{-2} près.

   d)- Sans expliciterg^{-1}, dresser son tableau de variation.

   e)- Montrer que pour tout $x \in]-\infty;3], g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{3-x}$.

   f)- Calculer alors $(g^{-1})'(-1)$.

EXERCICES ET PROBLEMES DE SYNTHESE

Exercice

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + x^2 - 9x + 1$ de courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}), (unité\ 1\ cm)$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$, étudier son signe. Dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$

3.a. Ecrire une équation de la tangente (T) à (Γ) en $x_0 = 2$.

b. Etudier la position relative de (T) et (Γ)

4. Démontrer que $\Omega(2;-1)$ est le centre de symétrie de (Γ)
5. Représenter graphiquement (T) et (Γ)
6. Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet trois racines $x_1<x_2<x_3$. Donner pour chacune d'elles un encadrement à 10^{-1}.

PROBLÈME I

PARTIE A

On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x)=2x^3-3x^2-1$.

a) Étudier le sens de variation de P. En déduire son tableau de variation.

b) Démontrer que l'équation $P(x)=0$ admet une solution réelle unique $\propto$, et que $\propto$ appartient à l'intervalle$]1{,}6;1{,}7[$.

c) Montrer que $\forall x<\propto, P(x)<0$ et $\forall x>\propto, P(x)>0$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1-x}{1+x^3}$

1) a) Développer et réduire l'expression $A(x)=(1+x)(x^2-x+1)$

   b) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) Calculer la $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

3) a)-Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b)-Donner une interprétation graphique du résultat.

4) a)-Montrer que pour tout x différent de -1, $f'(x)=\frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$

   b)-En déduire le sens de variation de f.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) a) Montrer que $f(\alpha)=\frac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^{2})}$ et donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2}près

7) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]\propto;+\infty[$

   a)--Montrer que g est une bijection de $]\propto;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

   b)Calculer $g(0)$ et $(g^{-1})'(1)$.

8) Construire $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f. (Unité graphique 4 cm).

Problème II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\frac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}$, on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O,I,J)(Unité\ 1cm)$.

1-a)Calculer $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b)Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2-a) Déterminer quatre nombres réels a,b,c et d tels $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$

b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et en $-\infty$

c) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ).

3) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x différent de -1 et montrer que $f'(x)=\frac{x(x-1)(x+4)}{(x+1)^3}$

4-a) Montrer que le signe de f' est celui consigné dans le tableau ci-dessous

x	$-\infty$		-4		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	+	0	−	0	+	

b) Etudier le sens de variation de f

c) En déduire le tableau de variation de f.

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]-1;0[$

6-a) Montrer que f est une bijection de l'intervalle $]1;+\infty[$ vers un intervalle I à préciser.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 6$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1; +\infty[$

c) Donner un encadrement de $\propto$ à 10^{-2} près.

7) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3,5	-3	-2	-1	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	-8	-7,25	-6,5	-5,9	-5,7	-5,8	-6,25	-11		5	4,8	4,75	5	5,6	6,3	7	7,9	8,8	9,7	10,6

Tracer (Δ) ; la droite d'équation $x = -1$ et $(\mathcal{C})$

8) soit h la bijection de $]1; +\infty[$ sur I telle que $h(x) = f(x)$ et h^{-1} sa bijection réciproque. $(C_{h^{-1}})$ est la courbe représentative de la fonction h^{-1}

a) Dresser le tableau de variation de h^{-1}

b) Tracer $(C_{h^{-1}})$ sur la figure de la question 7)

PROBLEME III

Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{4x^3+8x^2+7x+6}{(2x+2)^2}$ et

$g(x) = -4x^3 - 12x^2 - 9x + 5$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

PARTIE A : Etude de g

1) Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$
2) a) Montrer que g est strictement croissante sur $\left]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right[$ et strictement décroissante sur

$$\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

b) Dresser le tableau de variation de g.

3.a) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

b) Vérifier que $0{,}36 < \alpha < 0{,}37$

4) montrer que $\forall\, x \in]-\infty; \alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$

PARTIE B : Etude de f

1. démontrer que l'ensemble de définition D_f de f est $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$
2. a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu ;

3) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-2g(x)}{(2x+2)^3}$

4.a) En utilisant la question 4) de la partie A. étudier le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f

5.a) Déterminer quatre nombres réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(2x+2)^2}$

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Etudier la position de $\mathcal{C}$ et (Δ)

6) Montrer que pour tout x différent de -1 $f(x) = \frac{(2x+3)(2x^2+x+2)}{(2x+2)^2}$ et détermine le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec les axes de coordonnées.

7) Tracer $(\mathcal{C})$ après avoir tracé (Δ).

Partie C : Etude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty]$ et (Γ) sa courbe dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

1- Montrer que h est une bijection de $[\alpha; +\infty]$ sur un intervalle K à préciser.

2- Soit h^{-1} la réciproque de h et (Γ') sa représentation graphique.

a) Déterminer le plus petit intervalle sur le quel h^{-1} est dérivable.

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

c) Calculer $h(1)$ et en déduire $(h^{-1})'\left(\frac{25}{16}\right)$

d) Représenter graphiquement (Γ')

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1

a) $f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-3x^2+4x+5-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-3x^2+4x+4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(-3x-2)(x-2)}{x-2}$.= $\lim_{x\to 2}(-3x-2) = -8$

b) $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{\frac{2-3x}{x-2}+\frac{7}{5}}{x+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{\frac{-8(x+\frac{1}{2})}{5(x-2)}}{x+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{-8}{5(x-2)} = \frac{16}{25}$.

c) $f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -3$ d) $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Exercice 2 : une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse x_0.

Une équation de la tangente (T) est donc : $(T): y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

a) $(T): y = -7x-5$; b) $(T): y = -\frac{25}{3}x+\frac{53}{9}$; c) $(T): y = x-1$; d) $(T): y = x+1$

Exercice 3 : calculons la dérivée des fonctions suivantes

a) $f'(x) = (-x^5+x^3-4)' = (-x^5)'+(x^3)'+(-4)' = -5x^4+3x^2 = x^2(-5x^2+3)$.

b) $f'(x) = \left[(x^2+1)^4\right]' = 4(x^2+1)'(x^2+1)^3 = 8x(x^2+1)^3$ c) $f'(x) = [(5x+2)^3(3-4x)]'$

$= [(5x+2)^3]'(3-4x)+(5x+2)^3(3-4x)' = 15((5x+2)^2(3-4x)-4(5x+2)^3 = (5x+2)^2(29-80x)$.

$d)\ f'(x) = \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}\right)' = \frac{(x^2+2x+1)'(x^2-x-1)-(x^2+2x+1)(x^2-x-1)'}{(x^2-x-1)^2} = \frac{(2x+2)(x^2-x-1)-(2x-1)(x^2+2x+1)}{(x^2-x-1)^2} = \frac{-3x^2-4x+1}{(x^2-x-1)^2}$.

$e)\ f'(x) = \left(\sqrt{x^2-3x}\right)' = \frac{(x^2-3x)'}{2\sqrt{x^2-3x}} = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$; f) $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{3x-2}\right)' = \frac{(\sqrt{x-1})'(3x-2)-(3x-2)'\sqrt{x-1}}{(3x-2)^2} = \frac{-3x+4}{2\sqrt{x-1}(3x-2)^2}$

Exercice 4

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$=$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$=$f'(0)$ avec $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Alors $f'(0) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$=$f'(0) = \frac{1}{2}$

$b)$ $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$=$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$=$f'(1)$ avec $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Alors $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$=$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$c)$ $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{x-2}$=$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$=$f'(2)$ avec $f(x) = \sqrt{x^2+x+3}$ et $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}}$. Alors $f'(2) = \frac{5}{6}$

$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{x-2}$=$f'(2) = \frac{5}{6}$

Exercice 5

1- Une équation de la tangente (T) est donc : $(T): y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Avec $f'(x) = \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$; $x_0 = 1; f'(1) = -\frac{1}{4}\ et\ f(1) = -\frac{1}{2}$ Alors $(T): y = -\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{2}$

Une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1 est : Alors $(T): y = -\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$

2- Cela revient à résoudre l'équation $f'(x_0) = -4 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} = -4\ alors\ x^2+2x-4 = -4(x+1)^2$

On obtient ainsi $x = -2\ o$ù $x = 0$ d'où les points $A\binom{-2}{-11}$ et $B\binom{0}{1}$.

3- La tangente est parallèle à (Δ) si et seulement si $f'(x_0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} = \frac{3}{2}$

Alors $x^2+2x-4 = \frac{3}{2}(x+1)^2$. Cette équation n'admet pas de solution : alors il n'existe pas de points de $(\mathcal{C})$ en le quel la tangente est parallèle à (Δ).

Exercice 6

1) $\forall\, x\in\mathbb{R}, f'(x) = \frac{(2x+a)(x^2+1)-2x(x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x+ax^2+a-2x^3-2ax^2-2bx}{(x^2+1)^2}$

$$\forall\, x\in\mathbb{R}, f'(x) = \frac{-ax^2+2(1-b)x+a}{(x^2+1)^2}$$

$f'(0) = a$ et $f(0) = b$ alors : $(T)\ y = ax+b$

Par identification $a = 3$ et $b = 2$

2) Précisons la position de (T) par rapport à $(\mathcal{C})$

Cela revient à étudier le signe de $f(x)-y$

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\ f(x)-y=\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}-(3x+2)=\frac{x^2+3x+2-3x^3-3x-2x^2-2}{x^2+1}=\frac{-3x^3-x^2}{x^2+1}=\frac{x^2(-3x-1)}{x^2+1}$$

$\forall\, x\in\mathbb{R},\frac{x^2}{x^2+1}>0$, alors le signe de $f(x)-y$ dépend de $-3x-1$

$\forall\, x\in\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$, $f(x)-y>0$ alors $(\mathcal{C})$ est au dessus de (T)

$\forall\, x\in\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $f(x)-y<0$ alors $(\mathcal{C})$ est en dessous de (T)

Exercice 7

a) $\forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\{-2\,;2\}\mathrm{f}(-\mathrm{x})=\frac{(-x)^3-(-x)}{(-x)^2-4}=\frac{-x^3+x}{x^2-4}=-\frac{x^3-x}{x^2-4}=-f(x)$. Donc la fonction f est impaire.

b) $\forall\, x\in\mathbb{R};\ g(-x)=\frac{|-x|}{(-x)^2+1}=\frac{|x|}{x^2+1}=g(x)$. Donc la fonction g est paire.

Exercice 8

La première méthode consiste à vérifier la définition, c'est-à-dire que $f(2-x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$f(2-x)=\frac{1}{(2-x)^2-2(2-x)+3}=\frac{1}{4-4x+x^2-4+2x+3}=\frac{1}{x^2-2x+3}=f(x)$

L'égalité $f(2-x)=f(x)$ est vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$: Alors la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie à $(\mathcal{C})$.

La deuxième méthode consiste à chercher l'équation $Y=F(X)$ de $x\mapsto f(x)\, dans\ le\ rep\grave{e}re\ (\Omega;i;j)$ avec $\overrightarrow{O\Omega}=\vec{\imath}$, puis à établir la parité de F.

Par le changement de repère : $\begin{cases}x=X+1\\ y=Y\end{cases}$; on a : $Y=\frac{1}{(1+X)^2-2(1+X)+3}=\frac{1}{1+2X+X^2-2-2X+3}=\frac{1}{X^2+1}=F(X)$

$F(-X)=\frac{1}{(-X)^2+1}=\frac{1}{X^2+1}=F(X)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Alors F est une fonction paire.

Cela signifie que l'axe des ordonnées $(\Omega;j)$ du nouveau repère, c'est-à-dire la droite d'équation $x=1$ est axe de symétrie.

Exercice 9

La première méthode consiste à vérifier la définition c'est-à-dire que $f(2a-x)+f(x)=2b$ pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$f(-2-x)+f(x)=\frac{(-2-x)^2+3}{(-2-x)+1}+\frac{x^2+3}{x+1}=\frac{4+4x+x^2+3}{-x-1}+\frac{x^2+3}{x+1}=\frac{-x^2-4x-7}{x+1}+\frac{x^2+3}{x+1}=\frac{-4x-4}{x+1}=\frac{-4(x+1)}{x+1}=-4$

L'égalité $f(-2-x)+f(x)=2\times(-2)$ est vraie pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$: Alors le point $\Omega\binom{-1}{-2}$est un axe de symétrie à $(\mathcal{C})$.

La deuxième méthode consiste à chercher l'équation $Y=F(X)$ de $x\mapsto f(x)\, dans\ le\ rep\grave{e}re\ (\Omega;i;j)$ avec $\overrightarrow{O\Omega}=-\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$, puis à établir que F est une fonction impaire.

Par le changement de repère : $\begin{cases}x=-1+X\\ y=-2+Y\end{cases}$; on a : $Y-2=\frac{(-1+X)^2+3}{-1+X+1}=\frac{1-2X+X^2+3}{X}=\frac{X^2-2X+4}{X}$

$$Y=\frac{X^2-2X+4}{X}+2=\frac{X^2+4}{X}=F(X)$$

La fonction F est une fonction impaire.

Cela signifie que l'origine du nouveau repère, c'est-à-dire le point $\Omega(-1;-2)$ est un centre de symétrie.

Exercice 10

a) La primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'écrit: $F(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+7x+C_1;\ C_1\in\mathbb{R}$

b) La primitive de f sur $\mathbb{R}^*$s'écrit : $F(x)=\frac{5}{2}x^2-2x-\frac{4}{x}+C_2;\ C_2\in\mathbb{R}$

c) $f(x)=(2x^2+1)^2=4x^4+4x^2+1$

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'écrit: $F(x)=\frac{4}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3+x+C_3;\ C_3\in\mathbb{R}$

d) $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^4}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}$

La primitive de f sur $\mathbb{R}^*$s'écrit : $F(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+C_4;\ C_4\in\mathbb{R}$

Conseils !

Dans la suite, il faut utiliser la forme $U'U^n$

e) $f(x)=3(3x-2)^3$. Posons: $U(x)=3x-2$ alors $U'(x)=3\Leftrightarrow f(x)=U'U^3$

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'écrit: $F(x)=\frac{1}{4}(3x-2)^4+C_5;\ C_5\in\mathbb{R}$

f) $f(x)=4x(x^2-1)^3$. Posons: $U(x)=x^2-1$ alors $U'(x)=2x\Leftrightarrow f(x)=2U'U^3$

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'écrit: $F(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)^4+C_6;\ C_6\in\mathbb{R}$

g) $f(x)=x^3(x^4-5)$. Posons: $U(x)=x^4-5$ alors $U'(x)=4x^3\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{3}U'U$

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'écrit: $F(x)=\frac{1}{6}(x^4-5)^2+C_7;\ C_7\in\mathbb{R}$

Exercice 11

a) $f(x)=\frac{3x-1}{(3x^2-2x-1)^5}$ posons : $U(x)=3x^2-2x-1$ alors $U'(x)=6x-2=2(x-1)$ et $f(x)=\frac{1}{2}\frac{U'}{U^5}$

La primitive de f sur $\left]-\frac{1}{3};1\right[$ s'écrit: $F(x)=-\frac{1}{8}\frac{1}{(3x^2-2x-1)^4}+C_1;\ C_1\in\mathbb{R}$

b) $f(x)=\frac{2}{(1+x)^4}$ posons $U(x)=1+x$ alors $U'(x)=1$ et $f(x)=2\frac{U'}{U^4}$

La primitive de f sur $]-1;+\infty[$ s'écrit: $F(x)=-\frac{2}{3(x+1)^3}+C_2;\ C_2\in\mathbb{R}$

c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$ posons : $U(x)=\sqrt{x}+1$alors $U'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f(x)=2\frac{U'}{U^2}$

La primitive de f sur $]0;+\infty[$ s'écrit: $F(x)=-\frac{2}{\sqrt{x}+1}+C_3;\ C_3\in\mathbb{R}$

d) $f(x)=\frac{3x^2+2}{2(x^3+2x)^3}$ posons $U(x)=x^3+2x$ alors $U'(x)=3x^2+2$ et $f(x)=\frac{1}{2}\frac{U'}{U^3}$

La primitive de f sur $]-\infty;0[$ s'écrit: $F(x)=-\frac{1}{4}\frac{1}{(x^3+2x)^2}+C_4;\ C_4\in\mathbb{R}$

Exercice 12

a) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ Posons : $U(x)=x^2+1 alors\ U'(x)=2x\Leftrightarrow f(x)=\frac{U'}{\sqrt{U}}$

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'écrit: $F(x)=2\sqrt{x^2+1}+c;\ c\in\mathbb{R}$

b) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$ Posons : $U(x)=2x^2-4x-6\ alors\ U'(x)=4x-4=4(x-1)\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{4}\frac{U'}{\sqrt{U}}$

La primitive de f sur $]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$s'écrit: $F(x)=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-4x-6}+C_2;\ C_2\in\mathbb{R}$

c) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ posons $U(x)=1-x^2$ alors $U'(x)=-2x\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{2}U'\sqrt{U}=-\frac{1}{2}U'U^{\frac{1}{2}}$

La primitive de f sur $[-1;1]$s'écrit: $F(x)=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C_3;\ C_3\in\mathbb{R}$

Exercice 13

1) Il faut procéder par identification ou par la division Euclidienne : pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}=\frac{(ax+b)(x-2)^2+c}{(x-2)^2}=\frac{(ax+b)(x^2-4x+4)+c}{(x-2)^2}=\frac{ax^3-4ax^2+4ax+bx^2-4bx+4b+c}{(x-2)^2}=\frac{ax^3+(-4a+b)x^2+(4a-4b)x+4b+c}{(x-2)^2}:$$

Par identification: $\frac{ax^3+(-4a+b)x^2+(4a-4b)x+4b+c}{(x-2)^2}=\frac{x^3-x^2-8x-8}{(x-2)^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\-4a+b=-1\\4a-4b=-8\\4b+c=-8\end{cases}$ soit $a=1;\ \ b=3\ \ et\ \ c=-20$

Donc $f(x)=x+3+\frac{-20}{(x-2)^2}$

2) Une primitive de la fonction $x\longmapsto x+3$ est la fonction $x\longmapsto\frac{1}{2}x^2+3x$

Pour la fonction $x\longmapsto\frac{-20}{(x-2)^2}$: On pose $U(x)=x-2\ alors\ U'(x)=1$. Donc cette fonction est sur la forme : $-20\frac{U'}{U^2}$

La fonction $x\longmapsto\frac{-20}{(x-2)^2}$ a pour primitive la fonction $\frac{20}{x-2}$

La fonction f a pour primitive sur $]2;+\infty[$la fonction $F(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{20}{x-2}+c;\ c\in\mathbb{R}$

3) $F(3)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times3^2+3\times3+\frac{20}{3-2}+c=0\Leftrightarrow\frac{67}{2}+c=0$ Alors $c=-\frac{67}{2}$ $alors\ F(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{20}{x-2}-\frac{67}{2}$

CORRECTION DU PROBLEME

PARTIE A

1- a) Continuité de f en 0

f est continue en 0 si et seulement si $\lim_{\substack{x\to0\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=f(0)$

$\lim_{\substack{x\to0\\<}}f(x)=\lim_{x\to0}\sqrt{2x+4}=\sqrt{2\times0+4}=\sqrt{4}=2$ et $\lim_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=\lim_{x\to0}(-x^2+2x+2)=2$

$\lim_{\substack{x\to0\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=f(0)=2$ alors f est continue en 0.

$$a)\ f'_g(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+4}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{2x+4}-2)(\sqrt{2x+4}+2)}{x(\sqrt{2x+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{2x+4}+2}=\frac{1}{2}$$

$$f'_d(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2+2x+2-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2+2x}{x}=\lim_{x\to0}(-x+2)=2$$

$f'_g(0)\neq f'_d(0)$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes.

$(T_g):y=\frac{1}{2}(x-0)+2$ Alors $(T_g):y=\frac{1}{2}x+2$ et $(T_d):y=2(x-0)+2$ Alors $(T_d):y=2x+2$

$b)\ f'(-2) = \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \frac{\sqrt{2x+4}-0}{x+2} = \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \frac{\sqrt{2x+4}}{x+2} = \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \frac{\sqrt{2x+4}^2}{(x+2)\sqrt{2x+4}} == \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \frac{2}{\sqrt{2x+4}} = +\infty$

$$\lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = +\infty \textbf{ alors } f \textbf{ n'est pas dérivable en } -2$$

a) f est continue sur $[-2;+\infty[$ et elle n'est pas dérivable en -2 et en 0. Alors f est dérivable sur $]-2;0[\cup]0;+\infty[$.

$b)\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x^2+2x+2) = \lim_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty \quad et\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+2x+2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$

b) La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si $\forall\, x \in D_f$ et $\forall\,(2a-x) \in D_f$ on a : $f(x) = f(2a-x)$

$$f(2-x) = -(2-x)^2 + 2(2-x) + 2 = -(4-4x+x^2) + 4 - 2x + 2 = -x^2+2x+2 = f(x)$$

$\mathrm{f(x) = f(2-x)}$ alors la droite d'équation $\mathrm{x} = 1$ est un axe de symétrie à $(\mathcal{C}_\mathrm{f})$.

2.a) $\forall\, x \in\ ]-2;0[\ f'(x) = \left(\sqrt{2x+4}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$ Alors $\forall\, x \in\ ]-2;0[\ f'(x) > 0$

$\forall\, x \in\ ]0;+\infty[,\ f'(x) = (-x^2+2x+2)' = -2x+2 = -2(x-1)$

Alors $\forall\, x \in\ ]0;1[,\ f'(x) > 0$ et $\forall\, x \in\ ]1;+\infty[,\ f'(x) < 0$

D'où le signe de $f'(x)$ est celui consigné dans le tableau

b) Tableau de variation de f

x	-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	2	↗	3	↘	$-\infty$

<u>**PARTIE B**</u>

1.a) $\forall\, x \in\ ]1;+\infty[$, g est continue et strictement décroissante ; alors g est une bijection de $]1;+\infty[$ vers $K =]-\infty;3[$

b) $\forall\, x \in\ ]1;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante ; alors f est une bijection de $]1;+\infty[$ vers $K =]-\infty;3[$ or $0 \in\ ]-\infty;3[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

Vérifions que $2 < \alpha < 3$

$f(2) = -2^2 + 2\times 2 + 2 = 2$ et $f(3) = -3^2 + 2\times 3 + 2 = -1$

$f(2) = 2\ \ et\ \ f(3) = -1$; $f(2)\ \ et\ \ f(3)$ sont de signes contraires d'où : $2 < \alpha < 3$

c) Pour donner un encadrement de α, on fait un tableau de valeurs :

x	2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
$f(x)$	2	1,31	1,04	0,75	0,44	0,11	-0,24	-0,61	-1

D'après le tableau $f(2,7)et\ f(2,8)$ sont de signes contraires. On en conclut que $2,7 < \alpha < 2,8$

De même :

x	2,7	2,73	2,74	2,75	2,76	2,77	2,78	2,79	2,8
$f(x)$	0,11	0,0071	-0,0276	-0,0625	-0,0976	-0,1329	-0,1684	-0,2041	-0,24

D'après le tableau $f(2,73)et\ f(2,73)$ sont de signes contraires. On en conclut que $2,73 < \alpha < 2,74$

d) Tableau de variation de g^{-1}

x	$-\infty$		3
$(g^{-1})'(x)$		$-$	
$(g^{-1})(x)$	$+\infty$	↘	1

e) D'après la question 1.a) de cette partie g est une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]-\infty;3[$. Alors g^{-1} bijection réciproque de g est aussi une bijection de $]-\infty;3[$ vers $]1;+\infty[$

Pour déterminer g^{-1}, on résoud l'équation : $g(x) = b\ \ avec\ b \in\ ]-\infty;3[$

$g(x) = b \iff -x^2+2x+2 = b \iff -x^2+2x+2-b = 0$; le discriminant de cette équation est : $\Delta = 4(3-b)$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{3-b}}{-2} = 1+\sqrt{3-b}$; $\qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{3-b}}{-2} = 1-\sqrt{3-b}$

Seul $x_1 = 1+\sqrt{3-b} \in\ ]1;+\infty[\ lorsque\ b \in\ ]-\infty;3[$

On conclut que : pour tout $x \in\ ]-\infty;3]$, $g^{-1}(x) = 1+\sqrt{3-x}$

f) En utilisant l'expression explicite de g^{-1}, $(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$ et $(g^{-1})'(-1) = \frac{-1}{2\sqrt{3+1}} = -\frac{1}{4}$

En utilisant le nombre dérivé de la réciproque d'une fonction, on a : $(g^{-1})'(-1) = \frac{1}{g'[g^{-1}(-1)]} = \frac{1}{g'(3)} = -\frac{1}{4}$

CHAPITRE III : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Le mathématicien écossais **John Napier-ou Neper-(1550-1617**) inventa le mot et le concept de **logarithmes** en **1614** dans sa description de la stupéfiante règle des logarithmes. Son but était de simplifier le calcul d'un produit en le ramenant à celui d'une somme.

La fonction logarithme népérien est une fonction fantastique qui permet de transformer un produit en une somme et une division en une soustraction .

Pour vous montrer le pouvoir du logarithme, lisez cette toute petite histoire :

« Un homme de **60 ans** se promenait dans la rue et aperçoit une jeune fille qui n'avait guère **25 ans**. Elle est magnifique. Malgré lui son cœur chavire. Il décide de l'approcher pour lui déclarer sa flamme. La jeune fille est touchée, mais elle ne peut donner une suite à une si prompt rencontre.

Monsieur c'est avec un grand plaisir que j'eusse accepté de vous voir, mais vous êtes un homme mur dont l'expérience fait de moi une petite fille.

Mademoiselle, ignorez vous donc que l'expérience ne se mesure pas par l'âge mais par le logarithme népérien de celui-ci ? Regardez moi j'ai une expérience de **ln(60)=4,1** et vous de **3,2**…nous sommes en réalité plus proche que vous ne le pensiez.

Vous me troublez, mais l'expérience n'attend t elle pas le nombre des années ?

En effet, au cours du temps, l'expérience ne cesse de s'accroitre. Mais comme le logarithme népérien elle croit de moins en moins vite. Croyez moi, quelque soit votre âge, vous apprendrez moins dans la décennie à venir que celle écoulée.

La jeune fille étonnée suivit le vieil homme dans un parc ou ils discutèrent du secret des nombres…mais au bout de quelques heures, il du la quitter car son épouse s'impatientait et que comme la fonction exponentielle, la colère d'une femme ne cesse d'augmenter au cours du temps.

FICHE DE COURS

III-1) Définition et propriétés

III-1-1) Définition

La fonction logarithme népérien, notéeln, est la primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$, qui s'annule en 1.

III-1-2) Conséquences

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$
- $ln1 = 0$
- $\forall\ x\ \in]0;+\infty[,\ (lnx)' = \frac{1}{x}$
- La fonction ln est strictement croissante sur$]0;+\infty[$

$$\boldsymbol{x = y \Leftrightarrow lnx = lny}$$
$$\boldsymbol{x} < y \Leftrightarrow lnx < lny$$

En particulier

$\forall\ \boldsymbol{x}\ \in]\boldsymbol{0};+\infty[,\ \boldsymbol{x} < 1 \Leftrightarrow lnx < 0$

$$\boldsymbol{x} > 1 \Leftrightarrow lnx > 0$$

III-1-3) Propriétés :

Pour tout nombre réel a et b strictement positifs et pour tout nombre rationnel r, on a :

(1) $\boldsymbol{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$ **(2)** $\boldsymbol{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$ **(3)** $\boldsymbol{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$

(4) $\boldsymbol{\ln a^r = r \ln a}$ **(5)** $\boldsymbol{\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a}$ **(6)** $\boldsymbol{\ln \sqrt[r]{a} = \frac{1}{r}\ln a}$

III-1-4) Le nombre e

Il existe un nombre réel noté e tel que $\mathbf{\ln}\ \boldsymbol{e} = \mathbf{1}$; $\boldsymbol{e}$ est appelé base du logarithme népérien.

A l'aide d'une calculatrice, on obtient une valeur approchée de e :$\boldsymbol{e \approx 2,718281828456}$

Conséquences

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$; $\boldsymbol{lne^{x} = x}$

III-1-5 Les limites de référence

$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$; $\lim_{x\to 0} xlnx = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$;

$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x.}{x-1} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

III-1-6) Étude et représentation graphique de la fonction $\boldsymbol{ln}$

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto lnx$

f est définie sur $]\mathbf{0}; +\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

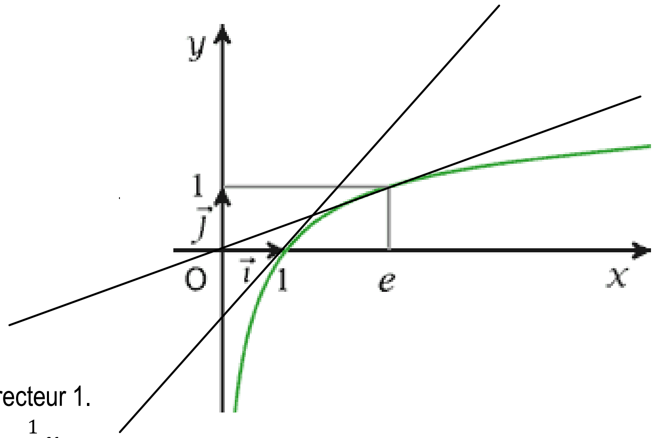
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; on dit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction (OI)

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f est continue et strictement croissante sur $]\mathbf{0}; +\infty[$

Tableau de variation **courbe représentative**

x	0	1	e	$+\infty$
$(ln)'(x)$	‖	+		
$\ln x$	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$



La tangente à$(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1a pour coefficient directeur 1.

la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e a pour équation : $y = \frac{1}{e}x$.

III-2) Fonction du type : $\boldsymbol{x \longmapsto lnou(x)}$

III-2-1) ensemble de définition des fonctions $\boldsymbol{x \longmapsto ln[u(x)]}$ et $\boldsymbol{x \longmapsto ln|u(x)|}$

a) **Fonction $\boldsymbol{x \longmapsto ln[u(x)]}$**

Condition d'existence : $\boldsymbol{x \in D_u}$ **et** $\boldsymbol{u(x)} > 0$

b) **Fonction $\boldsymbol{x \longmapsto ln|u(x)|}$**

Condition d'existence : $\boldsymbol{x \in D_u}$ **et** $\boldsymbol{u(x) \neq 0}$

III-2-2) Dérivée de la fonction $\boldsymbol{lnou}$

Soit u une fonction définie sur un intervalle$I$.

Si u est strictement positive et dérivable sur $\boldsymbol{I}$, alors $\boldsymbol{lnou}$ est dérivable sur I et $(\boldsymbol{lnou})' = \frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$

III-2-3) Primitive de $\frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que $\forall\, x \in u, u(x) \neq 0$

- La fonction $\frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$ admet pour primitive sur I la fonction $\boldsymbol{ln \circ |u| + c, c} \in \mathbb{R}$.
- La fonction $\frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$ admet pour primitive sur I la fonction $\boldsymbol{ln \circ u + c, c} \in \mathbb{R}$ sur tout intervalle contenu dans I sur lequel u est strictement positive.
- La fonction $\frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$ admet pour primitive sur I la fonction $\boldsymbol{ln \circ (-u) + c, c} \in \mathbb{R}$ sur tout intervalle contenu dans I sur lequel u est strictement négative.

III-3) RESOLUTION D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

Méthode
Pour résoudre une équation (ou une inéquation) comportant des logarithmes on peut utiliser le procédé suivant :

- Déterminer les contraintes sur l'inconnue
- Se ramener à une ou plusieurs égalités de la forme : $\ln a = \ln b$ $(ou\ \ln a > \ln b)$.
- Conclure

III -4) LOGARITHME DECIMAL

III-4-1) Définition

On appelle fonction logarithme décimal ou logarithme de base 10, la fonction notée log et définie sur $]\mathbf{0}; +\infty[$ **par**
$logx = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \times lnx$

Remarque :
$log10 = \frac{ln10}{ln10} = 1$
$log(e) = \frac{lne}{ln10} = \frac{1}{ln10}$
$log(1) = \frac{ln1}{ln10} = 0$
$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[, [\boldsymbol{log}(\boldsymbol{x})]' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{xln10}}$

III-4-2) Propriétés

La fonction logarithme décimal, a les mêmes propriétés que la fonction logarithme népérien.

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

Calculer $A = \ln\frac{1}{e}$; $B = \ln\sqrt{e}$;$C = \ln e\sqrt{e}$;$D = \ln\frac{\sqrt{e}}{e}$; $E = ln\sqrt[3]{e}$;

Simplifier : $F = \ln e^3 - \ln e^2$; $G = 5\ln\frac{1}{e} + 4\ln e\sqrt{e}$; $H = \ln(e^2 + e) - \ln(e^2 + 2e + 1)$

Exercice 2

Simplifier les sommes suivantes :

A= $\ln(\sqrt{e} + 1) + \ln(\sqrt{e} - 1)$; $B = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$;$C = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;

$D = \ln(2) + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) + \ln\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$.

Exercice 3

Préciser l'ensemble de définition des fonctions suivantes:

a) $f(x) = \ln(3 - x)$; $b)\ g(x) = \ln(x^2 + 1)$; $c)\ h(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-2}$; $d)\ k(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$;

Exercice 4

Calculer

$\lim_{x\to 0} x\ln x^3$; $\lim_{x\to+\infty}[x\ln x - (\ln x)^2]$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx^{10}}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x+1}$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 2}{2\ln x + 1}$; $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$.

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x}$ $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2-x+1)}{x-1}$; $\lim_{x\to e} \frac{xlnx - x}{x-e}$

Exercice 5

Soit f une fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x]\ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Étudier la continuité de f en 0.

b) f est elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 6

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{3}{2}x + 1$ définie sur $]0; +\infty[$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

a) Montrer que la droite (Δ) d'équation : $y = -\frac{3}{2}x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

b) Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ).

Exercice 7

Pour chaque fonction, calculer sa dérivée

$f_1(x) = \ln(4 - x^2)$ sur $]-2; 2[$; $f_2(x) = \frac{1}{1+lnx}$ sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$;

$f_3(x) = \ln(x - 1) - \ln(x - 2)$ sur $]2; +\infty[$; $f_4(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x$ sur $]-1; +\infty[$;

$f_5(x) = \frac{lnx}{x}$ sur $]0; +\infty[$; $f_6(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 3$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 8

Déterminer une primitive sur K des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+3}$ $K = \mathbb{R}$; $g(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1}$ $K = \mathbb{R}$; $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$ K=$]1; +\infty[$

$i(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$; $K =]0; +\infty[$, e) $j(x) = \frac{1}{x\ln x}$; $K =]1; +\infty[$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $(x - 2)\ln(x - 2) = 0$ b) $\ln(x^2 - x - 1) = 0$

c) $\ln(x + 3) + \ln(x + 5) = \ln 15$ d) $\ln(2x + 8) - \ln(3x + 2) = \ln(x + 1)$

e) $\ln^2 x - 6\ln x + 5 = 0$ f) $2\ln^3(x + 1) - 9\ln^2(x + 1) - 2\ln(x + 1) + 9 = 0$

g) $\ln^3 x + 2\ln^2 x + \ln x + 2 = 0$ h) $\ln(2x - e) > 1$; i) $\ln(2 - 3x) \geq 0$;

j) $\ln(x^2 - 4) \leq \ln(x + 2)$ k) $\ln^2 x + 2\ln x - 15 \leq 0$

Exercice 10

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ le système (S): $\begin{cases} xy = e^{-3} \\ lnx + lny^2 = -1 \end{cases}$

Problème I

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$par $g(x) = x^2 + 4 - 8\ln x$

1) Calculer $\lim_{x\to 0>} g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

2) Étudier le sens de variation de g, en déduire son tableau de variation.

3) Donner le signe de g sur $]0;+\infty[$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)\ln x$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J) unité graphique$1cm$

1) Calculer$f'(x)$. Montrer que pour tout $x \epsilon\,]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

2.a) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le dernier résultat.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4)Déterminer une équation de la tangente(T) au point d'abscisse 1.

5) Tracer (T) et $(\mathcal{C})$

PROBLEME II

Partie A

Dans cette partie on se propose d'étudier le signe de la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$par $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$

1) Etudier le sens de variation de g (on ne cherchera pas à calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition).

2-a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\propto \epsilon\,]1;2[$

b) Donner un encadrement de $\propto$ d'amplitude 10^{-1} ;

3) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$par $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$ et on note $(\mathcal{C})$sa courbe représentative dans un repère (O, I, J) (unités : 2 cm sur (OI) ; 4 cm sur (OJ).

1) Déterminer les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

2) Calculer $f'(x)$; justifier que pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $(2x+1)g(x)$.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que $f(\propto) = \frac{2}{\propto(2\propto+1)}$

5) Préciser les coordonnées de A point d'intersection de $(\mathcal{C})$avec l'axe des abscisses.

Écrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$au point d'abscisse 1.

6)Représenter (T) et $(\mathcal{C})$

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

Exercice

Soit f la fonction définie par :$f(x) = \ln(x+1) - \ln(3-x)$

1-a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$

c) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2-a) Démontrer que $(\mathcal{C})$ coupe l'axe (OI)en un seul point A dont on déterminera les coordonnées.

b) Démontrer que le point B $(0;1)$est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

c) Donner une équation de la tangente (T) à$(\mathcal{C})$ en B.

3) Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$de f.

4) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dont on précisera un encadrement à 10^{-1}près ;

PROBLEMES DE SYNTHESE

PROBLEME I

Le repère (O,I,J) est orthonormé

1) Soit la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty]$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$

a) Calculer les limites de g en 0 et en +∞.

b) Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que l'équation $x \epsilon\ ]0;+\infty]$, $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ vérifiant $1{,}31 <\propto< 1{,}32$

d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x strictement positif.

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty]$, par :

$f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1 - \ln x)$.

a) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c) En utilisant la question 1)c), montrer que $f(\propto) = \frac{2\propto^2-1}{\propto}$donner une valeur approché de $f(\propto)$ à 0,1 près.

3) Soit (C) la courbe représentative de f.

a) Montrer que la droite(D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (Cf)

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection P de (D) avec (Cf)

4) Construire (Cf) après avoir tracé (D)

PROBLEME II

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$par : $f(x) = x + 1 + \frac{x+\ln x}{x^2}$

(C_f)désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O,I,J)(Unité graphique 2 cm).

PARTIE A (Etude d'une fonction auxiliaire).

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$par :

$g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$.

1)-Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$

2)-On considère le polynôme $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

a)-Montrer que $P(x)$ peut se mettre sous la forme $P(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$.

b)-Étudier le signe de $P(x)$.

3)-Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

4)-Démontrer que pour toutes les valeurs de x strictement positives : $g(x) > 0$.

PARTIE B (Etude de la fonction *f*).

1)-Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2)-Démontrer que la droite(Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à(C_f) en $+\infty$.

3)-Calculer $f'(x)$et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

4)-Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5)-Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\propto$ et que $\propto \in\ ]0{,}46;0{,}47[$.

6)-Déterminer une équation de la tangente(T) à (C_f) au point $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

7)-Tracer (C_f).

PARTIE C

Soit la fonction $h : x \longmapsto x + \ln x$

Étudier la fonction h et en déduire que (Δ) coupe (C_h).en un point unique B dont on déterminera l'abscisse β à 10^{-2} près.

PROBLEME III

Partie A

La courbe (Γ)donnée en annexe représente une fonction g définie sur $[0;+\infty[$

La droite (AB)est tangente à la courbe (Γ) en A.

On donne $A(1;2)$; $B(0\,;2)$; C(e ; 1-e²).

1)a) Établir une équation de la droite (AB).

b) Par une lecture graphique donner les valeurs de $g(1)$; $g(\,e\,)$ et $g'(1)$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

2) On suppose que $g(x)$ est de la forme $\begin{cases} g(x) = a + bx^2 + cx^2 \ln x \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 1. \end{cases}$

où a, b et c sont trois nombres réels.

a) Calculer $g'(x)$ en fonction de b et c.

b) A l'aide des résultats précédents déterminer les réels a, b et c.

c) On suppose que a =1 ; b =1 et c = -2.

Justifier qu'il existe un unique réel $\propto$ dans $[1;+\infty[$ tel que $g(\propto) = 0$.

En déduire que $\ln \propto = \frac{1+\propto^2}{2\propto^2}$ et vérifier que 1,89< ∝< 1,90

c) Déduire de ce qui précède le signe de g(x) sur $[0;\ +\infty[$.

Partie B.

On considère la fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = 2 + \frac{\ln x^2}{1+x^2}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1) a) Justifier que $D_f = IR^*$.

b) Démontrer que f est une fonction paire puis donner une interprétation graphique.

2) a) justifier que la droite d'équation y = 2 est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

b) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) sur $]0;+\infty[$

3) Calculer la limite de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat

4) a)Justifier que $f(\propto) = 2+\frac{1}{\propto^2}$

b) Déterminer à partir de la question 2) de la partie A un encadrement de $f(\propto)$ d'amplitude 2.10^{-2}.

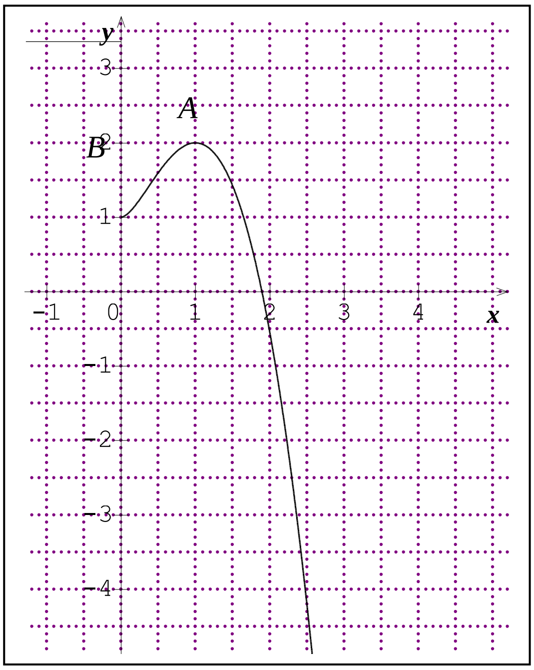
5) a) Démontrer que $\forall\, x \in\,]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2g(x)}{x(1+x^2)^2}$.

b) En déduire le signe de $f'(x)$sur $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variation de f.

6) Déterminer une équation de la tangente (T)au point d'abscisse 1.

Tracer (T) et construire $(\mathcal{C}_f)$. On prendra $f(\propto) = 2{,}3$.

ANNEXE



PROBLEMEIV

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J) (unité :2cm).

<u>PARTIE A</u> : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$.

1- a) Calculer la limite de g en $+\infty$

b) Démontrer que : $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $g'(x)=\frac{2x(x+1)(1-x)}{(x^2+1)^2}$.

c) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation

2- a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et que $1{,}98<\alpha<1{,}99$.

3- b) Justifier que $\forall\, x \in]0;\alpha[, g(x)>0$ et $\forall\, x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x)<0$.

Partie B : Etude de la fonction f.

1- Montrer que la fonction f impaire.

2- a) Justifier que $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}=1$ et en déduire que f est dérivable en 0.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3- a) Pour tout x de $]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

b) En déduire le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$,

c) Montrer que $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha+\frac{1}{\alpha}}$ et donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2}près.

d) En utilisant les propriétés de la parité de f, dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4- a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point O.

b) Construire avec soin la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie C : Etude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$ et (Γ) sa courbe dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

3- Montrer que h est une bijection de $[-\alpha;\alpha]$ sur un intervalle K à préciser.

4- Soit h^{-1} la réciproque de h et (Γ') sa représentation graphique.

a) Déterminer le plus petit intervalle sur lequel h^{-1} est dérivable.

b) Calculer $(h^{-1})'(0)$ et interpréter le résultat obtenu.

5- a) Dresser le tableau de variation de h^{-1}

c) Construire dans le même repère que $(\mathcal{C})$ la courbe (Γ'). Justifier votre construction.

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1

Calculons :

A=$ln\frac{1}{e} = -lne = -1$; $B = ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}lne = \frac{1}{2}$; $C = \ln(e\sqrt{e}) = lne + ln\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

$D = ln\frac{\sqrt{e}}{e} = ln\sqrt{e} - lne = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$; $E = ln\sqrt[3]{e} = \frac{1}{3}lne = \frac{1}{3}$

Simplifions :

$F = \ln e^3 - \ln e^2 = 3lne - 2lne = 3 - 2 = 1$; $G = 5\ln\frac{1}{e} + 4\ln e\sqrt{e} = 5(-lne) + 4(lne + ln\sqrt{e}) = -5 + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

$H = \ln(e^2 + e) - \ln(e^2 + 2e + 1) = lne(e+1) - ln(e+1)^2 = lne + \ln(e+1) - 2\ln(e+1) = 1 - \ln(e+1)$

Exercice 2

A= $\ln(\sqrt{e} + 1) + \ln(\sqrt{e} - 1) = \ln(\sqrt{e} + 1)(\sqrt{e} - 1) = \ln\left(\sqrt{e}^2 - 1\right) = \ln(e - 1)$;

$B = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) = ln(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = ln\left(2^2 - \sqrt{3}^2\right) = ln(4 - 3) = ln1 = 0$;

$C = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \ln\left(\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{4}\right) = ln\frac{\sqrt{5}^2-1}{4} = ln\frac{4}{4} = ln1 = 0$;

$D = \ln(2) + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) + \ln\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) = ln2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$=

$ln2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + ln\left(2^2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}^2\right)$=$ln2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 - \sqrt{2})$=$ln2 + ln(4 - 2) =$

$ln2 + ln2 = 2ln2.$

Exercice 3

a) f *est définie si et seulement si* $3 - x > 0$ *soit* $x < 3$: $D_f =]-\infty; 3[$

b) *De même pour g: il faut et il suffit que* $x^2 + 1 > 0$ *soit* $D_g = \mathbb{R}$.

c) *De même pour g: il faut et il suffit que* $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$ *soit* $D_h =]1; 2[\cup]2; +\infty[$

d) k *est définie si et seulement si* $\frac{x+2}{x+1} > 0$ *soit* $D_k =]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$

Exercice 4

$\lim_{x\to0} x\ln x^3 = \lim_{x\to0} x(3lnx) = \lim_{x\to0} 3(xlnx) = 0$ *car* $\lim_{x\to0} xlnx = 0$;

$\lim_{x\to+\infty}[x\ln x - (\ln x)^2] =?$ **On lève l'indétermination « $\infty - \infty$» en factorisant, au choix ; par** $xlnx$ *ou par* $(lnx)^2$.

$\lim_{x\to+\infty}[x\ln x - (\ln x)^2]$=$\lim_{x\to+\infty} xlnx\left[1 - \frac{lnx}{x}\right] = +\infty$ *car le crochet tend vers* 1

$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx^{10}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{10lnx}{x} = \lim_{x\to+\infty} 10\frac{lnx}{x} = 0$ *car* $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = 0$;

$$-\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}lnx = +\infty \; car \; \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = 1 \; et \; \lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-2}{2\ln x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{lnx(1-\frac{2}{lnx})}{lnx(2+\frac{1}{lnx})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\frac{2}{lnx})}{(2+\frac{1}{lnx})} = \frac{1}{2}$ *car* $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{lnx}$=0

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$= ? **posons** $X = x^2$ *lorsque* x *tend* 0; X *tend vers* 0alors

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$=$\lim_{X\to0}\frac{\ln(X+1)}{X} = 1$ *car limite de références.*

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2x} =? \; posons \; X = 3x \; alors \; x = \frac{X}{3}; \; lorsque \; x \; tend \; vers \; 0, X \; tend \; vers \; 0 \; alors$$

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2x} = \lim_{X\to0}\frac{3}{2}\frac{\ln(X+1)}{X} = \frac{3}{2}$ *car* $\frac{\ln(X+1)}{X} = 1.$

$\lim_{x\to e}\frac{xlnx-x}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{x(lnx-1)}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{x(lnx-lne)}{x-e} = \lim_{x\to e} x \times \lim_{x\to e}\frac{lnx-1}{x-e} = e \times (lne)' = e \times \frac{1}{e} = 1.$

Exercice 5

a) **Étudions la continuité de f en 0**

$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} x[\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x\to0}[x\ln(x+1) - x\ln x] = 0$ car

$\lim_{x\to0}\ln(x+1) = 0 \; \lim_{x\to0} xlnx = 0$

$\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = 0$ *alors f est continue en* 0.

b) **Dérivabilité de f en 0.**

Il s'agit de déterminer le nombre dérivé en calculant $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$=$\lim_{x\to0}\frac{x[\ln(x+1)-\ln x]}{x} =$

$\lim_{x\to 0}(\ln(x+1)-\ln x)=+\infty$ car $\lim_{x\to 0} ln(x+1)=ln1=0$ et $\lim_{x\to 0} lnx=-\infty$ Donc la fonction f n'est pas dérivable en 0. A l'origine, la courbe représentative de f admet une tangente « verticale ».

Exercice 6

a) La droite (Δ) d'équation : $y=-\frac{3}{2}x+1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$si et seulement si $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\left(-\frac{3}{2}x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x})$=0 car $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$

Donc la droite (Δ) d'équation : $y=-\frac{3}{2}x+1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

b) Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ) revient à étudier le signe de $f(x)-y$.

$f(x)-y=\frac{2lnx-1}{2x}$ or sur $]0;+\infty[2x>0$ alors le signe de $f(x)-y$ dépend de $2lnx-1$.

$\forall x\in\left]0;+e^{\frac{1}{2}}\right[f(x)-y<0$ alors $(\mathcal{C})$est en dessous de (Δ) et$\forall x\in\left]e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[f(x)-y>0$ alors $(\mathcal{C})$est au dessus de (Δ)

Exercice 7

La dérivée d'une fonction composée est donnée par $(lnU)'=\frac{U'}{U}$

a) Si $U(x)=4-x^2$ alors $U'(x)=-2x$ Donc $f_1{}'(x)=\frac{-2x}{4-x^2}$.

b) La fonction $f_2$est sous la forme $\frac{1}{V}$ avec $V(x)=1+lnx$. Donc $V'(x)=\frac{1}{x}$ $f_2'(x)=-\frac{V'}{V^2}$

On obtient alors : $f_2'(x)=-\frac{1}{x(1+lnx)^2}$

c) $f'_3(x)=\frac{(x-1)'}{x-1}-\frac{(x-2)'}{x-2}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{(x-1)(x-2)}$.

d) f_4 comporte un produit de fonctions : alors ; $f'_4(x)=(x+1)'\ln(x+1)+(x+1)[\ln(x+1)]'-(x)'$

$f'_4(x)=1\times\ln(x+1)+(x+1)\times\frac{1}{x+1)}-1=ln(x+1)$.

e) La fonction $f_5$est sous la forme $\frac{U}{V}$ avec $U(x)=lnx$ et $V(x)=x$; Donc $f'_5(x)=\frac{x\times\frac{1}{x}-1\times lnx}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2}$

f) $f_6{}'(x)=[(\ln x)^2]'-2(\ln x)'+(3)'=2\times(lnx)'(lnx)-2\times\frac{1}{x}=\frac{2lnx-2}{x}=\frac{2(lnx-1)}{x}$

Exercice 8

Il convient de faire apparaître $\frac{U'}{U}$

a) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x+3}$ posons $U(x)=x^2-2x+3$ et $U'(x)=2x-2$ $alors$ $\frac{1}{2}U'(x)=x-1$ $Donc$ $f(x)=\frac{1}{2}\frac{U'}{U}$

D'où$F(x)=\frac{1}{2}ln|x^2-2x+3|+C_1;C_1\in\mathbb{R}$ comme

$x^2-2x+3>0$ sur $\mathbb{R}$ $(\Delta<0)$; on $peut$ $omettre$ la $valeur$ $absolue$: $F(x)=\frac{1}{2}ln(x^2-2x+3)+C_1;C_1\in\mathbb{R}$

b) $g(x)=\frac{4x+2}{x^2+x+1}$ posons : $U(x)=x^2+x+1$$et$ $U'(x)=2x+1$ $alors$ $2U'(x)=4x+2$ $Donc$ $g(x)=2\frac{U'}{U}$

D'où$G(x)=2ln|x^2+x+1|+C_2;C_2\in\mathbb{R}$ comme

$x^2+x+1>0$ sur $\mathbb{R}$ $(\Delta<0)$; on $peut$ $omettre$ la $valeur$ $absolue$: $G(x)=2ln(x^2+x+1)+C_2;C_2\in\mathbb{R}$

c) $h(x)=\frac{x}{1-x^2}$ posons : $U(x)=1-x^2$$et$ $U'(x)=-2x$ $alors$ $-\frac{1}{2}U'(x)=x$ $Donc$ $h(x)=-\frac{1}{2}\frac{U'}{U}$

D'où$H(x)=2ln|1-x^2|+C_3;C_3\in\mathbb{R}$ comme $1-x^2<0$ sur $]1;+\infty[$;: $H(x)=-\frac{1}{2}ln(x^2-1)+C_3;C_3\in\mathbb{R}$

d) En écrivant$i(x)=\frac{1}{x}(lnx)^2$ on reconnaît une expression du type $U'U^n$ qui a pour primitive $\frac{U^{n+1}}{n+1}$

On en déduitune primitive I : $I(x)=\frac{1}{3}(lnx)^3+C_4;C_4\in\mathbb{R}$

e) En exprimant$j$ sous la forme $j(x)=\frac{\frac{1}{x}}{lnx}$ on reconnaît$\frac{U'}{U}$. D'où $J(x)=ln|lnx|+C_5;C_5\in\mathbb{R}$

Exercice 9

a) <u>Contraintes sur l'inconnue</u> :$x-2>0\Leftrightarrow x>2$ $alors$ $x\in]2;+\infty[$

Pour tout $x\in]2;+\infty[,(x-2)\ln(x-2)=0\Leftrightarrow x-2=0$ ou $\ln(x-2)=0\Leftrightarrow x=2$$ou$ $\ln(x-2)=ln1$

Alors $x=2$ ou $x-2=1$ $\Leftrightarrow x=2$ ou $x=3$

L'ensemble des solutions de $(E)est$: $\{3\}$

b) <u>Contraintes sur l'inconnues :</u>$(x^2-x-1)>0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)>0$$alors$ $x\in\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$

$\forall x\in\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$, $\ln(x^2-x-1)=0\Leftrightarrow\ln(x^2-x-1)=ln1\Leftrightarrow x^2-x-2=0$ $alors$ $x=-1$ ou $x=2$

L'ensemble des solutions de (E) est: $\{-1;2\}$

c) <u>Contraintes sur l'inconnue</u> : $x+3>0$ et $x+5>0$ $\Leftrightarrow x>-3$ et $x>-5$ 0 $alors$ $x\in]-3;+\infty[$

$\forall x\in]-3;+\infty[$, $\ln(x+3)+\ln(x+5)=\ln 15\Leftrightarrow\ln(x+3)(x+5)=\ln 15\Leftrightarrow(x+3)(x+5)=15$ $alors$: $x(x+8)=0$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ ou $x=-8$ seul $0\in]-3;+\infty[$ alors l'ensemble des solutions de $(E)est$: $\{0\}$.

d) <u>Contraintes sur l'inconnue</u> :$2x+8>0, 3x+2>0$ et $x+1>0$ **alors** $x\in\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$

$\ln(2x+8)-\ln(3x+2)=\ln(x+1)\Leftrightarrow \ln(2x+8)=\ln(x+1)+\ln(3x+2)\Leftrightarrow(2x+8)=(x+1)(3x+2)$ **alors**: $(x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$ **ou** $x=-2$ seul $1\in\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ Donc l'ensemble des solutions de (E) **est**: $\{1\}$.

e) <u>Contraintes sur l'inconnue</u> : $x\in]0;+\infty[$

Soit x élément $]0;+\infty[$; posons : $X=\ln x$ alors $X^2-6X+5=0\Leftrightarrow(X-1)(X-5)=0\Leftrightarrow X=1$ ou $X=5$ alors $\ln x=1$ ou $\ln x=5\Leftrightarrow x=e$ ou $x=e^5$ Alors l'ensemble des solutions de (E) **est**: $\{e;e^5\}$

h). <u>Contraintes sur l'inconnue</u> :$2x-e>0\Leftrightarrow x>\frac{e}{2}$ **alors** $x\in\left]\frac{e}{2};+\infty\right[$

$\ln(2x-e)>1\Leftrightarrow \ln(2x-e)>\ln e\Leftrightarrow 2x-e>e\Leftrightarrow x>e$ Alors l'ensemble des solutions de (I) **est**: $]e;+\infty[$

i) <u>Contraintes sur l'inconnue</u> :$2-3x>0\Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$ **alors** $x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$

$\ln(2-3x)\geq 0\Leftrightarrow \ln(2-3)\geq \ln 1\Leftrightarrow 2-3x\geq 1\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{3}$ **Alors l'ensemble des solutions de** (I) **est**; $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$

k) <u>Contraintes sur l'inconnue</u> : $x\in]0;+\infty[$

Soit x élément $]0;+\infty[$; posons : $X=\ln x$ alors $X^2+2X-15\leq 0\Leftrightarrow(X+5)(X-3)\leq 0\Leftrightarrow -5\leq X\leq 3\Leftrightarrow -5\leq \ln x\leq 3\Leftrightarrow e^{-5}\leq x\leq e^3$ **alors l'ensemble des solutions de** (I) **est**; $]e^{-5};e^3[$

Exercice 10

Le système est défini si $x>0$ et $y\neq 0$. Comme $x=\frac{e^{-3}}{y}$, cela implique que $y>0$.

Donc : $\ln\left(\frac{e^{-3}}{y}\right)+\ln y^2=-1\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{-3}}{y}\times y^2\right)=-1\Leftrightarrow \ln(e^{-3}y)=-1\Leftrightarrow \ln e^{-3}+\ln y=-1\Leftrightarrow \ln y=2\Leftrightarrow y=e^2$ et $x=e^{-5}$

L'ensemble des couples solutions de (S) est : $\{(e^{-5};e^2)\}$

CORRECTION DES PROBLEMES

Problème I

PARTIE A

1) $\lim_{x\to 0>} g(x)=\lim_{x\to 0>}(x^2+4-8\ln x)=+\infty$ car $\lim_{x\to 0>}\ln x=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+4-8\ln x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(x+\frac{4}{x}-8\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty car;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0 et \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

2) $\forall x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=2x-8\times\frac{1}{x}=\frac{2x^2-8}{x}=\frac{2(x^2-4)}{x}=\frac{2(x-2)(x+2}{x}$.

$\forall x\in]0;+\infty[$, $\frac{2(x+2)}{x}>0$alors le signe de $g'(x)$ est celui de $x-2$

$\forall x\in]0;2[$, $g'(x)<0$ alors g est strictement décroissante

$\forall x\in]2;+\infty[$, $g'(x)>0$ alors g est strictement croissante.

On dresse ainsi le tableau de variation de g.

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$8-8\ln 8$	↗	$+\infty$

3) $\forall x\in]0;+\infty[$, g admet en 2 un minimum égal à $8-8\ln 2>0$ alors $\forall x\in]0;+\infty[$, $g(x)>0$

PARTIE B

1) f est du type UV avec $U(x)=1+\frac{4}{x^2}$ et $V(x)=\ln x$ alors on a :

$f'x)=(1+\frac{4}{x^2})'\ln x+(1+\frac{4}{x^2})(\ln x)'=4\times\frac{-2x}{x^4}\ln x+(1+\frac{4}{x^2})\frac{1}{x}=\frac{-8\ln x}{x^3}+\frac{x^2+4}{x^3}=\frac{x^2+4-8\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$

$\forall x\in]0;+\infty[$, $x^3>0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. **Or** $\forall x\in]0;+\infty[$, $g(x)>0$ Donc f est strictement croissante.

2) a) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\ln x=-\infty$ **car** $\lim_{x\to 0}\frac{4}{x^2}=+\infty$ **et** $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$; alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote « verticale » à $(\mathcal{C})$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\ln x=+\infty$ **car** $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0$ **et** $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\frac{\ln x}{x}=0$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0$ **et** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$; alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OI)en $+\infty$

3) Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	5	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

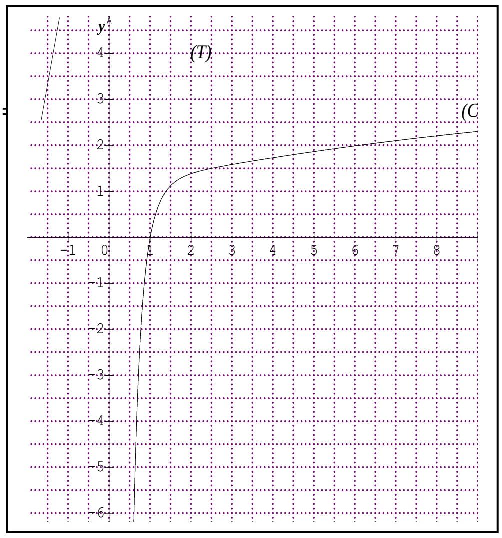
4) **Equation de la tangente au point d'abscisse 1**

$(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ **avec** $\boldsymbol{x_0 = 1}$;

$\boldsymbol{f'(1) = 5 \;\; et\, f(1)}$

Alors : $(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = 5x - 5}$

5) **Représentation graphique de** $\boldsymbol{f}$



Problème II

1) **Etudions le sens de variation de** $\boldsymbol{g}$.

Sur $]\boldsymbol{0}; +\infty[$ $\boldsymbol{g'(x) = (\frac{x+1}{2x+1} - \ln x)' = -\frac{1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x}}$. $\boldsymbol{g'(x)}$ **est strictement négatif sur** $]\boldsymbol{0}; +\infty[$ **car la somme deux nombres négatifs. Donc** $\boldsymbol{g}$ **est strictement décroissante sur** $]\boldsymbol{0}; +\infty[$

2 .a) la question incite à calculer $\boldsymbol{g(1)\ et\ g(2)}$ **puis à les faire figurer dans le tableau de variation de** $\boldsymbol{g}$**. Dès lors, l'application du théorème de la bijection devient très simple pour la résolution de** $\boldsymbol{g(x) = 0}$**.** $\boldsymbol{g(1) = \frac{2}{3}\ et\ g(2) = \frac{3}{5} - ln2 \approx -0,09}$

On dresse le tableau de variation de $\boldsymbol{g}$ **:**

x	0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖			$-$			
$g(x)$	‖	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-0,09$	$\searrow$	

Comme $\boldsymbol{g}$ **est strictement décroissante et continue sur** $]\boldsymbol{1}; \boldsymbol{2}[$ **et que** $\boldsymbol{g(1)g(2)} < 0$**, d'après le théorème sur la bijection, il existe un nombre réel** $\boldsymbol{\alpha}$ **unique élément de** $]\boldsymbol{1}; \boldsymbol{2}[$ **tel que** $\boldsymbol{g(\alpha) = 0}$**.**

d) **Pour donner un encadrement de** $\boldsymbol{\alpha}$**, on fait un tableau de valeurs : méthode du balayage**

$\boldsymbol{x}$	1	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$\boldsymbol{g(x)}$	0,67	0,38	0,30	0,22	O,15	0 ,08	0,02	-0,03	-0,09

On en conclut que $\boldsymbol{\alpha \in\,]1,8; 1,9[}$

3). D'après les questions précédentes, on a :

$\forall\, \boldsymbol{x} \in\,]\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\alpha}[; \boldsymbol{x} < \propto\ alors\ g(x) > g(\alpha)$ **car** $\boldsymbol{g}$ **est strictement décroissante. Or** $\boldsymbol{g(\alpha) = 0}$**. D'où** $\forall\, \boldsymbol{x} \in\,]\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\alpha}[, \boldsymbol{g(x)} > 0$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in\,]\boldsymbol{\alpha}, +\infty[; \boldsymbol{x} > \propto\ alors\ g(x) < g(\alpha)$ **car** $\boldsymbol{g}$ **est strictement décroissante. Or** $\boldsymbol{g(\alpha) = 0}$**. D'où** $\forall\, \boldsymbol{x} \in\,]\boldsymbol{\alpha}, +\infty[, \boldsymbol{g(x)} < 0$

En conclusion : $\forall\, \boldsymbol{x} \in\,]\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\alpha}[, \boldsymbol{g(x)} > 0$ **et** $\forall\, \boldsymbol{x} \in\,]\boldsymbol{\alpha}, +\infty[, \boldsymbol{g(x)} < 0$

PARTIE B

1) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2+x} \times 2lnx) = -\infty}$ **car** $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+x} = +\infty\ et\ \lim_{x\to 0} lnx = -\infty}$

$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty}$ **Alors la droite d'équation** $\boldsymbol{x = 0}$ **est une asymptote « verticale » à** $(\mathcal{C})$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2lnx}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **Alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote « horizontale » à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$**

2) $\forall\, x \in]0;+\infty[\; f'(x) = \frac{(x^2+x)\frac{2}{x} - 2(2x+1)lnx}{(x^2+x)^2} = \frac{2[x+1-(2x+1)lnx]}{(x^2+x)^2}$.

Sur $]0;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $x+1-(2x+1)lnx$. Comme il faut faire apparaître $g(x)$, il convient de factoriser par $(2x+1)$ soit : $x+1-(2x+1)lnx = (2x+1)\left[\frac{x+1}{2x+1} - lnx\right] = (2x+1)g(x)$.

Comme $2x+1 > 0$ sur $]0;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

3) **Tableau de variation de f**

x	0		$\propto$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\propto)$	$\searrow$	0

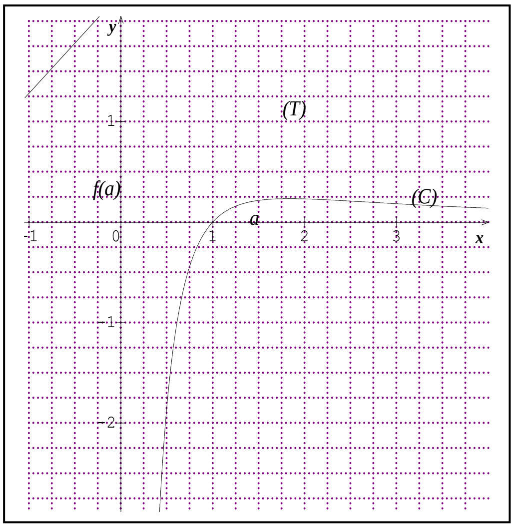
4) **Montrons que $f(\propto) = \frac{2}{\propto(2\propto+1)}$**

Pour calculer $f(\alpha)$, il faut utiliser les résultats de la partie A., à savoir la solution de $g(\alpha) = 0$. on obtient $ln\alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$

Donc $f(\alpha) = \frac{2\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}}{\alpha^2+\alpha} = \frac{2\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} = 2\frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \times \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

L'abscisse du point d'intercession A de $(\mathcal{C})$avec l'axe des abscisses est solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0;+\infty[$,
Donc le point $A(1;0)$).

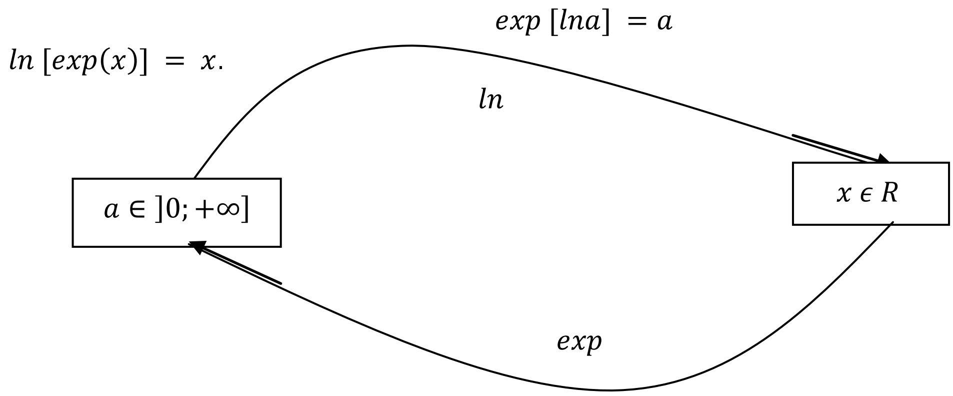
Comme $f'(1) = 1, f(1) = 0$, l'équation de la tangente $\mathcal{T}$en A s'écrit :$y = x - 1$



INTRODUCTION

Les ponts de lianes font partie du paysage ivoirien. La courbe dessinée par ces ouvrages, de même que celle engendrée par le câble téléphonique suspendu entre deux poteaux, est appelé « c**hainette** » c'est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes.
GALILÉE s'intéressa à cette courbe, qu'il pensait être une parabole. Ce n'est qu'en 1691 que **BERNOUILLI**, **HUYGENS**, et **LEIBNITZ** en déterminèrent une équation.
L'exponentielle est la seconde des deux fonctions introduites en terminale.
On la définit comme étant la réciproque du logarithme népérien.
Voici donc l'histoire de celle qui est la moitié de ln :
Au commencement était la fonction logarithme népérien.
Comme elle était une bijection de $]\mathbf{0};+\infty]$sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une réciproque. Ainsi naquit l'exponentielle.

- A la manière de deux rivaux, ln et exp s'annihilent. En effet :



FICHE DE COURS

IV-1) FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

IV-1-1)Définition et propriétés

a) Définition

La fonction : $x \longmapsto lnx$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Elle est donc bijective, on appelle fonction exponentielle népérienne, sa bijection réciproque ; on note $\boldsymbol{x \longmapsto exp\ x}$ ou$\boldsymbol{x \longmapsto e^x}$ **Conséquences**
a)La fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$

$$\boldsymbol{exp}: \mathbb{R} \to]\mathbf{0};+\infty[$$

b) La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$. $\forall\ \boldsymbol{x}\ \in \mathbb{R}, \boldsymbol{exp(\ x) > 0}$

c) $\forall\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$; $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}_+^*$; $\boldsymbol{e^a = b \Leftrightarrow a = lnb}$ **et** $\boldsymbol{lnb = a \Leftrightarrow b = e^a}$

d) $\boldsymbol{e^a = e^b \Leftrightarrow a = b}$ **et** $\boldsymbol{e^a < e^b \Leftrightarrow a <} b$

e) $\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^*$; $\boldsymbol{e^{lnx} = x}$ **et** $\forall\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{lne^y = y}$

f) La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,
On a: $\boldsymbol{(exp)'(x) = exp(x)}$

b) Propriétés

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

$\boldsymbol{e^{a+b} = e^a e^b}$; $\boldsymbol{e^{-a} = \frac{1}{e^a}}$; $\boldsymbol{e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}}$;$\boldsymbol{(e^a)^b = e^{ab} = \left(e^b\right)^a}$; $\boldsymbol{e^{ra} = (e^a)^r}$

IV-1-2) Equations et inéquations comportant exponentielle

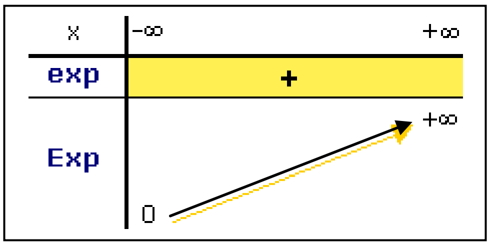
Méthode :
Pour résoudre une équation ou inéquation comportant des exponentielles, on peut :

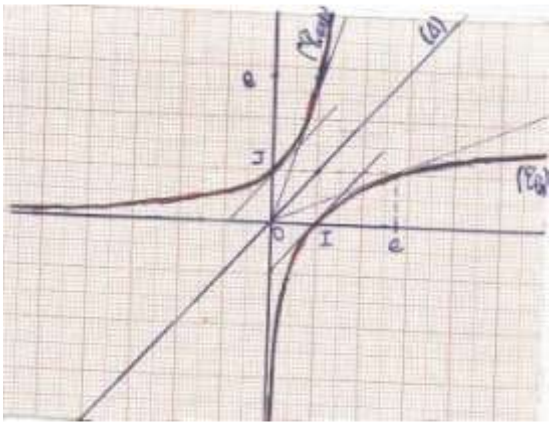
- Se ramener à une comparaison d'exponentielles
- Comparer le logarithme de deux nombres positifs

IV-I-3) Etude de la fonction exponentielle

Sens de variation

La fonction exponentielle varie dans le même sens que sa fonction réciproque, la fonction ln ; elle est donc strictement croissante de $\mathbb{R}$vers$]0;+\infty[$. On en déduit le tableau de variation ci-dessous.





