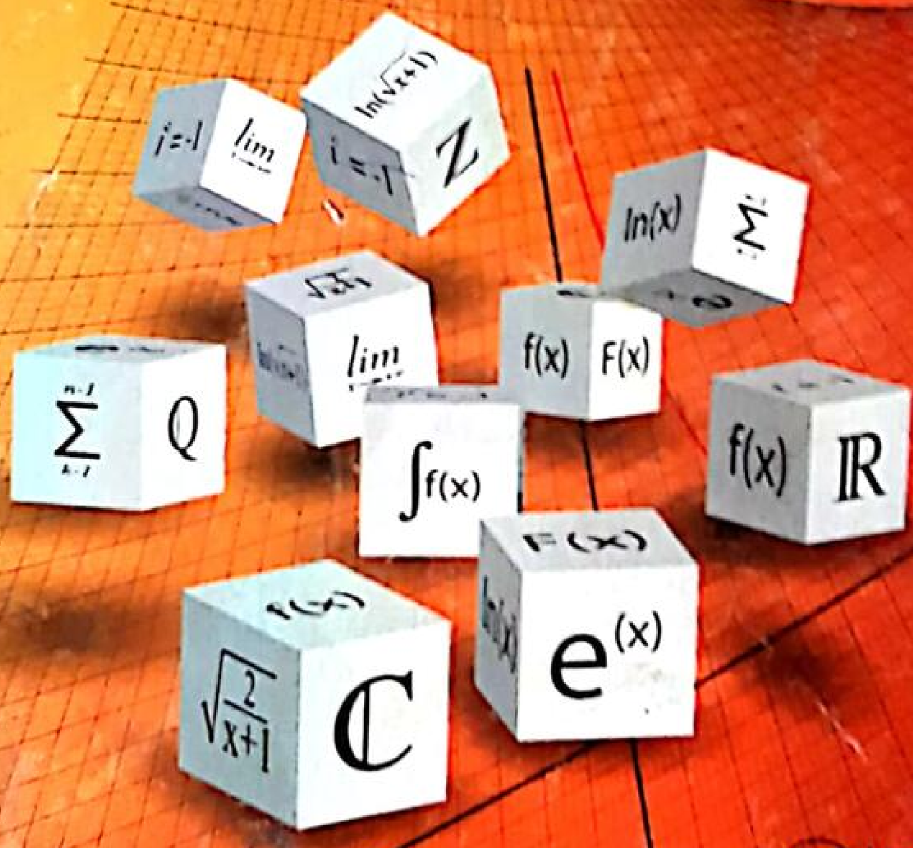
COLLECTION

AVOMATHS

ANNALES

TERMINALE C

- Résumés de cours
- Exercices et Problèmes
- Corrigés



Les Classiques Ivoiriens

Collection AVOMATHS

MATHEMATIQUES

Terminale C

Par

BOUA PHILIPPE *Professeur certifié au Lycée Scientifique de Yamoussoukro*

CIV 295

Les Classiques ivoiriens

10 B.P. 1034 Abidjan 10 • Tél : 21 56 50 63 • Fax : 21 36 56 57
info@classiquesivoiriens.com

Remerciements à

GUEHI AMBROISE	*Enseignant à l'Ecole Normale Supérieure d'Abidjan*
GNIN Kouassi	*Professeur Certifié au Lycée Mixte de Yamoussoukro*
YAO James Nicaise	*Professeur Certifié au Lycée Scientifique de Yamoussoukro*
GANOU Adama	*Professeur Licencié au Lycée Scientifique de Yamoussoukro*
BAGATE Aboulaye	*Professeur Certifié au Lycée Scientifique de Yamoussoukro*
DIABATE Zoumana	*Professeur Certifié au Lycée Mixte de Yamoussoukro*

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage a été élaboré dans le but de mettre à la disposition des élèves en classe de Terminale C un recueil de devoirs de mathématiques.

Les sujets proposés prennent en compte les thèmes fondamentaux du programme de mathématiques en vigueur de la Terminale C.

Cet ouvrage vise entre autres objectifs à développer chez l'élève un certain nombre d'aptitudes intellectuelles telles que la rigueur et la logique du raisonnement.

Un résumé de cours a été fait et pourra etre consulté au besoin.

Nous ne saurons terminer sans témoigner de notre profonde gratitude à l'endroit de toutes les personnes ayant contribué à la réalisation de ce document, notamment Monsieur le Proviseur du Lycée Scientifique de Yamoussoukro, ainsi que tous les collègues du Conseil d'Enseignement (CE) de mathématiques du Lycée Scientifique de Yamoussoukro.

L'auteur

SOMMAIRE

	Barycentres	Nombres Complexes	Isométries du plan	Similitudes directes	Coniques	Limites et Continuité	Dérivations	Primitives	Logarithmes népériens	Exponentielles	Intégrales	Suites numériques	Arithmétiques	Probabilité	Equations différentielles	Familles de fonctions
DEVOIR n°1		×				×	×									
DEVOIR n°2	×					×	×									
DEVOIR n°3	×					×	×	×								
DEVOIR n°4	×					×	×		×				×			
DEVOIR n°5	×					×	×		×	×			×			
DEVOIR n°6	×	×				×	×	×	×							
DEVOIR n°7	×	×				×	×			×			×			
DEVOIR n°8		×				×	×			×			×			
DEVOIR n°9	×					×	×		×			×		×		×
DEVOIR n°10	×	×				×	×			×		×				
DEVOIR n11		×	×			×	×		×		×					
DEVOIR n°12		×	×			×	×			×	×					
DEVOIR n°13			×	×		×	×			×	×	×				
DEVOIR n°14				×		×	×	×	×	×	×		×			
DEVOIR n°15				×		×	×	×		×	×		×			
DEVOIR n°16			×			×	×		×		×		×			×
DEVOIR n°17				×		×	×		×		×		×			×
DEVOIR n°18		×				×	×		×			×	×			
DEVOIR n°19		×			×	×	×			×					×	
DEVOIR n°20					×	×	×		×		×				×	
DEVOIR n°21			×			×	×			×		×				
DEVOIR n°22		×	×					×			×	×				
DEVOIR n°23			×												×	
DEVOIR n°24		×	×								×	×				
DEVOIR n°25	×		×			×	×			×				×		
DEVOIR n°26			×									×		×		
DEVOIR n°27					×						×				×	
DEVOIR n°28				×								×		×		

ÉNONCÉS

DEVOIR N° 1

EXERCICE

L'unité de longueur est le centimètre. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z.

1. Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M tels que : $|z + 4 - 2i| = |3i - z|$.
2. Justifier que le point $K(-3; \frac{13}{2})$ appartient à (Δ).
3. Construire le point K.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité : 2 cm.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x,

$$f(x) - (\frac{1}{2}x + 1) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,(\sqrt{x^2+1} + x)}.$$

3. a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
   b) Déterminer les positions relatives de (C) et de (Δ) sur $]0 ; +\infty[$.

On admet pour la suite que la droite (Δ') d'équation $y = \frac{3}{2}x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et que (C) est au dessus de (Δ') sur $]-\infty ; 0[$.

4. Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{(2x^2+2)\sqrt{x^2+1} - x(x^2+2)}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

5. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $(2x^2+2)\sqrt{x^2+1} > x(x^2+2)$.
   b) En déduire le sens de variation de f.
   c) Dresser le tableau de variation de f.

6. a) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.
   b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   c) Vérifier que : $-0,77 < \alpha < -0,76$.

7. a) Démontrer que $y = x+1$ est une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
   b) Déterminer les positons relatives de (T) et de (C).

8. a) On note (Γ) la courbe représentative de la bijection réciproque de f.
   b) Tracer (T), (Δ), (Δ'), (C) et (Γ) dans le repère (O, I, J).

DEVOIR N° 2

EXERCICE

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.

1. a) Construire le barycentre I des points pondérés (A, 1) ; (B, 1) et (C, – 1).
   b) Démontrer que le quadrilatère AIBC est un losange.

2. Soit (C) l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 - MC^2 = 0$.
   a) Calculer IA^2, IB^2 et IC^2.
   b) Déterminer et construire l'ensemble (C).

3. Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que : $2\,MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$.
   a) Vérifier que B appartient à (Δ).
   b) En déduire puis construire l'ensemble (Δ).

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = -6x + (x+9)\sqrt{x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé direct (O, I, J).
L'unité graphique est le centimètre.

1. a) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   b) En donner une interprétation graphique.

2. a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)}{x}$
   b) f est – elle dérivable à droite en 0 ? En déduire une interprétation graphique.

3. *On suppose que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on note f ' sa dérivée.*
   a) Développer $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)$.
   b) Vérifier que : $\forall x \in]0 ;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{2\sqrt{x}}$.

4. a) Déterminer le sens de variation de f.
   b) Dresser le tableau de variation de f.

5. a) Vérifier que : $f'(3) = 3(\sqrt{3} - 2)$.
   b) Démontrer que $y = 3(\sqrt{3} - 2)(x - 3 - 2\sqrt{3})$ est une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 3.

6. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - 3(\sqrt{3} - 2)(x - 3 - 2\sqrt{3})$.

   Vérifier que : $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{3}{2}(\sqrt{x} - 4 + \frac{3}{\sqrt{x}})$ et $h''(x) = \frac{3(x-3)}{4x\sqrt{x}}$.

7. a) Déterminer le sens de variation de h'.
   b) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[\setminus \{3\}$, $h'(x) > 0$.
   c) En déduire le sens de variation de h.

8. Déterminer les positions relatives de (C) et (T).

9. Construire la tangente (T) et la courbe (C).

DEVOIR N° 3

EXERCICE

Soit ABCD un trapèze rectangle en C et en D de sens direct tel que : $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}}) = \frac{2\pi}{3}$ et $AB = BD =$

où a est un nombre réel strictement positif. On désigne par O le milieu du segment [AD].

1. Faire une figure.

2. Construire le point I barycentre des points pondérés $(A, 2), (B, -1), (C, -2)$ et $(D, 4)$.

3. a) Démontrer que le quadrilatère BCDO est un rectangle.
   b) Démontrer que le quadrilatère ABDI est un losange.

4. Justifier que : $DA^2 = 3a^2$ et $AC^2 = \frac{13a^2}{4}$.

5. On désigne par (Γ) l'ensemble des points M tels que : $2MA^2 - MB^2 - 2MC^2 + 4MD^2 = \frac{9a^2}{2}$.
   a) Vérifier que le point B appartient à l'ensemble (Γ).
   b) Déterminer puis construire (Γ).

6. Démontrer que les points A et D appartiennent à (Γ).

7. Soit (Ψ) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 - 2MC^2 + 2MD^2 = -\frac{3a^2}{2}$.
   a) Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (Ψ).
   b) Démontrer que l'ensemble (Ψ) est la droite (AI).

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\sqrt{x^2+1} - (x+1)^2.$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

Toutes les fonctions intervenant dans ce problème sont dérivables sur leurs ensembles de définition.

Partie A

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$.

   b) Donner une interprétation graphique des résultats précédents.

2. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

3. a) Pour tout nombre réel x, on pose : $\Psi(x) = \sqrt{x^2+1} + x$. Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) > 0$.

   b) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-4x-3}{\Psi(x)(\Psi(x)+2)\sqrt{x^2+1}}$.

   c) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Déterminer le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f.

5. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 est $y = -x + 1$.

Partie B

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) + x - 1$.

1. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $h'(x) = \dfrac{x^2(2\sqrt{x^2+1} - 2x + 1)}{(1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$.

   b) Démontrer que pour tout nombre réel x, $2\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 > 0$.

   c) Déterminer le sens de variation de la fonction h.

2. a) Calculer $h(0)$ puis démontrer que : $\forall x \in]-\infty;0[,\ h(x) < 0$ et $\forall x \in]0;+\infty[,\ h(x) > 0$.

   b) Déterminer les positions de la courbe (C_f) relativement à la tangente (T).

3. Tracer (Δ), (T) et (C_f). *On prendra 2 centimètres pour unité graphique et $\sqrt{3} = 1,7$.*

Partie C

On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $\left[0;\sqrt{3}\right]$.

1. Démontrer que g est une bijection de $\left[0;\sqrt{3}\right]$ sur un intervalle à déterminer.

On note g^{-1} la bijection réciproque de g et H la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$H(x) = (x+2)\, g^{-1}(x)$.

On pose : $\Psi = H\circ g$.

2. a) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[0;\sqrt{3}\right]$, $\varphi(x) = x + \frac{g(x)+2}{g'(x)}$

b) En déduire la primitive F sur $\left[0;\sqrt{3}\right]$ de la fonction $g'\Psi$ telle que : $F(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.

On admet pour la suite que F est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\sqrt{3}\right]$.

3. Vérifier que $F(0) = 0$ puis dresser le tableau de variation de F.

4. Déterminer une équation de chacune des tangentes à la courbe (C_F) de la fonction F aux points d'abscisses 0 et $\sqrt{3}$.

5. Tracer la courbe (C_F) ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 0 et $\sqrt{3}$ dans le repère (O, I, J).

DEVOIR N° 4

EXERCICE 1

Soit l'équation (E) : $(u, v) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $u^2 - 3v^2 = 4$.

1. Vérifier que les couples $(4,2)$ et $(14,8)$ sont solutions de l'équation (E).

2. Soit (u_0, v_0) une solution de (E) et $d = PGCD(u_0; v_0)$.

Démontrer que : $d = 2$.

EXERCICE 2

Soit ABC un triangle équilatéral de coté a, I et O les points tels que :

$\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{AO} = 3\overrightarrow{IO}$.

1. Faire une figure.

2. Ecrire O comme barycentre des points A, B et C.

3. En déduire que : $2\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AC}$.

4. Retrouver les égalités suivantes : $OB^2 = \frac{a^2}{4}$, $OA^2 = \frac{7a^2}{4}$ et $OC^2 = \frac{3a^2}{4}$.

5. Justifier que le triangle AOC est rectangle en C.

6. On note (Γ) l'ensemble des points M du plan tels : $-MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = a^2$.

a) Vérifier que le point C appartient à l'ensemble (Γ).

b) En déduire l'ensemble (Γ) puis construire (Γ).

7. La hauteur du triangle AOC issue de C coupe le segment [AO] en un point K. On note (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MO^2 - 2MK^2 = AO^2 - 2KC^2$.

a) Vérifier que C appartient à (Δ).

b) Démontrer que $KA^2 + KO^2 = AO^2 - 2KC^2$.

c) Démontrer que : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KO}) \cdot \overrightarrow{MK} = 0$.

d) Déduire de ce qui précède l'ensemble (Δ) puis construire (Δ).

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-1)^2 \ln x}{x}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x + \frac{x-1}{x+1}$$

1. Démontrer que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
2. Dresser le tableau de variation de g (sans les limites aux bornes).
3. a) Calculer $g(1)$.

   b) Démontrer que : $\forall x \in]0\,;1[,\ g(x) < 0$ et $\forall x \in]1\,;+\infty[,\ g(x) > 0$.

Partie B

1. Calculer la limite de f à droite en 0. En donner une interprétation graphique.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.
3. a) Démontrer que : $\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{(x^2-1)g(x)}{x^2}$.

   b) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x puis dresser le tableau de variation de f.
4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α.

   b) Vérifier que : $2{,}64 < \alpha < 2{,}65$.

   c) Démontrer que : $\forall x \in]0\,;\alpha[,\ f(x) < 1$ et $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[,\ f(x) > 1$.
5. a) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.

   b) Déterminer les positions relatives de (C) et de l'axe des abscisses.

6. Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère orthonormé direct (O, I, J).

a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $h(x) = -f(x)$.

b) Construire (C) puis (Γ) dans le même repère.

Partie C

Soit Ψ la fonction définie sur $]0;+\infty[\setminus \{1\}$ par :

$$\Psi(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{1}{x-1}.$$

On note (C ') sa courbe représentative dans le repère (O, I, J).

1. a) Calculer les limites de Ψ aux bornes de son ensemble de définition ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\Psi(x)}{x}$.

b) Donner une interprétation graphique de ces résultats.

2. a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\setminus \{1\}$, $\Psi'(x) = \frac{f(x)-1}{(x-1)^2}$.

b) Déterminer le signe de $\Psi'(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Dresser le tableau de variation de Ψ.

3. a) Démontrer que $\Psi(\alpha) > 0$.

b) Démontrer que l'équation $\Psi(x) = 0$ admet une unique solution β.

Vérifier que $0{,}20 < \beta < 0{,}21$.

c) Construire (C'). *Prendre* $\alpha = 2{,}6$, $\beta = 0{,}2$, $\Psi(\alpha) = 1{,}08$.

DEVOIR N° 5

EXERCICE 1

1. Calculer 45^2.
2. Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On pose $\mu = PPCM(a ; b)$ et $\delta = PGCD(a ; b)$.

   Déterminer les couples (a, b) tels que : $\mu^2 - 3\delta^2 = 2022$.

EXERCICE 2

Soit ABC un triangle équilatéral de coté 2a.

1. Soit H le milieu du segment [AB]. On note D le point tel que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DA}$.
   Démontrer que D est le barycentre des points pondérés (B, 3), (H, – 6) et (C, 1).

2. Soit les points I et J milieux respectifs des segments [AC] et [BC].
   - **a)** Vérifier que : $2HB^2 - HD^2 + HI^2 - 2HJ^2 = -2a^2$.
   - **b)** Justifier que pour tout point M du plan, $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{AB}$.
3. Soit (Δ) l'ensemble des points M tel que : $2MB^2 - MD^2 + MI^2 - 2MJ^2 = -2a^2$.
   - **a)** Démontrer que : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$.
   - **b)** En déduire puis construire l'ensemble (Δ).
4. On note (Γ) l'ensemble des points M tels que : $3MB^2 - 6MH^2 + MC^2 = 6a^2$.
   - **a)** Justifier que H appartient à (Γ).
   - **b)** En déduire puis construire (Γ).
5. On note K l'autre point d'intersection de (Γ) et de (Δ).
   - **a)** En utilisant la question (4), démontrer que : $KH = a\sqrt{3}$.
   - **b)** En déduire KH puis la nature du triangle KBA.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0;+\infty[, f(x) = x^2(1 - \frac{1}{2}\ln x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

Unité graphique : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

Partie A

1. Démontrer que la fonction f est continue en 0.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

4. a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = x(\frac{3}{2} - \ln x)$.

   b) Déterminer le signe de f ' (x). En déduire le sens de variation de f.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

5. a) Vérifier que : $f(e^2) = 0$.

   b) En déduire que : $\forall x \in]0 ; e^2[, f(x) > 0$ et $\forall x \in]e^2 ; +\infty[, f(x) < 0$.

6. Déterminer une équation de la tangente (T) au point $A(\sqrt{e} ; \frac{3e}{4})$.

7. On considère la fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x\sqrt{e} + \frac{e}{4}$.

   a) Démontrer que : $\forall x \in [0 ;+\infty[\setminus \{\sqrt{e}\}, h'(x) < 0$ et que $h'(\sqrt{e}) = 0$ *(On pourra utiliser les variations de la dérivée seconde de h).*

   b) Démontrer que : $\forall x \in [0 ; \sqrt{e}[, h(x) > 0$ et $\forall x \in]\sqrt{e} ;+\infty[, h(x) < 0$.

   c) Déduire de la question précédente les positions relatives de (T) et de (C).

8. Construire (C) et (T).

9. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[\, e^{\frac{3}{2}} ; +\infty[$.

Vérifier que : $7{,}1 < \alpha < 7{,}2$.

b) Calculer $f(1)$.

c) Démontrer que : $\forall\, x \in [\,0 ; 1\,[\cup]\,\alpha ; +\infty\,[\;\; f(x) < 1$ et $\forall x \in]\,1 ; \alpha\,[\,, f(x) > 1$.

Partie B

Soit ψ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\psi(x) = f(x)\, e^{-f(x)}$.
On note (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\Psi(x)}{x}$.

b) En déduire le coefficient directeur de la demi - tangente à (Γ) au point O.

2. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\Psi(x)}{x}$.

b) Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3. a) Pour tout nombre réel strictement positif x, exprimer $\psi'(x)$ à l'aide de $f'(x)$ et $f(x)$.

b) En considérant les réponses aux questions Partie A 5) et 7), déterminer le signe de la dérivée ψ'.

c) Dresser le tableau de variation de ψ.

d) Pour tout nombre réel strictement positif x, déterminer le signe de l'expression $f(x) - \psi(x)$ et les positions relatives des courbes (C) et (Γ).

4. Construire (Γ) dans le même repère que (C).

DEVOIR N° 6

EXERCICE 1

Soit z un nombre complexe non imaginaire pure.

On pose : $a = z^2 - \bar{z}^2$, $b = z^2 + i\,\bar{z}$ et $c = -\bar{z}^2 + iz$.

On considère les points M, N et P d'affixes respectifs a, b et c.

1. Retrouver les résultats suivants : $c - a = z(i - z)$ et $b - a = \bar{z}(\bar{z} + i)$.
2. Justifier que : $|c - a| = |b - a|$.
3. En déduire la nature du triangle MNP.

EXERCICE 2

Soit ABC un triangle isocèle en B.

1. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels les points pondérés $(A, -3)$, $(B, 2n)$ et $(C,\ 2 - n)$ admettent un barycentre que l'on notera G_n.

   On suppose dans la suite de l'exercice que n est supérieur ou égal à 3.
2. Construire G_5.
3. Soit J le point du plan tel que : $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

   Démontrer que : $\overrightarrow{G_nG_{n+1}} = -\dfrac{1}{n(n-1)}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{G_nG_{n+1}} = \dfrac{n-2}{n}\overrightarrow{G_{n-1}G_n}$.
4. Démontrer que les droites (CA) et (CG_3) sont perpendiculaires.
5. Exprimer G_3 comme point intersection de deux droites puis construire G_3.
6. Justifier que : $\overrightarrow{G_5G_6} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{G_4G_5}$ et $\overrightarrow{G_4G_5} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{G_3G_5}$.
7. En déduire la construction de G_4 et G_6.

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \ln x.$$

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{(x^2+1)^2 - 2x(1-x^2)}{x(x^2+1)^2}$.
3. a) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $2x(1-x^2) < (x^2+1)^2$.
   b) En déduire le signe de $g'(x)$.
   c) Dresser le tableau de variation de g.
4. a) Démontrer que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
   b) Démontrer que : $g(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln x - \ln(x^2+1) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J).

(Unité graphique : 1cm en abscisse et 2cm en ordonnée)

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Démontrer que la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 un demi - tangente verticale.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.
4. a) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.
   b) Déterminer le sens de variation de f.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
5. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$.
   b) Vérifier que : $2{,}22 < \alpha < 2{,}23$.
6. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0 ; 1]$, $-\ln 2 \leq f(x) < 0$.
7. Construire (C) dans le repère (O, I, J). *On prendra* $\alpha = 2{,}22$.

Partie C

On note F la primitive de la fonction f sur $]0\,;1]$ telle que : $F(1) = 1$ et H la fonction définie sur $]0\,;1]$ par :
$H(x) = x^2(F(x) + \ln\sqrt{2})$ si $x \in]0\,;1]$ et $H(0) = 0$ .On note (Γ) la courbe représentative de H dans (O J J)

1. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0\,;1]$, $0 < F(x) \leq 2 - x$.
2. a) Démontrer que : $\forall x \in]0\,;1]$, $x\ln\sqrt{2} < \dfrac{H(x)}{x} < x(2 - x + \ln\sqrt{2})$.

   b) Etudier la dérivabilité de la fonction H en 0. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0\,;1]$, $H'(x) = 2xF(x) + x(xf(x) + \ln 2)$.
4. Pour tout réel x appartenant à $]0\,;1]$ établir les inégalités suivantes : $f(x) \leq xf(x)$ et $0 \leq xf(x) + \ln 2$.
5. a) Démontrer que : $\forall x \in]0\,;1]$, $H'(x) > 0$.

   b) Dresser le tableau de variations de H.
6. Démontrer que H est une bijection de $]0\,;1]$ sur un intervalle J à préciser.
7. Justifier que H^{-1} est dérivable en $1+\ln\sqrt{2}$ puis calculer $(H^{-1})'(1+\ln\sqrt{2})$.
8. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) au point d'abscisse 1 est $y = 2x - 1 + \ln\sqrt{2}$.
9. Construire (T) , (Γ) , ainsi que la courbe (Γ') de H^{-1} dans le repère (O,I ,J).

DEVOIR N° 7

EXERCICE 1

On munit le plan d'un repère orthonormé direct (O, I, J). *L'unité est le centimètre.*

1. Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (4 - 4i\sqrt{3})z^2 + 16(1 - i\sqrt{3})z + 64i\sqrt{3}$.
   a) Démontrer qu'il existe un nombre complexe imaginaire pur solution de l'équation $P(z) = 0$.
   b) Déterminer le nombre complexe α tel que $P(z) = (x - \alpha)(z^2 - 4z + 16)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. On considère $A(-2i\sqrt{3})$, $B(2 + 2i\sqrt{3})$ et $C(2 - 2i\sqrt{3})$ trois points du plan.
   a) Vérifier que les points B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.
   b) Placer avec précision dans le plan les points A, B et C.
3. On note G le barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; −1) et (C ; 1).
   a) Calculer l'affixe z_G du point G puis construire G.
   b) On note (Γ) l'ensemble des points M tels que : $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 24$.
   Justifier que O appartient à (Γ) et en déduire l'ensemble (Γ).
   c) Construire (Γ).

EXERCICE 2

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs (a, b) tel que $37a + 23b = 1$.
2. En déduire un couple d'entiers relatifs (x_0, y_0) vérifiant (E) : $37x + 23y = 5$.
3. Résoudre l'équation (E') : $37x + 23y = 0$.
4. Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation (E).

PROBLEME

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2e^{2x} - xe^x$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = 2xe^{x} - 1$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $g'(x) = 2(x+1)e^{x}$.

   b) Déterminer le sens de variation de g.

   c) Dresser le tableau de variation de g.
3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

   b) Vérifier que $0{,}35 < \alpha < 0{,}36$.
4. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty ;\alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1. a) Calculer la limites de f en $-\infty$.

   b) Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a) Calculer les limites de f(x) et de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b) En donner une interprétation graphique.
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = (x+1)g(x)e^{x}$.

   b) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

   c) Déterminer le sens de variation de f.

   d) Démontrer que $f(\alpha) = -\dfrac{1}{4}$ puis dresser le tableau de variation de f.
4. a) Calculer f(0).

   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle$]\alpha;+\infty[$.

   c) Vérifier que : $0{,}56 < \beta < 0{,}57$.

   d) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
5. Justifier que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -x$.

Partie C

Soit les fonctions s et t définies sur $\mathbb{R}$ par :

$s(x) = xe^{2x} - xe^{x}$ et $t(x) = xe^{x} - e^{x} + 1$.

1. Calculer s (0) et t (0).
2. Démontrer que pour tout nombre réel x non nul, $s(x) > 0$.
3. Démontrer que pour tout nombre réel x non nul , $t(x) > 0$. *(on pourra étudier les variations de t)*
4. Déduire de ce qui précède que pour tout nombre réel x non nul , $e^{x} - 1 < x e^{x} < x e^{2x}$.
5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xe^{2x} - e^{x} + 1$.
   a) Calculer h (0).
   b) Démontrer que pour tout nombre réel x non nul, $h(x) > 0$.
   c) Déterminer les positions relatives de la courbe (C) et de la tangente (T).
   d) Construire (T) et (C). *(Unité graphique : 2cm. On prendra $\alpha = 0,35$ et $\beta = 0,56$).*

DEVOIR N° 8

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe i. On note f l'application qui à tout point M d'affixe z distincte de $\frac{1}{2}i$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{iz}{2z - i}$.

1. Justifier que le point O est invariant par f.
2. Quel est le point qui a pour image par f le point A ?

On suppose dans la suite de l'exercice que z n'est pas un imaginaire.

3. a) Prouver que : $z' - i = \frac{-i(z-i)}{2z-i}$.

   b) En déduire que : $\frac{z'}{z} = -\frac{z' - i}{z - i}$.
4. Démontrer que les points O, A, M et M' sont cocycliques.
5. a) Déterminer l'affixe du point M' image par f du point M $\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i\right)$.

   b) Construire M $\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i\right)$ et M'.

EXERCICE 2

d désigne le PGCD des entiers naturels non nul a et b. m désigne le PPCM de a et b .

On pose : $a' = \frac{a}{d}$ et $b' = \frac{b}{d}$.

1. On cherche tous les couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant : $a > b$, $a^2 + b^2 = 801$ et $m = 120$.

   a) Démontrer que d est un diviseur commun à 801 et 120. En déduire les valeurs possibles de d.

   b) Exprimer $(a+b)^2$ en fonction de m et d.

   Déterminer alors les couples (a, b).

2. On cherche tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que : (a >b et $2m + 3d = 78$).
   a) Démontrer que $2a'b' + 3$ est un diviseur impair de 78 et supérieur ou égal à 5.
   b) Déterminer les couples (a, b).

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-e^{-x}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 4cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = (1-x)(e^{x}+e^{-x}) - 2e^{-x}$.

1. Démontrer que pour tout nombre réel x, $g'(x) = x(1-e^{2x})e^{-x}$.
2. Justifier que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty ;0[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]0;+\infty [, g(x) < 0$.

Partie B

1. Démontrer que la fonction f est continue en 0.
2. Démontrer que la fonction f est paire. Interpréter graphiquement ce résultat.

Dans la suite du problème, l'étude de f se fera sur $[0 ;+\infty[$.

3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
4. a) Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^{x}-e^{-x})^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de f.

Partie C : *Etude de la dérivabilité de f à droite en 0.*

Soit h la fonction définie sur $[0\,;1]$ par : $h(x) = f(x) - \dfrac{1+x^2}{2}$.

1. Exprimer $h'(x)$ à l'aide de $f'(x)$ pour tout nombre x appartenant à$]0\,;1]$.
2. a) En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à$]0\,;1]$, $h'(x) < 0$.

   b) Calculer $h(0)$.

3. En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;1]$, $h(x) < 0$ et $f(x) < \dfrac{1+x^2}{2}$.

On admettra que pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;1]$, $\dfrac{1-x^2}{2} < f(x)$.

4. a) En déduire un encadrement de $f(x)$ pour x appartenant à$]0\,;1]$.

   b) Démontrer que f est dérivable à droite en 0. Préciser $f'(0)$

   c) Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie D : *Construction de la courbe (C).*

1. En utilisant 4b) Partie C, dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
2. Construire la courbe (C) sur l'ensemble de définition de f.

DEVOIR N° 9

EXERCICE 1

I) Détermination de la valeur exacte de $cos(\frac{2\pi}{5})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) : $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

2. On pose : $z_0 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

   Démontrer que : $(z_0 + \frac{1}{z_0})^2 + z_0 + \frac{1}{z_0} - 1 = 1 + z_0 + z^2{}_0 + z^3{}_0 + z^4{}_0$.

3. Vérifier que pour tout nombre complexe z, $z^5 - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$.

4. Déduire des questions 2. et 3.) que $1 + z_0 + z^2{}_0 + z^3{}_0 + z^4{}_0 = 0$.

5. Démontrer que : $\cos(\frac{2\pi}{5})$ vérifie l'équation (1).

   En déduire que : $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

II) Construction des images des solutions de l'équation $z^5 = 1$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J).

1. Placer les points $A(1 + \frac{1}{2}i)$ et $B\left(-\frac{1}{2}\right)$.

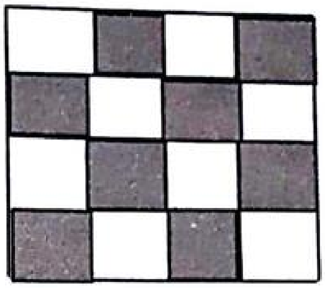
2. Le cercle de centre O passant par A coupe la demi – droite [O ;I) en un point P.

   a) Calculer l'affixe du milieu du segment [BP].

   b) En déduire la construction du point image de z_0 sur le cercle trigonométrique puis des images des autres solutions de l'équation $z^5 = 1$.

EXERCICE 2

On repartit au hasard 5 pions identiques sur le damier ci-contre à raison d'un pion au plus par case.



1. Déterminer le nombre de répartitions possibles.
2. Déterminer la probabilité qu'on ait au plus deux pions par ligne.

PROBLEME

Partie A

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x(\ln x)^n \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Unité graphique : 4cm.

1. a) Calculer la limite de f_n en 0 *(On pourra poser $t = x^{\frac{1}{n}}$)*. En déduire que f_n est continue en 0.

   b) Etudier la dérivabilité de f_n en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

   c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

2. a) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, x \in\,]0 ;+\infty[$, $f_n'(x) = (n + \ln x)(\ln x)^{n-1}$.

   b) Démontrer que : si n pair et $x>1$, alors $(\ln x)^{n-1} > 0$.

   si n pair et $0< x<1$ alors $(\ln x)^{n-1} <0$.

   c) Dresser suivant la parité de n, le tableau de variation de f_n.

3. Démontrer que les trois points O, I et A(e ; e) appartiennent à toutes le courbes (C_n).

4. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x<0$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x(\ln x)^n(-1 + \ln x)$.

   b) Etudier suivant la parité de n, les positions relatives de (C_{n+1}) et de (C_n).

5. a) Déduire de la question 2c), les tableaux de variation de fonctions f_1 et f_2.

b) Démontrer que l'équation $f_1(x) = 1$ admet une solution unique α dans $]\frac{3}{2} ; 2[$.

c) Justifier que : $f_1(x) < 1$ si $x \in]\frac{3}{2} ; \alpha[$ et $f_1(x) > 1$ si $x \in]\alpha ; 2[$.

6. Construire les courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère.

Partie B : *Recherche d'une valeur approchée de α.*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = [\frac{3}{2} ; 2]$ par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+\ln x}$.

1. a) Démontrer que : $g(\alpha) = \alpha$

b) *On suppose que g est dérivable sur I.* Démontrer que : $\forall x \in I$, $g'(x) = \dfrac{f_1(x) - 1}{x(1+\ln x)^2}$.

c) En utilisant le résultat de la question (5c)PartieA, dresser le tableau de variation de g.

d) En déduire que $g(I) \subset I$.

2. Démontrer les inégalités suivantes :

a) $\forall x \in I$, $|f_1(x) - 1| \leq 1 - f_1(\frac{3}{2})$ et $x(1+\ln x)^2 \geq (\frac{3}{2})(1 + \ln(\frac{3}{2}))^2$.

b) En déduire que : $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leq 0{,}13$.

3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :
$\forall x \in I$, $|g(x) - \alpha| \leq 0{,}13|x - \alpha|$.

4. On considère la suite U définie par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}13|U_n - \alpha|$.

5. a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}13)^n$.

b) Etudier la convergence de la suite U.

6. a) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α au centième prè

b) Calculer U_p.

DEVOIR N° 10

EXERCICE 1

Soit A et B deux points distincts du plan.

1. Construire l'ensemble (Γ) des points M tels que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{4}$.
2. Soit F un point de (Γ) et le point D tel que le triangle BDF soit équilatéral de sens direct.

   Déduire de ce qui précède une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{BD}})$.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. *(Unité : 1cm).*
Soit a un nombre complexe non nul tel que $|a| = r$. On considère les points A et B d'affixes respectives a et $-a$. On pose $a = \alpha + i\beta$ avec α et β des nombres réels non nuls. On note C le point d'intersection de la médiatrice du segment [AB] et de la droite d'équation $y = -\alpha$.

1. a) Démontrer qu'une équation de la médiatrice de [AB] est $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$.

   b) Prouver que l'affixe du point C est $-ia$.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

3. On note (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC.

Démontrer que (Γ) est le cercle de centre O et de rayon r.
On considère l'application f qui à tout point M de (Γ) d'affixe z différent de ia associe le point N d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{(1+i)z^2 - iaz + ia^2}{ai - z}$.

4. Déterminer les images par f des points A et C.
5. Etablir que : $z' - a = -(1+i)z$.
6. On note (Ψ) l'ensemble des points N tels que : $|z' - a| = |(1+i)z|$.

   a) Justifier que le point C appartient à l'ensemble (Ψ).

   b) Déterminer l'ensemble (Ψ).
7. Pour $a = 1 - 3i$, construire les points A, B et C puis les ensembles (Γ) et (Ψ).

PROBLEME

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct (O,I,J). (*Unité graphique 1 cm*).

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x\,e^{-x}$

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (x-1)\ e^{-x}$
2. Déterminer le sens de variation de g puis, dresser le tableau de variation de g (sans les limites aux bornes) .
3. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0$.

Partie B

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
3. a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{(1-x)e^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}$.

   b) Déterminer le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f.
4. a) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est $y = x+1$.

   b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x - 1 = \dfrac{(x+1-e^{x})xe^{-x}}{1-xe^{-x}}$.

   c) Déterminer le signe de la fonction h telle que : $h(x) = x+1-e^{x}$.

   d) Déduire de la question précédente les positions relatives de (C) et de (T).
5. Construire (T) et (C).

Partie C

Soit x un nombre réel élément de l'intervalle] 0 ; 1[.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k e^{-kx} = 1 + xe^{-x} + x^2e^{-2x} + \ldots + x^{n-1}e^{-(n-1)x}$.

1. Justifier que : $0 < xe^{-x} < 1$.

2. a) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = f(x) - \dfrac{x^n e^{-nx}}{1 - xe^{-x}}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) < f(x)$.

3. Démontrer que la suite $(f_n(x))$ est strictement croissante.

4. En déduire que la suite $(f_n(x))$ converge et déterminer sa limite.

DEVOIR N° 11

EXERCICE 1

1. On pose : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

   Justifier que les racines cubiques de 1 sont 1 , j et $\bar{j}$.

2. Soit a une racine cubique du nombre complexe A.

   Démontrer que les racines cubiques de A sont a , aj et $a\bar{j}$.

3. Vérifier que : $(1+i)^3 = -2+2i$.

4. Déduire de ce qui précède sous leurs formes algébriques, les solutions de l'équation $z^3 = -2+2i$.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté on considère le triangle ABC direct.

1. Construire les triangles équilatéraux directs A'CB, B'AC et C'BA et leurs centres respectifs F, G et H. Considérons les rotations suivantes : $r_1 = r(F, \frac{2\pi}{3})$, $r_2 = r(G, \frac{2\pi}{3})$ et $r_3 = r(H, \frac{2\pi}{3})$.

2. Soit la transformation plane $f = r_1 \circ r_2 \circ r_3$.

   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ r_2$ puis la nature de l'application f.

   b) Déterminer f (B).

   c) En déduire que : $f = I_d$ (où I_d est l'identité du plan).

3. Déduire de la question précédente la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_3$.

4. Soit S la symétrie orthogonale d'axe (GH).

   a) Caractériser les droites (D_1) et (D_2) telles que : $r_2 = S_{(D_1)} \circ S$ et $r_3 = S \circ S_{(D_2)}$.

   b) En déduire que les droites (D_1) et (D_2) se coupent en F.

5. Justifier que (D_1) est la droite (FG) et que (D_2) est la droite (FH).

6. Démontrer que le triangle G H F est équilatéral direct.

PROBLEME

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$g(x) = x(1 - x^2) + 1 - 2\ln x$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif, $g'(x) = \dfrac{(x+1)(-3x^2+3x-2)}{x}$.

   b) Démontrer que g est strictement décroissante.
3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1;+\infty[$.

   b) Démontrer que : $\forall x \in]0;\alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln x}{x} - (x-1)^2\right)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 1 cm).

1. Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
2. a) Vérifier que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = -x + 2 + \dfrac{\ln x - x}{x^2}$

   b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x+2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

   b) Déterminer le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f.
4. a) Vérifier que 1 est solution de l'équation $f(x) = 0$ puis justifier que $f(\alpha) > 0$.

   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]\alpha;+\infty[$.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = \ln x - x$.

1. a) Dresser le tableau de variation de h.

   b) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif, $h(x) < 0$.

   c) Déterminer les positions relatives de (C) et (Δ).
2. Construire (Δ) et (C). *On prendra $\alpha = 1{,}4$ et $\beta = 1{,}8$.*

Partie D

Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par les droites $x =$, $x = \lambda$, (Δ) et la courbe (C).

1. Justifier que : $A(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{t - \ln t}{t^2} dt$.

2. Calculer la dérivée de la fonction k définie sur $]0 ;+\infty[$ par : $k(x) = \frac{\ln x}{x}$.

3. Démontrer que : $A(\lambda) = \frac{\ln\lambda}{\lambda} + \ln\lambda + \frac{1}{\lambda} - 1$.

4. Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

DEVOIR N° 12

EXERCICE 1

i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. a) Calculer $1 + i + i^2 + i^3$.

   b) Calculer i^4 puis i^{100}.

2. En déduire $\sum_{k=0}^{100} i^k$ où $\sum_{k=0}^{100} i^k = 1 + i + i^2 + \ldots + i^{100}$.

EXERCICE 2

Soit FAB et JAB deux triangles isocèles respectivement en F et en J tels que :

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}}) = -\frac{2\pi}{3}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JB}}) = \frac{2\pi}{3}$.

On note : (C_1) le cercle de centre F passant par A et B.

: (C_2) le cercle de centre J passant par A et B.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

2. Démontrer que les triangles AFJ et FBJ sont équilatéraux de sens direct.

3. On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et s la symétrie orthogonale d'axe (AB).

   On pose : f = sor.

   a) Justifier que le point F est invariant par f.

   b) Expliciter l'application f.

4. La droite (AF) recoupe le cercle (C_1) en un point M et la droite (AJ) recoupe le cercle (C_2) en un point N.

   a) Démontrer que N est l'image de M par la rotation r puis, que M est l'image de N par s.

   b) Démontrer que les points M, B et N sont alignés.

5. On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{FJ}$. La droite passant par A et parallèle à la droite (MN) recoupe le cercle (C_2) en un point P. Démontrer que l'image du M par t est B et que l'image A par t est P.

6. Démontrer que les droites (MP), (AB) et (FJ) sont concourantes.

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^{x}}{e^{x}+1}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
(Unité graphique : 1cm).

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{x} + x + 1$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer le sens de variations de g.
3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

   b) Vérifier que : $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$.
4. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty\,;\alpha[,\ g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[,\ g(x) > 0$.

Partie B

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

   b) En donner une interprétation graphique.

   c) Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

   b) Déterminer les positions relatives de (C) et de (Δ).

   c) Justifier que: $f(\alpha) = \alpha + 1$.
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{e^{x}g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.
4. Calculer f (0). Démontrer que : $\forall x \in]-\infty\,;0[,\ f(x) < 0$ et $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f(x) > 0$.
5. Construire la courbe (Δ) et (C).

Partie C

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1. *Détermination de la limite de F en $+\infty$.*

a) Démontrer que : $\forall t \in [0\,;+\infty[,\ \frac{t}{2} \leq f(t)$.

b) En déduire la limite de F(x) puis celle de $\frac{F(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Donner une interprétation graphique des résultats précédents.

2. *Détermination de la limite de F(x) en $-\infty$.*

Pour tout nombre réel x négatif, on pose : $\psi(x) = \int_0^x te^t\,dt$.

a) Justifier que : $\psi(x) = (x-1)e^x + 1$.

b) Démontrer que : $\forall t \in [x\,;0]$, $\frac{te^t}{e^x+1} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}t\,e^t$. En déduire que : $\frac{1}{2}\psi(x) \leq F(x) \leq \frac{\Psi(x)}{e^x+1}$.

c) On admet que F admet une limite finie L en $-\infty$.

Démontrer que : $\frac{1}{2} \leq L \leq 1$.

3. **a)** Déterminer la dérivée F ' de F. En déduire le sens de variation de F.

b) Dresser le tableau de variation de F

4. Donner l'allure de la représentation graphique (Γ) de F dans le même repère orthonormé (O, I, J).
On prendra : L= 0 ,75 .

DEVOIR N° 13

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en B et de sens direct tel que : AB = a.
On note K le point de [AC] tel que le triangle ABK est isocèle en A .On considère la similitude directe S de centre K qui transforme B en C.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que l'angle de la similitude S est $\frac{5\pi}{8}$.
3. On note R le rapport de S. Démontrer que : $R^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 2

Soit OAB un triangle rectangle isocèle en O de sens direct et C un point de la demi - droite [OB) distinct de B. On note F le milieu du segment [BC]. Les médiatrices des segments [AB] et [AC] se coupent en un point I.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Justifier que la droite (IF) est la médiatrice de [BC].
3. a) Justifier que le triangle IFO est rectangle isocèle en F et de sens direct.
   b) Démontrer que : $(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{IF},\overrightarrow{IO}})$.
   c) En déduire que une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IA}})$ est $\frac{\pi}{2}$.
4. Démontrer que les points O, A, I et C appartiennent à un même cercle (Γ) dont on notera J le centre.
5. On note $r_J = r(J, \frac{\pi}{2})$, $r_F = r(F, \frac{\pi}{2})$ et $r_O = r(O, -\frac{\pi}{2})$. Soit le point K milieu du segment [OC]
   On considère les applications f, g et h telles que : $f = r_J \circ r_O$, $g = r_J \circ r_F$ et $h = f \circ g$.
   a) Démontrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.
   b) Démontrer que g est la symétrie centrale de centre K.
6. En déduire que h est une symétrie centrale.
7. La parallèle à la droite (OC) passant par I recoupe le cercle (Γ) en un point P.
   a) Démontrer que le point P est l'image de O par la rotation r_J.
   b) En déduire l'image de O par f.
   c) Déterminer l'image du point C par l'application h. En déduire le centre de h.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Partie A

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Démontrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point O est 1.
3. a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

   b) En déduire la nature de la branche infinie de (C) en $-\infty$.

   c) Justifier que la droite (OI) est asymptote à (C) en $+\infty$.
4. Démontrer que pour tout nombre réel non nul, $f'(x) = \dfrac{-x(2e^{-x} + x - 2)e^x}{(e^x - 1)^2}$.
5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2e^{-x} + x - 2$.

   a) Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Déterminer le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation.

   c) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[\ln 2 ; +\infty[$.

   d) Vérifier que : $1{,}59 < \alpha < 1{,}60$.
6. a) Calculer h (0). Démontrer que : $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]\alpha ; +\infty[$, $h(x) > 0$ et $\forall x \in]0 ; \alpha[$, $h(x) < 0$.

   b) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x puis en déduire le sens de variation de f.

   c) Démontrer que : $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$ et dresser le tableau de variation de f.

   d) Déterminer une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.

   e) Démontrer que : $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $f(x) < 0$ et $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) > 0$.

7. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = \dfrac{x^2 e^x}{1-e^x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

On note (Γ) la courbe de g dans le repère orthonormé (O, I, J).

Démontrer que les courbes (C) et (Γ) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

8. Construire les courbes (C) et (Γ) dans le même repère (O, I, J).

Partie B :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $I_n = \displaystyle\int_{\ln 2}^{1} \frac{x^n}{e^x - 1} dx.$

1. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
2. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
3. a) Démontrer que pour tout entier naturel supérieur où égal à 2, et pour tout x appartenant à l'intervalle $[\ln 2 ; 1]$ que : $\dfrac{x^n}{e-1} \leq \dfrac{x^n}{e^x - 1} \leq x^n$.

   b) Déduire de ce qui précède que : $\dfrac{1-(\ln 2)^{n+1}}{(e-1)(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1-(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$.
4. Déterminer la limite de la suite (I_n).

DEVOIR N° 14

EXERCICE 1

Soit KDCE un carré de sens direct, les points F, B et A sont les milieux respectifs des segments [KD], [CE] et [FB].

On note S la similitude directe telle que : S(A) = K et S(B) = D.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que le rapport de S est 2.
3. Démontrer que l'angle de S est $-\frac{\pi}{2}$.
4. On note Ω le centre de S. Déterminer puis placer Ω (On justifiera que F n'est pas le centre de S)

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système (S) : $\begin{cases} \text{PGCD}(a;b) = 13 \\ a + b = 195. \end{cases}$

PROBLEME (Extrait Bac 2007, Série C)

On considère la fonction numérique f dérivable et définie sur l'intervalle$]-1\,;1[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J). *(Unité graphique 2cm).*

Partie A

1. a) Calculer les limites de f en -1 et en 1.
   b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. a) Démontrer que : $\forall x \in]-1\,;1[,\ f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
   b) En déduire le tableau de variation de f.
   c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) - x$.

   a) Déterminer le sens de variation de g.

   b) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant le valeurs de x.

   c) Déterminer les positions de (C) par rapport à (T).

4. Tracer dans le même repère (C) et (T).

5. a) Démontrer que f est une bijection de $]-1\,;1[$ sur $\mathbb{R}$.

   b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère (O, I, J). Construire (C').

   c) Démontrer que : $\forall y \in \mathbb{R},\ (f^{-1})(y) = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$.

Partie B

1. Soit Φ une primitive de f^{-1} sur $\mathbb{R}$. *(On ne cherchera pas à déterminer $\Phi(x)$).*

   a) Démontrer que $\Phi o f$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto xf'(x)$ sur $]-1;1[$.

   b) Démontrer que pour tous éléments a et b de $]-1;1[$.

   $$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \Phi of(b) - \Phi of(a).$$

   c) En déduire que : $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b tf'(t)dt$.

   d) Démontrer que pour tout élément x de $]-1;1[$

   $$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$$ (On *pourra utiliser B1 – c*).

2. a) Démontrer que pour tout élément x de $]-1;1[$.

   $$\int_0^x tf'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$ (On *pourra utiliser A2 – a*).

   b) En déduire que pour tout élément y de $\mathbb{R}$,

   $$\int_0^y f^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right).$$

3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C') de f^{-1} et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Calculer $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

4. **a)** Hachurer sur le graphique, l'ensemble $\mathcal{D}$ des points dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient :

$0 \leq x \leq 1\,;\, 0 \leq y \leq 1$ et $f^{-1}(x) \leq y \leq f(x)$.

b) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ en cm^2.

DEVOIR N° 15

EXERCICE 1

Quels sont les entiers naturels n pour lesquels $17 \times 3^{n} - 4$ est divisible par 13 ?

EXERCICE 2

(Extrait Bac 2007 Série C).

On considère le triangle ABC rectangle en B tel que : AB = 5 cm et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$.

Soit E le milieu du segment [AC].

1. **a)** Construire le triangle ABC.

b) Démontrer qu'il existe une rotation r qui transforme B en C et A en E.

c) Déterminer l'angle de la rotation r

d) Construire son centre O

2. Soit S la similitude de centre O qui transforme B en E et J le centre du cercle circonscrit au triangle OAE.

a) Déterminer l'angle et le rapport de S.

b) Démontrer que : S (A) = J.

3. Soit k un nombre réel non nul, M et M' deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'} = k\overrightarrow{EC}$.

a) Construire les points M et M' pour $k = \frac{3}{2}$.

b) Démontrer que M est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs (k − 1) et (− k).

c) Démontrer que r(M) = M' et en déduire que le triangle OMM' est équilatéral.

d) Démontrer que les points O, A, M et M' sont cocycliques.

4. Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM'.

a) Démontrer que : S (M) = N.

b) Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB).

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (x-1)e^{-\frac{1}{|x|}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct (O, I, J).

Partie A

1. Démontrer que la fonction f est continue en 0.
2. Démontrer que la fonction f est dérivable en 0. En déduire le nombre dérivé de f en 0.
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

   b) Démontrer que la droite (Δ') d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
5. Démontrer que pour tout nombre réel non nul x, $(1-x)e^{x} - 1 < 0$.
6. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $e^{-x} + x - 1 > 0$ et que : $\forall x \in]0 ;+\infty[$, $e^{-x} + x - 1 > x(e^{-x} - 1)$.
7. En utilisant la question 5) déterminer les positions relatives de (C) et (Δ) sur $]-\infty ; 0[$.
8. Justifier que :

   a) Pour tout nombre réel x, $(1-x)e^{-x} - 1 + 2x = (e^{-x} + x - 1) - (xe^{-x} - x)$.

   b) Pour tout nombre réel x strictement positif, $(1-x)e^{-x} - 1 + 2x > 0$.

   c) En déduire les positions relatives de (C) et (Δ') sur $]0 ; +\infty[$.
9. Démontrer que :

$$\forall x \in]-\infty ; 0[, f'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

10. a) Déterminer le sens de variation de f.

    b) Dresser le tableau de variation de f.
11. Construire (C) et (Δ) et (Δ'). *On prendra 2 centimètres pour unité graphique.*

Partie B

Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle$]-1\,;0[$. On pose : $T(\lambda) = \int_{\lambda}^{-1} (2t-1)e^{\frac{1}{t}}dt$.

1. Justifier que : $\int_{\lambda}^{-1} f'(t)\,dt = -\frac{2}{e} - (\lambda - 1)e^{\frac{1}{\lambda}}$.

2. En utilisant une intégration par partie. Démontrer que :

$$\int_{\lambda}^{-1} f'(t)\,dt = -\frac{3}{e} + (\lambda^2 - \lambda + 1)e^{\frac{1}{\lambda}} + T(\lambda).$$

3. En déduire $T(\lambda)$.

4. Calculer la limite de $T(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0.

DEVOIR N° 16

EXERCICE 1

Soit p et q deux entiers relatifs premiers entre eux et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Démontrer que p et q^n sont premiers entre eux.

2. En déduire que p^n et q^n sont premiers entre eux.

3. Application : Justifier que 59319 et 456533 sont premiers entre eux.

EXERCICE 2

Soit A et B deux points distincts du plan, I le milieu du segment [AB] et C le point tel que le triangle AIC soit équilatéral de sens direct. On considère les rotations $r_B = r(B ; \frac{2\pi}{3})$ et $r_C = r(C ; \frac{\pi}{3})$.

Soit $F = r_B(I)$, J le point d'intersection des droites (IC) et (AF) et $P = (r_B)^{-1}(J)$.

1. Faire une figure.

2. Démontrer que B est l'image de C par la rotation r_I de centre I et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

3. **a)** Déterminer la nature de $r_B \circ r_I$. Déterminer $r_B \circ r_I(I)$ et $r_B \circ r_I(C)$.

b) Démontrer que le quadrilatère FBCI est un parallélogramme.

4. Justifier que le point J est le milieu du segment [AF].

5. Déterminer la nature de l'application $r_B \circ r_C$. Déterminer $r_B \circ r_C(A)$.

En déduire l'élément caractéristique de $r_B \circ r_C$.

6. Démontrer que : $r_C(J) = P$.

7. **a)** Démontrer que la droite (BC) est la médiatrice du segment [PJ].

b) Démontrer que le triangle BCJ est rectangle en J.

8. Prouver que : $2(\widehat{\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BP}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CP}})$.

9. Soit O le milieu du segment [BC].
Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle JPC.

PROBLEME

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_n dérivable sur son ensemble de définition et définie par : $f_n(x) = \ln(1 - x^n)$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Partie A

1. Déterminer suivant les valeurs de n l'ensemble de définition de D_n de f_n.
2. a) Déterminer la limite de f_n en 1.

   b) Donner une interprétation graphique du résultat.
3. a) Calculer lorsque n est impair $\lim_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.

   b) En donner une interprétation graphique.
4. Démontrer que lorsque n est impair les courbes (C_n) passent par deux points dont en précisera les coordonnées.
5. Déterminer les positions relatives des courbes (C_{2p+1}) et (C_{2p+3}) où p est un entier naturel.
6. Pour n impair :

   a) Déterminer le signe de $f_n'(x)$ suivant les valeurs de x.

   b) Dresser le tableau de variation de f_n.
7. Construire les courbes (C_3) et (C_5). (*Unité graphique : 2 cm).*

Partie B

1. a) Déterminer le signe de $f_2'(x)$ suivant les valeurs de x.

   b) Déterminer le sens de variation de f_2.

   c) Dresser le tableau de variation de f_2.
2. Construire (C_2).
3. On note g la restriction de f_2 à $[0\,;1[$.

   Démontrer que g est une bijection de $[0\,;1[$ sur $]-\infty\,;0]$.

4. On désigne par g^{-1} la réciproque de g et on note (C_2') sa courbe représentative dans le repère (O, I, J).

a) Démontrer que : $\forall y \in]-\infty ; 0]$, $g^{-1}(y) = \sqrt{1-e^y}$.

b) En déduire $(g^{-1})'(y)$ pour tout nombre réel strictement négatif y.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ par : $h(x) = -2\tan(x)$

1. Soit u la fonction définie sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ par : $u(x) = \cos x$.

a) Vérifier que : $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}[$, $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2}h(x)$.

b) En déduire la primitive H de la fonction h sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ telle que : $H(0) = 0$.

2. Démontrer que H est une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ sur $]-\infty;0]$.

3. On admet que la fonction sinus notée sin réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ sur $[0;1[$ et que :

$\forall x \in [0;1[$, $(\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Démontrer que : $\forall x \in]-\infty;0[$, $(H^{-1})'(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{e^{-x}-1}}$

On remarquera que : $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}[$, $H(x) = g(\sin x)$).

DEVOIR N° 17

EXERCICE 1

On considère l'équation (E), $x^2 - 5y^2 = 1$ où les inconnues x et y sont des entiers strictement positifs.

1. Dans cette question, on suppose que (x_0, y_0) est une solution de (E).

a) Démontrer que x_0 et y_0 sont premiers entre eux.

b) Prouver que x_0 et y_0 n'ont pas la même parité.

2. Démontrer qu'il existe un entier k tel que : $x_0 = 5k + 1$ ou $x_0 = 5k - 1$.

3. **a)** Calculer $1 + 5y^2$ pour $1 \leq y \leq 4$.

b) En déduire un couple (x_0, y_0) solution de (E).

EXERCICE 2

Soit A et B deux points distincts du plan. On note O le milieu de [AB]. On désigne par S la similitude de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On pose : $C = S(B)$, $K = S(A)$ et $F = S(C)$.

1. Faire une figure à compléter par la suite.

2. Démontrer que ABC est un triangle rectangle en A.

3. En déduire la nature du triangle KCF.

4. Soit I et J les milieux respectifs des segments [BC] et [CF].

On note S_I la similitude de centre I, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $P = S_I(C)$.

a) Démontrer que : $\overrightarrow{JF} = \overrightarrow{IP}$ et que $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{PB}$.

b) Démontrer en utilisant la question 2) que le triangle BCP est rectangle en B.

c) Prouver que P est le milieu du segment [FB].

5. **a)** Déduire de la question 4) la nature du quadrilatère JPBI.

b) Déterminer la nature du triangle JBC.

c) Démontrer que les points F, K, B et C appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

PROBLEME

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f_n(x) = \ln(\sqrt{x^2 + n} + x)$.

On désignera par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 1 cm).

Partie A

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f_n est $\mathbb{R}$.

2. a) Calculer la limite de f_n en $+\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

   b) Calculer la limite de f_n en $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

3. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + n}}$.

   b) Déterminer le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation.

4. Calculer $f_n\left(\frac{1-n}{2}\right)$.

5. Déterminer une équation de la tangente (T_n) à (C_n) au point d'abscisse 0.

6. Soit h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h_n(x) = f_n(x) - \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{2}\right)$.

   a) Démontrer que la fonction h_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

   b) Calculer $h_n(0)$. En déduire les positions relatives de (T_n) et (C_n).

7. Déterminer les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

8. Démontrer que la fonction f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.

Partie B

1. Démontrer que f_1 est impaire. En donner une interprétation graphique.

2. On note f_1^{-1} la bijection réciproque de f_1. Démontrer que pour tout réel x, $f_1^{-1}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

3. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f_1 et f_2. *(On précisera les coordonnées du point d'abscisse 0 et du point d'ordonnée 0).*

4. Construire les tangentes (T_1) et (T_2) ; les courbes (C_1), (C_2) ainsi que (C ') la courbe de f_1^{-1}.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

   Démontrer que pour tout nombre réel x, $g(x) = f_1(-x)$.

6. Construire la courbe (Γ) de g dans le même repère que (C_1).

Partie C

1. Vérifier que pour tout nombre réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

2. Démontrer que pour tout nombre réel t non nul et différent de – 1:

   $$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}.$$

3. En déduire que : $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) = P_n(x) + (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+3}}{1+t^2}dt$.

   où $P_n(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}$.

4. Démontrer que : $\forall\, t \in [0\,;1]$, $\dfrac{t^{2n+3}}{1+t} \leq t^{2n+3}$ puis que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{1+t^2}dt \leq \frac{1}{2n+4}$.

5. Posons : $U_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \dots + (-1)^n \dfrac{1}{2n+2}$.

   Vérifier que : $f_1(1) = U_n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{1+t^2}dt$.

6. En utilisant les *questions(1) et (4) Partie C*, démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}\ln 2$.

DEVOIR N° 18

EXERCICE 1

On se propose dans cet exercice de répondre à la question suivant :
"Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1, peuvent-ils être premiers ?"

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose : $N_p = 11...1$ où le chiffre 1 apparaît p fois.

On rappelle que : $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + ... + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?

2. Prouver que : $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?

3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + \dots + x^{n-2} + x^{n-1}).$$

a) On suppose que p est pair et on pose : $p = 2q$, où q est un entier naturel non nul.

Démontrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b) On suppose que p multiple de 3 et on pose : $p=3q$, où q est un entier naturel non nul.

Démontrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c) On suppose que p n'est pas premier. On pose : $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels non nuls.

En déduire que N_p est divisible par N_k.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 8\sqrt{2}(-1 + i)$.

2. Vérifier que la somme des solutions est nulle.

PROBLEME

Soit f la fonction dérivable et définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} \forall x \in [0;1[\cup]1;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\ln x} \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = (2x-1)\ln x - x + 1$.

1. Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = \ln(\ln(x^2) - \frac{1}{x} + 1$.
2. a) Vérifier que : $g'(1) = 0$.

   b) Démontrer que : $\forall x \in]0\,;1[,\ g'(x) < 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[,\ g'(x) > 0$.
3. En déduire le sens de variation de g.
4. Démontrer que : $\forall x \in]0\,;+\infty[\setminus\{1\},\ g(x) > 0$ et $g(1) = 0$.

Partie B

1. Etudier la continuité de f en 0 et en 1.
2. Démontrer que la fonction f est dérivable à droite en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Soit h la fonction définie sur $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$ par : $h(x) = \dfrac{x+1}{\ln(x+1)} - \dfrac{1}{x}$.

a) Démontrer que : $\forall x \in]0\,;1[,\ x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

b) Démontrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = \dfrac{3}{2}$ puis, en déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

4. On admet que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{3}{2}$. Justifier que f est dérivable en 1.

   En déduire $f'(1)$.

Partie C

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

2. a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\setminus \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\ln^2 x}$.

   b) Déterminer le sens de variation de f.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

3. Tracer la courbe (C). (*Unité graphique : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnée*).

4. Démontrer que f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur un intervalle à déterminer.

Partie D

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution α_n dans $[0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que α_n appartient à $]0\,;1[$.

On considère la suite V de nombres réels de terme général V_n tel que : $V_n = n\,\alpha_n$

3. Démontrer que la suite (α_n) est strictement décroissante.

4. Déduire de ce qui précède que la suite (α_n) est convergente.

5. On admet que la fonction φ définie sur $]0\,;1[$ par : $\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$ est strictement décroissante .

   a) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $V_n = \varphi(\alpha_n)$.

   b) En déduire que la suite V est strictement croissante.

6. On note L la limite de la suite (α_n). *On suppose que f est continue en L.*

   a) En utilisant la question 1) de la Partie B et la question 1) de la Partie D, démontrer que : $L = 0$.

   b) Déterminer la limite de la suite V.

DEVOIR N° 19

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u};\vec{v})$. (*On prendra 2 cm pour unité*).

1. Soit (E) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $x^2+4y^2=16$.

a) Déterminer la nature de l'ensemble (E).

b) Préciser les foyers F et F', l'axe focal ainsi que les sommets A et A' sur l'axe focal, et les autres sommets B et B' de (E) (les points A, B et F ont des abscisses positives), les directrices (D) et (D') où (D) est la droite des points d'abscisses positives.

c) Construire l'ensemble (E).

2. Soit s la similitude directe d'écriture complexe : $z'=\frac{1}{2}(1-i)z+1+2i$.

Déterminer les éléments caractéristiques de s.

3. On désigne par (E') l'image de (E) par s.

a) Démontrer que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature.

b) En déduire la nature de l'ensemble (E').

c) Déterminer $s(A)$, $s(A')$, $s(B)$, $s(B')$, $s(F)$ et $s(F')$ par s.

4. En déduire les éléments de symétrie de l'ensemble (E').

5. Tracer (E') dans le même repère que (E).

6. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

a) Justifier que $x=x'-y'+1$ et $y=x'+y'-3$.

b) Déterminer une équation de chacune des images des droites (D) et (D') par s.

c) Déterminer une équation de l'ensemble (E').

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0;\ \vec{u};\ \vec{v})$.

A, P et Q les points d'affixes respectives $z_A=i$, $z_P=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_Q=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. a) Vérifier que : $z_P \times z_Q = -1$.

   b) Justifier que P et Q appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon 1

   c) Construire les points A, P et Q.

   d) Déterminer la nature du triangle APQ.

Soit z un nombre complexe non nul, différent de i, et – i les points M et N d'affixes respectifs z et $-\frac{1}{z}$.

2. Interpréter géométriquement les nombres $|z - i|$ et $\left|\frac{1}{z} + i\right|$.
3. Démontrer que le triangle AMN est isocèle en A si et seulement si M appartient au cercle (C).

On suppose dans la suite que M appartienne au cercle (C).

4. Démontrer que : $\frac{1}{z} = \bar{z}$.
5. Démontrer que N appartient au cercle (C) et que la médiatrice du segment MN est l'axe imaginaire.
6. En déduire une construction du point N à partir du point M.

PROBLEME

Partie A

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - y = (2x-1)e^{x^2} - e^x$.

1. Vérifier que la fonction h définie par : $h(x) = e^{x^2} + (1-x)e^x$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E') : y' - y = 0$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution H sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) telle que $H(1) = 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{x^2} - xe^x$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

Les fonctions considérées dans tout le problème sont dérivables sur leurs ensembles de définition.

1. Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire la nature de la branche infinie.

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b) Interpréter graphiquement ce résultat.

3. On désigne par f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.

4. a) Calculer $f'(1)$ et $f'(0)$.

   b) Démontrer que : $\forall x \in]1;+\infty[,\ f'(x) > 0$ et que $\forall x \in]0;1[,\ f'(x) < 0$.

   c) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x(2e^{x^2} - e^{x}) - e^{x}$.

   En déduire que : $\forall x \in]-\infty;0[, f'(x) < 0$.

5. Déterminer le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

6. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

Partie C

On considère la fonction g définie par: $g(x) = f(x) + x - 1$.

1. Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

2. Soit les fonctions φ et t définies par : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \varphi(x) = \frac{e^{x}-1}{x}$

   $\forall x \in [0;+\infty[,\ t(x) = (x-1)e^{x} + 1$.

   a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ t(x) > 0$.

   b) Démontrer que φ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

   c) Justifier que : $\begin{cases} \forall x \in]1;+\infty[,\ \varphi(x) < \varphi(x^2) \\ \forall x \in]0;1[, \varphi(x^2) < \varphi(x) \end{cases}$

   d) En déduire que : $\forall x \in]0;1[,\ g(x) < 0$ et que $\forall x \in]1;+\infty[,\ g(x) > 0$.

3. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty;0[,\ e^{x^2} - 1 > 0$ et $x(e^{x} - 1) > 0$.

   En déduire que : $\forall x \in]-\infty;0[,\ g(x) > 0$.

4. Déterminer les positions relatives de (C_f) et (T).

5. Tracer (T) et (C_f). *(Unité graphique : 2cm en abscisses et 1 cm en ordonnées).*

DEVOIR N° 20

EXERCICE 1

Soit $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels et z' un nombre complexe tel que :

$z' = iz^2 + z + 1$.

1. Mettre z' sous forme algébrique.
2. Déterminer :

a) l'ensemble (H_1) des points $M(z)$ tels que z' soit un nombre réel et construire (H_1).

On précisera les sommets sur l'axe focal ainsi que les asymptotes de (H_1).

b) l'ensemble (H_2) des points $M(z)$ tels que z' soit un imaginaire pure. Construire (H_2).

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' - 2y = 0$.

1. Soit z une fonction deux fois dérivable sur $]-\infty;0[$. Démontrer que $x^2 z$ est solution de (E) si et seulement si z' est solution de (E') : $x^4 z = A; A \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions sur $]-\infty;0[$ de l'équation différentielle (E').
3. En déduire les solutions sur $]-\infty;0[$ de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution h de (E) telle que $h(2) = 3$.

PROBLEME

Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (\ln x)^2$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

Partie A

1. a) Calculer la limite de f à droite en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

2. a) $f\,'$ désigne la dérivée de f. Calculer $f\,'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$.

b) Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

Partie B

On appelle f_1 la restriction de f à $]0;1[$ et f_2 la restriction de f à $]1;+\infty[$.

1. a) Démontrer que f_1 réalise une bijection de $]0;1[$ sur $]0;+\infty[$.

b) Démontrer que f_2 réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$.

2. On appelle f_1^{-1} la réciproque de f_1 et f_2^{-1} la réciproque de f_2. On note (Γ_1) la courbe représentative de f_1^{-1} et (Γ_2) la courbe représentative de f_2^{-1} dans le repère (O, I, J).

a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f_1^{-1}(x) = e^{-\sqrt{x}}$ et $\forall x \in]0;+\infty[,\ f_2^{-1}(x) = e^{\sqrt{x}}$.

b) Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f_1^{-1} et f_2^{-1}.

3. Déterminer une équation de la tangente (T_2) à (Γ_2) au point d'abscisse 1.

4. On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = e^{\sqrt{x}} - \frac{e}{2}(x+1)$.

a) Vérifier que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ h''(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}$.

b) En déduire le sens de variation de $h\,'$.

c) Calculer $h\,'(1)$ et démontrer que $h\,'$ est strictement positive sur $]0;+\infty[\setminus\{1\}$.

5. Calculer $h(1)$ puis démontrer que $\forall x \in]0;1[,\ h(x) < 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[,\ h(x) > 0$.

6. Déterminer la position de relatives de (Γ_2) relativement à (T_2).

7. Tracer (T_2), (Γ_1), (Γ_2) et (C).

Partie C *λ désigne un nombre réel strictement positif.*

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction ln.

2. Démontrer que $\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}} (\lambda - (f(x))dx$ est l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite d'équation $y = \lambda$ et les droites d'équations $x = e^{-\sqrt{\lambda}}$ et $x = e^{\sqrt{\lambda}}$.

3. Soit les points $A(1;\lambda)$, $B(1;0)$, $C(e^{-\sqrt{\lambda}};\lambda)$, $D(e^{\sqrt{\lambda}};\lambda)$, $E(\lambda;1)$, $F(0;1)$, $G(\lambda;e^{-\sqrt{\lambda}})$ et $H(\lambda;e^{\sqrt{\lambda}})$.

On désigne par (C_1) la courbe représentative de f_1 et par (C_2) la courbe représentative de f_2.

On note Ω_1 l' aire de la partie du plan délimitée par (C_1), les segments $[AB]$ et $[AC]$, Ω_2 l'aire de la partie du plan délimitée par (C_2), les segments $[AB]$ et $[AD]$, Ω_3 l'aire de la partie du plan délimitée par (Γ_1) et les segments $[EF]$ et $[EG]$, et Ω_4 l'aire de la partie du plan délimitée par (Γ_2), les segments $[EF]$ et $[EH]$.

Démontrer que : $\displaystyle\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}(\lambda-(f(x))dx=\int_0^{\lambda}(f_2^{-1}(y)-f_1^{-1}(y))dy.$

4. En utilisant une intégration par parties et la question 1 Partie C), démontrer que :

$$\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}(\lambda-(f(x))dx=2(\sqrt{\lambda}-1)e^{\sqrt{\lambda}}+2(\sqrt{\lambda}+1)e^{-\sqrt{\lambda}}.$$

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1(e^{\sqrt{y}}-e^{-\sqrt{y}})dy.$

DEVOIR N° 21

EXERCICE 1

1. Démontrer que : $\forall\, x \in\,]0\,;1]$, $x^2 e^{-\frac{1}{x}} < \frac{x^2}{2}$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ telle que $f(0) = 0$ et pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;1]$,
$x^2 e^{-\frac{1}{x}} < f(x) < \frac{x^2}{2}$.

   a) Déterminer la limite à droite en 0 de f.

   b) Démontrer que f est dérivable à droite en 0.

EXERCICE 2

Partie A

Soit la fonction numérique f à variable réelle définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

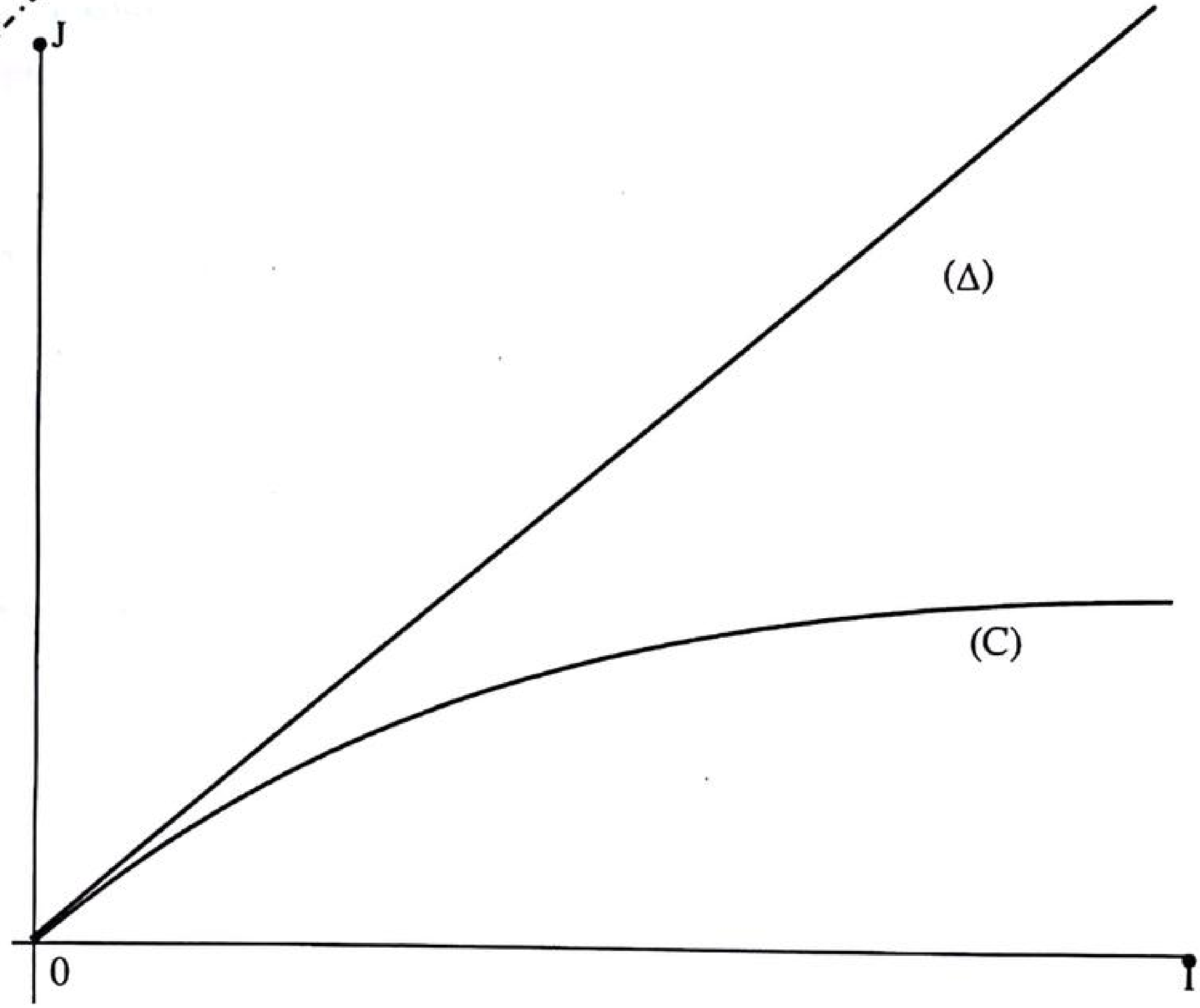
1. Démontrer que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

2. Justifier que : $\forall x \in [0\,;1]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

1. La courbe (C) de la fonction f est représentée ci-dessous sur l'intervalle $[0; 1]$ dans un repère orthonormé(O, I, J). Représenter sur l'axe (OI) les quatre premiers termes de la suite (u_n) à l'aide de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.



2. **a)** Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1$.

b) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite L telle que : $0 \leq L \leq 1$.

4. *On admet que la fonction f est continue sur [0 ; 1]*. Déterminer L.

PROBLEME

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Soit les points A et B d'affixes respectives $-\sqrt{3}+i$ et $-2i$. La médiatrice du segment [AB] coupe la droite d'équation $y = 1$ en un point C.

Partie A

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.
2. Démontrer qu'une équation de la médiatrice de [AB] est $-x+y\sqrt{3}=0$.
3. Prouver que l'affixe du point C est $\sqrt{3}+i$.
4. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral de sens direct.
5. Démontrer que le point O est le centre de gravité du triangle ABC.

Partie B

Soit les points D et F tels que les triangles ACD et DBF soient rectangles isocèles directs respectivement en A et F. La perpendiculaire à la droite (AB) menée par A coupe la droite (DF) en un point K.

Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

On pose : $f = r_A \circ r_O$.

1. Justifier que f est une rotation dont on précisera l'angle.
2. a) Justifier que l'image de B par f est D.

   b) Justifier que l'image de C par f est A.

   c) Construire le centre Ω de f.
3. a) Prouver que le triangle ABD est isocèle en A et justifier que F appartient à la droite (BC).

   b) Démontrer que l'image du point B par r_A est le point K.

   c) En déduire que Ω appartient à la médiatrice de [AK].
4. En déduire que la droite (AF) est la médiatrice du segment [DB].
5. Justifier que : $(\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AD}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ et que $AD = AK$.
6. En déduire que le triangle DAK est équilatéral de sens direct.
7. Construire (Ω).

Partie C

On désire démontrer dans cette partie que le quadrilatère $AB\Omega D$ est un losange.

1. **a)** Justifier que $(D\Omega)$ est la médiatrice de $[AK]$

   b) Démontrer que les droites (AB) et $(D\Omega)$ sont parallèles

2. Démontrer que le quadrilatère $AB\Omega D$ est un parallélogramme.

3. Démontrer que le quadrilatère $AB\Omega D$ est un losange.

DEVOIR N° 22

EXERCICE 1

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle$]0\,;+\infty[$ et à valeurs strictement positives telle que :

$xf'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2+1}$ et $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout nombre réel non nul x, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1} = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

2. Déterminer la fonction f.

EXERCICE 2

Soit (I_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$.

I) *Etude de la suite* (I_n).

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Démontrer que : **a)** $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0$.

b) (I_n) est décroissante.

3. En déduire la convergence de la suite (I_n).

II) *Calcul de* I_2.

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan x$.

1. Démontrer que f est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à déterminer.

2. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3. En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_2.

PROBLEME

Partie A

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité : 2 cm).

1. a) Calculer le module de $1+i\sqrt{3}$ et déterminer un argument de $1+i\sqrt{3}$.

   b) En déduire la forme algébrique de $(1+i\sqrt{3})^3$.

2. Soit P le polynôme défini par :

   $P(z) = z^3 - [-1+i(2+\sqrt{3})]z^2 - 2[1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})]z + 4(-\sqrt{3}+i)$

   a) Calculer $P(1+i\sqrt{3})$.

   b) Démontrer que : $P(z) = (z-1-i\sqrt{3})(z^2+2(1-i)z-4i)$.

   c) Calculer $(2+2i)^2$ et résoudre dans C l'équation $P(z)=0$.