Courbe représentative

La courbe de la fonction exponentielle est le symétrique de celle de la fonction logarithme népérien par rapport à la droite d'équation $y = x$.

IV-1-4) Les limites de références

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$;$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x\to-\infty}(xe^x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$.

IV-1-5)DERIVEES - PRIMITIVES

a) **Dérivées**

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$est dérivable sur I et$(e^u)' = u'e^u$

b)Primitives

Soit u une fonction dérivablesur un intervalle I.

La fonction $x \longmapsto u'e^{u(x)}$admet pour primitive sur I la fonction$x \longmapsto e^{u(x)} + c;\ x \in \mathbb{R}$

IV-2) Fonction exponentielle de base a (a> 0)

IV-2-1) Définition et propriétés

a) **Définition**

Soit a un nombre réel strictement positif.

On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction $\exp(x)_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

$$x \longmapsto a^x$$

Pour tout nombre réel x, on a $\exp(x)_a = a^x = e^{x\ln a}$

b) **Propriétés**

Propriété 1

Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel x, on a :

$\ln a^x = x\ln a$.

Propriété 2

Pour tout nombre réel a et b strictement positifs et pour tous nombres réels x et y, on a :

$(1) a^{x+y} = a^x a^y$; (2) $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$; (3) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$; (4) $(ab)^x = a^x b^x$; (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; (6) $(a^x)^y = a^{xy}$

IV-2-2)Etude de la fonction $f_a : x \longmapsto a^x$

Dans cette étude, $(\mathcal{C}_a)$ désigne la courbe représentative de la fonction f_a et a est différent de 1.
Ensemble de définition
On a : $D_{f_a} = \mathbb{R}$

<table>
<tr><th colspan="2">Dérivée et sens de variation</th></tr>
<tr><td colspan="2">On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x \ln a}$; donc la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f_a{}'$ telle que $f_a'(x) = (lna)e^{x \ln a} = a^x lna$
$f_a{}'$ est du signe de lna ; on distingue deux cas : $0 < a < 1$ et $a > 1$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{1^{er} cas}: \mathbf{0} < a < 1$
On a $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) < 0$; donc, f_a est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$</td><td>$\mathbf{2^{ème} cas}: \boldsymbol{a} > 1$
On a $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) > 0$; donc, f_a est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Etude aux bornes de l'ensemble de définition</th></tr>
<tr><td>$\mathbf{1^{er} cas}: \mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$
On a : $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$
La droite (OI) est asymptote à $(\mathcal{C}_a)$ en $+\infty$
On a : $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(lna \frac{e^{xlna}}{xlna} \right) = -\infty$$
$(\mathcal{C}_a)$ admet une branche parabolique de direction celle de (OJ)</td><td>$\mathbf{2^{ème} cas}: \boldsymbol{a} > 1$
On a : $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
La droite (OI) est asymptote à $(\mathcal{C}_a)$ en $-\infty$
On a : $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(lna \frac{e^{xlna}}{xlna} \right) = +\infty$$
$(\mathcal{C}_a)$ admet une branche parabolique de direction celle de (OJ)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Tableau de variation</th></tr>
<tr><td>$\mathbf{1^{er} cas}: \mathbf{0} < a < 1$</td><td>$\mathbf{2^{ème} cas}: \boldsymbol{a} > 1$</td></tr>
</table>

1er cas : $0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_a{}'(x)$				
$f_a(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	a ↘	0

2ème cas : $a > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_a{}'(x)$				
$f_a(x)$	$+\infty$ ↗	1 ↗	a ↗	0

IV-3) <u>FONCTIONS PUISSANCES D'EXPOSANT $\propto$</u>

<u>Définition</u>

Soit $\propto$ un nombre réel non nul
Pour tout nombre réel strictement positif x : $x^{\propto} = e^{\propto lnx}$
On appelle fonction puissance d'exposant $\propto$, la fonction : $x \to x^{\propto}$

<u>Fonction $\boldsymbol{u}^{\propto}(\propto \in \mathbb{R})$.</u>

<u>Propriété 1</u>

Soit $\propto$ un nombre réel et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle k.
La fonction $u^{\propto}$ est dérivable sur K et on a : $(u^{\propto})' = \propto u'u^{\propto-1}$

<u>Propriété 2</u>

Soit $\propto$ un nombre réel différent de -1, u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K. la fonction $u'u^{\propto}$ admet pour primitive sur K la fonction $\frac{u^{\propto+1}}{\propto+1}$

<u>CROISSANCE COMPAREE DE $\boldsymbol{lnx}$, $\boldsymbol{e^x}$, $\boldsymbol{x^{\propto}}$</u>

<u>Limites de références</u>

Soit $\propto$ un nombre réel strictement positif. On a :

(1) $\mathbf{lim}_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\propto}} = \mathbf{0}$; **(2)** $\mathbf{lim}_{x\to 0}\, x^{\propto} \ln x = \mathbf{0}$; $(\mathbf{3})\, \mathbf{lim}_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{\propto}} = +\infty$; $\mathbf{lim}_{x\to+\infty}\, x^{\propto} e^{-x} = \mathbf{0}$

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $e^{3x+1} = 7$; 2) $e^{x-3} = 1$; 3) $e^{2x-1} = 6$; 4) $e^{-x-4} - 6 = 0$; 5) $e^{x+3} + 2 = 1$; 6) $e^{x+3} + \frac{3}{2} = 2$;

7) $3e^{2x} - 5e^{x} + 2 = 0$; 8) $e^{3x+1} + \sqrt{e^{3x+1}} - 6 = 0$; 9) $e^{-3x-1} > 3$; 10) $e^{x-6} > 1$;

11) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 \geq 0$; 12) $e^{2x} + 3e^{x} + 4 < 0$.

Exercice 2

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 43x + 42$

1) Vérifier que 1 et -3 sont des racines de $P(x)$
2) a) Factoriser $P(x)$
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$
3) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{4x} + 7e^{3x} - 7e^{2x} - 43e^{x} + 42 = 0$

Exercice 3

Soit $f(x) = \frac{2e^x}{1-e^x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

Interpréter ces résultats en termes d'asymptote pour la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-2}{e^{3x}+1}$; $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x + 1)e^{-x}$; $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5-e^{-x}}{1+2e^{x}}\right)$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$; $\lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{e^x-1}$

Exercice 5

1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x+1)e^{-x}$; b) $g(x) = \frac{e^{2x}-2}{1-e^{2x}}$; c) $h(x) = \frac{x}{1+xe^x}$;

2) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2xe^{3x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{1-e^{-2x}}{2x+e^{-2x}}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 6

Soit $f(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{e^x+3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Déterminer a et b tels que pour tout x réel, $f(x) = ae^x + \frac{be^x}{e^x+3}$

b) Calculer la primitive de f qui s'annule en $x = 0$.

Exercice 7

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{1-e^x} \; pour \; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que la fonction f est continue en 0

b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - x - 4$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2) Étudier le comportement de f en $+\infty$.

3-a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4-a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 4$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

c) Construire la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$.

PROBLEMES DE SYNTHESE

Problème I

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x-1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Démontrer que la courbe (Γ) d'équation $y = 1 + e^x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

Préciser la position relative de (Γ) et $(\mathcal{C}_f)$.

3) Étudier les variations de f et tracer (Γ) et $(\mathcal{C}_f)$.

Problème II

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 4cm.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x^2e^x$

1) Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Déterminer $g'(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ et montrer que $g'(x) = -x(2 + x)e^x$.

3) Déterminer le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.

4) Démontrer que $\forall\, x \in\ ]0; +\infty]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\propto$ telle que

$$0{,}70 < \propto < 0{,}71.$$

5) en déduire que $\forall\, x \in\ ]-\infty; \propto[$, $g(x) > 0$ et $\forall\, x \in\ ]\propto; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{1+xe^x}$ on désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

1) On considère la fonction h définie par : $h(x) = 1 + xe^x$.

Étudier les variations de h et montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. interpréter graphiquement le dernier résultat.

3)-a) On suppose que f est dérivable et on note f' sa dérivée.

Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{g(x)}{(1+xe^x)^2}$

b) En déduire le signe de f', puis dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.

5) Prouver que $f(\propto) = \frac{\propto^2}{\propto+1}$ et encadrer $f(\propto)$ par deux nombres décimaux consécutifsd'ordre 2.

6) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Partie C

soit k la restriction de f à $[\propto; +\infty[$.

1-a) justifier que k est une bijection.

b) Dresser le tableau de variation de la réciproque k^{-1} .

2-a) Prouver que k^{-1} n'est pas dérivable en $\frac{\propto^2}{\propto+1}$

b) Calculer $k(1)$ et prouver que k^{-1} est dérivable en $\frac{1}{1+e}$

c) Tracer $(\mathcal{C}_{k^{-1}})$.

Problème III

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = (2x + 4)e^{-\frac{x}{2}} - x$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f.

Partie A *Etude d'une fonction auxiliaire*

Soit h la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$

1) Étudier le sens de variation de h.

2) Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans$\mathbb{R}$ une solution unique $\propto$ tel que$-0,71 < \propto < -0,70$.

En déduire que : $\forall x \in]-\infty;\propto[, h(x) < 0$; $\forall x \in]\propto;+\infty[, h(x) > 0$.

Partie B*Etude de la fonction f*

Pour tout nombre réel x, $f(x) = (2x+4)e^{-\frac{x}{2}} - x$.

1-a) Démontrer que $f(\propto) = -2-\propto-\frac{4}{\propto}$

b) En déduire un encadrement de $f(\propto)$d'amplitude 0,1.

2-a) Pour tout réel x calculer $f'(x)$ et démontrer que $f'(x) = -h'(x)e^{-\frac{x}{2}}$

b) En déduire les variations de f.

3-a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement ces résultats

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Démontrer que la droite (Δ)d'équation $y = -x$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$en $+\infty$.

4-a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Construire la droite (Δ)et la courbe $(\mathcal{C}_f)$dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

5-a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout réel x :

$I(x) = \int_0^x (2t+4)\, e^{-\frac{t}{2}} dt.$

b) En déduire en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par$(\mathcal{C}_f)$, la droite (Δ), la droite (OI) et la droite d'équation $x = 2$.

Problème IV

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé(O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

On considère la fonction numérique f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-\frac{1}{2})e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$

On note$(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f.

1- a) Calculer la limite de f en $-\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat

b) Démontrer que pour tout réel non nul $f(x) = xe^{2x}(1 - \frac{1}{2x} - \frac{4}{e^x} + \frac{4}{xe^x} - \frac{2}{xe^{2x}})$;

c) Calculer$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$puis interpréter graphiquement ces résultats

2- a) Démontrer que $f'(x) = 2xe^x(e^x - 1)$

b) Dresser le tableau de variation de f

3-a) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est $\propto$

b) Montrer que : $-1,7 < \propto < -1,6$.

4.a) Tracer avec soin la courbe$(\mathcal{C})$. On prendra ln2$\approx 0,7$

b) Utiliser $(\mathcal{C})$pour donner, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solution de l'équation : $(E_k): x\epsilon\mathbb{R}$; $f(x) = k$.

5) Soit la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = (\frac{x}{2} - \frac{1}{2})e^{2x} + 4(2-x)e^x$

a) Justifier que la fonction H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto f(x) + 2$

b) En déduire sur $\mathbb{R}$, la primitive F de la fonction f, qui prend la valeur -1 en 0

Partie B

*Soitg*la fonction numérique définie par : $g(x) = (x^2 - 4x)lnx - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4)$ si $x > 0$ et $g(0) = 0$

On note $(\mathcal{C}_g)$sa courbe représentative dans un nouveau repère orthonormé d'unité 2 cm.

1.a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g

b) Justifier que pour tout réel x strictement positif, $g(x) = f(lnx)$

2.a) Étudier la continuité de g à droite en 0.

b) Étudier la dérivabilité de g à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$

3) Étudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.

4.a) Déduire de la partie A-3.a), un encadrement de l'abscisse du point d'intersection de$(\mathcal{C}_g)$ avec l'axe des abscisses .

4.a) Tracer avec soin la courbe $\left(\mathcal{C}_g\right)$ et la tangente en son point d'abscisse 0.

Problème V

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^{x+1} - 4^x$ de courbe représentative $(\mathcal{C})$dans un repère orthonormé (unité 2 cm)

Partie A

1) Calculer$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. interpréter graphiquement le dernier résultat

2)-a) Justifier que $f(x)$ peut s'écrire $e^{x\ln 2}\left(2 - e^{x\ln 2}\right)$;

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que f' est du signe de $\left(1 - e^{x\ln 2}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) Représenter graphiquement $(\mathcal{C})$. (On fera figurer les points d'abscisses -1,0,1, 2).

Partie B

Avec la précision permise par le graphique, résoudre : (E_1) : $f(x) = \frac{3}{4}$et(E_2) : $f(x) = -2$

2) On se propose de trouver les solutions exactes des équations (E_1) et (E_2) .

En posant $X = 2^x$, montrer que :

(E_1) Équivaut à $4X^2 - 8X + 3 = 0$

(E_2) Équivaut à $X^2 - 2X - 2 = 0$

Calculer les solutions exactes de (E_1) et (E_2)

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1

1) $e^{3x+1}=7 \Leftrightarrow ln(e^{3x+1})=ln7 \Leftrightarrow 3x+1=ln7 \Leftrightarrow 3x=ln7-1 \Leftrightarrow x=\frac{ln7-1}{3}$ alors $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{ln7-1}{3}\right\}$

2) $e^{x-3}=1 \Leftrightarrow ln(e^{x-3})=ln1 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \Leftrightarrow$ alors $S_{\mathbb{R}}=\{3\}$

3) $e^{2x-1}=6 \Leftrightarrow ln(e^{2x-1})=ln6 \Leftrightarrow 2x-1=ln6 \Leftrightarrow x=\frac{1+ln6}{2}$ alors $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{1+ln6}{2}\right\}$

4) $e^{-x-4}-6=0 \Leftrightarrow ln(e^{-x-4})=ln6 \Leftrightarrow -x-4=ln6 \Leftrightarrow x=-4-ln6$ alors $S_{\mathbb{R}}=\{-4-ln6\}$

5) $e^{x+3}+2=1$ alors $e^{x+3}=-1$ alors : $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$

6) $e^{x+3}+\frac{3}{2}=2 \Leftrightarrow e^{x+3}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow lne^{x+3}=-ln2 \Leftrightarrow x+3=-ln2$ alors $S_{\mathbb{R}}=\{-3-ln2\}$

7) On pose $e^x=X$ et l'équation devient : $3X^2-5X+2=0 \Leftrightarrow (3X-2)(X-1)=0$ alors $X=\frac{2}{3}$ $ou\ X=1$

Pour $X=\frac{2}{3}$, $e^x=\frac{2}{3}$ alors $x=ln\frac{2}{3}$ et pour $X=1$, $e^x=1$ $alors\ x=0$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{0;ln\frac{2}{3}\right\}$$

8) On pose $\sqrt{e^{3x+1}}=X$; $e^{3x+1}=X^2$ et l'équation devient : $X^2+X-6=0 \Leftrightarrow (X+3)(X-2)=0$ alors $X=2$ $ou\ X=-3$ seul $X=2$ est acceptable. Alors $\sqrt{e^{3x+1}}=2 \Leftrightarrow x=\frac{-1+ln4}{3}$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-1+ln4}{3}\right\}$$

9) $e^{-3x-1}>3 \Leftrightarrow lne^{-3x-1}>ln3 \Leftrightarrow -3x-1>ln3 \Leftrightarrow -3x>1+ln3 \Leftrightarrow 3x<-1-ln3 \Leftrightarrow x<\frac{-1-ln3}{3}$

$$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty;\frac{-1-ln3}{3}\right[$$

10) $e^{x-6}>1 \Leftrightarrow lne^{x-6}>ln1 \Leftrightarrow x-6>\Leftrightarrow x>6 S_{\mathbb{R}}=]6;+\infty[$

11) On pose $e^x=X$ et l'inéquation devient : $X^2-3X+2\geq 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2)\geq 0$
En utilisant la règle du signe d'un polynôme du second degré, X doit vérifier : $X\leq 1$ ou $X\geq 2$ soit $e^x\leq 1$ ou $e^x\geq 2$ alors $x\leq 0$ ou$x\geq ln2 S_{\mathbb{R}}=]-\infty;0]\cup[ln2;+\infty[$

12) Remarquons que l'inéquation $e^{2x}+3e^x+4<0$ est composée d'une somme d'exponentielle qui ne peut pas être négative. $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$

Exercice 2

1) $P(1)=1^4+7\times 1^3-7\times 1^2-43\times 1+42=1+7-7-43+42=0$ $alors$ $P(1)=0$

$P(-3)=(-3)^4+7\times(-3)^3-7\times(-3)^2-43\times(-3)+42=81-189-63+129+42=0$

$P(1)=P(-3)=0$; Alors 1 et -3 sont des racines de $P(x)$

2.a) d'après la question précédente $P(x)$peut s'écrire sous la forme $P(x)=(x-1))(x+3)(x^2+ax+b)$

Après développement et réduction, on obtient : $P(x)=x^4+(a+2)x^3+(2a+b-3)x^2+(2b-3a)x-3b$

Par identification : $\begin{cases} a+2=7 \\ 2a+b-3=-7 \\ 2b-3a=-43 \\ -3b=42 \end{cases}$ alors $a=5$ et $b=-14$

D'où : $P(x)=(x-1))(x+3)(x^2+5x-14)$

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1))(x+3)(x^2+5x-14)=0$ $Alors$ $x=1$ ou $x=-3$ ou $x^2+5x-14=0$

$x^2+5x-14=0$; Le discriminant de cette équation est : $\Delta=5^2-4\times 1\times(-14)=81$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-9}{2}=-7$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+9}{2}=2$

L'ensemble des solutions de l'équation $P(x)=0\ est\ S_{\mathbb{R}}=\{-7;-3;1;2\}$

3) On pose $X=e^x$ avec $X>0$ l'équation devient : $X^4+7X^3-7X^2-43X+42=0$

On obtient d'après la question précédente $X=-7$ ou $X=-3$ ou $X=1$ ou $X=2$

$\Leftrightarrow e^x=1$ ou $e^x=2$ $Alors$ $x=0$ ou $x=ln2$

$S_{\mathbb{R}}=\{0;ln2\}$

Exercice 3

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{1-e^x} = 0$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote « horizontale » à la courbe $(\mathcal{C})$en $-\infty$

$\lim_{x\to0_<} f(x) = \lim_{x\to0_<} \left(2e^x \times \frac{1}{1-e^x}\right) = +\infty$ car $\lim_{x\to0_<} e^x = 1;\ \lim_{x\to0_<}(1-e^x) = 0\ et\ \lim_{x\to0_<} \frac{1}{1-e^x} = +\infty$

$\lim_{x\to0_>} f(x) = \lim_{x\to0_>} \left(2e^x \times \frac{1}{1-e^x}\right) = -\infty$ car $\lim_{x\to0_>} e^x = 1;\ \lim_{x\to0_>}(1-e^x) = 0\ et\ \lim_{x\to0_>} \frac{1}{1-e^x} = -\infty$

$\lim_{x\to0_<} f(x) = +\infty\ et\ \lim_{x\to0_>} f(x) = -\infty$; Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote « verticale » à $(\mathcal{C})$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{1-e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x\left(\frac{1}{e^x}-1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(\frac{1}{e^x}-1\right)} = -2$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$; Alors la droite d'équation $y = -2$ est asymptote « horizontale » à la courbe $(\mathcal{C})$en $+\infty$

Exercice 4

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-2}{e^{3x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(1-\frac{2}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{e^{2x}}\right)}{\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)}=0$ car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\ \ et\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x+1)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right) = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5-e^{-x}}{1+2e^x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5-\frac{1}{e^x}}{1+2e^x}\right) = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

$\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to0}\left[\frac{(e^x-1)}{x}(e^x+1)\right] = 2$ car $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ et $\lim_{x\to0}(e^x+1) = 2$

$\lim_{x\to0} \frac{xe^x}{e^x-1} = \lim_{x\to0}\left(e^x \times \frac{x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x}{\frac{e^x-1}{x}}\right) = 1$ car $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ et $\lim_{x\to0} e^x = 1$

Exercice 5

1.a) $f'(x) = [(2x+1)e^{-x}]' = (2x+1)'e^{-x} + (2x+1)(e^{-x})' = 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x} = (-2x+1)e^{-x}$

b) $g'(x) = \left[\frac{e^{2x}-2}{1-e^{2x}}\right]' = \frac{(e^{2x}-2)'(1-e^{2x})-(1-e^{2x})'(e^{2x}-2)}{(1-e^{2x})^2} = \frac{2e^{2x}(1-e^{2x})+2e^{2x}(e^{2x}-2)}{(1-e^{2x})^2} = \frac{-2e^{2x}}{(1-e^{2x})^2}$

c) $h'(x) = \left[\frac{x}{1+xe^x}\right]' = \frac{(x)'(1+xe^x)-(x)(1+xe^x)'}{(1+xe^x)^2} = \frac{1+xe^x-x(e^x+xe^x)}{(1+xe^x)^2} = \frac{1-x^2e^x}{(1+xe^x)^2}$

2) Une primitive des fonctions :

a) $f(x) = 2xe^{3x^2+1}$; en posant $u(x) = 3x^2+1$ $\quad Alors\ \ u'(x) = 6x \quad donc\ f(x) = \frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$

D'où la fonction $F: x \mapsto \frac{1}{3}e^{3x^2+1}$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{1-e^{-2x}}{2x+e^{-2x}}$ en posant : $u(x) = 2x + e^{-2x}$ $\quad Alors \quad u'(x) = 2(1-e^{-2x})$ Donc $g(x) = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$

D'où la fonction $G: x \mapsto \frac{1}{2}ln(2x+e^{-2x})$ est une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$

Exercice 6

a) En réduisant au même dénominateur $ae^x + \frac{be^x}{e^x+3}$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$; On obtient :

$\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{ae^{2x}+3ae^x+be^x}{e^x+3} = \frac{ae^{2x}+(3a+b)e^x}{e^x+3} = \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+3}$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ 3a+b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$ D'où : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - \frac{4e^x}{e^x+3}$

b) $f(x) = e^x - 4\frac{(e^x+3)'}{e^x+3}$ Alors $F(x) = e^x - 4ln(e^x+3) + c; c \in \mathbb{R}$

Or $F(0) = 0$; On a : $1 - 4ln4 + k = 0 \Rightarrow k = 8ln2 - 1$

$$F(x) = e^x - 4ln(e^x+3) + 8ln2 - 1$$

Exercice 7

a) $la\ fonction\ f\ est\ continue\ en\ 0\ si\ et\ seulement\ si\ \lim_{x\to0} f(x) = f(0) = 0$

$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{1-e^x}\right) = \lim_{x\to0}\left(x \times \frac{x}{1-e^x}\right) = \lim_{x\to0}\left(x \times \frac{1}{\frac{1-e^x}{x}}\right) = 0$ car $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = 0$ Alors f est continue en 0

b) f est dérivable en 0 si et seulement si : $\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$ $est\ un\ nombre\ réel$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x^2}{1-e^x}}{x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x}{1-e^x} = \lim_{x\to0}\left(-\frac{x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}\right) = -1$$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = -1;\, alors\ f$ **est dérivable en** $\mathbf{0}$

La courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur – $\mathbf{1}$ au point d'abscisse $\mathbf{0}$

Exercice 8

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^{2x} - x - 4) = +\infty$ **car** $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0\ \ et\ \lim_{x\to-\infty}(-x-4) = +\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^{2x} - x - 4) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{2x}}{x} - 1 - \frac{4}{x}\right) = +\infty$ **car** $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x} = +\infty$

3) **a) la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car une fonction exponentielle et la fonction $x \mapsto -x-4$ est aussi continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car une fonction polynôme. La fonction f est la somme de deux fonctions continues et dérivable sur $\mathbb{R}$; alors f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.**

   $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(e^{2x} - x - 4\right)' = 2e^{2x} - 1$

   b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{ln2}{2}$**. alors :**

   $\forall\, x \in \left[-\infty; -\frac{ln2}{2}\right], f'(x) < 0$ **alors f est strictement décroissante**

   $\forall\, x \in \left[-\frac{ln2}{2}; +\infty\right], f'(x) > 0$ **alors f est strictement croissante**

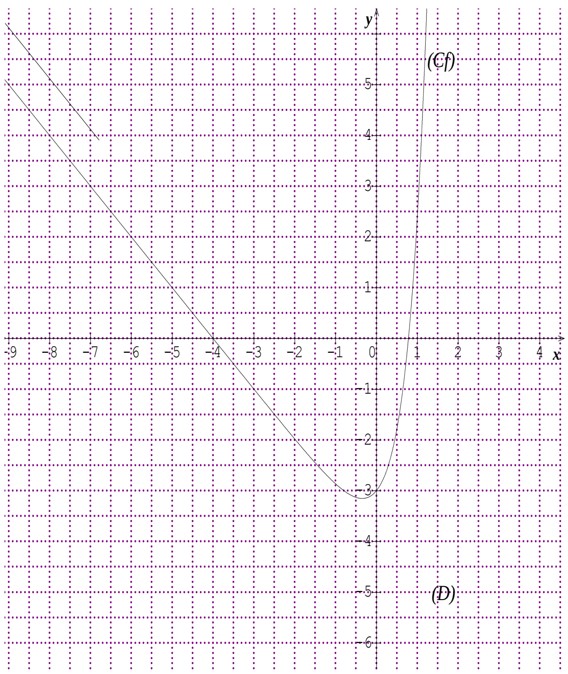
$$Tableau\ de\ variation\ de\ f$$

x	$-\infty$		$-\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-7+\ln 2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4.a) La droite (D) d'équation $y = -x - 4$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$en $-\infty$ si et seulement si $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) — x - 4\right) = 0$

$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) — x - 4\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ **; alors la droite (D) d'équation $y = -x - 4$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$en $-\infty$**

c) **Représentation graphique de f**



CHAPITRE VI : CALCUL INTEGRAL

Introduction

Les mathématiciens grecs calculaient les aires par des méthodes géométriques consistant à remplacer la région considérée par un carré de même aire (problème de la quadrature)

Au **XVII è siècle**, **KEPLER (1571-1630)** obtient des formules pour calculer le volume de tonneaux à l'aide de décomposition de régions en domaines élémentaires. Enfin, **LEIBNITZ (1646-1716)** et **NEWTON (1643-1727)** construisent, de façon indépendante et presque simultanée, une méthode pour la détermination des aires et des volumes par le «calcul intégral ».

L'objet de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue et de mettre en place une technique permettant les calculs d'aires

FICHE DE COURS

I) INTEGRAL D'UNE FONCTION CONTINUE

I-1) Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle$[\ a; b]$.On appelle **intégrale**de **a** à **b** de f, le nombre réel $F(b) - F(a)$où F est une primitive de f sur $[\ a; b]$.

On note $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

On lit somme ou (intégrale)de a à b de $f(x)dx$ $égale$ F(x) pris entre a et b.

Remarque

la lettre x n'intervient pas dans le calcul de l'intégral, on peut donc la remplacer par n'importe quelle autre lettre différente de a et de b. On dit que x est une variable muette.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(z)dz = \cdots \dots \dots . . = [F(x)]_a^b$$

I-2) Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a, b et c des éléments de I et$\propto$ un nombre réel.

Propriété 1

$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Propriété 2 (EGALITE DE CHASLES)

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Propriété 3 (LINEARITE DE L'INTÉGRALE)

$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$; $\int_a^b \propto f(x)dx = \propto \int_a^b f(x)dx$

On peut sortir le réel $\propto$ du signe somme, et l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales.

Propriété 4 (INEGALITE ET INTEGRATION)

Si $\forall x \in [a; b] f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (la réciproque est fausse)

Si $\forall x \in [a; b] f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Intégration des fonctions paires et impaires

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle k symétriqe par rapport à O.

Pour tout a élément de k, on a :

Si f est paire , $\boldsymbol{\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt}$; si f est impaire, $\boldsymbol{\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.}$

II) TECHNIQUE DU CALCUL INTEGRAL

Dans l'écriture d'une fonction f dérivable sur un intervalle I, si, en multipliant ou en divisant par un nombre, on peut mettre en évidence l'une des formes suivantes :

$\boldsymbol{u' u^{\alpha}}$; $\boldsymbol{\frac{u'}{u^{\propto}}}$; $\boldsymbol{\frac{u'}{u}}$; $\boldsymbol{u' e^{u}}$; $\boldsymbol{u' \times v' \circ u}$ alors on en déduit une primitive de f sur I

Utilisation des primitives usuelles

Fonction	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u'u^{\propto}$	$\frac{u'}{u^{\propto}}$	$u' \times v' \circ u$	$u'\cos(u)$	$u'\sin(u)$
Primitive	$\ln\lvert u\rvert + c$	$e^u + c$	$\frac{1}{\propto +1}u^{\propto+1} + c$	$-\frac{1}{(\propto\ -1)u^{\propto-1}} + c$	$v \circ u$	$\sin(u) + c$	$-\cos(u) + c$
Commentaires	$u \neq 0$		$u > 0$	$u \neq 0$			

Intégration par parties

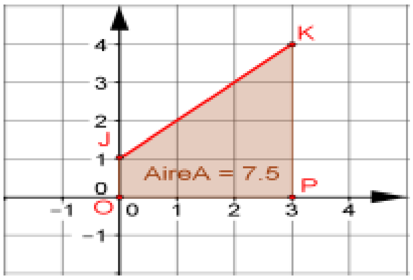
Propriété

Soit $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle K telles que les dérivées $\boldsymbol{u'}$ et $\boldsymbol{v'}$ sont continues sur K,
a et b deux éléments de K.

On a : $\int_a^b \boldsymbol{u(t).v'(t)dt} = [\boldsymbol{u(t).v(t)}]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{u'(t).v(t)dt}$

III)CALCUL D'AIRES

Exemple introductif



Dans un repère orthogonal (O, I, J), tracer la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 1$, coupant l'axe des ordonnées en J.

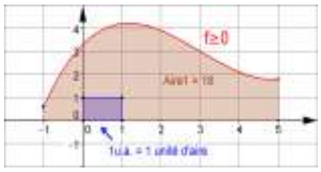
K est le point de $(\mathcal{D})$ d'abscisse 3 positive et P est le projeté orthogonal de K sur l'axe des abscisses. Ainsi OJKP est un trapèze rectangle.

1. Déterminer l'aire du trapèze en fonction de .
   $(on\ rappelle\ que\ \mathcal{A}_{trap\grave{e}ze} = \frac{1}{2}(somme\ des\ bases) \times hauteur$
2. Calculer $\int_0^3 (x+1)dx$.
3. Comparer les résultats obtenus.

III-1) Aire d'une partie du plan limité par une courbe et l'axe (OI).

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative. Soit (Δ) la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$; (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

1er cas : f est positive sur $[a; b]$.



$$\text{Aire}(\Delta) = \int_a^b f(x)dx$$

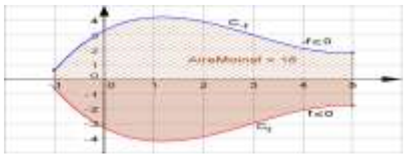
Remarque1 :

(Δ) est aussi l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $a \leq x \leq b\ et\ 0 \leq y \leq f(x)$

Remarque 2:

Lorsqu'on demande l'aire en cm^2, on multiplie le résultat par l'unité d'aire qui est $OI \times OJ$.

Exemple : Si (O, I, J) est tel que $OI = 2cm$ et $OJ = 3\ cm$, l'unité d'aire est $2cm \times 3cm = 6\ cm^2$.

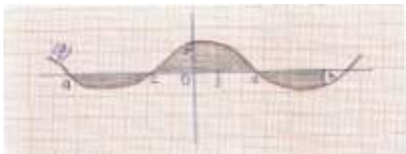


2ème cas : f est négative sur $[a; b]$.

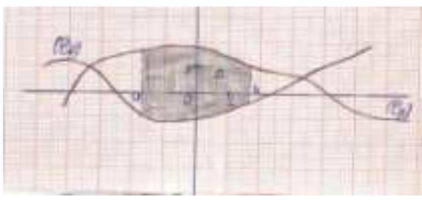
$\text{Aire}(\Delta) = -\int_a^b f(x)dx$ avec $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$

3ème cas : f est une fonction continue et quelconque sur $[a; b]$

$$\text{Aire}(\Delta) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$



III-2) Aires d'une partie du plan limitée par deux courbes



Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$. $(\mathcal{C}_f)\ et\ (\mathcal{C}_g)$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormée (O, I, J).

Lorsque $f \leq g$ sur $[a; b]$, l'aire du domaine Δ délimité par $(\mathcal{C}_f)\ et\ (\mathcal{C}_g)$ les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b [g(t) - f(t)]dt$$

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$a)\ \int_{-1}^{2} 2x^3 dx\ ;\ b)\ \int_{-1}^{-2} \frac{dt}{t^3}\ ;\ c)\ \int_{2}^{3} (x^3 - 3x^2)\, dx;\ d)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$

Exercice 2(calcul de base)

Calculer les intégrales suivantes.

$a)\ \int_{0}^{1} \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx\ ;\ b)\ \int_{-2}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx\ ;\ c)\ \int_{3}^{6} x e^{-x^2} dx\ ;\ d)\ \int_{0}^{2} \frac{e^x}{e^x+3} dx\ ;\ e)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x\, dx\ ;\ f)\ \int_{-2}^{1} e^x (e^x - 1) dx\ ;$

$g)\ \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \tan x\, dx\ ;\ h)\ \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx\ ;\ i)\ \int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx;\ j)\ \int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{1}{x \ln x} dx\ ;\ k)\ \int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx\ ;\ l)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} dx$

Exercice 3(utilisation de la parité dans le calcul intégral)

Utiliser la parité pour calculer les intégrales suivantes :

$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^3\, cosx dx\ ;\ \int_{-1}^{0} \frac{xdx}{x^2+1}\ ;\ \int_{-3}^{3} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx\ ;\ \int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{(cosx)^2}\ ;\ \int_{-2\pi}^{2\pi} (x - sinx) dx\ ;$

Exercice 4(Intégration par parties)

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$a)\ \int_{0}^{2} (2x+1)\, e^{2x} dx\ ;\ b)\ \int_{2}^{3} (2x+1) \ln x\, dx\ ;\ c)\ \int_{0}^{\pi} (x-1) \sin 3x\, dx;\ d)\ \int_{1}^{2} \ln x\, dx;\ e)\ \int_{1}^{e} x^2 \ln x\, dx;$

$$f)\ \int_{1}^{e^2} \sqrt{x} \ln x\, dx$$

Exercice 5

Soit $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$ et $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$

1) calculer. $I + J$ et $I - J$. En déduire les valeurs de I et J

2) Retrouver les résultats précédents par un calcul direct en linéarisant $\cos^2 x\ et\ \sin^2 x$.

Exercice 6

On considère les intégrales : $A = \int_{0}^{\pi} x^2 \cos^2 x\, dx$ et $B = \int_{0}^{\pi} x^2 \sin^2 x\, dx$

1) Calculer $A + B$
2) Et $A - B$ à l'aide de deux intégrations par partie.
3) En déduire les valeurs de A et B.

Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+5}{(x+1)^2} dx$

1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall\ x\ \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$

2) En déduire la valeur de $\int_{0}^{3} \frac{2x+5}{(x+1)^2} dx$

Exercice 8

Sans chercher à calculer l'intégrale, démontrer les encadrements proposés

$a)\ 1 \leq \int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2} dx \leq \sqrt{2}\ ;\ b)\ \frac{2}{3} \leq \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{5};\ c)\ \frac{2\pi}{13} \leq \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{10-3\sin x} \leq \frac{2\pi}{7}$

Exercice 9(technique du calcul intégral)

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_{0}^{1} \frac{3x^2-4x+1}{(x^3-2x^2+x-5)^3} dx\ ;\ \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} sinxcos^3 x\, dx\ ;\int_{1}^{4} (x-3) e^{x^2-6x+5} dx\ ;\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2x - \frac{1}{cosx^2}) e^{tanx - x^2} dx\ ;\ \int_{-1}^{0} \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx\ ;$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} cotanxdx\ ;\ \int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-x)}{x-1} dx$

Exercice 10

On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2} - lnx$ et $g(x) = xlnx - x$.

a. Calculer la dérivée de g. En déduire une primitive F de f sur $]0; +\infty[$
b. Calculer alors l'intégrale $\int_{1}^{e} f(x) dx$.

Exercice11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x$

1. Déterminer les nombres a, b et c tels que la fonction F définie sur$\mathbb{R}$par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ soit une primitive de$f$ sur $\mathbb{R}$
2. En déduire l'intégrale $\int_{-3}^{0} f(x)dx$

Exercice 12

1) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on ait :
$\boldsymbol{f(x)} = \frac{2e^x-3}{e^x-1} = a + \frac{be^x}{e^x-1}$.
En déduire l'intégrale $I = \int_{ln 2}^{ln 4} \frac{2e^x-3}{e^x-1} dx$.
2) Donner la valeur de I sous la forme $ln\alpha$, où α est un rationnel.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2lnx}{x} + x - 1$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité $2cm$.
La droite $(\mathcal{D})$ a pour équation $y = x - 1$

1. a. Etudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\mathcal{D})$.
   b. Montrer que $(\mathcal{D})$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
2. Montrer que la fonction G, définie sur $]0; +\infty[$ par : $G(x) = (lnx)^2$, est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = \frac{2lnx}{x}$.
3. Déduire des questions précédentes l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 14

Soit $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$définie sur $]0; +\infty[$et sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).
1) Faire une étude succincte de f. (on remarquera que $(\mathcal{C}_f)$admet la droite (Δ)d'équation $y = 2x$ comme asymptote en $+\infty$)
2) Représenter graphiquement $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ).
3) Colorier le domaine $(\mathcal{D}_1)$défini par$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$
Calculer l'aire de $\mathcal{D}_1$en cm².
4)Soit $\propto$ un nombre réel ($\propto > 1$). Colorier le domaine $\mathcal{D}_\propto$limité par les droites d'équations $x = 1, x = \propto, (\mathcal{C}_f)$ et (Δ). Calculer, en cm² l'aire$\mathcal{A}(\propto)$ de $\mathcal{D}_\propto$. Que peut-on dire de $\lim_{\propto\to+\infty} \mathcal{A}(\propto)$?

PROBLEME RESOLU

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$par : $g(x) = -3x^2 + 3 - 2\ln x$
1) Calculer $\lim_{x\to0} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
2) On note g' la dérivée de g.
a) Montrer que :$\forall\ x \in\ ]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{-2(3x^2+1)}{x}$
b) Étudier le sens de variation de g.
c) Dresser le tableau de variation de g.
3) Calculer $g(1)$.et donner le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$par $f(x) = \frac{2\ln x-1-3x^2}{2x}$et $(\mathcal{C}_f)$sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 1 cm)

1-a) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, et montrer que la droite (Δ)d'équation $y = -\frac{3}{2}x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$en $+\infty$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de$(\mathcal{C})$et (Δ).

c) Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$et (Δ) sur $]0;+\infty[$.

2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}\, \forall\, x \in\,]0;+\infty[$.En déduire le sens de variation de f.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Représenter $(\mathcal{C})$et (Δ).

Partie C

Soit un nombre réel λ élément de $[\sqrt{e};+\infty[$.

1) Colorier la partie du plan limitée par $x = \sqrt{e}, x = \lambda, (\mathcal{C}_f)$et (Δ).

2) Calculer, en unités d'aire et en fonction de λ, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$du domaine colorié précédemment. (on pourra remarquer que $\frac{2\ln x - 1}{2x} = \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{2x}$ pour $x > 0$).

3) Calculer$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{3}{x^2}\right) dx$; $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin2xdx$; $I_3 = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} ue^{u^2+1}du$; $I_4 = \int_0^2 u\sqrt{2u^2+1}\,du$; $I_5 = \int_2^1 \frac{1}{u^2} e^{\frac{1}{u}} du$

$I_6 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{\sqrt{sinx}} dx$; $I_7 = \int_0^1 \frac{x+1}{2x^2+4x+5} dx$; $I_8 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{tanx}}{(cosx)^2} dx$; $I_9 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sinxe^{2cosx}\, dx$; $I_{10} = \int_{-2}^{-1} \frac{(x^3-x)^5}{x^4} dx$

Exercice 2

A l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_3^5 ln\left(\frac{x-1}{x}\right) dx\,; b) \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{e^x} dx; c) \int_1^2 \frac{lnx}{x^2} dx;\ d) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx; e) \int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx; f) \int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx;$$

$$g) \int_0^1 x^2 e^x\, dx;\ \ h) \int_0^1 (3x^2 - x + 1)\, e^x dx\,; i) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos 3x\, dx$$

Exercice 3

1) Déterminer les nombres réels $a, b\ et\ c$ tels que : $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

2) calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{lnx}{x(x^2+1)} dx$

Exercice 4

Soit $f(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{e^x+3}$ définie sur $\mathbb{R}$

1) Déterminer les nombres réels $a\ et\ b$ tels que pour tout nombre réel x, $f(x) = ae^x + \frac{be^x}{e^x+3}$

2) Calculer : $\int_1^2 f(x)dx$

Exercice 5

On considère les intégrales : $A = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx$ et $B = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx$

1) Calculer $A + B$
2) Et $A - B$ à l'aide de deux intégrations par partie.
3) En déduire les valeurs de$A$ et B.

Exercice 6

Démontrer que $\frac{2}{9} \le \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \le \frac{2}{7}$

Exercice 7

soit$(I_n)_{n\in N}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$

1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall\ x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], \frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$

2) Calculer I_0 et I_1

3) Calculer l'intégrale$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x\, dx$.

4) En déduire l'expression de$I_{n+2} - I_n$ en fonction de n, puis la valeur deI_2, I_3, I_4 et I_5 .

Exercice 8

Soit n un entier naturel non nul.

On note $I_n = \int_{-2}^{0} x^n\sqrt{x+2}dx$ et $I_0 = \int_{-2}^{0}\sqrt{x+2}\,dx$

1) Calculer I_0.

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1. En déduire la valeur de $5I_1 + 4I_0$.

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 1, I_n = \frac{-4n}{2n+3} I_{n-1}$

Calculer la valeur exacte de I_5.

PROBLEMES DE SYNTHESE

PROBLEME I

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$

$(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère. (Unité 2 cm).

Partie A

On considère la fonction g définie sur$]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2lnx$

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$;

2-a) Justifier que $\forall\ x \in\ ]0;+\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$

b) En déduire le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.

3) Justifier que $\forall\ x \in\ ]0;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1-a) Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

2-a) Démontrer que pour tout $x > 0; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.

3-a) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$en $+\infty$.

Préciser la position relative de$(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

b) Déterminer les coordonnées du point A de $(\mathcal{C})$en lequel la tangente est parralèle à $(\mathcal{D})$.

4-a) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

Tracer $(\mathcal{D})$; (T) la tangente en A et construire $(\mathcal{C})$.

5-a) Démontrer que f est une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle K à préciser.

On note f^{-1}la bijection réciproque de f.

b) Calculer $f(1)$, en déduire $(f^{-1})'(1)$;

c) Construire $(\mathcal{C}')$, la courbe de f^{-1}dans le même repère (O,I,J).

6) Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

PROBLEME II

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1) Étudier le sens de variation de g.

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur$]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur$]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$

On appelle $(\mathcal{C})$la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, I, J) (unité : 2 cm)

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2-a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite(Δ) d'équation$y=\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

c) Déterminer la position de $(\mathcal{C})$par rapport à (Δ) sur $]0;+\infty[$.

Montrer en particulier que(Δ) coupe $(\mathcal{C})$en un point A que l'on déterminera.

3) Étudier le sens de variation de f.

Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $(\mathcal{C})$où la tangente (T) à $(\mathcal{C})$est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées de B.

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une solution unique $\propto$ et que $0{,}34<\propto<0{,}35$.

6) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$et les droites (Δ) et (T).

Partie C

On considère la suite numérique (x_n)définie par : $x_n=e^{\frac{n-2}{2}}\ \forall\, n\in\mathbb{N}$

1-a) Montrer que (x_n)est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Montrer que (x_n)est une suite croissante.

2) Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n=4\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de a_n.

b) Montrer que $a_n=\frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n.En déduire que (a_n)est une suite arithmétique.

Problème III

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O ; $\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$) (unités graphiques $2cm$ sur l'axe des abscisses et $5cm$ sur l'axe des ordonnées).

PARTIE A : Etude de fonctions auxiliaires

1- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=xe^x+1$.
   Etudier le sens de variation de h et démontrer que $h(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x+2-e^x$
   a) Déterminer les limites de g en$-\infty$ et en $+\infty$
   b) Etudier le sens de variation de g et dresser le tableau des variations de g
   c) Montrer que l'équation $g(x)$ =0 admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. On notera $\alpha\ et\ \beta$ ces solutions avec $\alpha>\beta$. Prouver que 1,14$<\alpha<$1,15.
   d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B : Etude de la fonction f et tracé de la courbe $(\mathcal{C})$

1- Déterminer les limites de f en$-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
2- a)Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$
   b)En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.
3- a) Etablir que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$.
   b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A2), déterminer un encadrement de $f(\alpha)$d'amplitude 10^{-2}.
4- Etablir une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.
5- a) Etablir que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x)-x=\frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ avec $u(x)=-xe^x-e^x-1$
   b) Etudier le sens de variation de la fonction u. En déduire le signe de $u(x)$.
   c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T).
6- Tracer $(\mathcal{C})$et (T).

On pourra admettre que $-1{,}85 < \beta < -1{,}84$ *et* $-1{,}19 < f(\beta) < -1{,}18$

PARTIE C : Calcul d'aire

1- Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x + xe^x}{xe^x+1} - 1$, puis en déduire une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2-Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe (OI) et les droites d'équations

$$x = 0 \; et \; x = 1$$

Problème IV

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2 cm.

Partie A

Le tableau ci-dessous est le tableau de variation de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par

g(x) = $(a+bx)e^x + 2 - 2\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	$-e-2$	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

1) Déterminer les réels a et b.

2) **On suppose que $a = 1$ et $b = -1$.**

a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1{,}35 < \alpha < 1{,}36$

b) En déduire que : $\forall\, x \in\,]0,\alpha[$, g $(x) > 0$ et $\forall\, x \in\,]\alpha;+\infty[$, g $(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - 2\ln x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique.

1) Démontrer que f est continue en 0.

2) f est elle dérivable en 0 ? Justifier votre réponse.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite de f en $+\infty$. interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa dérivée.

Démontrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2\ln x)^2}$ $\forall\, x \in\,]0;+\infty[$. En déduire le signe de f'.

5-a) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{e^\alpha - \frac{2}{\alpha}}$

b) Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2. En déduire que 0,42 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

6) Dresser le tableau de variation de f.

7) Construire $(\mathcal{C})$ et préciser ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et α.

Partie C

1- En effectuant une intégration par parties, calculer en fonction de λ les intégrales $I(\lambda) = \int_1^\lambda xe^{-x}\,dx$ *et* $J(\lambda) = \int_1^\lambda (x+1)e^{-x}\,dx$.

2- Soit λ un nombre réel supérieur à 1 et on pose $\mathcal{A}(\lambda) = \int_1^\lambda f(x)dx$. En utilisant la question 1) et l'encadrement de $f(x)$: $xe^{-x} \le f(x) \le (x+1)e^{-x}$. $\forall\, x \ge 1$, déduire un encadrement de $\mathcal{A}(\lambda)$.

3- On pose $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{A}(\lambda) = \ell$. Démontrer que : $\frac{2}{e} \le \ell \le \frac{3}{e}$

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1

$a)$ $\int_{-1}^{2} 2x^3dx = 2\int_{-1}^{2} x^3dx = 2\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{2} = 2\left(\frac{2^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right) = 2\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right) = 2\times\frac{15}{4} = \frac{15}{2}$; D'où: $\int_{-1}^{2} 2x^3dx = \frac{15}{2}$

$b)$ $\int_{-1}^{-2}\frac{dt}{t^3} = -\int_{-2}^{-1}\frac{dt}{t^3} = -\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{-2}^{-1} = \left[\frac{1}{2t^2}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2(-1)^2}-\frac{1}{2(-2)^2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$; D'où : $\int_{-1}^{-2}\frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8}$

$c)$ $\int_{2}^{3}(x^3-3x^2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{2}^{3} = \left(\frac{3^4}{4}-3^3\right)-\left(\frac{2^4}{4}-2^3\right) = -\frac{11}{4}$; D'où : $\int_{2}^{3}(x^3-3x^2)\,dx = -\frac{11}{4}$

$d)$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x dx = \left[-\frac{1}{4}cos4x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}cos\pi+\frac{1}{4}cos0 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; D'où: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x dx = \frac{1}{2}$

Exercice 2

$a)$ Posons $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ en considérant $U(x) = x^2+1$; on a : $U'(x) = 2x \quad et\ f(x) = \frac{U'(x)}{[U(x)]^2}$

$$\int_0^1\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{0^2+1} = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2};\quad D'où:\quad \int_0^1\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}$$

$b)$ posons $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ et considérons : $U(x) = x^2+9$; on a : $U'(x) = 2x \quad et\ f(x) = \frac{1}{2}\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$

$\int_{-2}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx = \left[\sqrt{x^2+9}\right]_{-2}^{1} = \sqrt{1^2+9}-\sqrt{(-2)^2+9} = \sqrt{10}-\sqrt{13}$; D'où : $\int_{-2}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx = \sqrt{10}-\sqrt{13}$

$c)$ Posons $f(x) = xe^{-x^2}$ et considérons : $U(x) = -x^2$ alors $U'(x) = -2x \quad et\ f(x) = -\frac{1}{2}U'(x)e^{U(x)}$

$\int_{3}^{6}xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{3}^{6} = -\frac{1}{2}e^{-(6)^2}+\frac{1}{2}e^{-(3)^2} = -\frac{1}{2}e^{-36}+\frac{1}{2}e^{-9} = \frac{e^{27}+1}{2e^{36}}$; D'où : $\int_{3}^{6}xe^{-x^2}dx = \frac{e^{27}+1}{2e^{36}}$

$d)$ Posons $f(x) = \frac{e^x}{e^x+3}$ et considérons : $U(x) = e^x+3$ alors $U'(x) = e^x \quad et\ f(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

$\int_0^2\frac{e^x}{e^x+3}dx = [\ln(e^x+3)]_0^2 = \ln(e^2+3)-\ln(4) = ln\left(\frac{e^2+3}{4}\right)$ D'où : $\int_0^2\frac{e^x}{e^x+3}dx = ln\left(\frac{e^2+3}{4}\right)$

$e)$ Posons : $f(x) = \sin^4 x\cos x$; $U(x) = sinx \Rightarrow U'(x) = cosx\ alors\ f(x) = U'(x)\times[U(x)]^4$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos x\,dx = \left[\frac{1}{5}(sinx)^5\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}\left[sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^5-\frac{1}{5}\left[sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^5 = \frac{1}{5}+\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$; D'où : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos x\,dx = \frac{2}{5}$

$f)$ Posons : $f(x) = e^x(e^x-1)$ et considérons : $U(x) = e^x-1$ alors $U'(x) = e^x \quad et\ f(x) = U'(x)\times U(x)$

$$\int_{-2}^{1}e^x(e^x-1)dx = \left[\frac{1}{2}(e^x-1)^2\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{2}[(e-1)^2-(e^{-2}-1)^2] = \frac{1}{2}(e^2-2e+2e^{-2}-e^{-4})$$

$g)$ Posons : $f(x) = tanx = \frac{sinx}{cosx} = \frac{-(cosx)'}{cosx}$ alors

$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\tan x\,dx = [-ln(cosx)]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left[cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+\ln\left[cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = -ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$;

$h)$ Posons : $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = -\left(\frac{1}{x}\right)'e^{\frac{1}{x}} = -U'e^U$ Alors

$\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}}+e^1 = e^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)$ D'où : $\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx = e^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{1}{2}}-\ln 1\right)$

$i)$ Posons : $f(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}\times lnx = U'(x)\times U(x) \quad en\ posant\ \ U(x) = lnx$

$\int_{\frac{1}{e}}^{e^3}\frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(lnx)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e^3} = \frac{1}{2}\left[(\ln e^3)^2-\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2\right] = \frac{1}{2}(3^2-(-1)^2) = \frac{1}{2}(9-1) = 4$ D'où : $\int_{\frac{1}{e}}^{e^3}\frac{\ln x}{x}dx = 4$

$j)$ Posons : $f(x) = \frac{1}{x\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{lnx} = \frac{(lnx)'}{lnx} = \frac{U'(x)}{U(x)}$ en posant $U(x) = lnx$

$\int_{\frac{1}{e}}^{e^3}\frac{1}{x\ln x}dx = [\ln|lnx|]_{\frac{1}{e}}^{e^3} = ln|lne^3|-ln\left|ln\frac{1}{e}\right| = ln3-ln1 = ln3$; D'où : $\int_{\frac{1}{e}}^{e^3}\frac{1}{x\ln x}dx = ln3$

$k)$ Posons : $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{(lnx)^2} = \frac{(lnx)'}{(lnx)^2} = \frac{U'(x)}{U(x)^2}$ en posant $U(x) = lnx$

$\int_{\frac{1}{e}}^{e^3}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \left[-\frac{1}{lnx}\right]_{\frac{1}{e}}^{e^3} = -\frac{1}{lne^3}+\frac{1}{ln\frac{1}{e}} = -\frac{1}{3}-1 = -\frac{4}{3}$; D'où : $\int_{\frac{1}{e}}^{e^3}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx = -\frac{4}{3}$

$l)$ Posons : $f(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} = \frac{(tanx)'}{tanx} = \frac{U'(x)}{U(x)}$ en posant $U(x) = tanx$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}dx = [ln|tanx|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = ln\left(tan\frac{\pi}{3}\right)-ln\left(tan\frac{\pi}{4}\right) = ln\sqrt{3}-ln1 = \frac{ln3}{2}$; D'où : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}dx = \frac{ln3}{2}$

Exercice 3

$a)x\mapsto x^3cosx$ est continue et impaire sur $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$. Donc : $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x^3\,cosxdx = 0$

$b)x\mapsto\frac{x}{x^2+1}$ est continue et impaire sur $[-1;0]$.

Donc : $\int_{-1}^{0}\frac{xdx}{x^2+1} = -\int_0^1\frac{xdx}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = -\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1 = -\frac{1}{2}ln2$; Donc : $\int_{-1}^{0}\frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}ln2$

$c)\ x\mapsto\frac{1-e^x}{1+e^x}$ est continue et impaire sur $[-3;3]$. Donc : $\int_{-3}^{3}\frac{1-e^x}{1+e^x}dx = 0$

$d) x \mapsto \frac{1}{(cosx)^2}$ est continue et paire sur $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$

Donc : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{(cosx)^2} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(cosx)^2} = [tanx]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 1$ Donc : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{(cosx)^2} = 1$

$e) x \mapsto x - sinx$ est continue et impaire sur $[-2\pi; 2\pi]$. Donc : $\int_{-2\pi}^{2\pi} (x - sinx)dx = 0$

Exercice 4

$a)$ Posons : $\begin{cases} u(x) = 2x+1 \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$; on a $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$ Alors : $\int_0^2 (2x+1)\, e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}\right]_0^2 - \int_0^2 e^{2x}\, dx$

$= [xe^{2x}]_0^2 = 2e^4$ Donc : $\int_0^2 (2x+1)\, e^{2x} dx = 2e^4$

$b)$ Posons : $\begin{cases} u'(x) = 2x+1 \\ v(x) = lnx \end{cases}$; on a $\begin{cases} u(x) = x^2 + x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ Alors $\int_2^3 (2x+1) \ln x\, dx = [(x^2+x)lnx]_2^3 - \int_2^3 (x+1)\, dx$

$=\left[(x^2+x)lnx - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_2^3 = 6ln\frac{9}{2} - \frac{7}{2}$ Donc : $\int_2^3 (2x+1) \ln x\, dx = 6ln\frac{9}{2} - \frac{7}{2}$

$c)$ Posons : $\begin{cases} u(x) = x-1 \\ v'(x) = sin3x \end{cases}$; on a $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{3}cox3x \end{cases}$ Alors $\int_0^{\pi} (x-1) \sin 3x\, dx = \left[-\frac{1}{3}(x-1)cos3x\right]_0^{\pi} +$

$\frac{1}{3}\int_0^{\pi} cos3x\, dx$=$\left[-\frac{1}{3}(x-1)cos3x + \frac{1}{9}sin3x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}(\pi-1) - \frac{1}{3}$ Donc : $\int_0^{\pi} (x-1) \sin 3x\, dx = \frac{1}{3}(\pi - 2)$

$d)$ Posons : $\begin{cases} u(x) = lnx \\ v'(x) = 1 \end{cases}$; on a $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$ Alors : $\int_1^2 \ln x\, dx = [xlnx]_1^2 - \int_1^2 dx = [xlnx - x]_1^2 = 2ln2 - 1$

Donc : $\int_1^2 \ln x\, dx = 2ln2 - 1$

$e)$ Posons : $\begin{cases} u(x) = lnx \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$; on a $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$ Alors : $\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 lnx - \frac{1}{9}x^3\right]_1^e$

$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(2e^3+1)$ Donc : $\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \frac{1}{9}(2e^3+1)$

$f)$ Posons : $\begin{cases} u(x) = lnx \\ v'(x) = \sqrt{x} \end{cases}$; on a $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ Alors : $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} lnx\right]_1^{e^2} - \frac{2}{3}\int_1^{e^2} x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(lnx - \frac{2}{3}\right]_1^{e^2}$

$= \frac{4}{9}(2e^3+1)$ Donc : $\int_1^e \sqrt{x} \ln x\, dx = \frac{4}{9}(2e^3+1)$

Exercice 5

$$1) I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x dx = \left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

$\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$; On obtient : $I = \frac{1}{8}(\pi+2)$ et $J = \frac{1}{8}(\pi-2)$

$$2)\ I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x\right) dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}(\pi+2)$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x\right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}(\pi-2)$$

On obtient : $I = \frac{1}{8}(\pi+2)$ et $J = \frac{1}{8}(\pi-2)$

Exercice 6

$$1)\ A + B = \int_0^{\pi} x^2 \cos^2 x\, dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} x^2(\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}$$

$$2)\ A - B = \int_0^{\pi} x^2 \cos^2 x\, dx - \int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} x^2(\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi} x^2 cos2x dx$$

À l'aide d'une intégration par partie : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = cos2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = \frac{1}{2}sin2x \end{cases}$;

$\int_0^{\pi} x^2 cos2x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 sin2x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x sin2x dx = -\int_0^{\pi} x sin2x dx$; En posant $I = \int_0^{\pi} x sin2x dx$

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = sin2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2}cos2x \end{cases}$ $Alors$: $I = \left[-\frac{1}{2}xcos2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos2x dx = \left[-\frac{1}{2}xcos2x + \frac{1}{4}sin2x\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$

Donc : $A - B = \frac{\pi}{2}$

3) $\begin{cases} A+B=\frac{\pi^3}{3} \\ A-B=\frac{\pi}{2} \end{cases}$; On obtient : $A=\frac{1}{12}(2\pi^3+3\pi)$ et $B=\frac{1}{12}(2\pi^3-3\pi)$

Exercice 7

1) En réduisant au même dénominateur $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$; $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; On obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, f(x)=\frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2}=\frac{ax+a+b}{(x+1)^2}$

Par identification : $\begin{cases} a=2 \\ a+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ D'où : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, f(x)=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$

2) $\int_0^3 \frac{2x+5}{(x+1)^2}dx=\int_0^3(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2})dx=2\int_0^3\frac{dx}{x+1}+3\int_0^3\frac{dx}{(x+1)^2}=2[ln(x+1)]_0^3+3\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^3=2ln4-\frac{3}{4}+3$

Donc : $\int_0^3 \frac{2x+5}{(x+1)^2}dx=4ln2+\frac{9}{4}$

Exercice 8

On notera que les fonctions à intégrer sont bien continues sur l'intervalle d'intégration.

$a) x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ est strictement croissante sur $[0;1]$.

Alors pour tout $x\in[0;1]$, On a : $0\le x\le 1 \Rightarrow 0\le x^2\le 1 \Rightarrow 1\le 1+x^2\le 2 \Rightarrow 1\le\sqrt{1+x^2}\le\sqrt{2}$

Soit $\int_0^1 1dx\le\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx\le\int_0^1\sqrt{2}dx$ ce qui justifie $1\le\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx\le\sqrt{2}$

$b)$ Il faut faire une étude succincte des variations de la fonction $x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$ sur $[0;1]$ pour déterminer un encadrement de l'intégrale.

pour tout $x\in[0;1]$; $f'(x)=\frac{2x-1}{2(2+x-x^2)\sqrt{2+x-x^2}}$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↘	$\frac{2}{3}$	↗ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Par lecture du tableau de variation, on remarque pour tout $x\in[0;1]$, $\frac{2}{3}\le\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

Comme $\int_0^1\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3}$; $\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3\sqrt{2}}{5}$

On peut conclure : $\frac{2}{3}\le\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}\le\frac{3\sqrt{2}}{5}$

$c)$ pour tout $x\in[0;2\pi]$, $-1\le sin2x\le 1 \Rightarrow 3\ge -3sinx\ge -3 \Rightarrow 13\ge 10-3sinx\ge 7 \Rightarrow \frac{1}{13}\le\frac{1}{10-3sinx}\le\frac{1}{7}$

Comme $\int_0^{2\pi}\frac{1}{13}dx=\frac{2\pi}{13}$ *et* $\int_0^{2\pi}\frac{1}{7}dx=\frac{2\pi}{7}$ Alors : $\frac{2\pi}{13}\le\int_0^{2\pi}\frac{dx}{10-3\sin x}\le\frac{2\pi}{7}$

Exercice 9

$a)$ Soit : $f(x)=\frac{3x^2-4x+1}{(x^3-2x^2+x-5)^3}$; en posant $u(x)=x^3-2x^2+x-5$, on a $u'(x)=3x^2-4x+1$ et $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)^3}$

$\int_0^1\frac{3x^2-4x+1}{(x^3-2x^2+x-5)^3}dx=\left[-\frac{1}{2(x^3-2x^2+x-5)^2}\right]_0^1=-\frac{1}{50}+\frac{1}{50}=0$ D'où : $\int_0^1\frac{3x^2-4x+1}{(x^3-2x^2+x-5)^3}dx=0$

$b)$ Soit : $f(x)=sinxcos^3x$; en posant $u(x)=cosx$, on a $u'(x)=-sinx$ et $f(x)=-u'(x)\times u(x)^3$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}sinxcos^3x\,dx=\left[-\frac{1}{4}(cosx)^4\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{4}=\frac{15}{64}$ D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{3}}sinxcos^3x\,dx=\frac{15}{64}$

$c)$ Soit : $f(x)=$; en posant $u(x)=x^2-6x+5$, on a $u'(x)=2x-6$ et $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)\times e^{u(x)}$

$\int_1^4(x-3)e^{x^2-6x+5}dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2-6x+5}\right]_1^4=\frac{1}{2}(e^{-3}-1)$ D'où : $\int_1^4(x-3)e^{x^2-6x+5}dx=\frac{1}{2}(e^{-3}-1)$

$d)$ Soit : $f(x)=(2x-\frac{1}{cosx^2}e^{tanx-x^2}$; en posant $u(x)=tanx-x^2$, on a $u'(x)=-2x+\frac{1}{cosx^2}$ et $f(x)=-u'(x)\times e^{u(x)}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x-\frac{1}{cosx^2})e^{tanx-x^2}dx=\left[-e^{tanx-x^2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-e^{\frac{16-\pi^2}{16}}$ D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x-\frac{1}{cosx^2})e^{tanx-x^2}dx=1-e^{\frac{16-\pi^2}{16}}$

$e)$ Soit : $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+5}$; en posant $u(x)=x^2+3x+5$, on a $u'(x)=2x+3$ et $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

$\int_{-1}^0\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx=[ln(x^2+3x+5)]_{-1}^0=ln5-ln3$ D'où : $\int_{-1}^0\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx=ln\frac{5}{3}$

$f)$ Soit : $f(x)=cotanx=\frac{cosx}{sinx}$; en posant $u(x)=sinx$, on a $u'(x)=cosx$ et $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} cotanx dx = [ln(sinx)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = ln\frac{\sqrt{3}}{2} - ln1 = ln\frac{\sqrt{3}}{2}$ D'où : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} cotanx dx = ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

$g)$ Soit : $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1} = ln(1-x) \times \frac{1}{1-x}$; en posant $u(x) = ln(1-x)$, on a $u'(x) = -\frac{1}{1-x}$ et $f(x) = -u'(x) \times u(x)$

$\int_{-1}^{0} \frac{ln(1-x)}{1-x} dx = \left[-\frac{1}{2}[ln(1-x)]^2\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}(ln2)^2$ D'où : $\int_{-1}^{0} \frac{ln(1-x)}{1-x} dx = \frac{1}{2}(ln2)^2$

Exercice 10

a- $\forall x \in]0; +\infty[$; $g'(x) = (xlnx - x)' = lnx + 1 - 1 = lnx$

Alors ona : $f(x) = \frac{x^2}{2} - g'(x)$ Donc $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - g(x)$

D'où une primitive F de f sur $]0; +\infty[$ est : $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - xlnx + x$

b- $\int_1^e f(x)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - xlnx + x\right]_1^e = \frac{1}{6}e^3 - e + e - \frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{6}e^3 - \frac{7}{6}$ D'où : $\int_1^e f(x)dx = \frac{1}{6}(e^3 - 7)$

Exercice 11

1- F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = [(ax^2 + bx + c)e^x]' = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^x$

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 2 \\ b + c = -3 \end{cases}$ alors : $a = 1$; $b = 0$ et $c = -3$

D'où : $F(x) = (x^2 - 3)e^x$

2-$\int_{-3}^{0} f(x)dx = [(x^2 - 3)e^x]_{-3}^{0} = -3 - 6e^{-3} = -3(1 + 2e^{-3})$ D'où : $\int_{-3}^{0} f(x)dx == -3(1 + 2e^{-3})$

Exercice 12

1) En réduisant au même dénominateur $a + \frac{be^x}{e^x-1}$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$; On obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{a(e^x-1)+be^x}{e^x-1} = \frac{(a+b)e^x-a}{e^x-1}$

Par identification : $\begin{cases} a + b = 2 \\ -a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$ D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 3 - \frac{e^x}{e^x-1}$

$$I = \int_{ln2}^{ln4} \frac{2e^x - 3}{e^x - 1} dx = \int_{ln2}^{ln4} (3 - \frac{e^x}{e^x - 1}) dx = [3x - ln(e^x - 1)]_{ln2}^{ln4} = 3ln4 - ln3 - 3ln2 = 6ln2 - ln3 - 3ln2$$

2)$I = 3ln2 - ln3 = ln8 - ln3 = ln\frac{8}{3}$ D'où : $I = \int_{ln2}^{ln4} \frac{2e^x-3}{e^x-1} dx = ln\frac{8}{3}$

Exercice 13

1. $\forall x \in]0; +\infty[, \mathrm{f(x) - y} = \frac{2lnx}{x} + x - 1 - (x - 1) = \frac{2lnx}{x}$

$\forall x \in]0; 1[; \mathrm{f(x) - y} \leq 0$ alors $(\mathcal{C})$est en dessous de $(\mathcal{D})$et $\forall x \in]1; +\infty[; \mathrm{f(x) - y} \geq 0$ alors$(\mathcal{C})$ est au-dessus de$(\mathcal{D})$

b. $\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{f(x) - y}) = 0$ alors la droite $(\mathcal{D})$est asymptote à $(\mathcal{C})$en $+\infty$

2. $\forall x \in]0; +\infty[\mathrm{G'(x)} = \frac{2lnx}{x}$ alors G est une primitive de g sur $]0; +\infty[$.
3. $\mathcal{A} = 2 \times 2\int_1^e(\mathrm{f(x) - y})\mathrm{dx} = 4\int_1^e \frac{2lnx}{x} \mathrm{dx} = 4[(lnx)^2]_1^e = 4\mathrm{cm}^2$

Exercice 14

1) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote « verticale » à $(\mathcal{C}_f)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x + \frac{1}{x^2} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$

alors la droite d'équation$y = 2x$ est asymptote « oblique » à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)' = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3} = \frac{2(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x^3}$

$\forall x \in]0; +\infty[$; $\frac{2(1+x+x^2)}{x^3} > 0$ alors le signe de $f'(x) est\ celui\ de\ x - 1$

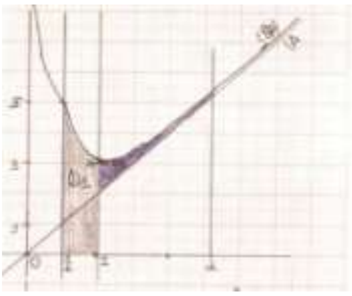
$\forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante

$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

2)Représentation graphique



3)Par définition, l'aire $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{D}_1$ est donnée par : $\mathcal{A}_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)dx + \left[x^2 - \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{7}{4}\ u.a$

Ici $1u.a = 2cm^2$. Donc : $\mathcal{A}_1 = \frac{7}{2}cm^2 = 3,5cm^2$

4)Sur $[1;\alpha]$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, en cm^2, de $\mathcal{D}_\alpha$ vaut donc :

$$\mathcal{A}(\alpha) = 2\int_1^\alpha [f(x) - 2x]dx = 2\int_1^\alpha \frac{1}{x^2} = 2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\alpha = \left(2 - \frac{2}{\alpha}\right)cm^2$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{2}{\alpha}\right) = 2cm^2$$

Problème résolu

PARTIE A

1) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(-3x^2 + 3 - 2\ln x) = +\infty$ car $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x\to 0} lnx = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-3x^2 + 3 - 2\ln x) = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$

$$2.\ a)\forall\ x \in]0;+\infty[,\ g'(x) = [-3x^2 + 3 - 2\ln x]' = -6x - \frac{2}{x} = -\frac{6x^2+2}{x} = \frac{-2(3x^2+1)}{x}$$

$b)\forall\ x \in]0;+\infty[,\ g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissante

$c)$ Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

$g(1) = -3\times 1^2 + 3 - 2\ln 1 = 0$

$\forall\ x \in]0;1[,\ x < 1$ alors $g(x) > g(1)$ car g est strictement décroissante et $g(1) = 0$ D'où : $\forall\ x \in]0;1[,\ g(x) > 0$

$\forall\ x \in]1;+\infty[,\ x > 1$ alors $g(x) < g(1)$ car g est strictement décroissante et $g(1) = 0$ D'où : $\forall\ x \in]1;+\infty[,\ g(x) < 0$

En conclusion : $\forall\ x \in]0;1[,\ g(x) > 0$ et $\forall\ x \in]1;+\infty[,\ g(x) < 0$

PARTIE B

$1.a)\ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\ln x - 1 - 3x^2}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}(2\ln x - 1 - 3x^2) = -\infty$ car $\begin{cases}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x} = +\infty \\ \lim_{x\to 0} 2\ln x - 1 - 3x^2 = -\infty\end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote « verticale » à $(\mathcal{C}_f)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x - 1 - 3x^2}{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{lnx}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{3}{2}x\right) = -\infty$ car $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{2}x = -\infty\end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x}\right) = 0$ car $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0\end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) = 0$ Alors la droite d'équation$y = -\frac{3}{2}x$ est asymptote « oblique » à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$

$b)$ Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $(\mathcal{C})$et (Δ) revient à résoudre l'équation $f(x) = -\frac{3}{2}x$

$\Leftrightarrow \frac{lnx}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{3}{2}x = -\frac{3}{2}x \Leftrightarrow \frac{lnx}{x} - \frac{1}{2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x - 1}{2x} = 0$. Comme $x \neq 0$,l'équation équivaut à $2lnx - 1 = 0$

D'où $lnx = \frac{1}{2}$ et $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ avec $f(\sqrt{e}) = -\frac{3}{2}\sqrt{e}$

Le point A a pour coordonnées $\left(\sqrt{e}; -\frac{3}{2}\sqrt{e}\right)$

$c)$ Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$et (Δ) revient à étudier le signe de $[f(x) - y]$ sur $[0;+\infty[$

$$f(x) - y = \frac{lnx}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{3}{2}x - \left(-\frac{3}{2}x\right) = \frac{2\ln x - 1}{2x}$$

$\forall\ x \in]0;\sqrt{e}[,\ f(x) - y < 0$ Alors $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{D}$ et $\forall\ x \in]\sqrt{e};+\infty[,\ f(x) - y > 0$ alors $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$

$2)\forall\ x\ \in]0;+\infty[, f'(x) = \left[\frac{2\ln x - 1 - 3x^2}{2x}\right]' = \frac{\left(\frac{2}{x} - 6x\right)\times 2x - 2(2\ln x - 1 - 3x^2)}{(2x)^2} = \frac{4 - 12x^2 - 4lnx + 2 + 6x^2}{4x^2}$

$$= \frac{2(-3x^2 + 3 - 2lnx)}{4x^2} = \frac{-3x^2 + 3 - 2lnx}{2x^2}$$

$$\forall\ x\ \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{-3x^2 + 3 - 2lnx}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

$\forall\ x\ \in]0;+\infty[$, $2x^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

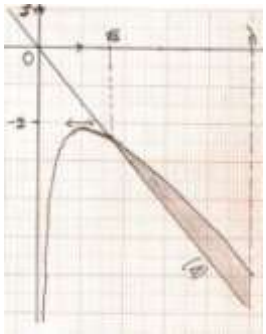
Donc : $\forall\ x\ \in]0;1[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante

Et $\forall\ x\ \in]1;+\infty[$ $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante

3) On peut dresser le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖		0		
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

4) Représentation graphique



PARTIE C

1) Voir la représentation graphique

2) On demande de calculer l'aire de la partie du plan comprise entre deux courbes. On a :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\sqrt{e}}^{\lambda}\left[f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right)\right]dx = \int_{\sqrt{e}}^{\lambda}\left(\frac{2lnx - 1}{2x}\right)dx = \int_{\sqrt{e}}^{\lambda}\left(\frac{1}{x}lnx - \frac{1}{2x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}(lnx)^2 - \frac{1}{2}lnx\right]_{\sqrt{e}}^{\lambda}$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{1}{2}(ln\lambda)^2 - \frac{1}{2}ln\lambda + \frac{1}{8}\right)u.a$$

3) $\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{2}(ln\lambda)^2 - \frac{1}{2}ln\lambda + \frac{1}{8}\right) = \lim_{\lambda\to+\infty} ln\lambda\left(\frac{1}{2}ln\lambda - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\frac{1}{ln\lambda}\right) = +\infty\ car \begin{cases}\lim_{\lambda\to+\infty} ln\lambda = +\infty \\ \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{ln\lambda} = 0\end{cases}$;

Lorsque λ *tend vers* $+\infty$, *l'aire de la partie coloriée n'a pas de limite fini*

CHAPITRE V : SUITES NUMÉRIQUES

Introduction :

Les suites ont toujours été présentes dans l'histoire des mathématiques, on les retrouve dans les écrits de toutes les époques et de toutes les cultures. Leur utilisation permit l'obtention de nombreux résultats avant même que le concept de fonction ne soit clairement dégagé et devienne opérationnel. On utilisera très vite les notions de suites pour déterminer très tôt la longueur d'une courbe (par exemple la longueur d'un cercle, en relation avec les valeurs approchées de π), l'aire de certains domaines et le volume de certains solides(citons par exemple les travaux **d'Archimède (287-212 av J.C.)** sur la détermination de l'aire de parabole).

Ce n'est qu'avec **d'Alembert (1717-1783)** qu'on commença à se préoccuper de la notion de limite. Cette notion fut précisée parles travaux de **Cauchy (1789-1857),** et admise par la totalité de la communauté mathématique après les travaux de **Weierstrass (1815-1817).**

FICHE DE COURS

I) GENERALITES

I-1) Définition

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

Détermination d'une suite numérique

En général une suite numérique (u_n)est définie par :

Une **formule explicite** exprimant $u_n$en fonction de$n$ (Par exemple $u_n = \frac{n+1}{2n-3}$)

ou bien le premier terme et une formule de récurrence exprimant u_{n+1}en fonction de u_n ou bien u_n en fonction de u_{n-1}.(par exemple$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\ n \ \in N: u_{n+1} = 2u_n - 7 \end{cases}$

I-2) Représentations graphiques

Représentation des termes d'une suite sur l'axe (OI).

Méthode : soit la suite u définie par :$\begin{cases} u_0 \\ \forall\ n \ \in \mathbb{N}: u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$;

Soit $(\mathcal{C})$la courbe représentative de f et soit la droite (Δ)d'équation $y = x$.

On place u_0 sur l'axe (OI).

On trace la parallèle à (OJ) par u_0, elle coupe$(\mathcal{C}_f)$ au point $A\begin{pmatrix} u_0 \\ f(u_0) \end{pmatrix}$;

La parallèle à (OI) passant par A coupe(Δ) au point $B\begin{pmatrix} b \\ u_1 \end{pmatrix}$, puisque $B \in (\Delta)$: $y = x$, l'ordonnée de B est égale à son abscisse. Donc $B\begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$

La parallèle à (OJ) passant par B coupe (OI) en u_1

I-3) Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$, qui concerne un entier n, est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 ,on procède en deux étapes :

1) On démontre que $P(n_0)$est vraie ;
2) On démontre que : pour tout entier k supérieur ou égal à n_0, si $p(k)$ est vraie alors $p(k+1)$ est vraie.

I-1) Sens de variation d'une suite numérique

Soit$(u_n)_{n\in E}$ une suite numérique.

Si pour tout n élément de E, $u_{n+1} - u_n \geq 0$,alors la suite (u_n)est croissante sur E

Si pour tout n élément de E, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite (u_n)est décroissante sur E.

Si pour tout n élément de E, $u_{n+1} - u_n = 0$, alors la suite (u_n)est constante sur E.

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

1ére méthode : on compare u_{n+1} et u_n, ce qui revient à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$..
2ème méthode : lorsque la suite est à termes positifs. On compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$et 1 ;
3ème méthode : lorsque la suite est définie par une formule explicite de type $u_n = f(n)$, on étudie le sens de variation de la fonction f. la suite u et la fonction$f$ ont le même sens de variation.
Lorsque la suite est définie par une formule de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$on utilise le raisonnement par récurrence.

I-5) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

On dit qu'une suite numérique u définie sur une partie E de $\mathbb{N}$ est :
Majorée s'il existe un nombre M tel que, $\forall\, n \in E, u_n \leq M$
Minorée s'il existe un nombre réel m tel que,$\forall\, n \in E, u_n \geq m$.
Bornée s'il elle est à la fois majorée et minorée
Positive si elle est minorée par 0.
Négative si elle est majorée par 0.

II) SUITES ARITHMETIQUES SUITES GEOMETRIQUES

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Premier terme	u_0	u_0
Raison	$r\ (r \in \mathbb{R})$	$q\ (q \in \mathbb{R})$
formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_0 q^n$ $u_n = u_p q^{n-p}$
Somme des n premiers termes $(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$	$\frac{\boldsymbol{n+1}}{\mathbf{2}}(u_0 + u_n)$	$u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\ (q \neq 1)$

III) CONVERGENCE

III-1) Définitions

Une suite u est convergente lorsqu'elle admet une limite finie en $+\infty$.
Une suite croissante et majorée converge.
Une suite décroissante et minorée converge
Une suite est divergente lorsqu'elle n'est pas convergente.

III-2) Convergence d'une suite géométrique

Soit u une suite géométrique de raison q et de 1er terme u_0
Si $q = 1$; u converge vers u_0
Si $q = -1$; u diverge.
Si $-1 < q < 1$ u converge vers 0.
Si $q > 1$ ou $q < -1$ u diverge.

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

Soit la suite numérique u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \end{cases}$

Représenter les 5 premiers termes de la suite u sur l'axe (OI).

Exercice 2

Soit la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n \end{cases}$

Démontrer par récurrence sur n que : $\forall\, n \in \mathbb{N};\ u_n = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Exercice 3

Soit la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases}$

1) Représenter sur l'axe (OI) les 4 premiers termes de la suite.
2) Démontrer par récurrence sur n que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$,$(u_n)$est majorée par 3.
3) Calculer en fonction de u_n: $u_{n+1} - u_n$.
4) En déduire le sens de variation de (u_n).

Exercice 4

Soit x un nombre réel. On considère les trois réels u, v, w définis par :

$$u = (x^2 - 2x - 1)^2;\ v = (x^2 + 1)^2;\ w = (x^2 + 2x - 1)^2.$$

Montrer que u, v, w sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

Exercice 5

(u_n)est une suite arithmétique telle que $\begin{cases} u_{35} + u_{39} = 74 \\ u_{18} - u_{13} = 10 \end{cases}$

Déterminer le premier terme $u_0$et la raison r de cette suite.

Exercice 6

Déterminer trois termes consécutifs d'une suite arithmétique dont la somme des termes est 51 et le produit est 4301.

Exercice 7

Soit (u_n)une suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

Montrer que la suite (v_n)définie par $v_n = 3^{u_n}$est géométrique

Exercice 8

u_1, u_2, u_3, u_4et $u_5$désignent cinq termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.

a) Montrer que $u_1 u_5 = {u_3}^2$

b) Déterminer les termes sachant que : $u_1 u_5 = 25;\ u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2}$ et $u_3 > 0$.

Exercice 9

La suite (U_n), avec $n \geq 1$, est arithmétique. Déterminer le premier terme U_1 et la raison r sachant que :
$U_7 + U_8 + U_9 = 12$ et $U_4 + U_8 = -4$

Exercice 10

Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique : $S_{15} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{15}$ sachant que $U_4 = 8$ et $U_7 = -1$.

Exercice 11

La suite (U_n) étant arithmétique, déterminer l'entier n tels que : $U_n = -28$, $U_0 = 5$ et

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{n=} - 138$$

Exercice 12

La suite (U_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, déterminer l'entier n tel que : $U_O = 4$ et $U_n = \frac{1}{4}$

Exercice 13

Trois nombres x , y et z sont les trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Leur produit est $\frac{8}{27}$ et leur somme est$\frac{26}{9}$.

Déterminer ces trois nombres.

Exercice 14

Calculer la somme : $S_{10} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{10}$ sachant que $U_n = \frac{2^n}{3}$ pour tout entier n.

Exercice 15

Calculer les sommes suivantes : $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots \frac{1}{59049}$ et $R = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 16384$

Exercice 16

Dans un village de Côte d'Ivoire, vit un très vieil homme, au milieu de ses enfants, petits-enfants, arrière-petits-enfants et arrières-arrières-petits enfants. Chacun d'eux a le même nombre n d'enfants (sauf les arrières-arrières-petits enfants qui n'ont pas encore procréé) et tous sont en vie.

1). Calculer en fonction de n, le nombre de membres de la famille.

2). On suppose que la famille comprend 2801 personnes. Combien le patriarche a-t-il eu d'enfants ?

Exercice 17

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4 \end{cases}$

1). Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

a). Tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x$+4 et $y = x$ puis construire les quatre premiers termes de la suite (U_n)sur l'axe des abscisses.

b).Utiliser cette construction pour conjecturer le sens de variation et la limite de (U_n).

2). Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$la suite définie pour tout entier naturel n par : $V_n = U_n - 8$.

a). Démontrer que (V_n)est une suite géométrique.

b). Exprimer (V_n)puis (U_n)en fonction de n.

c). En déduire la limite de la suite (V_n), puis de la suite (U_n).

Exercice 18

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 1 + 10U_n \end{cases}$

a). Calculer$U_2, U_3, U_4 et U_5$.

b). Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n$est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique que l'on déterminera.

c). En déduire l'expression de $U_n$en fonction de n.

Exercice 19

Un véhicule coûte 30 000 000 F. Il se déprécie de 20% par an ; c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 20% par an.

1). Quelle est la valeur du véhicule au bout de 5 ans ?

2). On suppose que pendant la même période, les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 5% par an.

a). Quelle somme l'entreprise doit prévoir pour remplacer le véhicule au bout de 5 ans ?

b). On suppose que le véhicule coûte 30 000 000 en 2014, en quelle année le prix du véhicule doublera ?

Exercice 20

Soit r un nombre réel strictement positif, u le nombre complexe de module r et d'argument $-\frac{3\pi}{4}$.

1- On considère la suite (A_n) de points définie par :

- $A_0 = 0$
- L'affixe de A_1 est i
- $\forall\, n \geq 2, A_n$ est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1}, de rapport r et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$. On désigne par Z_n l'affixe de A_n.

a- Ecrire, pour tout entier naturel n non nul et distinct de 1, une relation entre Z_n, Z_{n-1} et Z_{n-2}.

b- Démontrer que : $\forall\ n \geq 2, Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$.

2- Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s, qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2 .

Exercice 21

On définit les nombres complexes Z_n de la manière suivante : $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ \forall\ n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i \end{cases}$

1- Pour tout entier n, on pose $U_n = Z_n - i$

a) Montrer que la suite U est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b)Calculer U_n puis Z_n en fonction de n

2- a)Exprimer en fonction de n la partie réelle (x_n) et la partie imaginaire (y_n) de U_n.

b)Déterminer les limites des suites (x_n) et (y_n) et celle de (U_n).

3- En déduire la limite de la suite (Z_n)

4- Sachant que : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ et $T_n = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$

Calculer S_n puis T_n en fonction de n.

Exercice 22

U est la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{2}{3} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}}\ (\forall\ n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1- Calculer U_1 et U_2.

2- V est la suite définie par :pour tout entier naturel n, $V_n = U_n\sqrt{2} - n$.

Démontrer que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0.

3- Calculer $V_n\ puis\ U_n$ en fonction de n. Etudier la convergence de la suite U

4- $S_{0,n} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$. Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n. Etudier $\lim_{n\to+\infty} S_{0,n}$

Exercice23

En testant une certaine lame de verre, on a constaté que la lumière perd $\frac{1}{12}$ de son intensité en traversant cette lame. Combien doit-on disposer de lames identiques pour que, au travers de l'ensemble, la lumière perde la moitié de son intensité ?

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 2$

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 - 2^n$

Exercice 3

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

a. CalculerS_1, S_2, S_3, S_4.

b. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n

c. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Exercice 4

Soient(U_n) et (V_n)les suites définies pour tout entier naturel n par : $U_0 = 9, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3$;

$V_n = U_n + 6$.

1) Représenter les 5 premiers termes de la suite U sur l'axe (OI)

2). Montrer que (V_n)est une suite géométrique à termes positifs.

3.a. Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ puis $T_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$en fonction de n

b. calculer V_n puis U_n en fonction de n

c. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} T_n$

4. On définit la suite (W_n)par $W_n = lnV_n$pour tout entier n.

Montrer que la suite(W_n) est une suite arithmétique.

5. Calculer le produit $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$en fonction de$n$.

En déduire $\lim_{n\to+\infty} P_n$

6.Calculer$Q_n = W_{0+}W_1+W_2 + \cdots + W_n$en fonction de n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} Q_n$

Exercice 5

Considérons la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n \\ U_0 = 1 \\ U_1 = 2 \end{cases}$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = 2^n$

Exercice 6

$x, y\ et\ z$ sont, dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 9 et la somme de leur carré est 59.

Exercice7

$x, y\ et\ z$ sont, dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante. Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 63 et la somme de leur carré est $\frac{7}{16}$

Exercice 8

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n};\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que pour tout$n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n \leq 3$
2) On considère la suite (V_n) définie pour tout$n \in \mathbb{N}$ par $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2}$

Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.

3) Exprimer V_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (V_n)
4) En déduire la limite de la suite (U_n)

Exercice 9

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 9e \\ U_{n+1} = 3\sqrt{U_n}\ \ ,\forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On pose $V_n = ln\left(\frac{U_n}{9}\right)$ pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0
2. Exprimer V_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (V_n)
3. En déduire la limite de la suite (U_n)

Exercice 10

Soit (U_n) telle que $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} = \frac{-4}{4+U_n}$

Soit (V_n) telle que, pour tout entier naturel n, ; $V_n = \frac{1}{2+U_n}$.

1. Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.
2. Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que pour tout entier naturel n,$U_n = \frac{2}{n+1} - 2$
3. Calculer la limite de la suite (U_n) et celle de la suite(V_n) .

Exercice 11

Le plan est muni du repère orthonormé(O, I, J).

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\epsilon N}$ définie par :$\begin{cases} U_0 = 4 \\ \forall n\epsilon\mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \end{cases}$

1). Construire les 5 premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses.

2)a). Démontrer que $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n - U_{n-1})$.

b). En déduire que : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c). Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?

3)a). Démontrer que $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*, U_n + 6 = \frac{1}{2}(U_{n-1} + 6)$.

b). En déduire que $\forall n \epsilon \mathbb{N}, U_n + 6 = \frac{1}{2}(U_0 + 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c). Calculer la limite de la suite (U_n).

Exercice 12

On considère les suites $(U_n)_{n\epsilon N}$ et $(V_n)_{n\epsilon N}$ définies par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \text{ et } V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \end{cases}$ ln désigne la fonction logarithme népérien.

1). Calculer V_0.

2). Démontrer que (V_n)est une suite géométrique de raison 2.

3). Exprimer $V_n$en fonction de n.

4). Calculer la limite de V_n.

5). Exprimer $U_n$en fonction de $V_n$et déduire la limite de (U_n).

6). Pour tout entier naturel n, non nul on pose :

$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots + V_{n-1}$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \ldots \ldots . \times U_{n-1}$

a). Démontrer que : $S_n = (1 - 2^n)\ln 2$.

b). Justifier que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$.

c). Exprimer $T_n$en fonction de n.

Exercice 13

Soit a un nombre réel donné. On considère les suites (U) et (V)définies par :

- $U_0 = 3, U_1 = 5$, et $\forall n \epsilon \mathbb{N}, U_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 U_{n+1} + (a-2)U_n$.
- $\forall n \epsilon \mathbb{N},\ V_n = U_{n+1} - U_n$.

I). On pose : a = 1

1). Démontrer que la suite (V)est constante et donner sa valeur.

2). En déduire que$U$ est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.

3). On pose :$S_n = U_0 + U_1 + \cdots \ldots . + U_n$.Exprimer $u_n$puis $S_n$en fonction de n.

II). On pose : $a = -5$.

1). Démontrer que Vest une suite géométrique dont la raison est égale à 7.

2). Exprimer $V_n$en fonction de n.

3). Pour tout entier$n$ supérieur ou égal à 1, exprimer en fonction de n la somme

T_n où $T_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots + V_n$

4). Exprimer $U_n$en fonction de T_n.

5). En déduire que la suite Uest divergente.

Exercice 14

On se propose d'étudier la suite(U_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n e^{-U_n}, \end{cases}$ puis la convergence de la suite(S_n) définie par $S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p$ pour tout n

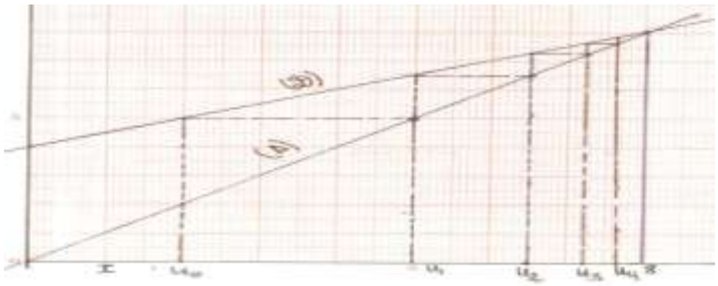
1- a)Montrer pour pour tout entier n, U_n est strictement positif.
   b)Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
   c)En déduire qu'elle converge et trouver sa limite.
2- Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$ $U_{n+1} = e^{-S_n}$ et en déduire que S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1

La suite u est définie par une formule de récurrence du type $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$

Soit $(\mathcal{D})$la courbe représentative de f et soit la droite (Δ)d'équation $y = x$



Exercice 2

Pour $n = 0$; $U_0 = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 4 \times 1 = 4 \quad alors\ U_0 = 4$: la relation est vraie pour $n = 0$.

Supposons que pour tout $k\ de\ \mathbb{N}$: $u_k = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^k$ et montrons que $u_{k+1} = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = \frac{3}{2}u_k = \frac{3}{2} \times 4\left(\frac{3}{2}\right)^k = 4 \times \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^k = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$$

Alors $\forall\, k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$ donc la relation est vraie pour $n = k + 1$

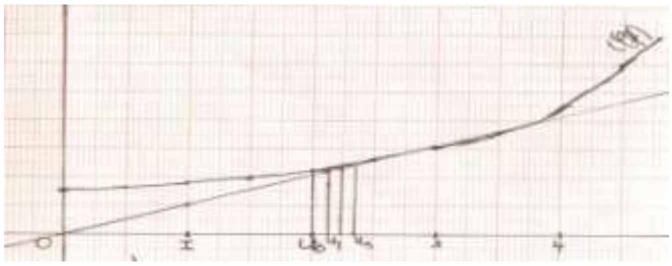
En conclusion$\forall\, n \in \mathbb{N}$; $u_n = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Exercice 3

1.) Représenter sur l'axe(OI) les 4 premiers termes de la suite

La suite u est définie par une formule de récurrence du type $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \frac{9}{6-x}$

Soit $(\mathcal{C})$la courbe représentative de f et soit la droite (Δ)d'équation $y = x$



2.) Démontrons par récurrence sur n que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $u_n$est majorée par 3

Cela revient à montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq 3$

On a : $U_0 = 2$ alors $U_0 < 2$; la relation est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $\forall\, k \in \mathbb{N}$: $U_k \leq 3$ et montrons que $U_{k+1} \leq 3$

$\forall\, k \in \mathbb{N}$: $U_k \leq 3 \Rightarrow -U_k \geq -3 \Rightarrow 6 - U_k \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{6-U_k} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{6-U_k} \leq 3$; or $U_{k+1} = \frac{9}{6-U_k}$

donc$\forall\, k \in \mathbb{N}$: $U_{k+1} \leq 3$

En conclusion$\forall\, n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq 3$. Par conséquent la suite u est majorée par 3

3.) $U_{n+1} - U_n = \frac{9}{6-u_n} - u_n = \frac{9-6U_n+(U_n)^2}{6-u_n} = \frac{(3-U_n)^2}{6-u_n}$;

4.) Le sens de variation de(u_n)

D'après la question précédente : $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = \frac{(3-U_n)^2}{6-u_n}$

Or $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(3 - U_n)^2 > 0$ alors le signe de $U_{n+1} - U_n$ est celui de $6 - u_n$

D'après la question 2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $U_n < 3$ alors $6 - U_n > 3 > 0$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n > 0$, d'où la suite U est strictement croissante

Exercice 4

Pour prouver que u, v, w sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, on a le choix :
Soit on montre que $v - u = w - v$ (valeur de la raison), soit que $2v = u + w$
Ici, la première méthode est plus rapide grâce à la différence de deux carrés.
$v - u = (x^2+1)^2 - (x^2-2x-1)^2 = [x^2+1-(x^2-2x-1)][x^2+1+(x^2-2x-1)] == 4x(x-1)(x+1)$
$w - v = (x^2+2x-1)^2 - (x^2+1)^2 = [x^2+2x-1-(x^2+1)][x^2+2x-1+(x^2+1)] = 4x(x-1)(x+1)$
Comme $v - u = w - v$, les termes $u, v\ et\ w$ sont donc trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Exercice 5

Par définition de la suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r: $U_n = U_0 + nr$
Alors : $U_{35} = U_0 + 35r$; $U_{39} = U_0 + 39r$; $U_{18} = U_0 + 18r$ et $U_{13} = U_0 + 13r$
On obtient le système ; $\begin{cases} U_0 + 35r + U_0 + 39r = 74 \\ U_0 + 18r - (U_0 + 13r) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2U_0 + 74r = 74 \\ 5r = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ U_{0=-37} \end{cases}$

Exercice 6

Considérons les trois termes consécutifs $x; y\ et\ z$ d'une suite arithmétique de raison r.
On a alors$2y = x + z$ ou bien $x = y - r\ et\ z = y + r$
La somme vaut 51 et le produit 4301 ce qui se traduit par :
$\begin{cases} x + y + z = 51 \\ xyz = 4301 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-r) + y + (y+r) = 51 \\ (y-r)y(y+r) = 4301 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 51 \\ (y-r)y(y+r) = 4301 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 17 \\ 17(17-r)(17+r) = 4301 \end{cases}$
$\Leftrightarrow 17^2 - r^2 = 253$ **alors** $r^2 = 289 - 253$; $r^2 = 36 \Rightarrow r = 6\ ou\ r = -6$
Si $r = 6$: les trois termes sont 11 ; 17 et 23
Si $r = -6$: les trois termes sont 23 ; 17 et 11

Exercice 7

Méthode : pour montrer qu'une suite (U_n) est géométrique, vous devez montrer que $U_{n+1} = qU_n$, q est un nombre réel
(U_n) est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2. On peut donc, au choix, utiliser $u_{n+1} = u_n + 2$ ou $U_n = U_0 + 2n = 2n$
$V_{n+1} = 3^{u_{n+1}} = 3^{U_n+2} = 3^2 \times 3^{U_n} = 9 \times 3^{U_n} = 9V_n$; $V_{n+1} = 9V_n$
Ou bien $V_n = 3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$
Ces deux relations prouvent que la suite (V_n) est géométrique de premier terme $V_0 = 1$ et de raison 9

Exercice 8

a) **Le nombre réel q est non nul sinon $u_2 = u_3 = u_4 = 0\ et\ u_2 + u_3 + u_4 = 0$**
On a $u_3 = u_1q^2$ et $u_5 = u_3q^2$ alors $u_1u_5 = u_1u_3q^2 = (u_1q^2)u_3 = (u_3)^2$
Si la suite (U_n) est géométrique, on a : $U_{n-k} \times U_{n+k} = (U_n)^2$ pour tout n et tout $k (k \leq n)$.
En effet, $U_n = U_{n-k} \times q^k$ et $U_{n+k} = U_n \times q^k$ ce qui explique le résultat.
b) **On a $u_1u_5 = 25$ soit $(u_3)^2 = 25$. on en déduit alors que $u_3 = 5$ ou $u_3 = -5$**
Or $u_3 > 0$ donc $u_3 = 5$
Connaissant u_3 il est naturel d'exprimer u_2 et u_4 en fonction de u_3 et de la raison dans $u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2}$
$u_2 = u_3 \times q^{-1} = \frac{u_3}{q}$; $u_4 = u_3q$: **d'où** $\frac{5}{q} + 5 + 5q = \frac{35}{2}$
En multipliant par q et en simplifiant par 5 l'équation devient : $q^2 - \frac{5}{2}q + 1 = 0$
Son discriminant est : $\Delta = \frac{9}{4}$
Les solutions de l'équation sont alors : $q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$

- **Si $q = 2$:** $u_1 = \frac{5}{4}$; $u_2 = \frac{5}{2}$; $u_3 = 5$; $u_4 = 10$; $u_5 = 20$

Si $q = \frac{1}{2}$: $u_1 = 20$; $u_2 = 10$; $u_3 = 5$; $u_4 = \frac{5}{2}$; $u_5 = \frac{5}{4}$

Exercice 9

Par définition de la suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r: $U_n = U_1 + (n-1)r$
Alors : $U_7 = U_1 + 6r$; $U_8 = U_1 + 7r$; $U_9 = U_1 + 8r$ et $U_4 = U_1 + 3r$
$U_7 + U_8 + U_9 = (U_1 + 6r) + (U_1 + 7r) + (U_1 + 8r) = 12$ **Alors** $3u_1 + 21r = 12$ **ou bien** $u_1 + 7r = 4$
$U_4 + U_8 = U_1 + 3r) + (U_1 + 7r) = -4$ **Alors** $2u_1 + 11r = -4$
Dans la première équation $u_1 = 4 - 7r$

En remplaçant u_1 par sa valeur dans la deuxième équation on obtient : $r = 4$

$$r = 4 \;\; et \;\; u_1 = -24$$

Exercice 10

La somme des 16 premiers termes d'une suite arithmétique de premier U_0 et de raison r est : $S_{15} = \frac{16}{2}(U_0 + U_{15})$

$$S_{15} = 8(U_0 + U_0 + 15r) = 8(2U_0 + 15r)$$

Déterminons la raison et le premier terme

Par définition de la suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r: $U_n = U_0 + nr$

Alors : $U_4 = U_0 + 4r = 8$; $U_7 = U_0 + 7r = -1$ et $U_{15} = U_0 + 15r$

Donc $\begin{cases} U_0 + 4r = 8 \\ U_0 + 7r = -1 \end{cases}$ en faisant la différence membre à membre on obtient : $3r = -9$ Alors $r = -3$

En remplaçant r par sa valeur dans l'une des deux équations on obtient $U_0 = 20$

Donc : $S_{15} = 8(2U_0 + 15r) = 8[2 \times 20 + 15(-3)] = -40$

D'où : $S_{15} = -40$

Exercice 11

On a : $S_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n) = \frac{n+1}{2}(5 - 28) = \frac{-23(n+1)}{2}$

$$S_n = -138 \Leftrightarrow \frac{-23(n+1)}{2} = -138 \Leftrightarrow -23(n+1) = -276 \Leftrightarrow n + 1 = 12 \;\; Alors \, n = 11$$

Exercice 12

On a $U_n = U_0 q^n$ où q est la raison de la suite. Alors $U_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Par identification : $4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}$ $\;\; alors \;\;$ $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ Donc $n = 4$

Exercice 13

Considérons les trois termes consécutifs $x; y \; et \; z$ d'une suite géométrique de raison q.

On a alors$y^2 = x \times z$ ou bien $x = \frac{y}{q} \; et \; z = y \times q$

La somme vaut $\frac{26}{9}$ et le produit $\frac{8}{27}$ ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} x + y + z = \dfrac{26}{9} \\ xyz = \dfrac{8}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{y}{q}\right) + y + (y \times q) = \dfrac{26}{9} \\ \left(\dfrac{y}{q}\right) y (y \times q) = \dfrac{8}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{y}{q}\right) + y + (y \times q) = \dfrac{26}{9} \\ y^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{\frac{2}{3}}{q} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}q = \dfrac{26}{9} \end{cases}$$

D'où $\frac{2}{3q} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}q = \frac{26}{9}$

En multipliant par q et en simplifiant par $\frac{2}{3}$ l'équation devient : $q^2 - \frac{10}{3}q + 1 = 0$

Son discriminant est : $\Delta = \frac{64}{9}$

Les solutions de l'équation sont alors : $q = 3 \;\; ou \;\; q = \frac{1}{3}$

- Si $q = 2$: $x = \frac{2}{9}$; $y = \frac{2}{3}$; $z = 2$
- Si $q = \frac{1}{3}$: $x = 2$; $y = \frac{2}{3}$; $z = \frac{2}{9}$

Exercice 14

On remarque la suite U est une suite géométrique de premier terme $U_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $q = 2$

$S_n = U_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$ Alors $S_{10} = \frac{2}{3}\left[\frac{1-2^{11}}{1-2}\right] = -\frac{2}{3}(1 - 2048) = \frac{4094}{3}$

D'où : $S_{10} = \frac{4094}{3}$

Exercice 15

- $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots \frac{1}{59049} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$

S est la somme de 11 termes d'une suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{3}$

Alors $S = U_0\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1-\frac{1}{3}}\right] = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11}\right] = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{177147}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{177146}{177147} = \frac{88573}{59049}$

D'où $S = \frac{88573}{59049}$

$$R = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 16384 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{14}$$

R est la somme de 15 termes d'une suite géométrique de premier terme $V_0 = 1$ et de raison $q = 2$

Alors $R = U_0\left[\frac{1-2^{15}}{1-2}\right] = -(1 - 2^{15}) = 2^{15} - 1 = 32767$

D'où $R = 32767$

Exercice 16

a) Calculons en fonction de n, le nombre de membres de la famille

Le vieillard à n enfants ; $n \times n$ petits enfants ; $n \times n \times n$ arrière- petits enfants et $n \times n \times n \times n$ arrières-arrières petits enfants. (car chacun a le même nombre n d'enfants)

Le nombre de membres de la famille est : $1 + n + n^2 + n^3 + n^4 = \frac{n^5-1}{n-1}$ car $1 + n + n^2 + n^3 + n^4$ est la somme de 5 termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison n

b) On résout l'équation $\frac{n^5-1}{n-1} = 2801$ $\quad Alors\ n = 7.$

Le patriarche a eu 7 enfants.

Exercice 17

1.a) Voir exercice 1

b) le graphique conduit à conjecturer que la suite (U_n) est croissante et converge vers 8.

2.a) Démontrer que (V_n)est une suite géométrique

$V_{n+1} = U_{n+1} - 8 = \frac{1}{2}U_n + 4 - 8 = \frac{1}{2}U_n - 4 = \frac{1}{2}(U_n - 8) = \frac{1}{2}V_n$ Alors $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$

Donc ; (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme V_0 tel que $V_0 = U_0 - 8 = -6$

b.) Exprimer (V_n)puis (U_n).en fonction de n

(V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme V_0 tel que $V_0 = -6$: $V_n = V_0 q^n \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$

On a : $\forall n \epsilon \mathbb{N}, V_n = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-6}{2^n}$

Donc : $\forall n \epsilon \mathbb{N}\ U_n = V_n + 8 = \frac{-6}{2^n} + 8$

c.) En déduire la limite de la suite (V_n), puis de la suite (U_n)

On a : $0 < \frac{1}{2} < 1$; donc : $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

On en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} U_n = 8$

Exercice 18

$$U_2 = 1 + 10U_1 = 1 + 10 = 11 U_3 = 1 + 10U_2 = 1 + 10(1 + 10) = 1 + 10 + 100 = 111$$
$$U_4 = 1 + 10U_3 = 1 + 10(1 + 10 + 100) = 1 + 10 + 100 + 1000 = 1111$$
$$U_5 = 1 + 10U_4 = 1 + 10(1 + 10 + 100 + 1000) = 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = 11111$$

a.) D'après a.) on a : $U_5 = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \cdots 10^n$

Alors pour tout entier naturel n non nul, $U_n$est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $U_1 = 1$ et de raison $q = 10$

b.) l'expression de $U_n$en fonction de n

$U_n = U_1\left[\frac{1-10^n}{1-10}\right] = -\frac{1}{9}(1 - 10^n)$;

D'où : $U_n = \frac{1}{9}(10^n - 1)$

Exercice 19

1) Recherchons une suite permettant de déterminer la valeur du véhicule d'année en année.

Posons $U_0 = 30\bar{M}$ ($\bar{M} = million$)

Désignons par U_n la valeur du véhicule n années après ($n \geq 1$)

$U_1 = U_0 - \frac{20}{100}U_0 = (1 - 0,2)U_0 = 0,8U_0$

De même : $U_2 = U_1 - \frac{20}{100}U_1 = (1 - 0,2)U_1 = 0,8U_1$

Par itération : $U_{n+1} = U_n - \frac{20}{100}U_n = (1 - 0,2)U_n = 0,8U_n$

$U_{n+1} = 0,8U_n$; Les nombres réels (U_n) sont les termes d'une suite géométrique de 1er terme $U_0 = 30\bar{M}$ et de raison 0,8

$$U_n = U_0 \times q^n = 30\bar{M} \times (0,8)^n$$

La valeur du véhicule 5 ans après est : $U_5 = 30\bar{M} \times (0,8)^5 = 9,8304\bar{M}$

2) Posons $V_0 = 30\bar{M}$ ($\bar{M} = million$)

a.) Désignons par V_n le prix du véhicule neuf, n années après ($n \geq 1$)

$V_1 = V_0 + \frac{5}{100}V_0 = (1+0,05)V_0 = 1,05V_0$

De même : $V_2 = V_1 + \frac{5}{100}V_1 = (1+0,O5)V_1 = 1,05V_1$

Par itération : $V_{n+1} = V_n - \frac{5}{100}V_n = (1+0,05)V_n = 1,05V_n$

$V_{n+1} = 1,05V_n$; Les nombres réels (V_n) sont les termes d'une suite géométrique de 1er terme $V_0 = 30\bar{M}$ et de raison 1,05

$$V_n = V_0 \times q^n = 30\bar{M} \times (1,05)^n$$

Le prix du véhicule neuf 5 ans après est : $V_5 = 30\bar{M} \times (1,05)^5 = 38,288\bar{M}$

b.) On cherche n tel que $V_n = 60\bar{M}$; $\quad Or\ V_n = 30\bar{M} \times (1,05)^n$

$30\bar{M} \times (1,05)^n = 60\bar{M} \Leftrightarrow (1,05)^n = 2 \Leftrightarrow ln(1,05)^n = ln2 \Leftrightarrow nln(1,05) = ln2 \Leftrightarrow n = \frac{ln2}{ln(1,05)}$

$$n \approx 15$$

Le prix du véhicule doublera en 2029

Exercice 20

1.a) Ecrivons, pour tout entier naturel n non nul et distinct de 1, une relation entre Z_n, Z_{n-1} et Z_{n-2}

Toute similitude directe a pour écriture complexe : $Z' = re^{i\theta}Z + b$

D'où $Z' = re^{-i\frac{3\pi}{4}}Z + b$

$S(A_{n-2}) = A_n \Rightarrow Z_n = re^{-i\frac{3\pi}{4}}Z_{n-2} + b$ avec $Z_{n-1} = re^{-i\frac{3\pi}{4}}Z_{n-1} + b$ car le centre est le seul point invariant.

$$b = \left(1 - re^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)Z_{n-1}$$

Donc : $Z_n = re^{-i\frac{3\pi}{4}}Z_{n-2} + \left(1 - re^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)Z_{n-1} \Rightarrow Z_n = re^{-i\frac{3\pi}{4}}(Z_{n-2} - Z_{n-1}) + Z_{n-1}$

D'où $Z_n = u(Z_{n-2} - Z_{n-1}) + Z_{n-1}$

b.) Démontrer que : $\forall\ n \geq 2, Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$

On a : $Z_n - Z_{n-1} = u(Z_{n-2} - Z_{n-1})$

$Z_2 - Z_1 = u(Z_0 - Z_1) = -iu = (-u)^1 i$

$Z_3 - Z_2 = u(Z_1 - Z_2) = -u(Z_2 - Z_1) = -u(-u)^1 i = (-u)^2 i$

La propriété est vraie au rang $n = 2\ et\ n = 3$. Supposons qu'elle est vraie pour tout $k \geq 2$. alors: $Z_k - Z_{k-1} = (-u)^{k-1}i$

Et montrons que : $\forall\ k \geq 2 Z_{k+1} - Z_k = (-u)^{(k+1)-1}i$

On : $Z_{k+1} - Z_k = u(Z_{k-1} - Z_k) = -u(Z_k - Z_{k-1}) = -u(-u)^{k-1}i = (-u)^{(k+1)-1}i$

Alors : $Z_{k+1} - Z_k = (-u)^{(k+1)-1}i$. Cette est alors vraie

En conclusion : $\forall\ n \geq 2, Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$

2.) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe, qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2

On a : $S(A_0) = A_1\ \ et\ S(A_1) = A_2 \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = aZ_0 + b \\ Z_2 = aZ_1 + b \end{cases}$ en faisant la différence membre à membre on obtient :

$a = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 - Z_0} = -u$ et $b = Z_1 - aZ_0 = i$

Alors S est une similitude directe de centre le point A_1 de rapport r et d'angle $\frac{\pi}{4}$

Exercice 21

1.a) Démontrer que U est une suite géométrique

$U_{n+1} = Z_{n+1} - i = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i - i = \frac{1}{3}Z_n - \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}(Z_n - i) = \frac{1}{3}U_n$ Alors $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n$

Donc ; U est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme U_0 tel que $U_0 = Z_0 - i = 1 - i$

b.) Exprimer (U_n)puis (Z_n).en fonction de n

(U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme U_0 tel que $U_0 = 1 - i$: $\quad U_n = U_0 q^n \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}$

On a : $\forall\ n\epsilon\ \mathbb{N}, U_n = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1-i}{3^n}$

Donc : $\forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}\ Z_n = U_n + i = \frac{1-i}{3^n} + i$

2.a) Exprimons en fonction de n la partie réelle (x_n) et la partie imaginaire (y_n) de U_n

$$\forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}, U_n = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - i\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \begin{cases} x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ y_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

b.) Déterminons les limites (x_n) et (y_n) et celle de (U_n).

On a : $0<\frac{1}{3}<1$; donc : $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

3.) On en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} Z_n = i$

4.) Calculer $S_n et T_n$

$$S_n = U_0\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right] = \frac{3}{2}(1-i)\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$T_n = Z_{0+}Z_1+Z_2+\cdots+Z_n = (U_0+i)+(U_1+i)+(U_2+i)\ldots+(U_n+i)$$

$$T_n = U_{0+}U_1+U_2+\cdots+U_n+(n+1)i = S_n+(n+1)i$$

$$T_n = \frac{3}{2}(1-i)\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+(n+1)i$$

Exercice 22

a) $U_1 = \frac{1}{2}U_0 + \frac{1+2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{3}+\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{4+9\sqrt{2}}{12}$; d'où : $U_1 = \frac{4+9\sqrt{2}}{12}$

$U_2 = \frac{1}{2}U_2 + \frac{2+2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{4+9\sqrt{2}}{12}+\frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{4+9\sqrt{2}}{24}+\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4+33\sqrt{2}}{24}$; d'où : $U_1 = \frac{4+33\sqrt{2}}{24}$

b) Démontrer que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0

$$V_{n+1} = U_{n+1}\sqrt{2}-(n+1) = \left(\frac{1}{2}U_n+\frac{n+2}{2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}-n-1 = \frac{\sqrt{2}}{2}U_n+\frac{n}{2}+1-n-1 = \frac{\sqrt{2}}{2}U_n-\frac{n}{2} = \frac{1}{2}(U_n\sqrt{2}-n)$$

Or $V_n = U_n\sqrt{2}-n$ Alors $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$

Donc la suite V est une suite géométrique raison $q=\frac{1}{2}$ et le premier terme $V_0 = U_0\sqrt{2}-0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

c) Calculons $V_n\ puis\ U_n$ en fonction de n

La suite V est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ alors $V_n = V_0q^n$ d'où : $V_n = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$;

$V_n = U_n\sqrt{2}-n$ alors $U_n = \frac{V_n}{\sqrt{2}}+\frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{\sqrt{2}}$ D'où : $U_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{\sqrt{2}}$

Etudions la convergence de la suite U

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{\sqrt{2}}\right) = +\infty \quad car: \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty\end{cases}$$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$; alors la suite U diverge

d) Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n

$$S_{0,n} = U_0+U_1+U_2+\cdots+U_n = \left(\frac{V_0}{\sqrt{2}}+\frac{0}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{V_1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{V_2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)+\cdots+\left(\frac{V_n}{\sqrt{2}}+\frac{n}{\sqrt{2}}\right)$$

$S_{0,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(V_0+V_1+V_2+\cdots+V_n)+(0+1+2+\cdots+n)]=$

$S_{0,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)+\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+\frac{n(n+1)}{2}\right]$

$$\lim_{n\to+\infty} S_{0,n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+\frac{n(n+1)}{2}\right] = +\infty\ car: \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2} = +\infty\end{cases}$$

Exercice 23

Soit U_0 la luminosité avant la traversée d'une plaque de verre.

Après la traversé d'une plaque, la luminosité devient $U_1 = U_0-\frac{1}{12}U_0 = \left(1-\frac{1}{12}\right)U_0 = \frac{11}{12}U_0$

Après la traversée de deux plaques, la luminosité devient : $U_2 = U_1-\frac{1}{12}U_1 = \left(1-\frac{1}{12}\right)U_1 = \frac{11}{12}U_1 = \left(\frac{11}{12}\right)^2U_0$

Après la traversée de n plaques, la luminosité devient : $U_n = \left(\frac{11}{12}\right)^nU_0$

La lumière perd la moitié de son intensité lorsque $\left(\frac{11}{12}\right)^n$ est inférieur ou égal à $0,5$.

$$\left(\frac{11}{12}\right)^n \le 0,5 \Leftrightarrow ln\left(\frac{11}{12}\right)^n \le ln(0,5) \Leftrightarrow nln\left(\frac{11}{12}\right) \le ln(0,5) \Leftrightarrow n \ge \frac{ln(0,5)}{ln\left(\frac{11}{12}\right)} \Leftrightarrow n \ge 7,966 \Leftrightarrow$$

$n\approx 8$: alors il faut disposer 8 lames identiques pour que, au travers de l'ensemble la lumière perde la moitié de son intensité

CHAPITRE VII : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Introduction :

Ce chapitre traîte des équations différentielles du premier ordre et du deuxième ordre à coefficients constants, sans second membre. Il permet de démontrer certains résultats de physique que l'élève a appris à utiliser (oscillation mécanique libre, décharge d'un condensateur dans un circuit RLC,). Son champ d'application s'étend également à la géométrie, la démographie (évolution d'une population), la chimie et la biologie.

FICHE DE COURS

I) NOTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I-1) Définition

On appelle équation différentielle toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

II) EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f^{'}+af=0$.

II-1) Définition

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, toute équation qui peut s'écrire :

$f^{'}+af=0.[a\in\mathbb{R}^{*}]$

II-2) Résolution

Propriété

(E) est l'équation différentielle :$f^{'}+af=0.[a\in\mathbb{R}^{*}]$

Les seules solutions de l'équation (E) sont les fonctionsf_k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$f_k(x)=ke^{-ax}\,[k\in\mathbb{R}]$.

III) EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f"+af'+bf=0$.

III-1) Définition

On appelle équation différentielle linéaire de second ordre à coefficients constant sans second membre, toute équation différentielle qui peut s'écrire : $f"+af'+bf=0.\,[\,(a,b)\in\mathbb{R}^2]$

III-2) Equation caractéristique d'une équation différentielle.

L'équation r^2+ar+b d'inconnue r est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle $f"+af'+bf=0$.

III-3) Famille de solutions d'une équation différentielle ;

Pour résoudre sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle du type $y"+ay'+by=0\ (a\in\mathbb{R}etb\in\mathbb{R})$, on résoud l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$ et on utilise le tableau suivant :

$\Delta=a^2-4b$	Solution de l'équation caractéristique.	Solution de l'équation différentielle.
$\Delta>0$	Deux solutions réels : r_1 et r_2	$x\longmapsto Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}[A\in\mathbb{R};B\in\mathbb{R}]$
$\Delta=0$	Une solution double : r	$x\longmapsto(Ax+B)e^{rx}[A\in\mathbb{R};B\in\mathbb{R}]$
$\Delta<0$	Deux solutions complexes conjuguées $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$	$x\longmapsto(A\cos\beta x+B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ $[A\in\mathbb{R};B\in\mathbb{R}]$

Remarque

Cette méthode permet de retrouver les solutions des équations différentielles

$y"-w^2y=0$ et -et $y"+w^2y=0\ \ (w\in\mathbb{R})$.

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle K.

a) $f(x) = e^x + e^{2x}, (E): y'' + y' - 2y = 4e^{2x} et K = \mathbb{R}$

b) $f(x) = e^{-x} + x, (E): y''' + y'' = 0 \; et \; K = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{2}{x}, (E): y'' + \frac{2}{x}y' = 0 \;\; et \; K =]0; +\infty[$

d) $f(x) = \sqrt{2x}, (E): yy' = 1 \; et \;\; K =]0; +\infty[$

e) $f(x) = x \ln x - x \,, (E): xy' - y = x \; et \; K =]0; +\infty[$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) $(E): y' - 3y = 0 \; ety(0) = 2; b)\; 3y' + y = 0 \; ety(1) = e$

c) (E) : $y' + y \ln 2 = 0 \; ety(1) = 1; d)\; (E) : y' = yety(1) = -1.$

Exercice 3

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Déterminer la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2f' + f = 0$ et dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

$$a)\; (E): y'' + 2y' + y = 0, y(0) = -1 \; ety'(0) = 0$$

$b)\; (E): y'' + 16y = 0, \;\; y(0) = 0 \; ety'(0) = -1$

$$c)\; (E): y'' - (\ln 2)^2 y = 0, y(0) = 1 \; ety(2) = -1$$

$$d)\; (E): y'' + 2y' - 3y = 0, y(0) = 3 \; ety'(0) = -1$$

$$e)\; (E): y'' + y' + y = 0, y(0) = -1 \; ety(0) = \sqrt{3}.$$

Exercice 5

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$

1) Vérifier que la fonction $g: x \longmapsto (x+1)e^{-2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E)

2) Démontrer qu'une fonction $f + g$est solution de (E) si set seulement si la fonction f est solution de l'équation différentielle :$y' + 2y = 0$.

3) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).

Exercice 6

On considère l'équation différentielle :$(E): f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

2) Déterminer la solution de (E) qui vérifie les deux conditions suivantes :

-Sa représentation graphique $(\mathcal{C})$passe par le point $M(0; 4)$.

-La tangente à la courbe$(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 0.

Exercice 7

On se propose de chercher les fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que : pour tout nombre réel x,

$$(E) : f''(x) - 4f(x) = 4(x-1)^2 - 2$$

1)On désigne par g un polynôme défini par $g(x) = ax^2 + bx + c$où $a, betc$ sont des nombres réels.

Déterminer a, b et $c$pour que pour tout nombre réel x, g soit solution de (E).

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $y'' - 4y = 0$

3-a) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E').

b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E), puis celle qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 8

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle$(E) y' + \frac{1}{2}y = 0$.

2) Déterminer la solution qui prend la valeur e pour$x = -1$

3) Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de(E') $y' + \frac{1}{2}y = x$.

4-a) Montrer que f est solution de (2) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (1)

b) En déduire la forme de toutes les solutions de(2).

c) Déterminer celle dont la représentation graphique passe par l'origine.

Exercice 9

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = 0$ (1).

2) Soit l'équation différentielle $y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = e^{3x}(2)$

a) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$ est solution de (2).

b) On admettra qu'une fonction f est solution de (2) si et si seulement si la fonction $f - h$est solution de (1). En déduire les solutions de (2).

c) Déterminer la solution f de (2) dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$dans un repère (O, I, J) passe par le point $A\left(0; \frac{2}{5}\right)$et dont la tangente en$A$ à $(\mathcal{C})$a pour coefficient directeur 2.

PROBLEMES RESOLUS

PROBLEMEI

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction *f* du temps (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction *f* est dérivable, strictement positive sur $[0; +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle : $(E) y' = -\frac{1}{20}y(3 - lny)$

1. Démontrer l'équivalence suivante :

Une fonction *f*, dérivable, strictement positive sur $[0; +\infty[$; vérifie, pour tout t de $[0; +\infty[$

$f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0; +\infty[$,

$$g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$$

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle : $(H) z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0; +\infty[$: $f(t) = exp\left[3 + Cexp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \longmapsto e^x$

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction $f$définie par : $f(t) = exp\left[3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$

a. Déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$

b. Déterminer le sens de variation de *f* sur $[0; +\infty[$

c. Résoudre dans $[0; +\infty[$l'inéquation $f(t) < 0{,}02$

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : " la population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ".

On note M l'événement " l'animal est malade ", $\overline{M}$l'événement contraire et T l'évènement " le test est positif ".

1. Déterminer $P(M), P_M(T), P_{\overline{M}}(T)$.

2. En déduire $P(T)$

3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est à dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

PROBLEME II

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

1) Soit$h$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = 2xe^{2x} + 1$.

Démontrer que h est solution de (E).

2.a)Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $\varphi = f - h$ est solution de (F). :$y' - 2y = 0$.

a) Résoudre (F).

b) En déduire les solutions de (E)

c) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :$f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$

1-a) Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$et interpréter graphiquement le résultat.

2) Étudier le sens de variations de f, puis dresser son tableau de variation.

3) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

4) Construire $(\mathcal{C})$, courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé(O, I, J) (unité graphique : 2cm).

Partie C

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $1 - f(x) \geq 0$.

2) On considère l'intégrale I= $4\int_0^{1/2}[1 - \mathrm{f}(x)]\mathrm{d}x$.

a) Interpréter graphiquement I puis calculer I.

b) Déterminer l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe$(\mathcal{C}_f)$, la droite (Δ) d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles ci-dessous avec les conditions initiales imposées

$a)\ f' + 3f = 0 \quad et f(1) = 1$; $b) \quad -f' + 2f = 0 \quad et f(3) = -2$; $c)\ 3f' + 6f = 0 \quad et f(4) = 2$

$d)\ 5f' + f = 0 \quad et f(-5) = 0$; $e) \quad 2f - 5f' = 0$ et $f(1) = -1$

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles ci-dessous avec les conditions initiales imposées

$a)\ 2f'' + 3f' - 2f = 0 \quad f(0) = 1\ et f'(0) = 3$; $b)\ f'' + 2f' + f = 0 \quad f(0) = -1\ et f'(0) = 0$

$c)\ f'' - 2f' + 5f = 0 \quad f(0) = 1\ et f'(0) = 3$; $d)\ 3f'' - 2f' + 3f = 0 \quad f(0) = 0 \quad et f'(0) = 0$

$e)\ 3f'' - 2f' + 7f = 0 \quad f(0) = 1 \quad et f'(0) = -1$; $f)\ 25f'' + f = 0 \quad avec f(\pi) = 2 \quad et f'(\pi) = \sqrt{3}$

Exercice 3

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' - 8y = -8x^2 - 12x - 18$

1)On désigne par P un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$où $a, b et c$ sont des nombres réels.

Déterminer a, b et $c$pour que pour tout nombre réel x, P soit solution de (E).

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $y'' + 2y' - 8y = 0$

3-a) démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - P$ est solution de (E').

b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E), puis celle qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 4

Partie A

(E) désigne l'équation différentielle :$y'' + 2y' + y = 0$.

Déterminer les solutions générales de (E).

2) (E') est l'équation différentielle : $y'' + 2y + y = 2e^{-x}$

a) Vérifier que la fonction$h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E').
b) Démontrer que φest une solution de (E') si et seulement si $g = \varphi - h$ est solutions de (E).
c) Déterminer toutes les solutions de (E')
d) Déterminer la solution f de (E') satisfaisant aux conditions initiales :
$f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x+2)^2e^{-x}$. On désigne par $(\mathcal{C})$sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal. (Unité : 1cm)

1) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement les deux derniers résultats.

2) Étudier les variations de$f$ et tracer $(\mathcal{C})$avec soin. (On remarquera que $A\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \in (\mathcal{C})$et $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \in (\mathcal{C})$).

PROBLEME DE SYNTHESE

Partie A : Équation Différentielle.

On se propose de chercher les fonctions $f$de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que : pour tout nombre réel x,
(E) : $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 4x + 8$

1). Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $y'' - 4y' + 4y = 0$.
2) On désigne par h la fonction définie par : $h(x) = ax + b$
où $a$et b sont des nombres réels.
a) Déterminer a, b et c pour que, pour tout nombre réel$x$, h soit solution de (E).
b) Démontrer qu'une fonction $g$est solution de (E)si et seulement si $g - h$ est solution de (E').
c) En déduire la solution$f$ sur $\mathbb{R}$ de (E) telle que $f(0) = 3$ $et f'(0) = -1$.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction$g$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$
1) Calculer les limites de g en $-\infty$et en $+\infty$.
2) Calculer la dérivée de $g(x)$ pour tout nombre réel x.
3) En déduire les variations de$g$ puis dresser son tableau de variation.
4) Calculer $g(0)$ et déduire que $\forall x \epsilon]-\infty; 0[, g(x) > 0$ $et \forall x \epsilon]0; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie C : Etude de la fonction *f*.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$.$(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique de $f$dans le plan muni du repère (O, I, J). (Unité 2 cm).

1). Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le dernier résultat.
2)a). On suppose que$f$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
Démontrer que $\forall x \epsilon \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
b). En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.
3)a). Montrer que la droite (Δ)d'équation $y = x + 3$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.
b). Étudier suivant les valeurs de x la position relative de (Δ) et $(\mathcal{C}_f)$.
4).Démontrer que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en deux points α et β.
Justifier que $-3{,}01 < \alpha < -3{,}00$ et $0{,}78 < \beta < 0{,}79$.
5).Tracer la droite (Δ), la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Partie D :Calcul d'aire.

1)α est un nombre réel négatif. Calculer $\int_\alpha^0 xe^{2x}dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
2). Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{D})$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.
3). Calculer : $\lim_{\alpha\to-\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1

a. $f(x) = e^x + e^{2x}$, $f'(x) = e^x + 2e^{2x}$ et $f''(x) = e^x + 4e^{2x}$

Alors $y'' + y' - 2y = e^x + 4e^{2x} + e^x + 2e^{2x} - 2(e^x + e^{2x}) = 4e^{2x}$. D'où : $y'' + y' - 2y = 4e^{2x} \forall x \in \mathbb{R}$

b. $f(x) = e^{-x} + x$; $f'(x) = -e^{-x} + 1$; $f''(x) = e^{-x}$; $f'''(x) = -e^{-x}$

Donc: $y''' + y'' = -e^{-x} + e^{-x} = 0$ D'où : $y''' + y'' = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

c. $f(x) = \frac{2}{x}$; $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$; $f''(x) = \frac{4}{x^3}$

Donc: $y'' + \frac{2}{x}y' = \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x} \times \frac{2}{x^2} = \frac{4}{x^3} - \frac{4}{x^3} = 0$ D'où : $y'' + \frac{2}{x}y' = 0 \ \forall\, x \in]0; +\infty[$

d. $f(x) = \sqrt{2x}$; $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

Donc: $yy' = \sqrt{2x} \times \frac{1}{\sqrt{2x}} = 1$ D'où : $yy' = 1$

e. $f(x) = x\ln x - x$; $f'(x) = lnx$

Donc: $xy' - y = x(lnx) - (xlnx - x) = x$ D'où: $xy' - y = x \ \forall\, x \in]0; +\infty[$

Exercice 2

Remarque: *Les seules solutions de l'équation (E) sont les fonctions* f_k *de* $\mathbb{R}$ *vers R définies par :* $f_k(x) = ke^{-ax} [k \in \mathbb{R}]$

a. $(E): y' - 3y = 0$ et $y(0) = 2$

$y(x) = ke^{3x}$; comme $y(0) = 2$ alors $ke^{3\times 0} = 2 \Rightarrow k = 2$ D'où: $y(x) = 2e^{3x}$

b. $(E): 3y' + y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{3}y = 0$

$y(x) = ke^{-\frac{1}{3}x}$; comme $y(1) = e$ alors $ke^{-\frac{1}{3}\times 1} = e \Rightarrow k = e^{\frac{4}{3}}$ D'où: $y(x) = e^{\frac{1}{3}(4-x)}$

c. $(E): y' + yln2 = 0$ et $y(1) = 1$

$y(x) = ke^{-xln2}$; comme $y(1) = 1$ alors $ke^{-ln2} = 1 \Rightarrow k = 2$ D'où: $y(x) = 2e^{-xln2}$

d. $(E) : y' = y \Leftrightarrow y' - y = 0 et y(1) = -1$

$y(x) = ke^{x}$; comme $y(1) = -1$ alors $ke^{1} = -1 \Rightarrow k = -e^{-1}$ D'où: $y(x) = -e^{x-1}$

Exercice 3

On sait que l'équation : $y' + ay = 0$ a pour solution sur $\mathbb{R}$: $f_k(x) = ke^{-ax} [k \in \mathbb{R}]$.

Ici, $a = \frac{1}{2}$ car $2f' + f = 0$ *équivaut à* $f' + \frac{1}{2}f = 0$

Donc : $f(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$

Sa courbe représentative admet en son point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$ signifie que : $f'(-2) = \frac{3}{2}$

Or $f'(x) = \left(ke^{-\frac{1}{2}x}\right)' = -\frac{1}{2}ke^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(-2) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}ke = \frac{3}{2}$ alors : $k = -3e^{-1}$ D'où $f(x) = -3e^{-1}e^{-\frac{1}{2}x} = -e^{-(1+\frac{1}{2}x)}$

Exercice 4

a. (E) est une équation différentielle de la forme : $y'' + ay' + by = 0$.

Son équation caractéristique est : $r^2 + 2r + 1 = 0$

Le discriminant de cette équation caractéristique est : $\Delta = 0$

On obtient une unique solution : $r_0 = -1$

Les solutions de (E) s'écrivent donc : $f(x) = (A + Bx)e^{-x} [A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}]$

Comme $y(0) = -1$ en remplaçant dans l'expression de $f(x)$, on obtient : $A = -1$

On sait de plus, que $y'(0) = 0$. Il convient donc de calculer la dérivée de $f(x)$. Soit $f'x) = (B - A - Bx)e^{-x}$

Alors, $y'(0) = 0 \Leftrightarrow B - A = 0$. On en déduit que $A = 1 et B = 1$

La solution particulière cherchée est : $f(x) = (1 + x)e^{-x}$

b. (E) est une équation différentielle de la forme : $y'' + w^2y = 0$ avec $w = 4$

Les solutions de (E) s'écrivent donc : $f(x) = Acos(4x) + Bsin(4x) [A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}]$

Comme $y(0) = 0$ en remplaçant dans l'expression de $f(x)$, on obtient : $A = 0$

On sait de plus, que $y'(0) = -1$. Il convient donc de calculer la dérivée de $f(x)$. Soit $f'x) = [Bsin(4x)]' = 4Bcos(4x)$

$$Alors, y'(0) = -1 \Leftrightarrow 4B = -1. \ On\ en\ déduit\ que\ A = 0 \quad et \quad B = -\frac{1}{4}$$

La solution particulière cherchée est : $f(x) = -\frac{1}{4}sin(4x)$

c. (E) est une équation différentielle de la forme : $y'' - w^2y = 0$ avec $w = ln2$

Les solutions de (E) s'écrivent donc : $f(x) = Ae^{xln2} + Be^{-xln2}[A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}]$
Comme $y(0) = 1$ en remplaçant dans l'expression de $f(x)$, on obtient : $2A + \frac{1}{2}B = 1$
On sait de plus, que $y(2) = -1$. en remplaçant dans l'expression de $f(x)$, on obtient : $4A + \frac{1}{4}B = -1$
On en déduit que $A = -\frac{1}{2} etB = 4$
La solution particulière cherchée est : $f(x) = -\frac{1}{2}e^{xln2} + 4e^{-xln2}$

d. (E) est une équation différentielle de la forme : $y'' + ay' + by = 0$.
Son équation caractéristique est : $r^2 + 2r - 3 = 0$
Le discriminant de cette équation caractéristique est : $\Delta = 16$
On obtient les solutions $r_1 = 1 \;\; et \;\; r_2 = -3$
Les solutions de (E) s'écrivent donc : $f(x) = Ae^x + Be^{-3x}[A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}]$
Comme $y(0) = 3$ en remplaçant dans l'expression de $f(x)$, on obtient : $A + B = 3$
On sait de plus, que $y'(0) = -1$. Il convient donc de calculer la dérivée de $f(x)$. Soit $f'x) = (Ae^x - 3Be^{-3x} = -1$
Alors, $y'(0) = 0 \Leftrightarrow A - 3B = -1$. On en déduit que $A = 2etB = 1$
La solution particulière cherchée est : $f(x) = 2e^x + e^{-3x}$

e. (E) est une équation différentielle de la forme : $y'' + ay' + by = 0$.
Son équation caractéristique est : $r^2 + r + 1 = 0$
Le discriminant de cette équation caractéristique est : $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$
On obtient les solutions $r_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \;\; et \;\; r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
Les solutions de (E) s'écrivent donc : $f(x) = \left[Acox\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Bsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]e^{-\frac{1}{2}x}[A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}]$
Comme $y(0) = -1$ en remplaçant dans l'expression de $f(x)$, on obtient : $A = -1$
On sait de plus, que $y'(0) = \sqrt{3}$. Il convient donc de calculer la dérivée de $f(x)$. Soit $f'x) = \left[\left(\frac{\sqrt{3}B - A}{2}\right)cox\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \right.$
(−3A−B2)sin√32xe−12x

Alors, $y'(0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}B - A}{2} = \sqrt{3}$. On en déduit que $A = -1etB = \frac{\sqrt{3} - 6}{3}$
La solution particulière cherchée est : $f(x) = \left[-cox\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \left(\frac{\sqrt{3} - 6}{3}\right)sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]e^{-\frac{1}{2}x}$

Exercice 5

1) La fonction $g: x \longmapsto (x + 1)e^{-2x}$est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si seulement si $g' + 2g = e^{-2x}$
$g(x) = (x + 1)e^{-2x} \quad et \quad g'(x) = e^{-2x} - 2(x + 1)e^{-2x}$
$g' + 2g = e^{-2x} - 2(x + 1)e^{-2x} + 2(x + 1)e^{-2x} = e^{-2x}$
D'où : $g' + 2g = e^{-2x}$. Alors la fonction $g: x \longmapsto (x + 1)e^{-2x}$est solution sur $\mathbb{R}$ de (E)

2) $(f + g)$ solution de (E) signifie : $(f + g)' + 2(f + g) = e^{-2x}$
Alors :$(f' + 2f) + (g' + 2g) = e^{-2x}$ comme $g' + 2g = e^{-2x}$; on obtient : $f' + 2f = 0$
Donc : la fonction f est solution de l'équation différentielle :$y' + 2y = 0$.
D'où : ($f + g$)est solution de (E) si set seulement si la fonction f est solution de l'équation différentielle :$y' + 2y = 0$.

3) Soit (E'): $y' + 2y = 0$.
On sait que l'équation : $y' + ay = 0$ a pour solution sur $\mathbb{R}$: $f_k(x) = ke^{-ax}[k \in \mathbb{R}]$.
Ici : $a = 2 \;\; alors \;\; f(x) = ke^{-2x}$
D'après 2) ($f + g$)est solution de (E). alors les solutions de (E)sont les fonctions du type : $x \longmapsto (x + k + 1)e^{-2x}$

Exercice 6

1) (E) est une équation différentielle de la forme : $y'' + ay' + by = 0$.
Son équation caractéristique est : $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$
Le discriminant de cette équation caractéristique est : $\Delta = 0$
On obtient une unique solution : $r_0 = \frac{1}{2}$
Les solutions de (E) s'écrivent donc : $f(x) = (A + Bx)e^{\frac{1}{2}x}[A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}]$

2) La représentation graphique $(\mathcal{C})$passe par le point $M(0; 4)$ signifie : $f(0) = 4$
En remplaçant dans l'expression de $f(x)$, on obtient : $A = 4$
La tangente à la courbe$(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 0 signifie : $f'(2) = 0$

Il convient donc de calculer la dérivée de $f(x)$. Soit $f'x) = (B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}Bx)e^{\frac{1}{2}x}$

Alors, $y'(0) = 0 \Leftrightarrow 2B + \frac{1}{2}A = 0.$ On en déduit que $A = 4 et B = -1$

La solution particulière cherchée est : $f(x) = (4 - x)e^{\frac{1}{2}x}$

Exercice 7

1) g est solution de (E) si et seulement si $g''(x) - 4g(x) = 4(x-1)^2 - 2 = 4x^2 - 8x + 2$

$$g(x) = ax^2 + bx + c \ ; \quad g'(x) = 2ax + b \quad et \quad g''(x) = 2a$$

$$g''(x) - 4g(x) = a - 4(ax^2 + bx + c) = -4ax^2 - 4bx + a - 4c$$

Alors : $= -4ax^2 - 4bx + a - c = x^2 - 8x + 2$

Par identification : $\begin{cases} -4a = 4 \\ -4b = -8 \\ 2a - 4c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$

Alors $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

2) (E) est une équation différentielle de la forme : $y'' - w^2 y = 0$ avec $w = 2$

Les solutions de (E) s'écrivent donc : $f(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}[A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}]$

3- a) f est solution de (E) si et seulement si $f''(x) - 4f(x) = 4(x-1)^2 - 2 \qquad (I)$

Or g est solution de (E) alors : $g''(x) - 4g(x) = 4(x-1)^2 - 2 \qquad (II)$

Si on retranche(II) à (I), on obtient : $f''(x) - g''(x) - 4\big(f(x) - g(x)\big) = 0$ ce qui s'écrit :

$(f-g)''(x) - 4(f-g)(x) = 0.$ Donc $(f - g)$ est solution de (E')

Réciproquement, si $f - g$ est solution de (E') :$(f-g)''(x) - 4(f-g)(x) = 0.$

Or $g''(x) - 4g(x) = 4(x-1)^2 - 2$ Par addition, on en déduit que : f est solution de (E)

On peut conclure que f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E')

On a donc $(f-g)(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$. Alors $f(x) - g(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$

$f(x) = g(x) + Ae^{2x} + Be^{-2x} = Ae^{2x} + Be^{-2x} - x^2 + 2x - 1$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow A + B - 1 = 0$

On sait de plus, que $f'(0) = 0.$ Il convient donc de calculer la dérivée de $f(x)$. Soit $f'x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x} - 2x + 2$

Alors, $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 2A - 2B + 2 = 0.$ On en déduit que $A = 0 et B = 1$

D'où $f'(x) = e^{-2x} - (x-1)^2$

Exercice 8

1) (E) est une équation différentielle de la forme : $y' + ay = 0$ avec $a = \frac{1}{2}$

Les solutions de (E) s'écrivent donc : $f(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}[k \in \mathbb{R}]$

2) $f(-1) = e \ signifie: ke^{\frac{1}{2}} = e$ Alors, $k = e^{\frac{1}{2}}$

La seule solution est : $f(x) = e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}(1-x)}$

3) g est solution de (E) si et seulement si $g'(x) + \frac{1}{2}g(x) = x$

$$g(x) = ax + b \ ; \quad g'(x) = a$$

$$g'(x) + \frac{1}{2}g(x) = a + \frac{1}{2}(ax + b)$$

Alors : $\frac{1}{2}ax + a + \frac{1}{2}b = x$ Par identification : $\begin{cases} \frac{1}{2}a = 1 \\ a + \frac{1}{2}b = 0 \end{cases}$ ou encore $a = 2 \quad et \quad b = -4$

On en conclut que $g(x) = 2x - 4$

4- a) f est solution de (E') si et seulement si $f'(x) + \frac{1}{2}f(x) = x \qquad (I)$

Or g est solution de (E') alors : $g'(x) + \frac{1}{2}g(x) = x \qquad (II)$

Si on retranche(II) à (I), on obtient : $f'(x) - g'(x) + \frac{1}{2}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$ ce qui s'écrit :

$(f-g)'(x) + \frac{1}{2}(f-g)(x) = 0.$ Donc $(f - g)$ est solution de (E)

Réciproquement, si $f - g$ est solution de (E) :$(f-g)'(x) + \frac{1}{2}(f-g)(x) = 0$

Or $g'(x) + \frac{1}{2}g(x) = x$ Par addition, on en déduit que : f est solution de (E')

On peut conclure que f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E)

On a donc $(f-g)(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$. Alors $f(x) - g(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$

$$f(x) = g(x) + ke^{-\frac{1}{2}x} = ke^{-\frac{1}{2}x} + 2x - 4$$

5- b)$(\mathcal{C})$, courbe représentative de $x \mapsto f(x)$, passe par l'origine O équivaut à $f(0) = 0$ soit $k - 4 = 0$

D'où $$f(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x} + 2x - 4$$

Exercice 9

1) (1) est une équation différentielle de la forme : $y'' + ay' + by = 0$.