Partie B

On considère les points A, B et C d'affixes respectives -2, $2i$ et $1+i\sqrt{3}$.

1. Placer A, B et C dans le plan complexe.
2. Justifier que A, B et C appartiennent à un même cercle (C) de centre O dont on précisera le rayon.
3. Construire le barycentre G des points pondérés $(A;-1)$, $(B;1)$ et $(O;-1)$.
4. On considère l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MO^2 = 12$.
   a) Justifier que B appartient à (Γ).
   b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ)

Partie C

Soit I le milieu du segment $[AB]$, K le symétrique de C par rapport à (OB). On note r_1 la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre O qui transforme B en C. On pose : $f = r_2 \circ r_1$.

1. Démontrer que l'angle de la rotation r_2 est $-\frac{\pi}{6}$.
2. Démontrer que le triangle KOC est équilatéral de sens direct.

3. a) Démontrer que : $f(O) = C$.

   b) Démontrer que f est la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

4. Soit g l'isométrie plane qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tels que :

$$z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}.$$

   a) Justifier que K est unique point invariant de g.

   b) Déterminer l'image du point O par g.

   c) Déduire des questions (4a) et (4b) que : $g = f$.

5. Justifier que l'ensemble des points M du plan tels que : $|z' - 1 - i\sqrt{3}| = 2$ est l'ensemble (C) de la question (2) Partie B.

Partie D

Soit P un point du segment [BC] distinct des points A et B . La parallèle à la droite (OB) passant par P coupe la droite (OC) en un point C' et la parallèle à la droite (OC) passant par P coupe la droite (OB) en un point B'.

1. Démontrer que : $OC' = BB'$.

2. a) En déduire qu'il existe une unique rotation r telle que : $r(O) = B$ et $r(C') = B'$.

   b) Déterminer l'angle de r.

3. Démontrer que : $r(C) = O$. En déduire une construction du centre Ω de r.

4. Démontrer que les points O, C', B' et Ω sont cocycliques.

DEVOIR N° 23

EXERCICE 1

1. Soit f et g des fonctions deux fois dérivables et définies sur $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-2x}g(x)$.
   a) Justifier que f est solution sur $\mathbb{R}$ de $y''+y=0$ si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y''-4y'+5y=0$.
   b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution h de (E) telle que : $h(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $h'(\frac{\pi}{4}) = -1$

3. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \left[h'(t)\right]^2 dt$.
   a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \left[\frac{1}{8}(h'(t))^2 + \frac{5}{8}(h(t))^2\right]_{\frac{\pi}{4}}^{x}$
   b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \frac{1}{4}(8\cos^2 x - 22\sin(2x) + 21)e^{4x-\pi} - \frac{3}{4}$.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle (E) : $xy'-y=1$.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$. Démontrer que si f est une solution sur $]0;+\infty[$ de (E) alors f vérifie l'équation différentielle (E') : $y''=0$.
2. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle (E') : $y''=0$.
3. Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \alpha x + \beta$; $(\alpha \in \mathbb{R}; \beta \in \mathbb{R})$. Quelles conditions sur α et β pour que f soit solution sur $]0;+\infty[$ de (E) ?
4. En déduire la résolution sur $]0;+\infty[$ de (E).

EXERCICE 3

(Extrait Bac 2008 , Série C).

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A ;1), (B ;1) et (C ;– 1). Pour la figure prendre pour unité de longueur le centimètre et AB = 6. Cette figure sera complètée au fur et à mesure.

1. Démontrer que le quadrilatère ACBG est un losange.

2. **a)** On appelle O le centre du losange ACBG. E est le symétrique de O par rapport à B. Le point F est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. Construire les points E et F.

b) Démontrer que F est l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

3. On note $t = t_{\overrightarrow{BE}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$.

a) Déterminer les images des points A et C par t.

b) K est l'image de B par t. Démontrer que le point K appartient à la droite (GF). Construire K.

c) Déterminer l'image du triangle ABC par t.

4. On note : $f = t \circ s_{(OC)}$, où $s_{(OC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OC).

a) Déterminer l'image du triangle ABC par f.

b) Démontrer que f est une symétrie glissée.

c) Soit $s_{(BF)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BF). Démontrer que : $s_{(OC)} = t_{\overrightarrow{EO}} \circ s_{BF}$.

d) En déduire les éléments caractéristiques de f.

DEVOIR N° 24

EXERCICE 1

I) *Résolution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $z^3 = -10 - 9i\sqrt{3}$.*

1. Calculer $(2 - i\sqrt{3})^3$.

2. On pose : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vérifier que j et $\bar{j}$ sont des racines cubiques de 1.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E). On mettra les solutions sous leurs formes algébriques.

II) *Construction des points images des solutions de l'équation (E).*

On munit le plan d'un repère orthonormé direct (O, I, J). (*Unité : 2 cm*)
On note A l'image de la solution dont la partie réelle est supérieure à 1.
B l'image de la solution dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1.
C l'image de la solution dont la partie réelle est inférieure à 0.

1. Construire :
   a) le point P d'affixe $-j$.
   b) le point Q d'affixe $\bar{j}$.

2. Exprimer :
   a) z_A en fonction de z_P.
   b) z_C en fonction de z_Q.

3. Déduire de la question précédente la construction des points A et C.

4. Construire la médiatrice de [AC]. En déduire la construction de B.

III) *Utilisation d'une isométrie pour démontrer.*
On note K le point d'affixe j. La droite (IK) coupe les segments [AB] et [BC] respectivement aux points E et F. La droite (IQ) coupe les segments [AB] et [AC] respectivement aux points G et H.

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1. Démontrer que r (G) = F et r (H) = E.
2. En déduire que EF = HG.

EXERCICE 2

Soit (I_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos t)^n \sin t\, e^{\sin^2 t}\, dt$.

1. Calculer I_1.
2. Démontrer que :
   a) La suite (I_{2n}) est décroissante.
   b) La suite (I_{2n+1}) est croissante.
3. Justifier que la suite (I_{2n}) est positive et que la suite (I_{2n+1}) est négative.
4. Justifier que les suites (I_{2n}) et (I_{2n+1}) convergent.

On admet que les suites (I_{2n}) et (I_{2n+1}) admettent une même limite l'on notera L et que cette limite est celle de la suite (I_n)

5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que : $I_{n+2} = \frac{1}{2}\left((-1)^{n+1} + (n+1)I_n \right)$.

On pourra considérer que : $(\cos t)^{n+2} \sin t\, e^{\sin^2 t} = (\cos t)^{n+1} \sin t \cos t\, e^{\sin^2 t}$.

6. Exprimer I_3 et I_5 en fonction de I_1.
7. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur à 1 ,

$$I_{2n+1} = (n!)I_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!}.$$

8. On pose : $V_n = \frac{2}{n+1} I_{n+2}$.
   a) Démontrer que la suite (V_n) est convergente.
   b) Justifier que pour tout entier naturel n, $V_n - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.
   c) En déduire la valeur de L.

DEVOIR N° 25

EXERCICE 1

Quatre garçons et deux filles se présentent au restaurant. Ils sont servis à tour de rôle

1. Déterminer le nombre de manières possibles pour que chacun d'entre eux soit servi.
2. Déterminer la probabilité pour qu'une fille soit servie en premier.
3. Démontrer que la probabilité que les filles soient servies avant les garçons est $\frac{1}{15}$
4. Six élèves du Lycée Scientifique de Yamoussoukro dont deux filles vont participer à un concours de Mathématiques à Abidjan. Lors de leur séjour à l'hôtel qui durera une semaine, ces élèves reçoivent chacun deux repas par jours.
   a) Quelle est la probabilité que les filles soient servies deux fois de suite avant les garçons.
   b) Quelle est la probabilité que les filles reçoivent exactement quatre fois leurs repas avant les garçons pendant la durée du séjour (*on donnera le résultat au centième près).*
   c) Déterminer le nombre minimal de services pour que la probabilité que les filles ne soient pas servies avant les garçons soit inférieure à 0,4.

EXERCICE 2

I) On considère la fonction g dérivable sur $]-\infty\,;-1]$ et définie par : $g(x) = (x+1)^2e^{-x}$.

1. Calculer la limite de g en $-\infty$.
2. Démontrer que g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution α .
4. Justifier que α appartient à $[-2\,;-1]$.

II) Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par : $f(x) = -1-\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$ où $I=[-2;-1]$.

1. Etudier les variations de f sur I.
2. En déduire que $f(I) \subset I$.
3. Démontrer que pour tout x appartenant à I, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
4. Justifier que : $f(\alpha) = \alpha$.
5. Soit U la suite numérique définie par : $U_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = f(U_n)$.
   a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in I$.

b) En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ | U_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2} | U_n - \alpha |.$

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $| U_n - \alpha | \leq (\frac{1}{2})^n$.

d) Démontrer que la suite (U_n) est convergente.

e) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, U_n soit une valeur approchée de α au millième près.

PROBLEME

Partie A

L'unité de longueur est le centimètre.

Soit P et Q deux points tels que PQ = 6. On désigne par A le barycentre des points pondérés (P, 1) et (Q , 2) ; et par B le barycentre des points pondérés (P , 1) et (Q , − 2).

1. Construire les points A et B.

2. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que: $\frac{MP}{MQ} = 2$.

3. Construire l'ensemble (Γ).

Partie B

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3}$. On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [AC].

On considère les rotations $R_I = R(I ; \frac{\pi}{3})$, $R_J = R(J ; \frac{\pi}{3})$ et $R_K = R(K ; \frac{\pi}{3})$.

1. Construire les points F, E et D tels que : $D = S_{(AB)}(K)$, $F = R_K(C)$ et $E = R_J(B)$.

2. Démontrer que les triangles IAD et DBK sont équilatéraux de sens direct.

On admet que les triangle AJF et IEC sont équilatéraux de sens direct.

3. On note O le centre du triangle ABC et R_O la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Justifier que les transformations $R_I \circ R_O$, $R_J \circ R_O$ et $R_K \circ R_O$ sont des symétries centrales.

b) Déterminer $R_I \circ R_O$ (C) , $R_J \circ R_O$ (A) et $R_K \circ R_O$ (C).

c) En déduire que : $R_O(E) = F$, $R_O(F) = D$ et $R_O(D) = E$.

4. a) Justifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle DEF.

b) Démontrer que le triangle DEF est équilatéral de sens direct.

Partie C

1. Justifier que le point O est le centre de toute similitude qui transforme ABC en DEF.

2. Démontrer que :

a) $\frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC}$.

b) $\widehat{(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OD})} = \widehat{(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OE})} = \widehat{(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OF})}$.

(on pourra utiliser la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$*).*

3. On désigne par s_1 la similitude direct de centre O qui transforme A en D.

Prouver que : $s_1(B) = E$ et $s_1(C) = F$.

4. On désigne par : s_2 la similitude directe qui transforme A en E, B en F et C en D.

s_3 la similitude directe qui transforme A en F, B en D et C en E.

a) Vérifier que : $s_2 = s_1 or(O\,;\frac{2\pi}{3})$ et $s_3 = s_1 or(O\,;-\frac{2\pi}{3})$.

b) En déduire que : $s_1^3 = s_2^3 = s_3^3$.

Partie D *Construction du point* A_2 *image de A par* s_1^2.

1. Démontrer que les droites (OA) et (AD) sont perpendiculaires.

2. En déduire les positions des droites (OD) et (DA_2).

3. Déterminer l'image de l'ensemble (Γ) par s_1. En déduire que A_2 appartient au cercle de diamètre[DE].

4. Construire A_2.

3. On note O le centre du triangle ABC et R_O la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

   a) Justifier que les transformations $R_I \circ R_O$, $R_J \circ R_O$ et $R_K \circ R_O$ sont des symétries centrales.

   b) Déterminer $R_I \circ R_O$ (C) , $R_J \circ R_O$ (A) et $R_K \circ R_O$ (C).

   c) En déduire que : $R_O(E) = F$, $R_O(F) = D$ et $R_O(D) = E$.

4. a) Justifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle DEF.

   b) Démontrer que le triangle DEF est équilatéral de sens direct.

Partie C

1. Justifier que le point O est le centre de toute similitude qui transforme ABC en DEF.
2. Démontrer que :

   a) $\frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC}$.

   b) $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OE}) = (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OF})$.

   (on pourra utiliser la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$).

3. On désigne par s_1 la similitude direct de centre O qui transforme A en D.

   Prouver que : $s_1(B) = E$ et $s_1(C) = F$.

4. On désigne par : s_2 la similitude directe qui transforme A en E, B en F et C en D.

   s_3 la similitude directe qui transforme A en F, B en D et C en E.

   a) Vérifier que : $s_2 = s_1 o r(O\,;\frac{2\pi}{3})$ et $s_3 = s_1 o r(O\,;-\frac{2\pi}{3})$.

   b) En déduire que : $s_1^3 = s_2^3 = s_3^3$.

Partie D *Construction du point A_2 image de A par s_1^2.*

1. Démontrer que les droites (OA) et (AD) sont perpendiculaires.
2. En déduire les positions des droites (OD) et (DA_2).
3. Déterminer l'image de l'ensemble (Γ) par s_1 : En déduire que A_2 appartient au cercle de diamètre[DE].
4. Construire A_2.

DEVOIR N° 26

EXERCICE 1

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = \ln 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \ln 2$.

Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = 2U_n + 8\ln\sqrt{2}$.

1. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   Préciser le premier terme.

2. a) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

   b) Déterminer les limites des suites (U_n) et (V_n).

3. On pose : $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$.

   a) Exprimer S_n en fonction de n.

   b) Démontrer que : $S'_n = 6\ln 2(1 - (\frac{1}{2})^{n+1}) - 2(n+1)\ln 2$.

EXERCICE 2

Konan se présente à d'oral de français au baccalauréat. L'épreuve consiste à être interrogé sur 2 textes parmi 12 textes par un premier examinateur et d'être interrogé sur l'un des mêmes textes par un deuxième examinateur. Konan n'a appris que 8 textes sur les 12 textes.

On signale que les examinateurs disposent de chacun des 12 textes à présenter au candidat et qu'un élève réussit l'épreuve s'il a appris deux textes sur les trois textes qui lui sont présentés.

On considère les événements suivants :

A : « Konan réussi l'épreuve après avoir été interrogé par le premier examinateur».

B : « Konan réussi l'épreuve qu'après avoir été interrogé par les deux examinateur».

1. a) Justifier que : $P(A) = 0{,}42$.

   b) Calculer $P(B)$.

2. Démontrer que la probabilité que Konan réussisse l'épreuve est $0{,}74$.

3. Six élèves de la classe de Konan n'ayant appris que 8 textes sur les 12 textes sont examinés ce même jour dans les mêmes conditions.

   a) Justifier que la probabilité que seulement les deux premiers élèves à être interrogés réussissent l'épreuve est $0{,}0025$.

   b) Calculer la probabilité que seulement 2 d'entre eux réussissent l'épreuve.

PROBLEME

Partie A

Soit A, B et M trois points deux à deux distincts du plan tels que M appartienne au segment [AB]. On note C l'image de B par la rotation r_A de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et K l'image de M par la rotation r_C de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. **a)** Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
b) Justifier que le triangle KCM est équilatéral de sens direct.
c) Démontrer que les points A, M, K et C appartiennent à un même cercle que l'on notera (Γ).
d) Démontrer que le point K appartient à la médiatrice du segment [BC].

2. On note r_K la rotation de centre K qui transforme C en B, F le point image de M par r_K, (Γ') le cercle circonscrit au triangle KBF, I le centre du cercle (Γ), J le centre du cercle (Γ').
a) Démontrer que le triangle KBF est équilatéral de sens direct.
b) Justifier que J est l'image de I par r_K.

3. On désigne par (D) la médiatrice du segment [MB] et (D') la médiatrice du segment [AM]. Démontrer que K appartient à (D) et I appartient à (D').

Partie B

On désigne par r_I la rotation de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et par r_J la rotation de centre J et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1. Justifier que $r_J \circ r_I$ (M) = B.

2. Démontrer que $r_J \circ r_I$ est une rotation. On notera O son centre.

3. Caractériser les droites (Δ) et (Δ') tels que : $r_J = S_{\Delta'} \circ S_{(IJ)}$ et $r_I = S_{(IJ)} \circ S_{\Delta}$.

4. Justifier que : $r_J \circ r_I = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.

5. Démontrer que (Δ) est la droite (OI) et que (Δ') est la droite (OJ).

6. Déduire que le triangle IOJ est équilatéral de sens direct.

7. Démontrer que la droite (D) est la médiatrice du segment [IJ].

Partie C

On note s la symétrie d'axe (D) et s' la symétrie d'axe (D'). On pose : $f = s \circ s'$.

1. Justifier que les droites (D) et (D') sont parallèles.
En déduire la nature de f.

2. Justifier que : $f(A) = B$ et $f(I) = J$.

3. Démontrer que le quadrilatère IABJ est un parallélogramme.

4. La droite (AB) recoupe le cercle (Γ') en un point M '.

a) Justifier que (Γ') est l'image de (Γ) par f et que (AB) est globalement invariante par f.

b) Démontrer que M' est l'image de M par f.

DEVOIR N° 27

EXERCICE 1

Soit k un nombre réel.

1. Vérifier que la fonction g_k définie par : $g_k(x) = x^2 - kx + 2$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = (x-2)(x-k-2)$.

2. Soit l'équation différentielle $(E') : y'' - 2y' + y = 0$.

   a) Justifier que : $(E') : y'' - 2y' + y = 0 \Leftrightarrow (F) : y' - y = Ae^x ; A \in \mathbb{R}$.

   b) Démontrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = Axe^x$ est solution de l'équation (F).

3. Soit f une fonction deux fois dérivable et définie sur $\mathbb{R}$.

   a) Démontrer que f est solution de (F) si et seulement si $f - h$ est solution de $(F') : y' - y = 0$

   b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E').

4. On admet qu'une fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si et seulement si $g - g_k$ est solution de (E')
En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).

5. Déterminer la solution h_k de (E) telle que $h_k(k) = 0$ et $h_k'(k) = k$.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. a) Démontrer que pour tout nombre réel x positif, $2x \leq (x+1)^n$.

   b) En déduire que pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, $2x \ln x \leq (x+1)^n \ln x$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(t) = t^2 \ln t - \dfrac{t^2}{2}$.

   a) Justifier que : $\forall t \in]0;+\infty[, f'(t) = 2t \ln t$.

   b) En déduire que pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,
   $$x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \leq \int_1^x (t+1)^n \ln t\, dt.$$

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\int_1^x (t+1)^n \ln t \right)$.

PROBLEME

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$.*(On prendra 2 cm pour unité)*.

On désigne par (P) la parabole de foyer F d'affixe $1 - i$ et de directrice la droite (D) d'équation $x = -2$

1. **a)** Démontrer qu'une équation de (P) est $(y+1)^2 - 6x - 3 = 0$.

b) En déduire le sommet de la parabole (P).

2. A tout point $M(x; y)$ du plan, on désigne par $M'(x'; y')$ son image par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et on note (P') l'image de (P) par r. On pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

a) Démontrer que : $x = \frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3})$ et $y = \frac{1}{2}(-x'\sqrt{3} + y')$.

b) Donner la nature de (P'). En déduire qu'une équation de (P') est :

$$3x^2 + y^2 - 2xy\sqrt{3} - 4(3+\sqrt{3})x + 4(1-3\sqrt{3})y - 8 = 0.$$

3. On désigne par S le point d'affixe $-\frac{1}{2} - i$ et par (Δ) la droite d'équation $y = -1$.

a) Calculer l'affixe de l'image S' de S par r.

b) Déterminer une équation de l'image (Δ') de la droite (Δ) par r.

4. Soit g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par : $g_1(x) = -1 + \sqrt{6x+3}$ et $g_2(x) = -1 - \sqrt{6x+3}$.

On désigne par (Γ_1) et (Γ_2) les courbes respectives de g_1 et g_2 dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g_1(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

b) Déterminer le sens de variation de g_1 puis dresser son tableau de variation.

5. **a)** Démontrer que les courbes (Γ_1) et (Γ_2) sont symétriques par rapport à la droite (Δ).

b) Tracer (Δ) et (Δ'), ainsi que les courbes (Γ_1) et (Γ_2)

6. On note G la fonction définie par : $G(x) = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{6x+3}$.

Vérifier que G est une primitive sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{6x+3}$.

7. Justifier que : $(P) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$.

8. λ désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,0\right]$. On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (P) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.

   a) Démontrer que : $A(\lambda) = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3}(2\lambda + 1)\sqrt{6\lambda + 3}$.

   b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\frac{1}{2}} A(\lambda)$.

9. La perpendiculaire à la droite (Δ') passant par O coupe l'ensemble (P') en deux points B et C.
On désigne par : A l'aire de la portion du plan délimitée par la droite (OJ) et la parabole (P).
A' l'aire de la portion du plan délimitée par la droite (BC) et l'ensemble (P').
Démontrer que : $A' = A$.

DEVOIR N° 28

EXERCICE 1

Soit u la suite définie par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

On désigne par f la fonction définie par : $f(x) = \ln(1 + x)$.

On admet que la fonction f est continue sur $]-1\,;+\infty[$.

1. a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   b) Démontrer que la suite u est décroissante.
2. Déduire de la question précédente que la suite u est convergente.
3. On pose : $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Justifier que L vérifie l'équation $f(x) = x$.
4. Soit la fonction g définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.
   a) Déterminer le sens de variation de la fonction g.
   b) Démontrer que 0 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $]-1\,;+\infty[$.
5. Déduire de la question précédente la limite de la suite u.

EXERCICE 2

Pendant une distribution de prix dans une école , cinq livres (de 5 matières différentes) sont à remettre à trois élèves dont une fille (un élève pouvant recevoir 0 à 5 livres).

1. Déterminer le nombre total de distributions possibles.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   a) A : « Un seul élève reçoit deux livres exactement ».
   b) B : « Deux élèves reçoivent exactement deux livres chacun ».
3. Démontrer que la probabilité pour que la fille reçoive exactement deux livres est égale à $\frac{80}{243}$.
4. Une distribution de prix se passe dans les quatre écoles d'une commune. Trois élèves dont une fille sont présentés dans chacune de ces quatre écoles. Déterminer au dixième près la probabilité pour que, au terme de ces distributions, la fille ait exactement deux livres.
5. Lors d'une de ces distributions de prix, on appelle X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de livres gagnés par une fille.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'expérience mathématique de X.

PROBLEME

Partie A

Soit O, A et I trois points deux à deux distincts du plan tel que I appartienne au segment [OA].
On note B le point tel que le triangle IAB est rectangle isocèle en I de sens direct et F le point tel que le triangle AOF est rectangle isocèle en O de sens direct.

1. Faire une figure. *On prendra OA = 4 cm.*

2. On désigne par S la similitude direct du plan telle que S (O) =A et S (I) = B.

Démontrer que l'angle de S est $\frac{3\pi}{4}$.

3. On désigne par Ω le centre de la similitude S.On note (C) le cercle circonscrit au triangle IAB et par (C') le cercle circonscrit au triangle AOF.

a) Démontrer que Ω appartient aux cercles (C) et (C ').

b) Construire Ω.

Partie B

On considère les suites de points (A_n) et (B_n) définies par :

$A_0 = O$, $B_0 = I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S(A_n) = A_{n+1}$ et $S(B_n) = B_{n+1}$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, les points A_n, B_n et A_{n+1} sont alignés.

2. Justifier qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+2}})$ est $-\frac{\pi}{2}$.

3. **a)** Prouver que pour tout entier naturel n, le triangle $B_n A_{n+1} B_{n+1}$ est rectangle isocèle en B_n et de sens direct.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, les points Ω, A_{n+1}, B_n et B_{n+1} sont cocycliques.

4. Démontrer que les droites (ΩA_{n+1}) et (ΩB_{n+1}) sont perpendiculaires.

5. **a)** Justifier que l'application S^4 est une homothétie dont on précisera les éléments caractéristiques où $S^4 = SoSoSoS$.

b) En déduire que les points Ω, A_n et A_{n+4} sont alignés.

6. En utilisant les questions précédentes construire les points A_2, A_3, A_4, B_2, B_3 et B_4.

Partie C

On suppose pour la suite que le point I est le milieu du segment [OA].

1. On note J le point du plan tel que le repère (O , I , J) soit orthonormé direct .

a) Déterminer les affixes des points A et B.

b) Démontrer que l'écriture complexe de S est $z' = (-1 + i)z + 2$.

2. En déduire l'affixe z_Ω de Ω et le rapport de S.

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère la similitude S^n définie par :

$S^n = S \circ S \circ \ldots \circ S$ avec n facteurs tous égaux à S.

a) Démontrer que le rapport de S^n est $(\sqrt{2})^n$ et l'angle de S^n est $\frac{3n\pi}{4}$.

b) A tout point M distinct de Ω et d'affixe z du plan, on associe par S^n le point M' d'affixe z'.

Démontrer que $z' = (-1 + i)^n(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

4. Soit (d_n) la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \left|z_{B_n} - z_{A_{n+1}}\right|$.

a) Démontrer que (d_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 1.

b) On pose : $S_n = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que $S_n = (2+\sqrt{2})\,[\,(\sqrt{2})^n - 1\,]$.

CORRIGÉS

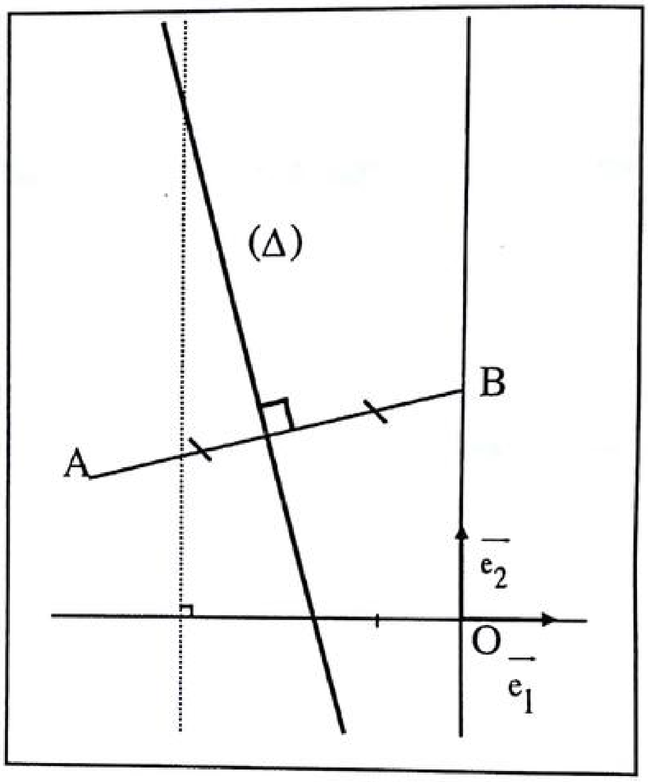
DEVOIR N° 1

EXERCICE

1. (Δ) est l'ensemble des points M d'affixes z tels que $|z+4-2i| = |3i-z|$.

$$\begin{aligned} M \in (\Delta) &\Leftrightarrow |z+4-2i| = |3i-z| \\ &\Leftrightarrow |z-(-4+2i)| = |z-3i| \\ &\Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \text{ avec } A(-4+2i) \text{ et } B(3i). \\ &\Leftrightarrow AM = BM. \end{aligned}$$

Donc (Δ) la médiatrice du segment [AB].



2. $|z_K+4-2i| = \dfrac{\sqrt{85}}{2}$ et

$|3i-z_K| = \dfrac{\sqrt{85}}{2}$.

Donc, $|z_K+4-2i| = |3i-z_K|$.

Par conséquent K appartient à (Δ)

PROBLEME

1. $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \ \text{et} \ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \ \text{et} \ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Pour tout nombre réel strictement positif x,

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2}x\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,(\sqrt{x^2+1}+x)}.$$

3. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\frac{1}{2}x+1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,(\sqrt{x^2+1}+x)}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\frac{1}{2}x+1)\right) =$

Par conséquent la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Pour tout nombre réel positif strictement x,

$$f(x)-(\frac{1}{2}x+1) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,(\sqrt{x^2+1}+x)}.$$

Donc, pour tout nombre réel positif x, $f(x)-(\frac{1}{2}x+1) > 0$.

Il en résulte que la courbe (C) est au dessus de la droite (Δ) sur $]0\,;+\infty[$.

4. Pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = 1-\frac{1}{2}\frac{2x\sqrt{x^2+1}-x^2\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= 1-\frac{2x\sqrt{x^2+1}-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}}{2(x^2+1)}$$

$$= 1-\frac{2x(x^2+1)-x^3}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-2x(x^2+1)+x^3}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= f'(x) = \frac{(2x^2+2)\sqrt{x^2+1}-x(x^2+2)}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

5. **a)** Si $x<0$, on a $(2x^2+2)\sqrt{x^2+1}>0$ et $x(x^2+2)<0$. Donc $(2x^2+2)\sqrt{x^2+1}>x(x^2+2)$.

Si $x \geq 0$, pour tout nombre réel x, $2x^2>x^2$

$$2x^2+2>x^2+2 \quad (1)$$

Par ailleurs, $x^2+1>x^2$

$$\sqrt{x^2+1}>x \quad (2)$$

Des inégalités (1) et (2) il s'ensuit que $(2x^2+2)\sqrt{x^2+1}>x(x^2+2)$.

Il découle de ce qui précède que pour tout nombre réel x, $(2x^2+2)\sqrt{x^2+1}>x(x^2+2)$

b) D'après 5a) $(2x^2+2)\sqrt{x^2+1}>x(x^2+2)$ donc $(2x^2+2)\sqrt{x^2+1}-x(x^2+2)>0$.

Par ailleurs $2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}>0$.

Donc $f'(x)>0$.

Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Tableau de variation de f

X	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)		
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

6. **a)** La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle J.

$$J = f(\mathbb{R})$$
$$= \left] \lim_{x\to-\infty} f(x) \; ; \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[$$
$$=]-\infty \, ; +\infty[.$$

Par suite, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $0 \in]-\infty \, ; +\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

c) Vérification : $f(-0{,}77) \approx -0{,}0048$ et $f(-0{,}76) \approx 0{,}01$

Comme $f(-0{,}77) \times f(-0{,}76) < 0$ donc, $-0{,}77 < \alpha < -0{,}76$.

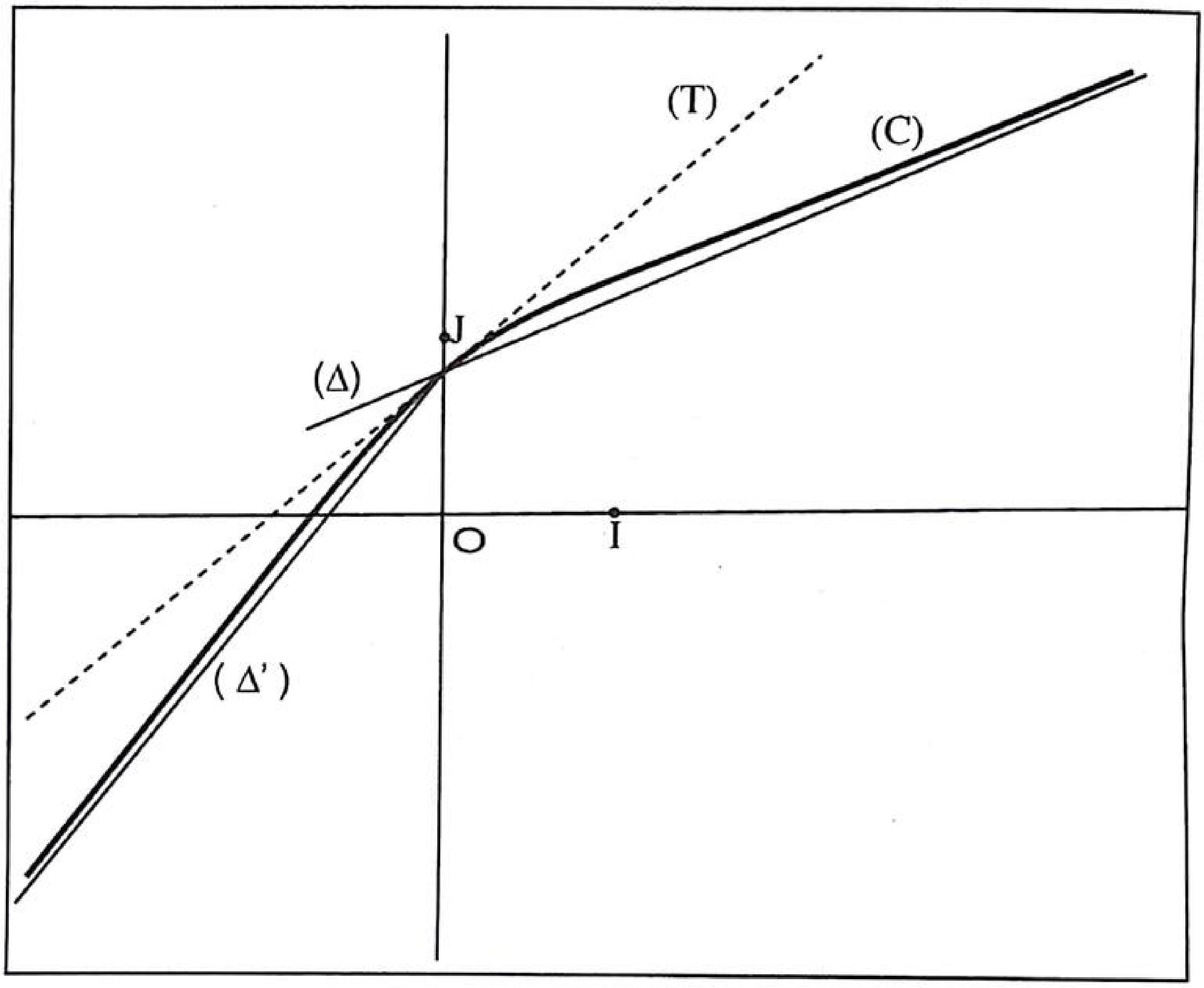
7. **a)** On a la tangente (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.
Donc, $y = x + 1$.

b) Pour tout nombre réel x, $f(x) - (x+1) = x + 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - (x+1)$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \leq 0.$$

Donc, la courbe (C) est en dessous de (T) sur $\mathbb{R}$.

8. Tracé de (T), (Δ), (Δ'), (C) et (Γ).



DEVOIR N° 2

EXERCICE

1. **a)** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ Donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB}$ Donc $AI = BC$.

Le triangle ABC est équilatéral, donc $AC = BC$

Il s'ensuit que $AI = AC = BC$.

Par ailleurs $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IB}$ qui conduit à $AC = IB$.

De ce qui précède, on a $AI = AC = BC = IB$.

Par conséquent, le quadrilatère AIBC est un losange.

2. **a)** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB}$ donc $IA^2 = a^2$.

De la question 1b) AIBC est un losange donc $IB^2 = a^2$.

On a $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$

$$IC^2 = IA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AC}$$

$$IC^2 = 2\,a^2 + 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}\ .$$

$$IC^2 = 2\,a^2 + 2a^2\cos\frac{\pi}{3}\ .$$

Donc, $IC^2 = 3\,a^2$

En définitive, $IA^2 = a^2$, $IB^2 = a^2$ et $IC^2 = 3\,a^2$.

b) $M \in (C) \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 - MC^2 = 0$

$$\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 + IB^2 - IC^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow MI = a.$$

Donc (C) est le cercle de centre I et de rayon a

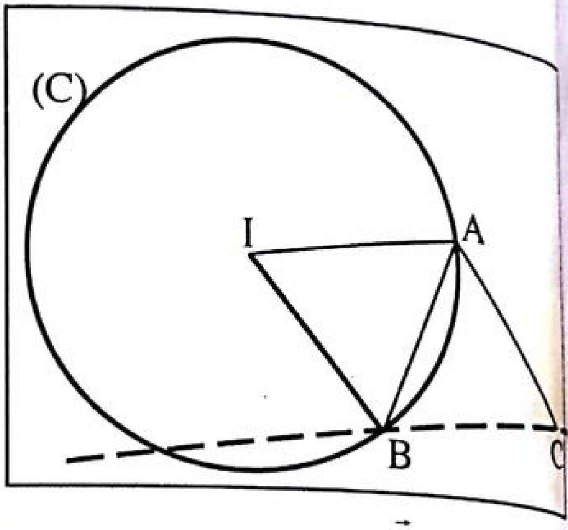
3. **a)** $2\,BA^2 - BB^2 - BC^2 = 2\,BA^2 - BC^2$

$$= 2\,a^2 - a^2$$

$$= a^2.$$

Donc B appartient à (Δ) .

b) Considérons le vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.



La somme des coefficients des points pondérés (A, 2) ; (B , −1) et (C , − 1) est $2 - 1 - 1 = 0$.

De ce fait $\vec{u}$ est un vecteur constant.

Donc,

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$
$$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

A n'est pas le milieu de [BC] donc $\vec{u}$ est non nul.

Sachant que B ∈ (Δ), l'ensemble (Δ) est donc la droite passant par B et de vecteur normal $\vec{u}$.
Par conséquent (Δ) est la droite (BC).

PROBLEME

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-6x + (x+9)\sqrt{x})$

$$= \lim_{x\to+\infty} x(-6 + \sqrt{x}) + 9\sqrt{x}$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x + (x+9)\sqrt{x}}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-6 + \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}}\right)$$
$$= +\infty$$

b) Interprétation graphique : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{-6x + (x+9)\sqrt{x}}{x}$

$$= \lim_{x\to0}\left(-6 + \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}}\right)$$
$$= +\infty$$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{f(x)}{x}$

$$= +\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0
Interprétation graphique : La courbe (C) admet une demi – tangente verticale au point d'abscisse 0.

3. **a)** $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3) = x - 4\sqrt{x} + 3$

b) Pour tout nombre réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = -6 + \sqrt{x} + \frac{x+9}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x - 12\sqrt{x} + 9}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3(x - 4\sqrt{x} + 3)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{2\sqrt{x}}.$$

4. **a)** On a : $2\sqrt{x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)$.

Pour tout nombre réel x strictement positif,

$\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$\sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

En plus,

$\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 9$

$\sqrt{x} - 9 > 0 \Leftrightarrow x > 9$

$\sqrt{x} - 9 < 0 \Leftrightarrow x < 9$

Il s'ensuit le tableau de signe suivant :

x	0		1		9		$+\infty$
$\sqrt{x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{x}-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite, $\forall x \in [0 ; 1[\cup]9 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; 1[$ et sur $]9 ; +\infty[$,
$\forall x \in]1 ; 9[$, $f'(x) < 0$ donc f strictement décroissante sur $]1 ; 9[$.

b) Tableau de variation de f

x	0		1		9		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. **a)** $f'(3) = \dfrac{3(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-3)}{2\sqrt{3}}$

$$= \frac{-3(1-\sqrt{3})^2}{2}$$

$$= \frac{-3(4-2\sqrt{3}\,)}{2}$$

$$= 3(\sqrt{3}-2)$$

b) On a $(T) : y = f'(3)\,(x-3) + f(3)$

$f(3) = -6\times 3 + (3+9)\sqrt{3}$

$= -18 + 12\sqrt{3}$

Par suite, $(T) : y = 3(\sqrt{3}-2)\,(x-3) - 18 + 12\sqrt{3}$

$y = 3(\sqrt{3}-2)\,(x-3) - 3(\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3})$

$y = 3(\sqrt{3}-2)(x-3-2\sqrt{3})$.