Son équation caractéristique est : $r^2 - 3r + \frac{5}{2} = 0$

$\Delta = -1 = i^2$; $r_1 = \frac{3+i}{2}$ $\quad et \quad$ $r_2 = \frac{3-i}{2}$

Les solutions de (1) s'écrivent donc : $f(x) = \left[Acos\left(\frac{1}{2}x\right) + Bsin(\frac{1}{2}x)\right] e^{\frac{3}{2}x} [A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}]$

2.a) h est solution de (2)si et seulement si : $h'' - 3h' + \frac{5}{2}h = e^{3x}$

$h(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$; $h'(x) = \frac{6}{5}e^{3x}$; $h''(x) = \frac{18}{5}e^{3x}$

Alors $h'' - 3h' + \frac{5}{2}h = \frac{18}{5}e^{3x} - \frac{18}{5}e^{3x} + \frac{5}{2} \times \frac{2}{5}e^{3x} = e^{3x}$

h est effectivement solution de (2)

1- b) f est solution de (2)signifie : $f'' - 3f' + \frac{5}{2}f = e^{3x}$; h est solution de (2)signifie : $h'' - 3h' + \frac{5}{2}h = e^{3x}$

$\Leftrightarrow f'' - 3f' + \frac{5}{2}f = h'' - 3h' + \frac{5}{2}h$ **alors :** $(f - h)'' - 3(f - h)' + \frac{5}{2}(f - h) = 0$

D'où : f est solution de (2) si et si seulement si la fonction $f - h$est solution de (1)

On a alors $(f - h)(x) = \left[Acos\left(\frac{1}{2}x\right) + Bsin(\frac{1}{2}x)\right] e^{\frac{3}{2}x}$

$f(x) - g(x) = \left[Acos\left(\frac{1}{2}x\right) + Bsin(\frac{1}{2}x)\right] e^{\frac{3}{2}x}$; $f(x) = g(x) + \left[Acos\left(\frac{1}{2}x\right) + Bsin(\frac{1}{2}x)\right] e^{\frac{3}{2}x}$

D'où : $f(x) = \left[Acos\left(\frac{1}{2}x\right) + Bsin(\frac{1}{2}x)\right] e^{\frac{3}{2}x} + \frac{2}{5}e^{3x}$

$(\mathcal{C})$ passe par le point $A\left(0; \frac{2}{5}\right)$: $f(0) = \frac{2}{5}$ $\Leftrightarrow A + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ **alors : $A = 0$**

Le coefficient directeur de la tangente en $A(x_0; f(x_0))$ est $f'(x_0)$

Donc $f'(0) = \frac{2}{5}$; calculons $f'(x)$: $f'(x) = \left[\frac{B}{2}cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{3B}{2}sin(\frac{1}{2}x)\right] e^{\frac{3}{2}x} + \frac{6}{5}e^{3x}$

$f'(0) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{B}{2} + \frac{6}{5} = 2$ **Soit** $B = \frac{8}{5}$

$$f(x) = \frac{8}{5}e^{\frac{3}{2}x}sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{2}{5}e^{3x}$$

CORRECTION DES PROBLEMES

PROBLEME I

1- $g(t) = ln(f(t)) \Rightarrow g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$ **or** $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))] et f(t) > 0 \, sur[0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{1}{20}[3 - ln(f(t))] \Leftrightarrow g'(t) = -\frac{1}{20}[3 - g(t)] \Leftrightarrow g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$$

2- $(H) z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$

l'équation différentielle (H) est de la forme $z' = az + b$

la solution générale de l'équation différentielle est de la forme $z't) = Ce^{at} + b$ où C est une constante réelle quelconque.

$$z(t) = Ce^{\frac{t}{20}} - \frac{-\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}} = 3 + Ce^{\frac{t}{20}} = 3 + Cexp\left(\frac{t}{20}\right)$$

3- Or d'après 1. (partie A) y solution de (E) équivaut à $z = lny$ solution de (H) équivaut à $y = e^z$

$$f(t) = exp\left[3 + Cexp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$$

4- On a : $f(0) = 1$ (en l'an 2000 l'éffectif initial est de 1000)

$$f(0) = exp\left[3 + Cexp\left(\frac{0}{20}\right)\right] = 1 \Leftrightarrow \exp(3 + C) = 1 \Leftrightarrow 3 + C = 0 \; alors \; C = -3$$

La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par : $f(t) = exp\left[3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$

a.$f(t) = exp\left[3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$ posons : $X = 3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)$

$\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{20} = +\infty \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \left[3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

b.$f(t) = exp[u(t)]$ avec $u(t) = 3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right) u'(t) = -\frac{3}{20}\, exp\left(\frac{t}{20}\right)$

$$f'(t) = u'(t) exp[u(t)] = -\frac{3}{20}\, exp\left(\frac{t}{20}\right) exp\left[3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] < 0$$

[illegible] est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

c.$f(t) < 0{,}02 \Leftrightarrow exp\left[3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] < 0{,}02$ Alors $3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right) < ln(0{,}02)$

$$-3exp\left(\frac{t}{20}\right) < ln(0,02) - 3 \Leftrightarrow exp\left(\frac{t}{20}\right) > \frac{ln(0,02) - 3}{3} \Leftrightarrow \frac{t}{20} > ln\left[\frac{ln(0,02) - 3}{3}\right]$$

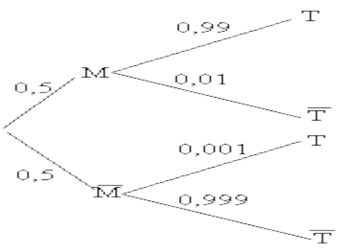
$$t > 20ln\left[\frac{ln(0,02) - 3}{3}\right] \approx 16,7$$

il suffit pour répondre à cette question de résoudre l'inéquation *f*(t) < 0,02 d'après ce qui précède il faudra 17 année pour que *f*(t) < 0,02.

En 2017 la taille de l'échantillon sera inférieure à 20 individus.

Partie B

Un arbre pondéré permet de résumer l'énoncé :



1. P(M) = 0,5 (50 % des animaux testé sont malades)

P_M(T) = 0,99 (99 % des animaux qui sont malades sont testé positif)

$P_{\overline{M}}(T)$= 0,001 (0,1 % des animaux qui ne sont pas malades sont testé positif)

2.

P(M ∩T) = P_M(T) × P(M) = 0,99 × 0,5 = 0,495

P($\overline{M}$ ∩T) = $P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})$= 0,001 × 0,5 = 0,0005

P(T) = P(M ∩T) + P($\overline{M}$ ∩T) = 0,4955

3. $P_T(M) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}495}{0{,}4955} \approx 0,99899 < 0{,}999$

donc le test n'est pas fiable.

Problème II

PARTIE A

1) h solution de (E) signifie que :$h' - 2h = 2(e^{2x} - 1)$

$h(x) = 2xe^{2x} + 1$; $h'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x}$

Alors $h' - 2h = 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2(2xe^{2x} + 1) = 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 4xe^{2x} - 2 = 2e^{2x} - 2 = 2(e^{2x} - 1)$

$h' - 2h = 2(e^{2x} - 1)$: h est solution de (E)

2.a) f est solution de (E) si et seulement si $f'(x) - 2f(x) = 2(e^{2x} - 1)$ (I)

Or h est solution de (E') alors : $h'(x) - 2h(x) = 2(e^{2x} - 1)$ (II)

Si on retranche(II) à (I), on obtient : $f'(x) - h'(x) - 2(f(x) - h(x)) = 0$ ce qui s'écrit :

Réciproquement, si $f - h$ est solution de (F) :$(f - h)'(x) - 2(f - h)(x) = 0$

Or $h'(x) - 2h(x) = 2(e^{2x} - 1)$ Par addition, on en déduit que : f est solution de (E)

On peut conclure que f est solution de (E) si et seulement si la fonction $\varphi = f - h$ est solution de (F)

b)(F) est sous la forme : $y' + ay = 0$ $avec\ a = -2$ alors $y(x) = ke^{2x}[k \in \mathbb{R}]$

On a donc $(f - h)(x) = ke^{2x}$. Alors $f(x) - h(x) = ke^{2x}$

$$f(x) = h(x) + ke^{2x} = ke^{2x} + 2(e^{2x} - 1)$$

c) $f - h$ est solution de (F) ; On a donc $(f - h)(x) = ke^{2x}$. Alors $f(x) - h(x) = ke^{2x}$

$$f(x) = h(x) + ke^{2x} = ke^{2x} + 2xe^{2x} + 1$$

d) $f(0) = 0 \Leftrightarrow k + 1 = 0$; $k = -1$

$\underline{f(x) = (2x-1)e^{2x} + 1}$

PARTIE B

Pour les calculs de limites on posera à chaque fois $X = 2x$; $lorsque\ x \mapsto -\infty; X \mapsto +\infty\ et\ lorsque\ x \mapsto -\infty; X \mapsto +\infty$

1.a) $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty}[(2x-1)e^{2x}+1] = \lim_{x\mapsto-\infty}(2xe^{2x} - e^{2x} + 1) = \lim_{x\mapsto-\infty}(Xe^X - e^X + 1) = 1$

$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = 1$; alors la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$

$b)$ $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty}[(2x-1)e^{2x}+1] = \lim_{x\mapsto+\infty}[(X-1)e^X+1] = +\infty$ car $\begin{cases}\lim_{x\mapsto+\infty}(X-1) = +\infty \\ \lim_{x\mapsto+\infty} e^X = +\infty\end{cases}$

$c)$ $\lim_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{\mapsto+\infty}\left[2e^{2x} - \frac{e^{2x}}{x} + \frac{1}{x}\right] = \lim_{\mapsto+\infty}\left(2e^X - \frac{2e^X}{X} + \frac{2}{X}\right) = \lim_{\mapsto+\infty} e^X\left(2 - \frac{2}{X} + \frac{2}{Xe^X}\right) = +\infty$

$\lim_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = +\infty$; Alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique se direction (OJ) en $+\infty$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = [(2x-1)e^{2x}+1]' = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 4xe^{2x}$ D'où $\forall x \in \mathbb{R}$; $\underline{f'(x) = 4xe^{2x}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $4e^{2x} > 0$ Alors le signe de $f'(x)$ est celui de x

$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$ $alors\ f$ est strictement décroissante.

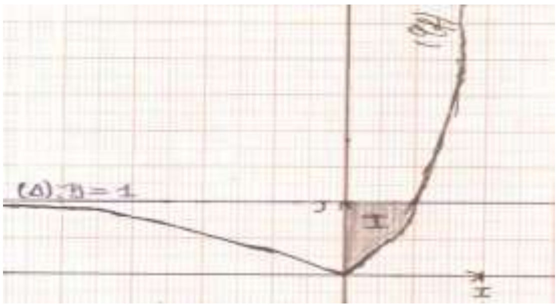
$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ $alors\ f$ est strictement croissante.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	↘	0	↗	$+\infty$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$; f admet un minimum relatif en 0 égal à 0. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0$

4) $courbe\ représentative$



PARTIE C

$1 - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - [(2x-1)e^{2x}+1] \geq 0 \Leftrightarrow -(2x-1)e^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 0$ alors $x \leq \frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$

2 .a) I est l'aire en cm^2 de la partie du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$; la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0\ et\ x = \frac{1}{2}$

I= $4\int_0^{1/2}[1 - f(x)]dx = 4\int_0^{1/2}[1 - (2x-1)e^{2x} - 1]dx = -4\int_0^{1/2}[(2x-1)e^{2x}]dx$

A l'aide d'une intégration par partie : $U(x) = 2x - 1 \Rightarrow U'(x) = 2$; $V'(x) = e^{2x} \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

Donc $I = -4\left(\left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx\right) = -4[(x-1)e^{2x}]_0^{\frac{1}{2}} = 2e - 4$

c.) $\mathcal{A} = 4\int_0^{1/2}[1 - f(x)]dx = (2e - 4)cm^2$

CHAPITRE X : PROBABILITES

Introduction

La théorie des probabilités est née des problèmes de jeux. En tous pays et de tout temps, les jeux de hasard ont toujours existé, et ont exercé une sorte de fascination sur les populations. On trouve trace de jeu ressemblant à notre « pile ou face » dans toutes les sociétés. A chaque jet de pièce, on ne peu prévoir si l'issue sera pile ou face, et le fait que le résultat ait été dix fois de suite pile ne permet en rien de prévoir le résultat d'un onzième lancer. Et pourtant en moyenne si l'on joue longtemps, on obtient à peu près autant de pile que de face.

C'est au **XVIIe siècle** que **Pascal (1623-1665),** avec la **« géométrie du hasard »,** fournit les premiers fondements de la théorie des probabilités. Ses échanges de correspondances avec **Fermat (1601-1665)** fournissent la solution des problèmes de jeux.

Mais il faut citer avant eux **Cardan (1501-1576)** et après eux Huygens (1629-1695) qui ont apporté une contribution conséquente à cette branche des mathématiques.

A l'heure actuelle les probabilités ont acquis une importance considérable et sont présentes dans de nombreuses branches comme la physique des particules, les statistiques ou les assurances pour n'en citer que quelques unes.

« Ce que nous appelons le hasard n'est et ne peut être que la cause ignorée d'un effet connu ».VOLTAIRE

FICHE DE COURS

I) DENOMBREMENT

Résoudre un problème de dénombrement, c'est calculer le nombre d'éléments d'un ensemble fini.

I-1) Cardinaux d'ensembles finis

a) Définition

Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal de E et on note $card(E)$ le nombre d'éléments de E

Exemple : $E = \{a; b; c; 1; 2; @;\ \alpha;\ \beta;\ \varepsilon;\ \nabla\}$

$$card(E) = 10$$

b) Réunion-Intersection

Soient $A\ et\ B$ deux ensembles. On appelle réunion de $A\ et\ B$ et on note "$A \cup B$"et on lit "$A\ union\ B$", l'ensemble des éléments appartenant à $A\ ou$ à B

Exemple : $A = \{1; 3;\ \alpha;\ \delta;\ \ni\}$; $B = \{\ni; 2; 1; \Delta\}$ alors $A \cup B = \{1; 2; 3; \alpha;\ \delta;\ \Delta;\ \ni\}$

On appelle intersection de $A\ et\ B$ et on note "$A \cap B$"et on lit "$A\ interB$", l'ensemble des éléments appartenant à $A\ et$ à B

Exemple : $A = \{1; 3;\ \alpha;\ \delta;\ \ni\}$; $B = \{\ni; 2; 1; \Delta\}$ alors $A \cap B = \{1;\ \ni\}$

Propriété

Soient $A\ et\ B$ deux ensembles finis : $\boldsymbol{card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)}$

c) Produit cartésien

Définition

Soient $A\ et\ B$ deux ensembles. On appelle produit cartésien de $A\ par\ B$ et on note "$A \times B$"et on lit "$A\ croix\ B$". C'est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que $x \in A\ et\ y \in B$

Propriété

Soient $A\ et\ B$ deux ensembles : $\boldsymbol{card(A \times B) = card(A) \times card(B)}$

Pour tout E à n éléments : $\boldsymbol{card(E^p) = [card(E)]^p = n^p}$

I-2) P-uplet, arrangement, permutation

I-2-1) P-uplet d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul.

On appelle p-uplet de E tout élément de l'ensemble E^p.

Propriété

Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est : n^p.

I-2-2) Arrangement de p éléments d'un ensemble fini.

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul tel que $\boldsymbol{p \leq n}$.

On appelle arrangement de p éléments de E tous p-uplets d'éléments de E deux à deux distincts.

Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments noté $\boldsymbol{A_n^p}$est tel que

: $\boldsymbol{A_n^p = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots\ldots (n-p+1)}$.

I-2-3) <u>Permutation</u>

<u>Définition</u>

Soit n un entier naturel, non nul. E un ensemble fini de cardinal n. On appelle permutation de E tout arrangement de n éléments de E.

<u>Notation</u>

Soit n un entier naturel :

$$\boldsymbol{n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3\times 2\times 1.}$$

Par convention $0! = 1$ et $1! = 1$.

<u>Propriété</u>

Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est $n!$

<u>Propriété</u>

Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n \geq p$.

$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$; $A_n^0 = 1$.

I-3) <u>COMBINAISON</u>

<u>Définition</u>

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul tel $n \geq p$. on appelle combinaison de p éléments de E tout sous ensemble de E ayant p éléments.

<u>Propriété</u>

Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments, est tel que : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

I-4) <u>Expression de C_n^p et A_n^p à l'aide de factorielle.</u>

Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n \geq p$. alors on a :

$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}etC_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

<u>Propriété</u>

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$ alors on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$.

I-5) <u>SITUATIONS CLASSSIQUES</u>

Le nombre de :

tirages**simultanés** de p éléments parmi n éléments ($p \leq n$) est C_n^p.

Tirages **successifs avec remise** de p éléments dans un ensemble de cardinal n est :n^p

Tirages **successifs sans remise** de p éléments dans un ensemble de cardinal n est :A_n^p

II) <u>PROBABILITE</u>

<u>II-1) calcul de probabilités</u>

<u>II-1-1) Vocabulaire</u>

En général Ω est l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle **évènement** toute partie (sous ensemble) de Ω. On appelle **évènement élémentaire** tout singleton de Ω

Une expérience est dite aléatoire lorsque les résultats liés à cette expérience ne relève pas d'une quelconque prévision (ou ne sont pas connus d'avance).

<u>Exemple</u> :

On lance un dé truqué (non pipé) à 6faces numérotées de 1à 6. Lorsque celui-ci s'arrête on note le chiffre obtenu sur sa face supérieure

$\ll$ *obtenir un nombre pair* $\gg$ est l'évènement $\{2; 4; 6\}$

$\ll$ *obtenir un multiple de* 4 $\gg$ est le singleton $\{4\}$

L'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

L'ensemble $\emptyset$ est un évènement appelé évènement impossible

Ω est un évènement appelé évènement certain.

<u>II-1-2) Évènement contraire</u>

SoitΩ l'ensemble des éventualités d'une expérience $\mathcal{E}$ et A un événement de Ω. Alors $\bar{A}$est appelé événement contraire de l'évènement A.

<u>Exemple</u>

Dans l'exemple précédent, A = $\{2 ; 4 ; 6\}$ et $\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$

<u>II-1-3) Réunion et intersection de deux évènements</u>

Soit A et B deux évènements de Ω.

A et B est l'évènement$A \cap B$.A ou B est- l'évènement $A \cup B$.

<u>II-1-4) Évènement incompatibles</u>

Soit Ω l'ensemble des éventualités d'une expérience. A et B deux évènements de Ω. A et B sont dits i**ncompatibles** si$A \cap B = \emptyset$.

II-2) Probabilité d'un évènement

II-2-1) Probabilité d'un évènement

Soit Ω l'ensemble des éventualités d'une expérience $\mathcal{E}, \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des évènements liés à l'expérience $\mathcal{E}$.

Définition

On appelle probabilité définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans l'intervalle$[0; 1]$telle que :

P(Ω)=1.

$P(\emptyset) = 0$.

Si $A \cap B = \emptyset$.alors $P(A \cup B)$ = $\mathrm{P(A) + P(B)}$

Propriétés

Soit A et B tel $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$ et P une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, alors on a :

Si $A \subset \mathrm{B}$ alors $\mathrm{P(A) \leq P(B)}$.

$P(A \cup B)$ = $\mathrm{P(A) + P(B)} - P(A \cap B)$

si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B)$ = $\mathrm{P(A) + P(B)}$.

II-2-2) Equiprobabilité

On laisse un dé parfait à 6 faces numéroté de 1à 6.

Le dé étant parfait, chaque évènement élémentaire à la même chance de se produire. On dit que les évènements élémentaires sont équiprobables. Dans cette hypothèse, la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{6}$.

Remarquons que $\mathbf{3}$ est le nombre de chiffres pairs et $\mathbf{6}$ le nombre total de possibilités.

Si $\Omega = (\mathrm{w}_1;\ \mathrm{w}_2;\ \mathrm{w}_3; \dots \dots \dots;\ \mathrm{w}_\mathrm{n})$ est un univers fini de n éventualités. Il y a équiprobabilité si :

$$P\{w_1\} = P\{w_2\} = P\{w_3\} = \cdots \dots \dots .. = P\{w_n\}$$

Dans ces conditions la probabilité d'un évènement A composé de k éventualités est :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{cas\ favorables}{cas\ possibles}$$

Définition

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque toutes les éventualités d'une expérience donnée ont toutes la même probabilité.

Propriété

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω. Dans l'hypothèse d'équiprobabilité on a :$\forall\ A \subset \Omega, P(A) = \frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)}$

Remarques

$card(\Omega)$ représente le nombre de cas possibles et $card(A)$le nombre de cas favorables à A. Ainsi on a :

$P(A) = \frac{nombre\ \ de\ cas\ favorables\ \ \text{à}\ A}{nombres\ \ de\ cas\ possibles}$E

II-3) Probabilités conditionnelles

II-3-1) Probabilités conditionnelles

Définition

Soit Ω l'ensemble des éventualités d'une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités et P une probabilité définie sur$\mathcal{P}(\Omega)$;Bun évènement de probabilité non nulle. L'application P_B: $P(\Omega) \rightarrow [0,1]$

$$A \mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. On l'appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé et on note

$$P_B(A) = P({}^{A}/{}_{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Conséquences

$P_B(B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{p(B)}{p(B)}$ = 1

$\forall\ A \subset \Omega$ tel que $B \subset \mathrm{A}$ on a : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{p(B)}{p(B)}$ = 1

$\forall\ C \subset \Omega$ tel que $C \subset \mathrm{B}$ on a : $P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{p(C)}{p(B)}$

$P(A \cap \mathrm{B}) = P(A) \times P_A(B)$.

$P(A \cap \mathrm{B}) = P(B) \times P_B(A)$.

Propriétés :

$$P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A)$$

$$P(B_1 \cup B_2/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A) - P(B_1 \cap B_2/A)$$

Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'évènements de probabilités non nulles. Pour tout évènement B, on a : $\boldsymbol{P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_2) + \cdots P(A_n) \times P(B/A_n)}$

II-2-3) Évènements indépendants

Définition

On dit que deux évènements A et B d'un univers Ω sont indépendants en probabilité lorsque la probabilité de l'un n'est pas modifié par la réalisation de l'autre.

A et B indépendants $\Longleftrightarrow \begin{cases} P_A(B) = P(B) \\ P_B(A) = P(A) \\ P(A \cap B) = \mathrm{P(A) \times P(B)} \end{cases}$

II-4) VARIABLES ALEATOIRES

II-4-1)Définition

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω fini. On appelle variable aléatoire réelle Xsur l'univers Ω toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Notation et vocabulaire

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$ et est appelé **univers-image**s de Ω par X

Supposons que $X(\Omega) = \{x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots\ldots;\ x_n\}$; l'évènement ≪ X prend la valeur x_i ≫ est noté $(X = x_i)$

Exemple

Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec deux pièces. A lance les deux pièces

S'il obtient (face, face) il donne 200 F à B. S'il obtient (face ; pile) ou (pile ;face) B lui donne 100 F, s'il obtient (pile ; pile) match nul.

Construire l'application $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ représentant ce jeu.

Solution

L'univers de cette expérience est $\Omega = \{\mathrm{(P, P); (P, F); (F, P); (F, F)}\}$

$$\begin{gathered} X: \Omega \longrightarrow \mathrm{R} \\ \mathrm{(P, P)} \longrightarrow 0 \\ \mathrm{(P, F)} \longrightarrow 100 \\ \mathrm{(F, P)} \longrightarrow 100 \\ \mathrm{(F, F)} \longrightarrow -200 \end{gathered}$$

X ainsi définie est appelée variable aléatoire.

II-4-2) LOI DE PROBABILITE OU DISTRIBUTION D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

Définition

Soit P une probabilité définie sur un univers fini Ω. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X sur Ω est l'application qui, à toute valeur x_i de X associe la probabilité $P(X = x_i)$

Remarque : La loi de probabilité d'une variable aléatoire se présente sous forme de tableau

x_i	x_1	x_2	x_3	……………..	x_n
$\mathrm{P}[X = x_i]$	P_1	P_2	P_3	……………..	P_n

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots \ldots \ldots \ldots . + P_n = 1$$

II-4-3) Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P. La fonction de répartition de X est l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0; 1]$ définie par $F(X) = P(X \leq x)$

Exercice 14 de la fiche

II-4-3) EXPERANCE MATHEMATIQUE

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2,\ldots\ldots x_n$, avec les probabilités $P_1, P_2, \ldots P_n$.

On appelle expérannce mathématique de X le nombre réel noté $\boldsymbol{E(X)}$tel que :

$$\boldsymbol{E(X) = x_1 \times P_1 + x_2 \times P_2 + x_3 P_3 + \cdots + x_n \times P_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P[X = x_i]}$$

II-4-4) VARIANCE , ECART- TYPE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

Définitions

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2,\ldots\ldots x_n$, avec les probabilités $P_1, P_2, \ldots P_n$.

On appelle variance le réel positif noté $V(X)$tel que : $\boldsymbol{V(X) = \sum_{i=1}^{n} P[X = x_i] \left(x_i - E(X)\right)^2}$

Ou $\boldsymbol{V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 P[X = x_i] - \left(E(X)\right)^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$

On appelle écart-type de la variable aléatoire X le nombre réel noté $\boldsymbol{\delta(X)}$tel que $\boldsymbol{\delta(X) = \sqrt{V(X)}}$

II-5) SCHEMA DE BERNOULLI- LOI BINOMIALE

Définition 1

On appelle épreuve de Bernoulli, toute épreuve aléatoire ne conduisant qu'a deux éventualités (équiprobable ou non) appelés succès noté S et échec noté E.

Définition 2

On appelle schéma de Bernoulli une suite de $\boldsymbol{n}$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendants.oit X

Le nombre $\boldsymbol{n}$ des épreuves de Bernoulli et la probabilité $\boldsymbol{p}$ sont appelés **les paramètres du schéma** de Bernoulli.

La probabilité d'obtenir k succès au cours de $\boldsymbol{n}$ épreuves est : $\boldsymbol{C_n^k(p)^k \times (1-p)^{n-k}}$

Soit $\mathcal{E}$schéma de Bernoulli suite de $\boldsymbol{n}$ épreuves , p la probabilité du succès et q l'échec.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque éventualité de $\mathcal{E}$ associe le nombre k de succès $(0 \leq k \leq n)$.

La loi de probabilité de X est définie par $P(X=k) = C_n^k(p)^k \times (q)^{n-k}$ cette loi de probabilité est appelé **loi binomiale** de **paramètres$\boldsymbol{n}$** et **p**

L'espérance mathématique de X est : $\boldsymbol{E(X)\ =)\ np}$

La variance de X est : $\boldsymbol{V(X) = np(1-p) = npq}$

Exemple

On lance dix fois de suite un dé non pipé numéroté de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de fois que le n° 3 apparaît. Calculer l'espérance mathématique de X et la variance de X.

Solution

La probabilité d'obtenir le n° 3 au bout d'un lancer est $p = \frac{1}{6}$

Alors l'espérance mathématique est $E(X)\ =\ np = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$alors $E(X)\ = \frac{5}{3}$

La variance est $V(X) =\ np(1-p) = 10 \times \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{10}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{18}$

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

On dispose de cinq gâteaux. Chacune des trois personnes en choisit un pour le manger. Combien y a-t-il de choix possibles ?

Exercice2

Sur des planchettes de bois mobiles, on écrit les lettres du mot « voyage ». À l'aide de ces planchettes combien peut-on écrire de mots de quatre lettres ayant un sens ou non?

Même question pour le mot catalogue.

Exercice 3

Un livreur a dix courses à faire. De combien de manières différentes peut il organiser son travail, s'il veut réaliser les courses dans un ordre quelconque?

Exercice 4

De combien de manières différentes cinq personnes peuvent-elles se ranger sur un rang ?

Si une des cinq personnes doit occuper le centre, combien y a-t-il de manières différentes de les ranger ?

Exercice 5

Un groupe folklorique comprend huit hommes et huit femmes. De combien de façons différentes peut on constituer 8 couples?

Exercice 6

Une association comportant 20 membres dont 12 hommes et 8 femmes, désire former un comité de 5 personnes dans lequel doivent se trouver au moins deux hommes, et 2 femmes. Trouver de combien de façons on peut former ce comité si :

a- Chaque membre de l'association accepte de faire partie du comité

b- Deux hommes refusent d'en faire partie

Exercice 7

Une urne contient 12 boules : 5 rouges, 4 blanches, 3 noires. En supposant l'équiprobabilité du tirage d'une boule quelconque, on demande la probabilité, pour qu'en tirant simultanément quatre boules de l'urne, on obtienne

1) 4 boules rouges

2) Aucune boule rouge

3) Au moins une boule rouge

4) Une boule rouge, une blanche et deux noires.

Exercice 8

Les résultats de cet exercice seront donnés sous forme décimale arrondie au centième.

Un camp d'adolescents propose des stages d'activités nautiques pour débutants avec au choix :

Planche à voile, plongée et ski nautique.

Lors d'un stage donné, ce camp accueille vingt jeunes dont sept seront initiés à la planche à voile, huit à la plongée et cinq au ski nautique.

Chaque stagiaire ne pratique qu'une seule des trois activités.

I. On forme un groupe de 3 stagiaires choisis au hasard parmi les vingt.

a. Combien de groupes est-il possible de former ?

b. Déterminez la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Les trois stagiaires pratiquent des activités différentes ».

B : « Les trois stagiaires pratiquent la même activité ».

C : « Au moins l'un des trois stagiaires pratique le ski nautique ».

II. Parmi les trois stagiaires un seul se prénomme Christian.

Chaque jour onchoisit un groupe de trois stagiaires chargés du service au repas de midi.

a. Montrez que la probabilité que Christian soit choisi un jour donné pour le service de midi est égale à 0,15.

b. La durée du stage est de cinq jours. Quelle est la probabilité de ne jamais choisir Christian pour le service de midi pendant le séjour ?

c. Quelle est la probabilité de le choisir exactement une fois ?

d. Montrez que la probabilité de choisir au moins deux fois Christian est inférieure à 0,2.

Exercice 9

Une urne U contient une boule portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2. Une urne V contient une boule portant le numéro 4 et n boules portant le numéro 3. On tire au hasard une boule de U, une boule de V et on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe la somme des numéros obtenus par les deux boules.

1- Déterminer en fonction de n la loi de probabilité de X.
2- Calculer en fonction de n l'espérance mathématique $E(X)$ de X.
3- Déterminer n pour que : $E(X) = \frac{59}{12}$
4- Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $E(X) < 4{,}8$

Exercice10

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1Contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient 2 boules blanches et 1boule noire. On tire au hasard une boule de U_1 et on la remet dans U_2 puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la remet dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue un épreuve.

1- On considère l'évènement A : « après l'épreuve, les deux urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ »

a- Démontrer que la probabilité $P(A)$ de l'évènement A peut s'écrire ; $P(A) = \frac{3}{4}(\frac{n+2}{n+3})$

b- Déterminer la limite de $P(A)$ lorsque n tend vers l'infini.

2- On considère l'évènement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche » Vérifier que la probabilité $P(B)$ peut s'écrire ; $P(B) = \frac{3}{2(n+3)}$

3- Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve , on compte les boules blanches contenues dans U_2.

- Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ francs ;
- Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;
- Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a- Explique pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.

Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur

b- Déterminer la loi de probabilité de X

c- Calculer l'espérance mathématique de X

On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Démontrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1contient au moins 25 boules blanches.

Exercice 11

1) On considère une roue de loterie divisée en six secteurs égaux :
Un secteur est rouge, trois sont blancs et deux sont bleus.
Un joueur fait tourner cette roue et regarde la couleur obtenue. Si elle est rouge, il gagne ; si elle est blanche il perd ; si elle est bleue il doit refaire tourner la roue. Si à l'issue de cette deuxième épreuve, la couleur obtenue est rouge, le joueur gagne ; si elle est blanche ou bleue il perd.
Calculer les probabilités suivantes :

i. Probabilité P_1 de gagner dès la première épreuve.
ii. Probabilité P_2 de gagner à l'issue de la deuxième épreuve.
iii. Probabilité P' de gagner la partie.

2) La roue possède maintenant x secteurs égaux (x est un nombre entier supérieur ou égal à quatre) ; un secteur est rouge ; trois sont blancs et les autres sont bleus. Le principe du jeu reste le même que précédemment si le joueur gagne à la première épreuve il reçoit 4 F ; s'il perd à cette première épreuve il verse 2 F, s'il obtient un secteur rouge à la seconde épreuve il reçoit 6 F ; s'il obtient un secteur blanc il verse 1 F et s'il obtient un secteur bleu, il ne reçoit ni ne verse rien.
On appelle X la variable aléatoire réelle, égale à +A si le joueur a gagné A F, à –B si le joueur a perdu B F.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Déterminer en fonction de x, la loi de probabilité de X.
c) Vérifier que l'espérance mathématique de X est E(X) = $\frac{x-12}{x^2}$.
d) Quel doit être le nombre total de secteurs pour que le jeu soit équitable ?
e) Quel doit être le nombre total de secteurs pour que E(X) soit maximale ?

Exercice 12

Deux chasseurs A et B aperçoivent ensemble un lièvre et tirent simultanément
1) Sachant que A atteint et tue d'habitude 5 lièvres sur 6 et B, 4 sur 5 ; quelle est la probabilité pour que le lièvre soit tué ?
2) En fait B a tiré.
a) Quelle est la probabilité pour que A tue le lièvre sachant que si B tire et manque les chances de A d'atteindre le lièvre se trouve diminuée de moitié ?
b) Dans ces conditions B a tiré le premier puis A, quelle est la probabilité pour le lièvre d'en échapper

Exercice 13

A une émission radio diffusée dénommée « je vote mon artiste préféré » ; l'animateur demande aux auditeurs de classer deux chanteurs parmi 6 chanteurs internationaux et x chanteurs nationaux($x \in IN$).
On note A l'évènement : « le premier choix de l'auditeur est porté sur un chanteur national ».
B : « le deuxième choix de l'auditeur est porté sur un chanteur national ».
I.1.a) Exprimer en fonction de x les probabilités : $P(A)$ et $P(B/A)$.
b) En déduire que $P(A \cap B) = \frac{x(x-1)}{(x+6)(x+5)}$

2) A la fin de l'émission, on constate qu'une fois sur deux le choix d'un auditeur est porté sur deux chanteurs nationaux.

a).En déduire que x vérifie la relation : $x^2 - 13x - 30 = 0$

b).Combien y -a-t-il de chanteurs nationaux sur cette liste ?

II.1) On admet qu'il y a 15 chanteurs nationaux sur cette liste. On désigne par X la variable aléatoire qui à un classement d'un auditeur associe le nombre de chanteurs nationaux.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Vérifier que l'espérance mathématique de X, E$(X) = \frac{10}{7}$.

c) Calculer la variance $V(X)$et l'écart type$\delta(X)$ de X.

2) On pose P=$\frac{1}{2}$, la probabilité qu'un auditeur choisisse deux artistes nationaux.

n ($n \in IN$) auditeurs participent au jeu, et on désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre d'auditeurs ayant choisi deux chanteurs nationaux.

a) Justifier que Y suit une loi binomiale.

b) Pour tout entier naturel $\in [0, n]$, justifier que P$(Y = k) = C_n^k \left(\frac{1}{2^n}\right)$.

c) Soit P_n la probabilité pour qu'au moins un auditeur choisisse deux chanteurs nationaux.

Déterminer le nombre minimum d'auditeurs ayant participé au jeu pour que $P_n \geq 0{,}999$.

Exercice 14

Un sondage effectué dans la commune de Yopougon à propos de la construction du pont de lièvre rouge a donné les résultats suivants :

- 65% des personnes interrogées sont contre la construction du pont.
- Parmi les personnes qui sont contre la construction, 70% sont des conseillers communaux.
- Parmi les personnes favorables à la construction, 45% sont des conseillers communaux.

On note C l'évènement « la personne interrogée est contre la construction » et F l'évènement « la personne interrogée est un conseiller communal ».

1) Calculer les probabilités $P(C)$, $P(F/C)$
2) Calculer la probabilité de l'évènement F.
3) En déduire $P(\bar{F})$
4) Calculer $P(C/F)$

Exercice 15

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école. Ce test a donné les résultats suivants :

75% des bacheliers sont admis et 52% des non bacheliers sont admis

Partie A

On choisit au hasard un élève de la population. On note :

B l'évènement : « l'élève est bachelier » T l'évènement : « l'élève est admis au test »

A l'évènement : « l'élève est bachelier et est admis au test».

1- Préciser chacune des probabilités suivantes :

a- La probabilité $P(B)$ de l'évènement B

b- La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé ;

c- La probabilité $P_{\bar{B}}(T)$ sachant que B n'est pas réalisé.

2- Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égal à 0,3.

3- Calculer la probabilité de l'évènement T ;

4- Déduire des questions précédentes que les évènements B et T ne sont pas indépendants.

5- Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égal à $\frac{25}{51}$

Partie B

On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.

1- Démontrer que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est égal à 0,1323.

2- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X**.**

Exercice16

Une université propose à ses étudiants trois orientations et trois seulement : Une filière A, une filière B et une filière C.

Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.

- Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B
- Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.

On sait de plus que :

- 20% des élèves de la filière A sont des filles ;
- 70% des élèves de la filière B sont des garçons ;
- 60% des élèves de la filière C sont des garçons ;

On choisit au hasard un étudiant de cette université.

On note A l'évènement : « l'étudiant est inscrit dans la filière A » ; On note B l'évènement : « l'étudiant est inscrit dans la filière B » ; On note C l'évènement : « l'étudiant est inscrit dans la filière C»

On note G l'évènement : « l'étudiant est un garçon »

1- Calculer les probabilités des évènements A, B et C.
2- Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille.
3- Montrer que P($\bar{G}$)= $\frac{1}{4}$
4- Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille.
5- L'étudiant, choisit au hasard, n'est pas inscrit dans la filière A. calculer alors la probabilité que ce soit une fille.
6- On prend cinq (5) étudiants.
   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de filles parmi les 5 étudiants.
   a- Donner les différentes valeurs prises par la variable aléatoire X
   b- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c- Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

<u>Exercice 17</u>

Un livreur de pain qui fait son service à moto, doit servir tous les jours un client à 7 heures précises. La livraison de pain chez ce client est indépendante d'un jour à l'autre.

Habituellement, le livreur met 20 minutes de la boulangerie au domicile de ce client ; mais la mairie à fait installer sur son trajet deux feux tricolores non synchronisés et indépendants.

-s'il arrive à un feu orange, il s'arrête 30 secondes et repart.

-s'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 60 secondes et repart.

Pour chaque feu :

-la probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est : $\frac{1}{2}$

-La probabilité d'être orange à l'arrivée est : $\frac{1}{4}$

On note X la variable aléatoire égale au temps mis en minutes par le livreur pour arriver au domicile du client.

1-a) justifier que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{20; 20{,}5; 21; 21{,}5; 22\}$

(Ou pourra éventuellement s'aider d'un arbre des probabilités).

b) Justifier que $P(X = 20{,}5)= \frac{1}{4}$ et $P(X = 21)= \frac{5}{16}$

c) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer l'espérance mathématique de X. interpréter ce résultat.

3) Le livreur part à 06H39 mn de la boulangerie

a) Calculer la probabilité qu'il arrive à 7 Heures précise chez le client.

b) Calculer la probabilité qu'il arrive en retard chez le client.

4) ***Pour cette question, on donnera l'arrondi d'ordre 3 de chaque résultat.***

a) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 7 heures précises pendant 10 jours.

b) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 7 heures précises pendant 10 jours

<u>Exercice 18</u>

JOSE MORHINO, manager du prestigieux club de la première ligue anglaise **Manchester United** a étudié les statistiques de tir au but (pénalty) de ses joueurs. Il a alors remarqué que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque

- 5 buts avec une probabilité de 0,2.
- 4 buts avec une probabilité de 0,5.
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur à l'entrainement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire égal au nombre de tirs au but réussis par un joueur au cours d'un entrainement.

I.

1. Calculer la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs au but lors d'un entrainement.
2. Quelles sont les valeurs prises par X ?
3. Établir la loi de probabilité de X. (***on pourra s'aider d'un arbre de choix***).
4. Calculer l'espérance mathématique de X.

II.

JOSE MORHINO considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs au but lorsque $X \geq 8$. Montrer que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement est égale à 0,61.

III. Chaque joueur participe à 10 séances d'entrainement. On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendantes les unes des autres. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours de ses 10 entrainements, c'est à dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts.
Si au cours d'une séance d'entrainement, il ne marque pas au moins 8 buts, on dit qu'il y a eu un échec.
Les résultats seront donnés par défaut, avec 3 chiffres après la virgule.
Calculer pour un joueur :
1. La probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances.
2. La probabilité d'avoir exactement 6 succès.
3. La probabilité d'avoir au moins 1 succès.

IV. Calculer le nombre minimal d'entrainement auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès sont supérieure à 0,99.

Exercice 19

Un joueur dispose d'un dé cubique, bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et 3 urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k représente un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a 3 boules noires dans U_1, 2 boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé, s'il obtient le numéro 1, il prend une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1.
S'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2.
Si le numéro amené n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.
On désigne par A, B, C et N les évènements suivants :
A : « le dé amène le numéro 1 » ; B : « le dé amène un multiple de 3 » ; C : « le dé amène un numéro qui n'est ni 1, ni un multiple de 3 » et N : « la boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a) Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$

b) Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieur à $\frac{1}{2}$

d) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie est égale à $\frac{1}{30}$

Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.
Calculer sous forme exacte, puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 20

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne.
Elle révèle que 40% des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35% des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons.
Sur l'ensemble de la clientèle, 40% choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe.
En fait, 60% des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20% des clients pour raison touristiques voyagent en première classe.
On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi.
On note :
A l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »
T l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »
D l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »
V l'événement « le client interrogé voyage en première classe ».
Si E et F sont deux événements, on note P(E) la probabilité que E soit réalisé, et P_F (E) la probabilité que E soit réalisé sachant que F est réalisé. D'autre part, on notera $\overline{E}$ l'événement contraire de E .
1.Déterminer: P(A), P(T), P(V), $P_A(V)$ et $P_T(V)$.
2.a. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.
b. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.
c. En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.
3. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe.

4. Soit un entier *n* supérieur ou égal à 2. On choisit *n* « clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante.
On note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.
a. Prouver que : $p_n = 1 - 0{,}4^n$.
b. Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0{,}9999$.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

Exercice 1

Partie A

A la salle de jeux de la mairie annexe de Niangon dans la commune de Yopougon se trouve une urne qui contient 3 boules rouges, 3 boules noires, 3 boules vertes et 3 boules jaunes. On tire au hasard et simultanément 3 boules. Toutes les boules étant indiscernables au toucher.

1- Calculer le nombre de tirages possibles distincts.
2- Soit X la variable aléatoire numérique égale au nombre de couleurs présentes dans des tirages.
a- Trouver $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X.
b- Déterminer la loi de probabilité de X.
c- Justifier que l'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{136}{55}$.
d- Calculer la variance V(X) et l'écart type $\sigma(X)$ de X.
3- Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présente dans chacun des tirages de 3 boules.
a- Trouver $Y(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par Y.
b- Déterminer la loi de probabilité de Y.
c- En déduire que la probabilité de l'évènement « $Y \geq 2$ » est égale à $\frac{7}{55}$.

Partie B

Pour gagner au jeu du tirage de la partie A, il est nécessaire d'obtenir au moins 2 boules rouges dans chacun des tirages parmi les trois boules tirées. Mais on estime que 10% des joueurs sont des tricheurs et que la probabilité pour un tricheur de gagner est égale à $\frac{1}{2}$. T et G sont les évènements suivants :
T : « Le joueur est un tricheur »et G : « le joueur gagne le jeu »

1- a. Calculer $P_{\overline{T}}(G)$ c'est-à-dire la probabilité pour un non tricheur de gagner le jeu (***on pourra éventuellement s'aider d'un arbre de probabilité)***
b. Calculer $P(\overline{T} \cap G)$ c'est-à-dire la probabilité d'être à la fois non tricheur et gagner au jeu.
c- Calculer $P(T \cap G)$ c'est-à-dire la probabilité d'être à la fois tricheur et gagner au jeu.
d- Déduire des questions précédentes que la probabilité de gagner au jeu est égale à $P(G) = \frac{181}{1100}$.
2- Un joueur a gagné au jeu. Quelle est la probabilité pour ce joueur d'être un tricheur ?
3- On choisit au hasard et de façon indépendante 20 joueurs parmi de très nombreux joueurs. Calculer, sous forme d'un nombre décimal d'ordre 3, la probabilité qu'aucun de ces 20 joueurs ne gagne.

Exercice 2

Pour les questions I et II, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à $\mathbf{10^{-3}}$ près.

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boite cylindrique et le reste dans une boite cubique.

I- Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boite cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisit. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.
1- Déterminer la loi de probabilité de X.
2- Calculer l'espérance mathématique de X.

II- Un second jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boites, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard dans la boite choisie. On considère les évènements suivants :
C_1 : « l'enfant choisit la boite cubique » ;
C_2 : « l'enfant choisit la boite cylindrique »
R : « l'enfant prend une bille rouge »
V : « l'enfant prend une bille verte »
1- Représenter par un arbre pondéré la situation correspondante à ce second jeu.
2- Calculer la probabilité de l'évènement R.
3- Sachant que l'enfant a choisit une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boite cylindrique ?

III- L'enfant produit n fois de suite son second jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
1- Exprimer en fonction de n, la probabilité P_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
2- Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $P_n \geq 0{,}99$.

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1

Chaque personne choisit un gâteau et le mange. Et on en mange 3 parmi 5.

$A_5^3 = 60$ Choix possibles.

Exercice 2

Ecrire un mot de quatre lettres revient à faire un choix ordonné de 4 planchettes parmi les 6. Les lettres du mot voyage étant toutes distinctes, on a : $A_6^4 = 360\ choix\ possibles$.

Pour le mot « catalogue » contenant 2 A

- Nombres de mots de 4 lettres contenant un seul A ou aucun A : $A_8^4 = 1680$
- Nombre de mots de 4 lettres contenant 2 A ; on a : C_4^2 choix pour les 2 A et A_7^2 choix possibles pour les 2 autres lettres, on a : $C_4^2 \times A_7^2 = 252$.

Au total 1680+252=1932 mots.

Exercice 3

Il y a 10 choix possibles pour la première course. Celle-ci étant faite il y a 9 choix possibles pour la seconde ……..ainsi de suite.

Donc il y aura $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10! = 3\ 628\ 800\ courses$.

Exercice 4

Il y aura $5! = 120\ manières\ différentes\ de\ ranger\ 5\ personnes\ sur\ un\ rang$

Il y aura $4! = 24\ manières\ si\ une\ des\ 5\ personnes\ doit\ occuper\ le\ centre$.

Exercice 5

Il s'agit d'applications bijectives de l'ensemble des huit hommes vers l'ensemble des huit femmes, donc :

$8! = 40\ 320\ façons\ de\ former\ les\ couples$.

Exercice 6

a. Il peut y avoir 2 hommes et 3 femmes $C_{12}^2 \times C_8^3$ ou 3 hommes et 2 femmes $C_{12}^3 \times C_8^2$

Au total $C_{12}^2 \times C_8^3 + C_{12}^3 \times C_8^2 = 9\ 856\ façons$.

b. Il peut y avoir 2 hommes et 3 femmes $C_{10}^2 \times C_8^3$ ou 3 hommes et 2 femmes $C_{10}^3 \times C_8^2$

Au total $C_{10}^2 \times C_8^3 + C_{10}^3 \times C_8^2 = 5\ 880\ façons$

Exercice 7

L'univers Ω est l'ensemble des parties de 4 boules prises parmi les douze : $card\Omega = C_{12}^4 = 495$.

1) <u>La probabilité d'obtenir 4 boules rouges</u>

Soit A l'évènement « obtenir 4 boules rouges »

On choisit 4boules rouges parmi les 5 et aucune donc parmi les 7 autres non rouges : $cardA = C_5^4 = 5$

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{5}{495} = \frac{1}{99} \approx 0,010$$

2) La <u>probabilité de n'obtenir aucune boule rouge</u>

Soit B l'évènement « obtenir aucune boule rouge »

On choisit 4boules parmi les 7 non rouges et aucune donc parmi les 5 rouges : $cardA = C_7^4 = 35$

$$P(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{35}{495} = \frac{7}{99} \approx 0,707$$

3) Probabilité d'obtenir au moins une boule rouge

L'évènement C « obtenir au moins une boules rouge » est l'évènement contraire de B. Donc : $C = \overline{B}$.

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{99} = \frac{92}{99} = 0,929$$

4) Probabilité d'obtenir une boule rouge, Une boule blanche et 2 boules noires.

Soit D l'évènement «obtenir une boule rouge, Une boule blanche et 2 boules noires »

$$cardD = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^2 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$P(D) = \frac{cardD}{card\Omega} = \frac{60}{495} = \frac{4}{33} \approx 0,121$$

Exercice 8

1.a) Il y a 20 stagiaires, on veut en choisir 3. Cela revient à choisir 3 éléments parmi 20. C'est donc le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 20. Le nombre de choix possibles pour les groupes de 3 est donc :

$$card\Omega = C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!\,(20-3)!} = \frac{20!}{3! \times 17!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$$

b.) A : « Les trois stagiaires pratiquent des activités différentes »

$$cardA = C_{7}^{1} \times C_{8}^{1} \times C_{5}^{1} = 7 \times 8 \times 5 = 280$$

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{280}{1140} = \frac{14}{57} \approx 0,2456$$

B : « Les trois stagiaires pratiquent la même activité ».

L'évènement B : « Les trois stagiaires pratique la même activité » correspond à choisir 3 stagiaires parmi ceux initiés à la planche à voile, 3 stagiaires parmi ceux initiés à la plongée ou 3 stagiaires parmi ceux initiés au ski.

$$cardB = C_{7}^{3} + C_{8}^{3} + C_{5}^{1} = 35 + 56 + 10 = 101$$

$$P(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{101}{1140} \approx 0,0886$$

C : « Au moins l'un des trois stagiaires pratique le ski nautique ».

L'évènement C : est « Au moins l'un des trois stagiaires pratique le ski nautique ».l'évènement contraire de C est : « Aucun des trois stagiaires pratique le ski nautique ». il correspond au choix de 3 stagiaires parmi les 15 qui ne font pas le Ski.

$$card\overline{C} = C_{15}^{3} = 455$$

La probabilité de $\overline{C}$ est alors $P(\overline{C}) = \frac{455}{1140} = \frac{91}{228}$

$$P(C) = 1 - \frac{91}{228} = \frac{137}{228} \approx 0,6009$$

II.a) On sait qu'il y a chaque jour 1140 choix possibles de 3 stagiaires parmi 20.

Choisir un groupe de 3 avec Christian revient à choisir Christian et 2 stagiaires parmi les 19 qui ne sont pas Christian.

$$P = 1 \times \frac{C_{19}^{2}}{C_{20}^{3}} = \frac{171}{1140} = \frac{57}{380} = 0,15$$

b.) Si on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois que Christian est choisi durant le séjour de 5 jours, X suit une loi binomiale de paramètre $(n = 5, P = 0,15)$.

Donc pour tout k entier naturel, on a : $P(X = k) = C_{5}^{k}(0,15)^{k} \times (1 - 0,15)^{5-k}$

En particulier, la probabilité de ne jamais choisir Christian durant le séjour est : $P(X = 0) = C_{5}^{0}(0,15)^{0} \times (0,85)^{5-0} = (0,85)^{5} \approx 0,4437$

c.) La probabilité de choisir exactement une fois Christian est : $P(X = 1) = C_{5}^{1}(0,15)^{1} \times (0,85)^{4} \approx 0,3915$

d.) La probabilité de choisir au moins 2 fois Christian est : $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

les calculs précédents montrent bien alors que cette Probabilité est inférieure à 0,2.

Exercice 9

1) **Déterminons en fonction de n la loi de probabilité de X**

On peut représenter le contenu de chaque urne par : $U\{B_1; B_2; B_2\}$; $V\{B_4; B_3; B_3; \dots\dots\dots\dots.B_3\}$

Soit Ω l'univers de l'expérience. Alors $X(\Omega) = \{4; 5; 6\}$

$X(B_1; B_3) = 4 \quad Alors\ P(X = 4) = \frac{C_1^1}{C_3^1} \times \frac{C_n^1}{C_{n+1}^1} = \frac{n}{3(n+1)}$;

$X\{(B_1; B_4) \cup (B_2; B_3)\} = 5 \quad Alors\ P(X = 5) = \frac{C_1^1}{C_3^1} \times \frac{C_1^1}{C_{n+1}^1} + \frac{C_2^1}{C_3^1} \times \frac{C_n^1}{C_{n+1}^1} = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{2n}{3(n+1)} = \frac{2n+1}{3(n+1)}$

$X(B_2; B_4) = 6 \quad Alors\ P(X = 6) = \frac{C_2^1}{C_3^1} \times \frac{C_1^1}{C_{n+1}^1} = \frac{2}{3(n+1)}$

X_i	4	5	6
$P(X = X_i$	$\frac{n}{3(n+1)}$	$\frac{2n+1}{3(n+1)}$	$\frac{2}{3(n+1)}$

2) **Calculons en fonction de n l'espérance mathématique de $E(X)$ de X.**

$E(X) = \sum X_i P_i = 4 \times P(X = 4) + 5 \times P(X = 5) + 6 \times P(X = 6) = \frac{4n+5(2n+1)+6\times 2}{3(n+1)} = \frac{14n+17}{3(n+1)}$

3) **Déterminer n pour que : $E(X) = \frac{59}{12}$**

$$E(X) = \frac{59}{12} \Leftrightarrow \frac{14n+17}{3(n+1)} = \frac{59}{12} \Leftrightarrow 12(14n+17) = 59 \times 3(n+1) \quad alors\ n = 3$$

$$E(X) = \frac{59}{12} \Leftrightarrow n = 3$$

4) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $E(X) < 4{,}8$

$$E(X) < 4{,}8 \Leftrightarrow \frac{14n+17}{3(n+1)} < \frac{48}{10} \Leftrightarrow \frac{14n+17}{3(n+1)} - \frac{48}{10} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2n+15}{15(n+1)} < 0 \Leftrightarrow -2n+15 < 0 \; alors \; n > \frac{15}{2}$$

$n > 7{,}5$. Donc la plus petite valeur de n pour laquelle $E(X) < 4{,}8$ est 8

Exercice 10

1.a) Démontrer que la probabilité $P(A)$ de l'évènement A peut s'écrire ; $P(A) = \frac{3}{4}(\frac{n+2}{n+3})$

A est la réunion de deux évènements A' et A''

Soit l'évènement A' : " $On\ tire\ une\ boule\ blanche\ dans\ l'urne\ U_1\ et\ on\ la\ remet\ dans\ U_2$; $puis\ on\ tire\ une\ boule\ blanche\ dans\ U_2\ et\ on\ la\ remet\ dans\ U_1$"

$$P(A') = \frac{C_n^1}{C_{n+3}^1} \times \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{4(n+3)}$$

Soit l'évènement A'' : " $On\ tire\ une\ boule\ noire\ dans\ l'urne\ U_1\ et\ on\ la\ remet\ dans\ U_2$; $puis\ on\ tire\ une\ boule\ noire\ dans\ U_2\ et\ on\ la\ remet\ dans\ U_1$"

$$P(A'') = \frac{C_3^1}{C_{n+3}^1} \times \frac{C_2^1}{C_4^1} = \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{4(n+3)}$$

$$A = A' \cup A'' \quad Or\ A' \cap A'' = \emptyset$$

Donc $P(A) = P(A') + P(A'') = \frac{3n}{4(n+3)} + \frac{6}{4(n+3)} = \frac{3n+6}{4(n+3)} = \frac{3(n+2)}{4(n+3)}$ Alors $P(A) = \frac{3}{4}(\frac{n+2}{n+3})$

b.) Déterminons $\lim_{n\to+\infty} P(A)$

$\lim_{n\to+\infty} P(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right) = \frac{3}{4}$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$

2.) Vérifions que $P(B) = \frac{6}{4(n+3)}$

Si après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, c'est qu'on a tiré dans U_1 une boule noire et dans U_2 une boule blanche. Ainsi on a : $P(B) = \frac{C_3^1}{C_{n+3}^1} \times \frac{C_2^1}{C_4^1} = \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{4(n+3)}$. Alors $P(B) = \frac{3}{2(n+3)}$

3.a) Expliquons pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10

Le joueur mise 20 Francs et son gain maximum est $2n$. Donc le joueur n'a aucun n'intérêt de jouer si sa mise est supérieure à $2n$. Alors $20 > 2n$ d'où $n < 10$

b.) La loi de probabilité de X

Les valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{2n-20; n-20; -20\}$

$P(2n-20) = \frac{6}{4(n+3)}$; $P(n-20) = \frac{3(n+2)}{4(n+3)}$ et $P(-20) = \frac{n}{4(n+3)}$

X_i	-20	n-20	2n-20
$P(X = X_i)$	$\frac{n}{4(n+3)}$	$\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$	$\frac{6}{4(n+3)}$

b.) le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive.

Démontrons qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1contient au moins 25 boules blanches.

$E(X) = \sum X_iP_i = -20 \times P(X=-20) + (n-20) \times P(X=n-20) + (2n-20) \times P(X=2n-20)$

$E(X) = \frac{-20\times n+3(n-20)(n+2)+6(2n-20)}{4(n+3)} = \frac{3n^2-62n-240}{4(n+3)} = \frac{(3n+10)(n-24)}{4(n+3)}$; $E(X) > 0$ si et seulement si $n - 24 > 0$ C'est-à-dire $n > 24$. Ainsi dès que l'urne U_1contient au moins 25 boules blanches, le jeu est favorable au joueur.

Exercice 11

1.a) Probabilité P_1 de gagner dès la première épreuve

L'univers Ω est l'ensemble des secteurs de la roue : $card\Omega = 6$

Soit A l'évènement « obtenir la couleur rouge à la première épreuve » : $P_1 = P(A) = \frac{1}{6}$

b.) Probabilité P_2 de gagner à l'issue de la deuxième épreuve

Soit B l'évènement « obtenir la couleur bleue à la première épreuve »

Soit C l'évènement « obtenir la couleur rouge à la seconde épreuve »

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(C) = \frac{1}{6}$

Gagner à l'issue de la seconde épreuve est l'évènement $B \cap C$ et les évènements B et C sont indépendants.

$$P_2 = P(B \cap C) = P(B) \times P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

c.) Probabilité P' de gagner la partie

Gagner la partie est l'évènement : $[A \cup (B \cap C)]$: A *et* $(B \cap C)$ sont incompatibles, d'où

$P' = P[A \cup (B \cap C)]$=$P(A) + P(B \cap C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

2.a) les valeurs prises par X

La variable aléatoire X prend les valeurs : -2 ; -1 ; 0 ; 4 ; 6

b.) Déterminer en fonction de x, la loi de probabilité de X

Notons que la roue possède x secteurs, un rouge, trois blancs, $(x-4)$ bleus.

$P(X=-2) = \frac{3}{x}$; $P(X=-1) = \frac{x-4}{x} \times \frac{3}{x}$; $P(X=0) = \frac{x-4}{X} \times \frac{x-4}{x}$; $P(X=4) = \frac{1}{x}$; $P(X=6) = \frac{x-4}{x} \times \frac{1}{x}$

D'où le tableau de la loi de probabilité

X_i	-2	-1	0	4	6
$P(X=X_i)$	$\frac{3}{x}$	$\frac{3(x-4)}{x^2}$	$\left(\frac{x-4}{x}\right)^2$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x-4}{x^2}$

c.) Vérifier que l'espérance mathématique de X est E(X) = $\frac{x-12}{x^2}$

$E(X) = \sum X_i P_i$=$-2 \times P(X=-2) + (-1) \times P(X=-1) + 0 \times P(X=0) + 4 \times P(X=4) + 6 \times P(X=6)$

$E(X) = -2\left(\frac{3}{x}\right) - 1\left(\frac{3(x-4)}{x^2}\right) + 4\times\left(\frac{1}{x}\right) + 6 \times \left(\frac{x-4}{x^2}\right)$=$\frac{-6x-3x+12+4x+6x-24}{x^2} = \frac{x-12}{x^2}$

c.) Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-12}{x^2} = 0$ $alors$ $x - 12 = 0$ d'où $x = 12$

d.) Le nombre total de secteur pour que E(X) soit maximale

$$E'(X) = \left(\frac{x-12}{x^2}\right)' = \frac{(x-12)'(x^2) - (x^2)'(x-12)}{(x^2)^2} = \frac{-x^2 - 2x(x-12)}{x^4} = \frac{-x^2+24x}{x^4} = \frac{-x+24}{x^3}$$

$E(X)$ est maximal lorsque $x = 24$

Exercice 12

1) la probabilité pour que le lièvre soit tué

Appelons A l'évènement « A tue le lièvre » ;

B L'évènement « B tue le lièvre » ;

$A \cup B$ est l'évènement « le lièvre est tué »

En supposant que les évènements A et B soient indépendants, ils sont compatibles puisqu'ils peuvent avoir lieu en même temps, donc : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ avec $P(A) = \frac{5}{6}$; $P(B) = \frac{4}{5}$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{29}{30} \approx 0,97$$

2.a) Quand B tire et manque (évènement$\overline{B}$) les chances de A d'atteindre le lièvre se trouve diminuer de moitié,

Donc $P(A/\overline{B})$=$\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$

Calculons la probabilité pour que A tue le lièvre si B : évènement $A \cap \overline{B}$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \times P(A/\overline{B}) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{12} = \frac{1}{12} \simeq 0,08$$

b.) B le $premier$ $puis$ A ; L'évènement « le lièvre s'en échappe » est alors $\overline{B} \cap \overline{A}$

$P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{B}) \times P(\overline{A}/\overline{B})$=$[1 - P(B)] \times [1 - P(A/\overline{B})] = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(1 - \frac{5}{12}\right) = \frac{7}{60} \simeq 0,117$

Exercice 13

I.1.a) Exprimer en fonction de x les probabilités : $P(A)$ et $P(B/A)$

Soit Ω l'univers : $card\Omega = A_{x+6}^{2} = \frac{(x+6)!}{(x+6-2)!} = \frac{(x+6)!}{(x+4)!} = \frac{(x+6)(x+5)(x+4)!}{(x+4)!} = (x+6)(x+5)$

A l'évènement : « le premier choix de l'auditeur est porté sur un chanteur national »

Soit A_1 :l'évènement « le premier choix de l'auditeur est porté sur un chanteur national et son second choix sur un chanteur national » : $P(A_1) = \frac{A_x^1 \times A_{x-1}^1}{(x+6)(x+5)} = \frac{x(x-1)}{(x+6)(x+5)} = \frac{x^2-x}{(x+6)(x+5)}$

Soit A_2 :l'évènement « le premier choix de l'auditeur est porté sur un chanteur national et son second choix sur un chanteur international» : $P(A_2) = \frac{A_x^1 \times A_6^1}{(x+6)(x+5)} = \frac{x \times 6}{(x+6)(x+5)} = \frac{6x}{(x+6)(x+5)}$

b.) Déduisons que $P(A \cap B) = \frac{x(x-1)}{(x+6)(x+5)}$

$A = A_1 \cup A_2$ or $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ d'où $P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{x^2-x}{(x+6)(x+5)} + \frac{6x}{(x+6)(x+5)} = \frac{x(x+5)}{(x+6)(x+5)}$

$$P(A) = \frac{x}{x+6}$$

$$P(B/A)=\frac{card(B/A)}{card\Omega}=\frac{A_{x-1}^{1}\times A_{x+6}^{1}}{(x+6)(x+5)}=\frac{(x-1)(x+6)}{(x+6)(x+5)}=\frac{x-1}{x+5}$$
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)=\frac{x}{x+6}\times\frac{x-1}{x+5}=\frac{x(x-1)}{(x+6)(x+5)}$$

2.a) Déduisons que x vérifie la relation : $x^2-13x-30=0$

On constate qu'une fois sur deux le choix d'un auditeur est porté sur deux chanteurs nationaux revient à poser : $P(A\cap B)=\frac{1}{2}$

alors $\frac{x(x-1)}{(x+6)(x+5)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x(x-1)=(x+6)(x+5) donc\!: 2x^2-2x=x^2+11x+30$

D'où : $x^2-13x-30=0$

b.) le nombre de chanteurs nationaux sur cette liste

L'équation $x^2-13x-30=0$ admet deux solutions réels : $x=-2\ et\ x=15\ mais -2\ est\ négatif.$

Alors il y a $15\ chanteurs\ nationaux\ sur\ cette\ liste.$

II.1.a) La loi de probabilité de X

Les valeurs prises par X sont : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

$P(X=0)=\frac{A_{15}^{0}\times A_{6}^{2}}{A_{21}^{2}}=\frac{15}{420}=\frac{1}{14}$; $P(X=1)=\frac{A_{15}^{1}\times A_{6}^{1}+A_{6}^{1}\times A_{6}^{1}}{A_{21}^{2}}=\frac{15\times 6+6\times 15}{420}=\frac{180}{420}=\frac{3}{7}$; $P(X=2)=\frac{A_{15}^{2}\times C_{6}^{0}}{A_{21}^{2}}=\frac{15\times 14}{420}=\frac{1}{2}$

D'où le tableau de loi de probabilité de X

X_i	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$

b.) vérifions que $E(X)=\frac{10}{7}$

$$E(X)=\sum X_iP_i=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{7}+1=\frac{10}{7}$$

Alors $E(X)=\frac{10}{7}$

c.) Calculer la variance $V(X)$ et l'écart type $\delta(X)$ de X

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=0^2\times\frac{1}{14}+1^2\times\frac{3}{7}+2^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{10}{7}\right)^2=\frac{3}{7}+2-\frac{100}{49}=\frac{19}{49}$$
$$V(X)=\frac{19}{49}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\left(\frac{19}{49}\right)}=\frac{\sqrt{19}}{7}\approx 0,623$$

2.a) Justifions que Y suit une loi binomiale

On effectue n fois la même épreuve dans les conditions identiques avec la probabilité constante et les choix indépendants ; donc Y suit une loi binomiale de paramètre $(n;\frac{1}{2})$

b.) Pour tout entier naturel $\in[0,n]$, justifier que P$(Y=k)=C_n^k\left(\frac{1}{2^n}\right)$

$$P(Y=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+k}=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

P$(Y=k)=C_n^k\left(\frac{1}{2^n}\right)$

c.) Déterminons le nombre minimum d'auditeurs ayant participé au jeu pour que $P_n\geq 0,999$

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$P(Y\geq 1)\geq 0,999\Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq 0,999$ **alors** $1-0,999\geq\left(\frac{1}{2}\right)^n$; $0,001\geq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$ln(0,001)\leq ln\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **alors** $ln(0,001)\leq nln\frac{1}{2}$ **ou** $n\geq\frac{ln(0,001)}{-ln2}\approx 9,966$

$$n\approx 10$$

Exercice 14

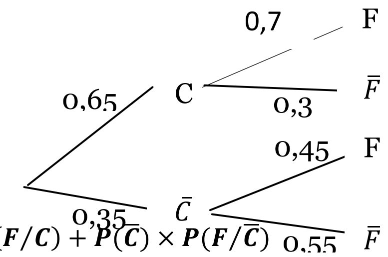
1) **Calculer les probabilités $P(C), P(F/C), P(C/F)$**

$P(C)=65\%=\frac{65}{100}=0,65$;

$P(F/C)=70\%=\frac{70}{100}=0,7$;

2) **Calculer la probabilité de l'évènement F**

En appliquant la formule des probabilités totales :



$$P(F)=P(F\cap C)+P(F\cap\bar{C})=P(C)\times P(F/C)+P(\bar{C})\times P(F/\bar{C})$$

$P(F) = 0,65 \times 0,7 + 0,35 \times 0,45 = 0,6125$

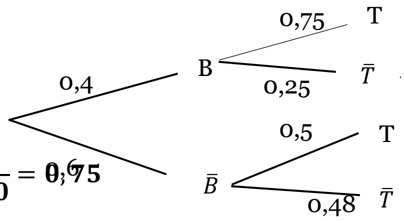
3) **En déduire $P(\overline{F})$**

On sait que : $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0,6125 = 0,3875$

4) Calculer $P(C/F)$

On sait que $P(C/F) = \frac{P(C\cap F)}{P(F)} = \frac{P(C)\times P(F/C)}{P(F)} = \frac{0,65\times 0,7}{0,6125} \simeq 0,743$

Exercice 15



1.a) La probabilité $P(B)$ de l'évènement B

$P(B) = 40\% = \frac{40}{100} = 0,4$;

b.) La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé

$$P_B(T) = 75\% = \frac{75}{100} = 0,75$$

c.) La probabilité $P_{\overline{B}}(T)$ sachant que B n'est pas réalisé

$P_{\overline{B}}(T) = 52\% = \frac{52}{100} = 0,52.$

2 .) Démontrons que la probabilité de l'évènement A est égal à 0,3

$P(A) = P(B \cap T) = P(B) \times P(T/B) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$ **d'où** $P(A) = 0,3$

3.) Calculer la probabilité de l'évènement T

En appliquant la formule des probabilités totales : $P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap \overline{B}) = P(B) \times P(T/B) + P(\overline{B}) \times P(T/\overline{B})$

$P(T) = 0,4 \times 0,75 + 0,6 \times 0,52 = 0,612$ **d'où** $P(T) = 0,612$

4.) Déduisons des questions précédentes que les évènements B et T ne sont pas indépendants

$$P(B \cap T) = 0,3 \quad et \quad P(B) \times P(T) = 0,4 \times 0,612 = 0,2448$$

On a donc $P(B \cap T) \neq P(B) \times P(T)$; **on en déduit que** $B\ et\ T$ **ne sont pas indépendants.**

5.) Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égal à $\frac{25}{51}$

On sait que $P_T(B) = \frac{P(B\cap T)}{T} = \frac{0,3}{0,612} = \frac{300}{612} = \frac{25\times 12}{51\times 12} = \frac{25}{51}$ **d'où** $P_T(B) = \frac{25}{51}$

Partie B

1) **Démontrer que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est égal à 0,1323**

X est la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis. X **suit une loi binomiale de paramètres** $n = 5 \ \ et \ \ P = 0,3$

$P(X = k) = C_5^k (0,3)^k (1 - 0,3)^{5-k}$; **alors** $P(X = 3) = C_5^3 (0,3)^3 (0,7)^2 = 0,1323$

D'où $P(X = 3) = 0,1323$

Calculer l'espérance mathématique de la variance de X

X **suit une loi binomiale de paramètres** $n = 5 \ \ et \ \ p = 0,3$ **alors** $E(X) = np = 5 \times 0,3 = 1,5$

Exercice 16

1- **Calculons les probabilités des évènements A, B et C**

Dans cette université ; on a 3 filières seulement , alors : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B se traduit par : $P(A) = 2P(B)$

Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C se traduit par : $P(B) = 3P(C)$

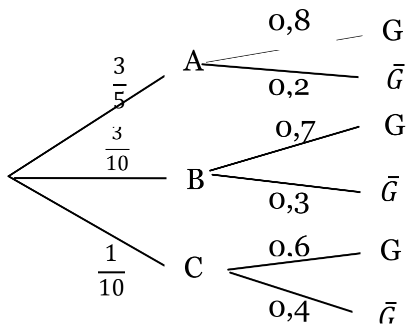
D'où le système : $\begin{cases} P(A) + P(B) + P(C) = 1 \\ P(A) = 2P(B) \\ P(B) = 3P(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A) + P(B) + P(C) = 1 \\ P(A) = 2P(B) \\ P(C) = \frac{1}{3}P(C) \end{cases}$ **alors en remplaçant** $P(A)\ et\ P(C)$

Par leur expression dans la première équation on obtient : $2P(B) + P(B) + \frac{1}{3}P(B) = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{3}P(B) = 1.$

D'où $P(B) = \frac{3}{10}$; $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ et $P(C) = \frac{1}{10}$

2- **Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille**

On peut résumer cette situation par un arbre de probabilité



$P(A \cap \overline{G}) = P(A) \times P(\overline{G}/A) = \frac{3}{5} \times \frac{20}{100} = \frac{3}{25}$

3- **Montrer que P($\overline{G}$)= $\frac{1}{4}$**

En appliquant la formule des probabilités totales :

$$P(\overline{G}) = P(A \cap \overline{G}) + P(B \cap \overline{G}) + P(C \cap \overline{G})$$
$$P(\overline{G}) = P(A) \times P(\overline{G}/A) + P(B) \times P(\overline{G}/B) + P(C) \times P(\overline{G}/C)$$
$$P(\overline{G}) = \frac{6}{10} \times \frac{20}{100} + \frac{3}{10} \times \frac{30}{100} + \frac{1}{10} \times \frac{40}{100} = \frac{120+90+40}{1000} = \frac{250}{1000}$$

D'où $P(\overline{G}) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

4- Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille

$$P(A/\overline{G}) = \frac{P(A \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{25} \times 4 = \frac{12}{25}$$

5- L'étudiant, choisit au hasard, n'est pas inscrit dans la filière A. calculons alors la probabilité que ce soit une fille

$$P(\overline{G}/\overline{A}) = \frac{P(\overline{G} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{G}) \times P(\overline{A}/\overline{G})}{1 - P(A)} = \frac{P(\overline{G})(1 - P(A/\overline{G})}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{12}{25}\right)}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{13}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{13}{100} \times \frac{2}{5} = \frac{13}{250}$$

D'où $P(\overline{G}/\overline{A}) = \frac{13}{250}$

6- a).les différentes valeurs prises par la variable aléatoire X

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

b.) X est la variable aléatoire donnant le nombre de filles parmi les 5 étudiants. X **suit une loi binomiale de paramètres** $n = 5 \quad et\ p = \frac{1}{4}$

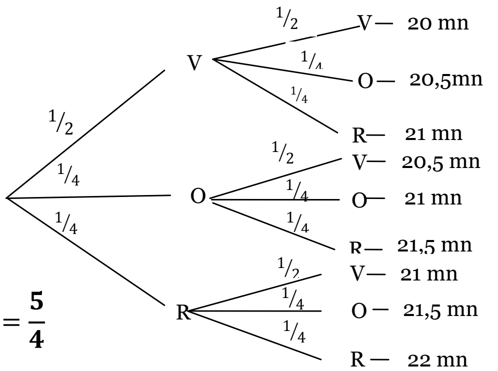
La loi de probabilité de X **est définie par** $P(X = k) = C_5^k (\frac{1}{4})^k \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}$

c.) Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X

$$E(X) = np = 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Exercice 17

Avant de commencer cet exercice, il faut mieux faire un arbre qui résume la situation



1- a) Les valeurs prises par X: $X(\Omega) = \{20;\ 20,5;\ 21;\ 21,5; 22\}$

b) Je justifie que $P(X = 20,5) = \frac{1}{4} \quad et \quad P(X = 21) = \frac{5}{16}$

$P(X = 20,5) = P(V \cap O) + P(O \cap V)$

$P(X = 20,5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

D'où $P(X = 20,5)$= $\frac{1}{4}$

$P(X = 21) = P(V \cap R) + P(O \cap O) + P(R \cap V)$

$P(X = 21) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{2+1+2}{16} = \frac{5}{4}$

D'où $P(X = 21)$= $\frac{5}{16}$

c). Déterminer la loi de probabilité de X

$$P(X = 20) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad ; \quad P(X = 21,5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \qquad et \quad P(X = 22) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

X_i	20	20,5	21	21,5	22
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

2- Calculer l'espérance mathématique de X

$E(X) = \sum X_i P_i$= $20 \times P(X = 20) + 20,5 \times P(X = 20,5) + 21 \times P(X = 21) + 21,5 \times P(X = 21,5) + 22 \times P(X = 22)$= $20 \times \frac{1}{4} + 20,5 \times \frac{1}{4} + 21 \times \frac{5}{16} + 21,5 \times \frac{1}{8} + 22 \times \frac{1}{16}$=$\frac{332}{16} = 20,75$

Alors $E(X) = 20,75 = 20mn45s$

En moyenne le livreur mettra $45s\ de\ retard$

3- a) Calculer la probabilité qu'il arrive à 7 Heures précise chez le client

Il part à $06h39mn$ **de la boulangerie, pour qu'il arrive à** $07\ heures\ précise$ **chez le client il mettra** $21mn$

D'où $P(X = 21)$= $\frac{5}{16}$

b) La probabilité qu'il arrive en retard chez le client

Il arrive en retard s'il met plus de $21mn$ **pour arriver chez le client.**

$P(X \geq 21,5) = P(X = 21,5) + P(X = 22)$=$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

D'où $P(X \geq 21,5) = \frac{3}{16}$

4- a) Si on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le pain soit livré à 7 Heures précise pendant $10\ jours$, Y suit une loi binomiale de paramètre $\left(n = 10, P = \frac{5}{16}\right)$.

Donc pour tout k entier naturel, on a : $P(X = k) = C_{10}^{k}(\frac{5}{16})^k \times (1 - \frac{5}{16})^{10-k}$

En particulier, la probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 7 heures précises pendant 10 jours est : $P(X =$
3=C310(516)3×(1116)7≈0,266

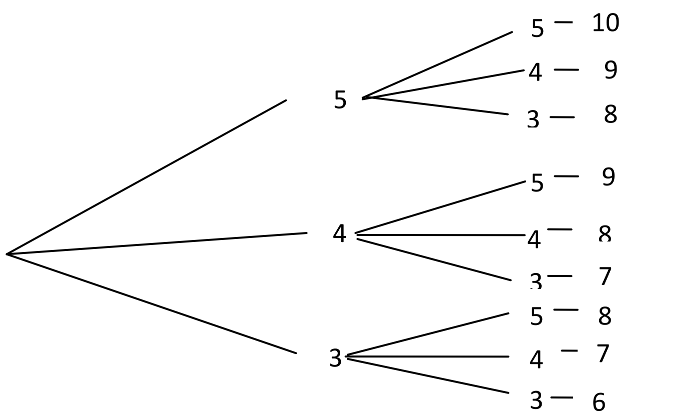
b) La probabilité la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 7 heures précises pendant 10 jours est :

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$=$1 - C_{10}^{0}(\frac{5}{16})^0 \times (\frac{11}{16})^{10-0} = 1 - (\frac{11}{16})^{10} \approx 0,976$

d.) La probabilité de choisir au moins 2 fois Christian est : $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

Exercice 18

Avant de commencer cet exercice, il faut mieux faire un arbre qui résume la situation :un joueur tire donc séries de 5 ballons. Pour chaque série, le joueur marque 3 ou 4 ou 5 buts avec des probabilités respectives de 0,2 ou 0,5 ou 0,3. Ceci conduit alors à l'arbre suivant



I) probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs au but lors d'un entrainement

Le joueur réussit tous ses tirs au but s'il marque 5 buts à chaque série. Comme la probabilité de marquer 5 buts durant une série est 0,2 et que les résultats des séries sont indépendants, on a donc : $P_1 = 0,2 \times 0,2 = (0,2)^2 = 0,04$

1) les valeurs prises par X

X est la variable aléatoire égale au nombre de buts réussis par un joueur au cours d'un entrainement. Les valeurs que peut prendre X sont donc : $X(\Omega) = \{6;\ 7;\ 8;\ 9; 10\}$

2) La loi de probabilité de X

$P(X = 6) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$; $P(X = 7) = 0,3 \times 0,5 + 0,5 \times 0,3 = 0,30$;$P(X = 10) = 0,2 \times 0,2 = 0,04$

$P(X = 8) = 0,3 \times 0,2 + 0,5 \times 0,5 + 0,2 \times 0,3 = 0,37$; $P(X = 9) = 0,5 \times 0,2 + 0,2 \times 0,5 = 0,20$

On présente alors ces résultats sous forme de tableau

X_i	6	7	8	9	10
$P(X = X_i)$	0,09	0,30	0, 37	0,20	0,04

3) Calculer l'espérance mathématique de X

$E(X) = \sum X_i P_i$= $6 \times P(X = 6) + 7 \times P(X = 7) + 8 \times P(X = 8) + 9 \times P(X = 9) + 10 \times P(X = 10)$

$E(X) = 6 \times 0,09 + 7 \times 0,30 + 8 \times 0,37 + 9 \times 0,20 + 10 \times 0,04 = 7,8$ **D'où $E(X) = 7,8$**

II) L'entrainement est réussi si le joueur marque au moins 8 buts durant les deux séries.

Alors $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0,37 + 0,20 + 0,04 = 0,61$

D'où $P(X \geq 8) = 0,61$

III) Y est la variable aléatoire égale au nombre de séances d'entrainement réussies ou succès en 10 séances d'entrainement. Comme pour chaque séance, la probabilité que la séance soit un succès est $p = 0,61$ et que les résultats sont supposés indépendants les unes des autres, on voit alors que Y suit une loi binomiale de paramètres $(n = 10\ \ et\ p = 0,61)$

Donc pour tout k entier naturel, on a : $P(X = k) = C_{10}^{k}(0,61)^k \times (1 - 0,61)^{10-k}$

1) La probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances

$$P(X = 10) = C_{10}^{10}(0,61)^{10} \times (0,39)^0 = (0,61)^5 \approx 0,07$$

2) La probabilité d'avoir exactement 6 succès

$$P(X = 6) = C_{10}^{6}(0,61)^6 \times (0,39)^4 \approx 0,250$$

3) La probabilité d'avoir au moins 1 succès

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{10}^{0}(0,61)^0 \times (0,39)^{10-0} = 1 - (0,39)^{10} \approx 0,999$$

IV) Ici on a n séances d'entrainement, Y suit une loi binomiale de paramètres $(n; p = 0,61)$

$$P(X = k) = C_{n}^{k}(0,61)^k \times (1 - 0,61)^{n-k}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{n}^{0}(0,61)^0 \times (0,39)^n = 1 - (0,39)^n$$

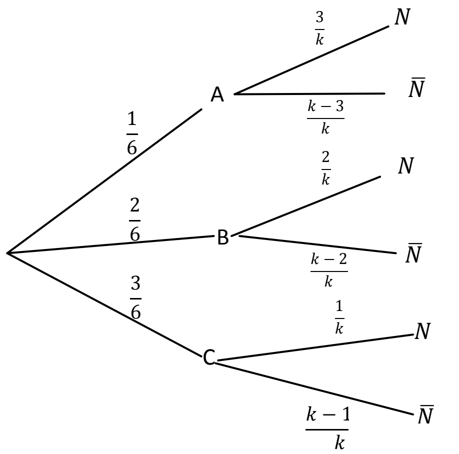
$P(Y \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - (0,39)^n \geq 0,99$ alors :$1 - 0,99 \geq (0,39)^n$; $0,01 \geq (0,39)^n$

$ln(0,01) \leq ln(0,39)^n$ alors $ln(0,01) \leq nln(0,39)$ ou $n \geq \frac{ln(0,01)}{ln(0,39)} \approx 4,89$

$$n \approx 5$$

Exercice 19

Onpeutrésumercettesituation par l'arbresuivant



1- a) Montrons que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$

En appliquant la formule des probabilités totales : $P(N) = P(A \cap N) + P(B \cap N) + P(C \cap N)$

$$P(N) = P(A) \times P(N/A) + P(B) \times P(N/B) + P(C) \times P(N/C) = \frac{1}{6}\times\frac{3}{k}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{k}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{k} = \frac{3+4+3}{6k} = \frac{10}{6k}$$

D'où $P(N) = \frac{5}{3k}$

b) Calculons la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire

On sait que : $P(A/N) = \frac{P(A\cap N)}{P(N)} = \frac{P(A)\times P(N/A)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{k}}{\frac{5}{3k}} = \frac{\frac{1}{2k}}{\frac{5}{3k}} = \frac{1}{2k} \times \frac{3k}{5} = \frac{3}{10}$

D'où $P(A/N) = \frac{3}{10}$

a. Déterminons k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$

$P(N) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{3k} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{3k} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{10-3k}{6k} > 0\ alors\ 10 - 3k > 0$; $k < \frac{10}{3}$

D'où $k = 3$

b. Déterminons$k$ pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$

$$\mathrm{P(N)} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{5}{3k} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \mathbf{3k = 150\ alors\ k = 50}$$

D'où $k = 50$

1) X est la variable aléatoire égale au nombre de parties réussies ou succès en 20 parties. Comme pour chaque partie, la probabilité que la partie soit un succès est $p = \frac{1}{30}$ et que les résultats sont supposés indépendants les uns des autres, on voit alors que X suit une loi binomiale de paramètres $(\boldsymbol{n = 20} \quad \boldsymbol{et\, p} = \frac{1}{30})$

Donc pour tout k entier naturel, on a : $\boldsymbol{P(X = k) = C_{20}^{k}} (\frac{1}{30})^{k} \times (1 - \frac{1}{30})^{20-k}$

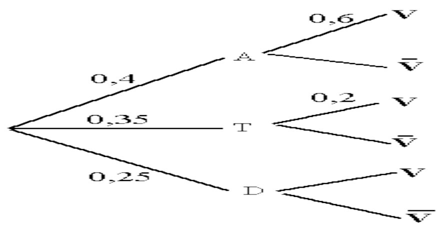
En particulier la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire est :

$$\boldsymbol{P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{20}^{0} (\frac{1}{30})^{0} \times (\frac{29}{30})^{20-0} = 1 - (\frac{29}{30})^{20}}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 1) \approx 0,492}$$

Exercice 20

Un arbre pondéré pour résumer l'énoncé :



A l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »
T l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »
D l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »
P(V) = 0,40 ; P($\overline{V}$) = 0,60
F l'événement « le client interrogé voyage en première classe ».
Si E et F sont deux événements, on note p(E) la probabilité que E soit réalisé, et p_F (E) la probabilité que E soit réalisé sachant que F est réalisé. D'autre part, on notera $\overline{E}$l'événement contraire de E.
1. P(A) = 0,4 ; P(T) = 0,6 p(V) = 0,4 , P_A(V) = 0,6 ; P_T(V) =0,2
2.a. P(A∩ V) = P_A(V) $\times$P(A) = 0,6 $\times$0,4 = 0,24
b. P(T ∩V) = P_A(T) $\times$P(A) = 0,2 $\times$0,35 = 0,07
c. P(A ∩V) + P(T ∩V) + P(D ∩V) = P(V)
d'où P(D ∩V) = P(V) - P(A ∩V) - P(T ∩V) = 0,4 - 0,24 - 0,07 = 0,09
La probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques est de 0,09 .
3. La probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe est de 0,6 :
$P_V(A) = \frac{P(A\cap V)}{V} = \frac{0,24}{0,4}$ = 0,6.
4. a. Notons V_n: $\boldsymbol{l'évènement}$"au moins un de ces n clients voyage en seconde classe "
alors $\overline{V}_n$ représente l'évènement : " aucun des n clients voyage en seconde classe "
On choisit n « clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante donc :
p_n = $P(V_n)$ = 1 - P($\overline{V}_n$) = 1 - 0,4^n .

$$p_n > 0{,}9999 \Rightarrow \boldsymbol{1 - 0,4^n} > 0{,}9999 \Rightarrow \boldsymbol{-0,4^n > -0,0001} \Rightarrow \boldsymbol{0,4^n} < 0{,}0001 \Rightarrow \boldsymbol{ln(0,4^n) < ln(0,0001)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{nln(0,4)} < ln(\boldsymbol{0,0001}) \Rightarrow \boldsymbol{n >} \frac{\boldsymbol{ln(0,0001)}}{\boldsymbol{ln(0,4)}} \Rightarrow \boldsymbol{n \approx 10,05}$$

le plus petit entier n pour lequel p_n> 0,9999 est donc n = 11

CHAPITRE VIII : NOMBRES COMPLEXES

Introduction

Le XIX siècle s'est émerveillé sur « ces nombres qui mêlent le réel et l'imaginaire ! ».
La construction des nombres complexes a enregistré la contribution d'éminents mathématiciens à qui s'est posé la nécessité de trouver une racine carré de -1!
Citons Euler, Hamilton, Cauchy…
Jean le Rond d'Alembert **(1717-1783)** conjectura, sans pouvoir le prouver, que « dans l'ensemble des nombres complexes, tout polynôme de degré n a exactement n racines… »
Niels Henrik Abel et Évariste Galois apportèrent la preuve de cette base fondamentale de l'algèbre.
L'écriture d'un nombre complexe sous forme exponentielle est due à Euler.
Elle facilite les calculs dans $\mathbb{C}$ car elle transforme les règles de calcul sur les produits et les quotients en règles de calcul sur les puissances.
La formule $e^{i\pi} + 1 = 0$, qui aurait été écrite la première fois par Euler, a frappé les imaginations du fait qu'elle lie entre eux, de façon simple, cinq nombres fondamentaux, dont trois $(i, e\ et\ \pi)$ restaient à l'époque, quelque peu mystérieux.

Léonardo EULER (1707-1783)

FICHE DE COURS

1-Définition : **forme algébrique d'un nombre complexe**

On suppose le nombre i, solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$

Remarque : le nombre i n'est pas un nombre réel puisque $i^2 = -1$

Définition

On appelle nombre complexe tout nombre écrit sous la forme : $a + ib$ou $a + bi$où a et b sont des nombres réels.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

a) Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition

L'écriture $a + ib$ (a, b sont des nombres réels) est appelé forme algébrique du nombre complexe .
a est appelé la partie réel de z. on note : $a = Re(z)$.
b est appelé la partie imaginaire de z on note : $b = Im(z)$.

b) **Identification de deux nombres complexes**

Propriété

a, b, a' et b' étant des nombres réels on a ; $a + ib = a' + ib \Leftrightarrow$' $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

2) Conjugué, inverse et quotient d'un nombre complexe

Définition

a et b étant deux nombres réels, le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$.

Propriété 1

z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$
z est imaginaire si et seulement si $z = -\bar{z}$
$z + \bar{z} = 2Re(z)$ et $z - \bar{z} = 2iIme(z)$

Propriété 2

Soit z et z' deux nombres complexes

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}$; $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$; $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}(z \neq 0)$; $\overline{\left(\frac{z}{z}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}}(z \neq 0). \bar{\bar{z}} = z.$

3) Affixe-Module -Argument

a) Affixe d'un point d'un vecteur

On appelle plan complexe, le plan rapporté à un repère orthonormal$(O, \vec{u}, \vec{v})$

Définition

Au nombre complexe z d'écriture $a + ib$, on peut associer :

1) Le point M de coordonnées $(a\,;b)$ dans le plan complexe.
z s'appelle l'affixe du point M ; M s'appelle le point image du nombre complexe z
2) Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
z s'appelle l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{OM}$ s'appelle le vecteur image du nombre complexe z.

b) Propriétés des affixes

Propriétés

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes respectives z et z', $k \in \mathbb{R}$ alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$, $k\vec{u}$ a pour affixe kz.
2) Soit A et B deux points du plan complexe, d'affixes respectives z_A et z_B alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_B$.

c) Module d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe d'image M.
Le module de z est : $\|\overrightarrow{OM}\| = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$
Si $z = a + ib$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriété

A et B étant deux points d'affixes respectives. z_A et z_B alors on a : $\|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$

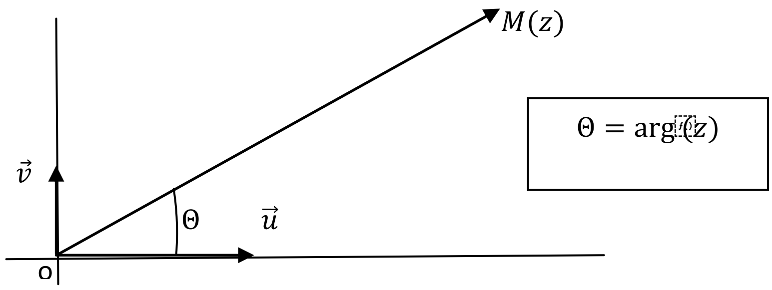
Règles de calcul

$|\bar{z}| = |z|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité du triangle) ; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $((z \in \mathbb{C}^*)$
$|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $|z^n| = |z|^n (n \in \mathbb{N})$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $(z' \in \mathbb{C}^*)$.

Argument d'un nombre complexe

Définition

Soit $(o,\vec{u},\vec{v})$ un repère du plan. Etant donné un nombre complexe non nul z d'image M, l'argument de z est :
$Arg\ z = Mes(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.



Propriétés

$\arg(z_1 \times z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -argz + 2k\pi$ $(z \in \mathbb{C}^*; k \in \mathbb{Z})$
$arg\left(\frac{z_1}{z'_2}\right) = argz_1 - argz_2 + 2k\pi$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*; k \in \mathbb{Z})$; $arg(z^n) = nargz + 2k\pi$ $(n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{Z})$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r d'argument θ, z a pour forme trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Remarques

On note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
On a donc $z = re^{i\theta}$ est la forme exponentielle de z.
Un nombre complexe est de module 1 si et seulement si il existe un réel θ tel que :
$z = \cos\theta + i\sin\theta$.

$$|e^{i\theta}| = 1.$$

Formule de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\ (n \in \mathbb{N}).$$

Opérations avec la notation exponentielle.

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = r$ et $arg(z) = \Theta$ on a : $z = re^{i\Theta}$

$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$; $\left(\frac{z_1}{z'_2}\right) = \frac{r_1}{r_2} e^{\theta_1-\theta_2}$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$; $z^n = r^n e^{in\theta}$.

Formules de Euler

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

4) **RÉSOLUTION D'ÉQUATION**

a) **Racines n ièmes d'un nombre complexe**

Définition

n étant un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe

On appelle racine n ième de Z tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

Méthode de détermination

$\mathrm{Z} = \mathrm{re}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $z = \rho e^{i\theta}$ où $(r,\rho) \epsilon\, \mathbb{R}_+{}^* \times \mathbb{R}_+{}^*$ et $(\alpha,\theta)\ \epsilon\ \mathbb{R}^2$

$$Z = z^n \Leftrightarrow \mathrm{re}^{\mathrm{i}\alpha} = \rho^n e^{in\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha+2k\pi}{n} \text{ d'où } z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)} \end{cases}$$ avec $k\ \epsilon\ \{0,1,2,\ldots\ldots, n-1\}$.

Propriété

Soit $\mathrm{re}^{\mathrm{i}\alpha}$ un nombre complexe non nul et n un nombre entier naturel $(n \geq 2)$

$\mathrm{re}^{\mathrm{i}\alpha}$ admet n racines $n^{\text{ièmes}}$ tels que : $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)}$; $k\ \epsilon\ \{0,1,2,\ldots\ldots, n-1\}$.

Les images de ces racines $n^{\text{ièmes}}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Remarque

La somme des n racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul est nulle.

b) **Résolution de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$**

Propriété

Soit l'équation $aZ^2 + bZ + C = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes $(a \neq 0)$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par $\delta\ \ et - \delta$ les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de Δ.

Si : $\Delta = 0$, alors (E) a une solution double : $-\frac{b}{2a}$

Si : $\Delta \neq 0$, alors (E) a deux solutions distinctes : $\frac{-b-\delta}{2a}$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$

Formule du binôme de newton

Propriété

Pour tous nombres complexes non nuls x et y pour tout nombre entier naturel n plus grand que 1, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$; $(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{n-k} y^k$

Triangle de pascal

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{p}-1} + \mathrm{C}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{p}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{p}}$$

n \ P	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Nombres complexes et transformations du plan

Quelques configurations de base

Soient A, B , C et D les points d'affixes $z_A; z_B; z_C\ et\ z_D$

Propriétés

A, B et C étant trois points distincts du plan complexe on a :

$Arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

Si$\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \in \mathbb{R}^*$ alors les points A, B et C sont alignés.

Si $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \in i\mathbb{R}^*$ alors ABC est un triangle rectangle en A.

Si $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$ouSi $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$alors le triangle ABC est équilatéral

Si $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = e^{i\theta}$ouSi $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = e^{-i\theta}$ $(\theta \neq k\pi; k \in \mathbb{Z})$alors le triangle ABC est isocèle en A.

Si $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = i$ouSi $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = -i$alors le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Si $\left(\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}\right) : \left(\frac{z_D-z_B}{z_D-z_A}\right) \in \mathbb{R}^*$Alors les points $A; B; C$ et D sont cocycliques.

b)<u>Transformations du plan :</u>Dans toute la suite du cours , (O, I, J) est un repère orthogonal du plan et $\mathbb{C}$ représente l'ensemble des nombres complexes. Soit z et z' des éléments de $\mathbb{C}$.

1) **<u>Symétries</u>**

La symétrie orthogonale d'axe (OI) a pour écriture complexe : $z' = \bar{z}$.
La symétrie orthogonale d'axe (OJ) a pour écriture complexe : $z' = -\bar{z}$.
La symétrie de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$.

2)<u> Translation</u>

La translation de vecteur $\vec{u}$non nul d'affixe b a pour écriture complexe : $z' = z + b$.

3) <u>Rotation de centre O</u>

La rotation de centre O et d'angle orienté θ a pour écriture complexe : $z' = e^{i\theta} z$.

4) <u>Rotation de centre quelconque</u>

<u>Propriété :</u>

θ est un nombre réel et ω un nombre complexe. La transformation complexe f associée à la rotation d'angle orienté θ et de centre le point Ωd'affixe ω est de la forme :

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$z \mapsto e^{i\theta} z + b; b \in \mathbb{C}$.

5)<u> Homothétie de centre O.</u>

L'homothétie de centre O et de rapport k $(k \in \mathbb{R}^*)$ a pour écriture complexe : $z' = kz$.

<u>6) Homothétie de centre quelconque</u>

<u>Propriété</u>

$k \in \mathbb{R}^*$. et $\omega \in \mathbb{C}$. La transformation complexe f associé à l'homothétie de rapport k et de centre Ω d'affixe ω est de la forme :

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$z \mapsto kz + b; b \in \mathbb{C}$.

c) <u>Les similitudes directes du plan</u>

<u>Définition</u>

Soit k un nombre réel strictement positif, on appelle similitude directe du plan orienté et de rapport k, toute transformation de ce plan qui multiplie les distances par k et conserve les angles orientés.

<u>Remarque :</u>

f est une similitude directe de rapport k et d'angle orienté θ si et seulement si pour N et M deux points du plan tels que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$ on a : $\begin{cases} M'N' = kMN \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right) = \theta \end{cases}$

<u>Exemples :</u>

Une similitude directe a pour rapport 1 si et seulement si c'est une translation ou une rotation

Une homothétie est une similitude directe de rapport $|k|$.
La composée de deux similitudes de rapports respectifs k_1 et k_2 est une simillitude directe de rapport $k_1 k_2$.
L'application réciproque d'une similitude directe de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$

Écriture complexe d'une similitude directe du plan

Toute similitude directe du plan a pour écriture complexe : $z' = az + b \ (a \in \mathbb{C}^*; b \in \mathbb{C})$.

Éléments caractéristiques d'une similitude directe

Si S est une similitude directe du plan d'écriture complexe $z' = az + b \ (a \in \mathbb{C}^*; b \in \mathbb{C})$ alors
$|a| = k$ est le rapport de S.
$\arg(a) = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ est l'angle de S.
$z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ est l'affixe du centre Ω de S $(a \neq 1)$.

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z = (2+i)(1-i) - (3-2i)^2 + (5-i)(5+i)$; b) $z = 3i(2+8i) - 7(5-2i) + (1+2i)^2$;

c) $z = \frac{1}{3+2i}$; d) $z = \frac{1}{2-i\sqrt{3}}$; e) $z = \frac{5+7i}{1+i}$; f) $z = \frac{4-3i}{i}$

Exercice 2

Quel est le nombre complexe conjugué de chacun des nombres complexes suivants

a) $z = 2+4i$; *b)* $z = 1-5i$; *c)* $2i(4-i)$; *d)* $z = (3+i)(-5i+3)$; *e)*$z = \frac{1}{2+i}$; *f)* $z = \frac{3-i}{6i-2}$;*g)* $z = 5$; $z = 6i$.

Exercice 3

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants

a) $z = 2+4i$; *b)* $z = 1-5i$; *c)* $-7+i$; *d)* $z = -1-3i$; *e)*$z = -6i$;

f) $z = -8$; *g)* $z = (\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{5})(\sqrt{2}+i\sqrt{5})$; *h)* $z = \frac{1+i}{1-i}$; *i)* $z = \frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}$

Exercice 4

Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants:

$a = 1+i$; $b = 1-i\sqrt{3}$; $c = \sqrt{3}+i$; $d = i$;

Exercice 5

On donne $z = (1+i)(1-i\sqrt{3})$. Calculer$z$.

Écris sous forme trigonométrique chacun des nombre complexes suivants :

(1) $z_1 = 1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})$; (2) $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}$

Exercice 6

On donne $z = \sqrt{3}+i$

a) Écris z sous forme trigonométrique et exponentielle

b) En déduire z^{2013}

Exercice 7

1) Déterminer le module et un argument de définie par :$z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1-i$; $z = \frac{z_1}{z_2}$

2) En déduire les valeurs exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 8

On donne les deux nombres complexes définis par : $z_1 = -1-i$; $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

1) Écris $\frac{z_1}{z_2}$sous forme algébrique

2) En déduire un module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$

3) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

Au point m d'affixe $z = x+iy$, avec $z \neq \frac{1}{2}$, on associe le point M d'affixe $Z = \frac{z-2}{2z-1}$

1) Exprimer les coordonnées X et Y de M à l'aide des coordonnées x et y de m.

2) Déterminer l'ensemble des points m du plan tels que :

a) Z soit un réel.

b) Z soit un imaginaire pur

c) $|Z| = 1$

Exercice 10

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $Z = 7+24i$; b) $z = 6-6i\sqrt{3}$; c)Z=$1+i\sqrt{3}$; d) $z = -4i$

Exercice 11
On donne les nombres complexes z et u définis par : $z = -8\sqrt{3} + 8i$ et $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.
1) Écrire le nombre complexe z sous forme trigonométrique.
Déterminer les racines carrées de z sous la forme trigonométrique.
2) Calculer u^2.
Utiliser ce résultat pour exprimer les racines carrées de z sous leur forme algébrique.
En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$

Exercice 12
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \bar{z} + 2 = 0$.

Exercice 13
Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$ un nombre complexe.
1) Mettre z sous forme trigonométrique
2) Déduire les racines cubiques de z

Exercice14
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 = 8\sqrt{2}(-1 + i)$.

Exercice 15
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
(1) $z^2 + 4 = 0$; $(2) z^2 - 5z + 9 = 0$; (3) $z^2 - z - 2 = 0$; (4): $z^2 - 6z + 9 = 0$;(5) $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$;

Exercice 16
Soit l'équation (E) : $z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$
a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.
b) Montrer que (E) peut se mettre sous la forme : $(z - 5i)(z^2 + az + b); a, c \in \mathbb{C}$.
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Exercice 17
Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$
1) Démontrer qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation : $P(z) = 0$
2) Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

Exercice 18
A, B, C, D étant des points d'affixes respectives : $\sqrt{3} + 2i$; $\sqrt{3} + i$; $-2i$; $1 - i$.Calculer $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)$

Exercice 19
A, B, C étant des points d'affixes respectives $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$. Démontrer que A, B et C sont alignés.

Exercice 20
A,B,C étant des points d'affixes respectives $-1 - i$; $4 + i$; $-2 + \frac{3}{2}i$. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 21
Dans le plan complexe à tout point M d'affixe Z, on associe le point M'd'affixeZ' définie par :
1) $Z' = Z + 1 + 2i$
2) $Z' = -3iZ + 2 - i$
Déterminer les éléments caractéristiques de la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixeZ'.

Exercice 22
Dans le plan complexe soit les points M et M' d'affixes Zet Z' respectivement tels que :$Z + Z' = 2$
1) Démontrer que le point M' est l'image du point M par la symétrie S de centre le point I d'affixe 1.
2) Soit r la rotation de centre O d'affixe 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ Démontrer que $r \circ s$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

Exercice 23
Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe 2 et les transformations suivantes :

- h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.
- r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Quelle est la nature des transformations $r \circ h$ et $h \circ r$? Pour chacune précisons les éléments géométriques.
2) Donner l'écriture analytique de $r \circ h$.

Exercice 24

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
Soit α et β deux nombres réels ; $g_{\alpha,\beta)}$ l'application de $\wp$ dans $\wp$ qui à tout M d'affixe $Z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $Z' = x' + iy'$ tel que $\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y - \beta \\ y' = \beta x + \alpha y + \alpha + 1 \end{cases}$

1- Ecrire Z' sous la forme $Z' = aZ + b$ où a et b sont deux nombres complexes à déterminer en fonction de α et β.
2- On prend $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Précise la nature et les éléments caractéristiques de $g_{(0,1)}$.
3- Déterminer α et β pour que $g_{\alpha,\beta)}$ soit une translation dont on déterminera son vecteur $\vec{u}$.
4- Déterminer α et β pour que $g_{\alpha,\beta)}$ soit une similitude directe de rapport$\sqrt{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer alors l'affixe de son centre

Exercice 25

a est un nombre réel quelconque. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^3 - (ia + 2\sqrt{3})z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)z - 4ai = 0$$

1) Déterminer le nombre réel a pour que $-2i$ soit solution de l'équation (E).
2) Déterminer le polynôme complet Q de degré 2 tel que :
$\forall z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (2i - 2\sqrt{3})z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = Q(z)(z - \sqrt{3} - i)$.
3) Résoudre l'équation (E). pour $a = -2$
4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J),, on donne les points d'affixes respectives :$\sqrt{3} + i$; $-2i$ et $\sqrt{3} - i$.
a) Représenter dans le repère (O, I, J), les points N, M et Q (on prendra 2 cm pour l'unité)
b) T représente le symétrique de M par rapport à (OJ)
Démontrer que le triangle TMQ est rectangle en M.
Démontrer que les points M, Q, N et T sont cocycliques.

Exercice 26

Le plan complexe est muni du repère orthonormé$(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
On considère l'équation : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (6 - 5i)z^2 + (1 - 20i)z - 14 - 5i = 0$
1-a) Vérifier que i est solution l'équation (E)
b) Résoudre dans C l'équation (E) : $z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i = 0$
c) résoudre à partir des questions qui précèdent, l'équation (E)
2) On considère les points A, B et D d'affixes respectives $u = i, v = -2 + 3i$ et $t = -4 + i$
a) Place les points A, B et D dans le repère..
b) Écrire le nombre complexe $Z = \frac{u-v}{t-v}$sous forme trigonométrique.
c) En déduire que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.
3) Soit S la similitude directe de centre A qui transforme D en B et B' est l'image de B par S.
a) Justifier que le triangle ABB' est rectangle isocèle en B'.
b) Déterminer l'écriture complexe de S.
c) Calculer l'affixe de B'.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$(On pourra poser $Z = z + \frac{1}{z}$)
2) Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$est solution de l'équation (E)
3) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$

Exercice 2

On considère les points $A(i)$; $B(3 - i)$ et $C(1 + 2i)$
1) Place ces points dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité 1 cm)

2) Déterminer et construire

a) L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-i|=3$

b) L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-i|=|z-3i|$

c) L'ensemble des points $M(z)$tels que $|z-3+i|=|z-2-2i|$

Exercice 3

Soit $A(3+i), B(2i), C(2-2i)$

1) placer les points A, B et C et démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer le point D.

3) Déterminer l'affixe du point E, symétrique de A par rapport au milieu de $[AB]$.

Exercice 4

Soit $(oi, \vec{i}j, \vec{j})$un repère orthonormé du plan

Soit M un point du plan d'affixe Z et soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe un point M' d'affixe Z' définie par :$Z' = (1-i)Z+2-i$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Quelle est l'image par f du cercle de centre O et de rayon2 ?

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z du plan tel que l'on ait : $|(1-i)Z+2-i|=2$

Exercice 5

Dans le plan complexe muni du repère (O, I, J), les points ont pour affixes respectivement $\sqrt{3}+i\ et -\sqrt{3}+i$. On désigne par S la similitude directe d'écriture complexe :$z' = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}z-\sqrt{3}+i$

1) Déterminer les images par S des points O et A.

2) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

3) Soit $(\mathcal{C})$le cercle de centre O et de rayon 2 et $(\mathcal{C}')$son image par S.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}')$.

b) construire $(\mathcal{C}')$.

Exercice 6

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2-2z+2=0$

2) Soient K, L, M les points d'affixes respectives : $z_k = 1+i; z_L = 1-i;\ z_M = -i\sqrt{3}$

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal directe.$(o, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Unité graphique 2 cm. On completera la figure dans les questions suivantes

3-a) on appelle N le symétrique du point M par rapport au point L.

Vérifier que l'affixe z_N du point N est : $2+i(\sqrt{3}-2)$.

b) La rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$transforme le point M en le point A et le point N en le point C.

Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C.

Déterminer l'affixe de l'image du point L par cette rotation r.

c) la translation t de vecteur $\vec{u}$d'affixe $2i$ transforme le point M en le point D et point le N en le point B.

Déterminer les affixes z_D et z_B respectives des points D et B

Détermine l'affixe de l'image du point L par cette translation t.

4-a) Montrer que : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$

Que peu on déduire pour le triangle ABC?

b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1

$\boldsymbol{a)z = (2+i)(1-i)-(3-2i)^2+(5-i)(5+i)=2-2i+i-i^2-(9-12i+4i^2)+25-i^2}$

$= 2 - i + 1 - 9 + 12i + 4 + 25 + 1 = 24 + 5i$ Alors $z = 24 + 11i$

$b) z = 3i(2 + 8i) - 7(5 - 2i) + (1 + 2i)^2 = 6i + 24i^2 - 35 + 14i + 1 + 4i + 4i^2$

$= 6i - 24 - 35 + 14i + 1 + 4i - 4 = -62 + 24i$ Alors $z = -62 + 24i$

$c) z = \frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{3^2-(2i)^2} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ Alors $z = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

$d) z = \frac{1}{2-i\sqrt{3}} = \frac{2+i\sqrt{3}}{(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})} = \frac{2+i\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3}i)^2} = \frac{2-i\sqrt{3}}{4+3} = \frac{2}{7} + \frac{\sqrt{3}}{7}i$ Alors $z = \frac{2}{7} + \frac{\sqrt{3}}{7}i$

$e) z = \frac{5+7i}{1+i} = \frac{(5+7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{5-5i+7i-7i^2}{1^2-i^2} = \frac{5+2i+7}{1+1} = \frac{12+2i}{2} = 6 + i$ Alors: $z = 6 + i$

$f) z = \frac{4-3i}{i} = \frac{-i(4-3i)}{-i\times i} = \frac{-4i+3i^2}{-i^2} = \frac{-4i-3}{1} = -3 - 4i$ Alors: $z = -3 - 4i$

Exercice 2

$$a) \bar{z} = \overline{2 + 4i} = 2 - 4i$$

$$b) \bar{z} = \overline{1 - 5i} = 1 + 5i$$

$$c) \bar{z} = \overline{2i(4 - i)} = \overline{2i} \times \overline{(4 - i)} = -2i(4 + i) = -8i + 2 = 2 - 8i$$

$$d) \bar{z} = \overline{(3 + i)(-5i + 3)} = \overline{(3 + i)} \times \overline{(-5i + 3)} = (3 - i)(5i + 3) = 15i + 9 + 5 - 3i = 14 + 12i$$

$$e) \bar{z} = \overline{\left(\frac{1}{2 + i}\right)} = \frac{\bar{1}}{\overline{2 + i}} = \frac{1}{2 - i} = \frac{2 + i}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 + i}{2^2 - i^2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$f) \bar{z} = \overline{\left(\frac{3 - i}{6i - 2}\right)} = \frac{\overline{3 - i}}{\overline{6i - 2}} = \frac{3 + i}{-6i - 2} = \frac{(3 + i)(-2 + 6i)}{(-2 - 6i)(-2 + 6i)} = \frac{-6 + 18i - 2i - 6}{4 + 36} = -\frac{-12}{40} + \frac{16}{40}i = -\frac{3}{10} + \frac{2}{5}i$$

$$g) \bar{z} = 5$$

$$h) \bar{z} = \overline{6i} = -6i$$

Exercice 3

$$a) |z| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$b) |z| = |1 - 5i| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$c) |z| = |-7 + i| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} + \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$d) |z| = |-1 - 3i| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$e) |z| = |6i| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$f) |z| = |-8| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8$$

$g) |z| = |(\sqrt{2} + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i\sqrt{5})(\sqrt{2} + i\sqrt{5})| |\sqrt{2} + i\sqrt{3}| |\sqrt{3} + i\sqrt{5}| |\sqrt{2} + i\sqrt{5}|$

$= \left(\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2}\right)\left(\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2}\right)\left(\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2}\right) = \sqrt{5} \times \sqrt{8} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{70}$

$$h) |z| = \left|\frac{1 + i}{1 - i}\right| = \frac{|1 + i|}{|1 - i|} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$i) |z| = \left|\frac{(2 - 3i)(3 + 4i)}{(6 + 4i)(15 - 8i)}\right| = \frac{|2 - 3i||3 + 4i|}{|6 + 4i||15 - 8i|} = \frac{\left(\sqrt{2^2 + (-3)^2}\right)\left(\sqrt{3^2 + 4^2}\right)}{\left(\sqrt{6^2 + 4^2}\right)\left(\sqrt{15^2 + (-8)^2}\right)} = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{25}}{\sqrt{52} \times \sqrt{289}} = \frac{5\sqrt{13}}{17\sqrt{52}} = \frac{5\sqrt{13}}{34\sqrt{13}}$$

$$= \frac{5}{34}$$

Exercice 4

$a = 1 + i$; $|a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; soit $\theta = Arg(a)$ alors on a: $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \theta = \frac{\pi}{4}$

Ainsi: $a = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$

$b = 1 - i\sqrt{3}$; $|b| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$; soit $\theta = Arg(b)$ alors on a: $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{2} \\ sin\theta == \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \theta = -\frac{\pi}{3}$

Ainsi: $b = 2\left[cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$c = \sqrt{3} + i$; $|c| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$; soit $\theta = Arg(c)$ alors on a: $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \theta = \frac{\pi}{6}$

Ainsi: $c = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$

$d = i$; $|d| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$; soit $\theta = Arg(d)$ alors on a: $\begin{cases} cos\theta = \frac{0}{1} = 0 \\ sin\theta = \frac{1}{1} = 1 \end{cases} \theta = \frac{\pi}{2}$

Ainsi: $d = \left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 5

$z = (1+i)(1-i\sqrt{3}) = 1 - i\sqrt{3} + i + \sqrt{3}$

D'où : $z = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$

$(1) z_1 = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$ Alors $z_1 = z$

$|z_1| = |z| = |1+i||1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+1^2} \times \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$;

$Arg(z_1) = Arg(1+i) + Arg(1-i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$;

Alors : $z_1 = 2\sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$(2) z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}$; alors $|z_2| = \left|\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right| = \frac{|1-i\sqrt{3}|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$Arg(z_2) = Arg(1-i\sqrt{3}) - Arg(1-i) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12}$

D'où : $z_2 = \sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

Exercice 6

a) $|Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$; $Arg(Z) = \begin{cases} cox\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$; $\theta = \frac{\pi}{6}$

$Z = 2(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $Z^{2013} = \left[2(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6})\right]^{2013} = 2^{2013}\left(\cos\left(\frac{671\pi}{2}\right) + isin(\frac{671\pi}{2})\right)$

$Z^{2013} = 2^{2013}\left[cos\left(336\pi - \frac{\pi}{2}\right) + isin\left(336\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2^{2013}\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -2^{2013}i$

Exercice 7

1) $|Z_1| = \left|\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{|\sqrt{6}+i\sqrt{2}|}{|2|} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; $Arg(Z_1) = \begin{cases} cox\theta = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases}$; $\theta = \frac{\pi}{6}$

$|Z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $Arg(Z_2) = \begin{cases} cox\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; $\theta = -\frac{\pi}{4}$

$|Z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$; $Arg(Z) = Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(Z_1) - Arg(Z_2) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{12}$

2) $Remarquons\ que\ les\ angles\ \frac{5\pi}{12}\ et\ \frac{7\pi}{12}\ sont\ supplementaires\ alors$: $\begin{cases} cos\frac{7\pi}{12} = -cos\frac{5\pi}{12} \\ sin\frac{7\pi}{12} = sin\frac{5\pi}{12} \end{cases}$

Or $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

D'où : $\begin{cases} cos\frac{7\pi}{12} = -cos\frac{5\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ sin\frac{7\pi}{12} = sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Exercice 8

1) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-i}{\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{2(-1-i)}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2(-1-i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

D'où : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$; $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(Z_1) - Arg(Z_2)$

$Arg(Z_1) = \begin{cases} cox\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4}$ et $Arg(Z_1) = \begin{cases} cox\theta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} ; \theta = \frac{\pi}{3}$

Donc : $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(Z_1) - Arg(Z_2) = -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{13\pi}{12} = -2\pi + \frac{11\pi}{12}$

D'où : $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{11\pi}{12}$

Exercice 9

1) Posons $z = x + iy; on\ a: Z = \frac{x+iy-2}{2(x+iy)-1} = \frac{x-2+iy}{2x-1+2iy} = \frac{(x-2+iy)(2x-1-2iy)}{(2x-1+2iy)(2x-1-2iy)} = \frac{2x^2-x-2ixy-4x+2+4iy+2ixy-iy+2y^2}{(2x-1)^2+4y^2}$

$Z = \frac{(2x^2+2y^2-5x+2)+3iy}{(2x-1)^2+4y^2} = \frac{2x^2+2y^2-5x+2}{(2x-1)^2+4y^2} + i\frac{3y}{(2x-1)^2+4y^2} ; \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{2x^2+2y^2-5x+2}{(2x-1)^2+4y^2} \\ Y = \frac{3y}{(2x-1)^2+4y^2} \end{cases}$

$2.a) Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0$. Alors $\frac{3y}{(2x-1)^2+4y^2} = 0$; donc $y = 0$

L'ensemble des points M du plan tels que Z soit un réel est la droite (Δ) d'équation $y = 0$

$b) Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z) = 0$ Alors $\frac{2x^2+2y^2-5x+2}{(2x-1)^2+4y^2} = 0$; Donc : $2x^2 + 2y^2 - 5x + 2 = 0$

$$2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + y^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{16}$$

$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$;

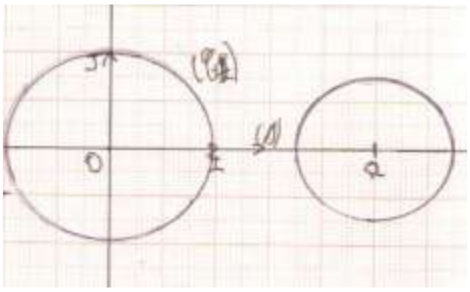
L'ensemble des points M du plan tels que Z soit un imaginaire pur est le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\0\end{pmatrix}$ et de rayon $\frac{3}{4}$

$$c)|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-2}{2z-1}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-2| = |2z-1|$$

$$|x - 2 + iy| = |2x - 1 + 2iy| \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y)^2} = \sqrt{(2x-1)^2 + (2y)^2}$$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$;

L'ensemble des points M du plan tels que $|Z| = 1$ est le cercle $(\mathcal{C}_1)$de centre O et de rayon 1 $(cercle\ trigonométrique)$



Exercice 10

Déterminer les racines carrées de Z revient à déterminer un nombre complexe z tel que $z^2 = Z$

En posant $z = x + iy\ on\ a$: $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = |(x+iy)^2| = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$

a) $Z = 7 + 24i$; $|Z| = \sqrt{(7)^2 + (24)^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$

$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = 24 \end{cases}$; en ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient : $2x^2 = 32$ alors

$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4\ ou\ \ x = -4$

Pour$x = 4$; $y = 3$ et Pour $x = -4$; $y = -3$

Alors les deuxracinescarrées de $Z = 7 + 24i\ sont: 4 + 3i \quad et \quad -4 - 3i$

b) $Z = 6 - 6i\sqrt{3}$; $|Z| = \sqrt{(6)^2 + \left(-6\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36 + 108} = \sqrt{144} = 12$

$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ x^2 - y^2 = 6 \\ 2xy = -6\sqrt{3} \end{cases}$; en ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient : $2x^2 = 18$ alors

$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3\ ou\ \ x = -3$

Pour$x = 3$; $y = -\sqrt{3}$ et Pour $x = -3$; $y = \sqrt{3}$

Alors les deuxracinescarrées de $Z = 6 - 6i\sqrt{3}\ sont: 3 - \sqrt{3}i \quad et \quad -3 + \sqrt{3}i$

c) $Z = 1 + i\sqrt{3}$; $|Z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = \sqrt{3} \end{cases}$; en ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient : $2x^2 = 3$ alors $x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

Pour$x = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et Pour $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Alors les deuxracinescarrées de $Z = 1 + i\sqrt{3}$ $sont$: $\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $Z = 7 + 24i$; $|Z| = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -4 \end{cases}$; en ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient : $2x^2 = 4$ alors $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Pour$x = \sqrt{2}$; $y = -\sqrt{2}$ et Pour $x = -\sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}$

Alors les deuxracinescarrées de $Z = -4i$ $sont$: $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

Exercice 11

1) $|Z| = \sqrt{(-8\sqrt{3})^2 + (8)^2} = \sqrt{192 + 64} = \sqrt{256} = 16$

$Arg(Z) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{-8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \end{cases}$; $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$Z = 16\left[cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right] = 16e^{i\frac{5\pi}{6}}$;

Déterminer les racines carrées de Z revient à déterminer un nombre complexe z tel que $z^2 = Z$

En posant $z = re^{i\theta}$ $on\ a$: $z^2 = r^2e^{2i\theta}$

$z^2 = Z\ alors\ r^2e^{2i\theta} = 16e^{i\frac{5\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 16 \\ 2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}; k \in \{0;1\}$; $\begin{cases} r = 4 \\ \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$ $avec$ $k \in \{0;1\}$

Pour $k = 0$: $\begin{cases} r = 4 \\ \theta = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$alors $z_0 = 4\left(cos\frac{5\pi}{12} + isin\frac{5\pi}{12}\right) = 4e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Pour $k = 1$: $\begin{cases} r = 4 \\ \theta = \frac{17\pi}{12} = 2\pi - \frac{7\pi}{12} \end{cases}$alors $z_1 = 4\left(cos(-\frac{7\pi}{12}) + isin(-\frac{7\pi}{12})\right) = 4e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

2) $u^2 = [(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})]^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 2i(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = -4\sqrt{12} + 8i$

$$u^2 = -8\sqrt{3} + 8i$$

$on\ remarque\ u^2 = Z$; Donc les racines carrées de Z sont $u\ et - u$

$z_0 = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ et $z_0 = -(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

Valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$

$\frac{5\pi}{12} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ Alors : $\cos\frac{5\pi}{12} > 0$ et $\sin\frac{5\pi}{12} > 0$

D'où : $\begin{cases} cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

EXERCICE 12

Posons : $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ $et\ y \in \mathbb{R}$ alors on a : $z^2 - \bar{z} + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + iy)^2 - (x - iy) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 - x + iy + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - x + 2) + iy(2x + 1) = 0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x + 2 = 0 \\ y(2x + 1) = 0 \end{cases}$; $y(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ $ou\ x = -\frac{1}{2}$

- Si $y = 0$, $alors\ dans\ la\ première$ équation $on\ a$: $x^2 - x + 2 = 0$

$\Delta = -7 < 0$ donc l'équation (1) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

- Si $x = -\frac{1}{2}$, $alors\ dans\ la\ première$ équation $on\ a$: $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 + \frac{1}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{11}{4} - y^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{11}}{2}-y\right)\left(\frac{\sqrt{11}}{2}+y\right)=0 \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{11}}{2}$ ou $y=-\frac{\sqrt{11}}{2}$

D'où : $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2};-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2}\right\}$

Exercice 13

1)$Z=1+i\sqrt{3}$; $|Z|=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$, on a : $Arg(Z)\begin{cases}cos\theta=\frac{1}{2}\\ sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$; $\theta=\frac{\pi}{3}$

$$Z=2\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)$$

2) Déterminer les racines cubiques de Z revient à déterminer un nombre complexe z tel que $z^3=Z$

En posant $z=re^{i\theta}$ $on\ a$: $z^3=r^3e^{3i\theta}$

$z^3=Z\ alors\ r^3e^{3i\theta}=2e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases}r^3=2\\ 3\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}; k\in\{0;1;2\}$; $\begin{cases}r=\sqrt[3]{2}\\ \theta=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\end{cases}$ $avec\ \ k\in\{0;1;2\}$

Pour $k=0$: $\begin{cases}r=\sqrt[3]{2}\\ \theta=\frac{\pi}{9}\end{cases}$ alors $z_0=\sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\pi}{9}+isin\frac{\pi}{9}\right)=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{9}}$

Pour $k=1$: $\begin{cases}r=\sqrt[3]{2}\\ \theta=\frac{7\pi}{9}\end{cases}$ alors $z_1=\sqrt[3]{2}\left(cos\frac{7\pi}{9}+isin\frac{7\pi}{9}\right)=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{7\pi}{9}}$

Pour $k=2$: $\begin{cases}r=\sqrt[3]{2}\\ \theta=\frac{13\pi}{9}=2\pi-\frac{5\pi}{9}\end{cases}$ alors $z_2=\sqrt[3]{2}\left(cos(-\frac{5\pi}{9})+isin(-\frac{5\pi}{9})\right)=\sqrt[3]{2}e^{-i\frac{5\pi}{9}}$

Alors les racines cubiques de $Z=1+i\sqrt{3}$ sont : $z_0=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{9}}$, $z_1=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{7\pi}{9}}$, $z_2=\sqrt[3]{2}e^{-i\frac{5\pi}{9}}$

Exercice 14

Solution

Résoudre l'équation (E) : $z^4=8\sqrt{2}(-1+i)$, revient à déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $Z=8\sqrt{2}(-1+i)$

Et Déterminer les racines quatrièmes de Z revient à déterminer un nombre complexe z tel que $z^4=Z$

En posant $z=re^{i\theta}$ $on\ a$: $z^4=r^4e^{4i\theta}$

$Z=-8\sqrt{2}+8i\sqrt{2}$; $|Z|=\sqrt{(-8\sqrt{2})^2+(8\sqrt{2})^2}=\sqrt{128+128}=\sqrt{256}=16$, on a :

$Arg(Z)\begin{cases}cos\theta=-\frac{8\sqrt{2}}{16}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ sin\theta=\frac{8\sqrt{2}}{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$; $\theta=\frac{3\pi}{4}$ Alors $Z=16\left(cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4}\right)=16e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z^4=Z\ alors\ r^4e^{4i\theta}=16e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases}r^4=16\\ 4\theta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases}; k\in\{0;1;2;3\}$; $\begin{cases}r=2\\ \theta=\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{2}k\pi\end{cases}$ $avec\ \ k\in\{0;1;2;3\}$

Les solutions de l'équation (E) sont donc les nombres complexes z_k de la forme suivante :

$$z_k=2\left[cos\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{2}k\pi\right)+isin\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{2}k\pi\right)\right] k\in\{0;1;2;3\}$$

Pour $k=0$: $\begin{cases}r=2\\ \theta=\frac{3\pi}{16}\end{cases}$ alors $z_0=2\left(cos\frac{3\pi}{16}+isin\frac{3\pi}{16}\right)=2e^{i\frac{3\pi}{16}}$

Pour $k=1$: $\begin{cases}r=2\\ \theta=\frac{11\pi}{16}\end{cases}$ alors $z_1=2\left(cos\frac{11\pi}{16}+isin\frac{11\pi}{16}\right)=2e^{i\frac{11\pi}{16}}$

Pour $k=2$: $\begin{cases}r=2\\ \theta=\frac{19\pi}{16}=2\pi-\frac{13\pi}{16}\end{cases}$ alors $z_2=2\left(cos(-\frac{13\pi}{16})+isin(-\frac{13\pi}{16})\right)=2e^{-i\frac{13\pi}{16}}$

Pour $k=3$: $\begin{cases}r=2\\ \theta=\frac{27\pi}{16}=2\pi-\frac{5\pi}{16}\end{cases}$ alors $z_3=2\left(cos(-\frac{5\pi}{16})+isin(-\frac{5\pi}{16})\right)=2e^{-i\frac{5\pi}{16}}$

Alors les racines quatrièmes de $Z=8\sqrt{2}(-1+i)$ sont : $z_0=2e^{i\frac{3\pi}{16}}$, $z_1=2e^{i\frac{11\pi}{16}}$,$z_2=2e^{-i\frac{13\pi}{16}}$, $z_3=2e^{-i\frac{5\pi}{16}}$

L'équation (E) admet exactement quatre solutions z_0, z_1, z_1, z_3 qui correspondent respectivement aux valeurs $0;1;2;3\ de\ k$

Exercice 15

1) $z^2+4=0$ alors $z^2-(2i)^2=0 \Leftrightarrow (Z-2i)(Z+2i)=0$ Donc $Z=2i\ \ ou\ \ Z=-2i$

$$S_{\mathbb{C}}=\{-2i;2i\}$$

2) $z^2-5z+9=0$; son discriminant est : $\Delta=(-5)^2-4\times1\times9=-11=(\sqrt{11}i)^2$

$Z_1 = \frac{5-\sqrt{11}i}{2}$ et $Z_2 = \frac{5+\sqrt{11}i}{2}$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{5-\sqrt{11}i}{2}; \frac{5+\sqrt{11}i}{2}\right\}$$

3) $z^2 - z - 2 = 0$; son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$

$Z_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $Z_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-1; 2\}$$

4) $z^2 - 6z + 9 = 0$; son discriminant est : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$

$$Z_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{3\}$$

5) $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$; son discriminant est : $\Delta = (i)^2 - 4 \times 1(1+3i) = -5 - 12i$

Déterminons les racines carrées de $\Delta = -5 - 12i$

En posant $z = x + iy$ $on\ a$: $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = |(x+iy)^2| = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$

$$\Delta = -5 - 12i;\ |\Delta| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$z^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$; En ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient : $2x^2 = 8$ alors

$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2\ ou\ \ x = -2$

Pour$x = 2$; $y = -3$ et Pour $x = -2$; $y = 3$

Alors les deuxracinescarrées de $\Delta\ sont$: $\sigma = 2 - 3i\quad et - \sigma = -2 + 3i$

$Z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a} = \frac{-i-2+3i}{2} = -1 + i$ et $Z_1 = \frac{-b+\sigma}{2a} = \frac{-i+2-3i}{2} = 1 - 2i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-1 + i; 1 - 2i\}$$

<u>Exercice 16</u>

a) Soit $Z_0 = bi$ la solution imaginaire

Alors $(bi)^3 + (4-5i)(bi)^2 + (8-20i)bi - 40i = 0 \Leftrightarrow -ib^3 - 4b^2 + 5ib^2 + 8bi + 20b - 40i = 0$

$\Rightarrow -4b^2 + 20b + i(-b^3 + 5b^2 + 8b - 40) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4b^2 + 20b = 0 \\ -b^3 + 5b^2 + 8b - 40 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -4b(b-5) = 0 \\ -b^3 + 5b^2 + 8b - 40 = 0 \end{cases}$

Soit $b = 0\ ou\ \ b = 5$ seul $b = 5$ vérifie la deuxième équation,

D'où l'équation (E) admet une solution imaginaire pure $Z_0 = 5i$

b) $5i$ est une solution de l'équation (E), alors l'équation (E) peut s'écrire : $(z - 5i)(z^2 + az + b); a, c \in \mathbb{C}$

On a, $(z - 5i)(z^2 + az + b) = z^3 + (a - 5i)z^2 + (b - 5ai)z - 5ib$

Par identification : $\begin{cases} a - 5i = 4 - 5i \\ b - 5ai = 8 - 20i \\ -5ib = -40i \end{cases}$ alors : $a = 4\ et\ b = 8$

D'où l'équation (E) : $(z - 5i)(z^2 + 4z + 8)$

c) Soit l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$, son discriminant est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16 = (4i)^2$

Donc cette équation a deux solutions : $Z_1 = \frac{-4-4i}{2} = -2 - 2i\quad et\ \ Z_2 = \frac{-4+4i}{2} = -2 + 2i$

On en déduit que les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont : $5i;\ -2 - 2i\ \ et - 2 + 2i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{5i;\ -2 - 2i\ ; -2 + 2i\}$$

<u>Exercice 17</u>

1) Soit $Z_0 = \alpha$ la solution réelle

Alors $(\alpha)^3 - (11 + 2i)(\alpha)^2 + 2(17 + 7i)\alpha - 42 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - 11\alpha^2 - 2i\alpha^2 + 34\alpha + 14i\alpha - 42 = 0$

$\Rightarrow \alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42 + i(-2\alpha^2 + 14\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42 = 0 \\ -2\alpha^2 + 14\alpha = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42 = 0 \\ -2\alpha(\alpha - 7) = 0 \end{cases}$

Soit $\alpha = 0\ ou\ \ \alpha = 7$ seul $\alpha = 7$ vérifie la première équation,

D'où l'équation (E) admet une solution $Z_0 = 7$

2) 7 est une solution de l'équation(E), alors l'équation (E) peut s'écrire : $(z - 7)(z^2 + az + b); a, c \in \mathbb{C}$

On a, $(z - 7)(z^2 + az + b) = z^3 + (a - 7)z^2 + (b - 7a)z - 7b$

Par identification : $\begin{cases} a - 7 = -11 - 2i \\ b - 7a = 34 + 14i \\ -7b = -42 \end{cases}$ alors : $a = -4 - 2i\ et\ b = 6$

D'où le polynôme $Q(Z) = Z^2 - 2(2 + i) + 6$

3) Soit l'équation : $z^2 - 2(2 + i)z + 6 = 0$, son discriminant est $\Delta = [-2(2 + i)]^2 - 4 \times 1 \times 6 = -12 + 16i$

Déterminons les racines carrées de $\Delta = -12 + 16i$

En posant $z = x + iy$ on a: $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = |(x+iy)^2| = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$

$$\Delta = -12 + 16i;\ |\Delta| = \sqrt{(-12)^2 + (16)^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$

$z^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = -12 \\ 2xy = 16 \end{cases}$; En ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient : $2x^2 = 8$ alors

$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Pour $x = 2$; $y = 4$ et Pour $x = -2$; $y = -4$

Alors les deuxracinescarrées de Δ sont: $\sigma = 2 + 4i$ et $-\sigma = -2 - 4i$

Donc cette équation a deux solutions : $Z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a} = \frac{4+2i-2-4i}{2} = 1 - i$ et $Z_2 = \frac{-b+\sigma}{2a} = \frac{4+2i+2+4i}{2} = 3 + 3i$

On en déduit que les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont : $7;\ 1 - i$ et $3 + 3i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{7; 1 - i; 3 + 3i\}$$

Exercice 18

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{CD}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right) + 2k\pi = arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) + 2k\pi$;

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = arg\left(\frac{1-i+2i}{\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-2i}\right) + 2k\pi = arg\left(\frac{1+i}{-i}\right) + 2k\pi = arg(-1+i) + 2k\pi$

Donc : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

Exercice 19

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R}^*$

$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-10-13i+1+i}{2+3i+1+i} = \frac{-9-12i}{3+4i} = \frac{-3(3+4i)}{3+4i} = -3$;

$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = -3$ Alors les points A, B et C sont alignés

Exercice 20

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in i\mathbb{R}^*$

$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-2+\frac{3}{2}i+1+i}{4+i+1+i} = \frac{-2+5i}{2(5+2i)} = \frac{(-2+5i)(5-2i)}{2(5+2i)(5-2i)} = \frac{29i}{2\times 29} = \frac{1}{2}i$;

$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{1}{2}i$ Alors le triangle ABC est rectangle en A

Exercice 21

1) $Z' = Z + 1 + 2i$, la transformation du plan associé à cette écriture complexe est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + 2i$
2) $Z' = -3iZ + 2 - i$ en posant : $a = -3i, |a| = 3$, $Arg(a) = -\frac{\pi}{2}$

Alors la transformation du plan associé à cette écriture complexe est une similitude plane directe de rapport 3, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $Z_\Omega = \frac{2-i}{1+3i} = \frac{-1-7i}{10}$

Exercice 22

1) On a $Z + Z' = 4 \Rightarrow \frac{Z+Z'}{2} = 1$ alors le point I d'affixe 1 est le milieu de $[MM']$, donc M' est l'image de M par S
2) D'après la première question S_I est la symétrie centrale de centre I, S_I est aussi une rotation d'angle π(*toute symétrie centrale est une rotation d'angle* π). Alors ros est la composée d'une rotation d'angle π de centre I d'affixe 1 et d'une rotation de centre O d'affixe 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. D'où l'angle de ros est $\theta = \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

   L'écriture complexe de s est : $Z' = -Z + 4$

   L'écriture complexe de s est : $Z' = iZ$

   Donc l'écriture complexe de ros est : $Z' = -iZ + 4i$

   Soit Ω le centre de ros. Alors on a : $Z_\Omega = \frac{4i}{1+i} = 2(1+i)$

   Ainsi ros est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe $2(1+i)$

Exercice 23

1) r et h étant respectivement une rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$ et une homothétie de centre $A(2)$ et de rapport 2, alors $r \circ h$ et $h \circ r$ sont des similitudes directes de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$

L'écriture complexe de h est : $Z' = kZ + b$ avec $k = 2$ et $b = (1-k)Z_A = -2$

Donc : $Z' = 2Z - 2$

L'écriture complexe de r est : $Z' = e^{i\theta}Z \quad avec \ \theta = \frac{\pi}{3}$Donc : $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}Z$

Donc $r \circ h$ a pour écriture complexe : $Z' = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}(2Z-2) \Rightarrow Z' = (1+\sqrt{3}i)Z - (1+\sqrt{3}i)$

Soit Ω_1 le centre de $r \circ h$, donc $Z_{\Omega_1} = \frac{-(1+\sqrt{3}i)}{1-(1+\sqrt{3}i)} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} = \frac{3-\sqrt{3}i}{3}$

D'où $r \circ h$ est une similitude plane directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre Ω_1 d'affixe $\frac{3-\sqrt{3}i}{3}$

$h \circ r$ a pour écriture complexe : $Z' = 2\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)Z - 2 \Rightarrow Z' = (1+\sqrt{3}i)Z - 2$

Soit Ω_2 le centre de $h \circ r$, donc $Z_{\Omega_2} = \frac{-2}{1-(1+\sqrt{3}i)} = \frac{2}{\sqrt{3}i} = \frac{-2\sqrt{3}i}{3}$

D'où $h \circ r$ est une similitude plane directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre Ω_2 d'affixe $\frac{-2\sqrt{3}i}{3}$

2) D'après la première question $r \circ h$ a pour écriture complexe : $Z' = (1+\sqrt{3}i)Z - (1+\sqrt{3}i)$;

En posant $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$ $(x, y; x'; y' \in \mathbb{R})$ on a : $x' + iy' = (1+\sqrt{3}i)(x+iy) - (1+\sqrt{3}i)$

Donc : $x' + iy' = x - \sqrt{3}y - 1 + i(y + \sqrt{3}x - \sqrt{3})$

Donc l'écriture analytique de $r \circ h$ est : $\begin{cases} x' = x - \sqrt{3}y - 1 \\ y' = y + \sqrt{3}x - \sqrt{3} \end{cases}$

Exercice 24

Méthode ***: pour déterminer l'écriture complexe d'une application du plan dans lui-même d'expression analytique donnée, on peut procéder de la façon suivante :***

- *Ecrire $Z' = x' + iy'$ et remplacer x' et y' en fonction de x et y.*
- *Remplacer x par $\frac{Z+\overline{Z}}{2}$, y par $\frac{Z-\overline{Z}}{2i}$ et développer l'expression obtenue en fonction de Z et $\overline{Z}$*

1) On a : que $\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y - \beta \\ y' = \beta x + \alpha y + \alpha + 1 \end{cases} \Rightarrow x' + iy' = \alpha x - \beta y - \beta + i(\beta x + \alpha y + \alpha + 1)$

$$x' + iy' = x(\alpha + \beta i) + y(-\beta + i\alpha) - \beta + \alpha i + i$$

$$x' + iy' = \frac{Z+\overline{Z}}{2}(\alpha + \beta i) + \frac{Z-\overline{Z}}{2i}(-\beta + i\alpha) - \beta + \alpha i + i$$

$$x' + iy' = \left(\frac{\alpha+\beta i}{2} + \frac{-\beta+i\alpha}{2i}\right)Z + \left(\frac{-\beta+i\alpha}{2} - \frac{-\beta+i\alpha}{2i}\right)\overline{Z} - \beta + \alpha i + i$$

$$x' + iy' = (\alpha + \beta i)Z - \beta + \alpha i + i$$

$Z' = (\alpha + \beta i)Z - \beta + \alpha i + i$; $a = \alpha + \beta i$ et $b = -\beta + \alpha i + i$

2) Si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$; alors $Z' = iZ - 1 + i$: $g_{(0,1)}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe

$$Z_\Omega = \frac{-1+i}{1-i} = -1$$

3) $g_{(\alpha,\beta)}$ est une translation si et seulement si $\alpha + \beta i = 1$ alors : $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ le vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $2i$

4) $g_{(\alpha,\beta)}$ est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$ si et seulement si $\alpha + \beta i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$

Par identification $\alpha = 1$ et $\beta = 1$

L'écriture complexe de $g_{(1,1)}$ est : $Z' = (1+i)Z - 1 + 2i$; soit Ω son centre alors $Z_\Omega = \frac{-1+2i}{1-1-i} = 2 - i$

Exercic 25

1) $-2i$ est solution de (E) si et seulement si : $(-2i)^3 - (ia + 2\sqrt{3})(-2i)^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)(-2i) - 4ai = 0$

$8i + 4(ia + 2\sqrt{3}) + 4a\sqrt{3} - 8i - 4ai = 0 \Leftrightarrow 8\sqrt{3} + 4a\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = -2$

$-2i$ **est solution de** (E) **si et seulement si** $a = -2$

$$2) z^3 + (2i - 2\sqrt{3})z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = Q(z)(z - \sqrt{3} - i)$$

$Q(Z)$ est de la forme $Z^2 + \alpha Z + \beta$ avec α, β des nombres complexes. On a donc :

$$Q(z)(z - \sqrt{3} - i) = (z - \sqrt{3} - i)(Z^2 + \alpha Z + \beta) = z^3 + (\alpha - \sqrt{3} - i)z^2 + (\beta - \sqrt{3}\alpha - i\alpha)z - \sqrt{3}\beta - \beta i$$

Par identification $\begin{cases} \alpha - \sqrt{3} - i = 2i - 2\sqrt{3} \\ \beta - \sqrt{3}\alpha - i\alpha = 4 - 4i\sqrt{3} \\ -\beta(\sqrt{3} + i = 8i) \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\sqrt{3} + 3i \,;\, \beta = -2 - 2i\sqrt{3}$

Alors $Q(Z) = Z^2 + (-\sqrt{3} + 3i)Z - 2 - 2i\sqrt{3}$

3) Lorsque $a = -2$, l'équation (E) devient : $z^3 + (2i - 2\sqrt{3})z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = 0$

Or d'après la question précédente on a : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $z^3 + \left(2i - 2\sqrt{3}\right)z^2 + \left(4 - 4i\sqrt{3}\right)z + 8i = Q(z)\left(z - \sqrt{3} - i\right)$ avec $Q(Z) = Z^2 + \left(-\sqrt{3} + 3i\right)Z - 2 - 2i\sqrt{3}$

Ainsi $z^3 + \left(2i - 2\sqrt{3}\right)z^2 + \left(4 - 4i\sqrt{3}\right)z + 8i = 0 \Leftrightarrow \left(z - \sqrt{3} - i\right)\left(Z^2 + \left(-\sqrt{3} + 3i\right)Z - 2 - 2i\sqrt{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow\ z - \sqrt{3} - i = 0$ ou $Z^2 + \left(-\sqrt{3} + 3i\right)Z - 2 - 2i\sqrt{3}$

Résolvons l'équation : $Z^2 + \left(-\sqrt{3} + 3i\right)Z - 2 - 2i\sqrt{3} = 0$

$$\Delta = \left(-\sqrt{3} + 3i\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right) = 2 + 2i\sqrt{3}$$

Déterminons les racines carrées de $\Delta = 2 + 2i\sqrt{3}$

En posant $z = x + iy$ $on\ a$: $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = |(x+iy)^2| = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$

$$\Delta = 2 + 2i\sqrt{3};\ \ |\Delta| = \sqrt{(2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$z^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = 2\sqrt{3} \end{cases}$; En ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient : $2x^2 = 6$ alors $x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}\ \ ou\ \ x = -\sqrt{3}$

Pour $x = \sqrt{3}$; $y = 1$ et Pour $x = -\sqrt{3}$; $y = -1$ -

Alors les deuxracinescarrées de Δ $sont$: $\sigma = \sqrt{3} + i\ \ \ et - \sigma = -\sqrt{3} - i$

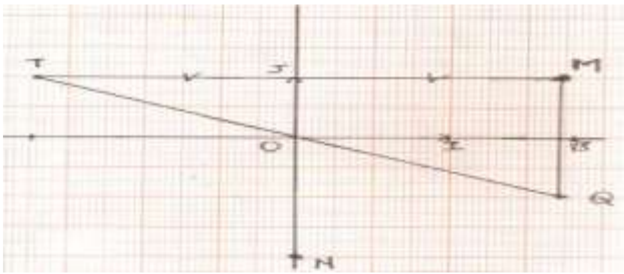
Donc cette équation a deux solutions : $Z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a} = \frac{\sqrt{3}-3i-\sqrt{3}-i}{2} = -2i$ et $Z_2 = \frac{-b+\sigma}{2a} = \frac{\sqrt{3}-3i+\sqrt{3}+i}{2} = \sqrt{3} - i$

$$S_1 = \left\{-2i; \sqrt{3} - i\right\}$$

Ainsi les solutions de (E) sont : $-2i$; $\sqrt{3} - i\ et\ \sqrt{3} + i$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{-2i;\ \sqrt{3} - i\ ;\ \ \sqrt{3} + i\right\}$$

$4.\,a)$Représentation graphique des points $M, N\ et\ Q$



$b)$ Le triangle TQM est rectangle en M si et seulement si : $\frac{Z_T - Z_M}{Z_Q - Z_M} \in i\mathbb{R}^*$

$$\frac{Z_T - Z_M}{Z_Q - Z_M} = \frac{-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i} = \frac{-2\sqrt{3}}{2i} = -i\sqrt{3}$$

Ainsi : $\frac{Z_T - Z_M}{Z_Q - Z_M} \in i\mathbb{R}^*$ alors le triangle TQM est rectangle en M

$c)$ Les points $M, Q, N\ et\ T$ sont cocycliques si et seulement si : $\dfrac{\frac{Z_T - Z_M}{Z_Q - Z_M}}{\frac{Z_T - Z_N}{Z_Q - Z_N}} \in \mathbb{R}^*$

Or : $\frac{Z_T - Z_N}{Z_Q - Z_N} = \frac{-\sqrt{3}+i+2i}{\sqrt{3}-i+2i} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+i} = i\sqrt{3}$

$\dfrac{\frac{Z_T - Z_M}{Z_Q - Z_M}}{\frac{Z_T - Z_N}{Z_Q - Z_N}} = \frac{-i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = -1 \in \mathbb{R}^*$; alors les points $M, Q, N\ et\ T$ sont cocycliques

Exercice 26

$1.\,a)$ Vérifions que i est solution l'équation (E)

$i^3 + (6 - 5i)i^2 + (1 - 20i)i - 14 - 5i = -i - 6 + 5i + i + 20 - 14 - 5i = 0$;

Donc i est solution de l'équation (E)

$b)$ Résolvons dans C l'équation (E) : $z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i = 0$

$$\Delta = (6 - 4i)^2 - 4 \times 1 \times (5 - 14i) = 36 - 48i - 16 - 20 + 56i = 8i$$

Déterminons les racines carrées de $\Delta = 8i$

En posant $z = x + iy$ $on\ a$: $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = |(x+iy)^2| = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$

$$\Delta = 8i;\ \ |\Delta| = \sqrt{(0)^2 + (8)^2} = \sqrt{0 + 64} = \sqrt{64} = 8$$

$z^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 8 \end{cases}$; En ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient : $2x^2 = 8$ alors $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \;\; ou \;\; x = -2$

Pour$x = 2$; $y = 2$ et Pour $x = -2$; $y = -2$ -

Alors les deuxracinescarrées de Δ $sont$: $\sigma = 2 + 2i \quad et$ - $\sigma = -2 - 2i$

Donc cette équation a deux solutions : $Z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a} = \frac{-6+4i-2-2i}{2} = -4 + i$ et $Z_2 = \frac{-b+\sigma}{2a} = \frac{-6+4i+2+2i}{2} = -2 + 3i$

$$S_1 = \{-4 + i; -2 + 3i\}$$

$c)$ Résolvons à partir des questions qui précèdent, l'équation (E)

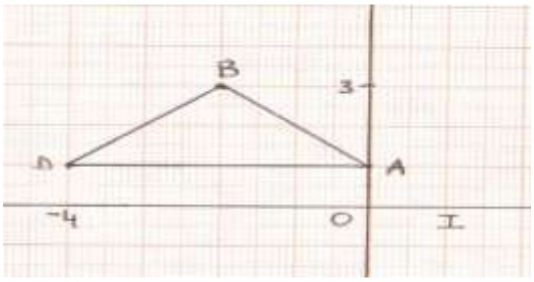
Puisque i est solution de l'équation (E) on vérifie que :

$$(Z - i)(z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i) = z^3 + (6 - 5i)z^2 + (1 - 20i)z - 14 - 5i$$

Ainsi les solutions de (E) sont : $i; -4 + i; -2 + 3i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{i; -4 + i; -2 + 3i\}$$

$2.a)$ Plaçons les points A, B et D dans le repère



$$b) Z = \frac{u - v}{t - v} = \frac{i - (-2 + 3i)}{-4 + i - (-2 + 3i)} = \frac{2 - 2i}{-2 - 2i} = \frac{-1 + i}{1 + i} = \frac{(-1 + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 + i + i + 1}{2} = i$$

$$Donc\ Z = i = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}$$

$c)$ On sait que $Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_D - Z_B} = \frac{u-v}{t-v} = i$; alors ABD est un triangle rectangle isocèle en B

$3.a)S$ est une similitude directe par hypothèse et on a :

$\overset{\curvearrowright}{S}$	
A	A
D	B
B	B'

On sait que S conserve les angles orientés. Or ABD est un triangle rectangle et isocèle en B et $S(B) = B'$ donc ABB' est un triangle rectangle et isocèle en B' car image par S du triangle ABD rectangle et isocèle en B

$b)ABB'$ est un triangle rectangle et isocèle en B' et $\frac{Z_A - Z_{B'}}{Z_B - Z_{B'}} = i \Rightarrow \begin{cases} mes\left(\widehat{\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'A}} = \frac{\pi}{2}\right) \\ BB' = AB \end{cases}$

On construit le cercle de diamètre $[AB]$ et on place le point B' sur ce cercle tel que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'A}} = \frac{\pi}{2}\right)$

$4.a) S(D) = B\ et\ S(A) = A \Rightarrow \begin{cases} Z_B = aZ_D + b \\ Z_A = aZ_A + b \end{cases}$. Alors $a = \frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_A} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

A est le centre de la similitude S donc $Z_A = \frac{b}{1-a} \Rightarrow b = (1 - a)Z_A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

D'où l'écriture complexe de S est : $Z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)Z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$b)S(B) = B'$ alors $Z_{B'} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)Z_B - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(-2 + 3i) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = 3i$

D'où : $Z_{B'} = 3i$

CHAPITRE IX : STATISTIQUES

Introduction

Au **XIX è** siècle, on appelait **statistique** l'étude méthodologique des faits sociaux Par des procédés numériques (classements, dénombrements, inventaires chiffrés, recensement, tableaux…) ; aujourd'hui, ce mot désigne **« les techniques d'interprétation mathématique appliquées à des phénomènes pour lesquels une étude exhaustive de tous les facteurs est impossible, à cause de leur grand nombre ou de leur complexité ».**
De tous temps, on a cherché à connaitre la composition et la richesse des sociétés humaines. En **2238 a v. J-C.**, l'empereur **chinois Yao** faisait déjà procéder a un recensement des productions agricoles, et le cadastre a été institué en Égypte en **1700 av J-C.**
Mais c'est à partir du **XVIII è siècle** que l'on commence à utiliser les données recueillies pour effectuer des prévisions, en les faisant servir de base à des calculs de probabilités.
A l'heure actuelle, la statistique est devenue un instrument très efficace grâce en particulier au développement de l'algèbre linéaire et des ordinateurs.
La corrélation entre deux variables statistiques a une très grande importance car son utilisation permet de mettre à jour les liens cachés de causalité dans certains domaines comme la génétique, l'épistémologie, l'offre et la demande …
Un domaine privilégié d'application des séries statistique à deux variables est celui où l'une des deux variables est le temps. On obtient ainsi des séries chronologiques dont l'importance est considérable en économie.
Deux variables statistiques étant en corrélation linéaire on utilise plusieurs méthodes d'ajustement.
La méthode d'ajustement par moindre carrés est attribuée à **Carl Friedrich Gauss** et au mathématicien Français **Adrien Marie le Gendre**.