6. $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-3)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt{x}-4+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$$

On a, $h'(x) = f'(x) - 3(\sqrt{3}-2)$

Par conséquent, $h''(x) = f''(x)$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{3(x-3)}{4x\sqrt{x}}$$

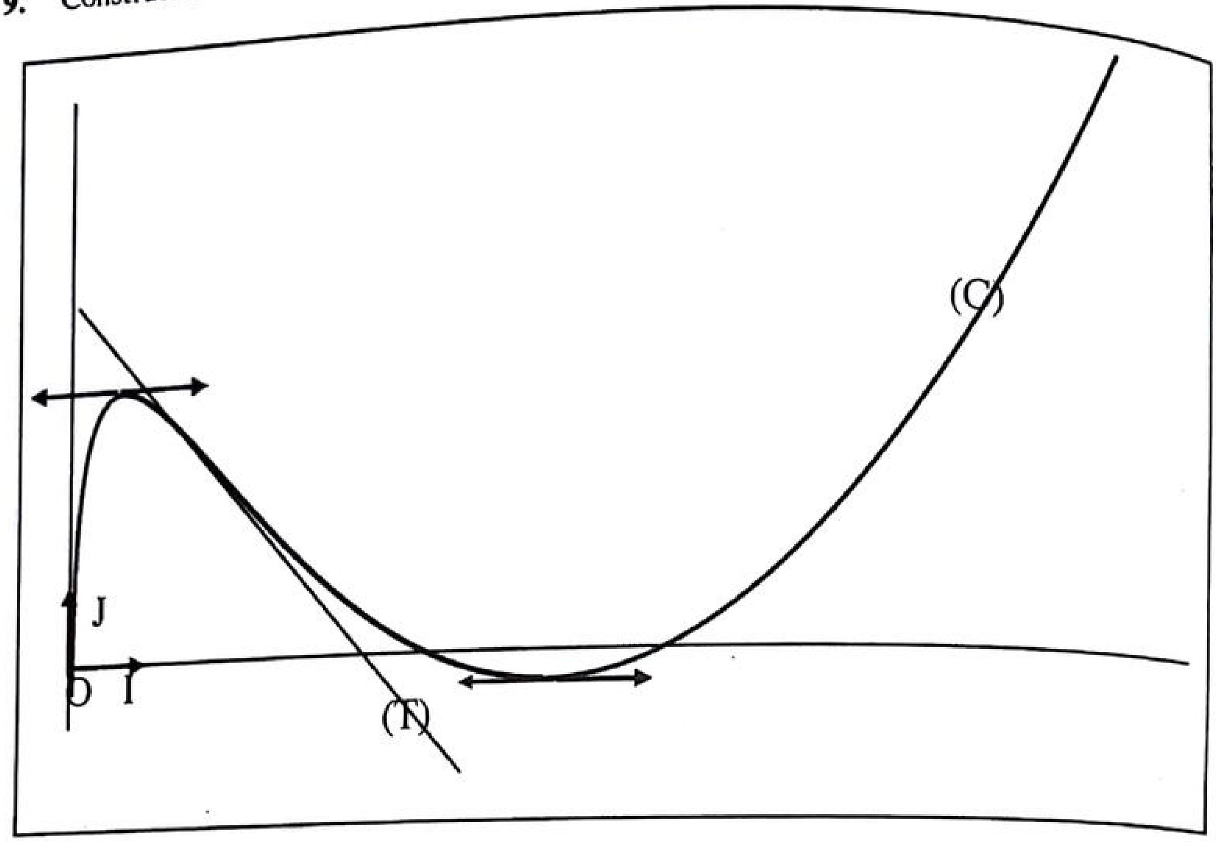
7. **a)** On déduit de la question 6) que : $\forall x \in]0;3[$, $h''(x) < 0$ donc h' est strictement décroissante sur $]0;3[$
$\forall x \in]3;+\infty[$, $h''(x) > 0$ donc h' est strictement croissante sur $]3;+\infty[$.

b) $h'(3) = 0$
De plus, h' est strictement décroissante sur $]0;3[$
Il s'ensuit que pour $0 < x < 3$, $h'(x) > h'(3)$
$h'(x) > 0$
Par ailleurs, h' est strictement croissante sur $]3;+\infty[$.
Donc pour $x > 3$, $h'(x) > h'(3)$
$h'(x) > 0$
Par suite, $\forall x \in]0;+\infty[\setminus\{3\}$, $h'(x) > 0$ et $h'(3) = 0$

c) $\forall x \in]0;+\infty[\setminus\{3\}$, $h'(x) > 0$ et $h'(3) = 0$ donc h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

8. Il ressort de la question 7c) que, $\forall x \in]0;3[$, $h(x) < 0$ donc $f(x) - 3(\sqrt{3}-2)(x-3-2\sqrt{3}) < 0$
Donc (C) est en dessous de (T) sur $]0;3[$.
$\forall x \in]3;+\infty[$, $h(x) > 0$ donc $f(x) - 3(\sqrt{3}-2)(x-3-2\sqrt{3}) > 0$
Donc (C) est au – dessus de (T) sur $]3;+\infty[$.
$h(3) = 0$ donc (C) et (T) se coupent au point d'abscisse 3.

9. Construction de (T) et de (C).



DEVOIR N° 3

EXERCICE

1. Voir figure

2. Soit P le barycentre des points pondérés $(D, 4)$ et $(C, -2)$ donc, $I = \text{bar}\{(A, 2) ; (B, -1) ; (P, 2)\}$.

Soit Q le milieu du segment [AP]. On a $I = \text{bar}\{(Q, 4) ; (B, -1)\}$.

3. **a)** BA = BD donc le triangle BDA est isocèle en B. On a O qui est milieu du segment [AD]. Il s'ensuit que (OB) est la médiatrice du segment [AD]. On en déduit que (OB) est perpendiculaire à (AD). De plus, le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle en D. Par conséquent d'une part les droites (OD) et (BC) sont parallèles et d'autre part, les droites (OB) et (DC) sont parallèles. Sachant du plus que les droites (OB) et OD) sont perpendiculaires alors le quadrilatère OBCD est un rectangle.

b) $\overrightarrow{DI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DB})$

Par ailleurs, $2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}$

$$\begin{aligned}&=3\overrightarrow{CD}+4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}\\&=3(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB})\\&=3(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}).\\&=3\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

En définitive, $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{BA}$. Il en découle que DI = BA et AI = BD. Comme BA = BD alors AI = AB = BD = DI. Il s'ensuit que le quadrilatère ABDI est un losange.

4. Le quadrilatère ABDI est un losange de centre O. Il en découle que le triangle IAO est rectangle en O. Puisque, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}})=\frac{\pi}{3}$ alors $AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Le point O étant le milieu de [AD], on a $DA^2=3a^2$.

Par ailleurs, la droite (BI) est la bissectrice de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}})$ et le quadrilatère OBCD est un rectangle. Il en résulte que l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})$ a pour mesure $\frac{5\pi}{6}$

On a $AC^2 = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})^2 = a^2 - a \times \frac{a\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{5\pi}{6}) + \frac{3a^2}{4}$

$$= a^2 - a \times \frac{a\sqrt{3}}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3a^2}{4}$$

$$= \frac{7a^2}{4} + \frac{3a^2}{2}$$

$$= \frac{13a^2}{4}$$

5. a) $2BA^2 - BB^2 - 2BC^2 + 4BD^2 = 2BA^2 - 2BC^2 + 4BD^2$

$$= 2a^2 - 2 \times \frac{3a^2}{4} + 4a^2.$$

$= \frac{9a^2}{2}$. Donc le point B appartient à l'ensemble (Γ).

b) L'ensemble (Γ) est soit l'ensemble vide, le singleton $\{I\}$ ou un cercle de centre I. Or B appartient à (Γ). Alors (Γ) n'est pas l'ensemble vide ni $\{I\}$. On conclut que (Γ) est le cercle de centre I passant par B.

6. On a $IB = 2OI = 2 \times a\cos(\frac{\pi}{3}) = a$. Sachant que $IA = ID = a$ alors les points A et D appartiennent à (Γ)

7. a) $AA^2 - AB^2 - 2AC^2 + 2AD^2 = -AB^2 - 2AC^2 + 2AD^2$

$$= -a^2 - 2 \times \frac{13a^2}{4} + 2 \times 3a^2.$$

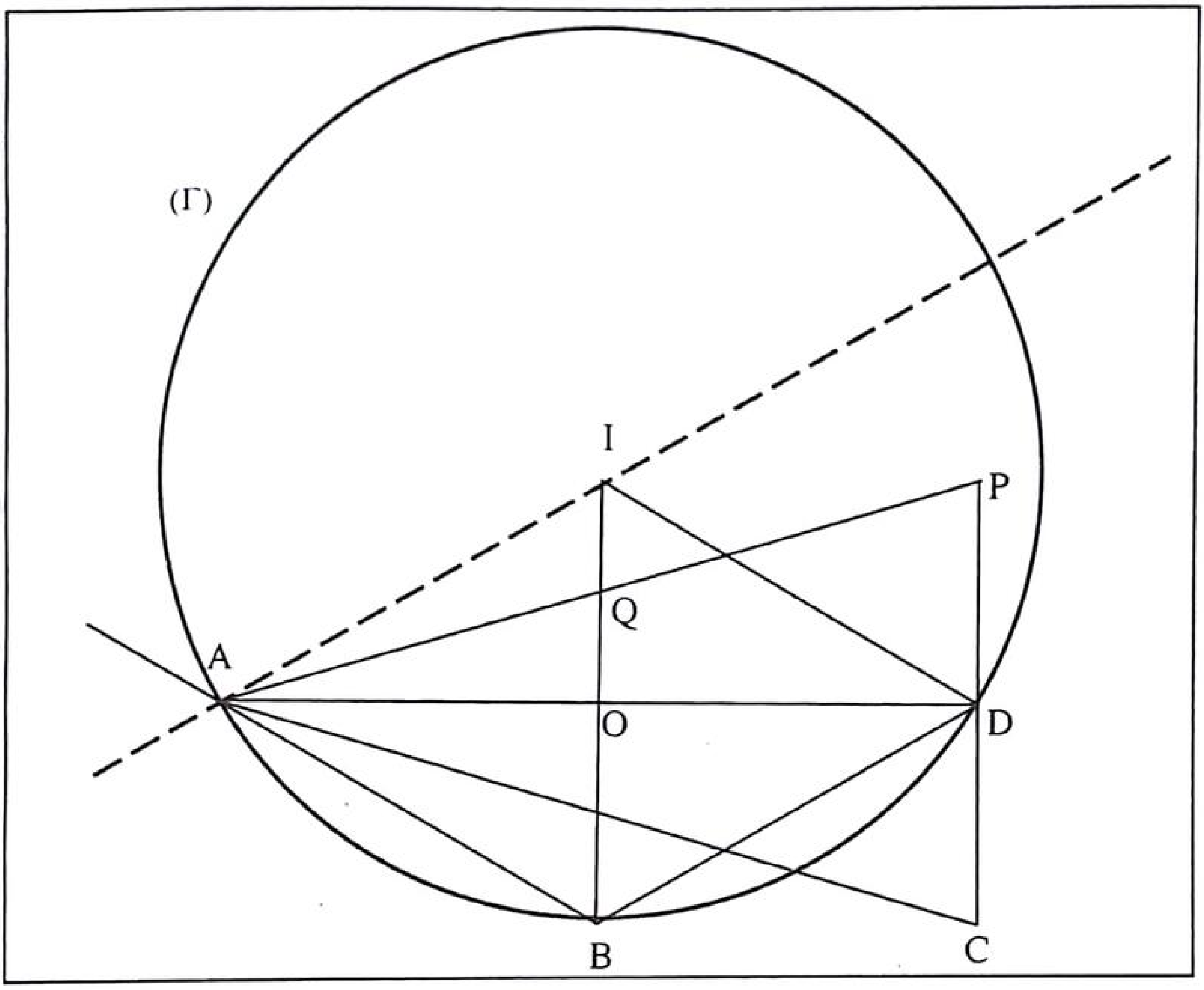
$$= -\frac{3a^2}{2}.$$

b) La somme des coefficients des points pondérés $(A, 1), (B, -1), (C, -2)$ et $(D, 2)$ est $1 - 1 + 2 - 2 = 0$
Soit le vecteur $\vec{u} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}$. On a $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CD}$ Donc, $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI}$

Puisque les points B, A et I sont non alignés alors le vecteur $\vec{u}$ est non nul.

On a $Mes(\widehat{\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{3}$ et $BI = BA$. Donc le triangle IAB est équilatéral. Il s'ensuit que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal à la droite (AI). Par conséquent l'ensemble (Ψ) est la droite (AI).

Figure



PROBLEME

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ((x+2)\sqrt{x^2+1} - (x+1)^2)$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} ((x+2)\sqrt{x^2+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-(x+1)^2) = -\infty$.

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} ((x+2)\sqrt{x^2+1} - (x+1)^2) = -\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{((x+2)\sqrt{x^2+1} - (x+1)^2)}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{(x+2)}{x} \sqrt{x^2+1} - \frac{(x+1)^2}{x} \right).$$

On a $\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+2)}{x} = 1$; $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

Donc, $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{(x+2)}{x} \sqrt{x^2+1} \right) = +\infty$

De plus, $\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$; donc $\lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{(x+1)^2}{x} \right) = +\infty$

Par conséquent, $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{(x+2)}{x} \sqrt{x^2+1} - \frac{(x+1)^2}{x} \right) = +\infty$. En définitive $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

b) Interprétation graphique : Puisque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left((x+2)\sqrt{x^2+1} - (x+1)^2 \right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+2)^2(x^2+1) - (x+1)^4}{(x+2)\sqrt{x^2+1} + (x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + x^2 + 4x^3 + 4x + 4x^2 + 4 - (x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1)}{(x+2)\sqrt{x^2+1} + (x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - x^2}{(x+2)x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x^2 + 2x + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)}{x^2\left(\left(1 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - 1}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$. Il s'ensuit que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que la droite (Δ) est asymptote à (C) en $+\infty$.

3. **a)** Pour tout nombre réel x, $x^2+1>x^2$ donc, $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$

Par suite, $\sqrt{x^2+1}>|x|$

$\sqrt{x^2+1}>-x$ car $|x|=x$ ou $|x|=-x$.

Par conséquent, $\sqrt{x^2+1}+x>0$. En définitive, pour tout nombre réel x, $\Psi(x)>0$.

b) Pour tout nombre réel x, $f'(x)=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{2x(x+2)}{2\sqrt{x^2+1}}-2(x+1)$

$$=\frac{(x^2+1)+x(x+2)-2(x+1)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{x^2+1+x^2+2x-2(x+1)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1+2x(x+1)-2(x+1)\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1+2(x+1)(x-\sqrt{x^2+1})}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1+2(x+1)\left(\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{x+\sqrt{x^2+1}-2(x+1)}{\Psi(x)\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+2)}{\Psi(x)\sqrt{x^2+1}}=\frac{\dfrac{x^2+1-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+1}+x+2}}{\Psi(x)\sqrt{x^2+1}}.$$

En définitive, $f'(x)=\dfrac{-4x-3}{\Psi(x)(\Psi(x)+2)\sqrt{x^2+1}}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > 0$; $\Psi(x) > 0$; $\Psi(x)(\Psi(x)+2) > 0$ donc, $\Psi(x)(\Psi(x)+2)\sqrt{x^2+1} > 0$.

Par suite, le signe de $f'(x)$ est celui de $-4x-3$. On a $-4x-3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$.

Par conséquent :

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{3}{4}\right[$, $-4x-3>0$ donc $f'(x)>0$ et $\forall x \in \left]-\frac{3}{4}; +\infty\right[$, $-4x-3<0$

donc $f'(x)<0$ et $f'(-\frac{3}{4})=0$

4. $\forall x \in \left]-\infty; -\frac{3}{4}\right]$, $f'(x) \geq 0$ alors, f est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\frac{3}{4}\right]$

$\forall x \in \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right[$, $f'(x) \leq 0$ alors, f est strictement décroissante sur $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

5. $f(-\frac{3}{4}) = (-\frac{3}{4}+2)\sqrt{(-\frac{3}{4})^2+1} - (-\frac{3}{4}+1)^2 = \frac{5}{4}\times\frac{5}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{2}$.

Une équation de la tangente (T) est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

On a $f(0) = (0+2)\sqrt{0^2+1} - (0+1)^2 = 2-1 = 1$ et

$$f'(0) = \frac{-4\times 0 - 3}{\Psi(0)(\Psi(0)+2)\sqrt{0^2+1}} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Donc, une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est $y = -x+1$.

Partie B

1. **a)** Pour tout nombre réel x, $h'(x) = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{2x(x+2)}{2\sqrt{x^2+1}} - 2(x+1)+1$

$$= \frac{x^2+1+x(x+2)-(2x+1)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x^2+2x+1-(2x+1)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x^2+(2x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x^2+(2x+1)(\frac{-x^2}{1+\sqrt{x^2+1}})}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x^2(1+\sqrt{x^2+1}) - x^2(2x+1)}{(1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^2(2+2\sqrt{x^2+1} - 2x - 1)}{(1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$$

$$h'(x) = \frac{x^2(2\sqrt{x^2+1} - 2x + 1)}{(1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}.$$

b) Pour tout nombre réel x, $2\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 = 2(\sqrt{x^2+1} - x) + 1$

$$= 2(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}) + 1$$

$$= \frac{2}{\Psi(x)} + 1$$

Pour tout nombre réel x, on a $\Psi(x) > 0$. Il s'ensuit que $\dfrac{2}{\Psi(x)} + 1 > 0$.

On en déduit que $2\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 > 0$ pour tout nombre réel x.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1} > 0$ et $2\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de x^2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$ donc, $h'(x) > 0$. Par conséquent la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) $h(0) = f(0) + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Par ailleurs, la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, $x < 0$ implique $h(x) < h(0)$. Comme $h(0) = 0$ alors $h(x) < 0$

$x > 0$ implique $h(x) > h(0)$. Comme $h(0) = 0$ alors $h(x) > 0$

En définitive, $\forall x \in]-\infty;0[$, $h(x) < 0$ et $\forall x \in]0;+\infty[$, $h(x) > 0$.

b) Pour tout nombre réel x, $h(x) = f(x) - (-x+1)$

$\forall x \in]-\infty;0[$, $h(x) < 0$ donc, $f(x) < -x+1$.

Il s'ensuit que la courbe (C_f) est en dessous de la tangente (T) sur $]-\infty;0[$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $h(x) > 0$. donc, $f(x) > -x+1$.

Par conséquent la courbe (C_f) est au dessus de la tangente (T) sur $]0;+\infty[$.

Enfin, (C_f) et (T) se coupent au point d'abscisse 0.

3. Voir graphique.

Partie C

1. g est continue et strictement décroissante sur $[0;\sqrt{3}]$ donc, $g([0;\sqrt{3}]) = [0;1]$. On en déduit que g est une bijection de $[0;\sqrt{3}]$ sur $[0;1]$.

2. a) Pour tout nombre réel x appartenant à $[0;1]$, $H'(x) = g^{-1}(x) + \dfrac{x+2}{g'(g^{-1}(x))}$

Donc, pour tout nombre réel x appartenant à $[0;\sqrt{3}]$, $H'og(x) = g^{-1}(g(x)) + \dfrac{g(x)+2}{g'(g^{-1}(g(x)))}$

$$H'og(x) = x + \frac{g(x)+2}{g'(x)}.$$

Par suite,
$$\varphi(x) = x + \frac{g(x)+2}{g'(x)}.$$

b) $\forall x \in [0;\sqrt{3}]$, $g'\varphi\ (x) = g'(x)\varphi(x)$

$$(g'\varphi)(x) = g'(x)(x + \frac{g(x)+2}{g'(x)})$$

$$(g'\varphi(x) = xg'(x) + g(x) + 2$$

$\forall x \in [0;\sqrt{3}]$, $F(x) = xg(x) + 2x + c$ où c est un nombre réel.

$F(\sqrt{3}) = 6 \Leftrightarrow \sqrt{3}(g(\sqrt{3}) + 2) + c = 2\sqrt{3}$

$F(\sqrt{3}) = 6 \Leftrightarrow c = 0$.

On en déduit que pour tout nombre réel x appartenant à $[0;\sqrt{3}]$, $F(x) = x(g(x) + 2)$

3. $F(0) = 0 \times (g(0) + 2) = 0$

Tableau de variation de F.

x	0		$\sqrt{3}$
f '(x)	+	+	
f (x)	$-\infty$	↗	$2\sqrt{3}$

4. Equation de la tangente (T') à (F) au point d'abscisse 0 : $y = F'(x)(x - 0) + F(0)$

On a $F(0) = 0$ et $F(0) = 0 \times g'(0) + g(0) + 2 = 3$. Il s'ensuit l'équation $y = 3x$.

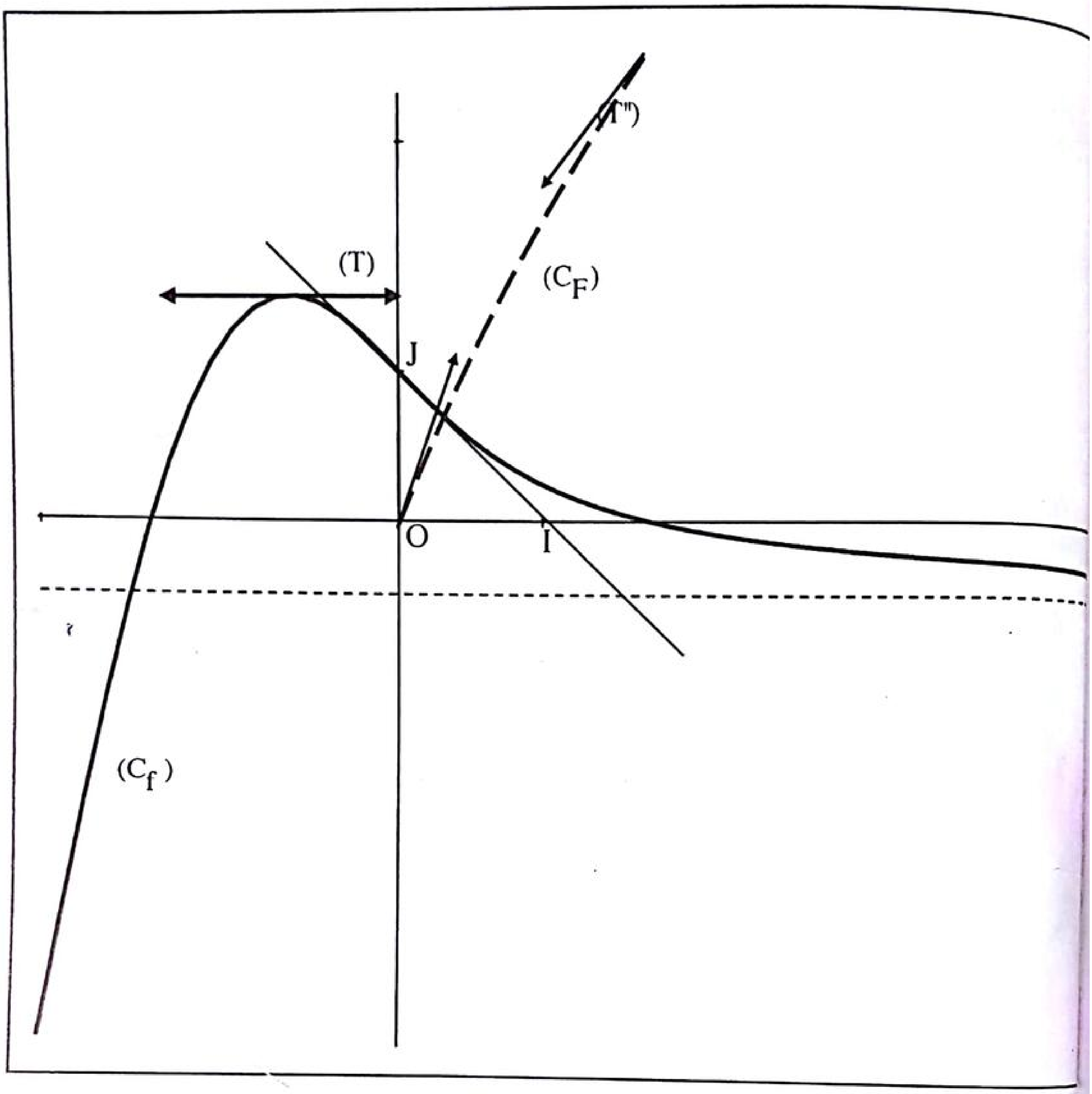
Equation de la tangente (T'') à (F) au point d'abscisse $\sqrt{3}$: $y = F'(\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) + F(\sqrt{3})$

On a $F(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ et $F(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \times g'(\sqrt{3}) + g(\sqrt{3}) + 2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1$. Il en résulte l'équation

$y = (\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1)x - \frac{9}{2} + 3\sqrt{3}$.

5. Voir graphique.

Tracé de (T), (C_f) et (C_F).



DEVOIR N° 4

EXERCICE 1

1. $4^2 - 3\times 2^2 = 4$ et $14^2 - 3\times 8^2 = 4$ Donc les couples $(4,2)$ et $(14,8)$ sont solutions de l'équation (E).

2. Il existe p et q tels que $u_0 = pd$ et $v_0 = qd$ donc $d^2(p^2 - 3q^2) = 4$.

   Il s'ensuit que d^2 divise 4.

   Par conséquent $d^2 \in \{1 ; 2 ; 4\}$.

   Or d est un entier donc $d^2 = 1$ ou $d^2 = 4$. Par conséquent, $d = 1$ ou $d = 2$.
   On conclut que : $d = 2$.

EXERCICE 2

1. Voir figure

2. $I = \text{bar}\{(B, 2) ; (C, 1)\}$ et $O = \text{bar}\{(A, -1) ; (I, 3)\}$
   Par la propriété du barycentre partiel $O = \text{bar}\{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, 1)\}$

3. On a $O = \text{bar}\{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, 1)\}$

   Donc, $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

   Par suite, $2\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AC}$.

4. $2\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AC}$ donc $OB = \frac{1}{2}AC$ et $OB^2 = \frac{a^2}{4}$.

   On a : $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

   $$OA^2 = AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

   $$OA^2 = AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 + AB\times AC\times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$$

   $$OA^2 = \frac{7a^2}{4}.$$

   On a : $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ Il en résulte $OC^2 = \frac{3a^2}{4}$

5. $AC^2 + OC^2 = OA^2$, donc le triangle AOC est rectangle en C d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

6. a) $-CA^2 + 2CB^2 + CC^2 = a^2$ donc $C \in (\Gamma)$.

b) (Γ) est soit l'ensemble vide, le singleton $\{O\}$ ou un cercle de centre O.
$C \in (\Gamma)$ donc, (Γ) n'est pas l'ensemble vide ni le singleton $\{O\}$.
Par conséquent (Γ) est le cercle de centre O passant par le point C.

7. a) Le triangle AOC est rectangle en C donc $CA^2 + CO^2 = OA^2$.

Par suite, $CA^2 + CO^2 - 2CK^2 = OA^2 - 2KC^2$ donc, $C \in (\Delta)$.

b) ACK est un triangle rectangle en K donc $KA^2 = AC^2 - KC^2$.

Par ailleurs, OCK est rectangle en K donc $KO^2 = OC^2 - KC^2$.

Il s'ensuit que $KA^2 + KO^2 = AC^2 + OC^2 - 2KC^2$.

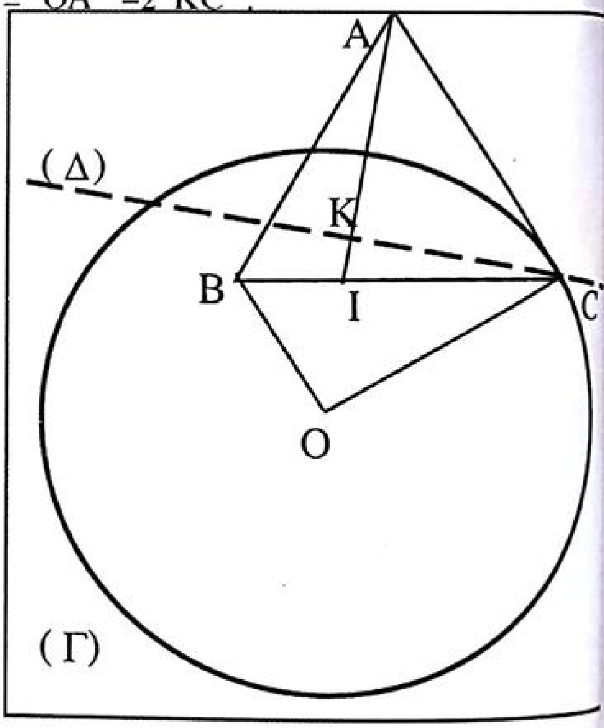
Puisque $AC^2 + OC^2 = OA^2$ alors $KA^2 + KO^2 = OA^2 - 2KC^2$.

c) La somme des coefficients des points (A ;1) , (O ;1) et (K ;–2) est $1+1-2=0$

Donc $M \in (\Delta) \Leftrightarrow KA^2 + KO^2 - 2KK^2 - 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KO} - 2\overrightarrow{KK}).\overrightarrow{KM} = OA^2 - 2KC^2$

$\Leftrightarrow KA^2 + KO^2 - 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KO}).\overrightarrow{KM} = OA^2 - 2KC^2$.

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KO}).\overrightarrow{KM} = 0$.



d) La somme des coefficients des points pondérés (A ,1), (B ,1) et (C, –2) est $1 + 1 - 2 = 0$ donc, (Δ) est une droite passant par C.

Le triangle ACO n'est pas isocèle en C car $OC \neq AC$.
Il s'ensuit que le point K n'est pas le milieu du segment [OA].

Donc $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KO} \neq \vec{0}$.
On conclut que (Δ) est la droite passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KO}$.

PROBLEME

Partie A

1. $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{(x+1)^2}$

$g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. Tableau de variation de g (sans les limites aux bornes de l'ensemble de définition).

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$

3. **a)** $g(1) = 0$

b) g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Donc $0<x<1$ implique $g(x) < g(1)$. Or $g(1) = 0$ donc $g(x) < 0$
Par ailleurs, $x > 1$ implique $g(x) > g(1)$. Or $g(1) = 0$ donc $g(x) > 0$.
En définitive, $\forall x \in]0\,;1[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]1\,;+\infty[$ $g(x) > 0$

Partie B

1. $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{(x-1)^2 \ln(x)}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}(x-1)^2 \ln(x)$$

Or $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x-1)^2 = 1$; $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$

Donc, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x}(x-1)^2 \ln(x) = -\infty$.

Par suite, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

Interprétation graphique : L'axe des ordonnées est asymptote à (C).

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)^2\ln(x)}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{x}\ln(x)$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x}\ln(x) = +\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(x-1)^2\ln(x)}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2\ln(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2}\ln(x)$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x^2} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x^2}\ln(x) = +\infty$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Par conséquent, la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.

3. **a)** $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}g(x)$.

b) $\forall\, x > 0$, $x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$ et de celui de x^2-1.

On obtient le tableau de signe de f' ci – dessous.

x	0		1		$+\infty$
g(x)	‖	-	0	+	
x^2-1	‖	-	0	+	
f'(x)	‖	+	0	+	

Il en résulte que : $\forall\ x \in]0\,;+\infty[\setminus\{1\}$, $f'(x)>0$, $f'(1)=0$

D'où le tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

4. **a)** f est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. De ce fait f réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $f(]0\,;+\infty[)$. On a $f(]0\,;+\infty[)=\mathbb{R}$. Comme $1\in\mathbb{R}$ donc, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

b) Vérifions de l'encadrement.

$f(2{,}64)\approx -0{,}001$ et $f(2{,}65)\approx 0{,}0012$

Puisque $f(2{,}64)$ et $f(2{,}65)$ sont de signes contraires alors $2{,}64<\alpha<2{,}65$.

c) f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Pour $x\in]0\,;\alpha[$, $x<\alpha$ donc $f(x)<f(\alpha)$.

Or $f(\alpha)=1$ alors $f(x)<1$.

Par ailleurs, pour $x\in]\alpha\,;+\infty[$, $x>\alpha$ donc $f(x)>f(\alpha)$

Or $f(\alpha)=1$ alors $f(x)>1$.

On obtient : $\forall\ x\in]0\,;\alpha[$, $f(x)<1$ et $\forall\ x\in]\alpha\,;+\infty[$, $f(x)>1$.

5. **a)** $f'(1)=0$ et $f(1)=0$ donc $y=0$ est une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

b) $\forall\ x>0$, $f(x)=\dfrac{(x-1)^2\ln(x)}{x}$.

Considérons les signes des facteurs du numérateur ainsi que le signe du dénominateur :

$\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$; $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$ donc $\ln x<0\Leftrightarrow x<1$.

On a : $(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=0$ et $\forall\ x\in]0\,;+\infty[\setminus\{1\}$, $(x-1)^2>0$ D'où le tableau de signe .

x	0		1		$+\infty$
lnx	‖	−	0	+	
$(x-1)^2$	‖	+	0	+	
	‖	−	0	+	

6. **a)** $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ h(x) = \dfrac{(\frac{1}{x}-1)^2 \ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$.

$$= \frac{x(1-x)^2(-\ln(x))}{x^2}$$

$$= -\frac{(x-1)^2}{x}\ln(x)$$

$$= -f(x).$$

b) Pour la construction : (C) et (Γ) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Partie C :

1. **a)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \Psi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\dfrac{\ln^2(x)}{2} + \dfrac{1}{x-1}\right)$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{\ln^2(x)}{2} = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x-1} = -1$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\dfrac{\ln^2(x)}{2} + \dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \Psi(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \Psi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \left(\dfrac{\ln^2(x)}{2} + \dfrac{1}{x-1}\right)$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{\ln^2(x)}{2} = 0$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\dfrac{\ln^2(x)}{2} + \dfrac{1}{x-1} \right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\dfrac{\ln^2(x)}{2} + \dfrac{1}{x-1} \right) = +\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \Psi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \Psi(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \Psi(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln^2(x)}{2} + \frac{1}{x-1} \right)$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{2} = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln^2(x)}{2} + \dfrac{1}{x-1} \right) = +\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\Psi(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 + \dfrac{1}{x(x-1)} \right) = +\infty$.

b) Interprétation graphique :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \Psi(x) = +\infty$ donc, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C').

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \Psi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \Psi(x) = +\infty$ donc, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C')

$\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\Psi(x)}{x} = +\infty$ donc, (C') admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.

2. **a)** $\forall x \in]0\,;+\infty[\setminus\{1\}, \Psi'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$

$$= \frac{(x-1)^2\ln(x)}{x(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{(x-1)^2\ln(x)}{x} - 1}{(x-1)^2}$$

$\forall x \in]0\,;+\infty[\setminus\{1\},\ \Psi'(x) = \dfrac{f(x)-1}{(x-1)^2}.$

b) $\forall x \in]0\,;+\infty[\setminus\{1\},\ (x-1)^2 > 0$ donc le signe de $\Psi'(x)$ est celui de $f(x)-1$ sur $]0\,;+\infty[\setminus\{1\}$

On a : $\forall x \in]0\,;\alpha[\,, f(x) < 1$ et $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[\,, f(x) > 1$ et $f(\alpha) = 1$.

Par suite, $\Psi'(\alpha) = 0$, $\forall x \in]0\,;1[\,\cup\,]1\,;\alpha[\,, \Psi'(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[\,, \Psi'(x) > 0$

c) Tableau de variation de Ψ :

x	0		1		α		$+\infty$
$\Psi'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$\Psi(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\Psi(\alpha)$	↗	$+\infty$

3. **a)** $\Psi(\alpha) = \dfrac{\ln^2(\alpha)}{2} + \dfrac{1}{\alpha-1}$.

On a $2{,}64 < \alpha < 2{,}65$ donc $\alpha > 1$; $\alpha - 1 > 0$; $\dfrac{1}{\alpha-1} > 0$

Par ailleurs, $\alpha \neq 1$ implique $\dfrac{\ln^2(\alpha)}{2} > 0$.

Par conséquent, $\dfrac{\ln^2(\alpha)}{2} + \dfrac{1}{\alpha-1} > 0$. Il en résulte que $\Psi(\alpha) > 0$.

b) $\Psi(\alpha)$ est le minimum de Ψ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

Donc, $\forall x \in]1\,;+\infty[\,, \Psi(x) \geq \Psi(\alpha)$. Puisque $\Psi(\alpha) > 0$ alors, $\Psi(x) > 0$.

Il s'ensuit que l'équation $\Psi(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]1\,;+\infty[$.

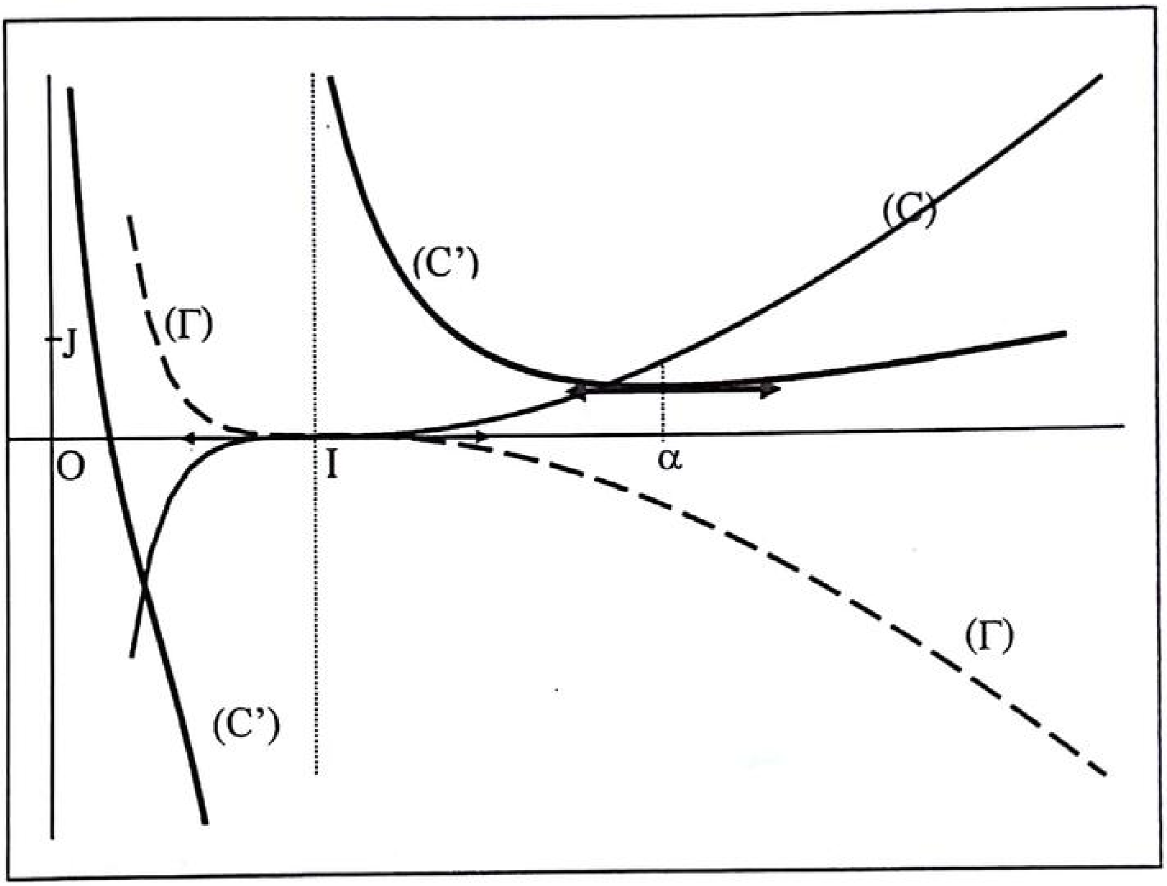
Par ailleurs, la fonction Ψ est continue et strictement décroissante sur $]0 ; 1[$

Par suite, $\Psi(]0 ;1[) = \mathbb{R}$.

Donc Ψ réalise une bijection de $]0 ;1[$ sur $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $\Psi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; 1[$.

En définitive, l'équation $\Psi(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]0 ;+\infty[\setminus\{1\}$.

c) Tracé de (C), (C') et (Γ).