FICHE DE COURS

I SERIE STATISTIQUE DOUBLE

Soit une population Ω d'effectif N et dont chaque élément présente deux caractères X et Y

I-1 Définition

On appelle série statistique double de Ω pour le caractère X et Y l'application qui à chaque élément de Ω associe le couple $(x_i ; y_i)$ où $x_i$sont les valeurs du caractère X et $y_i$les valeurs de caractère Y.

I-2 Nuage de points associé à une série statistique double

A un tableau à double entrée on peut associer une représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On obtient un ensemble de points appelé nuage de points (on ne représente que les points dont le couple de coordonnées a un effectif non nul).

II AJUSTEMENT LINÉAIRE –CORRÉLATION LINÉAIRE

II-1Ajustement linéaire

Suivant la forme du nuage de points, on peut trouver une fonction dont la courbe passe par le plus
Si la courbe est une droite on dit qu'on a effectué un **ajustement linéaire** du nuage de points.
Pour déterminer le meilleur ajustement linéaire, nous utiliserons la méthode dite **« des moindres carrées »**
Soit $(\mathcal{D})$la droite d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$, $(\mathcal{D})$est appelée la droite de **régression de $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{x}$** et est notée $D_{y/x}$

Détermination des coefficients a et b.

$$(\mathcal{D}): y = ax + b$$

$a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}$; $b = \bar{Y} - a\bar{X}$ avec $COV(X,Y) = \frac{\Sigma x_i y_j}{N} - \bar{X}\bar{Y}$

La droite $(\mathcal{D}')$d'équation $x = a'y + b'$ s'appelle la droite de régression de x en y.et est notée $D_{x/y}$

$a' = \frac{COV(X,Y)}{V(Y)}$. $b = \bar{X} - a\bar{Y}$

Tableaux de calcul

x_i	y_i	${x_i}^2$	${y_i}^2$	$x_i y_i$
x_1	y_1	${x_1}^2$	${y_1}^2$	$x_1 y_1$
x_2	y_2	${x_2}^2$	${y_2}^2$	$x_2 y_2$
x_3	y_3	${x_3}^2$	${y_3}^2$	$y_3 x_3$
x_n	y_n	${x_n}^2$	${y_n}^2$	$x_n y_n$
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$

Moyennes

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i$

Variances

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}^2$$

$$V(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 - y^2$$

Écart type

$$\delta(x) = \sqrt{V(x)}$$

II-2) Corrélation linéaire

Deux variables statistiques X et Y sont dites en **corrélation linéaire** lorsque la courbe de régression de y en x et celle de x en y sont des droites.

Coefficient de corrélation linéaire

On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère (X, Y) le nombre réel

$r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{COV(X,Y)}{\delta(X)\delta(Y)}$

Remarque

1)$a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}$; $a' = \frac{COV(X,Y)}{V(Y)}$

$r^2 = aa'$ d'où $|r| = \sqrt{aa'}$

2) Si $r^2 = 1 \Rightarrow a' = \frac{1}{a}$les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$sont confondues

On dit que **l'ajustement linéaire est parfait**.

Si $|r|$est très proche de 1, alors les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$sont très proche l'une de l'autre.

On dit qu'il y a **une bonne corrélation** ou une **forte corrélation** entre les deux variables

En général on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est **forte** lorsqu'on a : $0,87 \leq |r| \leq 1$. Cet ajustement permet de faire des prévisions.

Si $r = 0$, on dit qu'il ya corrélation nulle entre X et Y, ce qui n'exclus pas que l'on puisse ajuster X et Y par une courbe.

III AJUSTEMENT D'UN NUAGE DE POINTS PAR LA METHODE DE MAYER

Principe de la méthode

L'ensemble des points à ajuster est partagé en deux parties disjointes E_1 et E_2 de même effectif dans l'ordre où les points se présentent. Les deux parties E_1 et E_2 sont alors remplacés respectivement par les points moyens G_1 et G_2des nuages qu'ils représentent. **(Si le nombre de points du nuage est impair, on met indifféremment le point central en l'un ou l'autre des nuages partiels).**

. La droite $(\mathcal{D})$d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$passant par les points G_1 et G_2est appelée **la droite de MAYER**

Détermination des coefficients a et b

$$(\mathcal{D}): y = ax + b$$
$$a = \frac{y_{G_1} - y_{G_2}}{x_{G_1} - x_{G_2}}; b = Y_G - aX_G$$

Remarque :

La droite de **MAYER** passe par le point moyen du nuage.

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

On considère la série statistique déterminée par le tableau ci-dessous

x_i	10	11	13	15	17	18
y_i	105	107	110	111	112	115

1) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique.
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G.
3) Déterminer $V(x)$ et $V(y)$.
4) Calculer $COV(x,y)$ la covariance des variables x et y.
5) Déterminer une équation de la droite (Δ)de régression de y en x. Tracer (Δ)
6) Calculer le coefficient de corrélation de cette série et l'interpréter.

Exercice 2

Le tableau suivant représente les notes obtenues par cinq élèves de la TleD1 en mathématiques et en sciences physiques lors du dernier devoir.

On désigne par $x_i$la note en mathématiques et $y_i$la note en sciences physiques.

$note\ x_i$	7	10	11	13	16
$note\ y_i$	8	9	12	12	13

1) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G.
3) Calculer $V(x)$; $V(y)$ et $COV(x,y)$
4) Calculer r le coefficient de corrélation linéaire entre les variables x et y.

Interpréter le résultat obtenu.

5) a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
   b) Tracer $(\mathcal{D})$.
6) Suivant cet ajustement, quelle serait la note en sciences physiques d'un élève qui a obtenu 12 en mathématiques.

Exercice 3

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaire en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où X désigne le numéro du mois et y le chiffres d'affaires correspondant

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	12	13	15	19	21	22

1) Calculer $\bar{x}$et $\bar{y}$les moyennes des variables x et y.
2) Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G. (unités : 2 cm en abscisses et 1 cm pour deux unités en ordonnées).
3) Calculer la variance $V(x)$ de x et la covariance$COV(x,y)$ de x et y.
   LES RESULTATS SERONT DONNES SOUS FORME DE FRACTIONS IRREDUCTIBLES
4) Démontrer qu'une équation de la droite (Δ)de régression de y en x est : $y=\frac{78}{35}x+9{,}2$
5) Tracer la droite (Δ).
6) En utilisant la droite (Δ) , calculer une estimation du chiffre d'affaire de cette pharmacie à la fin du 7ème mois.

Exercice 4

On donne la série statistique suivante à variables :

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	13	12	α	16	20

par la méthode des moindre carrés, on a obtenu l'équation de la droite de régression de y en x, a est :$y=9x+0{,}6$

1) Calculer $\bar{X}$
2) Exprimer $\bar{Y}$en fonction de a.
3) En utilisant 1 et 2, montrer que α=14.

Exercice 5

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires d'une entreprise, exprimé en millions de francs, pendant huit années consécutives.

$numéro\ de\ l'année\ x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8

$chiffres\ d'affaires\ y_i$	41	68	55	80	95	104	100	122

1) Représenter le nuage de points $\{M_i\}_{1\leq i\leq 8}$associé à cette série statistique.
2) a) Calculer les coordonnées de G point moyen du nuage.
   b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et représenter cette droite.
3) On partage le nuage en deux parties d'effectifs égaux :$\{M_i\}_{1\leq i\leq 4}$ et$\{M_i\}_{5\leq i\leq 8}$
a) Calculer les coordonnés de G_1 et G_2, points moyen respectifs des nuages partiels ainsi obtenus.
b) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) et représenter cette droite.
Démontrer que G appartient à la droite (G_1G_2)
Cette droite est une droite d'ajustement de la série ; la méthode utiliser est appelée **méthode de Mayer.**
4) En supposant que l'évolution du chiffre d'affaire de cette entreprise gardera la même tendance, déterminer ce chiffre d'affaire pour la 9è année :
a) A l'aide de la droite de régression de y en x.
b) A l'aide de la droite (G_1G_2).

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

Exercice 1

Le tableau suivant donne la tension artérielle moyenne y en fonction de l'âge x d'une population.

$\hat{a}ge\ x_i$	36	42	48	54	60	66
$tension\ y_i$	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1) Représenter le nuage de points associé à cette série.
2) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de x en y. tracer ces deux droites.
3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
4) Une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2.cela vous parait il « normal ».

Exercice 2

La directrice des ressources humaines d'une entreprise doit embaucher des ouvriers. Lors de précédents recrutements pour les postes d'analogues, il a fait une étude statistique et a dressé le tableau suivant. :

$salaires\ proposés\ x_i$	60 000	64000	68 000	72 000
$nombres\ de\ candidatures\ y_i$	11	17	20	25

1) Représenter le nuage de point associés à cette série.
2) Déterminer la droite de régression de y en x.
3) En déduire une estimation du salaire que doit proposer la directrice si elle veut 30 ouvriers.
   b) Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calculer la note probable en mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15 en sciences physiques.

Exercice 3

Les chiffres d'affaires d'une entreprise à la fin de chacune de ses huit premières années sont donnés dans le tableau ci – dessous ils sont exprimés en millions de francs.

Années	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffres d'affaires	5	11	12	14	17	18	21	24

a) Représenter ce nuage de points '(années en abscisses, chiffre d'affaires en ordonnées)
b) Calculer le point moyen G_1 du nuage partiel constitué des quatre premiers points.
Placer G_1 sur le graphique.
c) Calculer le point moyen G_2 du nuage partiel constitué des quatre premiers points. Placer G_2 sur le graphique.
d) Déterminer une équation de la droite (Δ) passant par G_1 et G_2. Tracer (Δ). la droite (Δ) ainsi obtenue s'appelle **droite de Mayer**.
e) En utilisant l'équation de (Δ) déterminée en d), évaluer le chiffre d'affaires prévisible pour la 9è année.

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1

1 – Représentons le nuage de points associé à cette série statistique

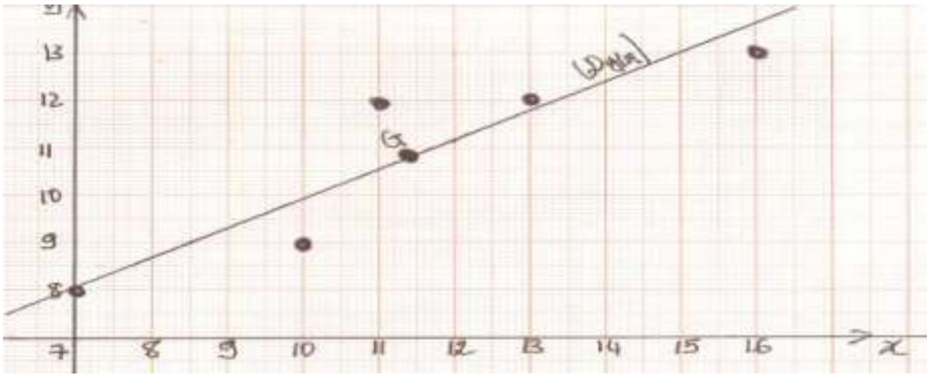


Tableau de calcul

x_i	10	11	13	15	17	18	**84**
y_i	105	107	110	111	112	115	**660**
x_i^2	100	121	169	225	289	324	**1228**
y_i^2	11025	11449	12100	12321	12544	13225	**72664**
$x_i \times y_i$	1050	1177	1430	1665	1904	2070	**9296**

2- Déterminer les coordonnées du point moyen G

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{84}{6} = 14\ ;\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{660}{6} = 110 \quad alors\ G\binom{14}{110}$$

3- Déterminer $V(x)$ et $V(y)$

$V(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{1228}{6} - 14^2 = \frac{614}{3} - 196 = \frac{26}{3}$ **alors** $V(x) = \frac{26}{3}$

$V(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{n} - \overline{y}^2 = \frac{72664}{6} - 110^2 = \frac{36332}{3} - 12100 = \frac{32}{3}$ **alors** $V(y) = \frac{32}{3}$

4- Calculer $COV(x, y)$ la covariance des variables x et y.

$cov(x, y) = \sum_{i=1}^{6} \frac{x_i \times y_i}{n} - \overline{x} \times \overline{y} = \frac{9296}{6} - 14 \times 110 = \frac{4648}{3} - 1540 = \frac{28}{3}$ **alors** $cov(x, y) = \frac{28}{3}$

5- $\left(D_{y/x}\right)$ $y = ax + b$ **avec** $a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{\frac{28}{3}}{\frac{26}{3}} = \frac{28}{3} \times \frac{3}{26} = \frac{28}{26} = \frac{14}{13}$ **et** $b = \overline{y} - a\overline{x}$

$$b = 110 - \frac{14}{13} \times 14 = 110 - \frac{196}{13} = \frac{1234}{13}$$

Alors $\left(D_{y/x}\right)$ $y = \frac{14}{13}x + \frac{1234}{13}$

6- $r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \frac{\frac{28}{3}}{\sqrt{\frac{26}{3} \times \frac{32}{3}}} = \frac{28}{\sqrt{832}} = \frac{28}{8\sqrt{13}} = \frac{7}{2\sqrt{13}} \approx 0,97$

$0,87 \leq 0,97 \leq 1$ **; on a une très bonne corrélation.**

Exercice 2

1 – Représentons le nuage de points associé à cette série statistique

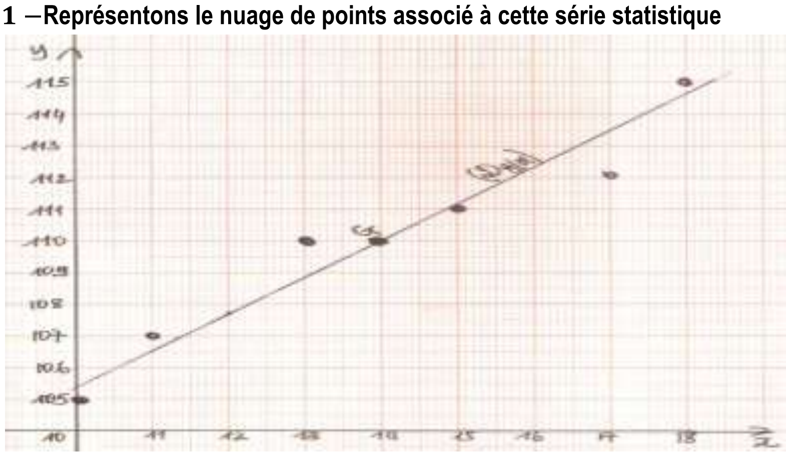


Tableau de calcul

x_i	7	10	11	13	16	**57**
y_i	8	9	12	12	13	**54**
${x_i}^2$	49	100	121	169	256	**695**
${y_i}^2$	64	81	144	144	169	**602**
$x_i \times y_i$	56	90	132	156	208	**642**

2 −Déterminer les coordonnées du point moyen G

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{57}{5} = ; \quad \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{54}{5} \quad alors\ G\begin{pmatrix}\frac{57}{5}\\ \frac{54}{5}\end{pmatrix}$$

3- **calculons** $V(x)$; $V(y) et cov(x,y)$

$V(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{{x_i}^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{695}{5} - \left(\frac{57}{5}\right)^2 = \frac{226}{25}$ **alors** $V(x) = \frac{226}{25}$

$V(y) = \sum_{i=1}^{n}\frac{{y_i}^2}{5} - \overline{y}^2 = \frac{602}{5} - \left(\frac{54}{5}\right)^2 = \frac{94}{25}$ **alors** $V(y) = \frac{94}{25}$

$cov(x,y) = \sum_{i=1}^{5}\frac{x_i \times y_i}{5} - \overline{x} \times \overline{y} = \frac{642}{5} - \frac{57}{5} \times \frac{54}{5} = \frac{3210-3078}{25} = \frac{132}{25}$ **alors** $cov(x,y) = \frac{132}{25}$

4- $r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}\frac{\frac{132}{25}}{\sqrt{\frac{226}{25}\times\frac{94}{25}}} = \frac{132}{\sqrt{21244}} = \frac{132}{2\sqrt{5311}} = \frac{66}{\sqrt{5311}} \approx \mathbf{0{,}906}$

$\mathbf{0{,}87 \leq 0{,}906 \leq 1}$ **; on a une très bonne corrélation**

5- $\left(D_{y/x}\right)$ $\quad y = ax + b$ **avec** $a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{\frac{132}{25}}{\frac{226}{25}} = \frac{132}{25} \times \frac{25}{226} = \frac{132}{226} = \frac{66}{113}$ **et** $b = \overline{y} - a\overline{x}$

$$b = \frac{54}{5} - \frac{66}{113} \times \frac{57}{5} = \frac{6102 - 3762}{565} = \frac{2340}{565} = \frac{468}{113}$$

Alors $\left(D_{y/x}\right)$ $\quad y = \frac{66}{113}x + \frac{468}{113}$

6- **Suivant cet ajustement, quelle serait la note en sciences physiques d'un élève qui a obtenu 12 en mathématiques**

$$y = \frac{66}{113} \times 12 + \frac{468}{113} = \frac{1260}{113} \approx 11{,}15$$

La note en sciences physiques d'un élève qui a obtenu 12 en mathématiques serait 11

Exercice 3

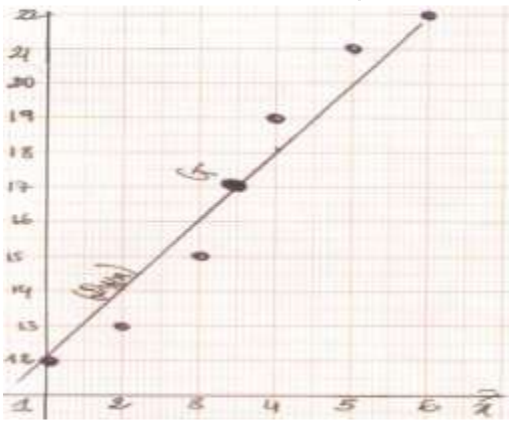
Tableau de calcul

x_i	1	2	3	4	5	6	**21**
y_i	12	13	15	19	21	22	**102**
${x_i}^2$	1	4	9	16	25	36	**91**
${y_i}^2$	144	169	225	361	441	484	**1824**
$x_i \times y_i$	12	26	45	76	105	132	**396**

1- **Calculer** $\overline{x}$**et** $\overline{y}$**les moyennes des variables** x **et** y

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\ ; \quad \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{102}{6} = 17$$

2- **Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G. (unités : 2 cm en abscisses et 1 cm pour deux unités en ordonnées**



3- **Calculer la variance** $V(x)$ **de** x **et la covariance** $COV(x,y)$ **de** x **et** y

$V(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{546-441}{36} = \frac{105}{36} = \frac{35}{12}$ **Alors** $V(x) = \frac{35}{12}$

$cov(x,y) = \sum_{i=1}^{6} \frac{x_i \times y_i}{n} - \overline{x} \times \overline{y} = \frac{396}{6} - \frac{7}{2} \times 17 = 66 - \frac{119}{2} = \frac{13}{2}$ **Alors** $cov(x,y) = \frac{13}{2}$

4- $\left(D_{y/x}\right)$ $y = ax + b$ **avec** $a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{35}{12}} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{35} = \frac{78}{35}$ **et** $b = \overline{y} - a\overline{x}$

$$b = 17 - \frac{78}{35} \times \frac{7}{2} = 17 - \frac{39}{5} = \frac{46}{5} = 9{,}2$$

Alors $\left(D_{y/x}\right)$ $y = \frac{78}{35}x + 9{,}2$

5- **Tracer la droite** (Δ)

6- **En utilisant la droite** (Δ) **, calculer une estimation du chiffre d'affaire de cette pharmacie à la fin du 7ème mois**

$$y = \frac{78}{35} \times 7 + 9{,}2 = \frac{78}{5} + 9{,}2 = 24{,}8$$

Le chiffre d'affaire de cette pharmacie à la fin du $7ème\ mois\ sera\ estimé$ **à** $24{,}5\ millions\ de\ francs.$

7- $r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \frac{\frac{28}{3}}{\sqrt{\frac{26}{3} \times \frac{32}{3}}} = \frac{28}{\sqrt{832}} = \frac{28}{8\sqrt{13}} = \frac{7}{2\sqrt{13}} \approx 0{,}97$

$0{,}87 \leq 0{,}97 \leq 1$ **; on a une très bonne corrélation.**

Exercice 4

1- **Calculons** $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{1{,}2 + 1{,}4 + 1{,}6 + 1{,}8 + 2}{5} = \frac{8}{5}$$

2- **Exprimer** $\overline{Y}$**en fonction de a.**

$$\overline{Y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{13 + 12 + \alpha + 16 + 20}{5} = \frac{61 + \alpha}{5}$$

3- **En utilisant 1 et 2, montrons que a=14**

l'équation de la droite de régression de y **en** x**, a savoir :**$y = 9x + 0{,}6$

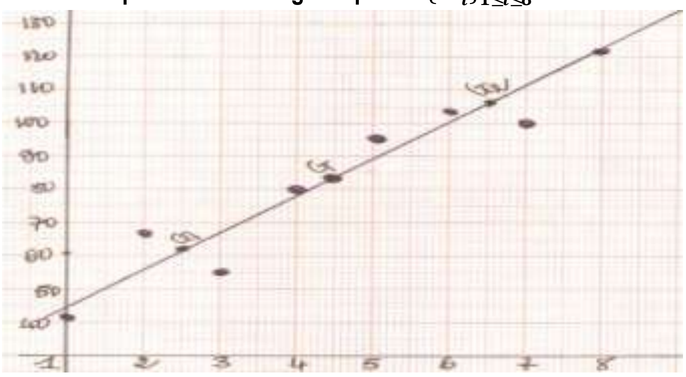
$$b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

Par identification : $0{,}6 = \frac{61+\alpha}{5} - 9 \times \frac{8}{5} \Leftrightarrow \frac{61+\alpha-72}{5} = 0{,}6 \Leftrightarrow \alpha - 11 = 0{,}6 \times 5 \Leftrightarrow \alpha = 11 + 3$

Alors $\alpha = 14$

Exercice 5

1- **Représenter le nuage de points** $\{M_i\}_{1\leq i\leq 8}$**associé à cette série statistique**



2- **Tableau de calcul**

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	**36**
y_i	41	67	55	80	95	104	100	122	**664**
${x_i}^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	**204**
${y_i}^2$	1681	4489	3025	6400	9025	10826	10000	14884	**60032**
$x_i \times y_i$	41	134	165	320	475	624	700	976	**3435**

a-

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{36}{8} = \frac{9}{2};\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{664}{8} = 83\quad alors\ G\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\83\end{pmatrix}$$

b- **Déterminer** $V(x)$ **et** $cov(x;y)$

$V(x)=\sum_{i=1}^{8}\frac{{x_i}^2}{8}-\overline{x}^2=\frac{204}{8}-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{51}{2}-\frac{81}{4}=\frac{102-81}{4}=\frac{21}{4}$ **alors** $V(x)=\frac{21}{4}$

$cov(x,y)=\sum_{i=1}^{8}\frac{x_i\times y_i}{8}-\overline{x}\times\overline{y}=\frac{3435}{8}-\frac{9}{2}\times 83=\frac{3435-2988}{8}=\frac{447}{8}$ **alors** $cov(x,y)=\frac{447}{8}$

$\left(D_{y/x}\right)$ $y=ax+b$ **avec** $a=\frac{COV(X,Y)}{V(X)}=\frac{\frac{447}{8}}{\frac{21}{4}}=\frac{447}{8}\times\frac{4}{21}=\frac{149}{14}$ **et** $b=\overline{y}-a\overline{x}$

$$b=83-\frac{149}{14}\times\frac{9}{2}=\frac{2324-1341}{28}=\frac{983}{28}$$

Alors $\left(D_{y/x}\right)$ $y=\frac{149}{14}x+\frac{983}{28}$

3- a) G_1 **a pour coordonnées :** $\left(\frac{1+2+3+4}{4};\ \frac{41+67+55+80}{4}\right)$ **; d'où** $G_1\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{243}{4}\end{pmatrix}$

G_2 **a pour coordonnées :** $\left(\frac{5+6+7+8}{4};\ \frac{95+104+100+122}{4}\right)$ **; d'où** $G_2\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\ \frac{421}{4}\end{pmatrix}$

b.) $(\mathcal{D})\colon y=ax+b$ avec $a=\frac{Y_{G_2}-Y_{G_1}}{X_{G_2}-X_{G_1}}=\frac{\frac{421}{4}-\frac{243}{4}}{\frac{13}{2}-\frac{5}{2}}=\frac{\frac{89}{2}}{4}=\frac{89}{8}$ et $b=\overline{Y}_G-a\overline{X}_G=83-\frac{89}{8}\times\frac{9}{2}=\frac{1328-801}{16}=\frac{527}{16}$

La droite (G_1G_2) **a pour équation :** $y=\frac{89}{8}x+\frac{527}{16}$

G **appartient** (G_1G_2) **si et seulement si :** $y_G=\frac{89}{8}x_G+\frac{527}{16}$ **on a :** $y_G=\frac{89}{8}\times\frac{9}{2}+\frac{527}{16}=\frac{801+527}{16}=\frac{1328}{16}=83$

Ou bien : G **est l'isobarycentre des points du nuage. D'après le théorème des barycentres partiels,** G **est le barycentre de** $(G_1,4)$ **et** $(G_2,4)$ **; donc** G **appartient à la droite** (G_1G_2)

4- le chiffre d'affaires que peut espérer l'entreprise pour la 9ème année est obtenu en cherchant l'ordonnée du point d'abscisse 9 de la droite d'ajustement.

a- Avec la droite de régression de y en x, on obtient : $y=\frac{149}{14}\times 9+\frac{983}{28}=\frac{2682+983}{28}=130{,}89$

b- Avec la droite (G_1G_2)**, on obtient :** $y=\frac{89}{8}\times 9+\frac{527}{16}=\frac{1602+587}{16}=\frac{2129}{16}=133{,}06$

La méthode de Mayer permet généralement d'obtenir des résultats assez proches de ceux obtenus par la méthode des moindres carrés et nécessite moins de calculs.

TEXTES DU BAC

SUJET I

Exercice 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormé(O, I, J)

On considère l'équation (E) :$\forall z \epsilon \mathbb{C}$, $z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$

1-a) Démontrer que l'équation (E) admet deux solutions réelles et les déterminer.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

2) On considère les points A, B, C, E et G d'affixes respectives $3, 2 + i\sqrt{3}, -1, 7$ et $11 + 4i\sqrt{3}$

a) Place les points A, B, C, E et G dans le repère.

b) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.

c) Démontrer que les points B, C et G sont alignés.

d) Déterminer l'affixe du point F de l'axe des abscisses tel que le triangle EFG soit équilatéral.

3) Soit $\mathcal{F}$ la transformation du plan de centre C qui transforme G en B et H est l'image de E par $\mathcal{F}$.

a) Déterminer l'écriture complexe de $\mathcal{F}$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{F}$

c) Calculer l'affixe de H.

4) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon 2. Déterminer $(\mathcal{C}')$ image du cercle $(\mathcal{C})$ par $\mathcal{F}$.

Exercice 2

Le personnel d'un collège de Yopougon est reparti en trois catégories : les enseignants permanents, les enseignants vacataires et le personnel administratif.

71% du personnel sont des enseignants permanents et 12% sont du personnel administratif.

67% du personnel administratif sont des femmes et 92% des enseignants permanents sont des hommes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à $\mathbf{10^{-4}}$ près.

1) On interroge au hasard un membre du personnel de ce collège.

a) Quelle est la probabilité d'interroger un homme enseignant permanent ?

b) Quelle est la probabilité d'interroger un homme du personnel administratif ?

c) On sait que 80% du personnel est masculin. Calculer la probabilité d'interroger un homme enseignant vacataire.

d) En déduire la probabilité d'interroger un homme sachant que la personne interrogée fait partie des enseignants vacataires.

2) La société de téléphonie mobile « ORANGE » souhaite envoyer un courrier publicitaire à 10 personnes qui travaillent dans ce collège. Elle a la liste du personnel, mais ne connait pas la fonction de chacun. Elle choisie au hasard 10 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on suppose qu'il s'agit de 10 tirages s indépendants successifs indépendants avec remises)

a) Quelle est la probabilité que, sur les 10 courriers envoyés, 3 exactement soient reçu par le personnel administratif ?

b) Quelle est la probabilité que, sur les 10 courriers envoyés, 1 au moins soit reçus par le personnel administratif ?

Problème

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + \frac{1}{2} + (x - \frac{1}{2})e^{2x}$ de représentation graphique $(\mathcal{C})$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

Partie A

Soit la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - e^{-2x}$.

1. Etudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de g .
2. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ telle que $0,28 \leq \alpha \leq 0,29$.

3. b) Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$.

Partie B

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

1. b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

1. c) Etudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C})$.

2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. b) Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$. Donner l'interprétation graphique de ce résultat.

3. a) Démontrer que $f(\alpha)=1-\alpha-\frac{1}{4\alpha}$.

3. b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ par deux nombres décimaux d'ordre 2.

4. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x)=g(x)e^{2x}$.

4. b) En déduire les variations de et dresser son tableau de variation.

5. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

5. b) En déduire que $(\mathcal{C})$ et (OI) se coupe au point O et en un point A dont on précisera les coordonnés.

6.) Placer le point A, tracer (D) puis construire $(\mathcal{C})$.

Partie C

1. Soit les fonctions H et h définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{H}(x)=(\mathrm{a}x+\mathrm{b})e^{2x}$ et $h(x)=(x-\frac{1}{2})e^{2x}$.

   Déterminer les nombres réels a et b pour que H soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de h.

2. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de f.

SUJET II

Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne le cours moyen d'une action donnée à la bourse d'Abidjan.

Année	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
Rang x_i de l'année	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Prix y_i en FCFA	**500**	**580**	**690**	**850**	**1050**	**1120**

On désigne par X le caractère « rang de l'année » et par Y le caractère « Prix correspondant à l'année »

1) Représenter le nuage de points associé à la série à la série double $(X;Y)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ d'unités $1cm$ pour une année en abscisse et $1cm$ pour $100FCFA$ en ordonnée.
2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur la figure précédente.
3) Calculer la variance $V(X)$ de X, la variance $V(Y)$ de Y et la covariance $COV(X;Y)$ de la série double $(X;Y)$.
4) Démontrer que, à $10^{-2}près$ par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série double $(X;Y)$ est égal à 0,99. En déduire qu'un ajustement affine est justifié.
5) Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

a) Démontrer qu'une équation de (D) est : $y=\frac{934}{7}x+464{,}76$.

b) Tracer la droite (D) dans le repère $(O;I;J)$.

6) En supposant que la tendance constatée se maintienne ; estimer en utilisant la droite (D) :

a) Le cours moyen de cette action au $1erJanvier$ 2016

b) A partir de qu'elle année, le cours moyen de l'action considérée dépassera-t-il 2000 $FCFA$?

Exercice 2

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par $z_0=4$ et $z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n$. On note M_n l'image de z_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$d'unité graphique $2cm$.

1) Ecrire sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle, les nombres complexes z_1; z_2; et z_3.
2) Placer les points M_0; M_1; M_2; et M_3.
3) Démontrer que pour tout entier naturel n, le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et isocèle en M_{n+1}.
4) On désigne par S la transformation du plan qui applique M_n sur M_{n+1}.déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.
5) Pour tout entier naturel n, on pose $d_n=|z_{n+1}-z_n|$.

a) Montrer que (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et déterminer son premier terme.

b) Interpréter géométriquement chacun des nombres d_n

Problème

PARTIE A

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=e^{-x}+ln(-x)+1$

1) Déterminer l'ensemble de définition de g.
2) Calculer les limites de g en $-\infty$ et à gauche en 0.
3) On admet que g est dérivable sur $]-\infty;0[$.

a) Démontrer que $\forall x \in]-\infty; 0[$; $g'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x}$
b) Etudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x et déduire les variations de g.
c) Dresser le tableau de variation de g.
4) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 0[$ puis vérifier que $-0{,}2 < \alpha < -0{,}1$. Donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}01$.
5) Déduire de tout ce qui précède que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[$; $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; 0[$; $g(x) < 0$
6) Justifier que $ln(-\alpha) = -1 - e^{-\alpha}$.

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique $4cm$. On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty; 0]$ par : $\begin{cases} f(x) = e^{-x} - xln(-x) si x < 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$. on désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).

1) Etudier la continuité de f en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement le résultat.
3) Justifier que $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
4) On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$
a) Démontrer que $\forall x \in]-\infty; 0[$; $f'(x) = -g(x)$
b) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.
5) a) Démontrer que $f(\alpha) = (1 + \alpha)e^{-\alpha} + \alpha$
b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 3.10^{-2}.
6) Construire $(\mathcal{C})$. On prendra $\alpha = -0{,}12$ et $f(\alpha) = 0{,}87$

PARTIE C

Soit t un nombre réel tel que $-1 \leq t < 0$

1) Hachurer sur le graphique, la partie $\Delta(t)$ du plan limité par $(\mathcal{C})$, l'axe (OI) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = t$.
2) Calculer $\int_{-1}^{t} xln(-x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
3) En déduire l'aire $\mathcal{A}(t)$ de $\Delta(t)$ en cm^2.
4) Calculer la limite à gauche en 0 de $\mathcal{A}(t)$.

SUJET III

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique $1cm$.
Soit le polynôme $P(Z) = Z^3 - (5 + i)Z^2 + (10 + 6i)Z - 8 - 16i$

1) Démontrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on précisera.
2) Déterminer le polynôme $Q(Z)$ tel que $P(Z) = (Z - 2i)Q(Z)$
3) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z) = 0$
4) Soientt A, B et C les points d'affixes respectives $Z_A = 3 + i$; $Z_B = 2i$ et $Z_C = 2 - 2i$
a) Placer les points A, B et C.
b) Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle.
c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme puis construire D.
5) Soit E le symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$.
a) Justifier que l'affixe de E est $-1 - i$
b) Prouver que $ABEC$ est un carré.
c) Démontrer que les points E, C et D sont alignés.
6) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\left|\frac{1}{2}i\bar{z} - 1 + i\right| = \frac{\sqrt{10}}{2}$
a) Les points E, D, A et B appartiennent-ils à (Γ) ? justifier votre réponse.
b) Démontrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z - 2 + 2i| = \sqrt{10}$
c) En déduire l'ensemble (Γ) et construire (Γ)
7) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $Z^4 = 8410(-1 + i\sqrt{3})$. On donnera les solutions de (E') sous la forme exponentielle.
b)Représenter dans un autre repère direct (O, I, J) d'unité $2cm$, les points images des solutions de (E')

Exercice 2

Lors d'une épidémie chez les bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée tôt chez l'animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- Si un animal est porteur de la maladie, le test est positif à 85% des cas.
- Si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note les évènements suivants :

- M « l'animal est porteur de la maladie »
- T : « le test est positif »

1) Construire un arbre pondéré de probabilités modélisant la situation proposée.
2) Un animal est choisit au hasard.
   a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b) Démontrer que la probabilité que son test soit positif est $p = 0{,}0580$.
3) Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4) On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   a) Démontrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer la variance $V(X)$ de X.
   d) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5) Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de $100000\ FCFA$ et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de $300000 FCFA$. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût y_i	0	100000	300000
$P(Y = y_i)$	$0{,}9405$	$0{,}0580$	$0{,}0015$

   a) Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ de Y. Interpréter ce résultat.
   b) Un éleveur possède un troupeau de *200* bovins. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ d'unité graphique 2cm. On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$ de représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.

PARTIE A$(\boldsymbol{Etude\ d'une fonction\ auxiliaire})$

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$
2) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, g((x) = (x-2)^2 e^{-x}$
3) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
4) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ tel que $0{,}35 < \alpha < 0{,}36$.
5) Démontrer que : $\forall\ x \in]-\infty; \alpha[,\ g(x) < 0$ et $\forall\ x \in]\alpha; +\infty, [, g(x) > 0$.

PARTIE B$\left(\boldsymbol{Etude\ de\ f\ et\ tracer\ de\ (\mathcal{C}_f)}\right)$

1) Calculer la limite de f en $+\infty$
2) Démontrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
3) a) Démontrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
   b)En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
4) a) Justifier que $\alpha^2 + 2 = 2\alpha + e^{\alpha}$
   b)En déduire que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$
   c) Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près par deux nombres décimaux consécutifs.
5) Soit (Δ) la droite d'équation $y = x - 1$
   a) Démontrer que la droite (Δ) est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$
   b) Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ)
6) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point O (origine du repère).
7) Construire avec soin les droites (T) et (Δ) puis la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

PARTIE C$(\boldsymbol{Calcul\ d'aire})$-

Soit λ un nombre réel strictement positif. On désigne par $\mathrm{D}(\lambda)$ la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$; (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

1) Pour $\lambda = 3$, hachurer sur le graphique $D(3)$.

2) En utilisant deux intégrations par parties, démontrer que l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de $D(\lambda)$ en cm^2 est :

$$\mathcal{A}(\lambda) = 4\left[4 - (\lambda^2 + 2\lambda + 4)e^{-\lambda}\right]cm^2$$

3) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda)$;

SUJET IV

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{u};\vec{v})$, unité $1cm$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3};\ z_B = -1 - i\sqrt{3};\ z_C = 2$ et $z_D = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}i\sqrt{3}$.

1) Placer les points A, B, C et D
2) a) Vérifier que $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
c) En déduire la nature du triangle ABC.
d) Démontrer que le centre du cercle (Γ_1) circonscrit au triangle ABC est O. En déduire le rayon de (Γ_1)
e) Tracer le cercle (Γ_1)
3) a) Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points M d'affixe z qui vérifient : $|z + 4 - i\sqrt{3}| = 3$
c) Vérifier que le point A est élément de (Γ_2).
d) Construire (Γ_2)
4) On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{3}{2}$.
a) Quelles sont les images des points A et B par la rotation r ?
b) Quelles sont les images des points A et C par l'homothétie h ?
5) On pose $f = h°r$
a) Justifier que $f(A) = A$ et $f(B) = D$
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
c) Démontrer que l'écriture complexe de f est $z' = \left(-\frac{3}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)z - 4 + i\sqrt{3}$
6) Démontrer que l'image du cercle (Γ_1) par f est (Γ_2).

Exercice 2

Un glacier situé près du Collège **LOUIS LAGRANGE** permettant aux élèves du dit collège de se désaltérer est ouvert entre $\mathbf{12h}$ et $\mathbf{17h}$.
Il propose uniquement deux types de parfum de glace : **Malaga** et **Américain**.
Pour des raisons sociales, un élève n'achète qu'une seule glace.
$\mathbf{60}\%$ des clients viennent à l'heure de déjeuner entre $\mathbf{12h}$ et $\mathbf{14h}$.
Parmi les élèves qui achètent une glace entre $\mathbf{14h}$ et $\mathbf{17h}$, $\mathbf{80}\%$ achète une glace de parfum Américain.
On note les évènements suivants :

D: $\ll$ *le client vient à l'heure du déjeuner entre* $\mathbf{12h}$ et $\mathbf{14h}$ $\gg$

A: $\ll$ *le client achète une glace de parfum Américain* $\gg$

Une étude à montrer que la probabilité pour qu'un client achète une glace de parfum Américain est de $\mathbf{0,62}$.

(*on pourra s'aiderd'un arbre de probabilité dont on complètera au fur et à mesure*)

1.a) Justifier que $P(A \cap D) = 0,3$
b) En déduire $P_D(A)$ et compléter l'arbre pondéré de probabilité correspondante à cette situation.
2) Cinq clients se présentent au glacier et passent leur commande de glace chacun indépendamment des autres.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de glace de parfum Américain que ces élèves achètent.
a) Préciser la loi de probabilité de X ainsi que ces paramètres.
b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.
c) Qu'elle est la probabilité que 3 exactement de ces élèves achètent des glaces de parfum Américain ?

PROBLEME

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$
1) Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = 2xe^{2x} + 1$.
Démontrer que h est solution de (E).
2.a)Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $\varphi = f - h$ est solution de (F). :$y' - 2y = 0$.
a) Résoudre (F).
b) En déduire les solutions de (E)
c) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + 1$

1-a) Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) Étudier le sens de variations de f, puis dresser son tableau de variation.

3) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

4) Construire $(\mathcal{C})$, courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 2cm).

Partie C

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $1 - f(x) \geq 0$.

2) On considère l'intégrale I$= 4\int_0^{1/2}[1 - \mathrm{f}(x)]\mathrm{d}x$.

a) Interpréter graphiquement I puis calculer I.

b) Déterminer l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (Δ) d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$

SUJET V

Exercice 1

Le tableau suivant représente les notes obtenues par cinq élèves de la Tle D1 en mathématiques et en sciences physiques lors du dernier devoir.

On désigne par x_i la note en mathématiques et y_i la note en sciences physiques.

$note\ x_i$	7	10	11	13	16
$note\ y_i$	8	9	12	12	13

1) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G.

3) Calculer $V(x)$; $V(y)$ et $COV(x, y)$

4) Calculer r le coefficient de corrélation linéaire entre les variables x et y.

Interpréter le résultat obtenu.

5) a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et celle de x en y.

b) Tracer $(\mathcal{D})$.

6) Suivant cet ajustement, quelle serait la note en sciences physiques d'un élève qui a obtenu 12 en mathématiques.

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$orthonormé d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5 - 4i, z_1 = -1 - 4i;\ z_2 = -4 - i$

1-a) Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que : $S(A_0,) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$

b) Établir que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$

c) En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ωde la similitde S

d) On considère un point M, d'affixe z avec $z \neq\ 0$ et son image M' d'affixe z'.

Vérifier la relation $\omega - z' = i(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega\mathrm{MM}'$.

2) Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1}est définie par $A_{n+1}\ = S(A_n)$et on pose : $u_n = A_nA_{n+1}$.

a) Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points $A_3, A_4,\ A_5, A_6$

b) Démontrer que la suite (u_n)est géométrique.

3) La suite $(v_n\ )$est définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

a) Exprimer v_n en fonction de n.

b) La suite v_n est elle convergente ?

4) a)Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle ΩA_nA_{n+1}.

b) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n : si $n\ > p$ alors $r_n < 10^{-2}$

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O ,I,J).(Unité graphique :5Cm)

PARTIE A

On considère la fonction g définie et dérivable sur IR par : $g(x) = -2 + 2e^{-x} + e^{-2x}$.

1. Justifier que $g(-\ln(-1 + \sqrt{3})) = 0$.

2. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.(On ne demande pas de calculer les limites de g en l'infini)

3. Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty ; -\ln(-1+\sqrt{3})\right[; g(x) > 0 \\ \forall x \in \left]-\ln(-1+\sqrt{3}) ; +\infty\right[; g(x) < 0 \end{cases}$

PARTIE B

On considère la fonction f définie et dérivable surIR par : $f(x) = -5 + 2e^{-x} + \frac{6}{1+e^{-x}}$. et de représentation graphique (C).

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
   b) Calculer la limite en $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$.Donner une interprétation graphique du résultat.
2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$
   b) Etudier la position relative de (C) et (D).
3. a) Démontrer que pour tout x élément deIR ; $f'(x) = \frac{-2e^{-x}g(x)}{(1+e^{-x})^2}$.
   b) En déduire les variations de f.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
5. a) Résoudre dansIR l'équation : $f(x) = 0$.
   b) En déduire que (C) coupe l'axe des abscisses aux points O et A. (On donnera les coordonnées de A)
6. Placer A ,construire (D) ;(T) et la courbe (C).

PARTIE C

Soit F la fonction définie et dérivable sur IR par : $F(x) = -5x - 2e^{-x} + 6\ln(1 + e^{x})$.

1. a) Démontrer que F est une primitive sur IR de f.
   b) Démontrer que pour tout x élément deIR , $F(x) = x - 2e^{-x} + 6\ln(1 + e^{-x})$.
2. Soit γ un nombre réel strictement positif. On désigne par A(γ) l'aire en Cm^2 de la partie du plan délimitée par la droite (D) ,la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \gamma$
   a) Calculer A(γ).
   b) Calculer la limite de A(γ) en $+\infty$.

LES NEUF DERNIERS SUJETS DU BAC ENTIEREMENT RESOLUS

EXAMEN 1 : Bac D Session normale 2017

Exercice 1

Dans le cadre du recensement portant sur le nombre de travailleurs dans les champs d'hévéa, un agent recenseur a visité huit (08) exploitations. Un exploitant voudrait estimer le nombre de travailleurs que prendrait une exploitation de $16\ ha$ d'hévéa. Pour cela l'agent recenseur a recueilli les informations consignées dans le tableau ci-dessus.

Nombre x de travailleurs	2	4	4	5	7	7	8	8
Superficie exploitée y en (ha)	3	5	6	7	10	11	8	12

1) Représente le nuage de points correspondant à la série statistique double $(X;Y)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On prendra sur l'axe des abscisses $1cm$ pour un travailleur et sur l'axe des ordonnées $1cm$ pour une superficie de $1\ ha$.

Pour les questions 2), 3) ; 4) et 5), les résultats seront arrondis à l'ordre 2.

2) Justifie que le point moyen a pour couple de coordonnées $(5{,}63; 7{,}75)$.

3) On note $V(X)$ la variance de X, $V(Y)$ la variance de Y et $COV(X;Y)$ la covariance de X et Y.

Justifie que : $V(X) = 4{,}18$; $V(Y) = 8{,}44$ et $Cov(X;Y) = 5{,}37$.

4.a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (X, Y).

b) Interpréter le résultat obtenu précédemment.

5.a) Justifie qu'une équation de la droite $(\mathcal{D})$d'ajustement de Y en X par la méthode des moindres carrées est :

$y = 1{,}28x + 0{,}54$.

b) Tracer $(\mathcal{D})$ sur le graphique précédent.

6) Utilise l'ajustement précédent pour répondre à la préoccupation de l'exploitant. On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est $2\ cm$.

1) Résous l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + (1-3i)Z - 4 = 0$.

2) On pose : $\forall\ z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (2+2i)z - 8i$.

a) Justifie que $P(-2i) = 0$

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$.

c) Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.

3) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $-2i$; $-2+2i$ et $1+i$. on note D le symétrique de A par rapport au point O.

a) Place les points A, B, C et D dans le plan complexe.

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Problème

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$. On note $(\mathcal{C})$la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est $2cm$.

1.a) Justifie que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu précédemment.

2.a) Calcule : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.

3) On suppose que f est dérivable et on note f' sa fonction dérivée.

a) Démontrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f^{'}(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$.

b) Justifie que : $\forall\ x \in \left]-\infty; 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1+\sqrt{2}\right[, f^{'}(x) > 0$; $\forall\ x \in \left]1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right[, f'(x) < 0$

c) Dresser le tableau de variation de f. $on\ ne\ calculera\ pas$ $f(1-\sqrt{2})$ et $f(1+\sqrt{2})$

4) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 est : $y = -x + 1$.

5) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (1+x)e^{-x} - 1$.

a) On suppose que h est dérivable et on note h' sa fonction dérivée. Calculer $h^{'}(x)$.
b) Etudier les variations de h.
c) Calculer $h(0)$ et dresser le tableau de variation de h. On ne demande pas de calculer les limites de h.
d) Justifie que $\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) \leq 0$.
e) Vérifier que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) + x - 1 = (1 - x)h(x)$.
f) Déduis des questions précédentes la position relative de $(\mathcal{C})$ et (T).

6) Tracer la tangente (T) et la courbe $(\mathcal{C})$. *On prendra :* $f\left(1 - \sqrt{2}\right) = 1{,}3$ *et* $f\left(1 - \sqrt{2}\right) = -0{,}4$.

Partie B

Soit λ un nombre réel de l'intervalle $]1; +\infty[$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

1) Démontrer, en utilisant deux intégrations par parties, que : $A(\lambda) = \left(\frac{16}{e} - \frac{4(1+\lambda)^2}{e^{\lambda}}\right) cm^2$.
2) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

EXAMEN 2 : Bac D Session normale 2016

Exercice 1

1) On considère la fonction h dérivable et définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $h(x) = 2x - x^2$.
   a) Démontrer que h est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.
   b) En déduire que l'image de l'intervalle $[0; 1]$ par h est l'intervalle $[0; 1]$
2) Soit u la suite définie par : $u_0 = \frac{3}{7}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.
   a) par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$
   b) Démontrer que la suite u est croissante.
   c) Justifier que la suite u est convergente.
4) On considère la suite v définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = ln(1 - u_n)$
a) Démontrer que v est une suite géométrique de raison 2.
b) Exprimer v_n en fonction n.
c) Calculer la limite de la suite v
d) En déduire la limite de la suite u.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, $(unit\acute{e}\ graphique{:}\ 2cm)$.
On considère la transformation φ du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z^{'} = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

1) Soit Ω le point d'affixe 2.
   a) Vérifier que : $\varphi(\Omega) = \Omega$
   b) Justifier que φ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

2-a) Démontrer que : $\forall\, z \neq 2, \frac{z^{'} - z}{2 - z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.
   b) En déduire que le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en M.
   c) Donner un programme de construction de l'image M' par φ d'un point M donné.

3- a) Placer les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$ dans Le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   Construire les images respective A' et $B^{'}$ de A et B par φ.
   b) On note $z_A, z_B, z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectives des points A, B, A' et B'. Démontrer que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$.
   c) En déduire la nature du quadrilatère $AA'BB'$.

Problème

PARTIE A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2.a) Soit $g^{'}$ la fonction dérivée de g. Justifier que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g^{'}(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}$
   b) Etudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Justifier que $g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$.

d) Dresser le tableau de variation de g.

3.a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α.

b) Vérifier que : $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$.

c) Justifier que : $\forall\, x \in]-\infty;\ \alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha;\ +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), $(unité\ graphique\colon 2cm)$.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1.a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

2.a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

c) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

3.a) f' la fonction dérivée de f. Démontrer que : $\forall\, x \in\ \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.

b) En déduire les variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f. $on\ ne\ calculera\ pas\ f(\alpha)$.

4) Construire $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C})$ sur le même graphique. On précisera les points de $(\mathcal{C})$ d'abscisses $0;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ 4$.

$On\ prendra\ :\ \alpha = 0{,}865$ et $f(\alpha) = 0{,}4$.

5) Soit t un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$. On désigne par $\mathcal{A}(t)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$.

On pose : $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}dx$

a) A l'aide d'une intégration par partie, justifier que : $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}$

b) En déduire $\mathcal{A}(t)$

c) Calculer $\lim_{t\to+\infty} \mathcal{A}(t)$

EXAMEN 3 : Bac D Session normale 2015

Exercice 1

PARTIE I

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par $\forall\ z\ \in \mathbb{C}, p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$.

1.a) Calculer $p(i)$

b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $p(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, de l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i$

3) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) : $p(z) = 0$.

PARTIE II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité $5cm$.

On pose : $z_0 = 2$ et $\forall\ n\ \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1.a) Calculer z_1 et z_2.

b) Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

2) On considère la suite U définie par $\forall\ n\ \in \mathbb{N}$, $U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Justifier que : $\forall\ n\ \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$.

b) Démontrer que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

c) Exprimer U_n en fonction de n.

3) On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$, la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n (n \in \mathbb{N}^*)$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$

a) Calculer l_n.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} l_n$.

Exercice 2

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un moi d'activité, elle constate que :

- Pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est $0{,}6$;
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est $0{,}7$;
- Lorsqu'il n y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est $0{,}4$.

On désigne par A l'évènement « Il y a une affluence de clients » et par B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice »

1) On choisit un jour au hasard.
a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « IL y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».
b) Démontrer que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B est égal à $0{,}58$.
c) Mariam a réalisé un bénéfice.

Calculer la probabilité qu'il ait eu une affluence de clients ce jour là.

$$on\ donnera\ l'arrondi\ d'ordre\ 2\ du\ résultat.$$

2) Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.

a) Déterminer les valeurs prises par X.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

3) Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.
a) Justifier que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $p_n = 1 - (0{,}42)^n$
b) Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n \geq ,9999$.

Problème

PARTIE A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $r(x) = xe^{-x}$.

On considère l'équation différentielle (E): $y' + y = r$

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$.

1) Démontrer que g est solution de l'équation (E).
2) Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$
a) Démontrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (F).
b) Résoudre différentielle (F).
c) En déduire les solutions φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques : $OI = 2cm$, $OJ = 4cm$.

1-a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

2) Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3.a) Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$

b) Étudier les variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 est : $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.

5) Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'axe des abscisses.

6) Représenter graphiquement (T) et $(\mathcal{C})$.

Partie C

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

2.a) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

b) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$.

c) En utilisant la question précédente, calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

EXAMEN 4 : Bac D Session normale 2014

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On note B et C les points d'affixes respectives $3-2i$ et $5+i$. On désigne par φ la similitude directe de centre O qui transforme C en B.

i. a) Démontrer que l'écriture complexe de φ est : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$.
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de φ.
   c) Déterminer l'affixe du point D qui a pour image le point C par φ.

ii. a) Justifier que l'affixe Z_1 du point B_1, image de B par φ est : $\frac{1}{2}(1-5i)$
   b) Justifie que le triangle OBB_1 est rectangle isocèle en B_1

iii. On définit les points suivants : $B_0 = B$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \varphi(B_n)$. On note : z_n l'affixe de B_n
   a) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$
   b) Calculer la distance OB_n en fonction de n.
   c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} OB_n$

Exercice 2

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux étudessupérieurs, le Ministère du Plan d'un pays a diligenté une enquête depuis l'an 2003. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang X de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre Y de diplômés (en milliers)	25	27	30	33	34	35	38	41	43

1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; I; J)$. $(Unité\ graphique: 1cm)$

$$On\ prendra\ pour\ origine\ du\ graphique\ le\ point\ \Omega\begin{pmatrix}0\\24\end{pmatrix}$$

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G de la séris statistique (X, Y)

3) Justifier que :

a) La variance de X est $\frac{20}{3}$

b) La covariance de X et Y est $\frac{44}{3}$

4 -a) Sachant que la variance de Y est égale à $\frac{98}{3}$, déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire.

b)Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.

5) Soit (D) la droite d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

a) Déterminer une équation de (D).

b) Tracer (D)

6) On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes. Donner une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

Problème

Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$. L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + (ax+b)e^{-x}$où a et b sont des nombres réels.

Dans le plans muni du repère $(O; I; J)$, on désigne par :

$(\mathcal{C})$ la courbe représentative de g ;

(D) la droite d'équation $y = x$.

1-a) On donne : $g(0) = 1$. Déterminer la valeur de b.

c) On admet que la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite (D). Déterminer la valeur de a.

2- Soit h la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = e^x - x$

a) Soit h' la fonction dérivée de h.
Calculer $h'(x)$, pour tout x élément de $\mathbb{R}$

b) Dresser le tableau de variation de h.

$$On\ ne\ calculera\ pas\ les\ limites\ de\ h\ en\ -\infty\ et\ en +\infty$$

c) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = x + (x+1)e^{-x}$.

1-a) Calculer la limite de f en $-\infty$

b) Justifier que : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

c) Donner une interprétation graphique de ces résultats.
2-a) Calculer la limite de f en $+\infty$
b) Démontrer que (D) est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$
c) Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (D)
3-a) On désigne par f' la fonction dérivée de f
2-a) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}h(x)$
b) Déterminer le sens de variation de f.
c) Dresser le tableau de variation de f.
4) Construire sur le même graphique (T), (D) et $(\mathcal{C})$
5-a) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculer$(f^{-1})'(1)$
c) Construire (Γ) la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que $(\mathcal{C})$

Partie C

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^{n}(t+1)\,e^{-t}dt$

1) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = (-2-n)e^{-n} + e$
5) Calculer l'aire $\mathcal{A}_n$ en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$
6) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$

EXAMEN 5 : Bac D Session normale 2013

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on désigne par K, A et B les points d'affixes respectives $z_1 = 2, z_2 = 4 + 2i$ et $z_3 = 2 + 4i$. L'unité graphique est 2cm.

1-a) Placer les points K, A et B

b)Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

2) On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en

a) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $Z' = (1+i)Z - 2i$

b) Déterminer les affixes respectives des points I' et J', images respectives des points I et J puis placer I' et J'

3) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude directe S.

4) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 2.

a) Tracer $(\mathcal{C})$.

b) Déterminer le centre et le rayon de $(\mathcal{C}')$, image de $(\mathcal{C})$ par S

c) Construire $(\mathcal{C}')$

5-a) Déterminer puis construire l'image par S de la droite (IJ).

on pourra caractériser l'image par S de la droite (IJ) par deux de ses points.

b)On désigne par E le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et la droite (IJ) d'abscisse négative. Placer E et l'image E' de E par S. Justifier la position du point E'.

Exercice 2

On considère la suite numérique (u) définie par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n \end{cases}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

$1 -$ Déterminer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

$2 -$ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et de représentation graphique (D).

a) Tracer (D) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.
b) Placer u_0 sur l'axe (OI).
c) A l'aide de (D) et (Δ), placer les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite u sur l'axe (OI)

$3 - a)$ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n \leq 4$

$b)$ Démontrer que la suite (u) est croissante.

$c)$ En déduire que la suite (u) est convergente.

$4 -$ On considère la suite (v) définie par $v_n = u_n - 4$, pour tout nombre entier naturel n.

Démontrer que la suite (v) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

$5 -$ On pose, pour tout nombre entier naturel n :

$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v)

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u)

a) Déterminer une expression de T_n en fonction de n.

b) Justifier que : $S_n = 2(\sqrt{2}-4)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) + 4(n+1)$.

c) Déterminer la limite de S_n

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty; 1[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + ln(1-x)$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f

$1-a)$ Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$b)$Calculer $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

$c)$ Calculer la limite de f à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat.

$2-a)$ Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, calculer $f^{'}(x)$.

$b)$ Démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.

$c)$ Dresser le tableau de variation de f.

$3-a)$ Démontrer que l'équation(E) : $x \in\ ]-\infty; 1[, f(x) = 0$ admet une solution unique α.

$b)$ Justifier que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$

$4-a)$ Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$.

$b)$ On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$
$Arrondi\ d^{'}ordre 1\ de\ f(x)$	$4{,}1$	$2{,}2$	$0{,}7$	$0{,}1$	$-0{,}3$	$-0{,}7$	$-1{,}2$	$-1{,}4$	$-1{,}8$

Tracer (T) et $(\mathcal{C})$

$\boldsymbol{on\ pourra\ faire\ la\ figure\ dans\ la\ partie\ du\ plan\ caractérisée\ par}$ $\begin{cases} \boldsymbol{-3 \leq x \leq 1} \\ \boldsymbol{-4 \leq y \leq 6} \end{cases}$

5) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

$a)$ Calculer $\int_\alpha^0 ln(1-x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

$b)$ Démontrer que la valeur de $\mathcal{A}$ en unités d'aire est : $\mathcal{A} = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)ln(1-\alpha)$

$c)$ Déterminer en cm^2 l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de $\mathcal{A}$ pour $\alpha = -0{,}65$

6) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni du repère (O, I, J).

a) Calculer $f(-1)$

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en $ln2$ existe puis le calculer.

c) Construire la courbe $(\mathcal{C}')$ et sa tangente (Δ) au point d'abscisse $ln2$ sur la figure de la question $4-b)$.

EXAMEN 6 : Bac D Session normale 2012

Exercice 1

Madame kouamé, statisticienne à la retraite, crée une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels. Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2011 elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2010. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Type de colliers	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix x_i de vente en centaines de francs CFA du collier de type i	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre y_i de dizaines de colliers vendus au prix x_i	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par : X le caractère « prix de vente du collier »
Y « le caractère « nombre de colliers vendus au prix X ».

1) Représenter graphiquement le nuage de points associer à la série statistique double de caractère (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On prendra 2 cm pour dix centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour deux dizaines de colliers sur (OJ).

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3) a) Calculer la variance V(x) de X.

b) Calculer la covariance COV(x ; y) de la série statistique double de caractère(x ; y).

c) On admet que v(y)=14,50. Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à -0,99.

4) Soit $(\mathcal{D})$ la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

a) Justifier que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de $(\mathcal{D})$.est égal à -0,23.

b) Démontrer qu'une équation de la droite de la droite $(\mathcal{D})$ est : $-0{,}23x + 29{,}94$

5) Pour l'année 2011, Madame kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11 500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé?

Exercice 2

On considère la suite numérique U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) \end{cases}$

1) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans la plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) où les unités respectives sur (OI) et (OJ) sont 4cm et 2cm. La courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) d'équation $y = x$ sont tracées sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

a) Représenter sur l'axe des abscisses (OI) les termes $U_1, U_2,$ et U_3 de la suite U en utilisant la La courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D).

b) Quelle conjecture peut-on faire quand à la convergence de la suite U ?

2) On admet que f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$

a) Démontrer que $f([2;3]) \subset [2;3]$

b) En utilisant un raisonnement par récurrence, démontré que pour tout entier $n \geq 1$, $2 \leq U_n \leq 3$.

3)

a) Démontrer que la suite U est décroissante.

b) En déduire que la suite U est convergente.

4) On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$.

a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $V_{n+1} = (V_n)^2$.

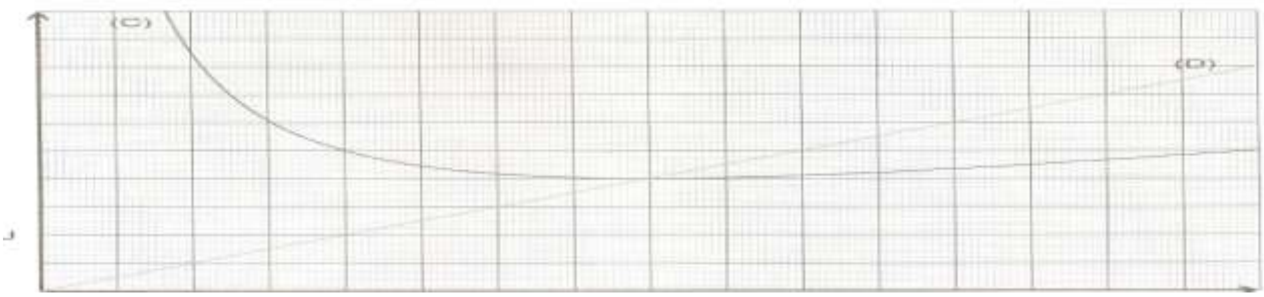
b) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$.

c) Calculer V_1 puis exprimer V_n en fonction de n.

d) Exprimer U_n en fonction de n.

e) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} V = 0$. En déduire la limite de U.

Feuille annexe à rendre avec la copie



PROBLEME

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = e^x + 2lnx$

$1 - a)$ Déterminer $\lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$b)$ Calculer $g'(x)$.

$c)$ Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

$2 - a)$ Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$.

$b)$ Vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

$c)$ Démontrer que : $\forall\, x \in\ ]0;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall\, x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$par : $\begin{cases} f(x) = e^x + 2xlnx - 2x & si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, j). L'unité graphique est 4cm.

$1 - a)$ Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$b)$ Interpréter graphiquement les résultats.

$2 - a)$ Démontrer que f est continue en 0.

$b)$ Démontrer que : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$

$c)$ La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifie la réponse.

$d)$ Interpréter graphiquement le résultat de la question $2.b)$.

$3 -$ On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$a)$ Démontrer que : $\forall\, x \in\ ]0;+\infty[, f'(x) = g(x)$.

$b)$ En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.

$4 -$ Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[0; 2]$. *(On prendra $\alpha = 0{,}45$ et on admettra que la courbe $(\mathcal{C})$coupe la droite (OI)en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6.)*

$5 - a)$On pose $K = \int_1^2 xlnxdx$. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $K = 2ln2 - \frac{3}{4}$

$b)$ Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

Calculer $\mathcal{A}$ puis donner l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

EXAMEN 7 : Bac D Session normale 2011

Exercice 1

On considère la suite numérique (v_n)définie surN^* par :$v_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$

1- a) Démontrer que la suite (v_n)est convergenteet donner sa limite

b) Démontrer que la suite (v_n)est croissante.

c) Démontrer que : $\forall n \in N^*, \frac{3}{4} \leq v_n \leq 1$.

2) On pose pour tout entier naturel n : $a_n = v_1 \times v_2 \times v_3 \ldots \times v_n$.

a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in N^*$, on a : $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

b) En déduire la limite de la suite (a_n).

3) On pose pour tout entier naturel n : $b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n)$.

a) Démontrer que(b_n) est une suite à termes négatifs.

b) Calculer la limite de la suite (b_n).

Exercice 2

La société « Gnamienlait » de Gnamien produit des sachets de lait caillé.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g). La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci-dessous.

$x_i(en\ g)$	220	230	240	250	260	270	280
P_i	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

a et b sont des nombres réels,

x_i représente la masse du sachet de lait caillé.

P_i la probabilité qu'un sachet de ce lait ait la masse x_i.

1) a)-Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E(X)}$de X en fonction de a et b.

b)-Sachant que $\mathrm{E(X)} = 250$ justifier que a = 0,14 et b = 0,33.

Dans la suite de l'exercice on conservera les valeurs de a et b trouvées à la question 1.b).

2) Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société. Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250 g.

3) Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard et de façon indépendante cinq sachets de lait caillé.

Calculer la probabilité qu'elle ait choisit exactement trois sachets de lait caillé de 220 g.

On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat.

4) Les sachets de lait sont contrôlés par une machine. Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse strictement inférieur à 250 g.