DEVOIR N° 5

EXERCICE 1

1. $45^2 = 2025$

2. Il existe un entier naturel k tel que $\mu = k\delta$.

Par suite, $\mu^2 - 3\delta^2 = 2022 \Leftrightarrow \delta^2(k^2 - 3) = 2022$ avec $2022 = 2\times3\times337$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\delta^2=1\\ k^2-3=2022\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\delta^2=2022\\ k^2-3=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\delta^2=1\\ k^2-3=2022\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \delta = 1 \text{ et } k = 45.$$

Il en résulte $\delta = 1$ et $\mu = 45$.

Puisque $ab = \mu\delta$ alors $ab = 45$.

Donc, les couples (a, b) sont : (9,5), (5, 9) , (45, 1) et (1, 45).

EXERCICE 2

1. $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CH}$ donc, $2\,\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}$

On a H milieu de [AB] donc $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HA}$.

Par suite, $2\,\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}$

$$2\,\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$

$$-6\overrightarrow{DH} + 3\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

Par conséquent, D est le barycentre des points pondérés (B, 3), (H, −6) et (C, 1) car $-6+3+1 \neq 0$.

2. a) H milieu de [AB], J milieu de [BC], I milieu de [AC] et le triangle ABC est équilatéral.

Donc, HA = AI et BH = BJ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{3}$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BH}}) = \frac{\pi}{3}$.

Il s'ensuit que les triangles BHJ et AHI sont équilatéraux.

On a $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HA}$ donc $HB^2 = a^2$.

De même $HI^2 = a^2$.

Il s'ensuit que $HB^2 = a^2$ et $HJ^2 = a^2$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AH}$

$$DH^2 = a^2 + a^2 + 2a^2\cos\frac{\pi}{3}.$$

$$DH^2 = 3a^2$$

Donc, $2HB^2 - HD^2 + HI^2 - 2HJ^2 = -2\,a^2$.

b) $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MJ} = 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{JM}) + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MI}$

$= 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{DI}$.

J est le milieu de [BC] donc $2\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$

On a I est milieu de [AC] implique $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Or $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Par conséquent $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AC}$

Par suite, $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

Finalement, $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{AB}$.

3. **a)** La somme des coefficients des points pondérés (B, 2), (D, −1), (I, 1) et (J, −2) est nulle.
Donc,

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow 2MB^2 - MD^2 + MI^2 - 2MJ^2 = -2a^2$

$\Leftrightarrow 2HB^2 - HD^2 + HI^2 - 2HJ^2 - 2\,\overrightarrow{HM}.(2\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HI} - 2\overrightarrow{HJ}) = -2a^2$

$\Leftrightarrow -2a^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HM} = -2a^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HM} = 0$

b) D'après la question 2a), $2HB^2 - HD^2 + HI^2 - 2HJ^2 = -2a^2$ donc $H \in (\Delta)$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MH} = 0$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est non nul.

Par conséquent (Δ) est la droite passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$
C'est-à-dire que (Δ) est la droite (HC).

4. a) $3HB^2 - 6HH^2 + HC^2 = 3HB^2 + HC^2$

On a déjà $HB^2 = a^2$

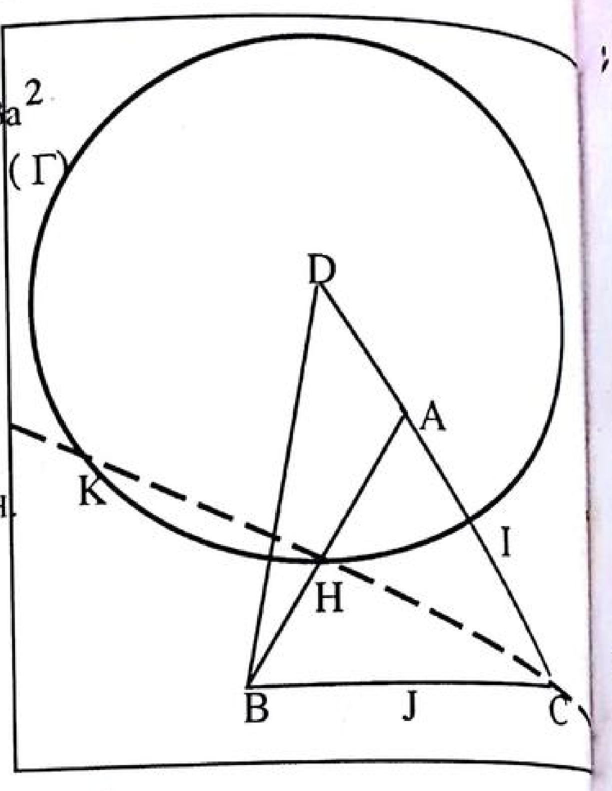
Par ailleurs, le triangle ABC est équilatéral et H milieu de [AB].

Donc la droite (HC) est une hauteur du triangle ABC

Il s'ensuit que le triangle AHC est rectangle en H.

D'après Pythagore, $HC^2 = AC^2 - AH^2$ donc $HC^2 = 3a^2$

Par conséquent $H \in (\Gamma)$.



b) La somme des coefficients des points pondérés (B ;3) , (D ;−6) , (C;1) est non nulle

Donc (Γ) est l'ensemble vide le. singleton { G}

ou un cercle de centre G.

Or H appartient à (Γ).

Par conséquent (Γ) est le cercle de centre D passant par H.

5. a) $K \in (\Gamma)$. D'après la question 4),

$3KB^2 - 6KH^2 + KC^2 = 6a^2$

On a $K \in (\Delta)$ qui est la médiatrice de [AB].

Donc, $KB^2 = KH^2 + HB^2$.

Par ailleurs, $H \in [KC]$ donc $KC^2 = KH^2 + HC^2 + 2KH \times HC$.

Il s'ensuit que, $3KH^2 + 3HB^2 - 6KH^2 + KH^2 + HC^2 + 2KH \times HC = 6a^2$

$$-2KH^2 + 6a^2 + 2KH \times a\sqrt{3} = 6a^2$$

$$KH(-KH + a\sqrt{3}) = 0$$

Par conséquent, $KH = a\sqrt{3}$.

b) $KH = a\sqrt{3}$. Il s'ensuit que : KA = KB = AB. Donc, le triangle KBA est équilatéral.

PROBLEME

Partie A

1. $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2\left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{1}{4}x^2 \ln(x^2)\right).$$

On a $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ donc $\lim_{x \to 0} x^2 \ln(x^2) = 0$.

Par suite, $\lim_{x \to 0} (x^2 - \frac{1}{4}x^2 \ln(x^2)) = 0$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Puisque $f(0) = 0$ alors $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$. On en déduit que la fonction f est continue en 0.

2. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x - \frac{1}{2}x\ln x)$

Or $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0$; $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x - \frac{1}{2}x\ln x) = 0$

Donc, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = 0.$

Interprétation graphique : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = 0.$

Donc, f est dérivable en 0 et $f'_d(0) = 0$.

Par conséquent, la courbe (C) admet à droite au point d'abscisse 0 une tangente horizontale.

3. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2(1 - \frac{1}{2}\ln x)$

Or $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{2}\ln x) = -\infty$

Donc, $\lim_{x \to +\infty} x^2(1 - \frac{1}{2}\ln x) = -\infty$

Par suite, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Par ailleurs, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{2}\ln x)}{x}$

$= \lim_{x \to +\infty} x(1 - \frac{1}{2}\ln x)$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Interprétation graphique : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

4. **a)** $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = 2x\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right) - \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}$

$$= x\left(2-\frac{1}{2}-\ln x\right).$$

$$= x\left(\frac{3}{2}-\ln x\right)$$

b) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\frac{3}{2}-\ln x$

$$\frac{3}{2}-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3}{2}-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < e^{\frac{3}{2}}$$

On déduit que $\frac{3}{2}-\ln x < 0 \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}}$

Il en découle que : $\forall x \in]0\,;\ e^{\frac{3}{2}}[$, $f'(x) > 0$, $\forall x \in]e^{\frac{3}{2}}\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$ et $f'(e^{\frac{3}{2}}) = 0$

Donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0;\ e^{\frac{3}{2}}[$ et la fonction f est strictement décroissante $]e^{\frac{3}{2}}\,;+\infty[$

c) Tableau de variation de f :

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f'(x)	0	−	0	+	
f(x)	0	↗	$\frac{e^3}{4}$	↘	$-\infty$

5. **a)** $f(e^2) = (e^2)^2(1-\frac{1}{2}\ln(e^2))$

$= (e^2)^2(1-1)$
$= 0$

b) f est continue et strictement croissante sur $]0;\ e^{\frac{3}{2}}]$.

$f(\,]0;\ e^{\frac{3}{2}}]\,) =]0;\ \frac{e^3}{4}]$.

Par suite, $\forall x \in]0;\ e^{\frac{3}{2}}], f(x) \in]0;\ \frac{e^3}{4}]$ donc $f(x) > 0$.

Par ailleurs, la fonction f est strictement décroissante sur $]\ e^{\frac{3}{2}}\ ;+\infty[$

Donc $e^{\frac{3}{2}} < x < e^2$ implique $f(x) > f(e^2)$. Comme $f(e^2) = 0$ alors $f(x) > 0$

Enfin, $x > e^2$ implique $f(x) < f(e^2)$ donc $f(x) < 0$

En définitive, $\forall x \in]\,0\ ;\ e^2\,[, f(x) > 0$ et $\forall x \in]\ e^2\ ; +\infty\,[, f(x) < 0$

6. $f(\sqrt{e}) = e(1-\frac{1}{4})$, $f(\sqrt{e}) = \frac{3e}{4}$ et $f'(\sqrt{e}) = \sqrt{e}\ (\frac{3}{2}-\frac{1}{2})$, $f'(\sqrt{e}) = \sqrt{e}$.

On en déduit que $y = x\sqrt{e} - \frac{e}{4}$ est une équation de la tangent (T) au point d'abscisse.

7. **a)** $\forall x \in]\,0\ ; +\infty[,\ h'(x) = f'(x) - \sqrt{e}$

$= x(\frac{3}{2} - \ln x) - \sqrt{e}$ donc $h''(x) = \frac{1}{2} - \ln x$.

Par conséquent h' est strictement croissante sur $]\,0\ ;\sqrt{e}\ [$ et h' est strictement décroissante sur $]\sqrt{e}\ ;+\infty[$.

$h'(\sqrt{e}) = \sqrt{e}\ (\frac{3}{2} - \ln\sqrt{e}) - \sqrt{e} = 0$

h' est strictement croissante sur $]\,0\ ;\sqrt{e}\ [$.

$\forall x \in]\,0;\ \sqrt{e}\ [, x < \sqrt{e}$

$h'(x) < h'(\sqrt{e})$ or $h'(\sqrt{e}) = 0$

Donc, $h'(x) < 0$.

Par ailleurs, h' est strictement décroissante sur $]\sqrt{e}\,;+\infty[$.

$\forall x \in]\sqrt{e}\,;+\infty[, x > \sqrt{e}$

$$h'(x) < h'(\sqrt{e}) \text{ or } h'(\sqrt{e}) = 0$$

Donc, $h'(x) < 0$.

En définitive, $\forall x \in]0;+\infty[\setminus \{\sqrt{e}\}, h'(x) < 0$ et $h'(\sqrt{e}) = 0$.

b) $\forall x \in]0;+\infty[\setminus \{\sqrt{e}\}, h'(x) < 0$ et $h'(\sqrt{e}) = 0$

De ce fait, h est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

On vérifie que $h(\sqrt{e}) = 0$.

La fonction h est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

$\forall x \in [0\,;\sqrt{e}[,\ x < \sqrt{e}$

$$h(x) > h(\sqrt{e})$$

Puisque $h(\sqrt{e}) = 0$ alors $h(x) > 0$

Par ailleurs, $\forall x \in]\sqrt{e}\,;+\infty[, x > \sqrt{e}$

$$h(x) < h(\sqrt{e})$$

$$h(x) < 0.$$

En définitive $\forall x \in [0\,;\sqrt{e}[, h(x) > 0$ et $\forall x \in]\sqrt{e}\,;+\infty[, h(x) < 0$.

c) $\forall x \in [0\,;\sqrt{e}[, h(x) > 0$ donc $f(x) - x\sqrt{e} + \frac{e}{4} > 0$

$$f(x) - \left(x\sqrt{e} - \frac{e}{4}\right) > 0.$$

Il s'ensuit que la courbe (C) est au dessus (T) sur $[0\,;\sqrt{e}[$.

Par ailleurs, $\forall x \in]\sqrt{e}\,;+\infty[, h(x) < 0$.

$$f(x) - x\sqrt{e} + \frac{e}{4} < 0$$

$$f(x) - \left(x\sqrt{e} - \frac{e}{4}\right) < 0.$$

Donc (C) est en dessous de (T) sur $]\sqrt{e}\,;+\infty[$.

Enfin (C) et (T) se coupent au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

8. Voir construction.

9. **a)** f est continue et strictement sur $[\, e^{\frac{3}{2}} ; +\infty[$. Donc f réalise une bijection de $[\, e^{\frac{3}{2}} ;+\infty[$ sur $f([\, e^{\frac{3}{2}}$

Or $f([\, e^{\frac{3}{2}} ; +\infty[) =]-\infty ; \frac{e^3}{4}]$ et $\frac{e^3}{4} \approx 5{,}02$ alors $1 \in]-\infty ; \frac{e^3}{4}]$.

Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[\, e^{\frac{3}{2}} ;+\infty[$
Vérification de l'encadrement : $f(7{,}1) \approx 1{,}006$ et $f(7{,}2) \approx 0{,}672$.
Puisque $0{,}672 < 1 < 1{,}006$ alors $7{,}1 < \alpha < 7{,}2$.

b) $f(1) = 1^2(1 - \frac{1}{2}\ln(1)) = 1$.

c) f est strictement croissante sur $[0 ; e^{\frac{3}{2}}[$
Donc $0 \leq x < 1$ implique $f(x) < f(1)$. Or $f(1) = 1$ alors $f(x) < 1$

Par ailleurs, $1 < x < e^{\frac{3}{2}}$ implique $f(1) < f(x)$. D'où $f(x) > 1$.

f est strictement décroissante sur $[\, e^{\frac{3}{2}} ;+\infty[$

Donc, $e^{\frac{3}{2}} \leq x < \alpha$ implique $f(x) > f(\alpha)$. Or $f(\alpha) = 1$ alors $f(x) > 1$.
Par ailleurs, $\alpha < x$ implique $f(x) < f(\alpha)$. D'où $f(x) < 1$.
En définitive, $\forall\, x \in [0 ; 1[\cup]\alpha ; +\infty[$, $f(x) < 1$ et $\forall x \in]1 ; \alpha[$, $f(x) > 1$

Partie B

1. **a)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\Psi(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)e^{-f(x)}}{x}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} e^{-f(x)}$

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{-f(x)} = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} e^{-f(x)} = 0$

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\Psi(x)}{x} = 0$.

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\Psi(x) - \Psi(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\Psi(x)}{x} = 0$. Donc Ψ est dérivable à droite en 0 et $\Psi'_d(0) = 0$.

Par conséquent, le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est 0.

2. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\Psi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)e^{-f(x)}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-f(x)}=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)e^{-f(x)}=-\infty$

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\Psi(x)=-\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\Psi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)e^{-f(x)}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}e^{-f(x)}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-f(x)}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\Psi(x)}{x}=-\infty$

b) Interprétation graphique : la courbe (Γ) admet en $+\infty$ une branche infinie de direction l'axe des ordonnées.

3. **a)** $\forall x\in\,]0;+\infty[,\ \Psi'(x)=f'(x)e^{-f(x)}-f(x)f'(x)e^{-f(x)}$

$=(1-f(x))f'(x)e^{-f(x)}.$

b) $\forall x\in\,]0;+\infty[,\ e^{-f(x)}>0$ donc le signe de $\Psi'(x)$ dépend de celui de $1-f(x)$ et de $f'(x)$.

Pour $x\in\,]0;+\infty[,\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x<e^{\frac{3}{2}}$ et $f'(x)<0\Leftrightarrow x>e^{\frac{3}{2}}$

Par ailleurs, $1-f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=1$

$\Leftrightarrow x=\alpha$

$1-f(x)>0\Leftrightarrow f(x)<1$

$\Leftrightarrow x\in\,]0;1[\,\cup\,]\alpha;+\infty[$ et $1-f(x)<0\Leftrightarrow x\in\,]1;\alpha[$

D'où le tableau de signe de Ψ'.

x	0		1		$e^{\frac{3}{2}}$		α		$+\infty$
$1-f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\Psi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Il en résulte que : $\forall x\in\,]0;1[\,\cup\,]e^{\frac{3}{2}};\alpha[,\ \Psi'(x)>0$, $\forall x\in\,]1;e^{\frac{3}{2}}[\,\cup\,]\alpha;+\infty[,\ \Psi'(x)<0$

$\Psi'(1)=\Psi'(e^{\frac{3}{2}})=\Psi'(\alpha)=0$

c) Tableau de variation de Ψ.

x	0		1		$e^{\frac{3}{2}}$		α		$+\infty$
$\Psi'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$\Psi(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\Psi(e^{\frac{3}{2}})$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

d) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) - \Psi(x) = (1 - e^{-f(x)})f(x)$.
Déterminons le signe de chacun des facteurs du produit :
D'après la réponse à la question 7) Partie A,

$\forall x \in]0\,;\, e^2[$, $f(x) > 0$ et $\forall x \in]e^2\,;+\infty[$, $f(x) < 0$. On ajoute que $f(0) = f(e^2) = 0$

Par ailleurs, $1 - e^{-f(x)} = 0 \Leftrightarrow e^{-f(x)} = 1$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e^2.$$

Ensuite, $1 - e^{-f(x)} > 0 \Leftrightarrow e^{-f(x)} < 1$

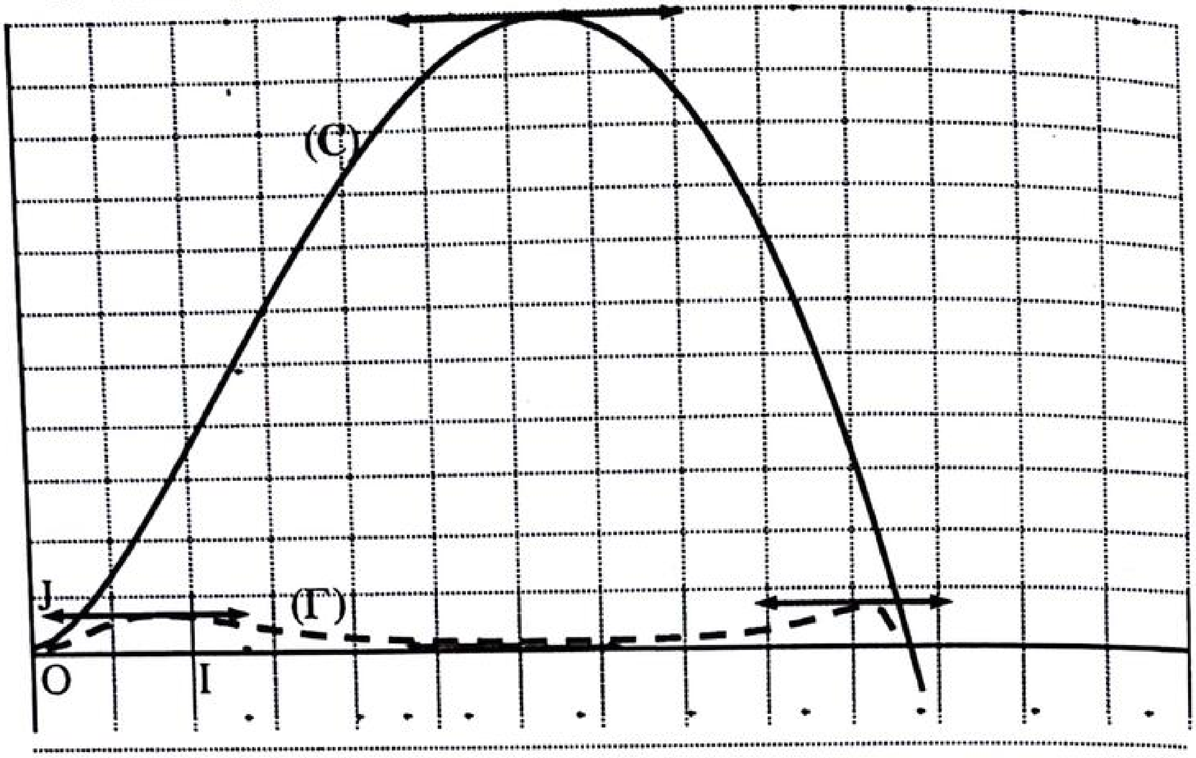
$$\Leftrightarrow -f(x) < 0$$
$$\Leftrightarrow f(x) > 0$$
$$\Leftrightarrow x \in]0\,;\, e^2[.$$

On en déduit que $1 - e^{-f(x)} < 0 \Leftrightarrow x \in]e^2\,;+\infty[$.
De ce qui précède, on a le tableau de signe ci-dessous :

x	0		e^2		$+\infty$
$1 - e^{-f(x)}$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x) - \Psi(x)$	0	$+$	0	$+$	

Il découle du tableau que :
$\forall x \in]0\,;\, e^2[\cup]e^2\,;+\infty[$, $f(x) - \Psi(x) > 0$ donc (C) est au dessus de (Γ) sur $]0\,;\, e^2[$ et sur $]e^2\,;+\infty[$.
$f(x) - \Psi(x) = 0$ si $x \in \{0\,;\, e^2\}$ donc les courbes (C) et (Γ) se coupent aux points d'abscisses 0 et e^2.

4. Tracé de (C) et de (Γ).



DEVOIR N° 6

EXERCICE 1

1. $c - a = -(\bar{z})^2 + iz - (z^2 - (\bar{z})^2)$

$= iz - z^2$

$= z(i - z)$

$b - a = z^2 + i(\bar{z})^2 - (z^2 - (\bar{z})^2)$

$= i\bar{z} + (\bar{z})^2$

$= \bar{z}(\bar{z} + i)$

2. De la question 1), $\overline{c - a} = \overline{z(i - z)}$

$\overline{c - a} = \bar{z}\,\overline{i - z}$

$\overline{a - c} = \bar{z}(\bar{z} + i)$

Donc, $\overline{a - c} = b - a$.

Il en résulte que, $|c - a| = |b - a|$.

3. $|c - a| = |b - a|$ implique que MN =MP. Par conséquent le triangle MNP est isocèle en M.

EXERCICE 2

1. Les points pondérés (A, – 3), (B, 2n) et (C, 2 – n) admettent un barycentre si $-3 + 2n + 2 - n \neq 0$, c'est à dire pour tout entier naturel n différent de 1.

2. $\overrightarrow{BG_5} = -\frac{3}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

3. $\overrightarrow{AG_n} = \frac{2n}{n-1}\overrightarrow{AB} + \frac{2-n}{n-1}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG_{n+1}} = \frac{2(n+1)}{n}\overrightarrow{AB} + \frac{2-n-1}{n}\overrightarrow{AC}$

Par suite, $\overrightarrow{G_nG_{n+1}} = \left(\frac{2(n+1)}{n} - \frac{2n}{n-1}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1-n}{n} - \frac{2-n}{n-1}\right)\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{G_nG_{n+1}} = \left(\frac{2(n^2-1)-2n^2}{n(n-1)}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{(1-n)(n-1)-n(2-n)}{n(n-1)}\right)\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{G_nG_{n+1}} = -\frac{2}{n(n-1)}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{n(n-1)}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{G_nG_{n+1}} = -\frac{1}{n(n-1)}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{G_nG_{n+1}} = -\frac{1}{n(n-1)}\overrightarrow{AJ}$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{G_{n-1}G_n} = -\frac{1}{(n-2)(n-1)}\overrightarrow{AJ}$

Il s'ensuit que, $n\overrightarrow{G_nG_{n+1}} = (n-2)\overrightarrow{G_{n-1}G_n}$

Finalement , $\overrightarrow{G_nG_{n+1}} = \frac{n-2}{n}\overrightarrow{G_{n-1}G_n}$

4. $\overrightarrow{CG_3} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CG_3} = \overrightarrow{CA}.\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}CA^2 + 3\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$$

$$= -\frac{3}{2}CA^2 + \frac{3}{2}CA^2$$

$$= 0$$

Par conséquent, les droites (CA) et (CG_3) sont perpendiculaires.

5. Les droites (AC) et (CG_3) sont perpendiculaires

De plus, $\overrightarrow{G_3G_4} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{G_4G_5} = -\frac{1}{12}\overrightarrow{AJ}$

Donc G_3 est le point d'intersection de la droite passant par C et perpendiculaire à (AC) et de la droite passant par G_5 et parallèle à (AJ).

6. $\overrightarrow{G_5G_6} = \frac{5-2}{5}\overrightarrow{G_4G_5}$

Donc $\overrightarrow{G_5G_6} = \frac{3}{5}\overrightarrow{G_4G_5}$

Par ailleurs, $\overrightarrow{G_4G_5} = \frac{2}{4}\overrightarrow{G_3G_4}$

$$\overrightarrow{G_4G_5} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{G_3G_5} + \overrightarrow{G_5G_4})$$

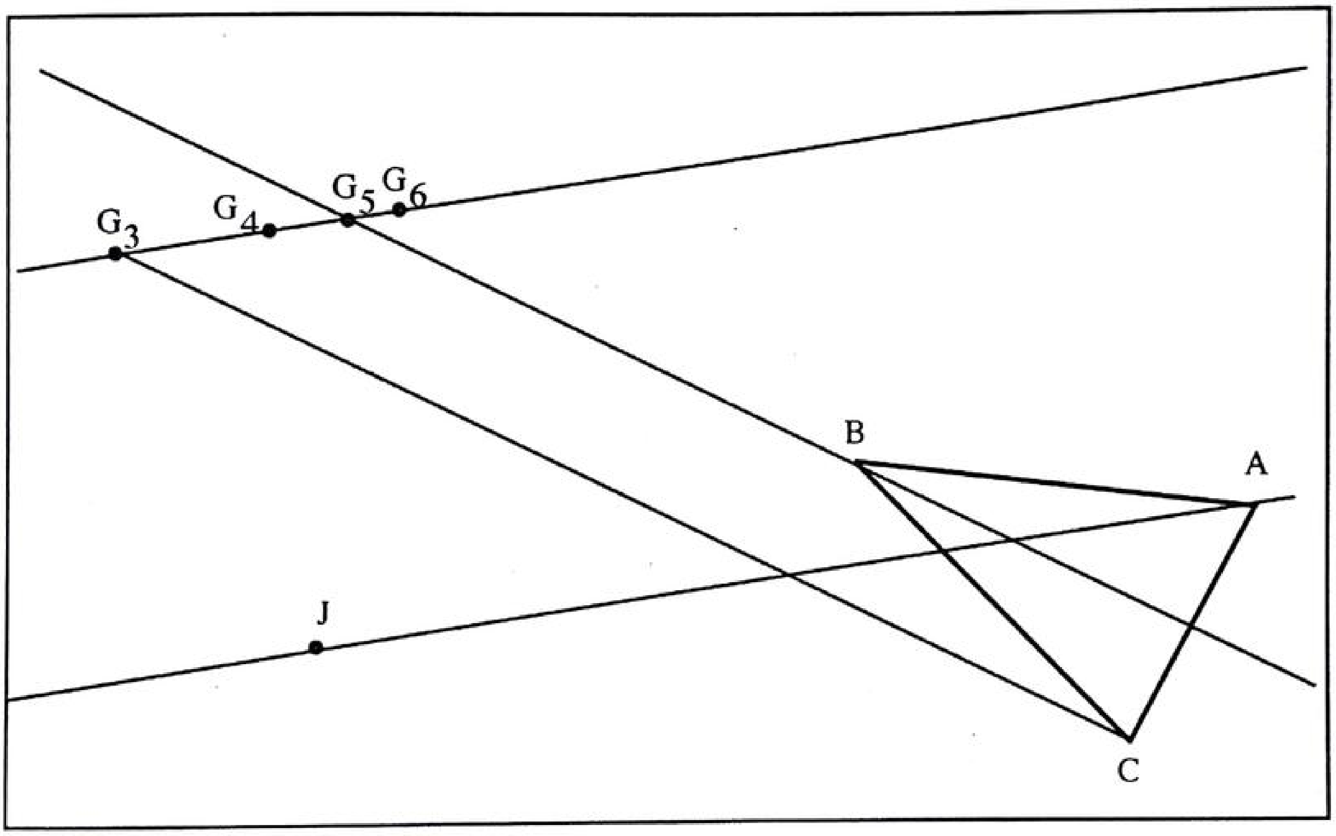
$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{G_4G_5} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{G_3G_5}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{G_4G_5} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{G_3G_5}$$

$$\overrightarrow{G_4G_5} = \frac{1}{3}\overrightarrow{G_3G_5}.$$

7. Voir construction.

Construction



PROBLEME

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \ln x\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \ln x\right) = -\infty$.

Par suite, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \ln x\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} (1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \ln x\right) = +\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

2. $\forall x \in]0 ;+\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+1) - 2x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x}$

$$= \frac{2x(x-1)(x^2+1) - 2x^2(x-1)^2 + (x^2+1)^2}{x(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x-1)(x^2+1-x^2+x) + (x^2+1)^2}{x(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x-1)(x+1) + (x^2+1)^2}{x(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)^2 - 2x(1-x^2)}{x(x^2+1)^2}$$

3. a) Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$ et $-x^2 < x^2$; $1 - x^2 < 1 + x^2$.

Par ailleurs, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ donc $x^2 + 1 \geq 2x$

On a $2x > 0$ et $1 - x^2 < 1 + x^2$ donc $2x(1 - x^2) < 2x(1 + x^2)$ (1)

$x^2 + 1 > 0$ et $x^2 + 1 \geq 2x$ donc $2x(x^2 + 1) < (x^2 + 1)^2$ (2).

Des inégalités (1) et (2), on obtient $2x(1 - x^2) < (x^2 + 1)^2$

b) Pour tout $x > 0$, $(x^2+1)^2 - 2x(1-x^2) > 0$ et $x(x^2+1)^2 > 0$

Donc, $\dfrac{(x^2+1)^2 - 2x(1-x^2)}{x(x^2+1)^2} > 0$

Par conséquent, $g'(x) > 0$.

c) Tableau de variations de g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. **a)** g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $g(]0;+\infty[)$

On a $g(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique.

De plus, $g(1) = 0$ donc 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

b) g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$0 < x < 1 \Rightarrow g(x) < g(1)$. Or $g(1) = 0$ donc $g(x) < 0$.

Par ailleurs, $x > 1 \Rightarrow g(x) > g(1)$. Or $g(1) = 0$ donc $g(x) > 0$.

En définitive, $0 < x < 1 \Rightarrow g(x) < 0$, $x > 1 \Rightarrow g(x) > 0$ et $g(1) = 0$.

On en déduit que : $g(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x\ln x - \ln(x^2+1))$.

On a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} (x^2+1) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2+1) = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} (x\ln x - \ln(x^2+1)) = 0$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Or $f(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

On conclut que f est continue en 0.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x\ln x - \ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\ln x - x\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\right)$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^2 = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = 0$

De plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$.

Il s'ensuit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\ln(x) - x\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\right) = -\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.

Par conséquent, la courbe (C) admet à droite au point d'abscisse 0 une demi –tangente verticale.

3.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x\ln x - \ln(x^2+1))$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x\ln x - \ln\left[x^2(1+\frac{1}{x^2})\right]\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (x\ln x - \ln(x^2) + \ln(1+\frac{1}{x^2})^2)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (x-2)\ln x - \ln(1+\frac{1}{x^2})).$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x^2}) = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2}) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)\ln x = +\infty$

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)\ln x - \ln(1+\frac{1}{x^2})) = +\infty$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-2)\ln x - \ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}$.

$$= \lim_{x\to+\infty} (\ln x - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{x^2})).$$
$$= +\infty.$$

Interprétation graphique : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) au voisinage de $+\infty$.

4. a) $\forall x \in]0 ; 1]$, $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 2x \times \frac{1}{x^2+1}$

$$= \ln x + 1 - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \ln x + \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$$

$$= \ln x + \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$= g(x).$$

b) $\forall x \in]0 ; 1[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Il en résulte que : $\forall x \in]0 ; 1[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$

Tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	0	↘	$-\ln 2$	↗	$+\infty$

5. **a)** f est continue et strictement décroissante sur $]0 ;1]$.

Donc, $f(]0 ;1]) = [-\ln 2 ; 0[$. Or $0 \notin [-\ln 2 ; 0[$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]0 ;1]$. Par ailleurs, f est continue et strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.

Donc f réalise une bijection de $]1 ; +\infty[$ sur $f(]1 ; +\infty[)$

On a $f(]1 ; +\infty[) =]-\ln 2 ; +\infty[$.

Puisque $-\ln 2 < 0$ donc $0 \in]-\ln 2 ; +\infty[$.

Il s'ensuit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]1 ; +\infty[$.

En définitive, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0 ; +\infty[$.

b) Vérification de l'encadrement de α :

$f(2{,}22) \approx -0{,}00928$ et $f(2{,}23) \approx 0{,}0012$.

Puisque $f(2{,}22)$ et $f(2{,}23)$ sont de signes contraires alors $2{,}22 < \alpha < 2{,}23$.

6. On a $f(]0\,;1]) = [-\ln 2\,;0[$ donc $\forall x \in]0\,;1]$, $f(x) \in [-\ln 2\,;0[$.
Par conséquent, $-\ln 2 \leq f(x) < 0$.

Partie C

1. F est une primitive de f sur $]0\,;1]$ donc $\forall x \in]0\,;1]$, $F'(x) = f(x)$
Or $-\ln 2 \leq f(x) < 0$ donc $-\ln 2 \leq F'(x) < 0$.
D'après le l'inégalité des accroissements finis, pour tout x appartenant à $]0\,;1]$, $(1-x)(-\ln 2) \leq F(1) - F(x)$,
Donc $0 < F(x) - F(1) \leq (1-x)\ln 2$.
Comme $F(1) = 1$ et $0 < \ln 2 < 1$ donc $1 < F(x) \leq 2 - x$. Par suite, $0 < F(x) \leq 2 - x$.

2. a) $\forall x \in]0\,;1]$, $0 < F(x) \leq 2 - x$.
On a $x > 0$ donc, $x^2 \ln\sqrt{2} < x^2 (F(x) + \ln\sqrt{2}) \leq (2 - x + \ln\sqrt{2})\, x^2$.

$$x\ln\sqrt{2} < \frac{H(x)}{x} \leq (2 - x + \ln\sqrt{2})\, x.$$

b) On a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\sqrt{2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} (2 - x + \ln\sqrt{2}) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{H(x)}{x} = 0$.

Puisque $H(0) = 0$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = 0$.

Il en résulte que H est dérivable à droite en 0 et $H'_d(0) = 0$
Interprétation graphique : (Γ) admet à droite au point d'abscisse 0 une demi - tangente horizontale.

3. $\forall x \in]0\,;1]$, $H'(x) = 2x(F(x) + \ln\sqrt{2}) + x^2 F'(x)$.

$$= 2xF(x) + 2x \times \frac{1}{2}\ln 2 + x^2 f(x).$$

$$= 2xF(x) + x(xf(x) + 2 \times \frac{1}{2}\ln 2).$$

$$= 2xF(x) + x(xf(x) + \ln 2))$$

4. $\forall x \in]0\,;1]$, $0 < x \leq 1$ et $f(x) \leq 0$ donc $f(x) \leq xf(x)$.
Or $-\ln 2 \leq f(x)$ alors $-\ln 2 \leq f(x) \leq xf(x)$
Par conséquent $0 \leq xf(x) + \ln 2$

5. a) $\forall x \in]0\,;1]$, $x > 0$ et $0 < F(x)$ donc $2xF(x) > 0$.
On a $0 \leq xf(x) + \ln 2$ donc $x(xf(x) + \ln 2) \geq 0$.
Par suite, $2xF(x) + x(xf(x) + \ln 2) > 0$. Donc $H'(x) > 0$.

b) Tableau de variation de H.

x	0		1
$H'(x)$		$+$	
$H(x)$	0	$\nearrow$	$1 + \ln\sqrt{2}$

H est dérivable à droite en 0 et H dérivable sur] 0 ;1]. Donc H est dérivable sur [0 ; 1].

H est continue et strictement croissante sur [0 ; 1]. De ce fait H est une bijection de [0 ; 1] sur $J = H([0\,;1])$ où $H([0\,;1]) = [0\,;1+\ln\sqrt{2}\,]$

6. $H(1) = 1^2(F(1) + \ln\sqrt{2})$; $H(1) = 1+\ln\sqrt{2}$ et $H'(1) = 2\times1\times F(1)+1\times(1\times f(1)+\ln(2))$; $H'(1) = 2$.

Comme $H'(1) \neq 0$ alors H^{-1} est dérivable en $1+\ln\sqrt{2}$

7. $$(H^{-1})'(1+\ln\sqrt{2}) = \frac{1}{H'(H^{-1}(1+\ln\sqrt{2}))}.$$

$$= \frac{1}{H'(1)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

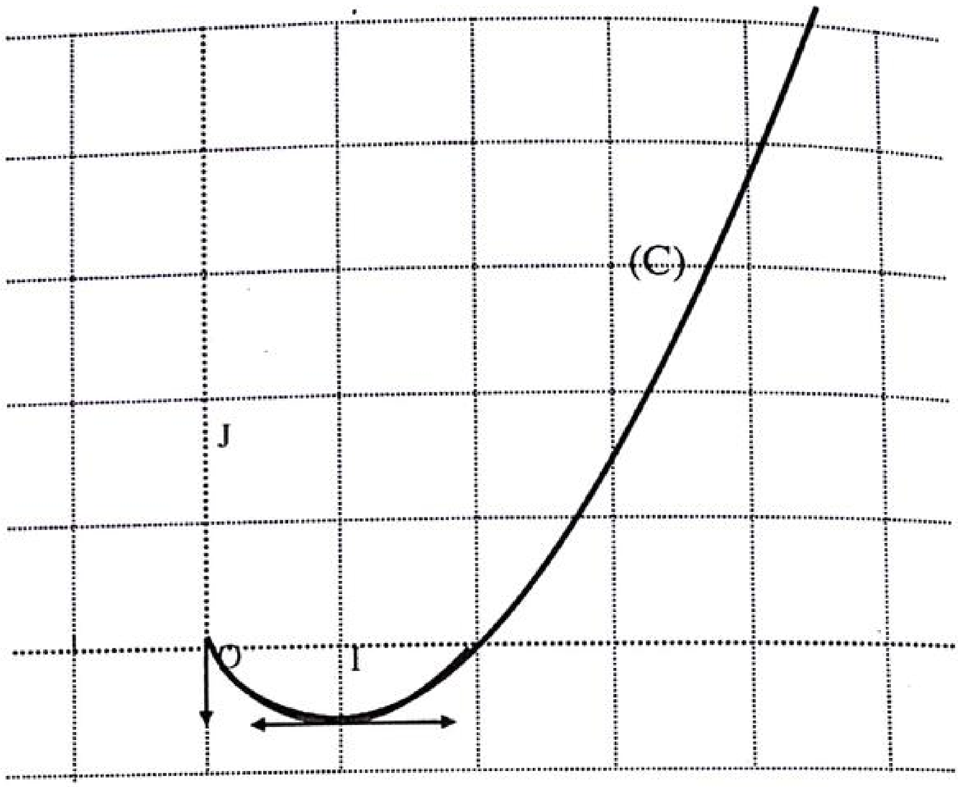
8. (T) a pour équation $y = H'(1)(x-1) + H(1)$

On a $H(1) = 1 + \ln\sqrt{2}$ et $H'(1) = 2$.

Donc : $y = 2(x-1) + 1 + \ln\sqrt{2}$

$= 2x - 1 + \ln\sqrt{2}$.

9. Figure.



DEVOIR N° 7

EXERCICE 1

1. **a)** Notons ib où $b \in \mathbb{R}$, le nombre imaginaire pure solution de P (z).

$$P(ib) = 0 \Leftrightarrow (ib)^3 - (4-4i\sqrt{3})(ib)^2 + 16(1-i\sqrt{3})(ib) + 64i\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 + 16b\sqrt{3} = 0 \quad (1) \\ -b^3 - 4b^2\sqrt{3} + 16b + 64\sqrt{3} = 0 \quad (2). \end{cases}$$

On a : $4b^2 + 16b\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 4b(b + 4\sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow b = 0 \text{ ou } b = -4\sqrt{3}$$

De plus,

$-0^3 - 40^2\sqrt{3} + 16\times 0 + 64\sqrt{3} = 64\sqrt{3} \neq 0$

Et $-(-4\sqrt{3})^3 - 4(-4\sqrt{3})^2\sqrt{3} + 16(-4\sqrt{3}) + 64\sqrt{3} = 576\sqrt{3} - 576\sqrt{3} - 64\sqrt{3} + 64\sqrt{3}$

$= 0.$

Il s'ensuit que seulement $-4\sqrt{3}$ vérifie l'équation (2).

Par conséquent l'unique solution imaginaire pure de l'équation P (z) = 0 est $-4i\sqrt{3}$.

b) Effectuons une division euclidienne de P(z) par $z^2 - 4z + 16$

Il en résulte $P(z) = (z + 4i\sqrt{3})(z^2 - 4z + 16)$

Par ailleurs, pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 4i\sqrt{3})(z^2 - 4z + 16) = 0$

$$\Leftrightarrow z + 4i\sqrt{3} = 0 \text{ ou } z^2 - 4z + 16 = 0$$

Résolvons $z^2 - 4z + 16 = 0$

Le discriminant $\Delta = 4^2 - 4\times 16$

$= -48$

$= (4i\sqrt{3})^2$

Donc, les solutions $z_1 = \dfrac{4 - 4i\sqrt{3}}{2} = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $z_1 = \dfrac{4 + 4i\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3}$

Par suite, $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -4i\sqrt{3}$ ou $z = 2 - 2i\sqrt{3}$ ou $z = 2 + 2i\sqrt{3}$

Donc les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont : $-4i\sqrt{3}$, $2 - 2i\sqrt{3}$ et $2 + 2i\sqrt{3}$

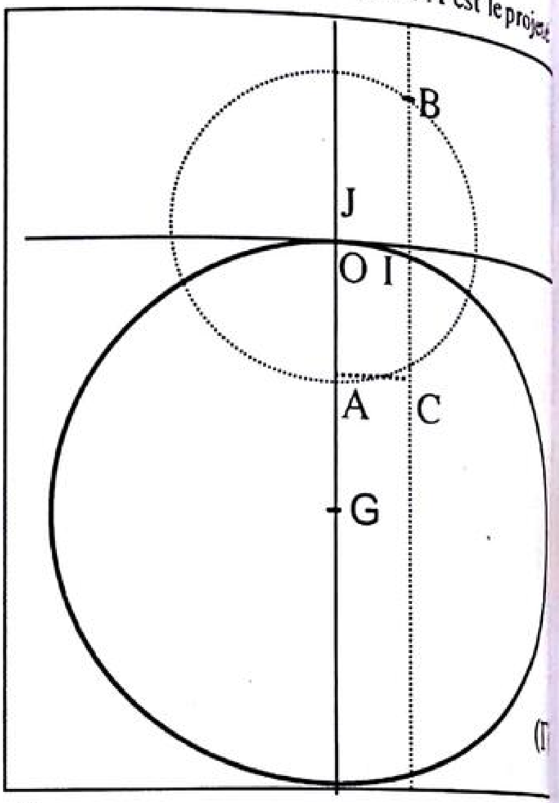
2. a) $OB = |z_B| = 4$

$OC = |z_C| = 4$

Donc $OB = OC = 4$

On en déduit que B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

b) B et C sont les points d'intersection de la droite d'équation $x = 2$ et du cercle de centre O et de rayon 4 B est le point d'ordonnée positive et C est le point d'ordonnée négative. Le point A est le projeté orthogonal de C sur la droite (OJ).



Pour la figure, voir construction.

3. a) $z_G = \dfrac{2z_A - z_B + z_C}{2-1+1}$

$= \dfrac{2(-2i\sqrt{3}) - (2 + 2i\sqrt{3}) + (2 - 2i\sqrt{3})}{2}$

$= -4i\sqrt{3}$

Pour la construction : $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA}$.

b) $2OA^2 - OB^2 + OC^2 = 2 \times 12 - 16 + 16$
$= 24$

Donc, le point O appartient à l'ensemble (Γ)

Par ailleurs, la somme des coefficients des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -1)$ et $(C, 1)$ est non nulle.

Donc (Γ) soit est l'ensemble.

vide, le singleton $\{G\}$ ou un cercle de centre G

Puisque O appartient à (Γ),

Il en résulte que (Γ) est le cercle de centre G passant par O.

c) Voir figure

EXERCICE 2

1. Utilisons la démarche de la recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide

Dividende	37	23	14	9	5
Diviseur	23	14	9	5	4
Reste	14	9	5	4	1

De ce tableau, $1 = 5 - 4 = 5 - (9 - 5) = 2\times5 - 9 = 2\times(14 - 9) - 9 = 2\times14 - 3\times9$

$= 2\times14 - 3\times(23 - 14) = 5\times14 - 3\times23 = 5\times(37-23) - 3\times23$

$= 5\times37 - 8\times23$

Donc, $5\times37 - 8\times23 = 1$.

Le couple $(5, -8)$ convient.

2. On a $5\times37 - 8\times23 = 1$

2. On a $5\times37 - 8\times23 = 1$

$5\times5\times37 - 5\times8\times23 = 5$

$25\times37 - 40\times23 = 5$

On obtient le couple $(25, -40)$

3. Pour $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $(E') \Leftrightarrow 37x = -23y$.

Soit (u, v) une solution de (E').

37 qui divise $-23y$ et, 37 et -23 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 37 divise y.

Donc, il existe $k\in Z$ tel que $y = 37k$

Par suite, $37x = -23 \times 37k$

$x = -23k$.

Par ailleurs, soit un couple $(-23k, 37k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a $37 \times 23k - 23\times37k = 0$.

Donc tout couple de la forme $(-23k, 37k)$ est solution de l'équation (E ').

Il résulte de ce qui précède que les solutions de (E') sont les couples $(-23k, 37k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Pour $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, (E) $\Leftrightarrow 37x + 23y = 5$ et $25\times37 - 40\times23 = 5$

Donc, (E) $\Leftrightarrow 37(x-25) + 23(y+40) = 0$

$\Leftrightarrow (x-25, y+40)$ est solution de (E ')

$\Leftrightarrow x - 25 = -23k$ et $y + 40 = 37k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow x = 25 - 23k$ et $y = -40 + 37k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de (E) sont donc les couples $(25 - 23k, -40 + 37k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

PROBLEME

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2xe^x - 1) = -1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2xe^x - 1) = +\infty$.

2. **a)** Pour tout nombre réel x, $g'(x) = 2e^x + 2xe^x$

$= 2(x+1)e^x$

b) Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $2(x+1)$.

Par ailleurs, $2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

D' où le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2(x+1)$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

$\forall x\in]-\infty;-1[$, $g'(x) < 0$ d'où g est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$.

$\forall x\in]-1;+\infty[$, $g'(x) > 0$ d'où g est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

c) Tableau de variation de g.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{2}{e}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a) g est continue et strictement décroissante sur$]-\infty\,;-1]$,

$g(]-\infty;-1]) = [\,g(-1)\,;\ \lim_{x\to-\infty} g(x)\,[$

$= [g(-1)\,;-1[$. On a $0 \notin [g(-1)\,;-1[$

Donc, l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans$]-\infty;-1]$.

Par ailleurs, g est continue et strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

Donc g réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur $g([-1\,;+\infty[)$

On a $g([-1\,;+\infty[) = [-1-\frac{2}{e}\,;+\infty[$. Comme $-1-\frac{2}{e} < 0$ alors $0 \in [-1-\frac{2}{e}\,;+\infty[$.

Il en s'ensuit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-1\,;+\infty[$.

En définitive l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) Vérification de l'encadrement de α : $g(0{,}35) \approx -0{,}0066$ et $g(0{,}36) \approx 0{,}032$

Puisque $g(0{,}35)$ et $g(0{,}36)$ alors $0{,}35 < \alpha < 0{,}36$.

4. Démontrons que : $\forall x \in]-\infty;\alpha[$, $g(x)<0$.

g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$.

On a $g(]-\infty;-1]) = [g(-1)\,;-1[$.

$\forall x \in]-\infty;-1]$, $g(x) \in [g(-1)\,;-1[$ donc $g(x) < -1$. De ce fait $g(x) < 0$.

Par ailleurs, g est strictement croissante sur$[-1;\alpha[$.

$-1 \le x < \alpha$ implique $g(x) < g(\alpha)$ Or $g(\alpha) = 0$ alors $g(x) < 0$.

Par suite, $\forall x \in]-\infty\,;\alpha[$, $g(x) < 0$.

Démontrons que : $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) > 0$.

g est strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

On a $x > \alpha$ implique $g(x) > g(\alpha)$. Or $g(\alpha) = 0$ alors $g(x) > 0$.

Partie B

1. a) Pour tout nombre réel x, $f(x) = x^2e^{2x} - xe^x$

$= xe^x(xe^x - 1)$

On a $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$; $\lim_{x\to-\infty} (xe^x - 1) = -1$

Par suite, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x}(xe^{x}-1) = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) Interprétation graphique : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

2. **a)** On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{x}-1) = +\infty$

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x}(xe^{x}-1) = +\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2e^{2x} - xe^{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{2x} - e^{x})$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{x}-1)e^{x}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{x}-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{x}-1)e^{x} = +\infty$

Par conséquent , $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

c) Interprétation graphique : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ permet de dire que la courbe (C) admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3. **a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} - (x+1)e^{x}$

$= (2x^2 + 2xe^{x})e^{2x} - (x+1)e^{x}$

$= 2x(x+1)e^{2x} - (x+1)e^{x}$

$= (2xe^{x} - 1)(x+1)e^{x}$

$= x+1 \;\; g(x)e^{x}$.

b) f '(x) est sous la forme d'un produit de facteurs dont on considére les signes :
On a : $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Pour tout nombre réel x, $e^{x} > 0$.
$\forall x \in]-\infty; \alpha[$, $g(x) < 0$, $\forall x \in]\alpha ;+\infty[$, $g(x) > 0$ et $g(\alpha) = 0$.
On a $0{,}35 < \alpha < 0{,}36$ et $-1 < \alpha$. D'où le tableau de signe ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit du tableau que : $\forall x\in]-\infty\,;-1[\cup]\alpha\,;+\infty[,\ f'(x)>0$, $\forall x\in]-1\,;\alpha[\ f'(x)<0$ et
$f'(-1)=f'(\alpha)=0$

c) $\forall x\in]-\infty\,;-1[\cup]\alpha\,;+\infty[,\ f'(x)>0$
Donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]\alpha\,;+\infty[$.
Par ailleurs, $\forall x\in]-1\,;\alpha[,\ f'(x)<0$
Donc f est strictement décroissante sur $]-1;\alpha[$.

d) On a : $f(\alpha)=\alpha^2e^{2\alpha}-\alpha e^{\alpha}$, $g(\alpha)=0$ avec $g(\alpha)=\alpha e^{\alpha}-1$.

Donc, $\quad \alpha e^{\alpha}=\dfrac{1}{2}$

Par suite, $f(\alpha)=\alpha^2e^{2\alpha}-\alpha e^{\alpha}$

$$=(\alpha e^{\alpha})^2-\alpha e^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-2}+e^{-1}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1)=e^{-2}+e^{-1}$ et $f(\alpha)=-\dfrac{1}{4}$

4. **a)** $f(0)=0^2e^{2\times0}-0\times e^{0}$; $f(0)=0$.

b) f est continue et strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

$f(]\alpha ;+\infty[) =]f(\alpha) ; \lim_{x\to+\infty} f(x)[$

$=]-\frac{1}{4} ;+\infty[.$

Donc, f réalise une bijection de $]\alpha ;+\infty[$ vers $]-\frac{1}{4} ;+\infty[$.

On a $0 \in]-\frac{1}{4} ;+\infty[$

Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]\alpha ;+\infty[$.

c) Vérification : $f(0,56) \approx -0,19$ et $f(0,57) \approx 0,0079$

$f(0,56)$ et $f(0,57)$ sont de signes contraires, donc $0,56 < \beta < 0,57$.

d) f est continue et strictement croissante sur $]-\infty ;-1]$.

On a $f(]-\infty ;-1]) =]0; e^{-2}+e^{-1}]$ donc $\forall x \in]-\infty ;-1]$, $f(x) \in]0; e^{-2}+e^{-1}]$

Il s'ensuit que $f(x) > 0$.

f est strictement décroissante sur $[-1 ;\alpha[$.

Donc $-1 \le x < 0$ implique $f(x) > f(0)$. Or $f(0) = 0$ donc $f(x) > 0$.

$0 < x < \alpha$ implique $f(x) < f(0)$ donc $f(x) < 0$.

f est strictement décroissante sur $[\alpha ;+\infty[$.

$\alpha \le x < \beta$ implique $f(x) < f(\beta)$. Or $f(\beta) = 0$ donc $f(x) < 0$

$x > \beta$ implique $f(x) > f(\beta)$ donc $f(x) > 0$

En définitive, $\forall x \in]-\infty ;0[\cup]\beta ;+\infty[$, $f(x) > 0$, $\forall x \in]0 ;\beta[$, $f(x) < 0$ et $f(0) = f(\beta) = 0$.

5. La tangente (T) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

On a $f'(0) = (0+1)g(0)e^{0}$; $f'(0) = -1$ et $f(0) = 0$.

Par suite, (T) a pour équation $y = -x$.

Partie C

1. $s(0) = 0$ et $t(0) = 0$.

2. *Première méthode.*

Pour tout nombre réel non nul x, $s(x) = xe^{2x} - xe^{x}$

$= xe^{x}(e^{x}-1)$

Considérons le signe de chacun des facteurs du produit ci-dessus :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0,$

De plus, $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

Par ailleurs, $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$

$\Leftrightarrow x > 0.$

Donc, $e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0.$

De ce qui précède, on a le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
e^x	$+$		$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$s(x)$	$+$	0	$+$

Il résulte du tableau de signe que pour tout nombre réel non nul x, $s(x) > 0$.

Deuxième méthode.

$\forall x < 0$, $2x < x$ donc $e^{2x} < e^x$.

$x e^x < x e^{2x}$ car $x < 0$

$x e^{2x} - x e^x > 0.$

Par suite, pour tout $x < 0$, $s(x) > 0$.

Par ailleurs, $\forall x > 0$, $2x > x$ donc $e^{2x} > e^x$.

$x e^{2x} > x e^x$ car $x > 0$

$x e^{2x} - x e^x > 0.$

Donc, pour tout $x > 0$, $s(x) > 0$.

En définitive, pour tout nombre réel non nul x, $s(x) > 0$.

3. Pour tout nombre réel x, $t'(x) = xe^x$.

Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$.

Par suite $x < 0$ implique $x e^x < 0$ et $x > 0$, $x e^x > 0$

Donc, $\forall x < 0$, $t'(x) < 0$ et $\forall x > 0$, $t'(x) > 0$.

Par conséquent, t est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et t est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

t est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

$\forall x \in]-\infty\,;0[$, $x < 0$ donc $t(x) > t(0)$. Or $t(0) = 0$ alors $t(x) > 0$

t est strictement croissante sur $]0 ;+\infty[$.

$\forall x \in]0 ;+\infty[$ $x > 0$ donc $t(x) > t(0)$ alors $t(x) > 0$

En définitive, pour tout nombre réel non nul x, $t(x) > 0$.

4. $s(x) > 0$ donc $x\,e^{2x} > x\,e^{x}$

$t(x) > 0$ donc $x\,e^{x} > e^{x} - 1$

Par suite, $e^{x} - 1 < xe^{x} < xe^{2x}$

5. **a)** $h(0) = 0$

b) On a pour tout nombre réel non nul x, $x\,e^{2x} > e^{x} - 1$ donc $x\,e^{2x} - e^{x} + 1 > 0$.
Par s'ensuit que, $h(x) > 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - t(x) = x^2\,e^{2x} - x\,e^{x} + x$

$$= x(x\,e^{2x} - e^{x} + 1)$$
$$= xh(x)$$

Pour tout nombre réel non nul x, $h(x) > 0$

Donc : $\forall x<0$, $xh(x) < 0$ et $\forall x > 0, xh(x) > 0$.

Par suite, $\forall x < 0, f(x) - t(x) < 0$

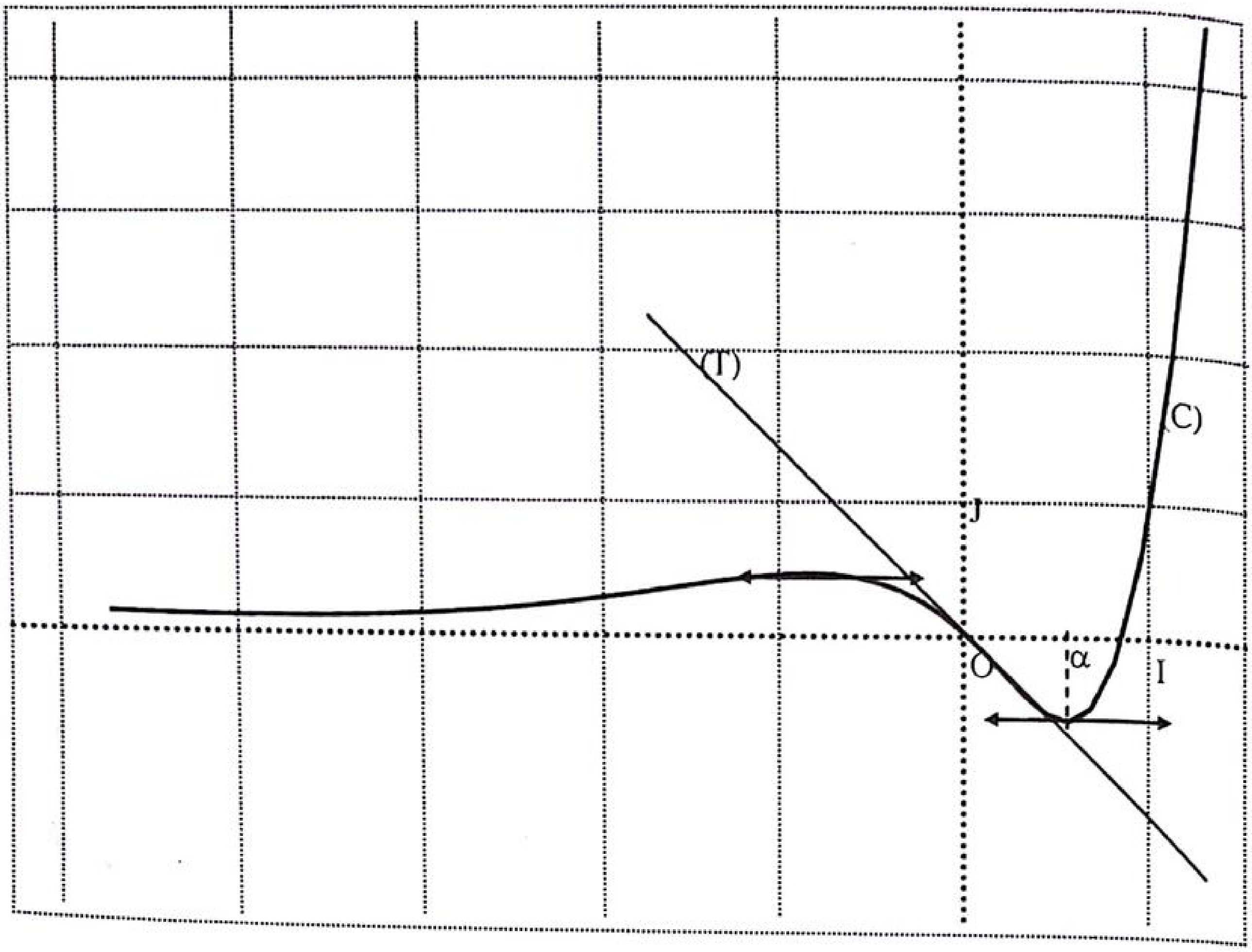
On en déduit que (C) est en dessous de (T) sur $]-\infty ; 0[$.

Ensuite, $\forall x>0, f(x) - t(x) > 0$.

On en déduit que (C) est au dessus de (T) sur $]0 ; +\infty[$.

$h(0) = 0$ implique $f(0) - t(0) = 0$. Donc, les (C) et (T) se coupent au point d'abscisse 0.

d) Tracé de (T) et de (C).



DEVOIR N° 8

EXERCICE 1

1. $f(0) = 0$.
Donc O est invariant par f

2. Soit z un nombre complexe différent de $\frac{1}{2}i$, $f(z) = i \Leftrightarrow \frac{iz}{2z-i} = i$

$$\Leftrightarrow \quad iz = i(2z-i)$$
$$\Leftrightarrow \quad iz = 2iz + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -iz = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad z = i.$$

Donc, l'image du point A par f est le point A.

3. **a)** Pour z différent de $\frac{1}{2}i$, $z' - i = \frac{iz}{2z-i} - i$

$$= \frac{iz - 2iz + i^2}{2z-i}$$
$$= \frac{-iz + i^2}{2z-i}$$
$$= \frac{-i(z-i)}{2z-i}.$$

b) $z' - i = \frac{-i(z-i)}{2z-i} \Rightarrow \frac{z'-i}{z-i} = \frac{-i}{2z-i}$

$$\Rightarrow -\frac{z'-i}{z-i} = \frac{iz}{(2z-i)z}$$

$$\Rightarrow -\frac{z'-i}{z-i} = \frac{\frac{iz}{(2z-i)}}{z}$$

$$\Rightarrow -\frac{z'-i}{z-i} = \frac{z'}{z}.$$

4. Pour z n' étant pas imaginaire,

$$\frac{z'}{z} = -\frac{z'-i}{z-i} \Rightarrow \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\left(-\frac{z'-i}{z-i}\right) + 2k\pi\ ;\ k \in Z$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z'-0}{z-0}\right) = \arg(-1) + \arg\left(\frac{z'-i}{z-i}\right) + 2k\pi\ ;\ k \in Z$$

$$\Rightarrow \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM'}}) = \pi + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM'}}) + 2k\pi\ ;\ k \in Z$$

$$\Rightarrow \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM'}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM'}}) + (2k+1)\pi\ ;\ k \in Z$$

$$\Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM'}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM'}})$$

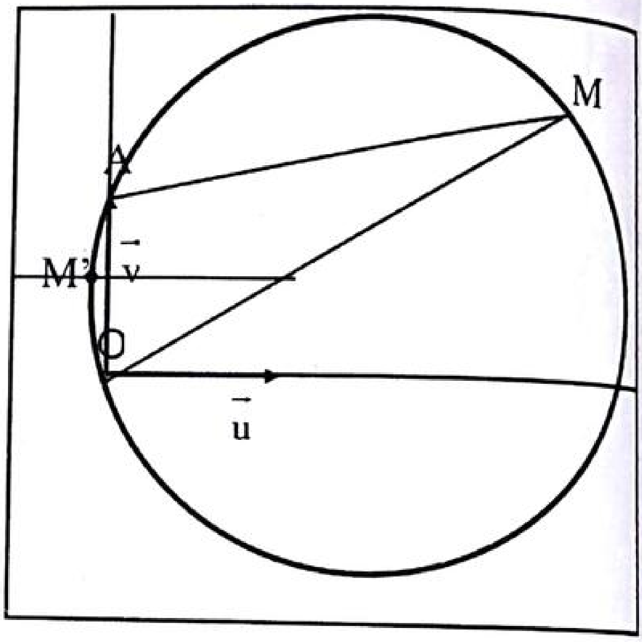
Puisque les points O et A appartiennent à l'axe imaginaire et M n'appartient à l'axe imaginaire alors les Points O, A et M ne sont pas alignés.
On peut conclure que les points O, A, M et M' sont cocycliques.

5. **a)** Pour M $\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i\right)$,

On a M' $\left(-\frac{5}{58} + \frac{31}{58}i\right)$

b) O, A, M et M' sont cocycliques.
Donc M' appartient à l'intersection du cercle circonscrit au triangle OAM et à la droite d'équation $y = \frac{31}{58}$

(avec $\frac{31}{58} \approx 0,53$) et l'abscisse de M' est négative.



EXERCICE 2

1. **a)** Il existe des entiers p et q tels que : a = a'd et b = b'd.
Il s'ensuit que $(a'd)^2 + (b'd)^2 = 801$ donc $d^2(a'^2 + b'^2) = 801$.
Par conséquent, d est un diviseur de 801.
Par ailleurs, d divise a et b donc d divise m.
De ce qui précède, d est un diviseur commun à 801 et 120.
Puisque les diviseurs communs (dans $\mathbb{N}$) à 801 et 120 sont 1 et 3 donc les valeurs possibles de d sont le

b) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ donc $(a+b)^2 = 801 + 2md$.

Pour d = 1, $(a+b)^2 = 801 + 240 = 1041$.

Or 1041 n'est pas un carré parfait donc d ne peut être égal à 1.

Pour $d = 3$, $(a+b)^2 = 1521$ donc $a+b = 39$.

Déterminons a et b sachant que $a > b$, PGCD $(a ; b) = 3$ et $a+b = 39$.

Puisque : $a = 3a'$ et $b = 3b'$, on résoud le système $\begin{cases} \text{PGCD}(a';b') = 1 \\ a' + b' = 13. \end{cases}$

Il s'ensuit que les couples (a, b) tels que $a > b$ sont : (36, 3), (33, 6), (30 ,9), (27 ,12), (24 ,15) et (21,18).

2. **a)** On a : $a = a'd$ et $b = b'd$ donc $ab = a'b'\,d^2$.

Or $ab = md$ donc $m = a'b'd$.

Puisque $2m+3d = 78$ alors $d\,(2a'b' + 3) = 78$.

Donc $2a'b' + 3$ est diviseur de 78.

On a $a' \geq 1$ et $b' \geq 1$ donc $a'b' \geq 1$, $2a'b'+3 \geq 5$.

De plus, $2a'b'+3 = 2(a'b'+1)+1$. Par conséquent, $2a'b'+3$ est impair.

b) Les diviseurs de 78 sont : 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39 et 78.

Comme : $a > b$ alors $a' > b'$.

Ce qui conduit à un seul couple (a', b') qui est (5 ,1)

Il en résulte que d'une part : $2a'b'+3 = 13$ et $d = 6$

On en déduit le couple (a, b) qui est : (30, 6).

D'autre part, $2a'b'+3 = 39$ et $d = 2$

On en déduit les couples (a, b) qui sont : (36, 2) et (18, 4).

On conclut que les couple (a, b) recherchés sont : (30, 6), (36, 2) et (18, 4).

PROBLEME

Partie A

1. Pour tout nombre réel x,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(e^x + e^{-x}) + (1-x)(e^x - e^{-x}) + 2e^{-x} \\ &= -e^x - e^{-x} + e^x - e^{-x} - x(e^x - e^{-x}) + 2e^{-x} \\ &= -x(e^x - e^{-x}) \\ &= -x(e^{2x} - 1)e^{-x} \end{aligned}$$

$$g'(x) = x(1 - e^{2x})e^{-x}.$$

2. Considérons le signe de chacun des facteurs du produit $x(1-e^{2x})e^{-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} > 0,$

On a : $1 - e^{2x} = 0 \iff e^{2x} = 1$

$\iff x = 0$

Par ailleurs, $1-e^{2x}>0 \Leftrightarrow e^{2x}<1$

$\Leftrightarrow x<0$. Donc, $1-e^{2x}<0 \Leftrightarrow x>0$

On a le tableau de signe ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$1-e^{2x}$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$-$	

Il en découle que: $\forall x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $g'(x)<0$ et $g'(0)=0$.
On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. $g(0)=0$ et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in]-\infty;0[$, $x<0$ donc $g(x)>g(0)$. Or $g(0)=0$ d'où $g(x)>0$.
Par ailleurs : $\forall x \in]0;+\infty[$, $x>0$ donc $g(x)<g(0)$ d'où $g(x)<0$
Par conséquent : $\forall x \in]-\infty;0[$, $g(x)>0$ et $\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x)<0$.

Partie B

1. $$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-e^{-x}}{x}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1+1+e^{-x}}{x}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}}$$

On a $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to0}(-x)=0$ implique $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=1$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}}=\frac{1}{2}$

Par suite, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)= \frac{1}{2}$. Or $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)= f(0)$.

On en déduit que la fonction f est continue en 0 .

Complément : Autre manière de calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{e^{2x}-1}{e^x}} .$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\frac{e^{2x}-1}{x}} .$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} (2x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$.

Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\frac{e^{2x}-1}{e^x}} = \frac{1}{2}$

Par suite, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$

2. $\forall x \in IR^*, -x \in IR^*$ et $f(-x) = \frac{-x}{e^{-x} - e^{-(-x)}}$

$$= \frac{-x}{-(e^x - e^{-x})}$$

$$= \frac{x}{e^x - e^{-x}} .$$

Donc $f(-x) = f(x)$.

En définitive : $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = f(x)$ de plus, $f(-0) = f(0)$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ donc f paire.

Interprétation graphique : (C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{xe^x}}.$$

On a $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$

Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Donc, $\lim_{x\to+\infty} (\frac{e^x}{x} - \frac{x}{xe^x}) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{xe^x}} = 0$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Interprétation graphique : L'axe des abscisses est asymptote à (C) en $+\infty$.

4. Pour tout nombre réel non nul x, $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x} - x(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$

$$= \frac{e^x - e^{-x} - xe^x - xe^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x} - xe^x - xe^{-x} + e^{-x} - e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(1-x)e^x + (1-x)e^{-x} - 2e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$$

5. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(e^x - e^{-x})^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) < 0$.

Par suite : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) < 0$.

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Partie C

1. $\forall x \in]0;1]$, $h'(x) = f'(x) - x$.

2. **a)** $\forall x \in]0;1]$, $f'(x) < 0$, $x > 0$ et $-x < 0$ donc $f'(x) - x < 0$
Il s'ensuit que $h'(x) < 0$.

b) $h(0) = 0$.

3. $\forall$ x $\in]0\,;1]$, $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]0\,;1]$.
On a h continue et strictement décroissante sur $]0\,;1]$
$h(\,]0\,;1]\,) = [\,h(1)\,;h(0)\,[$.
Or $h(0) = 0$ donc $h(\,]0\,;1]\,) = [\,h(1)\,;0\,[$.
Par suite, $\forall$ x $\in]0\,;1]$, $h(x) \in [\,h(1)\,;0\,[$.
Il en découle que $h(x) < 0$.

On a : $\forall$ x $\in]0\,;1]$, $h(x) = f(x) - \dfrac{1+x^2}{2}$.

Puisque $h(x) < 0$ alors $f(x) - \dfrac{1+x^2}{2} < 0$

$$f(x) < \frac{1+x^2}{2}.$$

4. **a)** $\forall x \in]0\,;1]$, $f(x) < \dfrac{1+x^2}{2}$ et $\dfrac{1-x^2}{2} < f(x)$ donc $\dfrac{1-x^2}{2} < f(x) < \dfrac{1+x^2}{2}$

b) $\forall$ x $\in]0\,;1]$, $\dfrac{1-x^2}{2} < f(x) < \dfrac{1+x^2}{2}$

$$\frac{-x}{2} < \frac{f(x) - f(0)}{x-0} < \frac{x}{2}.$$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{x}{2} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(-\dfrac{x}{2}\right) = 0$

Par suite, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.

On en déduit que f est dérivable à droite en 0.

Donc, $f_d'(0) = 0$.

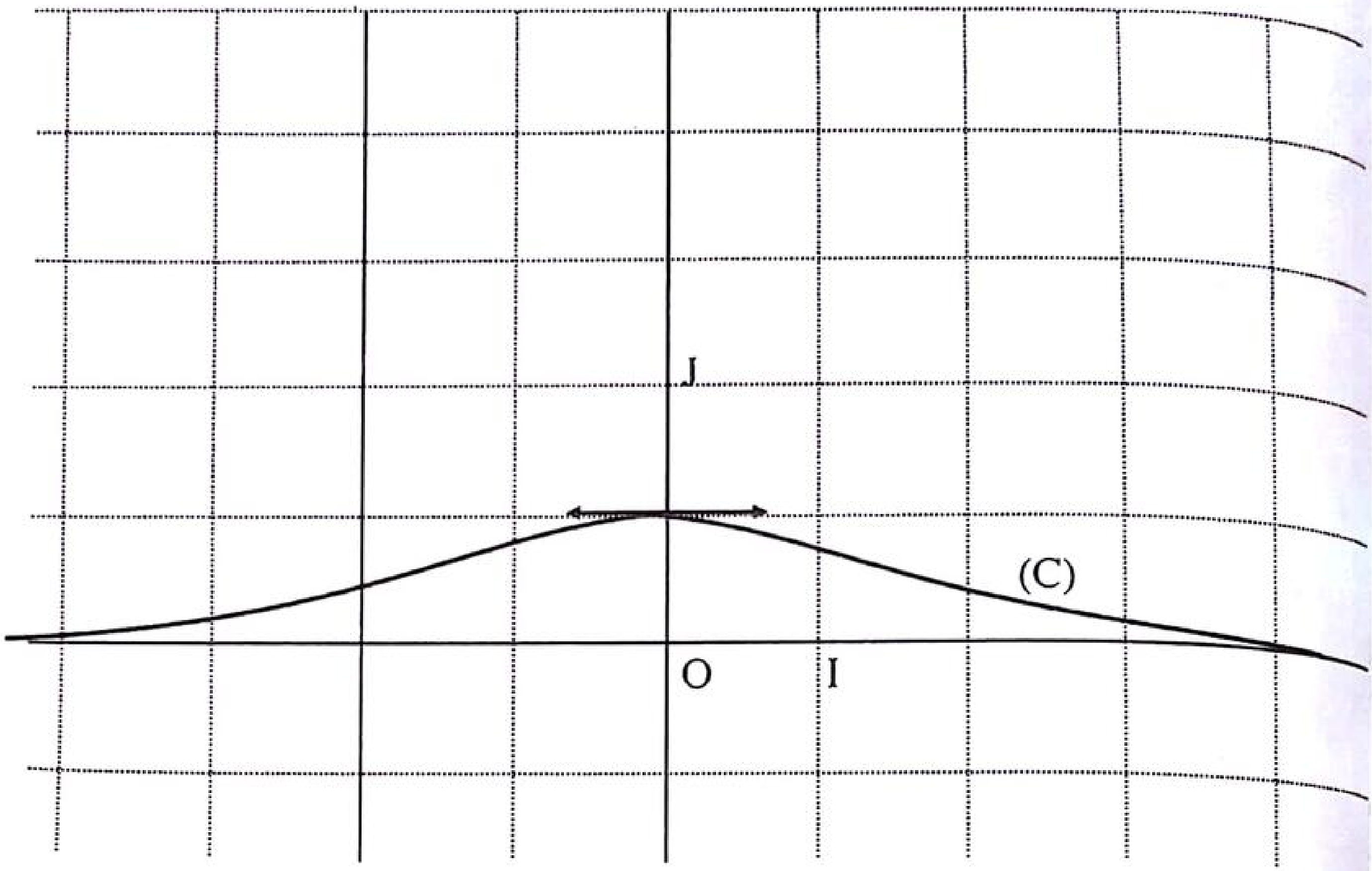
Interprétation graphique : La courbe (C) admet à droite au point d'abscisse 0 une demi tangente horizontale.

Partie D

1. Tableau de variation de f sur son en ensemble de définition.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

2. Figure



DEVOIR N° 9

EXERCICE 1

1. Le discriminant $\Delta = 20$ donc, les solutions de l'équation (1) sont : $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

2. $$(z_0 + \frac{1}{z_0})^2 + z_0 + \frac{1}{z_0} - 1 = z^2_0 + 2 + \frac{1}{z^2_0} + z_0 + \frac{1}{z_0} - 1$$

$$= 1 + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{-\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}}$$

De plus, $-\frac{4\pi}{5}$ et $\frac{6\pi}{5}$ sont des mesures d'un même angle orienté.

Il en est de même de $-\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$

Il s'ensuit que,

$$(z_0 + \frac{1}{z_0})^2 + z_0 + \frac{1}{z_0} - 1 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}}$$

$$= 1 + z_0 + z^2_0 + z^3_0 + z^4_0.$$

3. Laissé au soin du lecteur.

4. $z_0^5 - 1 = (z_0 - 1)(1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4)$

Or $z_0^5 = 1$ donc $z_0^5 - 1 = 0$

Par conséquent $(z_0 - 1)(1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4) = 0$

De plus $z_0 \neq 1$,

par suite, $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$.

5. $$1 + z_0 + z^2_0 + z^3_0 + z^4_0 = 1 + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{-\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}}$$

$$= 1 + 2\cos(\frac{4\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5})$$

$$= 4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1.$$

Or, $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$

Donc, $4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0.$

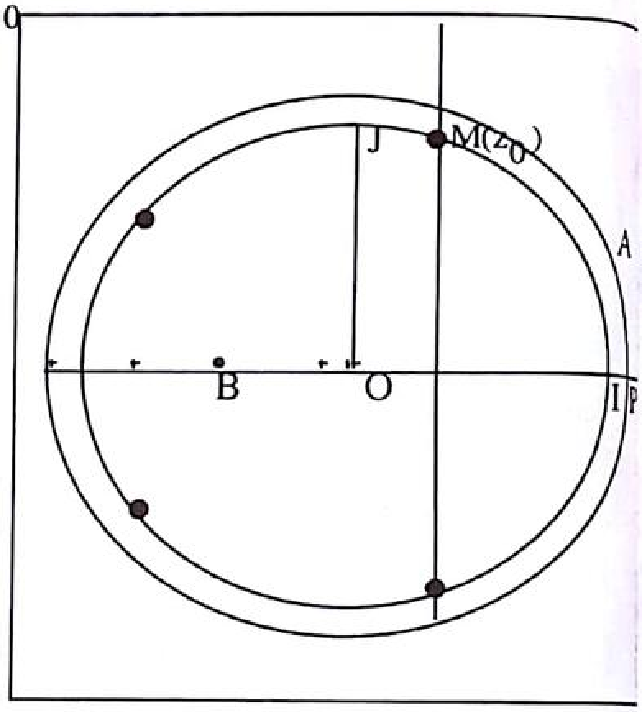
Ce qui permet de dire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ vérifie l'équation (1).

Par ailleurs, les solutions de l'équation (1) sont : $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

avec $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} < 0.$

De plus $\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{2} < 0;\ 0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc, $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$

Par suite $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$



II)

1. Voir figure

2. a) On a $B\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $P\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

Donc, le milieu du segment [BP] est le point d'affixe

$\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{2}$ c'est-à-dire $\cos\frac{2\pi}{5}$.

b) Voir figure.

EXERCICE 2

1. Déterminer le nombre de manières de ranger 5 pions, à raison d'un pions par case, revient à déterminer le nombre de combinaisons de 5 éléments dans un ensemble à 16 éléments.

Par conséquent, on obtient C_{16}^{5}, soit 4368 répartitions possibles.

2. Ranger deux pions au plus sur une même ligne revient à avoir :
Premier cas : deux pions sur une même ligne et un pion sur chacune des autres lignes
Deuxième cas : deux lignes comportant chacune deux pions et une ligne comportant un pion.

Dans le premier cas :

Le nombre de manières de choisir une ligne comportant deux pions et trois lignes comportant un pion chacune est $C_4^1 \times C_3^3$

Pour chacune de ces manières, on a $C_4^2 \times C_4^1 \times C_4^1 \times C_4^1$ possibilités de placer les pions.

Il en résulte $C_4^1 \times C_3^3 \times C_4^2 \times C_4^2 \times C_4^1$, soit 1536 manières.

Dans le deuxième cas :

Le nombre de manières de choisir les deux lignes comportant deux pions et la ligne comportant un pion est $C_4^2 \times C_2^1$.