- Si un sachet de lait caillé a 240 g, la probabilité qu'il soit éliminé est 0,7.
- Si un sachet de lait caillé a 230 g, la probabilité qu'il soit éliminé est 0,8.
- Si un sachet de lait caillé a 220 g, il est systématiquement éliminé.
- Si un sachet de lait caillé a une masse supérieure ou égale à 250 g, il est systématiquement accepté.

a) Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est 0,098.

b) Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait de cette société soit éliminé.

PROBLEME

PARTIE A

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + lnx$.

$1 - a)$ Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

$b)$ Calculer $\lim_{x \to 0_>} g(x)$

$2 - a)$ Démontrer que : $\forall\ x\ \in\ ]0; +\infty[, g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

$b)$ En déduire le sens de variation de g.

$c)$ Dresser le tableau de variation de la fonction g.

$3-a)$Démontrer que l'équation $x \in \left]0;+\infty\right[, g(x)=0$ admet une solution unique α.
$b)$ justifier que $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$.
$c)$ Démontrer que : $\forall\, x \in \left]0;\alpha\right[, g(x) < 0$ et $\forall\, x \in \left]\alpha;+\infty\right[, g(x) > 0$.

PARTIE B

On considère la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $f(x)=\left(\frac{1}{x}-lnx\right)e^{-x}$.
On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,j). (Unités graphiques $OI=2cm$ et $OJ=10cm$)
$1-a)$ Calculer $\lim_{x\to 0>} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.
$b)$ Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat
$2-$ Démontrer que : $f(\alpha)=-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$
$3-a)$ Démontrer que : $\forall\, x \in \left]0;+\infty\right[, f'(x)=e^{-x}.g(x)$.
$b)$ En utilisant la partie A, déterminer les variations de f
$c)$ Dresser le tableau de variation de f
$4-$ Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1 est : $y=-\frac{3}{e}x+\frac{4}{e}$
$5-$ Construire la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C})$ dans le plan muni du repère (O,I,j). On prendra $\alpha=2{,}6$.

PARTIE C

$1-$ Soit h la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $h(x)=e^{-x}.lnx$
Démontrer que h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$
$2-$ Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 0$.
$a)$ Calculer , en cm^2 et en fonction de λ, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équation $x=3$ et $x=\lambda$.
$b)$ Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$

EXAMEN 8 : Bac D Session normale 2010

Exercice 1

Partie A

On considère dans $\mathbb{C}$: l'équation : (E) : $4Z^3-6i\sqrt{3}Z^2-3(3+i\sqrt{3})Z-4=0$
1) Déterminer les racines carrées de $6+6i\sqrt{3}$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$: l'équation $2Z^2-(1+3i\sqrt{3})Z-4=0$
$3-a)$ Développer, réduire et ordonner $(2Z+1)\left[2Z^2-(1+3i\sqrt{3})Z-4\right]$
$b)$ En déduire les solutions de (E).
4) Soit $Z_0=-\frac{1}{2}$; $Z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $Z_2=1+\sqrt{3}i$
Exprimer chacun des nombres complexes Z_0 ; Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$où l'unité est 1cm, on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $1+\sqrt{3}i$
S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.
$1-a)$ Déterminer l'écriture complexe de S
$b)$ Justifier que $S(M_0)=M_1$ et $S(M_1)=M_2$
2) Soit M_n un point du plan d'affixe z_n. On pose pour tout nombre entier naturel $n, M_{n+1}=S(M_n)$
Justifier que $z_{n+1}=(1-\sqrt{3}i)z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1}
3)On considère la suite U_n définie pour tout entier naturel n par $U_n=|z_n|$
$a)$ Démontrer que U_n est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
$b)$ Justifier que la distance $OM_{12}=2048$

Exercice 2

On test un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.
Pour cela 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.
Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8.
On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1- Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
2- Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.

3- On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

4- On contrôle 5 individus au hasard.

a- Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

5- On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier naturel non nul). Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + xlnx$.

$1 - a)$ Justifier que : $\forall\ x\ \in\ ]0;+\infty[, g'(x) = 1 + lnx$

$b)$ Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. ($On\ calculera\ pas\ les\ limites\ de\ g$)

2) En déduire que : $\forall\ x\ \in\ ]0;+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x}{1+xlnx} \end{cases}$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). ($Unité\ 4\ cm$)

$1 - a)$ Etudier la continuité de f en 0.

$b)$ Etudier la dérivabilité de f en 0.

$c)$ Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point O est : $y = x$

$d)$ Démontrer que : $(\mathcal{C})$ est au dessus de (T) sur $]0;1[$ et $(\mathcal{C})$ est en dessous de (T) sur $]1;+\infty[$

2) Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

$3 - a)$ On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Démontrer que : $\forall\ x\ \in\ ]0;+\infty[f'(x) = \frac{1-x}{(1+xlnx)^2}$.

$b)$ En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

$4)$ Construire la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C})$ dans le plan muni du repère (O, I, J)

Partie C

$1 - a)$ Justifier que $\forall\ x\ \in\ ]0;+\infty[, f(x) \leq 1$.

$b)$ Démontrer que $\forall\ x\ \in\ ]1;e[, 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$

2) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Démontrer que : $16(e-1) + 16ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq \mathcal{A} \leq 16(e-1)$

EXAMEN 9 : Bac D Session normale 2009

Exercice 1

L'entreprise Ivoirbois, spécialisée dans l'industrie du bois, envisage de faire des prévisions pour l'année 2007 du coût de production des feuilles de contre plaqués en fonction du chiffre d'affaires. Elle dispose à cet effet des statistiques résumées dans le tableau ci-dessous :

Années	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Chiffres d'affaires x (en millions de francs)	350	380	500	450	480	650	700
Cout de production y (en millions de francs)	40	45	50	55	60	65	70

1) Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double(x ; y).

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J). (On prendra 1 cm pour 50 millions de francs en abscisses et 1 cm pour 5 millions de francs en ordonnées).

2 a) Calculer le chiffre d'affaires moyen $\overline{X}$

b) Calculer le coût moyen de production $\overline{Y}$

3 a) Vérifier qu'un arrondi à l'entier de la COV(x,y) de la série statistique est égale à 1193.

b) Justifier l'existence d'un ajustement linéaire entre x et y.

4 a) Déterminer une équation de la droite (Δ)d'ajustement de y en fonction de x par la méthode des moindre carrés.

b) Construire (Δ) dans le repère (O, I, J).

5) Utiliser l'ajustement précédent pour prévoir le coût de production de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 est de 800 millions de francs.

Exercice 2

Soit la suite définie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 \end{cases}$

$1 -$ Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur l'axe des abscisses les termes $U_0;\ U_1;\ U_2$ et U_3 de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}(Unité\ graphique\ 2\ cm)$.

$2 - a)$ Démontrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

$b)$ Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$3 -$ Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\ n \in\ \mathbb{N}, V_n = U_n - \frac{5}{2}$

$a)$ Démontrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$b)$ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

$c)$ Déterminer la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

$1 - a)$ Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1

$b)$ Déterminer la limite de g en $-\infty$.

$2 - a)$ Démontrer que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

$b)$ Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

$3 - a)$ Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α.

$b)$ Justifier que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

$4 -$ En déduire que : $\forall\ x\ \in\ ]-\infty; \propto[, g(x) > 0$ et $\forall\ x\ \in\ ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). $(Unité\ 2\ cm)$

$1 -$ Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$2 - a)$ Démontrer que f est une primitive de g.

$b)$ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

$3 - a)$ Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

$b)$ Etudier la position relative de (D) et $(\mathcal{C})$.

$4 -$ Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

$5 -$ Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.

$6 -$ Démontrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

$7 -$ Justifier que, pour tout nombre réel x, $f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

$8 -$ On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On appelle β l'une de ces solutions.

Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution.

$9 -$ Tracer $(D), (T)$ et $(\mathcal{C})$. $(On\ prendra\ \alpha = 0{,}4\ et\ \beta = 2{,}5)$

Partie C

Soit λ un nombre réel strictement positif et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C})$, la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

$1 -$ Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

$2 -$ Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

EXAMEN 1 : Bac D Session normale 2017

Exercice 1

1) Représentons le nuage de points correspondant à la série statistique double $(X;Y)$

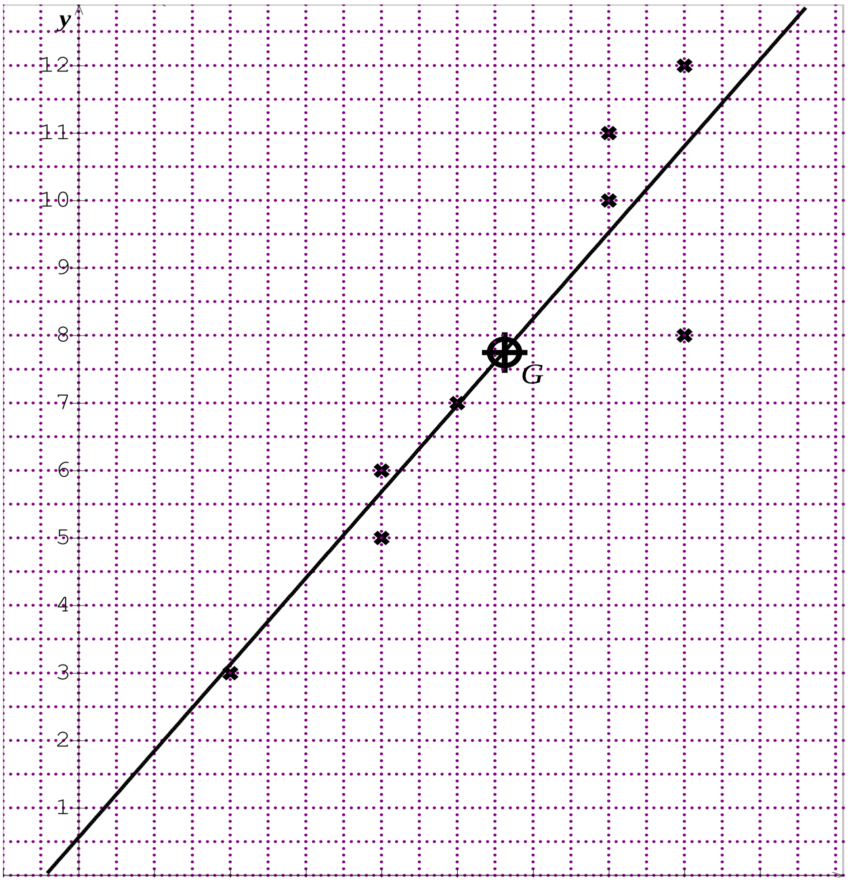


Tableau de calcul

Tableau de calcul

x_i	2	4	4	5	7	7	8	8	**45**
y_i	3	5	6	7	10	11	8	12	**62**
${x_i}^2$	4	16	16	25	49	49	64	64	**287**
${y_i}^2$	9	25	36	49	100	121	64	144	**548**
$x_i \times y_i$	6	20	24	35	70	77	64	96	**392**

.

2) Justifions que le point moyen a pour couple de coordonnées $(5,63; 7,75)$.

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{45}{8} = 5,625 \approx 5,63 \qquad ; \qquad \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{62}{8} = \frac{31}{4} = 7,75$$

Alors le point $G(5,63 : 7,75)$

3) Justifions que : $V(X) = 4,18$; $V(Y) = 8,44$ et $Cov(X;Y) = 5,37$.

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{287}{8} - (5,63)^2 = \frac{33,4248}{8} = 4,1781$ **Alors** $V(X) \approx 4,18$

$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{{y_i}^2}{n} - \overline{y}^2 = \frac{548}{8} - (7,75)^2 = \frac{67,5}{8} = 8,4375$ **Alors** $V(Y) \approx 8,44$

$Cov(X;Y) = \sum_{i=1}^{6} \frac{x_i \times y_i}{n} - \overline{x} \times \overline{y} = \frac{392}{8} - 5,63 \times 7,75 = \frac{42,94}{8} = 5,3675$ **Alors** $Cov(X;Y) \approx 5,37$

4.a) Calculons le coefficient de corrélation linéaire de la série (X,Y)

$r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \frac{5,37}{\sqrt{4,18 \times 8,44}} = 0,904471$ Alors $r \approx 0,90$

b) Interprétons le résultat obtenu précédemment

$0,87 < |r| < 1$ donc la corrélation linéaire est forte . On peut donc faire un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrées.

5.a) Justifions qu'une équation de la droite $(\mathcal{D})$d'ajustement de Y en X par la méthode des moindres carrées est :

$y = 1,28x + 0,54.$

$y = ax + b$ avec $a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{5,37}{4,18} = 1,28$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$

$$b = 7,75 - 1,28 \times 5,63 = 0,54$$

Alors $\left(D_{y/x}\right)$ $y = 1,28x + 0,54$

b) Traçons $(\mathcal{D})$ sur le graphique précédent.

La droite $(\mathcal{D})$passe par le point moyen $G(5,63; 7,75)$

x	$5,63$	6
y	$7,75$	$8,22$

6) Utilisons l'ajustement précédent pour répondre à la préoccupation de l'exploitant. On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat.

Pour $16\ ha\ on\ a$: $16 = 1,28x + 0,54$

$$x = \frac{16 - 0,54}{1,28} = 12,078125$$

$x = 12$. donc 12 travailleurs prendraient une exploitation de $16\ ha$ d'hévéa.

Exercice 2

1) Résolvons l'équation : $z \in \mathbb{C}, z^2 + (1 - 3i)Z - 4 = 0.$

son discriminant est : $\Delta = (1 - 3i)^2 - 4 \times 1(-4) = 1 - 6i - 9 + 16 = 8 - 6i$

Déterminons les racines carrées de $\Delta = 8 - 6i$

En posant $z = x + iy\ on\ a$: $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = |(x + iy)^2| = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$

$$\Delta = 8 - 6i;\ |\Delta| = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$z^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases}$; En ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient : $2x^2 = 18$ alors

$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3\ ou\ x = -3$

Pour $x = 3$; $y = -1$ et Pour $x = -3$; $y = 1$

Alors les deuxracinescarrées de $\Delta\ sont$: $\sigma = 3 - i\ \ et\ -\sigma = -3 + i$

$Z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a} = \frac{-1+3i-3+i}{2} = -2 + 2i$ et $Z_1 = \frac{-b+\sigma}{2a} = \frac{-1+3i+3-i}{2} = 1 + i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{1 + i; -2 + 2i\}$$

2) On pose : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 + (1 - i)z^2 + (2 + 2i)z - 8i.$

a) Justifions que $P(-2i) = 0$

$P(-2i) = (-2i)^3 + (1 - i)(-2i)^2 + (2 + 2i)(-2i) - 8i$

$P(-2i) = 8i - 4 + 4i - 4i + 4 - 8i$

$P(-2i) = 0$

b) Déterminons les nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$.

$P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$

$P(z) = z^3 + az^2 + bz + 2iz^2 + 2aiz + 2bi$

$P(z) = z^3 + (a + 2i)z^2 + (b + 2ai)z + 2bi$

Par identification : $\begin{cases} a + 2i = 1 - i \\ b + 2ai = 2 + 2i \\ 2bi = -8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 3i \\ b = -4 \end{cases}$

$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z + 2i)(z^2 + (1 - 3i)z - 4)$

c) Déduisons des questions précédentes les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.

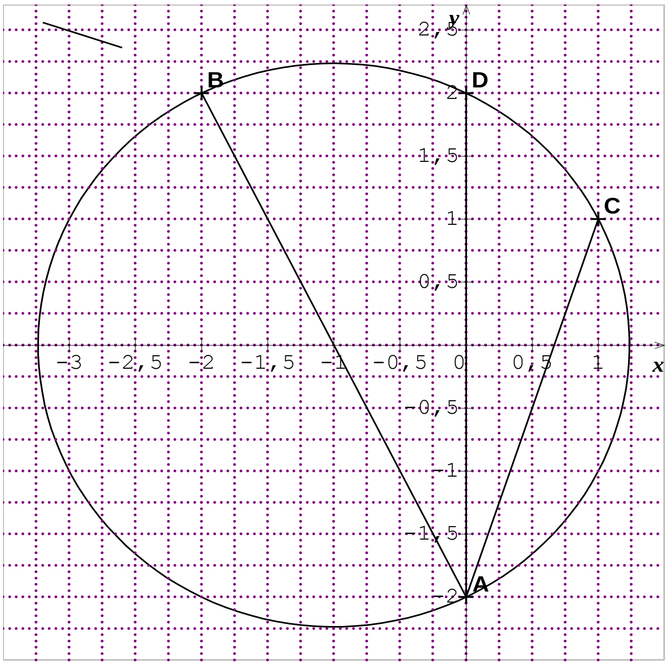
$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 2i)\left(z^2 + (1 - 3i)z - 4\right) = 0$

$z + 2i = 0$ ou $z^2 + (1 - 3i)z - 4 = 0$

$z = -2i$ ou $z = -2 + 2i$ ou $z = 1 + i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-2i; -2 + 2i; 1 + i\}$$

3) a) Place les points A, B, C et D dans le plan complexe



b) Démontrons que le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

Le triangle ABC est rectangle isocèle en C si et seulement si : $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = i$ ou $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = -i$

$\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} == \frac{-2+2i-1-i}{-2i-1-i} = \frac{-3+i}{-1-3i} = \frac{(-3+i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)} = \frac{3-9i-i-3}{1+9} = \frac{-10i}{10} = -i$

$\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = -i$ Alors le triangle ABC est rectangle isocèle en C

c) Démontrons que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si : $\frac{\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}}{\frac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_D}} \in \mathbb{R}^*$

Or : $\frac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_D} = \frac{-2+2i-2i}{-2i-2i} = \frac{-2}{-4i} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$

$\frac{\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}}{\frac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_D}} = \frac{-i}{-\frac{1}{2}i} = 2 \in \mathbb{R}^*$; alors les points A, B, C et D sont cocycliques

Problème

Partie A

1.a) Justifions que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[(1 - x^2)e^{-x}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left(e^{-x} - x^2 e^{-x}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{x^2 e^x}\right) = 0$

Car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right) = 0 \\ \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2 e^x}\right) = 0 \end{cases}$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) Donnons une interprétation graphique du résultat obtenu précédemment.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

2.a) Calculons : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et : $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left[(1 - x^2)e^{-x}\right] = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty}(1 - x^2) = -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-x^2)e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{x}-x\right)e^{-x}\right]=+\infty$ $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-x\right)=-\infty\\ \lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty\end{cases}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

b) Donnons une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ **et** $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ **alors la courbe** $(\mathcal{C})$**admet une branche parabolique de direction** (OJ)**en**

3) a) Démontrer que : $\forall\, x\in\mathbb{R}, f'(x)=(x^2-2x-1)e^{-x}$

$\forall\, x\in\mathbb{R}, f'(x)=[(1-x^2)e^{-x}]'=(1-x^2)'e^{-x}+(1-x^2)(e^{-x})'=-2xe^{-x}-(1-x^2)e^{-x}$

Donc $\forall\, x\in\mathbb{R}, f'(x)=(x^2-2x-1)e^{-x}$

b) Justifions que : $\forall\, x\in\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right[\cup\left]1+\sqrt{2}\right[, f'(x)>0$; $\forall\, x\in\left]1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right[, f'(x)<0$

$\forall\, x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0$ **alors le signe de** $f'(x)$ **dépend de** x^2-2x-1

$x^2-2x-1=0$ **a pour discriminant** $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$ $\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$

c) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(1-\sqrt{2})$	↘	$f(1+\sqrt{2})$	↗	0

4) Démontrons qu'une équation de la tangente (T) **à** $(\mathcal{C})$ **au point d'abscisse 0 est :** $y=-x+1$.

$(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ **avec** $x_0=0$; $f'(x_0)=-1$ *et* $f(x_0)=1$

$(T): y=-(x-0)-1$ **Alors** $(T): y=-x+1$

5) Soit h **la fonction définie sur** $\mathbb{R}$ **par :** $h(x)=(1+x)e^{-x}-1$.

a) **On suppose que** h **est dérivable et on note** h' **sa fonction dérivée. Calculons** $h'(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}, h'(x)=[(1+x)e^{-x}-1]'=(1+x)'e^{-x}+(1+x)(e^{-x})'=e^{-x}-(1+x)e^{-x}$

Donc $\forall\, x\in\mathbb{R}, h'(x)=-xe^{-x}$

b) **Etudions les variations de** h.

$\forall\, x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0$ **alors le signe de** $h'(x)$ **dépend de** $-x$

Donc $\forall\, x\in\left]-\infty;0\right[, h'(x)>0$; $\forall\, x\in\left]0;+\infty\right[, h'(x)<0$

c) **Calculons** $h(0)$

$$h(0)=(1+0)e^0-1=1-1=0$$

Donc $h(0)=0$

Dressons le tableau de variation de h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	
$h(x)$		↗	0	↘	

d) **Justifions que** $\forall\, x\in\mathbb{R}, h(x)\le 0$

$\forall\, x\in\mathbb{R}, h$ **admet un maximum en 0 égal à 0. Donc** $\forall\, x\in\mathbb{R}, h(x)\le 0$

e) **Vérifions que :** $\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x)+x-1=(1-x)h(x)$

$\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x)+x-1=(1-x^2)e^{-x}+x-1=(1-)(x+1)e^{-x}+x-1=(1-x)[(x+1)e^{-x}-1]$

Donc $f(x)+x-1=(1-x)h(x)$

f) **Déduisons des questions précédentes la position relative de** $(\mathcal{C})$ **et** (T)

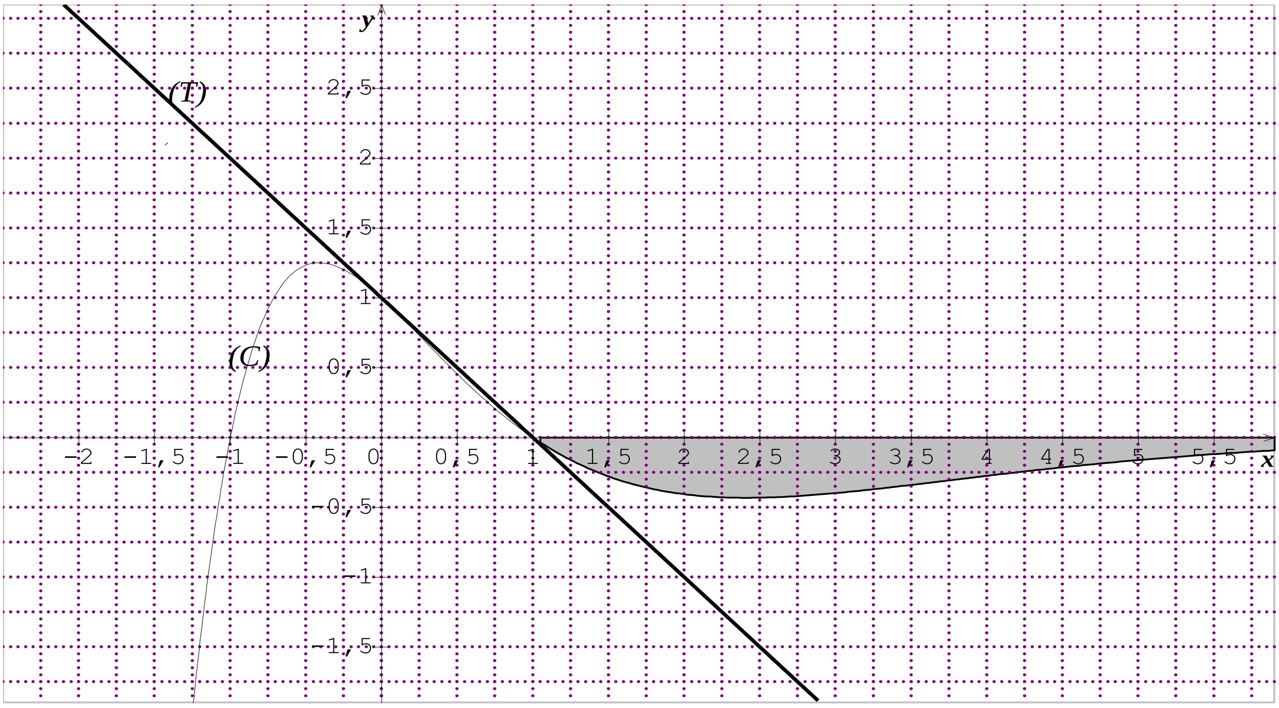
$\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x)-y=f(x)+x-1=(1-x)h(x)$

Or $\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) \leq 0$

Donc $\forall\, x \in]-\infty; 1[, f(x) - y < 0$; alors la courbe$(\mathcal{C})$ est en dessous de la tangente(T)

Et $\forall\, x \in]1; +\infty[, f(x) - y > 0$ alors la courbe$(\mathcal{C})$ est au dessus de la tangente(T)

6) Tracons la tangente (T) et la courbe $(\mathcal{C})$. *On prendra :* $f(1-\sqrt{2}) = 1,3$ *et* $f(1-\sqrt{2}) = -0,4$.



Partie B

Soit λ un nombre réel de l'intervalle $]1; +\infty[$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

1) Démontrons, en utilisant deux intégrations par parties, que : $A(\lambda) = \left(\frac{16}{e} - \frac{4(1+\lambda)^2}{e^\lambda}\right) cm^2$

$$A(\lambda) = 2 \times 2 \int_1^\lambda (1 - x^2) e^{-x} dx = 4 \int_1^\lambda (1 - x^2) e^{-x} dx$$

Posons : $\begin{cases} u(x) = 1 - x^2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$; **on a** $\begin{cases} u'(x) = -2x \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$ **Alors :** $\int_1^\lambda (1 - x^2) e^{-x} dx = [-(1 - x^2)e^{-x}]_1^\lambda - 2 \int_1^\lambda x e^{-x}\, dx$

Considérons l'intégrale $I = \int_1^\lambda x e^{-x}\, dx$

Posons : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$; **on a** $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$ **Alors :** $\int_1^\lambda x e^{-x} dx = [-xe^{-x}]_1^\lambda + \int_1^\lambda e^{-x}\, dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_1^\lambda$

$$A(\lambda) = -4\left[[-(1 - x^2)e^{-x}]_1^\lambda - 2[-xe^{-x} - e^{-x}]_1^\lambda\right] = -4[(x^2 + 2x + 1)e^{-x}]_1^\lambda = -4[(1 + x)^2 e^{-x}]_1^\lambda$$

$$A(\lambda) = -4[(1 + \lambda)^2 e^{-\lambda} - 4e^{-1}] = \left(\frac{16}{e} - \frac{4(1 + \lambda)^2}{e^\lambda}\right) cm^2$$

2) Déterminons la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{16}{e} - \frac{4(1+\lambda)^2}{e^\lambda}\right) = \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{16}{e} - \frac{4}{e^\lambda} - \frac{8\lambda}{e^\lambda} - \frac{4\lambda^2}{e^\lambda}\right) = \frac{16}{e}$$

EXAMEN 2 : Bac D Session normale 2016

Exercice 1

1) On considère la fonction h dérivable et définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $h(x) = 2x - x^2$.

a) Démontrons que h est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

$\forall\, x \in [0;1], h'(x) = (2x - x^2)' = 2 - 2x = 2(1-x)$

$\forall\, x \in [0;1], h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $[0;1]$

b) En déduire que l'image de l'intervalle $[0;1]$ par h est l'intervalle $[0;1]$

h est continue et strictement croissante sur $[0;1]$, $h([0;1]) = [h(0); h(1)]$

Or $h(0) = 2 \times 0 - 0^2 = 0$ et $h(1) = 2 \times 1 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

Donc : $h([0;1]) = [0;1]$

2) Soit u la suite définie par : $u_0 = \frac{3}{7}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.

a) Démontrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$

Pour $n = 0$, $U_0 = \frac{3}{7}$ alors $0 \leq U_0 \leq 1$: la relation est vraie pour $n = 0$.

Supposons la relation vraie pour tout $k \geq 0$ c'est-à-dire $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_k \leq 1$ et montrons que $0 \leq U_{k+1} \leq 1$

On sait que h est continue et strictement croissante sur $[0;1]$, alors $h(0) \leq h(u_k) \leq h(1)$

Alors $h(u_k) \in [h(0); h(1)] = h([0;1]) = [0;1]$ donc $h(u_k) \in [0;1]$

$0 \leq h(u_k) \leq 1$ or $h(u_k) = u_{k+1}$

$0 \leq U_{k+1} \leq 1$ La relation est vraie à l'ordre $k+1$

En conclusion : pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq U_n \leq 1$

b) Démontrons que la suite u est croissante.

$U_{n+1} - U_n = 2U_n - {U_n}^2 - U_n = U_n - {U_n}^2 = U_n(1 - U_n)$

$0 \leq U_n \leq 1$; $U_n > 0$ Alors le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend de celui de $1 - U_n$

On a : $0 \leq U_n \leq 1 \Longrightarrow 0 \geq -U_n \geq -1 \Longrightarrow 1 \geq 1 - U_n \geq 0$ ou bien $0 \leq 1 - U_n \leq 1$

$1 - U_n \geq 0$ alors $U_{n+1} - U_n \geq 0$; La suite U est croissante

c) Justifier que la suite u est convergente.

La suite U est croissante et majorée par 1, alors la suite U converge vers 1

3) On considère la suite v définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = ln(1 - u_n)$

a) Démontrons que v est une suite géométrique de raison 2.

$v_n = ln(1 - U_n)$ alors $v_{n+1} = ln(1 - U_{n+1}) = ln(1 - 2U_n + {U_n}^2) = ln(1 - U_n)^2 = 2ln(1 - U_n) = 2v_n$

$v_{n+1} = 2v_n$ Alors (v) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = ln(1 - U_0) = ln\frac{4}{7}$

b) Exprimons v_n en fonction n.

(v) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = ln\frac{4}{7}$

$v_n = v_0 q^n = 2^n \times ln\frac{4}{7}$

c) Calculons la limite de la suite v

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(2^n \times ln\frac{4}{7}\right) = -\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $ln\frac{4}{7} < 0$

$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

d) En déduisons la limite de la suite u.

$v_n = ln(1 - u_n) \Leftrightarrow U_n = 1 - e^{V_n}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} (1 - e^{V_n}) = 1$ car lorsque $n \to +\infty$, $V_n \to -\infty$ donc $e^{V_n} \longrightarrow 0$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

Exercice 2

1) Soit Ω le point d'affixe 2.

a) Vérifions que : $\varphi(\Omega) = \Omega$

$z'_\Omega = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_\Omega + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times 2 + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} = 2 - 2i\frac{\sqrt{3}}{3} + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} = 2$

$z'_\Omega = z_\Omega = 2$ alors $\varphi(\Omega) = \Omega$

Justifions que φ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques

- $\varphi(\Omega) = \Omega$ alors Ω est le centre de φ
- $a = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$; $k = |a| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

- $Arg(a)$ car : $\begin{cases} cos\theta = \frac{Re(a)}{|a|} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{Im(a)}{|a|} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\theta = -\frac{\pi}{6}$

Donc φ est une similitude directe de centre Ω d'affixe 2 de rapport $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{6}$

2-a) Démontrer que : $\forall z \neq 2, \frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\forall z \neq 2\ \frac{z'-z}{2-z} = \frac{\left(1-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z+2i\frac{\sqrt{3}}{3}-z}{2-z} = \frac{-i\frac{\sqrt{3}}{3}z+2i\frac{\sqrt{3}}{3}}{2-z} = \frac{i\frac{\sqrt{3}}{3}(2-z)}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc $\forall z \neq 2, \frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

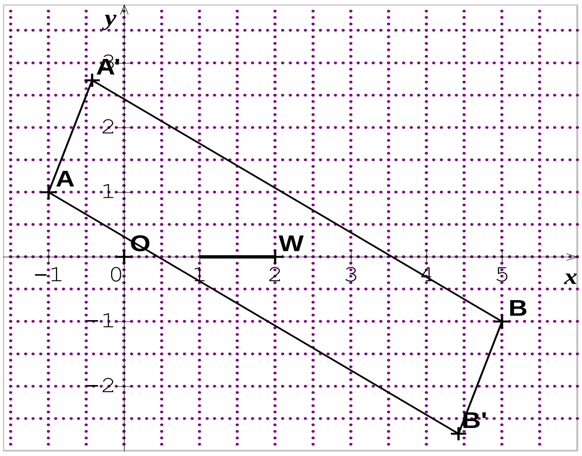
b) En déduisons que le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en M.

$\forall z \neq 2, \frac{z'-z}{2-z} = \frac{z_{M'}-z_M}{z_\Omega - z_M} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$ **alors le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en M**

c) Donnons un programme de construction de l'image M' par φ d'un point M donné.

$M' = \varphi(M)$ **et** $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ **et le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en M**

4- a) Plaçons les points A et B d'affixes respectives $-1+i$ et $5-i$ dans Le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



Construisons les images respective A' et B' de A et B par φ.

$A' = \varphi(A)$ **et** $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ **et le triangle $A\Omega A'$ est rectangle en A**

De même $B' = \varphi(B)$ **et** $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ **et le triangle $B\Omega B'$ est rectangle en B**

b) On note $z_A, z_B, z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectives des points A, B, A' et B'.

Démontrons que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$.

$z_{A'} - z_A = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_A + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} - z_A = i\frac{\sqrt{3}}{3}(2 - z_A) = i\frac{\sqrt{3}}{3}(3 - i)$

$z_{B'} - z_B = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_B + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} - z_B = i\frac{\sqrt{3}}{3}(2 - z_B) = i\frac{\sqrt{3}}{3}(-3 + i) = -i\frac{\sqrt{3}}{3}(3 - i)$

Donc $z_{A'} - z_A = -(z_{B'} - z_B) = z_B - z_{B'}$

c) En déduisons la nature du quadrilatère $AA'BB'$.

D'après la question précédente, $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$ alors $AA'BB'$ est un parallélogramme.

<u>Problème</u>

<u>PARTIE A</u>

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + (2-2x)e^{-2x+3}$

$\boldsymbol{dans\ les\ calculs\ de\ limites, on\ posera}$ à $\boldsymbol{chaque\ fois\ X = -2x+3\ donc\ x = \frac{3-X}{2}}$

$\boldsymbol{lorsque\ x\ tend\ vers -\infty; X\ tend\ vers +\infty\ et\ lorsque\ x\ tend\ vers +\infty; X\ tend\ vers -\infty}$

1) Calculons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}[-1 + (2-2x)e^{-2x+3}] = \lim_{X\to+\infty}[-1 + (-1+X)e^X] = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{X\to+\infty} -1 + X = +\infty \\ \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{X\to-\infty}[-1 + (-1 + X)e^X] = \lim_{X\to-\infty}[-1 - e^X + Xe^X] = -1$ car $\begin{cases} \lim_{X\to-\infty} e^X = 0 \\ \lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

2.a) Soit g' la fonction dérivée de g. Justifions que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = [-1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}]' = (2 - 2x)' \times e^{-2x+3} + (2 - 2x)[e^{-2x+3}]' = -2e^{-2x+3} - 2(2 - 2x)e^{-2x+3}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = (-2 - 4 + 4x)e^{-2x+3} = (4x - 6)e^{-2x+3}$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}$$

b) Etudions le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-2x+3} > 0$ **alors le signe de $g'(x)$ dépend de $4x - 6$**

$\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[, g'(x) < 0$ **et** $\forall\, x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[, g'(x) > 0$

c) Justifions que $g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$.

$g\left(\frac{3}{2}\right) = -1 + \left(2 - 2 \times \frac{3}{2}\right)e^{-2\times\frac{3}{2}+3} = -1 - e^0 = -1 - 1 = -2$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$

d) Dressons le tableau de variation de g.

$\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[, g'(x) < 0$ **alors g est continue et strictement décroissante**

$\forall\, x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[, g'(x) > 0$ **alors g est continue et strictement croissante**

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1

3.a) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α.

$\forall x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$, **$g$ est continue et strictement décroissante, alors g réalise une bijection de $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$ vers $]-2: +\infty[$ or $0 \in]-2: +\infty[$.**

Donc l'équation : $x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α

b) Vériifions que $0,86 < \alpha < 0,87$

$g(0,86) = -1 + (2 - 2 \times 0,86)e^{-2\times0,86+3} \approx 0,007$; $g(0,87) = -1 + (2 - 2 \times 0,87)e^{-2\times0,87+3} \approx -0,083$

$g(0,86)$ et $g(0,87)$ sont de signes contraires alors : $0,86 < \alpha < 0,87$

c) Justifions que : $\forall\, x \in]-\infty;\ \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha;\ +\infty[, g(x) < 0$.

- $\forall\, x \in]-\infty; \propto[, x < \alpha$ **alors $g(x) > g(\alpha)$ car g est strictement décroissante sur $]-\infty; \propto[$ et de plus $g(\alpha) = 0$**

Donc : $\forall\, x \in]-\infty; \propto[, g(x) > 0$

- $\forall\, x \in \left]\alpha; \frac{3}{2}\right[, x > \alpha$ **alors $g(x) < g(\alpha)$ car g est strictement décroissante sur $\left]\propto; \frac{3}{2}\right[$ et de plus $g(\alpha) = 0$**

Donc : $\forall\, x \in \left]\propto; \frac{3}{2}\right[, g(x) < 0$

$\forall\, x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ **g admet un maximum égal à -1. Alors** $\forall\, x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[, g(x) < 0$

Donc : $\forall\, x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[, g(x) < 0$

En conclusion : $\forall\, x \in]-\infty; \propto[, g(x) > 0$ **et** $\forall\, x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$

Partie B

dans les calculs de limites, on posera à chaque fois $X = -2x + 3$ donc $x = \frac{3-X}{2}$

lorsque x tend vers $-\infty$; X tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$; X tend vers $-\infty$

1.a) Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[-x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right] = \lim_{X\to+\infty}\left[\frac{X}{2} - \frac{3}{2} + \left(1 - \frac{X}{2}\right)e^X\right] = \lim_{X\to+\infty}\left[\frac{X}{2}\left(1 - \frac{3}{X} + \left(\frac{2}{X} - 1\right)e^X\right)\right] = -\infty$

Car $\begin{cases} \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{2} = +\infty \\ \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0 \\ \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[-1 + \left(1 - \frac{1}{2x}\right)e^{-2x+3}\right] = \lim_{X\to+\infty}\left[-1 + \left(1 + \frac{1}{X-3}\right)e^X\right] = +\infty$

car $\begin{cases} \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X-3} = 0 \\ \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

b) En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ **et** $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ **alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.**

2.a) Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right] = \lim_{X\to-\infty}\left[\frac{X}{2}-\frac{3}{2}+\left(1-\frac{X}{2}\right)e^{X}\right] = \lim_{X\to-\infty}\left[\frac{X}{2}-\frac{3}{2}+e^{X}-\frac{Xe^{X}}{2}\right] = -\infty$

Car $\begin{cases}\lim_{X\to-\infty}\frac{X}{2}=-\infty\\ \lim_{X\to-\infty} Xe^{X}=0\\ \lim_{X\to-\infty} e^{X}=0\end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b) Démontrons que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y=-x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}+x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right] = \lim_{X\to-\infty}\left[e^{X}-\frac{Xe^{X}}{2}\right] = 0$ Car $\begin{cases}\lim_{X\to-\infty} Xe^{X}=0\\ \lim_{X\to-\infty} e^{X}=0\end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$ **alors la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y=-x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.**

c) Etudions la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)-y = -x+\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}+x = \left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$

$\forall x\in\mathbb{R}, e^{-2x+3}>0$ **alors le signe de $f(x)-y$ dépend de $x-\frac{1}{2}$**

$\forall x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[, <0$ **alors la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessous de la droite $(\mathcal{D})$**

$\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[, f(x)-y>0$ **alors la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la droite $(\mathcal{D})$**

3.a) f' la fonction dérivée de f. Démontrons que : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=g(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = \left[-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right]' = -1+\left(x-\frac{1}{2}\right)'\times e^{-2x+3} = -1+\left(x-\frac{1}{2}\right)[e^{-2x+3}]'$

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = -1+e^{-2x+3}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3} = -1+(1-2x+1)e^{-2x+3} = -1+(2-2x)e^{-2x+3} = g(x)$

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=g(x)$$

b) En déduire les variations de f.

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=g(x)$ **alors le signe de $f'(x)$ dépend de $g(x)$**

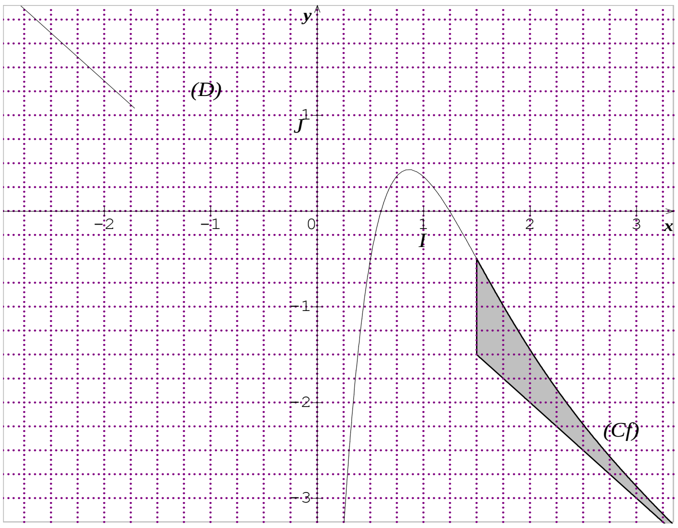
: $\forall x\in\,]-\infty;\propto[$, $g(x)>0$ **alors $f'(x)>0$ donc f est continue et strictement croissante sur** $]-\infty;\propto[$,

$\forall x\in\,]\alpha;+\infty[$, $g(x)<0$ **alors $f'(x)<0$ donc f est continue et strictement décroissante sur** $]\alpha;+\infty[$,

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\propto$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\propto)$	$\searrow$	$-\infty$

4) Construire $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C})$ sur le même graphique. On précisera les points de $(\mathcal{C})$ d'abscisses $0; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 4$.



5)

e) A l'aide d'une intégration par partie, justifier que : $I_t=\frac{3}{4}-\frac{t}{2}e^{-2t+3}$

Posons : $\begin{cases}u(x)=x-\frac{1}{2}\\ v'(x)=e^{-2x+3}\end{cases}$; **on a** $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x+3}\end{cases}$ **Alors :** $\int_{\frac{3}{2}}^{t}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}dx = \left[-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t}+\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{t}e^{-2x+3}\,dx$

$= \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t} = -\frac{t}{2}e^{-2t+3}+\frac{3}{4}e^{-2\times\frac{3}{2}+3} = \frac{t}{2}e^{-2t+3}+\frac{3}{4}$ **Donc : : $I_t=\frac{3}{4}-\frac{t}{2}e^{-2t+3}$**

f) Calculons $\mathcal{A}(t)$

$\mathcal{A}(t) = OI \times OJ \times \int_{\frac{3}{2}}^{t}\left[-x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3} + x\right]dx = 2 \times 2 \times I_t = 4I_t = [3 - 2te^{-2t+3}]cm^2$

g) Calculons $\lim_{t\to+\infty} \mathcal{A}(t)$

$\lim_{t\to+\infty} \mathcal{A}(t) = \lim_{t\to+\infty}(3 - 2te^{-2t+3}) = 3$ car $\lim\limits_{t\to+\infty}(te^{-2t+3}) = 0$

Donc $\lim_{t\to+\infty} \mathcal{A}(t) = 3$

CORRECTION EXAMEN 3 : Bac D Session normale 2015

Exercice 1

PARTIE I

1. a) calculons $p(i)$

$p(i) = i^3 - (3+2i)i^2 + (1+5i)i + 2 - 2i = -i + 3 + 2i + i - 5 + 2 - 2i = 0$;

$$p(i) = 0$$

b) Déterminons deux nombres complexes a et b tels que : $p(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$

$(z-i)(z^2+az+b) = z^3 + az^2 + bz - iz^2 - aiz - bi = z^3 + (a-i)z^2 + (b-ai)z - bi$

Par identification : $\begin{cases} a - i = -3 - 2i \\ b - ai = 1 + 5i \\ -bi = 2 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 - i \\ b = 2 + 2i \end{cases}$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i$

$\Delta = b^2 - 4ac = [-(3+i)]^2 - 4(2+2i) = 9 + 6i - 1 - 8 - 8i = -2i$

$$\Delta = -2i$$

Déterminons les racines carrées de $\Delta = -2i$

En posant $z = x + iy$ on a: $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = |(x+iy)^2| = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$

$$\Delta = -2i;\ |\Delta| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$$

$z^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -2 \end{cases}$; En ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient : $2x^2 = 2$ alors $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Pour $x = 1$; $y = -1$ et Pour $x = -1$; $y = 1$ -

Alors les deux racinescarrées de Δ sont: $\sigma = 1 - i$ et $-\sigma = -1 + i$

Donc cette équation a deux solutions : $Z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a} = \frac{3+i-1+i}{2} = 1 + i$ et $Z_2 = \frac{-b+\sigma}{2a} = \frac{3+i+1-i}{2} = 2$

$$S_1 = \{2; 1+i\}$$

3) Déduisons les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) : $p(z) = 0$.

Puisque $p(i) = 0$ alors i est solution de l'équation (E) on vérifie que :

$$(Z-i)[z^2 - (3+i)z + 2 + 2i] = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$$

Ainsi les solutions de (E) sont : $2; i; 1+i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{2; i; 1+i\}$$

PARTIE II

1.a) Calculonsz_1 et z_2

$z_1 = \frac{1+i}{2}z_0 = \frac{1+i}{2} \times 2 = 1 + i$; $z_2 = \frac{1+i}{2}z_1 = \frac{1+i}{2}(1+i) = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$

b) Plaçons les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

2) On considère la suite U définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

2. a) Justifions que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+i}{2}z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{1+i}{2} - 1\right)z_n\right| = \left|\frac{-1+i}{2}z_n\right| = \left|\frac{-1+i}{2}\right||z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$

b) Démontrons que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$ alors $U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_{n+1}| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{1+i}{2}z_n\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{1+i}{2}\right||z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}|z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}U_n$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}U_n$ alors U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme$U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_0| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$

c) Expression de U_n en fonction de n.

U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$, $U_n = U_0 q^n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

3) a)Calculonsl_n

$l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n = U_0 + U_1 + \cdots U_{n-1} = U_0\left(\frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)$

$$l_n = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)$$

b) Déduisons$\lim_{n\to+\infty} l_n$

$\lim_{n\to+\infty} l_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)\right] = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}+2$ car $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$

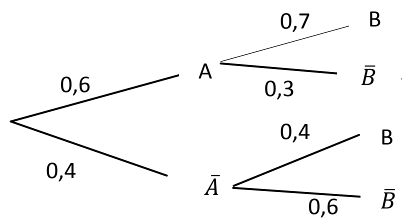
Donc $\lim_{n\to+\infty} l_n = 2\sqrt{2}+2$

Exercice 2

Soit A: l' évènement ≪ Il y a une affluence de clients≫

B: l' évènement ≪ Mariam réalise un bénéfice≫

Arbre de probabilité



1.a) Calculons la probabilité de l'évènement E suivant : « IL y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».

$$P(E) = P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B) = 0,6\times 0,7 = 0,42$$

b) Démontrons que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B est égal à $0,58$

En appliquant la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$

$P(B) = P(A)\times P_A(B) + P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B) = 0,6\times 0,7 + 0,4\times 0,6 = 0,58$

Mariam a réalisé un bénéfice, Calculons la probabilité qu'il ait eu une affluence de clients ce jour là

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\times P_A(B)}{P(B)} = \frac{0,6\times 0,7}{0,58} = 0,72$$

2 –Si on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.

a) Les valeurs prises par X sont : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

b) Déterminons la loi de probabilité de X

Comme pour chaque jour, la probabilité que Mariam réalise un bénéfice est $p = 0,58$ et que les résultats sont supposés indépendants d'un jour à l'autre, on voit alors que X suit une loi binomiale de paramètres $(n = 3 \quad et\, p = 0,58)$

Donc pour tout k entier naturel, on a : $P(X = k) = C_3^k(0,58)^k\times(1-0,58)^{3-k}$

$X = k$	0	1	2	3	$Total$
$P(X = k)$	$0,07492$	$0,306936$	$0,423864$	$0,195112$	1

c) Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ de X

$$E(X) = np = 3\times 0,58 = 1,74$$

3.a) Justifions que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $p_n = 1-(0,42)^n$

Ici Mariam réalise un bénéfice pendant n jours successifs , X suit une loi binomiale de paramètres $(n; p = 0,58)$

Donc pour tout k entier naturel, on a :

$$P(X\geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_n^0(0,52)^0\times(0,42)^n = 1-(0,42)^n$$

b) Déterminons la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n \geq 0,9999$

$$P(X\geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_n^0(0,52)^0\times(0,48)^n = 1-(0,42)^n$$

$P(Y\geq 1) > 0{,}9999 \Leftrightarrow 1-(0,42)^n > 0{,}9999$ alors :$1-0,9999 > (0,42)^n$; $0,0001 > (0,42)^n$

$ln(0,0001) < ln(0,42)^n$ alors $ln(0,0001) < nln(0{,}42)$ ou $n > \frac{ln(0{,}0001)}{ln(0{,}42)} \approx 10,6$

$$n \approx 11$$

Problème

PARTIE A

1) Démontrons que g est solution de l'équation (E).

g solution de (E) signifie que :$g' + g = r$

$g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$; $g'(x) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

Alors $g' + g = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} = xe^{-x} = r$

$g' + g = r$: g est solution de (E)

2.a) Démontrons qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (F).

φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi'(x) + \varphi(x) = r$ (I)

Or g est solution de (E') alors : $g'(x) + g(x) = r$ (II)

Si on retranche(I) à (II), on obtient : $\varphi'(x) - g'(x) + (\varphi(x) - g(x)) = 0$ alors :$(\varphi - g)'(x) + (\varphi - g)(x) = 0$

Réciproquement, si $\varphi - g$ est solution de (F) :$(f - h)'(x) + (f - h)(x) = 0$

Or $g'(x) + g(x) = r$ Par addition, on en déduit que : φ est solution de (E)

On peut conclure que φ est solution de (E) si et seulement si la fonction $\varphi - g$ est solution de (F)

b) Résolvons différentielle (F).

(F) est sous la forme : $y' + ay = 0$ *avec* $a = 1$ alors $y(x) = ke^{-x}[k \in \mathbb{R}]$

c) Déduisons les solutions φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$

$\varphi - g$ est solution de (F) ; On a donc $(\varphi - g)(x) = ke^{-x}$. Alors $\varphi(x) - g(x) = ke^{-x}$

$$\varphi(x) = g(x) + ke^{-x} = ke^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

$$\varphi(0) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$$

$$\varphi(x) = \frac{x^2 - 3}{2}e^{-x}$$

Partie B

Pour les calculs de limites on posera à chaque fois $X = -x$; *lorsque* $x \mapsto -\infty; X \mapsto +\infty$ *et lorsque* $x \mapsto -\infty; X \mapsto +\infty$

1-a) Calculons$\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{x^2-3}{2}e^{-x}\right] = \lim_{X \mapsto +\infty}\left[\frac{X^2-3}{2}e^{X}\right] = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{X \mapsto +\infty}\left[\frac{X^2-3}{2}\right] = +\infty \\ \lim_{X \mapsto +\infty}[e^X] = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = +\infty$$

b) Démontrons que la courbe $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ)

$\lim_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{\mapsto -\infty}\left[\frac{\frac{x^2-3}{2}e^{-x}}{x}\right] = \lim_{\mapsto -\infty}\left[\frac{x^2-3}{2x}e^{-x}\right] = \lim_{X \mapsto +\infty}\left[\frac{X^2-3}{-2X}e^{X}\right] = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{X \mapsto +\infty}\left[\frac{X^2-3}{-2X}\right] = -\infty \\ \lim_{X \mapsto +\infty}[e^X] = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = -\infty$; Alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique se direction (OJ) en $-\infty$

2) Calculons la limite de f en $+\infty$ et interprétons graphiquement ce résultat

$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{x^2-3}{2}e^{-x}\right] = \lim_{X \mapsto -\infty}\left[\frac{X^2-3}{2}e^{X}\right] = \lim_{X \mapsto -\infty}\left[\frac{X^2e^X - 3e^X}{2}\right] = 0$ car $\begin{cases} \lim_{X \mapsto -\infty}(X^2e^X) = 0 \\ \lim_{X \mapsto -\infty} e^X = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$; alors la droite (Δ) d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

3.a) Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \left[\frac{x^2-3}{2}e^{-x}\right]' = \left(\frac{x^2-3}{2}\right)'e^{-x} + (e^{-x})'\left(\frac{x^2-3}{2}\right) = xe^{-x} - \frac{x^2-3}{2}e^{-x} = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$; $\underline{f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}}$

b) Étudions les variations de f.

$\forall x \in \mathbb{R}$; $e^{-x} > 0$ Alors le signe de $f'(x)$ est celui de $3 + 2x - x^2$ or $3 + 2x - x^2 = -(x + 1)(x - 3)$

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[, f'(x) < 0$ *alors* f est strictement décroissante.

$\forall x \in]-1; 3[, f'(x) > 0$ *alors* f est strictement croissante.

d) Dressons le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

$f(x)$	$-\infty$ ↘ $-e$ ↗ $3e^{-3}$ ↘ 0

4) Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C)au point d'abscisse 0 est : $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$.

$(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ **avec** $x_0=0$; $f'(x_0)=f'(0)=\frac{3}{2}$ **et** $f(x_0)=f(0)=-\frac{3}{2}$

$(T): y=\frac{3}{2}(x-0)-\frac{3}{2}$ **Alors une équation de la tangente (T) à la courbe (C)au point d'abscisse 0 est :** $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

5) Etudions les positions relatives de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

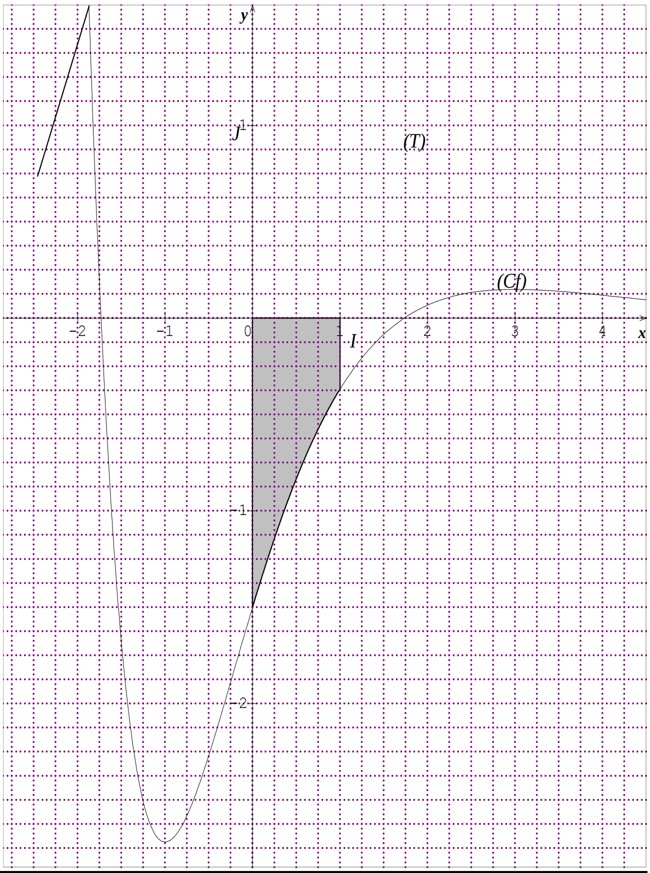
$(C)\cap(OI): f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{2}e^{-x}=0$ **alors** $\frac{x^2-3}{2}=0$ $car\ \forall x\in\mathbb{R}\,;\ e^{-x}>0$

(C) **coupe la droite (OI) au points d'abscisses $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$**

(C) **est au dessus de la droite (OI)sur les intervalles** $]-\infty;-\sqrt{3}[$ **et** $]\sqrt{3};+\infty[$

(C) **est en dessous de la droite (OI)sur l' intervalle** $]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$

6) Représentons graphiquement (T) et (C).



Partie C

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculons : $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

A l'aide d'une intégration par partie : $U(x)=x \Longrightarrow U'(x)=1$; $V'(x)=e^{-x} \Longrightarrow V(x)=-e^{-x}$

$\int_0^1 xe^{-x}dx=[-xe^{-x}]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=[-xe^{-x}-e^{-x}]_0^1=[-(x+1)e^{-x}]_0^1=-2e^{-1}+1$

$\int_0^1 xe^{-x}dx=1-\frac{2}{e}$

2.a) Vérifions que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A

f **solution de (E) signifie que :** $f'+f=xe^{-x}$

$f(x)=\frac{x^2-3}{2}e^{-x}$; $f'(x)=\frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$

Alors $f'+f=\frac{x^2-3}{2}e^{-x}+\frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}=\frac{x^2-3+3+2x-x^2}{2}e^{-x}=xe^{-x}=r$

$f'+f=r$: f **est solution de (E)**

b) déduisons que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=-f'(x)+xe^{-x}$

d'après la question précédente : $f'(x)+f(x)=\ xe^{-x}$ **; alors** $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=-f'(x)+xe^{-x}$

c) En utilisant la question précédente, calculons en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe$(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

$$\mathcal{A} = -OI \times OJ \int_0^1 f(x)dx = -2 \times 4 \int_0^1 (-f'(x) + xe^{-x})dx = -8\left[-\int_0^1 f'(x)dx + \int_0^1 xe^{-x}dx\right] =$$

$$-8\left[[-f(x)]_0^1 + \int_0^1 xe^{-x}dx\right] = -8\left[\left[-\frac{x^2-3}{2}e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{-x}dx\right] = -8\left(\frac{1}{e} - \frac{3}{2} + 1 - \frac{2}{e}\right) = -8\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right)$$

$$\mathcal{A} = (4 + 8e^{-1})cm^2$$

CORRECTION EXAMEN 4 : Bac D Session normale 2014

Exercice 1

1- a) Démontrons que l'écriture complexe de φ est : $z' = \frac{1}{2}(1 - i)z$.

L'écriture complexe de toute similitude directe de centre O est : $Z' = aZ$; $a \in \mathbb{C}$ $avec$ $|a| \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$\overset{\curvearrowright}{\varphi}$	
O	O
C	B

Donc :$Z_B = aZ_C$ Alors : $a = \frac{Z_B}{Z_C} = \frac{3-2i}{5+i} = \frac{(3-2i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{15-3i-10i-2}{5^2-i^2} = \frac{13-13i}{26} = \frac{13(1-i)}{26}$ D'où : $a = \frac{1}{2}(1 - i)$

Alors que l'écriture complexe de φ est : $z' = \frac{1}{2}(1 - i)z$

b) Déterminons les éléments caractéristiques de φ

φ est une similitude direct de centre O, de rapport $|a| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle θ tel que :

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{Re(a)}{|a|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{Im(a)}{|a|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \theta = -\frac{\pi}{4}$$

c)Déterminons l'affixe du point D qui a pour image le point C par φ.

$D = \varphi(C) \Leftrightarrow Z_D = \frac{1}{2}(1 - i)Z_C = \frac{1}{2}(1 - i)(5 + i) = \frac{1}{2}(5 + i - 5i + 1) = 3 - 2i$ Alors $Z_D = 3 - 2i$

2-a) Justifions que l'affixe Z_1 du point B_1, image de B par φ est : $\frac{1}{2}(1 - 5i)$

$B_1 = \varphi(B) \Leftrightarrow Z_1 = \frac{1}{2}(1 - i)Z_B = \frac{1}{2}(1 - i)(3 - 2i) = \frac{1}{2}(3 - 2i - 3i - 2) = \frac{1}{2}(1 - 5i)$Alors $Z_1 = \frac{1}{2}(1 - 5i)$

b) Justifions que le triangle OBB_1 est rectangle isocèle en B_1

le triangle OBB_1 est rectangle isocèle en B_1si et seulement si : $\frac{Z_O-Z_1}{Z_B-Z_1} = i \; ou - i$

: $\frac{Z_O-Z_1}{Z_B-Z_1} = \frac{-\frac{1}{2}(1-5i)}{3-2i-\frac{1}{2}(1-5i)} = \frac{-\frac{1}{2}(1-5i)}{\frac{1}{2}(6-4i-1+5i)} = \frac{-1+5i}{5+i} = \frac{(-1+5i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{-5+i+25i+5}{5^2-i^2} = \frac{26i}{26} = i$

$\frac{Z_O-Z_1}{Z_B-Z_1} = i$ alors le triangle OBB_1 est rectangle isocèle en B_1

3-a) Démontrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - i)^n z_0$

Pour $n = 0$: $z_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 (1 - i)^0 z_0 =$ Donc la relation est vraie pour $n = 0$

Soit$k \in \mathbb{N}$, supposons $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k (1 - i)^k z_0$

$B_{n+1} = \varphi(B_n) \Leftrightarrow z_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - i)z_n$ alors $z_{k+1} = \frac{1}{2}(1 - i)z_k = \frac{1}{2}(1 - i)\left(\frac{1}{2}\right)^k (1 - i)^k z_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (1 - i)^{k+1} z_0$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (1 - i)^{k+1} z_0$ c'est-à-dire la relation est vraie pour $n = k + 1$

On en déduit que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - i)^n z_0$

b) Calculer la distance OB_n en fonction de n

$OB_n = |z_n - z_o| = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - i)^n z_0\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - i|^n |z_0| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |3 - 2i| = \sqrt{13}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ Alors $OB_n = \sqrt{13}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} OB_n$

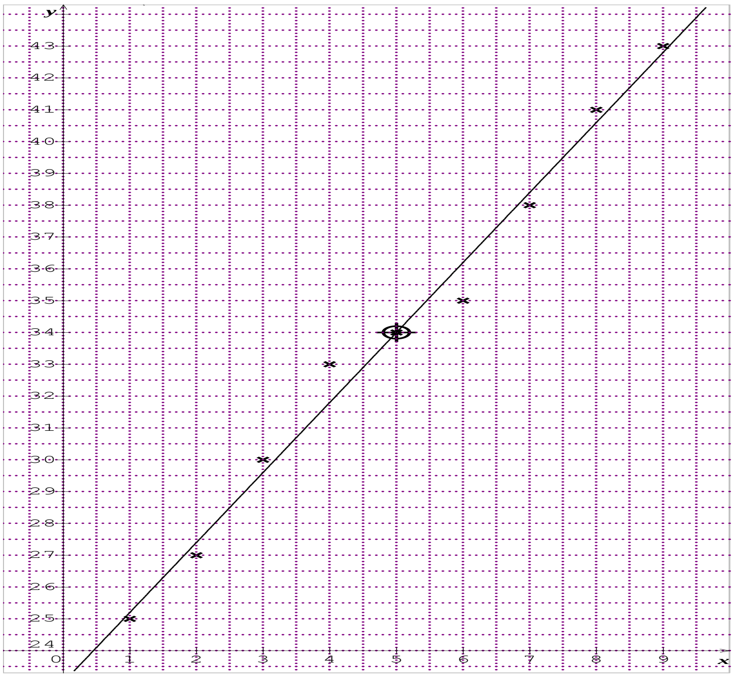
$\lim_{n\to+\infty} OB_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{13}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ Car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

Exercice 2

Tableau de calcul

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**45**
y_i	25	27	30	33	34	35	38	41	43	**306**
${x_i}^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	**285**
${y_i}^2$	625	729	900	1089	1156	1225	1444	1681	1849	**10698**
$x_i \times y_i$	25	54	90	132	170	210	266	328	387	**1662**

1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthogonal



2 –Déterminer les coordonnées du point moyen G

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{45}{9} = 5 \;;\; \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{306}{9} = 34 \quad alors\ G\binom{5}{34}$$

3-a) Justifions que La variance de X est $\frac{20}{3}$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{{x_i}^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{285}{9} - 5^2 = \frac{285-225}{9} = \frac{60}{9} \text{ Alors } \quad V(x) = \frac{20}{3}$$

b) Justifions que la covariance de X et Y est $\frac{44}{3}$

$$cov(x,y) = \sum_{i=1}^{9}\frac{x_i \times y_i}{9} - \overline{x} \times \overline{y} = \frac{1662}{9} - 5 \times 34 = \frac{1662-1530}{9} = \frac{132}{9} \quad \text{Alors} \quad cov(x,y) = \frac{44}{3}$$

4-a) Déterminons la valeur du coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}\frac{\frac{44}{3}}{\sqrt{\frac{20}{3} \times \frac{98}{3}}} = \frac{44}{\sqrt{1960}} = \frac{44}{14\sqrt{10}} = \frac{22}{7\sqrt{10}} \approx 0{,}994$$

b)Justifions que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.

$0{,}87 \leq 0{,}994 \leq 1$; on a une très bonne corrélation ; donc un ajustement linéaire

5-a) Déterminer une équation de (D)

$$(D) \quad y = ax + b \qquad \text{avec } a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{\frac{44}{3}}{\frac{20}{3}} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5} \quad \text{et } b = \overline{y} - a\overline{x}$$

$$b = 34 - \frac{11}{5} \times 5 = 23$$

Alors $(D) \quad y = \frac{11}{5}x + 23$

6)Donner une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

220 correspond à la $18ème\ année$, donc $x = 18$ Alors $y = \frac{11}{5} \times 18 + 23 = \frac{313}{5} \approx 63$

Donc 63 bacheliers accéderont aux études supérieures en 2020

Problème

Partie A

1-a) On donne : $g(0)=1$. Déterminons la valeur de b

$g(0)=1 \Leftrightarrow\ 0+(a\times 0+b)e^{-0}=1$ Alors $b=1$

b) On admet que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite (D). Déterminons la valeur de a.

$$(T)//(D) \Leftrightarrow g'(0)=1$$

$g'(x)=[x+(ax+b)e^{-x}]'=1+ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}=1+(-ax+a-b)e^{-x}$

$g'(0)=1 \Leftrightarrow 1+(-a\times 0+a-b)e^{-0}=1$ donc $a-b=0$ Alors $a=b=1$

2-a) Calculons $h'(x)$, pour tout x élément de $\mathbb{R}$

$\forall\, x\in\mathbb{R}, h'(x)=(e^x-x)'=e^x-1$ Alors $\forall\, x\in\mathbb{R}, h'(x)=e^x-1$

b) Dressons le tableau de variation de h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

c) En déduire que $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, h(x)>0$

$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}$, h admet un minimum en 0 égal à 1 qui est positif, alors $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, h(x)>0$

Partie B

Pour les calculs de limites on posera à chaque fois $X=-x \Rightarrow x=-X$ et lorsque $x\to-\infty, X\to+\infty$ ou lorsque $x\to+\infty, X\to-\infty$

1-a) Calculons la limite de f en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}[x+(x+1)e^{-x}]=\lim_{X\to+\infty}[-X+(-X+1)e^{X}]=-\infty$ car $\begin{cases}\lim_{X\to+\infty} -X=-\infty\\ \lim_{X\to+\infty}(-X+1)e^{X}=-\infty\end{cases}$

Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b) Justifions que : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+(x+1)e^{-x}}{x}\right]=\lim_{X\to+\infty}\left[\frac{-X+(-X+1)e^{X}}{-X}\right]=\lim_{X\to+\infty}\left[1+(X-1)\frac{e^X}{X}\right]=+\infty$

car $\begin{cases}\lim_{X\to+\infty}(X-1)=+\infty\\ \lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty\end{cases}$ Alors $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

c) Donnons une interprétation graphique de ces résultats

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

2-a) Calculons la limite de f en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x+(x+1)e^{-x}]=\lim_{X\to-\infty}[-X+(-X+1)e^{X}]=\lim_{X\to-\infty}[-X-Xe^X+e^X]=+\infty$

Car $\begin{cases}\lim_{X\to-\infty}(-X)=+\infty\\ \lim_{X\to-\infty}Xe^X=0\\ \lim_{X\to-\infty}e^X=0\end{cases}$ Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) Démontrons que (D) est asymptote à (C) en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}[(x+1)e^{-x}]=\lim_{X\to-\infty}[(-X+1)e^{X}]=\lim_{X\to-\infty}[-Xe^X+e^X]=0$$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$ Alors la droide (D) d'équation $y=x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

c) Etudions les positions relatives de (C) et (D)

$\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x)-y=(x+1)e^{-x}$

$\forall\, x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0$ alors le signe de $f(x)-y$ dépend de $x+1$:

Donc : $\forall\, x\in\,]-\infty;-1[, f(x)-y<0$ alors (C) est en dessous de (D)

$\forall\, x\in\,]-1;+\infty[\ f(x)-y>0$ alors (C) est au dessus de (D)

3-a) Démontrer que : $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, f'(x)=e^{-x}h(x)$

$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, f'(x)=[x+(x+1)e^{-x}]'=\ 1+e^{-x}-(x+1)e^{-x}=1+(-x+1-1)e^{-x}=1-xe^{-x}$

$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, f'(x)=\ 1-xe^{-x}=1-\frac{x}{e^x}=\frac{e^x-x}{e^x}=(e^x-x)e^{-x}=e^{-x}h(x)$

Donc $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, f'(x)=e^{-x}h(x)$

b) Déterminons le sens de variation de f

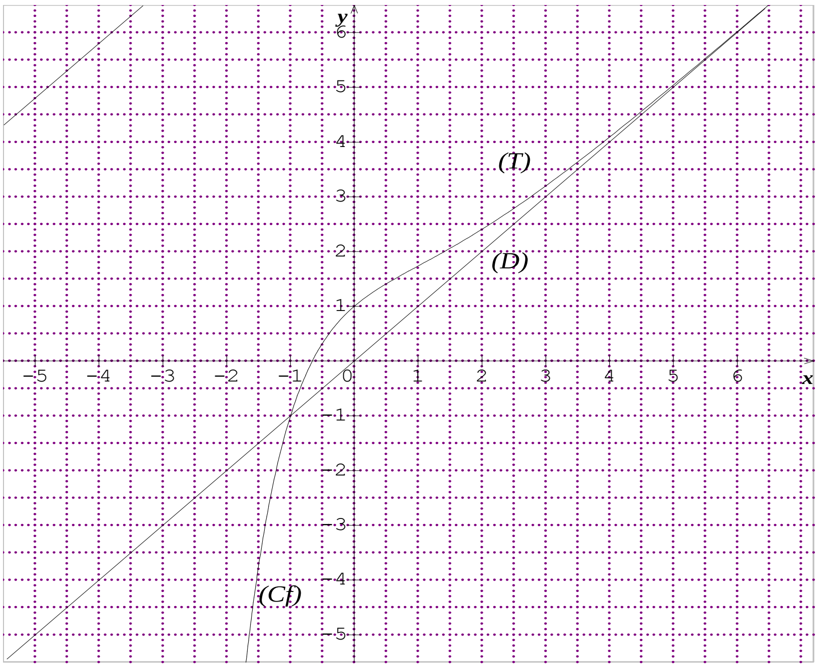
$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, f'(x)=e^{-x}h(x)$ or $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, e^{-x}>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $h(x)$

D'où $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, f'(x)>0$; f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4) Construire sur le même graphique (T), (D) et $(\mathcal{C})$



5-a) Démontrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}$, f est continue et strictement croissante, alors f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculons $(f^{-1})'(1)$

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1$ Alors $(f^{-1})'(1) = 1$

c) Construire (Γ) la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que $(\mathcal{C})$

Voir représentation graphique

Partie C

On pose : $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^{n}(t+1)\,e^{-t}dt$

1) A l'aide d'une intégration par parties, démontrons que : $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}, I_n = (-2-n)e^{-n} + e$

Posons : $\begin{cases} u(t) = t+1 \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$; on a $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(x) = -e^{-t} \end{cases}$ Alors : $\int_{-1}^{n}(t+1)\,e^{-t}dt = \left[-(t+1)e^{-t}\right]_{-1}^{n} + \int_{-1}^{n} e^{-t}\,dt$

$= \left[(-t-2)e^{-t}\right]_{-1}^{n} = (-2-n)e^{-n} - (-e)$ Donc : $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}, I_n = (-2-n)e^{-n} + e$

2)L'aire $\mathcal{A}_n$ en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$

$$\mathcal{A}_n = OI \times OJ \int_{-1}^{n} f(t)dt = 1 \times 1 \int_{-1}^{n}[x + (x+1)e^{-x}]dx = \int_{-1}^{n} xdx + \int_{-1}^{n}(x+1)\,e^{-x}dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{n} + I_n$$

Donc $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2}n^2 + (-2-n)e^{-n} - \frac{1}{2} + e$

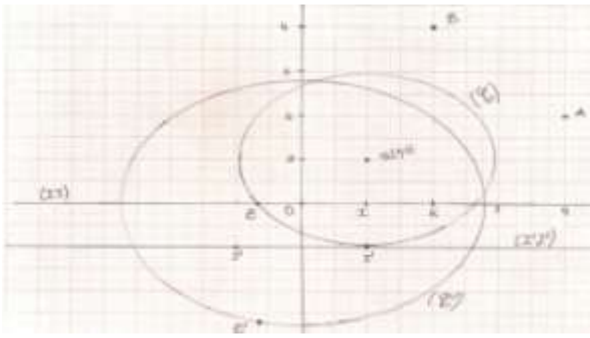
3)Calculons $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$

$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}n^2 + (-2-n)e^{-n} - \frac{1}{2} + e\right] = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}n^2 = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty}(-2-n)e^{-n} = 0 \end{cases}$

CORRECTION EXAMEN 5 : Bac D Session normale 2013

Exercice 1

$1-a)$



$b)$ **Déterminons la forme algébrique du nombre complexe** $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{2+4i-2}{4+2i-2}=\frac{4i}{2+2i}=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2+2i}{2}=1+i$$

$2-a)$ **Démontrons que l'écriture complexe de S est : $Z'=(1+i)Z-2i$**

L'écriture complexe de toute similitude directe est : $Z'=aZ+b$; $a,b\in\mathbb{C} avec |a|\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$

$\overset{\curvearrowright}{S}$	
K	**K**
A	**B**

Donc : $\begin{cases} Z_K=aZ_K+b \\ Z_B=aZ_A+b\end{cases}\Rightarrow Z_B-Z_K=a(Z_A-Z_K)$ **Alors :** $a=\frac{Z_B-Z_K}{Z_A-Z_K}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=1+i$ **D'où :** $a=1+i$

$Z_K=\frac{b}{1-a}\Rightarrow b=Z_K(1-a)=2(1-1-i)=-2i$ **D'où :** $b=-2i$

Alors, l'écriture complexe de S est : $Z'=(1+i)Z-2i$

$b)$ **Les affixes respectives des points I' et J', images respectives des points I et J puis placer I' et J'**

$Z_{I'}=(1+i)Z_I-2i=(1+i)\times 1-2i=1+i-2i=1-i$ **D'où :** $Z_{I'}=1-i$

$Z_{J'}=(1+i)Z_J-2i=(1+i)\times i-2i=i-1-2i=-1-i$ **D'où :** $Z_{J'}=-1-i$

3 –Le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude directe S

$a=1+i$; $k=|a|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\theta=Arg(a)=\frac{\pi}{4}$ **car :** $\begin{cases} cos\theta=\frac{Re(a)}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta=\frac{Im(a)}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\theta=\frac{\pi}{4}$

La similitude S a pour rapport $k=\sqrt{2}$ et pour angle orienté $\theta=\frac{\pi}{4}$

$4-a)$ voir figure

$b)$Déterminons le centre et le rayon de $(\mathcal{C}')$, image de $(\mathcal{C})$ par S

$(\mathcal{C})$ est le cercle de centre Ω d'affixe $Z_\Omega=1+i$ et de rayon $r=2$. Alors $(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre $\Omega'=S(\Omega)$ et de rayon $r'=kr$.