Pour chacune de ces manières, nous avons $C_4^2 \times C_4^2 \times C_4^1$ possibilités de placer les pions.

Donc, $C_4^2 \times C_2^1 \times C_4^2 \times C_4^2 \times C_4^1$, soit 1728 manières.

En définitive, on a 1536 + 1728, soit 3264 manières possibles.

Par suite, la probabilité d'avoir deux pions au plus par case est $\frac{3264}{4368}$, soit $\frac{68}{91}$.

PROBLEME

Partie A

1.

a) $$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} (x^{\frac{1}{n}})^n \times [\ln((x^{\frac{1}{n}})^n)]^n.$$

$$= \lim_{t\to 0} t^n \times [\ln(t^n)]^n$$

$$= \lim_{t\to 0} n^n \times (t \ln t)^n .$$

On a $\lim_{t\to 0} t \ln t = 0$; $\lim_{t\to 0} (t \ln t)^n = 0$; $\lim_{t\to 0} n^n \times (t \ln t)^n = 0$

Donc, $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$.

Or, $f_n(0) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} f_n(x) = f_n(0)$.

Par suite, f_n est continue en 0.

b) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x(\ln x)^n}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (\ln x)^n .$$

Si n est pair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln x)^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = +\infty$.

Si n est impair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln x)^n = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = -\infty$.

Par conséquent, pour tout n entier naturel non nul, f_n n'est pas dérivable à droite en 0.

Donc, la courbe (C_n) admet à droite au point d'abscisse 0 une demi– tangente verticale.

c) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln x)^n$

$= +\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x(\ln x)^n}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^n$.

$= +\infty$

Interprétation graphique: Pour tout n entier naturel non nul, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty$

Donc, la courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. **a)** $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, x \in]0 ; +\infty[$, $f'_n(x) = (\ln x)^n + n\,x\,\dfrac{1}{x}\,(\ln x)^{n-1}$

$= (\ln x)^n + n(\ln x)^{n-1}$

$= (n + \ln x)(\ln x)^{n-1}$.

b) Si n est non nul et pair alors $n-1$ est impair.

Donc, $x > 1$ implique $\ln(x) > 0$ et $(\ln x)^{n-1} > 0$

$0 < x < 1$ implique $\ln x < 0$ et $(\ln x)^{n-1} < 0$.

c) Déterminons le tableau de signe de la dérivée.

On a, $n + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -n$.

$\Leftrightarrow x = e^{-n}$;

$n + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -n$.

$\Leftrightarrow x > e^{-n}$, on en déduit que $n + \ln x < 0 \Leftrightarrow x < e^{-n}$

Premier cas : n est pair , n −1 est impair . On la tableau de signe de $f'_n(x)$ ci-dessous.

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$n+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(\ln x)^{n-1}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où le tableau de variations de f_n

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$(\frac{-n}{e})^n$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f_n(e^{-n}) = (\frac{-n}{e})^n$, $f_n(1)=0$

Deuxième cas : n est impair , n−1 est pair et $\forall\ x \in\ ]0\ ;+\infty[\ \backslash\{\ 1\ \}$, $\ln(x) \neq 0$ donc $(\ln x)^{n-1} > 0$

Pour $x = 1$, $(\ln x)^{n-1} = 0$.

Il s'ensuit le tableau de signe de $f'_n(x)$

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$n+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(\ln x)^{n-1}$		$+$		$+$	0	$+$	
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

D'où le tableau de variations de f_n

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
f_n f(x)	0	$\searrow$	$(\frac{-n}{e})^n$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f_n(e^{-n}) = (\frac{-n}{e})^n$, $f_n(1)=0$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$f_n(0) = 0$ donc le point O appartient à (C_n) ;

$f_n(1) = 0$ donc le point I (1 ; 0) appartient à (C_n) ;

Enfin, $f_n(e) = e$ donc le point A(e ; e) appartient à (C_n).

4. **a)** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x > 0$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x\,(\ln x)^{n+1} - x\,(\ln x)^n$

$$= x\,(\ln x)^n\,(\ln x - 1)$$

$$= x\,(\ln x)^n\,(-1 + \ln x)$$

On a $-1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1.$

$\Leftrightarrow x = e$,

Par ailleurs, $-1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1.$

$\Leftrightarrow x > e$, donc $-1 + \ln x < 0 \Leftrightarrow x < e$

Premier cas : n pair

Pour n pair et $\forall x \in]0 ;+\infty[\setminus \{1\}$, $(\ln x)^n > 0$

Par suite le tableau de signe suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$-1+\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln x)^n$	‖	$+$	0	$+$		$+$	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	

Il résulte que: $\forall x \in]0 ;1[\cup]1 ;e[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$

D'où (C_{n+1}) est en dessous de (C_n) sur $]0 ;1[$ et sur $]1 ;e[$

Par ailleurs, $\forall x \in]e ;+\infty[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$

Donc, (C_{n+1}) est au dessus de (C_n) sur $]e ;+\infty[$

Enfin, les deux courbes se coupent au points I et A.

Deuxième cas : n impair.

$\forall x \in]0 ;1[$, $\ln x < 0$ donc $(\ln x)^n < 0$;

$\forall x \in]1; +\infty[$, $\ln x > 0$ donc $(\ln x)^n > 0$.

Par suite, on a le tableau de signe suivant.

x	0		1		e		$+\infty$
$-1+\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln x)^n$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Du tableau il ressort que : $\forall x \in]0\,;1[\cup]e\,;+\infty[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$.

D'où , (C_{n+1}) est au dessus de (C_n) sur $]0\,;1[$ et sur $]e\,;+\infty[$.

Par ailleurs, $\forall x \in]1\,;e[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$.

Par conséquent, (C_{n+1}) est au dessus de (C_n) sur $]1\,;e[$.

Enfin , les deux courbes se coupent aux points I et A.

5. **a)** 1 est impair donc le tableau de f_1 est le suivant :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	$\searrow$	$\dfrac{-1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2 est pair donc le tableau de f_2 est le suivant :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) f_1 est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{3}{2};2\right[$

On a $f_1\left(\left]\frac{3}{2};2\right[\right) = \left]\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2};2\ln 2\right[$.

Donc, f_1 réalise une bijection de $\left]\frac{3}{2};2\right[$ sur $\left]\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2};2\ln 2\right[$.

On a $\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} \approx 0{,}6$ et $2\ln 2 \approx 1{,}38$ donc $1 \in \left]\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2};2\ln 2\right[$.

Il s'ensuit que l'équation $f_1(x) = 1$ admet une solution unique α dans $\left]\frac{3}{2};2\right[$.

c) f_1 est strictement croissante sur $\left]\frac{3}{2};2\right[$ donc sur $\left]\frac{3}{2};\alpha\right[$.

$\forall x \in \left]\frac{3}{2};\alpha\right[$, $x < \alpha$ donc $f_1(x) < f_1(\alpha)$.

Puisque $f_1(\alpha) = 1$ alors $f_1(x) < 1$.

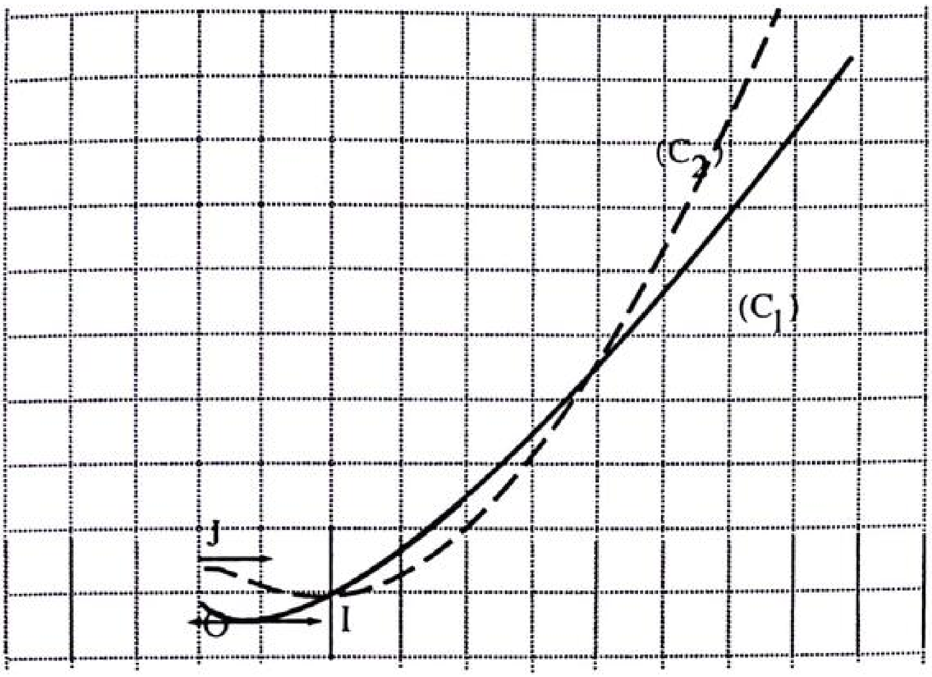
Par ailleurs, f_1 est strictement croissante sur $]\alpha;2[$

$\forall x \in]\alpha;2[$, $x > \alpha$ donc $f_1(x) > f_1(\alpha)$.

Or $f_1(\alpha) = 1$ alors $f_1(x) > 1$.

En définitive : $\forall x \in \left]\frac{3}{2};\alpha\right[$, $f_1(x) < 1$ et $\forall x \in]\alpha;2[$, $f_1(x) > 1$.

6. Tracé de (C_1) et (C_2)



Partie B :

1. **a)** On a $f_1(\alpha) = 1$

Or $f_1(\alpha) = \alpha\ln(\alpha)$ donc $\alpha\ln(\alpha) = 1$.

Par ailleurs, $g(\alpha) = \dfrac{1+\alpha}{1+\ln\alpha}$

$$= \frac{(1+\alpha)\alpha}{\alpha+\alpha\ln\alpha}$$

$$= \frac{(1+\alpha)\alpha}{\alpha+1}.$$

$$= \alpha.$$

b) $\forall x \in [\frac{3}{2}; 2]$, $g'(x) = \dfrac{1+\ln x - (1+x)\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}$.

$$= \frac{f_1(x)-1}{x(1+\ln x)^2}$$

c) $\forall x \in [\frac{3}{2} ; 2]$, $x > 0$, donc $x(1+\ln x)^2 > 0$;

$\forall x \in [\frac{3}{2} ; \alpha[$, $f_1(x) < 1$ donc $f_1(x) - 1 < 0$

et $x \in]\alpha ; 2[$, $f_1(x) > 1$ donc $f_1(x) - 1 > 0$.

Par conséquent, $\forall x \in [\frac{3}{2} ; \alpha[$, $\frac{f_1(x) - 1}{x(1+\ln x)^2} < 0$, qui conduit à $g'(x) < 0$.

Et, $\forall x \in [\alpha ; 2[$, $\frac{f_1(x) - 1}{x(1+\ln x)^2} > 0$, qui conduit à $g'(x) > 0$

Il s'ensuit le tableau de variation ci – dessous.

x	$\frac{3}{2}$		α		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{5}{2(1+\ln\frac{3}{2})}$	$\searrow$	α	$\nearrow$	$\frac{3}{1+\ln 2}$

g est continue et strictement décroissante sur $[\frac{3}{2} ; \alpha]$.

$$g([\frac{3}{2} ; \alpha]) = [\alpha ; \frac{5}{2(1+\ln\frac{3}{2})}]$$

On a $\frac{5}{2(1+\ln\frac{3}{2})} \approx 1{,}77$ et $\alpha \in]\frac{3}{2} ; 2[$

Donc $[\alpha ; \frac{5}{2(1+\ln\frac{3}{2})}] \subset [\frac{3}{2} ; 2]$.

Par ailleurs, g est continue et strictement croissante sur $[\alpha ; 2]$.

$g([\alpha\ ;2]) = [\alpha\ ; \dfrac{3}{1+\ln 2}]$. On a $\dfrac{3}{1+\ln 2} \approx 1,77$.

Donc $[\alpha\ ; \dfrac{3}{1+\ln 2}] \subset [\dfrac{3}{2}\ ;2]$.

Par suite, $[\dfrac{3}{2}\ ; 2] = [\dfrac{3}{2}\ ;\alpha] \cup [\alpha\ ;2]$

Donc, $g([\dfrac{3}{2}\ ; 2]) = g([\dfrac{3}{2}\ ; \alpha\ ]) \cup g([\alpha\ ;2\ ])$.

On en déduit que $g([\dfrac{3}{2}\ ; 2]) \subset [\dfrac{3}{2}\ ; 2\ ]$.

2. a) f_1 est strictement croissante sur $[\dfrac{3}{2}\ ;2]$

Donc, $\dfrac{3}{2} \leq x \leq 2$ implique $1-f_1(2) \leq 1-f_1(x) \leq 1-f_1(\dfrac{3}{2})$;

On a : $1-f_1(2) \approx -0,38$ et $1-f_1(\dfrac{3}{2}) \approx 0,39$

Par conséquent, $\left|1-f_1(x)\right| \leq 1-f_1(\dfrac{3}{2})$.

En définitive, pour tout nombre réel appartenant à I, $\left|f_1(x)-1\right| \leq 1-f_1(\dfrac{3}{2})$.

On a $x \geq \dfrac{3}{2}$ implique $\ln x \geq \ln\dfrac{3}{2}$ et $1+\ln x \geq 1+\ln\dfrac{3}{2}$.

Or $\dfrac{3}{2} > 1$, $\ln\dfrac{3}{2} > 0$ d'où $1+\ln\dfrac{3}{2} > 0$.

Il s'ensuit que $x(1+\ln x)^2 \geq \dfrac{3}{2}(1+\ln\dfrac{3}{2})^2$.

b) Pour tout $x \in I$, $|g'(x)| = \dfrac{|f_1(x)-1|}{x(1+\ln x)^2} = |f_1(x)-1| \times \dfrac{1}{x(1+\ln x)^2}$.

On a $x(1+\ln x)^2 \geq \dfrac{3}{2}(1+\ln\dfrac{3}{2})^2 > 0$.

Donc $\dfrac{1}{x(1+\ln x)^2} \leq \dfrac{2}{3(1+\ln\dfrac{3}{2})^2}$.

On a montré à la question a) que $|1-f_1(x)| \leq 1-f_1(\dfrac{3}{2})$.

Avec l'inégalité précédente, on obtient $|f_1(x)-1| \times \dfrac{1}{x(1+\ln x)^2} \leq (1-f_1(\dfrac{3}{2})) \times \dfrac{2}{3(1+\ln\dfrac{3}{2})^2}$.

Par suite, $|g'(x)| \leq \dfrac{2(1-f_1(\frac{3}{2}))}{3(1+\ln\frac{3}{2})^2}$.

Comme $\dfrac{2(1-f_1(\frac{3}{2}))}{3(1+\ln\frac{3}{2})^2} \leq 0{,}13$ donc $|g'(x)| \leq 0{,}13$.

3. g est dérivable sur $[\dfrac{3}{2};2]$ et $\forall x \in [\dfrac{3}{2};2]$, $|g'(x)| \leq 0{,}13$.

Puisque $\alpha \in [\dfrac{3}{2};2]$ alors, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$\forall x \in [\dfrac{3}{2};2]$, $|g(x)-g(\alpha)| \leq 0{,}13|x-\alpha|$.

Sachant que $g(\alpha) = \alpha$ alors $|g(x)-\alpha| \leq 0{,}13|x-\alpha|$.

4. **a)** $U_0 = 2$ donc $U_0 \in [\dfrac{3}{2};2]$.

Supposons que pour un entier naturel $k>0$, $U_k \in [\dfrac{3}{2};2]$.

On a : $U_{k+1} = g(U_k)$ et $g(U_k) \in g([\dfrac{3}{2};2])$

Comme $g([\frac{3}{2};2]) \subset [\frac{3}{2};2]$ alors $U_{k+1} \in [\frac{3}{2};2]$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [\frac{3}{2};2]$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [\frac{3}{2};2]$.

Puisque : $\forall x \in [\frac{3}{2};2]$, $|g(x)-\alpha| \leq 0{,}13|x-\alpha|$ alors $|g(U_n)-\alpha| \leq 0{,}13|U_n-\alpha|$.

De plus, $g(U_n) = U_{n+1}$.

Donc, $|U_{n+1}-\alpha| \leq 0{,}13|U_n-\alpha|$.

5. **a)** On a $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2$; $-2 \leq -\alpha \leq -\frac{3}{2}$,

$$2-2 \leq 2-\alpha \leq 2-\frac{3}{2}$$

Or $U_0 = 2$ alors $0 \leq U_0 - \alpha \leq \frac{1}{2}$

Il s'ensuit que, $|U_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}$

Sachant que $(0{,}13)^0 = 1$ et $|U_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}\times 1$ alors $|U_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}\times(0{,}13)^0$.

Supposons que pour un entier naturel $k > 0$, $|U_k-\alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}13)^k$.

On a par la question 4b) que $|U_{k+1}-\alpha| \leq 0{,}13|U_k-\alpha|$.

Par conséquent, $|U_{k+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}\times(0{,}13)^{k+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}13)^n$.

b) On a : $-1 < 0{,}13 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(0{,}13)^n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(0{,}13)^n = 0$.

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}\times(0{,}13)^n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$.

6. **a)** U_p est une valeur approchée de α à 10^{-2} près si $| U_p - \alpha | \leq 10^{-2}$.

Puisque, $| U_p - \alpha | \leq \frac{1}{2} \times (0,13)^p$, il suffit que $\frac{1}{2} \times (0,13)^p \leq 10^{-2}$.

On a $\frac{1}{2} \times (0,13)^p \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{2} \times (0,13)^p) \leq \ln(10^{-2})$.

$$\Leftrightarrow -\ln 2 + p\ln(0,13) \leq -2\ln 10$$
$$\Leftrightarrow p\ln 0,13 \leq -2\ln 10 + \ln 2.$$
$$\Leftrightarrow p \geq \frac{-2\ln 10 + \ln 2}{\ln(0,13)}$$ car $0 < 0,13 < 1$ implique $\ln(0,13) < 0$.

De plus, $\frac{-2\ln 10 + \ln 2}{\ln(0,13)} \approx 1,917$.

Par conséquent, $p = 2$.

b) On vérifie que : $U_p = 1,771$.

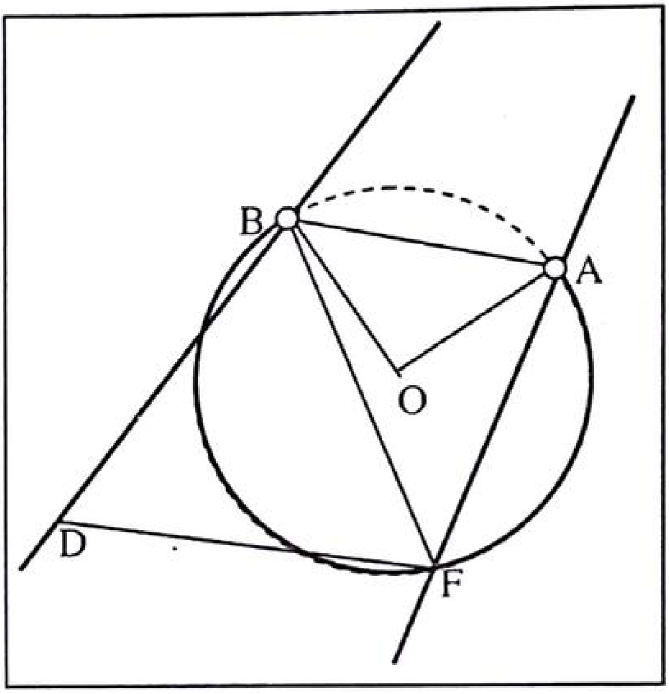
DEVOIR N° 10

EXERCICE 1

1. Soit O le point de la médiatrice de [AB] tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$.

Il s'ensuit que le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.

Donc l'ensemble des points M tels que $\text{Mes}\ (\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{4}$ est l'arc AB privé des points A et B .



2. D'après la relation de Chasles,

$$(\widehat{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{BD}}) = (\widehat{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{BF}}) + ((\widehat{\overrightarrow{BF};\overrightarrow{BD}})$$
$$= (\widehat{\overrightarrow{FA};\overrightarrow{FB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BF};\overrightarrow{BD}})$$

Le triangle BDF est équilatéral de sens direct.

Donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BF};\overrightarrow{BD}}) = -\frac{\pi}{3}$.

Par ailleurs, F appartient à (Γ) donne

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FA};\overrightarrow{FB}}) = \frac{\pi}{4}$.

Par conséquent une mesure de l'angle orienté

$(\widehat{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{BD}})$ est $-\frac{\pi}{12}$

EXERCICE 2

1. a) O milieu de [AB] et (Δ) médiatrice de [AB]

On a $\overrightarrow{AB}\,(-2\alpha\ ;-2\beta\ )$ et $\overrightarrow{OM}\,(x\ ;y)$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{OM} = 0$

$\Leftrightarrow -2\alpha\, x - 2\beta y = 0$

$\Leftrightarrow\ y = -\frac{\alpha}{\beta}x.$

b) $y_C = -\alpha$ et $x_C = \beta$ donc, $z_C = x_C + i\ y_C = \beta + i(-\alpha)$.

Par suite, $z_C = -ia$

2. $\dfrac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = -i.$

ABC est donc un triangle rectangle isocèle en C et de sens direct.

3. $OA = |a| = r$; $OB = |a| = r$; $OC = |a| = r$.

Par conséquent, $OA = OB = OC = r$

Donc, (Γ) est le cercle de centre O et de rayon r.

4. $z'_A = \dfrac{(1+i)a^2 - ia^2 + ia^2}{ai - a}$

Par suite $z'_A = -ia$

Donc $f(A) = C$

$z'_C = \dfrac{(1+i)(-ia)^2 - ia(-ia) + ia^2}{ai + ia}$.

Il s'ensuit que : $z'_C = ia$.

Par conséquent $f(C) = C'$ où C' est le symétrique de C par rapport à O.

5. $$z' - a = \frac{(1+i)z^2 - iaz + ia^2}{ai - z} - a$$

$$= \frac{(1+i)z^2 - iaz + ia^2 - ia^2 + az}{ai - z}$$

$$= \frac{(1+i)z^2 + az(1-i)}{ai - z}$$

$$= \frac{(1+i)z^2 - aiz\ (1+i)}{ai - z}$$

$$= \frac{(z - ai)(1+i)z}{ai - z}$$

$$= -(1+i)\,z.$$

6. a) $A \in (\Gamma)$ et $f(A) = C$ donc $z_C - a = -(1+i)z_A$

Par suite, $|z_C - a| = |(1+i)\ z_A|$ donc, C appartient à (Ψ)

b) $N \in (\psi) \Leftrightarrow |z'_M - a| = |(1+i)\ z_M|$

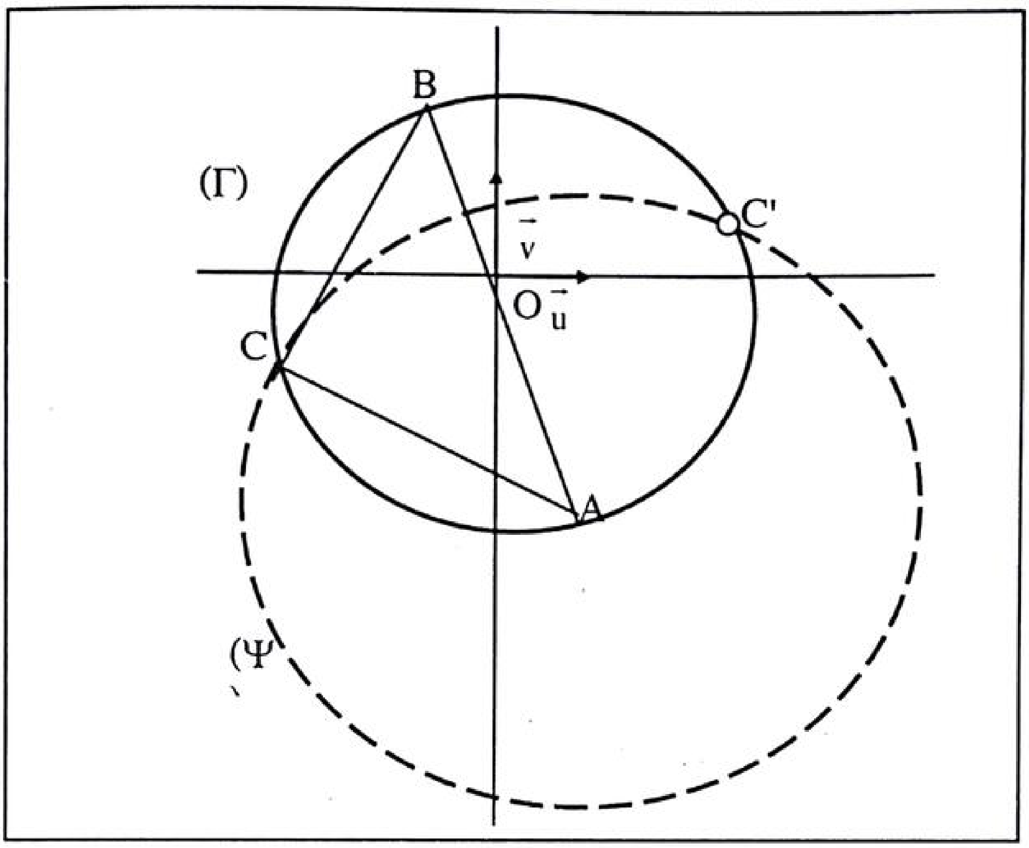
$\Leftrightarrow |z_N - a| = |1+i|\,|z_M|$

$\Leftrightarrow AN = r\sqrt{2}$.

De plus, $C \in (\Gamma)$, f n'est pas définie pour $z = z_{C'}$ et $| z_{C'} - a | = | (1 + i) z_C |$

Par conséquent, (Ψ) est le cercle ce centre A et de rayon $r\sqrt{2}$, privé du point C'.

7. Figure



PROBLEME

Partie A

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -e^{-x} + xe^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (x-1)e^{-x}$.

2. $\forall x \in IR$, $e^{-x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$

$\forall x < 1$, $x - 1 < 0$ donc $g'(x) < 0$

Il s'ensuit que g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1[$.

$\forall x > 1$, $x - 1 > 0$ donc $g'(x) > 0$

Par suite, g est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.

Tableau de variation de g : $g(1) = 1 - \frac{1}{e}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$1 - \frac{1}{e}$	$\nearrow$	

3. $1 - \frac{1}{e}$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 1 - \frac{1}{e}$.

On a : $e > 2$; $\frac{1}{e} < \frac{1}{2} < 1$

D'où $\quad 1 - \frac{1}{e} > 0$

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

<u>Partie B</u>

1. Soit D_f l'ensemble de définition de g.

$x \in D_f \Leftrightarrow 1 - xe^{-x} \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad g(x) > 0$

$1 - xe^{-x} > 0$

Donc, $1 - xe^{-x} \neq 0$.

On en déduit que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - xe^{-x}}$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (-xe^{-x}) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - xe^{-x}) = +\infty$

Par suite, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - xe^{-x}} = 0$

Par conséquent, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Par ailleurs, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - xe^{-x}}$.

On a $\lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} (-xe^{-x}) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} (1 - xe^{-x}) = 1$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - xe^{-x}} = 1$

Il s'ensuit que, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Interprétation graphique:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc, l'axe des abscisses est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

3. **a)** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^{-x}}{(1 - xe^{-x})^2}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $(1 - xe^{-x})^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

$\forall x < 1$, $1 - x > 0$ donc $f'(x) > 0$

Par suite, f est strictement croissante sur $]-\infty ; 1[$.

$\forall x > 1$, $1 - x < 0$ donc $f'(x) < 0$

Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$.

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

$$f(1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e - 1}$$

4. **a)** La tangente à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

On a : $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$.

On en déduit que : $y = x + 1$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) - x - 1 = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}} - x - 1$

$$= \frac{1 - (1 - xe^{-x})(x + 1)}{1 - xe^{-x}}$$

$$= \frac{x e^{-x}(x + 1 - e^{x})}{1 - xe^{-x}}.$$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = -e^{x} + x + 1\ ;\quad h'(x) = 1 - e^{x}.$

On a : $\quad 1 - e^{x} = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

Par ailleurs, $\ 1 - e^{x} > 0 \Leftrightarrow e^{x} < 1$

$\Leftrightarrow x < 0$.

On en déduit que : $1 - e^{x} < 0 \Leftrightarrow x > 0.$

Par conséquent, $\forall x < 0,\ 1 - e^{x} > 0$

$h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]-\infty\ ;0[$.

Par ailleurs, $\forall x > 0,\ 1 - e^{x} < 0,\ h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]0\ ;+\infty[$.
Vérifier que $h(0) = 0$
On a h strictement croissante sur$]-\infty\ ;0[$.
Donc, $x < 0$ implique $h(x) < h(0)$ .Comme $h(0) = 0$ alors $h(x) < 0$.
Par ailleurs, h est strictement décroissante sur $]0\ ;+\infty[$.
Donc, $x > 0$ implique $h(x) < h(0)$. On en déduit que $h(x) < 0$.
Finalement : $h(0) = 0$ et $\forall x \in IR\backslash\{0\}$, $h(x) < 0$.

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x - 1 = \dfrac{x e^{-x} h(x)}{1 - xe^{-x}}.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$ et $1 - x e^{-x} > 0$ donc le signe de $f(x) - x - 1$ dépend du signe de celui de x et de h(
.

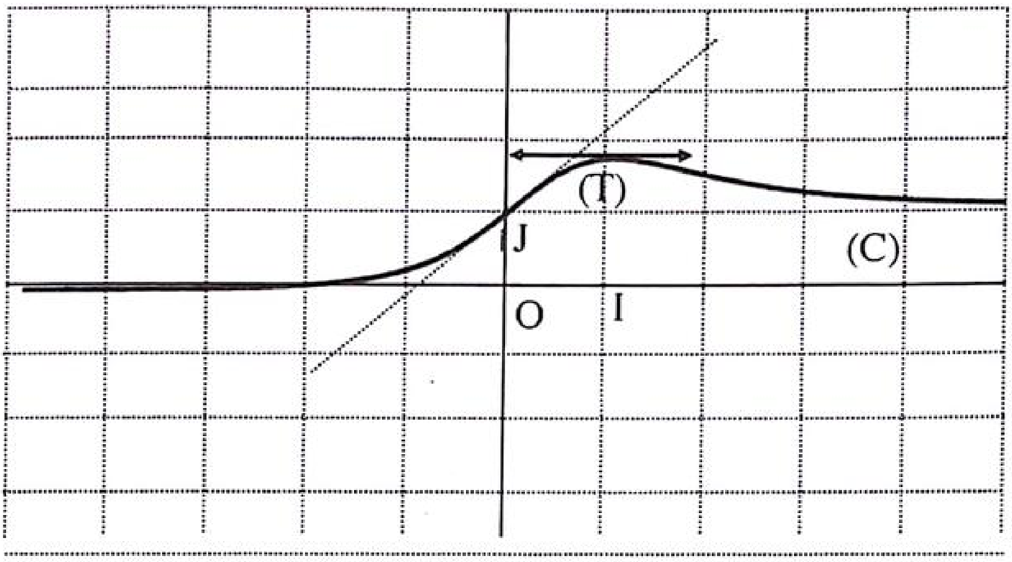
D'après la réponse à la question précédente, $h(0) = 0$ et $\forall x \in IR\backslash\{0\}$, $h(x) < 0$.

Considérons le tableau de signe ci –dessous :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$-e^{x} + x + 1$	$-$	0	$-$
$f(x) - x - 1$	$+$	0	$-$

On déduit du tableau ci-dessus que : $\forall\ x \in]-\infty ; 0[$, $f(x) - x - 1 > 0$
Donc, (C) est au dessus de (T) sur $]-\infty ; 0[$
$\forall\ x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) - x - 1 < 0$.
Donc (C) est en dessous de (T) sur $]0 ; +\infty[$.
Enfin, (C) et (T) se coupent au point d'abscisse 0.

5. Tracé de (C).



Partie C

1. D'après la partieA3), pour tout $x \in]0 ; 1[$, $1 - xe^{-x} > 0$ et $xe^{-x} > 0$ donc, $0 < xe^{-x} < 1$.
2. a) $(f_n(x))$ est la somme des n premiers termes consécutifs de la suite géométrique de raison xe^{-x} différent de 1 et de premier terme 1.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{1 - x^n e^{-nx}}{1 - xe^{-x}}$

$$= \frac{1}{1 - xe^{-x}} - \frac{x^n e^{-nx}}{1 - xe^{-x}}.$$

$$= f(x) - \frac{x^n e^{-nx}}{1 - xe^{-x}}.$$

b) Pour $x \in]0 ; 1[$, $x > 0$.
On a $e^{-x} > 0$ donc $xe^{-x} > 0$.
On en déduit que, $0 < x^n e^{-nx}$.

Par suite, $0<1-xe^{-x}$ implique $\dfrac{x^n e^{-nx}}{1-xe^{-x}}>0$

$$f(x)-\frac{x^n e^{-nx}}{1-xe^{-x}}<f(x)$$

Donc,
$$f_n(x)<f(x).$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1} x^k e^{-kx}$ et $f_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k e^{-kx}$

Donc, $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k e^{-kx}-\sum_{k=0}^{n-1} x^k e^{-kx}$

$$= x^n e^{-nx}+\sum_{k=0}^{n-1} x^k e^{-kx}-\sum_{k=0}^{n-1} x^k e^{-kx}$$

$$= x^n e^{-nx}.$$

Comme $0< x^n e^{-nx}$ alors $f_{n+1}(x)-f_n(x)>0.$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x)>f_n(x).$

Par conséquent, la suite ($(f_n(x))_{n\geq 1}$ est strictement croissante et majorée donc, elle converge.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0<(xe^{-x})^n<1$

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n e^{-nx}=\lim\limits_{n\to+\infty}(xe^{-x})^n=0.$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-xe^{-x})=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n e^{-nx}}{1-xe^{-nx}}=0.$

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=f(x)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{x^n e^{-nx}}{1-xe^{-nx}}\right)=f(x).$

En définitive, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x).$

DEVOIR N° 11

EXERCICE 1

1. $1^3 = j^3 = \bar{j}^3 = 1$

   1 admet exactement trois racines cubiques donc, les racines cubiques de 1 sont 1, j et $\bar{j}$

2. $(aj)^3 = a^3 j^3 = a^3$ et $(a\bar{j})^3 = a^3 \bar{j}^3 = a^3$

   Par suite, $(aj)^3 = (a\bar{j})^3 = a^3 = A$.

   Par conséquent, les racines cubiques de A sont a, aj et $a\bar{j}$.

3. $$\begin{aligned}(1+i)^3 &= (1+i)(1+i)^2\\ &= (1+i)(2i)\\ &= -2+2i\end{aligned}$$

4. Les solutions de l'équation $z^3 = -2 + 2i$ sont les racines cubiques de $-2+2i$

   $(1+i)^3 = -2+2i$

   Donc, $1 + i$ est une racine cubique de $-2+2i$.

   On déduit de la question 2) que les racines cubiques de $-2+2i$ sont : $1+i$, $(1+i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ et $(1+i)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$.

   On a, $(1+i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

   $(1+i)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

   Il s'ensuit que les racines cubiques de $-2+2i$ sont : $1+i$, $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE 2

1. Voir figure

2. a) $r_1 \circ r_2$ est la composée de deux rotations de centres distincts dont la somme des angles est $\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$. Donc $r_1 \circ r_2$ est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Par la suite $r_1 \circ r_2 \circ r_3$ est la composée deux rotations dont la somme des angles est $\widehat{\frac{2\pi}{3}} - \widehat{\frac{2\pi}{3}} = \hat{0}$.

Il en résulte que f est une translation.

b) C'BA triangle équilatéral de sens direct et de centre H donc $r_3(B) = A$.

De plus B'AC est un triangle équilatéral de sens direct et de G donc $r_2(A) = C$.

Par suite C' BA est un triangle équilatéral de sens direct et de centre H.

Donc $r_1(C) = B$.

On déduit de ce qui précède que $f(B) = B$.

c) f est une translation et $f(B) = B$ donc f est la translation de vecteur nul.
Il s'ensuit que f est l'application identique

3. $f = r_1 \circ r_2 \circ r_3$ et $f = I_d$ donc $r_1 \circ r_2 \circ r_3 = I_d$.

$r_1^{-1} \circ r_1 \circ r_2 \circ r_3 = r_1^{-1} \circ I_d$ où r_1^{-1} est la réciproque de r_1

On obtient $r_2 \circ r_3 = r_1^{-1}$.

Donc $r_2 \circ r_3$ est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

4. a) (D_1) est l'image de (GH) par la rotation de centre G et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

(D_2) est image de (GH) par la rotation de centre H et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

b) $r_2 \circ r_3 = S_{(D_1)} \circ S \circ S \circ S_{(D_2)}$ donc $r_2 \circ r_3 = S_{(D_1)} \circ S_{(D_2)}$.

$r_2 \circ r_3$ est une rotation de centre F.

Donc les droites (D_1) et (D_2) se coupent en F.

5. $r_2 = S_{(D_1)} o S_{(GH)}$

r_2 est la rotation de centre G donc $G \in (D_1)$.

Or $F \in (D_1)$ donc (D_1) est la droite (FG)

$r_3 = S_{(GH)} o S_{(D_2)}$

r_3 est la rotation de centre H donc $H \in (D_2)$.

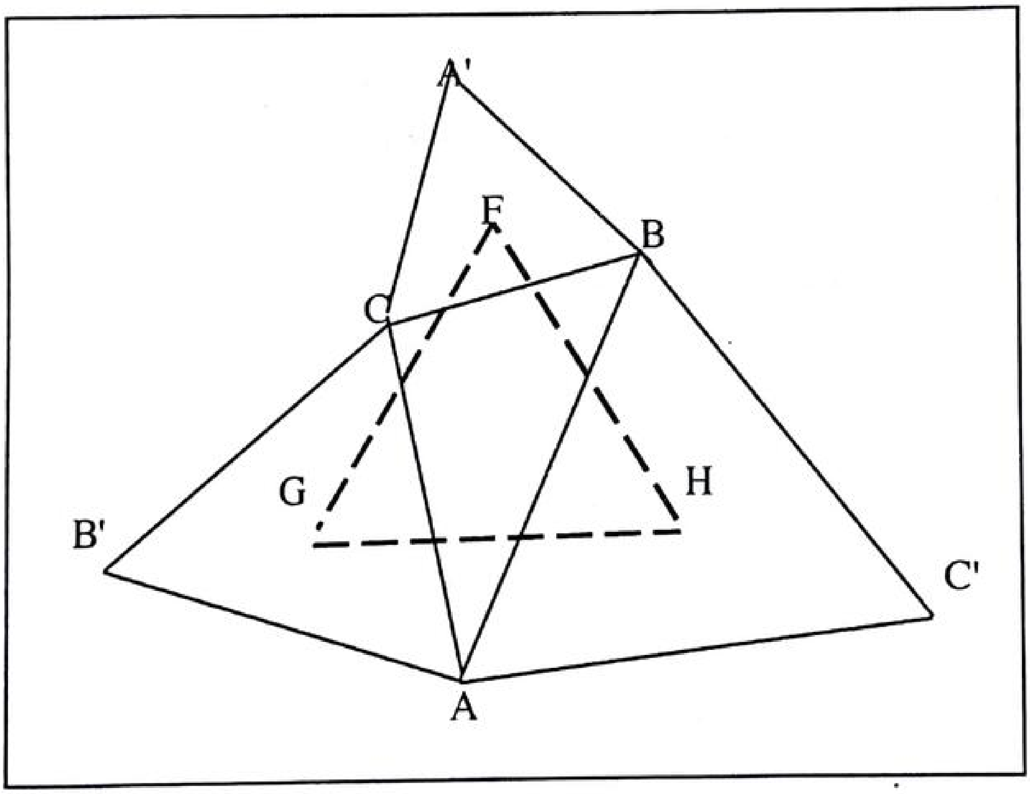
Puisque $F \in (D_2)$ alors (D_2) est la droite (FH)

6. $2\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{HF} ; \overrightarrow{HG}}) = \frac{2\pi}{3}$ implique $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{HF} ; \overrightarrow{HG}}) = \frac{\pi}{3}$ ou $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{HF} ; \overrightarrow{HG}}) = -\frac{2\pi}{3}$

$2\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{GH} ; \overrightarrow{GF}}) = \frac{2\pi}{3}$ implique $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{GH} ; \overrightarrow{GF}}) = \frac{\pi}{3}$ ou $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{GH} ; \overrightarrow{GF}}) = -\frac{2\pi}{3}$

Ceci suffit pour conclure que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{HF} ; \overrightarrow{HG}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{GH} ; \overrightarrow{GF}}) = \frac{\pi}{3}$. car la somme des mesures des angles non orientés dans un triangle est égale à π

Par conséquent, le triangle FGH est équilatéral direct.