$Z_{\Omega'}=(1+i)Z_\Omega-2i=(1+i)(1+i)-2i=0$; $r'=kr=2\sqrt{2}$

$(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre O et de rayon $r'=2\sqrt{2}$

$c)$ **Voir figure**

$5-a)$La droite (IJ) est déterminée par la donnée de deux

points distincts I et J alors l'image par S de la droite (IJ)est la droite $(I'J')$

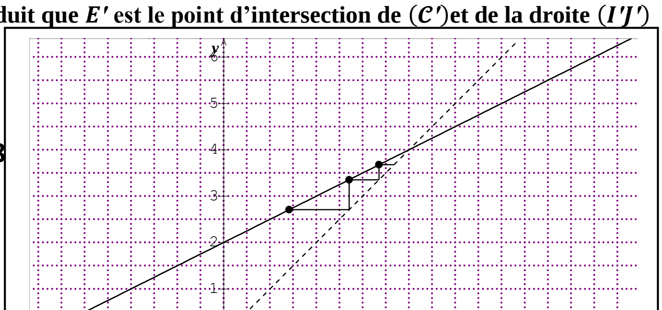
$b)$ plaçons le point $E(\boldsymbol{Voir figure})$

Justifions la positions de E'

E étant le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et de la droite (IJ), on en déduit que E' est le point d'intersection de $(\mathcal{C}')$et de la droite $(I'J')$

on a $S(E)=E'$ alors $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{KE},\overrightarrow{KE'}}\right)=\frac{\pi}{4}$

Exercice 2



1) Déterminons les valeurs exactes de u_1 et u_2

$u_1 = 2 + \frac{1}{2}u_0 = 2 + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$;

$u_2 = 2 + \frac{1}{2}u_1 = 2 + \frac{1}{2} \times \frac{4+\sqrt{2}}{2} = \frac{12+\sqrt{2}}{4}$

$2 - a$)Traçons (D) et la droite (Δ) d'équation $y = x$

$3 - a$)Démontrons par récurrence sur$n$ que : $\forall n \in N : U_n \leq 4$

On a : $u_0 = \sqrt{2}$ alors $u_0 < 4$; la relation est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$: $u_k \leq 4$ et montrons que $u_{k+1} \leq 4$

$\forall k \in \mathbb{N}$: $u_k \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{2}U_k \leq \frac{1}{2} \times 4 \Rightarrow 2 + \frac{1}{2}U_k \leq 2 + 2 \Rightarrow$

$2 + \frac{1}{2}U_k \leq 4$ or $U_{k+1} = 2 + \frac{1}{2}U_k$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$: $U_{k+1} \leq 4$

En conclusion$\forall n \in N$: $U_n \leq 4$.

Par conséquent la suite u est majorée par 4

b) Démontrons que la suite (u) est croissante.

$u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{1}{2}u_n - u_n = 2 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(4 - u_n)$

Or d'après la question précédente $\forall n \in N$: $U_n \leq 4$

Alors $-u_n \geq -4 \Rightarrow 4 - u_n \geq 0$ Donc $\frac{1}{2}(4 - u_n) \geq 0$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(4 - u_n) \geq 0$ D'où la suite (u) est croissante

c) La suite (u) est une suite croissante et majorée par 4, elle converge vers 4

$4 -$ Démontrons que la suite (v) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison

$v_n = u_n - 4$ alors $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 2 + \frac{1}{2}u_n - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ Alors (v) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = \sqrt{2} - 4$

$5 - a$) Déterminons une expression de T_n en fonction de n

T_n est la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \sqrt{2} - 4$

$T_n = v_0 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2(\sqrt{2} - 4)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ Alors $T_n = 2(\sqrt{2} - 4)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

b) Justifions que : $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 4(n + 1)$

$S_n = u_{0+}u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (v_0 + 4) + (v_1 + 4) + (v_2 + 4) \ldots + (v_n + 4)$

$S_n = v_{0+}v_1 + v_2 + \cdots + v_n + 4(n + 1) = T_n + 4(n + 1)$

D'où : $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 4(n + 1)$

<u>Problème</u>

Pour les calculs de limites on posera à chaque fois $X = 1 - x \Rightarrow x = 1 - X$ et lorsque $x \to -\infty, X \to +\infty$ ou lorsque $x \to 1, X \to 0$

$1 - a$) *Calculons* $lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty}[(1 - X)^2 - 1 + lnX] = \lim_{X\to+\infty}(X^2 - 2X + lnX) = \lim_{X\to+\infty} X\left(X - 2 + \frac{lnX}{X}\right) = +\infty$

Car $\lim_{X\to+\infty} \frac{lnX}{X} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b) Calculons $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1+ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[x - \frac{1}{x} + \frac{ln(1-x)}{x}\right] = \lim_{X\to+\infty}\left(1 - X - \frac{1}{1-X} + \frac{lnX}{1-X}\right) = -\infty$ car

$\begin{cases} \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{1-X} = \lim_{\to+\infty} -\frac{1}{X} = 0 \\ \lim_{\to+\infty} \frac{lnX}{1-X} = \lim_{\to+\infty} \frac{X}{1-X} \times \frac{lnX}{X} = 0 \end{cases}$ Alors $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$; La courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ)

c) $\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{X\to0 \\ >}}(X^2 - 2X + lnX) = -\infty$ car $\lim_{\substack{X\to0 \\ >}}(X^2 - 2X) = 0$ et $\lim_{\substack{X\to0 \\ >}}(lnX) = -\infty$

$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = -\infty$ Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote « verticale » à la courbe $(\mathcal{C})$

$2 - a$) Calculons $f'(x)$

$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) = [x^2 - 1 + ln(1 - x)]' = 2x + \frac{(1-x)'}{1-x} = 2x - \frac{1}{1-x} = \frac{-2x^2+2x-1}{1-x}$

$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x-1}$

b) Démontrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$

$\forall x \in]-\infty; 1[, 2x^2 - 2x + 1 > 0$ car son discriminant $\Delta = -4 < 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$ or $x - 1$est négatif sur $]-\infty; 1[$

D'où : $\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) < 0$ Alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$

c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ 1
$f'(x)$	$-$ $\quad\quad\quad\quad$ $-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

$3-a$) **Démontrons que l'équation $(E): x \in]-\infty; 1[, f(x) = 0$ admet une solution unique α**

$\forall x \in]-\infty; 1[, f$ est continue et strictement décroissante, alors $f$réalise une bijection de $]-\infty; 1[$ vers $\mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$. Donc l'équation $(E): x \in]-\infty; 1[, f(x) = 0$ admet une solution unique α

b) **Justifions que $-0,7 < \alpha < -0,7$**

$f(-0,7) = (-0,7)^2 - 1 + ln(1+0,7) \approx 0,0206$; $\quad f(-0,6) = (-0,6)^2 - 1 + ln(1+0,6) \approx -0,170$

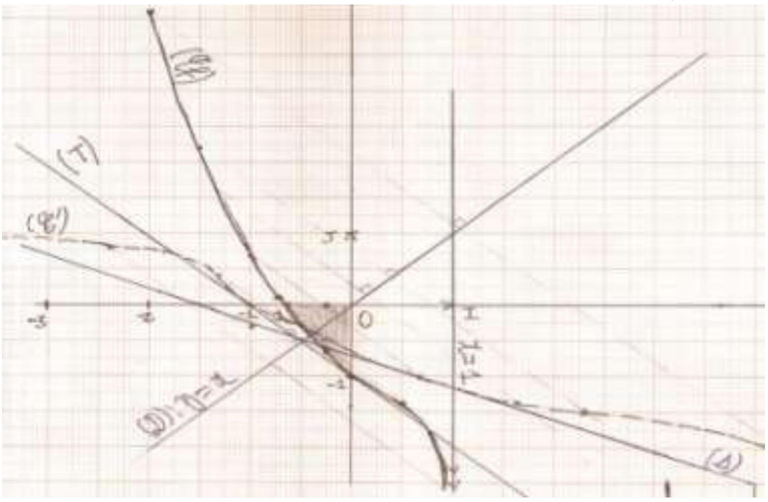
$f(-0,7)$ et $f(-0,6)$ sont de signes contraires alors : $-0,7 < \alpha < -0,6$

$4-a$) **Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$.**

$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ **avec** $x_0 = 0$; $f'(x_0) = -1$ *et* $f(x_0) = -1$

$(T): y = -(x-0) - 1$ $\quad\quad$ **Alors** $(T): y = -x - 1$

b)



$5-a$) **Calculer $\int_{\alpha}^{0} ln(1-x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties**

Posons : $\begin{cases} u(x) = ln(1-x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$; **on a** $\begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{1-x} \\ v(x) = x \end{cases}$ **Alors :** $\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)\,dx = [xln(1-x)]_{\alpha}^{0} + \int_{\alpha}^{0} \frac{x}{1-x}dx =$

$[xln(1-x)]_{\alpha}^{0} + \int_{\alpha}^{0}\left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)dx = [xln(1-x) - x - ln(1-x)]_{\alpha}^{0} = (1-\alpha)ln(1-\alpha) + \alpha$

$$\int_{\alpha}^{0} ln(1-x)dx = (1-\alpha)ln(1-\alpha)$$

b) **Démontrons que la valeur de $\mathcal{A}$ en unités d'aire est : $\mathcal{A} = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)ln(1-\alpha)$**

$\mathcal{A} = -\int_{\alpha}^{0} f(x)dx = -\int_{\alpha}^{0}\left(x^2 - 1 + ln(1-x)\right)dx = -\int_{\alpha}^{0}(x^2-1)dx - \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx =$

$-\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{\alpha}^{0} - (1-\alpha)ln(1-\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3 - \alpha - (1-\alpha)ln(1-\alpha) - \alpha$

Alors : $\mathcal{A} = \left[\frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)ln(1-\alpha)\right]u.a$

c)**pour** $\alpha = -0,65$; $\mathcal{A} = 2 \times 2\left[\frac{(-0,65)^3}{3} + 2 \times 0,65 - (1+0,65)ln(1+0,65)\right] \approx 1,529$

$$\mathcal{A} \approx 1,529cm^2$$

$6-a$) **Calculons $f(-1)$**

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 + ln2 = 1 - 1 + ln2 = ln2 f(-1) = ln2$$

b) **Démontrons que le nombre dérivé de f^{-1} en $ln2$ existe**

$\forall x \in]-\infty; 1[, f$ est continue et strictement décroissante, alors f réalise une bijection de $]-\infty; 1[$ vers $\mathbb{R}$. Donc f^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty; 1[$ et en plus $f(-1) = ln2$ ce qui conduit à $f^{-1}(ln2) = -1$. D'où le nombre dérivé de f^{-1} en $ln2$ existe

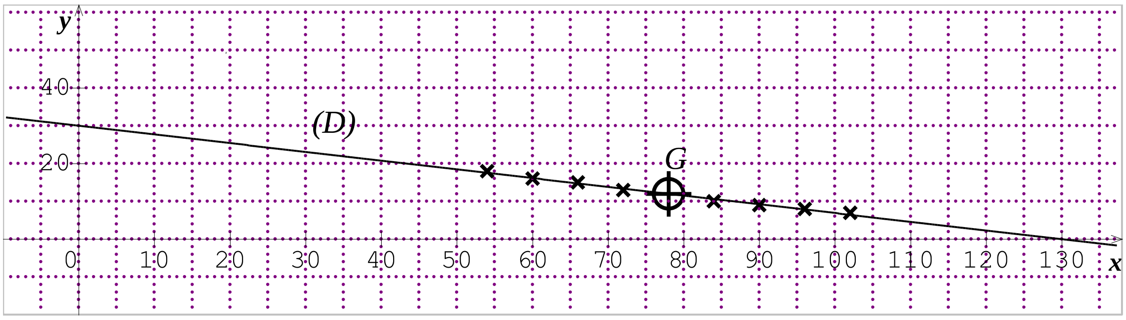
$$(f^{-1})'(ln2) = \frac{1}{f'[f^{-1}(ln2)]} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}(f^{-1})'(ln2) = -\frac{2}{5}$$

c) **La courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de f^{-1} se déduit de celle de $(\mathcal{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) d'équation$y = x$**

CORRECTION EXAMEN 6 : Bac D Session normale 2012

Exercice 1

$$1 - représentation\ graphique\ de\ nuages\ de\ points$$



2) Calculons les coordonnées du point moyen G

Tableau de calcul

x_i	54	60	66	72	84	90	96	102	624
y_i	18	16	15	13	10	9	8	7	96
${x_i}^2$	2916	3600	4356	5184	7056	8100	9216	10404	50832
${y_i}^2$	324	256	225	169	100	81	64	49	1268
$x_i \times y_i$	972	960	990	936	840	810	768	714	6990

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{624}{8} = 78\ ;\ \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{96}{8} = 12 \quad alors\ G\binom{78}{12}$$

$3 - a$)Calculons la variance $V(X)$ de X

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{{X_i}^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{50832}{8} - 78^2 = 6354 - 6084 = \frac{26}{3}$ **Alors** $V(x) = 270$

b) Calculer $COV(x, y)$ la covariance des variables X et Y.

$cov(X, Y) = \sum_{i=1}^{8} \frac{X_i \times Y_i}{n} - \overline{Y} \times \overline{Y} = \frac{6990}{8} - 78 \times 12 = \frac{3495}{4} - 936 = -\frac{249}{4}$ **Alors** $cov(X, Y) = -\frac{249}{4}$

c)Démontrons que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à -0,99

$$r = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \frac{-\frac{249}{4}}{\sqrt{270 \times 14,50}} = -\frac{149}{12\sqrt{435}} \approx -0,994886 r \approx -0,99$$

$4 - a$)Justifions que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de ($\mathcal{D}$).est égal à -0,23

$a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{-\frac{249}{4}}{270} = -\frac{249}{4 \times 270} = -\frac{249}{1080} \approx -0,2305555$ **Alors** $a \approx -0,23$

b)Démontrons qu'une équation de la droite de la droite ($\mathcal{D}$) est : $-0,23x + 29,94$

$\left(D_{y/x}\right)$ $\quad y = ax + b$ **avec** $b = \overline{y} - a\overline{x} = 12 + 0,23 \times 78 = 29,94$

Alors $\left(D_{y/x}\right)$ $\quad y = -0,23x + 29,94$

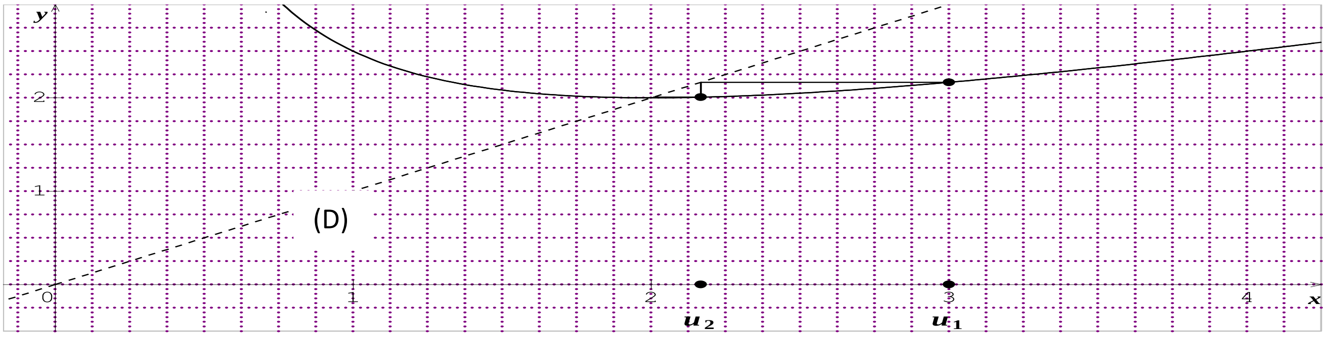
$$5 - x = 11500 = 115(en\ centaine\ de\ francs)$$

$y = -0,23 \times 115 + 29,94 = 3,49$

Elle pourra vendre environ 35 *colliers*

Exercice 2

$$1 - a)$$



$b)$ La représentation graphique des termes de la suite permet de conjecturer que la suite U converge vers 2.

$2-a)$Démontrons que $f([2;3]) \subset [2;3]$

f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$, $f([2;3]) = [f(2);f(3)]$

Or $f(2) = \frac{1}{2}\left(2+\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{2}\times 4 = 2$ et $f(3) = \frac{1}{2}\left(3+\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{13}{3} = \frac{13}{6}$ on a :$\left[2;\frac{13}{6}\right] \subset [2;3]$

Donc : $f([2;3]) \subset [2;3]$

$b)$ En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrons que pour tout entier $n \geq 1$, $2 \leq U_n \leq 3$

Pour $n = 1$, $U_1 = 3$ alors $2 \leq U_1 \leq 3$: la relation est vraie pour $n = 1$.

Supposons la relation vraie pour tout $k \geq 1$ c'est-à-dire $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $2 \leq U_k \leq 3$ et montrons que $2 \leq U_{k+1} \leq 3$

On sait que f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$, alors $f(2) \leq f(u_k) \leq f(3)$

Alors $f(u_k) \in [f(2);f(3)] = f([2;3]) \subset [2;3]$ donc $f(u_k) \in [2;3]$

$2 \leq f(u_k) \leq 3$ or $f(u_k) = u_{k+1}$

$2 \leq U_{k+1} \leq 3$ La relation est vraie à l'ordre $k+1$

En conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, $2 \leq U_n \leq 3$

$3-a)$ Démontrons que la suite U est décroissante

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n} - 2U_n\right) = \frac{1}{2}\left(-U_n + \frac{4}{U_n}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{4-U_n{}^2}{U_n} = \frac{(2-U_n)(2+U_n)}{2U_n}$

$2 \leq U_n \leq 3$; $U_n > 0$ Alors $\frac{(2+U_n)}{2U_n} > 0$ alors le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend de celui de $2 - U_n$

On a : $2 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow -2 \geq -U_n \geq -3 \Rightarrow 0 \geq 2 - U_n \geq -1$ ou bien $-1 \leq 2 - U_n \leq 0$

$2 - U_n < 0$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$; La suite U est décroissante

$b)$ La suite U est décroissante et minorée par 2, alors la suite U converge vers 2

$4-a)$ Démontrons que pour tout entier $n \geq 1$, $V_{n+1} = (V_n)^2$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* V_n = \frac{U_n-2}{U_n+2}$; $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}+2} = \frac{\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{4}{U_n}\right)-2}{\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{4}{U_n}\right)+2} = \frac{\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{4}{U_n}-4\right)}{\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{4}{U_n}+4\right)} = \frac{\frac{U_n{}^2-4U_n+4}{U_n}}{\frac{U_n{}^2+4U_n+4}{U_n}} = \frac{U_n{}^2-4U_n+4}{U_n{}^2+4U_n+4} = \frac{(U_n-2)^2}{(U_n+2)^2} = \left(\frac{U_n-2}{U_n+2}\right)^2$

Or $V_{n+1} = \left(\frac{U_n-2}{U_n+2}\right)^2 = (V_n)^2$, donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = (V_n)^2$

$b)$ Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

Pour $n = 1$, $V_1 = (V_1)^{2^{1-1}} = (V_1)^{2^0} = V_1{}^1 = V_1$: la relation est vraie pour $n = 1$.

Supposons la relation vraie pour tout $k \geq 1$ c'est-à-dire $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$,$V_n = (V_1)^{2^{k-1}}$ et montrons que $V_{k+1} = (V_1)^{2^{(k+1)-1}}$

$$V_{k+1} = (V_k)^2 = \left[(V_1)^{2^{k-1}}\right]^2 = (V_1)^{(2^{k-1})\times 2} = (V_1)^{2^{k-1+1}} = (V_1)^{2^{(k+1)-1}}$$

$V_{k+1} = (V_1)^{2^{(k+1)-1}}$La relation est vraie à l'ordre $k+1$

En conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

$c)$ Calculons V_1 puis exprimons V_n en fonction de n

$V_1 = \frac{U_1-2}{U_1+2} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5} V_1 = \frac{1}{5}$

$V_n = (V_1)^{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2^{n-1}} = \frac{1}{(5)^{2^{n-1}}}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $V_n = \frac{1}{(5)^{2^{n-1}}}$

$d)$ Expressions de U_n en fonction de n

$V_n = \frac{U_n-2}{U_n+2} \Rightarrow V_n \times U_n + 2V_n = U_n - 2 \Rightarrow U_n(V_n - 1) = -2(V_n + 1)$ alors : $U_n = \frac{2(V_n+1)}{1-V_n}$

D'où : $U_n = \frac{2\left(\frac{1}{(5)^{2^{n-1}}}+1\right)}{1-\frac{1}{(5)^{2^{n-1}}}}$

$d)$ Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} V = 0$

$\lim_{n\to+\infty} V = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(5)^{2^{n-1}}} = 0$ Car $0 < \frac{1}{5} < 1$

$\lim_{n\to+\infty} U = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{2(V_n+1)}{1-V_n}\right] = \frac{2(0+1)}{1-0} = 2 \lim_{n\to+\infty} U = 2$

PROBLEME

Partie A

$1-a)$ Déterminons $\lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(e^x + 2lnx) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to 0} e^x = +\infty \\ \lim_{x\to 0} lnx = +\infty \end{cases}$ Alors $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}(e^x + 2lnx) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} e^x = 1 \\ \lim_{x\to +\infty} lnx = -\infty \end{cases}$ Alors $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

***b*) Calculons $g'(x)$**

$\forall\, x \in\ ]0; +\infty[\ ; g'(x) = (e^x + 2lnx)' = e^x + \frac{2}{x} = \frac{xe^x+2}{x}$ Alors $\forall\, x \in\ ]0; +\infty[\ ; g'(x) = \frac{xe^x+2}{x}$

***c*) Sens de variation de g**

$\forall\, x \in\ ]0; +\infty[\ , x > 0; xe^x > 0\ \ alors\ \frac{xe^x+2}{x} > 0$

$\forall\, x \in\ ]0; +\infty[\ , g'(x) > 0$, g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de g

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	//	$+$	
$g(x)$	// $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$2-a$) **Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$**

$\forall\, x\ \in\ ]0; +\infty[$, g est continue et strictement croissante, alors g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$. Donc l'équation , $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$

***b*) Justifions que $0,4 < \alpha < 0,5$**

$f(0,4) = (e)^{0,4} + 2ln(0,4) \approx -0,3407$; $f(0,5) = (e)^{0,5} + 2ln(0,5) \approx 0,2624$

$f(0,4)$ et $f(0,5)$ sont de signes contraires alors : $0,4 < \alpha < 0,5$

***c*) Démontrons que : $\forall\, x \in\ ]0; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall\, x \in]\alpha; +\infty[\ , g(x) > 0$**

- $\forall\, x\ \in\ ]0; \alpha[, x < \alpha$ comme g est strictement croissante sur $]0; \alpha[$, $g(x) < g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$

Donc $\forall\, x \in\ ]0; \alpha[, g(x) < 0$

- $\forall\, x \in]\alpha; +\infty[, x > \alpha$ comme g est strictement croissante sur $]0; \alpha[$, $g(x) > g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$

Donc $\forall\, x \in\ ]0; \alpha[, g(x) > 0$

En conclusion : $\forall\, x \in\ ]0; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall\, x \in]\alpha; +\infty[\ , g(x) > 0$

Partie B

$1-a$) **Déterminons $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$**

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(e^x + 2xlnx - 2x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} + 2lnx - 2\right) + \infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} lnx = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} x = +\infty \end{cases}$

  Alors $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{e^x}{x} + 2lnx - 2\right) = +\infty$ car : $\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} lnx = +\infty \end{cases}$ Alors $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

***b*) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$; Alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ)**

$2-a$) **Démontrons que f est continue en 0.**

la fonction f est continue en 0 si et seulement si: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(e^x + 2xlnx - 2x) = 1$ Car $\lim_{x\to 0} e^x = 1$; $\lim_{x\to 0} xlnx = 0$ *et* $\lim_{x\to 0} x = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$; alors f est continue en 0.

***b*)Démontrer que : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$**

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+2xlnx-2x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x} + 2lnx - 2\right) = -\infty$ Car $\begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0} lnx = -\infty \end{cases}$

***c*) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ n'est pas finie, alors la fonction f n'est pas dérivable en 0**

***d*) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ donc $(\mathcal{C})$admet une tangente verticale au point $A(0; 1)$**

$3-a$) **Démontrons que $\forall\, x \in\ ]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$**

$\forall\, x \in\ ]0; +\infty[, f'(x) = (e^x + 2xlnx - 2x - 1)' = e^x + 2(lnx + 1) - 2 = e^x + 2lnx + 2 - 2 = e^x + 2lnx = g(x)$

Donc : $\forall\, x \in\ ]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$

***b*) Les variations de f**

$\forall\, x \in\ ]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

$\forall\, x \in\ ]0; \alpha[, f'(x) < 0$: f est continue et strictement décroissante sur $]0; \alpha[$

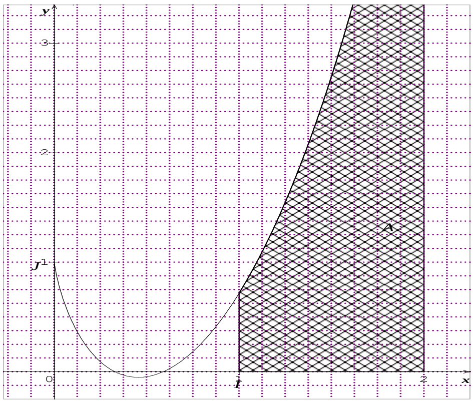
$\forall\, x \in\ ]\alpha; +\infty[, f'(x) > 0$: f est continue et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$

Tableau de variation de f

x	0		$\propto$		$+\infty$
$f'(x)$	//	$-$	0	$+$	

$f(x)$	▨	$1 \searrow f(\propto) \nearrow +\infty$

$4 -$ Représentation graphique de f sur l'intervalle $[0;2]$



$5 - a)$ A l'aide d'une intégration par parties, démontrons que : $K = 2ln2 - \frac{3}{4}$

Posons : $\begin{cases} u(x) = lnx \\ v'(x) = x \end{cases}$; **on a** $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$ **Alors :** $\int_1^2 x\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 lnx\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2$

$K = \left(\frac{1}{2}2^2 ln2 - \frac{1}{4}\times 2^2\right) - \left(\frac{1}{2}1^2 ln1 - \frac{1}{4}\times 1^2\right) = 2ln2 - 1 + \frac{1}{4} = 2ln2 - \frac{3}{4}$ **Donc :** $K = \int_1^2 x\ln x\,dx = 2ln2 - \frac{3}{4}$

$b)$ Calculons $\mathcal{A}$ puis donnons l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

$\mathcal{A} = \left(\int_1^2 f(x)dx\right) OI \times OJ = 4 \times 4\int_1^2 (e^x + 2xlnx - 2x)dx = 16\int_1^2 (e^x - 2x)dx + 32\int_1^2 xlnxdx$

$\mathcal{A} = 16[e^x - x^2]_1^2 + 32K = 16(e^2 - 4 - e + 1) + 32\left(2ln2 - \frac{3}{4}\right) = 16\left(e^2 - e + 4ln2 - \frac{9}{2}\right)$

$$\mathcal{A} \approx 47,09cm^2$$

CORRECTION EXAMEN 7 : Bac D Session normale 2011

Exercice 1

$1-a$) Démontrons que la suite (V_n) est convergente.

$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2} = 1$; $\lim_{n\to+\infty} V_n = 1$

$\lim_{n\to+\infty} V_n$ existe et est finie, alors la suite (V_n) est convergente

b) Démontrons que la suite (V_n) est croissante

La suite (V_n) est définie par une formule explicite du type $V_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

Etudions le sens de variation de f sur $[1;+\infty[$

$\forall\, x \in [1;+\infty[, f'(x) = \left[\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right]' = \frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)[(x+1)^2-x^2-2x]}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}$

$\forall\, x \in [1;+\infty[, f'(x) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}$

$\forall\, x \in [1;+\infty[, f'(x) > 0$ la fonction f est strictement croissante.

Comme la suite (V_n) et la fonction f ont même sens de variation on conclut que la suite (V_n) est croissante

On pouvait aussi comparer V_{n+1} et V_n ce qui revenait à calculer $V_{n+1} - V_n$

c) Démontrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \le V_n < 1$

On a $V_1 = \frac{1^2+2\times1}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$, la suite (V_n) est une suite croissante qui converge vers 1, alors son plus petit terme est son premier terme. Donc :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \le V_n < 1$

$2-a$) Démontrons par récurrence sur n que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

$a_n = v_1 \times v_2 \times v_3 \ldots \times v_n$ alors $a_1 = v_1 = \frac{3}{4}$

$a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$; alors $a_1 = \frac{1+2}{2(1+1)} = \frac{3}{4}$: la relation est donc vraie à l'ordre 1

Supposons cette relation vraie à l'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$) c'est-à-dire $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$ et montrons que

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$$

$a_k = v_1 \times v_2 \times v_3 \ldots \times v_k$ alors $a_{k+1} = \underbrace{v_1 \times v_2 \times v_3 \ldots \times v_k}_{a_k} \times v_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times v_{k+1}$

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)^2+2(k+1)}{[(k+1)+1]^2} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = \frac{k+3}{2(k+2)} = \frac{(k+1)+1}{2[(k+1)]}$$

On vérifie que $a_{k+1} = \frac{(k+1)+1}{2[(k+1)]}$

En conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

b)Déduisons la limite de la suite (a_n)

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n+2}{2(n+1)}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{2n+2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. alors : $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$

$3-a$) Démontrons que(b_n) est une suite à termes négatifs

D'après la question $1-c$) $\frac{3}{4} \le V_n < 1$ alors $ln\left(\frac{3}{4}\right) \le lnV_n < ln1 \Rightarrow lnV_n < 0$

Alors (b_n) est la somme de n termes d'une suite négative.

b) Calculons la limite de la suite (b_n)

$$b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n) = ln(v_1 \times v_2 \times v_3 \ldots \times v_n) = lna_n$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} ln a_n = ln \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = ln\frac{1}{2} = -ln2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -ln2$

Exercice 2

$1-a)$ Calculons l'espérance mathématique $E(X)$de X en fonction de a et b

$E(X) = \sum X_i P_i = 220 \times 0,08 + 230 \times 0,10 + 240 \times a + 250 \times b + 260 \times 0,16 + 270 \times 0,15 + 280 \times 0,04$

$E(X) = 133,9 + 240a + 250b$

$b)$Sachant que $E(X) = 250$ justifier que a = 0,14 et b = 0,33

$E(X) = 250 \Leftrightarrow 133,9 + 240a + 250b = 250$ **Alors :** $240a + 250b = 116,1$

De plus on sait que $\sum P_i = 1 \Leftrightarrow 0,08 + 0,10 + a + b + 0,16 + 0,15 + 0,04 = 1$

Alors : $a + b = 0,47$

Déterminer a et b revient à résoudre le système : $\begin{cases} 240a + 250b = 116,1 \\ a + b = 0,47 \end{cases}$

$\begin{cases} 240a + 250b = 116,1 \\ a + b = 0,47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0,47 - a \\ 240a + 250(0,47 - a) = 116,1 \end{cases} \Rightarrow -10a = -1,4$ **alors** $a = 0,14$

$b = 0,47 - 0,14 = 0,33$

Finalement $a = 0,14$ **et** $b = 0,33$

2 −Calculons la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250 g

$P(X \geq 250) = 0,33 + 0,16 + 0,15 + 0,04 = 0,68$

$P(X \geq 250) = 0,68$

3 − Calculer la probabilité qu'elle ait choisit exactement trois sachets de lait caillé de 220 g

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de sachets de lait caillé de 220 g choisi par Tiéplé

Comme chaque choix conduit à 2 éventualités : soit le sachet a 220g ou non

Alors Y suit une loi binomiale de paramètres $(n = 5; p = 0,08)$

$P(Y = 3) = C_5^3 (0,08)^3 \times (1 - 0,08)^{5-3} = 10 \times 0,08^3 \times (0,92)^2 \approx 0,00433$

$4-a)$Justifions que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est 0,098

Soit A : L'évènement « le sachet de lait caillé est accepté » et E: L'évènement « le sachet de lait caillé est éliminé » et B_{240} : L'évènement « le sachet de lait à 240g »

$P(B_{240} \cap E) = P(B_{240}) \times P_{B_{240}}(E) = 0,14 \times 0,7 = 0,098$

$b)$ Calculons la probabilité pour qu'un sachet de lait de cette société soit éliminé

En appliquant la formule des probabilités totales

$P(E) = P(B_{220} \cap E) + P(B_{230} \cap E) + P(B_{240} \cap E) = 0,14 \times 0,7 + 0,10 \times 0,8 + 0,08 \times 1 = 0,258$

$P(E) = 0,258$

PROBLEME

Partie A

$1-a)$ Calculons $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{2x+1}{x^2} + lnx\right) = +\infty$ **car** $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{2x+1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$b)$ Calculons $\lim_{x\to0_>} g(x)$

$\lim_{\substack{x\to0\\>}} g(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \left(-\frac{2x+1}{x^2} + lnx\right) = -\infty$ **car** $\lim_{\substack{x\to0\\>}} lnx = -\infty$; $\lim_{\substack{x\to0\\>}}(2x+1) = 1$ *et* $\lim_{\substack{x\to0\\>}} x^2 = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} g(x) = -\infty$

$2-a)$ Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

$\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \left(-\frac{2x+1}{x^2} + lnx\right)' = -\frac{(2x+1)x^2-(x^2)'(2x+1)}{x^4} + \frac{1}{x} = -\frac{2x^2-2x(2x+1)}{x^4} + \frac{1}{x} = -\frac{2x-2(2x+1)}{x^3} + \frac{x^2}{x^3}$

$\frac{x^2-2x+4x+2}{x^3} = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$.

$\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

$b)$ Déduisons le sens de variation de g

$\forall x \in]0;+\infty[, x^3 > 0$, **alors le signe de g' dépend de** $x^2 + 2x + 2$

Or $x^2 + 2x + 2$ est positif car son discriminant est négatif

$\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) > 0$ **alors g est strictement croissante.**

Dressons le tableau de variation de la fonction g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$3-a)$ **Démontrons que l'équation $x \in]0;+\infty[, g(x)=0$ admet une solution unique α.**

$\forall x \in]0;+\infty[$, g est continue et strictement croissante, alors g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$. Donc l'équation , $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$

$b)$ **Justifions que $2,55 < \alpha < 2,56$**

$f(2,55) = -\frac{2\times2,55+1}{(2,55)^2} + ln2,55 \approx -0,002$; $f(2,56) = -\frac{2\times2,56+1}{(2,56)^2} + ln2,56 \approx 0,006$

$f(2,55)$ et $f(2,56)$ sont de signes contraires alors : $2,55 < \alpha < 2,56$

$c)$ **Démontrons que : $\forall x \in]0;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) > 0$**

- $\forall x \in]0;\alpha[, x < \alpha$ comme g est strictement croissante sur $]0;\alpha[$, $g(x) < g(\alpha)$ or $g(\alpha)=0$

Donc $\forall x \in]0;\alpha[, g(x) < 0$

- $\forall x \in]\alpha;+\infty[, x > \alpha$ comme g est strictement croissante sur $]0;\alpha[$, $g(x) > g(\alpha)$ or $g(\alpha)=0$

Donc $\forall x \in]0;\alpha[, g(x) > 0$

En conclusion : $\forall x \in]0;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) > 0$

PARTIE B

$1-a)$ **Calculons $\lim_{x\to0_>} f(x)$ puis donnons une interprétation graphique du résultat**

$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \left[\left(\frac{1}{x} - lnx\right)e^{-x}\right] = +\infty$ car $\lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{\substack{x\to0\\>}} lnx = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to0\\>}} e^{-x} = 1$

$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = +\infty$; alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote « verticale » à la courbe $(\mathcal{C})$

$b)$ **Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat**

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - lnx\right)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{xe^x} - \frac{lnx}{e^x}\right) = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{e^x} = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ Alors la droite d'équation $y=0$ est asymptote « horizontale » à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

$2-$ **Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$**

$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - ln\alpha\right)e^{-\alpha}$; d'après la question $A.3-a)$: $g(\alpha)=0 \Rightarrow -\frac{2\alpha+1}{\alpha^2} + ln\alpha = 0$ alors : $ln\alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$

$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha} = \left(\frac{\alpha-2\alpha-1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}\left(-\frac{\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}$ Donc : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$

$3-a)$ **Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = e^{-x}.g(x)$**

$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \left[\left(\frac{1}{x} - lnx\right)e^{-x}\right]' = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-x} - \left(\frac{1}{x} - lnx\right)e^{-x} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + lnx\right)e^{-x} =$

$\left(-\frac{2x+1}{x^2} + lnx\right)e^{-x}$ or $g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + lnx$

D'où : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = e^{-x}.g(x)$

$b)$ **En utilisant la partie A, déterminons les variations de f**

$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = e^{-x}.g(x)$; or $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

- $\forall x \in]0;\alpha[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0;\alpha[$
- $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$

$c)$ **Dressons le tableau de variation de f**

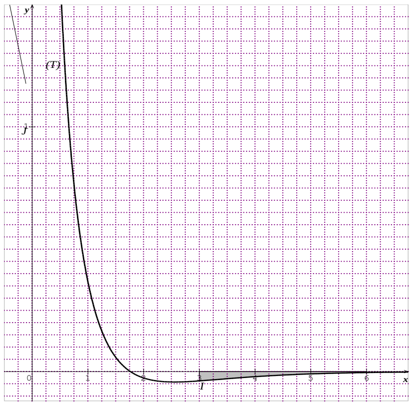
x	0		$\propto$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\propto)$	$\nearrow$	0

$4-$ **Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1 est : $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$**

(T) :$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ avec $x_0 = 1$; $f'(1) = -\frac{3}{e}$ et $f(1) = \frac{1}{e}$

(T) :$y = -\frac{3}{e}(x-1) + \frac{1}{e} = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$ Alors : (T) :$y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$

$5-$ **Construire la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C})$ dans le plan muni du repère (O,I,J). On prendra $\alpha = 2,6$**



Partie C

$1-$ Démontrer que h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$ si et seulement si : $\forall\ x \in\ ]0;+\infty[\ h'(x) = f(x)$

$$h'(x) = (e^{-x}.lnx)' = -e^{-x}.lnx + \frac{1}{x} \times e^{-x} = \left(\frac{1}{x} - lnx\right)e^{-x}$$

$\forall\ x \in\ ]0;+\infty[\ h'(x) = f(x)$, alors h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

On considère la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $f(x) = \left(\frac{1}{x} - lnx\right)e^{-x}$.

$2-a$) Calculons , en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équation $x = 3$ et $x = \lambda$.

$$\mathcal{A}(\lambda) = -OI \times OJ\int_3^\lambda f(x)dx = -2 \times 10\int_3^\lambda f(x)dx = -20[h(x)]_3^\lambda = -20[e^{-x}.lnx]_3^\lambda = 20\left(\frac{ln3}{e^3} - \frac{ln\lambda}{e^\lambda}\right)cm^2$$

b) Calculons$\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$

$\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\left[20\left(\frac{ln3}{e^3} - \frac{ln\lambda}{e^\lambda}\right)\right] = 20 \times \frac{ln3}{e^3}$ **car** $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{ln\lambda}{e^\lambda} = 0$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda) = 20 \times \frac{ln3}{e^3}cm^2$$

CORRECTION EXAMEN 8 : Bac D Session normale 2010

Exercice 1

Partie A

1) Déterminons les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$

Soit $Z = 6 + 6i\sqrt{3}$; $|Z| = \sqrt{(6)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36+108} = \sqrt{144} = 12$

Soit $z = x + iy$ une racine carrée de Z

$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ x^2 - y^2 = 6 \\ 2xy = 6\sqrt{3} \end{cases}$ **; en ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient :** $2x^2 = 18$ **alors**

$x^2 = 9 \Longrightarrow x = 3\ \ ou\ \ x = 3$

Pour$x = 3$; $y = \sqrt{3}$ **et Pour** $x = -3$; $y = -\sqrt{3}$

Alors les deuxracinescarrées de $Z = 6 + 6i\sqrt{3}\ \ sont\!: 3 + \sqrt{3}i\ \ \ et\ \ -3 - \sqrt{3}i$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$: l'équation $2Z^2 - \left(1 + 3i\sqrt{3}\right)Z - 4 = 0$

$\Delta = \left[-\left(1 + 3i\sqrt{3}\right)\right]^2 - 4 \times 2 \times (-4)$**=**$1 + 6i\sqrt{3} - 27 + 32 = 6 + 6i\sqrt{3}$

$\Delta = Z = 6 + 6i\sqrt{3}$**, alors les racines carrées de Δ sont** $\delta = 3 + 3i\sqrt{3}$ **et** $-\sigma = -3 - 3i\sqrt{3}$

$$Z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a} = \frac{1 + 3i\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3}i}{2\times 2} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$Z_2 = \frac{-b+\sigma}{2a} = \frac{1+3i\sqrt{3}+3+\sqrt{3}i}{2\times2} = \frac{4+4i\sqrt{3}}{4} = 1 + i\sqrt{3}$**+**

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 + i\sqrt{3}\right\}$$

$3-a$) Développons, réduisons et ordonnons $(2Z+1)\left[2Z^2 - \left(1 + 3i\sqrt{3}\right)Z - 4\right]$

$$\begin{aligned}(2Z+1)\left[2Z^2 - \left(1 + 3i\sqrt{3}\right)Z - 4\right] &= 4Z^3 - 2\left(1 + 3i\sqrt{3}\right)Z^2 - 8Z + 2Z^2 - \left(1 + 3i\sqrt{3}\right)Z - 4 \\ &= 4Z^3 - 2\left(1 + 3i\sqrt{3} - 1\right)Z^2 - \left(1 + 3i\sqrt{3} + 8\right)Z - 4 \\ &= 4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - 3\left(3 + i\sqrt{3}\right)Z - 4 = 0\end{aligned}$$

b) En déduisons les solutions de (E)

$$4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})Z - 4 = 0 \Leftrightarrow (2Z + 1)[2Z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})Z - 4]$$

Alors $2Z + 1 = 0$ ou $2Z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = 0$

$$Z_0 = -\frac{1}{2}; Z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ Z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 + i\sqrt{3}\right\}$$

4 –Exprimons chacun des nombres complexes Z_0 ; Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique

$Z_0 = -\frac{1}{2}$; $|Z_0| = \frac{1}{2}$ alors $Z_0 = \frac{1}{2}(cos\pi + isin\pi)$ car si $\theta = Arg(Z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} cos\theta = \frac{Re(Z_0)}{|Z_0|} = -1 \\ sin\theta = \frac{Im(Z_0)}{|Z_0|} = 0 \end{cases}$

Donc :$Z_0 = \frac{1}{2}(cos\pi + isin\pi)$

$Z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $|Z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ et si $\theta = Arg(Z_1)$ on a :$\begin{cases} cos\theta = \frac{Re(Z_1)}{|Z_1|} = -\frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{Im(Z_1)}{|Z_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$Z_1 = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}$$

$Z_2 = 1 + i\sqrt{3}$; $|Z_2| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$ et si $\theta = Arg(Z_2)$ on a :$\begin{cases} cos\theta = \frac{Re(Z_2)}{|Z_2|} = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{Im(Z_2)}{|Z_2|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; $\theta = \frac{\pi}{3}$

Donc : $Z_2 = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$

Partie B

$1 - a$) Déterminons l'écriture complexe de S

L'écriture complexe d'une similitude plane directe de centre O , d'angle θ et de rapport k est : $Z' = ke^{i\theta}Z$

Alors : $Z' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}Z = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)Z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z = (1 - i\sqrt{3})Z$

$$Z' = (1 - i\sqrt{3})Z$$

b) Justifier que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$

$$Z_0' = (1 - i\sqrt{3})Z_0 = (1 - i\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = Z_1$$

On a : $Z_0' = Z_1$ alors $S(M_0) = M_1$

$$Z_1' = (1 - i\sqrt{3})Z_1 = (1 - i\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = 1 + i\sqrt{3} = Z_2$$

On a : $Z_1' = Z_2$ alors $S(M_1) = M_2$

$3 -$ Justifier que $z_{n+1} = (1 - \sqrt{3}i)z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1}

$M_{n+1} = S(M_n)$ Alors $z_{n+1} = f(z_n)$

D'où : $z_{n+1} = (1 - \sqrt{3}i)z_n$

$3 - a$) Démontrons que U_n est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

$U_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1 - \sqrt{3}i)z_n| = |(1 - \sqrt{3}i)||z_n| = |z_n| = 2|z_n| = 2U_n$

$U_{n+1} = 2U_n$, la suite U_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme$U_0 = |z_0| = \frac{1}{2}$

b) Justifions que la distance $OM_{12} = 2048$

La suite U_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme$U_0 = \frac{1}{2}$ alors $U_n = U_0 \times q^n$

$$U_n = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$$

$OM_{12} = |z_{12} - z_O| = |z_{12}| = |U_{12}| = 2^{11} = 2048$

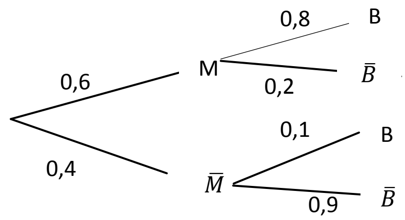
Donc : $OM_{12} = 2048$

Exercice 2

Soit M: l' évènement ≪l'individu a pris le médicament≫

B: l' évènement ≪ on constate une baisse du taux de glycémie chez l'individu≫

Arbre de probabilité



---

1 − Calculons la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament
$P_M(B) = 0,8$
2 − Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52
En appliquant la formule des probabilités totales : $P(B) = P(B \cap M) + P(B \cap \overline{M})$
$P(B) = P(M) \times P_M(B) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(B) = 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1 = 0,52$
3 −La probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie

$$P_B(M) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)} = \frac{P(M) \times P_M(B)}{P(B)} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,52} = 0,923$$

$P_B(M) = 0,923$
4 −Si on appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'individus dont le taux de glycémie a baissé. Comme pour chaque test, la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est $p = 0,52$ et que les résultats sont supposés indépendants d'un individu à l'autre, on voit alors que Y suit une loi binomiale de paramètres $(n = 5 \quad et\, p = 0,52)$
Donc pour tout k entier naturel, on a : $P(X = k) = C_5^k (0,52)^k \times (1 - 0,52)^{5-k}$
a) **La probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé**
$P(X = 2) = C_5^2 (0,52)^2 \times (1 - 0,52)^3 = 0,299$
b) **La probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé**

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_5^0 (52)^0 \times (0,48)^{5-0} = 1 - (0,48)^5 \approx 0,975$$

5 −Ici on contrôle n individus , X suit une loi binomiale de paramètres $(n; p = 0,52)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_n^0 (0,52)^0 \times (0,48)^n = 1 - (0,48)^n$$

$P(Y \geq 1) > 0,98 \Leftrightarrow 1 - (0,48)^n > 0,98$ **alors :** $1 - 0,98 > (0,48)^n$; $O,02 > (0,48)^n$
$ln(0,02) < ln(0,48)^n$ **alors** $ln(0,02) < nln(0,48)$ **ou** $n > \frac{ln(0,02)}{ln(0,48)} \approx 5,33$

$$n \approx 6$$

Problème

Partie A

$1 - a$) **Justifions que :** $\forall\, x \in \left]0; +\infty\right[, g'(x) = 1 + lnx$
$\forall\, x \in \left]0; +\infty\right[, g'(x) = (1 + xlnx)' = 1' + x' lnx + x(lnx)' = 0 + lnx + x \times \frac{1}{x} = lnx + 1$
Alors : $\forall\, x \in \left]0; +\infty\right[, g'(x) = 1 + lnx$
b) **Etudions les variations de g**
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + lnx = 0 \Leftrightarrow lnx = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$
$\forall\, x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[$, $g'(x) < 0$ **alors g est strictement décroissante sur** $\left]0; \frac{1}{e}\right[$
$\forall\, x \in \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$, $g'(x) > 0$ **alors$g$ est strictement croissante sur** $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$
Tableau de variation de g

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$\frac{e-1}{e}$	↗	

2 − En déduisons que : $\forall\, x \in \left]0; +\infty\right[, g(x) > 0$.
$\forall\, x \in \left]0; +\infty\right[$, **$g$ admet en $\frac{1}{e}$ un minimum positif égal à $\frac{e-1}{e}$.**
Donc : $\forall\, x \in \left]0; +\infty\right[, g(x) > 0$

Partie B

$1-a)$ **Etudions la continuité de f en 0**

la fonction f est continue en 0 si et seulement si: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1+xlnx}\right) =$ Car $\lim_{x\to 0} x = 0$; $\lim_{x\to 0} xlnx = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$; alors f est continue en 0.

$b)$ **Etudions la dérivabilité de f en 0**

$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{1+xlnx}-0}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1+xlnx}\times\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+xlnx}\right) = 1$ Car $\lim_{x\to 0} xlnx = 0$ $f'(1) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$, alors la fonction f est dérivable en 0

$c)$ **Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point O est : $y = x$**

$(T): y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ avec $x_0 = 0$; $f'(0) = 1$ *et* $f(0) = 0$

$(T): y = 1(x-0) + 0 = x$ Alors : $(T): y = x$

$d)$ **Démontrons que : $(\mathcal{C})$ est au dessus de (T) sur $]0;1[$ et $(\mathcal{C})$ est en dessous de (T) sur $]1;+\infty[$**

$$f(x) - y = \frac{x}{1+xlnx} - x = \frac{x-x-x^2lnx}{1+xlnx} = \frac{-x^2lnx}{1+xlnx} = \frac{x^2}{1+xlnx}\times(-lnx)$$

$\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = 1 + xlnx > 0, x^2 > 0$ alors le signe de $(f(x)-x)$ est celui de $-lnx$

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow -lnx = 0 \Leftrightarrow lnx = ln1 \Leftrightarrow x = 1$

$\forall x \in]0;1[, f(x) - x > 0$ alors $(\mathcal{C})$ est au dessus de (T) sur $]0;1[$

$\forall x \in]1;+\infty[, f(x) - x > 0$ alors $(\mathcal{C})$ est en dessous de (T) sur $]1;+\infty[$

$2)$ **Démontrons que la droite (OI) est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$**

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+xlnx}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x\left(\frac{1}{x}+lnx\right)}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}+lnx}\right) = 0$ car $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0\\ \lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty\end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ $\left(l'axe(OI)\right)$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

$3-a)$ **On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[f'(x) = \frac{1-x}{(1+xlnx)^2}$**

$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \left(\frac{x}{1+xlnx}\right)' = \frac{x'(1+xlnx)-x(1+xlnx)'}{(1+xlnx)^2} = \frac{1+xlnx-x(lnx+1)}{(1+xlnx)^2} = \frac{1+xlnx-xlnx-x}{(1+xlnx)^2} = \frac{1-x}{(1+xlnx)^2}$

D'où : $\forall x \in]0;+\infty[f'(x) = \frac{1-x}{(1+xlnx)^2}$

$b)$ **En déduisons les variations de f**

$\forall x \in]0;+\infty[, (1+xlnx)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$

- $\forall x \in]0;1[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0;1[$
- $\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

Dressons le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4) **Construction de la droite (T) et de la courbe $(\mathcal{C})$ dans le plan muni du repère (O, I, J)**

Partie C

$1-a)$ **Justifions que $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) \le 1$**

$\forall x \in]0;+\infty[, f$ admet en 1 un maximum égal à $f(1) = 1$

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) \le 1$

$b)$ **Démontrons que $\forall x \in]1;e[, 1 - \frac{1}{1+x} \le f(x)$**

$$x \in]1;e[\Leftrightarrow 1 \le x \le e \Leftrightarrow ln1 \le lnx \le lne \Leftrightarrow 0 \le lnx \le 1$$

$$\Leftrightarrow lnx \le 1 \Leftrightarrow xlnx \le x \Leftrightarrow 1 + xlnx \le 1 + x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+xlnx} \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \le \frac{x}{1+xlnx} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+x} \le f(x)$$

Alors : $\forall\, x \in \,]1; e[, 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$

2) Démontrons que : $16(e-1) + 16ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq \mathcal{A} \leq 16(e-1)$

On en déduit de $1.a)$ et $1.b)$: $1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x) \leq 1$

$\int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \times u.a \leq \int_1^e f(x)dx \times u.a \leq \int_1^e 1.dx \times u.a.$ Avec $\mathcal{A} = \int_1^e f(x)dx \times u.a$ et $u.a = 4 \times 4 = 16$

$$\Leftrightarrow 16[x - ln(1+x)]_1^e \leq \mathcal{A} \leq 16[x]_1^e$$

$\Leftrightarrow 16[e - ln(1+e) - 1 + ln2] \leq \mathcal{A} \leq 16(e-1)$ Or $ln2 - ln(1+e) = ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$

D'où : $16(e-1) + 16ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq \mathcal{A} \leq 16(e-1)$

CORRECTION EXAMEN 9 : Bac D Session normale 2009

Exercice 1

1) Représentons graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double(x ; y)

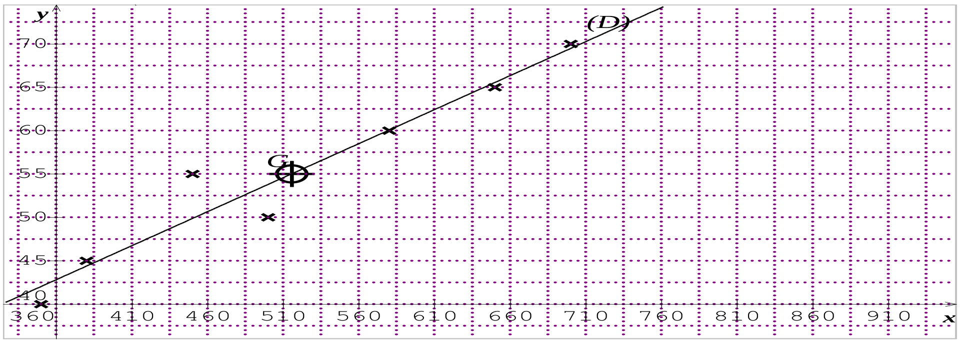


Tableau de calcul

x_i	350	380	500	450	580	650	700	3610
y_i	40	45	50	55	60	65	70	385
x_i^2	122500	144400	250000	202500	336400	422500	490000	1968300
y_i^2	1600	2025	2500	3025	3600	4225	4900	21875
$x_i \times y_i$	14000	17100	25000	24750	34800	42250	49000	206900

$2-a)$Calculons le chiffre d'affaires moyen $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{3610}{7}$$

b) Calculer le coût moyen de production $\overline{Y}$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{385}{7} = 55$$

3 a) Vérifions qu'un arrondi à l'entier de la $COV(X,Y)$ de la série statistique est égale à 1193

$COV(X,Y) = \sum_{i=1}^{7} \frac{X_i \times Y_i}{7} - \overline{X} \times \overline{Y} = \frac{206900}{7} - \frac{3610}{7} \times 55 = \frac{8350}{7} = 1192,857$ Alors $COV(X,Y) \approx 1193$

b) Justifions l'existence d'un ajustement linéaire entre x et y

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i{}^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{1968300}{7} - \left(\frac{3610}{7}\right)^2 = \frac{746000}{49} = 15224,4898$ Alors $V(X) \approx 15224,5$

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i{}^2}{n} - \overline{Y}^2 = \frac{21875}{7} - (55)^2 = \frac{700}{7} = 100$$

$$r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{1193}{\sqrt{15224,5 \times 100}} = 0,96687$$

$0,87 \leq |r| \leq 1$: il existe une forte corrélation entre les deux variables X et Y

On peut donc faire un ajustement linéaire entre les variables X et Y

4 a) Déterminons une équation de la droite (Δ)d'ajustement de y en fonction de x par la méthode des moindre carrés

$\left(D_{y/x}\right)$ $y = ax + b$ avec $a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{1193}{15224,5} = 0,0783$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$

$$b = 55 - 0,0783 \times \frac{3610}{7} = 14,588$$

Alors $\left(D_{y/x}\right)$ $y = 0,0783x + 14,588$

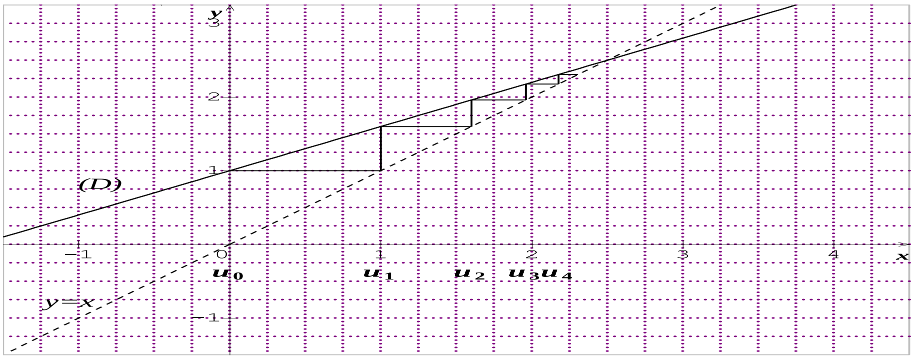
b) Tracer la droite (Δ)

5 –En utilisant la droite (Δ) , calculons lecoût de production de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 si $X = 800\overline{M}$.

$$y = 0,0783 \times 800 + 14,588 = 77,228\ millions$$

Exercice 2

$1 -$ Représentation sur l'axe des abscisses les termes U_0; U_1; U_2 et U_3 de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$



$2 - a$) Démontrons par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$

Cela revient à montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $U_n < \frac{5}{2}$

On a : $u_0 = 0$ alors $u_0 < \frac{5}{2}$; la relation est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $\forall\, k \in \mathbb{N}$: $u_k < \frac{5}{2}$ et montrons que $u_{k+1} < \frac{5}{2}$

$\forall\, k \in \mathbb{N}$: $u_k < \frac{5}{2} \Longrightarrow \frac{3}{5}U_k < \frac{3}{5} \times \frac{5}{2} \Longrightarrow \frac{3}{5}U_k + 1 < \frac{3}{2} + 1 \Longrightarrow \frac{3}{5}U_k + 1 \leq \frac{5}{2} \Longrightarrow$ **; or** $U_{k+1} = \frac{3}{5}U_k + 1$

Alors $\forall\, k \in \mathbb{N}$: $U_{k+1} \leq \frac{5}{2}$

En conclusion$\forall\, n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq \frac{5}{2}$. Par conséquent la suite u est majorée par$\frac{5}{2}$

b) Démontrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Toute suite majorée et croissante converge. Or la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par$\frac{5}{2}$

Démontrons que la suite (u) est croissante.

$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}U_n + 1 - u_n = -\frac{2}{5}U_n + 1 = \frac{2}{5}\left(\frac{5}{2} - u_n\right)$ **Or d'après la question précédente** $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $U_n < \frac{5}{2}$

Alors $-u_n > -\frac{5}{2} \Longrightarrow \frac{5}{2} - u_n > 0$ **Donc**$\frac{2}{5}\left(\frac{5}{2} - u_n\right) > 0$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}\left(\frac{5}{2} - u_n\right) > 0$ **D'où la suite (u) est croissante**

La suite (u) est une suite croissante et majorée par $\frac{5}{2}$, elle converge vers $\frac{5}{2}$

$3 - a$) Démontrons que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

$v_n = u_n - \frac{5}{2}$ **alors** $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}U_n + 1 - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}u_n - \frac{3}{2} = \frac{3}{5}\left(u_n - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{5}v_n$

$v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n$ alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$

b) Exprimons V_n puis U_n en fonction de n

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{5}{2}$ alors $V_n = V_0 \times q^n$

Donc : $\forall\, n \in N, V_n = -\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$v_n = u_n - \frac{5}{2}$ alors $U_n = V_n + \frac{5}{2}$ $\forall\, n \in N, U_n = \frac{5}{2}\left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$

c) Déterminer la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{5}{2}$ car $0 < \frac{3}{5} < 1$

Problème

Dans les calculs de limites on posera à chaque fois $X = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - X$: $quand\ x \longrightarrow -\infty; X \to +\infty$ et $quand\ x \to +\infty; X \to -\infty$

Partie A

$1 - a$) Justifions que la limite de g en $+\infty$ est -1

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}[(1-x)e^{1-x} - 1] = \lim_{X\to-\infty}(Xe^X - 1) = -1$ car $\lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0$

Alors : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$

b) Déterminons la limite de g en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}[(1-x)e^{1-x} - 1] = \lim_{X\to+\infty}(Xe^X - 1) = +\infty$ car $\lim_{X\to+\infty} e^X = 0$

Alors : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$2 - a$) Démontrons que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = [(1-x)e^{1-x} - 1]' = (1-x)'e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' - 1' = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x}$

Donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

b) Etudions les variations de g

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$ alors le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 2$

- $\forall\, x \in]-\infty; 2[, g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$
- $\forall\, x \in]2; +\infty[\, g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\left(1+\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	-1

. $3 - a$) Démontrons que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α

$\forall\, x \in]-\infty; 2[$, g est continue et strictement décroissante alors g réalise une bijection de $]-\infty; 2[$ vers $g(]-\infty; 2[) =]-(-1 + e^{-1}); +\infty[$ or $0 \in]-(-1 + e^{-1}); +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]-\infty; 2[$

Et $\forall\, x \in]2; +\infty[\, g$ admet un maximum égal à – 1. Alors $\forall\, x \in]2; +\infty[, g(x) < -1$

En conclusion : l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α

b) Justifier que : $0,4 < \alpha < 0,5$

$g(0,4) = (1 - 0,4)e^{1-0,4} - 1 = 0,09327$ et $g(0,5) = (1 - 0,5)e^{1-0,5} - 1 = -0,175$

$g(0,4)$ et $g(0,5)$ sont de signes contraires alors $0,4 < \alpha < 0,5$

$4 -$ En déduisons que : $\forall\, x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$

- $\forall\, x \in]-\infty; \alpha[, x < \alpha$ alors $g(x) > g(\alpha)$ car g est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$ et de plus $g(\alpha) = 0$

Donc : $\forall\, x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$

- $\forall\, x \in]\alpha; 2[, x > \alpha$ alors $g(x) < g(\alpha)$ car g est strictement décroissante sur $]\alpha; 2[$ et de plus $g(\alpha) = 0$

Donc : $\forall\, x \in]\alpha; 2[, g(x) < 0$

$\forall\, x \in]2; +\infty[\, g$ admet un maximum égal à – 1. Alors $\forall\, x \in]2; +\infty[, g(x) < -1$

Donc : $\forall\, x \in]2; +\infty[, g(x) < 0$

En conclusion : $\forall\, x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$

Partie B

$1 -$ Déterminons la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^{1-x} - x + 2) = \lim_{X\to+\infty}[(1-X)e^X - (1-X) + 2] = \lim_{X\to+\infty}(e^X - Xe^X + X + 1)$

$= \lim_{X\to+\infty} Xe^X\left(\frac{1}{X} - 1 + \frac{1}{e^X} + \frac{1}{Xe^X}\right) = -\infty$ car $\lim_{X\to+\infty} Xe^X = +\infty$; $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$; $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^{1-x} - x + 2) = \lim_{X\to-\infty} [(1 - X)e^X - (1 - X) + 2] = \lim_{X\to-\infty} (e^X - Xe^X + X + 1) = -\infty$

Car $\lim_{X\to-\infty}(e^X) = 0$ **et** $\lim_{X\to-\infty}(Xe^X) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$2 - a)$ **Démontrons que f est une primitive de g**

f est une primitive de g si et seulement si $f'(x) = g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = [xe^{1-x} - x + 2]' = x'e^{1-x} + x(e^{1-x})' + (-x+2)' = e^{1-x} - xe^{1-x} - 1 = (1 - x)e^{1-x} - 1 = g(x)$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$ **donc f est une primitive de g**

$b)$ **Etudions les variations de f**

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$, **alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$**

- $\forall x \in]-\infty; \propto[$, $f'(x) > 0$ **alors f est strictement croissante sur** $]-\infty; \propto[$
- $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $f'(x) < 0$ **alors f est strictement décroissante sur** $]\alpha; +\infty[$

Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$\propto$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\propto)$	$\searrow$	$-\infty$

$3 - a)$ **Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty} [xe^{1-x} - x + 2 - (-x + 2)] = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} = \lim_{X\to-\infty} (1 - X)e^X = \lim_{X\to-\infty} (e^X - Xe^X) = 0$$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = 0$ **alors la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$**

$b)$ **Etudions la position relative de (D) et (C)**

$f(x) - y = xe^{1-x} - x + 2 - (-x + 2) = xe^{1-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$ **alors le signe de $f(x) - x + 2$ est celui de x**

- $\forall x \in]-\infty; 0[$, $f(x) - y < 0$ **alors (C) est en dessous de (D)**
- $\forall x \in]2; +\infty[$ $f(x) - y > 0$ **alors (C) est au dessus de (D)**

$4 -$ **Démontrons que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ)**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{xe^{1-x} - x + 2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{X\to+\infty} \left(e^X - 1 + \frac{2}{1 - X}\right) = +\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ **Alors (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ)**

$5 -$ **Déterminons une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1**

$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ **avec** $x_0 = 1$; $f'(1) = -1$ *et* $f(1) = 2$

$(T) : y = -1(x - 1) + 2 = x$ **Alors :** $(T) : y = -x + 3$

$6 -$ **Démontrer que** $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha e^{1-\alpha} - \alpha + 2$; **d'après la question** $3 - a)$ *partie A* $g(\alpha) = (1 - \alpha)e^{1-\alpha} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

$$f(\alpha) = \alpha \times \frac{1}{1 - \alpha} - \alpha + 2 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} - \alpha + 2 = \left(-1 + \frac{1}{1 - \alpha}\right) - \alpha + 2 = 1 - \alpha + \frac{1}{1 - \alpha}$$

D'où : $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

$7 -$ **Justifions que, pour tout nombre réel x,** $f(-x + 2) = e^{x-1}f(x)$

$f(-x + 2) = (-x + 2)e^{1-(-x+2)} - (-x + 2) + 2 = (-x + 2)e^{-1+x} + x = e^{-1+x}\left[-x + 2 + \frac{x}{e^{-1+x}}\right] = e^{1-x}(xe^{1-x} - x + 2)$

Or $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$ **alors :** $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x + 2) = e^{x-1}f(x)$

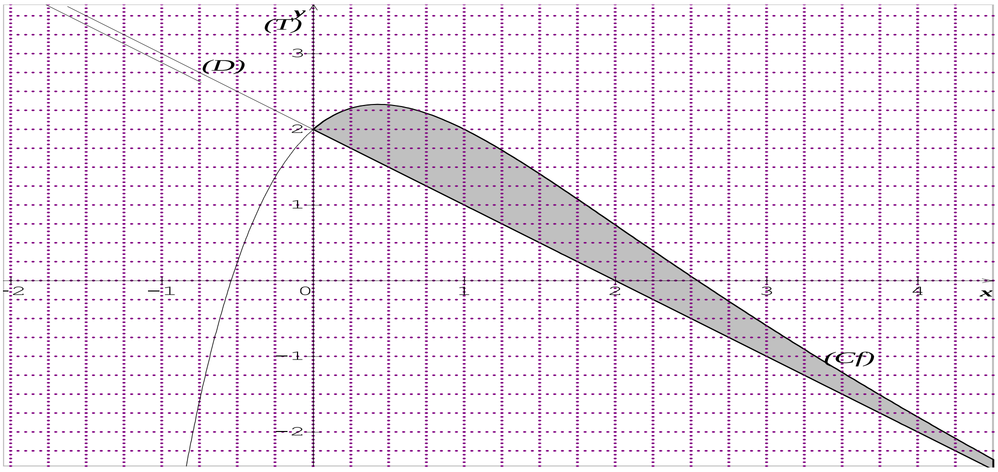
$8 -$ **Démontrons que si β est l'une des solutions de l'équation $f(x) = 0$ alors $-\beta + 2$ est l'autre solution**

D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x + 2) = e^{x-1}f(x)$ **alors si β est solution de l'équation $f(x) = 0$; on a :**

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = 0$; **donc :** $f(-\beta + 2) = e^{\beta-1}f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(-\beta + 2) = 0$

$f(-\beta + 2) = 0$ **alors :** $-\beta + 2$ **est solution de l'équation** $f(x) = 0$

$9 -$ **Traçons (D), (T) et (C).** $(On\ prendra\ \alpha = 0,4\ et\ \beta = 2,5)$



Partie C

1 − Calculons $\mathcal{A}(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties

$\mathcal{A}(\lambda) = \left[\int_0^\lambda (f(x) - y)dx\right] u.a = 2 \times 2\int_0^\lambda [xe^{1-x} - x + 2 - (-x+2)]\, dx = 4\int_0^\lambda xe^{1-x}dx$

Posons : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{1-x} \end{cases}$ **; on a** $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}$ **Alors :** $\mathcal{A}(\lambda) = 4[-xe^{1-x}]_0^\lambda + 4\int_0^\lambda e^{1-x}\, dx = 4[(-x-1)e^{1-x}]_0^\lambda$

$\mathcal{A}(\lambda) = 4(-\lambda - 1)e^{1-\lambda} + 4e$

2 − Déterminons la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\left[4(-\lambda-1)e^{1-\lambda} + 4e\right] = \lim_{\lambda\to+\infty}\left[-4e \times \left(\frac{\lambda}{e^\lambda} + \frac{1}{e^\lambda}\right) + 4e\right] = 4e\ cm^2$ **car** $\begin{cases} \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0 \end{cases}$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 4e\ cm^2$$