PROBLEME

Partie A

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x(1-x^2)+1-2\ln x)$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x(1-x^2)+1-2\ln x)$

$= -\infty$.

2. **a)** Pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = 1 - x^2 - 2x^2 - \dfrac{2}{x}$

$$g'(x) = \frac{x(1-3x^2)-2}{x}.$$

On a : $x(1-3x^2)-2=(x+1)(-3x^2+3x-2)$

Donc, $g'(x) = \dfrac{(x+1)(-3x^2+3x-2)}{x}$.

b) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $x>0$, $x+1>0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $-3x^2+3x-2$.

$-3x^2+3x-2$ est l'expression d'un polynôme du second degré.

$\Delta = -13$ donc $\Delta < 0$. De ce fait, $-3x^2+3x-2$ est du signe de -3.

Par conséquent, $-3x^2+3x-2<0$.
On en déduit que $g'(x)<0$.
Il s'ensuit que la fonction g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

3. **a)** La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc sur $]1\,;+\infty[$.
Par suite, $g(\,]1\,;+\infty[\,) =]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\,;g(1)[$

$=]-\infty\,;1[$ car $g(1)=1$.
Comme $0 \in]-\infty\,;1[$ donc, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1\,;+\infty[$.

b) g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
Donc, $0<x<\alpha$ implique $g(x)>g(\alpha)$. Or $g(\alpha)=0$ donc $g(x)>0$.
Par ailleurs, $x>\alpha$ implique $g(x)<g(\alpha)$ donc $g(x)<0$.
En définitive, $\forall x \in]0\,;\alpha[$, $g(x)>0$ et $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[$, $g(x)<0$.

Partie B

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}(\frac{\ln x}{x} - (x-1)^2)$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}(\frac{1}{x}\ln x - (x-1)^2)$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-(x-1)^2) = -1$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\frac{1}{x}\ln x - (x-1)^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}(\frac{1}{x}\ln x - (x-1)^2) = -\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

Calculons la limite de f en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}(\frac{\ln x}{x} - (x-1)^2)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{2}\frac{\ln(x^2)}{x^2} - \frac{(x-1)^2}{x})$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{(x-1)^2}{x})) = -\infty$

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{2}\frac{\ln(x^2)}{x^2} - \frac{(x-1)^2}{x}) = -\infty$.

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a)** $\forall\ x \in]\,0\,;+\infty\,[$, $f(x) = \frac{1}{x}(\frac{\ln x}{x} - (x-1)^2)$

$= \frac{\ln x}{x^2} - \frac{x\,(x-1)^2}{x^2})$

$= \frac{-x\,(x^2 - 2x + 1)}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$

$$= -x + 2 - \frac{x}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$$

$$= -x + 2 + \frac{\ln x - x}{x^2}.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (-x+2)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$

Donc, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 0$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (-x+2)) = 0$

Par conséquent, la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$

3. **a)** Pour tout nombre réel x strictement positif, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{(x-1)^2}{x}$

Donc, $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} - \frac{2x(x-1) - (x-1)^2}{x^2}$$

$$= \frac{1 - 2\ln x}{x^3} - \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - 2\ln x - x^3 + x}{x^3}$$

$$= \frac{x(1 - x^2) + 1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{g(x)}{x^3}$$

b) $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

D'après la question 5 Partie A), $\forall x \in]0 ; \alpha[$, $g(x) > 0$, $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$ et $g(\alpha) = 0$

On en déduit que : $\forall x \in]0 ; \alpha[$, $f'(x) > 0$, $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $f'(x) < 0$ et $f'(\alpha) = 0$.

Tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

4. a) $f(1) = \frac{1}{1}\left(\frac{\ln 1}{1} - (1-1)^2\right)$.

$= 0$.

Par ailleurs, f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$.
$\alpha > 1$ implique $f(\alpha) > f(1)$. Puisque $f(1) = 0$ alors, $f(\alpha) > 0$.

b) f est continue et strictement décroissante sur $]\alpha ;+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]\alpha ;+\infty[$ sur $f(]\alpha ;+\infty[)$.

On a $f(]\alpha ;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) ; f(\alpha)[$

$=]-\infty ; f(\alpha)[$.

Puisque $f(\alpha) > 0$ alors $0 \in]-\infty ; f(\alpha)[$.
Il s'ensuit que, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]\alpha ;+\infty[$.

Partie C

1. a) $\forall x \in]0 ;+\infty[$, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

Par suite, $\forall x \in]0 ; 1[$, $h'(x) > 0$ et $\forall x \in]1 ;+\infty[$, $h'(x) < 0$
D'où le tableau de variation sans les limites aux bornes de l'ensemble de définition de h :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

b) -1 est le minimum de h sur $]0 ;+\infty[$.
Donc $\forall x \in]0 ;+\infty[$, $h(x) \leq -1$. On en déduit que $h(x) < 0$.

c) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) - (-x+2) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

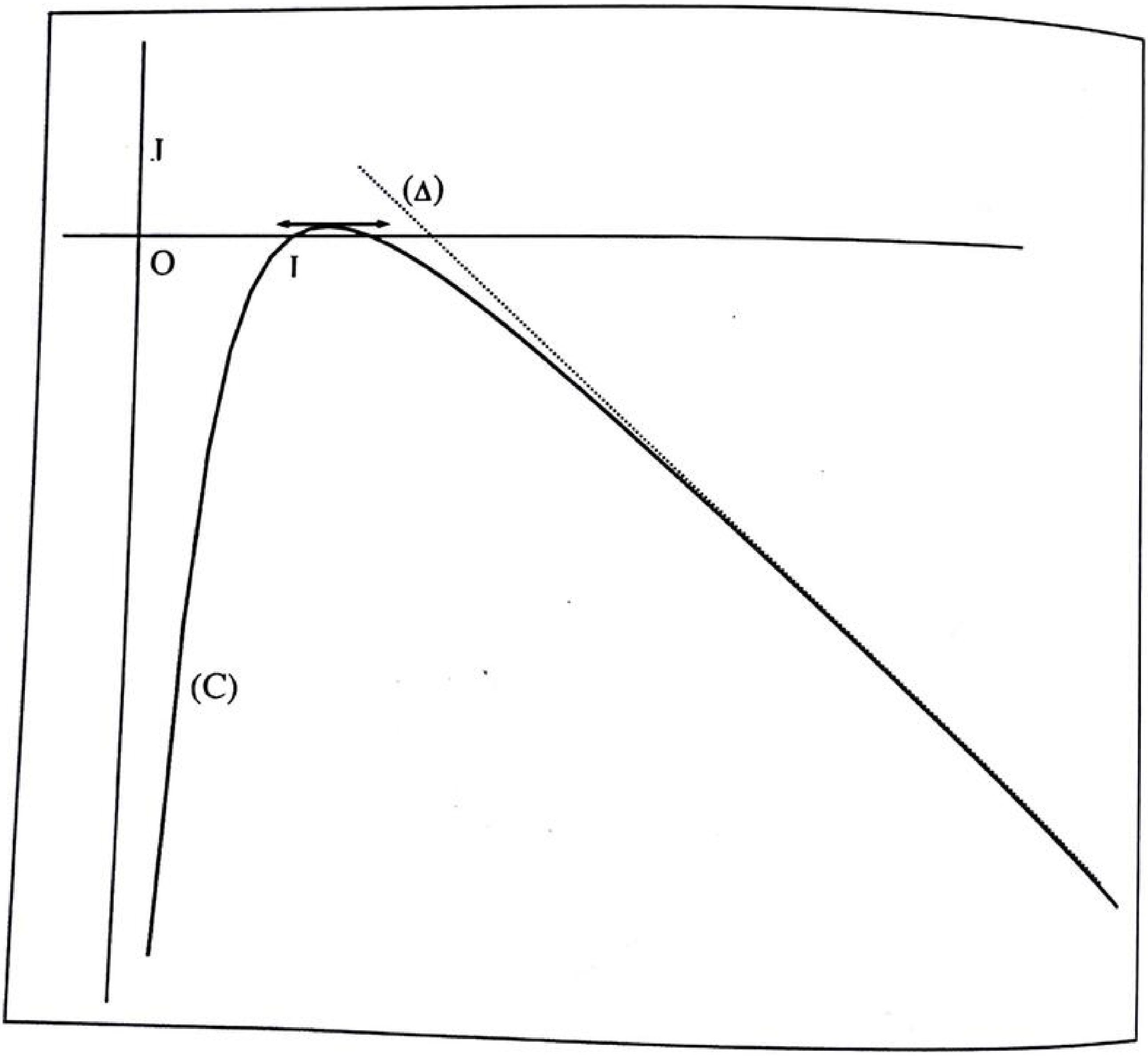
$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $x^2 > 0$ et $h(x) < 0$.

Donc, $\dfrac{h(x)}{x^2} < 0$.

Par conséquent, $f(x) - (-x+2) < 0$

Finalement (C) est en dessous de la droite (Δ) sur $]0\,;+\infty[$.

4. Tracé de (Δ) et de (C).



Partie D

1. La courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) donc, $A(\lambda) = \int_1^{\lambda} (-t+2) - f(t))\,dt$

$$= \int_1^{\lambda} \frac{t - \ln t}{t^2}\,dt.$$

2. $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $k'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.

3. $$A(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{t - \ln t}{t^2}\,dt$$

$$= \int_1^{\lambda} \frac{t - 1 + 1 - \ln t}{t^2}\,dt$$

$$= \int_1^{\lambda} \frac{t-1}{t^2}\,dt + \int_1^{\lambda} \frac{1-\ln t}{t^2}\,dt$$

$$= \int_1^{\lambda} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt + \int_1^{\lambda} \frac{1-\ln t}{t^2}\,dt.$$

En considérant la réponse à la question précédente, $\int_1^{\lambda} \frac{1-\ln t}{t^2}\,dt = \left[\frac{\ln t}{t}\right]_1^{\lambda}$.

Donc, $$A(\lambda) = \left[\ln(t) + \frac{1}{t}\right]_1^{\lambda} + \left[\frac{\ln t}{t}\right]_1^{\lambda}$$

$$= \ln\lambda + \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln\lambda}{\lambda} - 1$$

$$= \frac{\ln\lambda}{\lambda} + \ln\lambda + \frac{1}{\lambda} - 1.$$

4. On a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda} + \ln\lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right)$

Or, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{\ln\lambda}{\lambda} = 0$; $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda} = 0$; $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} (\ln\lambda - 1) = +\infty$.

Donc, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda} + \ln\lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right) = +\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = +\infty$.

DEVOIR N° 12

EXERCICE 1

1. a) $1+i+i^2+i^3 = 1+i-1-i$ donc $1+i+i^2+i^3 = 0$.

b) $i^4 = 1$; $i^{100} = (i^4)^{25}$ donc $i^{100} = 1$.

2. $\sum_{k=0}^{100} i^k = (1+i+i^2+i^3)+(1+i+i^2+i^3)i^4+\ldots+(1+i+i^2+i^3)i^{96}+i^{100}$

$= \sum_{k=0}^{24} (1+i+i^2+i^3)i^{4k} + i^{100}$.

Il résulte de la question précédente que : $\sum_{k=0}^{100} i^k = 1$.

EXERCICE 2

1. Voir figure

2. AFB est isocèle en F donc F appartient à la médiatrice de [AB].
De plus AJB isocèle en J permet de dire que J appartient à la médiatrice de [AB].
Par conséquent (JF) est la médiatrice de [AB].

On a $\mathrm{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}}) = -\frac{2\pi}{3}$ et $\mathrm{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JB}}) = \frac{2\pi}{3}$.

Donc $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FJ},\overrightarrow{FA}}) = \frac{\pi}{3}$ et $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JF}}) = \frac{\pi}{3}$.

On aboutit au fait que le triangle AFJ est équilatéral de sens direct.

D'une manière analogue, on montre que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FJ}}) = \frac{\pi}{3}$ et $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JF},\overrightarrow{JB}}) = \frac{\pi}{3}$.

Il en résulte que le triangle FBJ est équilatéral de sens direct.

3. a) f(F) = sor (F) = s (r (F)). AFJ est équilatéral de sens direct donc r(F) = J.
AFJ et FBJ équilatéraux donc AFBJ losange.
Donc la droite (AB) est la médiatrice du segment [FJ] d'où s (J) = F.
Par suite, f (F) = F.
On en déduit que F invariant par f.

b) f est la composée d'une rotation de centre A et de la symétrie orthogonale d'axe (AB).
Donc f est une symétrie orthogonale.
On a $f(F) = F$ et $f(A) = A$.
Par conséquent, f est la symétrie orthogonale d'axe (AF)

4. **a)** [AM] diamètre de (C_1) cercle de centre F donc $AM = 2AF$.

[AN] diamètre de (C_2) cercle de centre J donc $AN = 2AJ$.

On a $AJ = AF$ donc $AN = AM$.

Par ailleurs, $F \in [AM]$ et $J \in [AN]$ donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AF}}) = \frac{\pi}{3}$.

Puisque $AN = AM$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}}) = \frac{\pi}{3}$ alors $r(M) = N$.

$M \in (AF)$ donc $f(M) = M$
On a $s o r(M) = M$ donc $s(r(M)) = M$
Puisque $r(M) = N$ alors $s(N) = M$.

b) $B \in (C_1)$ d'où le triangle AMB triangle rectangle en B donc $(BM) \perp (AB)$ (1)

Par ailleurs $B \in (C_2)$ d'où ANB triangle rectangle en B donc $(BN) \perp (AB)$ (2).

Des relations (1) et (2), on déduit que les droites (BM) et (BN) sont parallèles.
Par conséquent les points M, B et N sont alignés.

5. $r(M) = N$ d'où AMN équilatéral.

$F \in [AM]$ et $B \in [MN]$ donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MF}}) = \frac{\pi}{3}$.

De plus $M \in (C_1)$ et $B \in (C_1)$ donc $FM = FB$.

Par suite le triangle MBF est équilatéral.
Comme les triangles MBF et FBJ sont équilatéraux alors le quadrilatère FMBJ est un losange.

Il s'ensuit que $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{FJ}$.
Par conséquent $t(M) = B$.

On a t translation de vecteur $\overrightarrow{FJ}$ donc $t(F) = J$. De plus, les cercles (C_1) et (C_2) sont de même rayon. Par conséquent (C_2) est l'image de (C_1) par t.

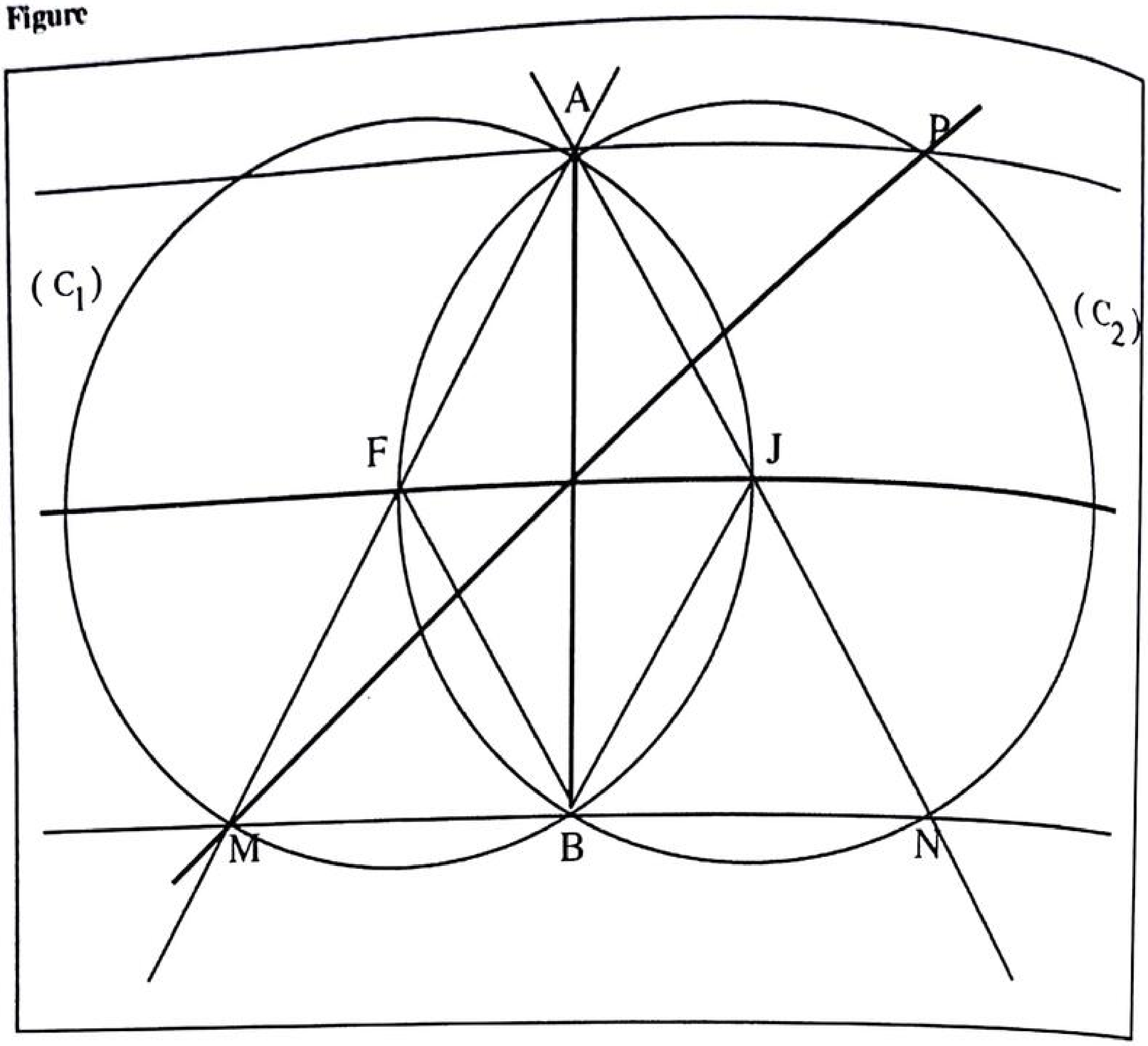
Par ailleurs $t(F) = J$ et $t(M) = B$ donc (JB) est l'image de (FM) par t.

De plus $\{A ; M\} = (FM) \cap (C_1)$, $\{B ; P\} = (JB) \cap (C_2)$ et $t(M) = B$

Par conséquent $t(A) = P$.

6. $t(A)=P$ et $t(M)=B$ donc $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MB}$ d'où AMBP est un parallélogramme
Les diagonales [AB] et [MP] se coupent en leur milieu.
On a montré à la question 3a) que AFBJ est un losange donc les diagonales [AB] et [FJ] se coupent en leur milieu. En définitive les droites (AB), (MP) et (FJ) sont concourantes.

Figure



PROBLEME

Parie A

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + x + 1)$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + x + 1) = -\infty$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

Par ailleurs,

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + x + 1) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x + 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. **a)** La fonction g est continue et strictement croissante $\mathbb{R}$. Donc, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Vérification de l'encadrement de α :

$g(-1{,}28) \approx -1{,}0019$ et $g(-1{,}27) \approx 1{,}0108$.

Comme $g(-1{,}28)$ et $g(-1{,}27)$ sont de signes contraires alors, $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$.

4. La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc, $x < \alpha$ implique $g(x) < g(\alpha)$. Puisque $f(\alpha) = 0$ alors $g(x) < 0$.

$x > \alpha$ implique $g(x) > g(\alpha)$. Alors $g(x) > 0$

En définitive, $\forall x \in]-\infty\,; \alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha\,; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1. **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1$

Par suite $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x}{e^x + 1} = 0$

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

b) Interprétation graphique : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{(1 + e^{-x})e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + e^{-x}}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$

Et, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1 + e^{-x}} = +\infty$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{xe^x}{e^x+1}-x\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x - x(e^x+1)}{e^x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{x}}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{x}} = 0$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$.

On en déduit que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Pour tout nombre réel x, $f(x) - x = \dfrac{-x}{e^x+1}$

$\forall x \in]-\infty\,;0[$, $\dfrac{-x}{e^x+1} > 0$ donc $f(x) - x > 0$.

On en déduit que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur $]-\infty\,;0[$.

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $\dfrac{-x}{e^x+1} < 0$ donc $f(x) - x < 0$.

Donc, la courbe (C) est en dessous de (Δ) sur $]0\,;+\infty[$.

Enfin, les (C) et (Δ) se coupent au point d'abscisse 0.

c) $f(\alpha) = \dfrac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}$ et $g(\alpha) = e^\alpha + \alpha + 1$.

Or, $g(\alpha) = 0$ donc $e^\alpha + 1 = -\alpha$

$$e^\alpha = -(\alpha+1)$$

Il s'ensuit que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha}$

$$= \alpha + 1.$$

3. **a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{(x+1)e^{x}(e^{x}+1) - xe^{x}e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$

$$= \frac{(xe^{x} + x + e^{x} + 1 - xe^{x})e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$$

$$= \frac{g(x)e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}.$$

b) Pour tout nombre réel x, $e^{x} > 0$ et $(e^{x}+1)^{2}$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

On en déduit que : $\forall x \in]-\infty\,;\alpha[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	0	$\searrow$	$\alpha+1$	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f(0) = \dfrac{0 \times e^{0}}{e^{0}+1} = 0$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha[$

$f(]-\infty\,;\alpha[) =]f(\alpha)\,;\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

$=]f(\alpha)\,;0[$

Par suite, $\forall x \in]-\infty\,;\alpha[$, $f(x) \in]f(\alpha)\,;0[$. On en déduit que $f(x) < 0$

Par ailleurs, f est strictement croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

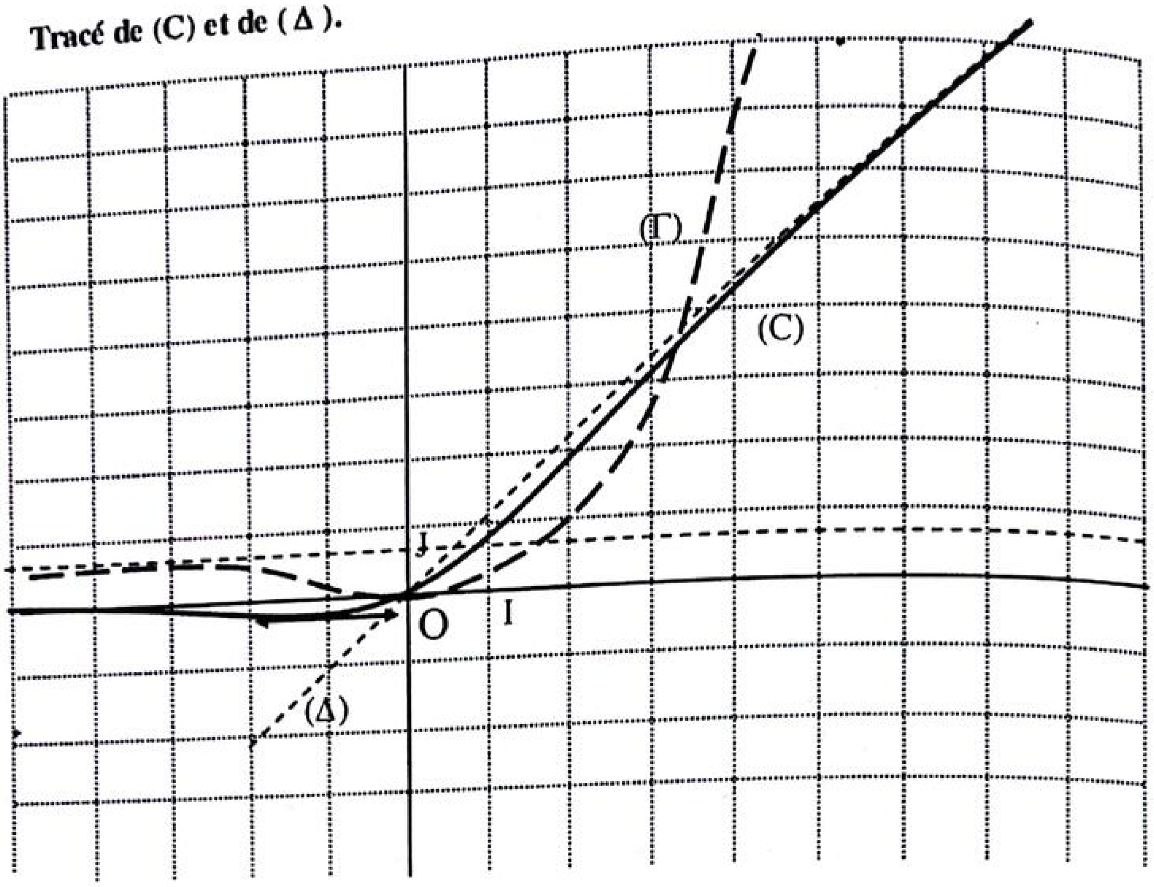
Comme $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$ alors $\alpha < 0$.

Il s'ensuit que, $\alpha < x < 0$ implique $f(x) < f(0)$. Or $f(0) = 0$ donc $f(x) < 0$

$x > 0$ implique $f(x) > f(0)$ donc $f(x) > 0$.

En définitive, $\forall x \in]-\infty\,;0[$, $f(x) < 0$ et $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) > 0$.

9. Tracé de (C) et de (Δ).



Partie C

1. a) $\forall t \in [\,0\,;+\infty\,[$, $t \geq 0$, $1 \leq e^t$, $e^t + 1 \leq e^t + e^t$ donc $0 < e^t + 1 \leq 2\,e^t$.

Donc, $\frac{1}{2} \leq \frac{e^t}{e^t + 1}$

Par suite, $t \geq 0$ implique $\frac{t}{2} \leq \frac{te^t}{e^t + 1}$

Par conséquent, $\forall t \in [\,0\,;+\infty\,[$, $\frac{t}{2} \leq f(\,t\,)$.

b) $\forall t \in [\,0\,;+\infty\,[$, $\frac{t}{2} \leq f(\,t\,)$

Donc, pour tout nombre réel x positif, on a $\frac{1}{2}\int_0^x t\,dt \leq \int_0^x f(t)\,dt$.

Il s'ensuit que, $\frac{x^2}{4} \leq F(x)$.

On en déduit que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$.

2. **a)** Effectuons une intégration par parties :

Posons : $u = t$ et $v' = e^t$. On a $u' = 1$ et $v = e^t$.

Donc, $\Psi(x) = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt$

$= (x-1)e^x + 1.$

b) $\forall t \in [x;0]$, $x \leq t \leq 0$,

$e^x \leq e^t \leq 1$, car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$0 < e^x + 1 \leq e^t + 1 \leq 2$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{e^t+1} \leq \frac{1}{e^x+1}.$$

De plus : $\forall t \in [x;0]$, $t < 0$ et $e^t > 0$ donc $te^t < 0$

Par conséquent, $\dfrac{te^t}{e^x+1} \leq \dfrac{te^t}{e^t+1} \leq \dfrac{te^t}{2}$

$$\frac{te^t}{e^x+1} \leq f(t) \leq \frac{te^t}{2}$$

Par suite, $\displaystyle\int_x^0 \frac{te^t}{e^x+1} dt \leq \int_x^0 \frac{te^t}{e^t+1} dt \leq \int_x^0 \frac{te^t}{2} dt$,

$$-\int_x^0 \frac{te^t}{2} dt \leq -\int_x^0 \frac{te^t}{e^t+1} dt \leq -\int_x^0 \frac{te^t}{e^x+1} dt.$$

$$\int_0^x \frac{te^t}{2} dt \leq \int_0^x \frac{te^t}{e^t+1} dt \leq \int_0^x \frac{te^t}{e^x+1} dt$$

$$\frac{1}{2}\int_0^x te^t dt \leq F(x) \leq \frac{1}{e^x+1}\int_0^x te^t dt.$$

Puisque $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^x te^t\,dt$ donc $\dfrac{1}{2}\Psi(x) \leq F(x) \leq \dfrac{\Psi(x)}{e^x+1}$.

c) Pour tout nombre réel x, $\Psi(x) = (x-1)e^x + 1$.

On a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \Psi(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^x + 1$

$$= \lim_{x \to -\infty} (xe^x - e^x + 1)$$

$= 1.$

Et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{x} + 1) = 1$

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\Psi(x)}{e^{x} + 1} = 1$

Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{2}\Psi(x) \leq F(x) \leq \dfrac{\Psi(x)}{e^{x} + 1}$ alors $\dfrac{1}{2} \leq \mathbf{L} \leq 1$.

3. **a)** F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.
Donc, pour tout nombre réel x, $F'(x) = f(x)$
On a : $\forall x \in]-\infty\,;0[$, $f(x) < 0$ donc $F'(x) < 0$
On en déduit que, F est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.
Par ailleurs, $\forall\ x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) > 0$ donc $F'(x) > 0$.
Donc, F est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

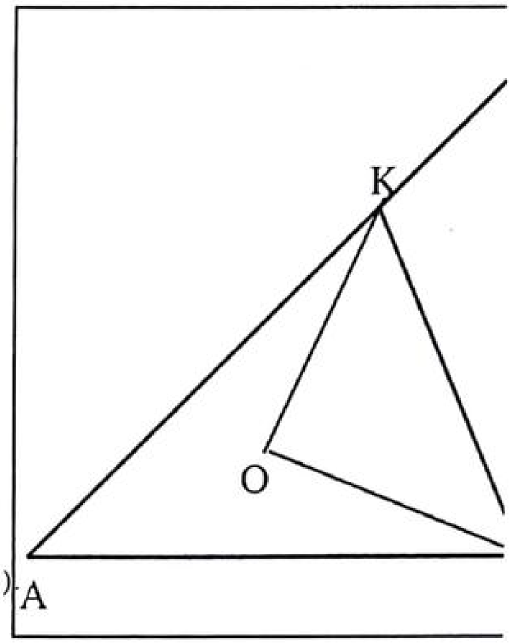
b) Tableau de variation de F.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$\mathbf{L}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Voir figure.

DEVOIR N° 13

EXERCICE 1



1. Voir figure

2. ABK est isocèle en A et de sens direct et $\text{Mes}(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}) = \frac{\pi}{4}$

3. donc $\text{Mes}(\widehat{\overline{KA};\overline{KB}}) = \frac{3\pi}{8}$.

Par suite $\text{Mes}(\widehat{\overline{KB};\overline{KC}}) = \frac{5\pi}{8}$.

L'angle de S est donc $\frac{5\pi}{8}$.

3. En utilisant le théorème d'Al Kashi dans le triangle OAB isocèle en O, $KB^2 = a^2(2-\sqrt{2})$

En considérant le triangle ABK isocèle en A, $KC = a(\sqrt{2}-1)$

Par suite, $R^2 = \frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{a^2(2-\sqrt{2})}$

$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 2

1. Voir figure.

2. I appartient à la médiatrice de [AB] donc IA = IB
De plus I appartient à la médiatrice de [AC] donc IA = IC
Par suite, IB = IC.
De ce fait I appartient à la médiatrice de [BC] .
On a F milieu de [BC] donc F appartient à la médiatrice de [BC].
Par conséquent la droite (IF) est la médiatrice de [BC].

3. a) La droite (IF) est la médiatrice de [BC] donc $(IF) \perp (BC)$.
Par ailleurs, $F \in (OB)$ donc $(IF) \perp (FO)$
On a (OI) médiatrice de [AB].

Comme OAB est isocèle en O alors (OI) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

Il en résulte que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}$.

Sachant que $(IF) \perp (FO)$, on conclut que le triangle IFO est rectangle isocèle en F et de sens direct.

b) I appartient à la médiatrice de [AB] Donc $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}}) = 2\,(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}})$.

Par ailleurs I appartient à la médiatrice de [BC] donc $(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IB}}) = 2\,(\widehat{\overrightarrow{IF},\overrightarrow{IB}})$.

Donc,
$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}}) &= (\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IB}}) + (\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}})\\ &= 2\,(\widehat{\overrightarrow{IF},\overrightarrow{IB}}) + 2\,(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}})\\ &= 2\,[(\widehat{\overrightarrow{IF},\overrightarrow{IB}}) + (\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}})].\\ &= 2(\widehat{\overrightarrow{IF},\overrightarrow{IO}})\end{aligned}$$

3. IFO est rectangle isocèle de sens direct donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IF},\overrightarrow{IO}}) = \frac{\pi}{4}$.

Ce qui mène à $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}}) = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\frac{\pi}{2}$ est une mesure l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}})$.

4. OAC est rectangle en O et de sens direct
Donc O appartient au cercle de diamètre [AC]
D'après la question 3a) le triangle AIC est rectangle en I.
Donc I appartient au cercle de diamètre [AC].
Il s'ensuit que O et I appartiennent au cercle de diamètre [AC].
Par conséquent les points O, A, I et C appartiennent à un même cercle (Γ).

5. **a)** f est la composée de deux rotations de centres distincts dont la somme des angles $\widehat{\frac{\pi}{2}} - \widehat{\frac{\pi}{2}} = \hat{0}$.

On en déduit que f est une translation.

De plus f (B) = I donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.

b) g la composée de deux rotations de centres distincts dont la somme des angles est $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ qui est une mesure de l'angle plat donc, g est une rotation d'angle π, c'est-à-dire une symétrie centrale. On a $g(O) = C$, K est le milieu de [OC] et g est une symétrie centrale. Donc g est la symétrie de centre K

6. h est la composée d'une translation et d'une symétrie centrale qui est une rotation d'angle π.
Par suite h est une rotation d'angle π.. Donc, h est une symétrie centrale.

7. **a)** $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IP}})$ sont deux angles alternes internes définis par les parallèles (OC) et (IP), et la sécante (OI)

Donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IP}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{4}$.

On a J centre du cercle (Γ) contenant les points I, P et O.

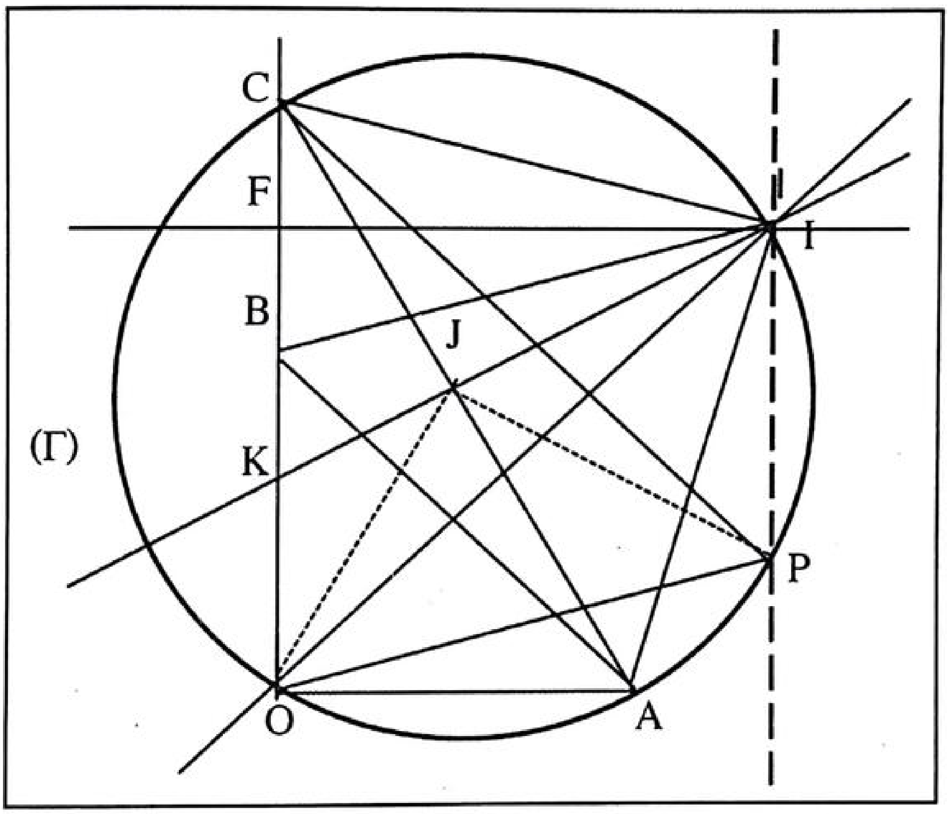
$JO = JP$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{JO},\overrightarrow{JP}}) = 2Mes(\widehat{\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IP}})$ donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{JO},\overrightarrow{JP}}) = \frac{\pi}{2}$.

Il s'ensuit que P est l'image de O par la rotation r_J.

b) $f(O) = r_J \circ r_O(O) = r_J(O)$ Donc $f(O) = P$

c) g est la symétrie de centre O et K est le milieu de [OC].
Il en résulte que $g(C) = O$
Par ailleurs $f(O) = P$.
Par suite $h(C) = P$.
Or h est une symétrie centrale et $h(C) = P$ alors h est la symétrie dont le centre est le milieu du segment [CP].

Figure



PROBLEME

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^x - 1}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\dfrac{e^x - 1}{x}}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\dfrac{e^x - 1}{x}}$.

Il en découle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Or $f(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

On en déduit que f est continue en 0.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{x^2}{e^x - 1}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}}$.

$= 1$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

De ce fait f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est $f'(0)$ c'est à dire 1.

3. **a)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1}$.

On a $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to -\infty} (e^x - 1) = -1$, $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$.

Par suite, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = -\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\dfrac{x^2}{e^x - 1}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x - 1}$.

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

b) Interprétation graphique : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x^2}}$.

Effectuons un changement de variable : posons $u = \dfrac{1}{2}x$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(e^u)^2 - 1}{4u^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{e^u}{u}\right)^2 - \dfrac{1}{u^2} \right] = +\infty$.

En définitive $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ c'est à dire la droite (OI) est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

4. Pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{2x(e^x - 1) - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$

$$= \frac{x(2e^x - 2 - xe^x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{-x(2e^{-x} + x - 2)e^x}{(e^x - 1)^2}$$

5. **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2e^{-x} + x - 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2 - 2e^x + xe^x)e^{-x}$

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2e^{-x} + x - 2) = +\infty$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -2e^{-x} + 1$. Considérons le signe de $-2e^{-x} + 1$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $-2e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -x = -\ln 2$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$

Par ailleurs, $-2e^{-x}+1>0 \Leftrightarrow e^{-x}<\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -x<-\ln 2$

$\Leftrightarrow x>\ln 2.$

De ce qui précède on déduit que $-2e^{-x}+1<0 \Leftrightarrow x<\ln 2$

Par conséquent : $\forall x \in]-\infty\,;\ln 2[$, $h'(x)<0$ donc h est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\ln 2[$

$\forall x \in]\ln 2\,;+\infty[$, $h'(x)>0$ donc h est strictement croissante sur $]\ln 2\,;+\infty[$

D'où le tableau de variation de h :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

c) h est continue et strictement croissante sur $[\ln 2\,;+\infty[$. On a $h([\ln 2\,;+\infty[) = [-1+\ln 2\,;+\infty[$

Donc h est réalise une bijection de $[\ln 2\,;+\infty[$ vers $[-1+\ln 2\,;+\infty[$.

On a $-1+\ln 2 \approx -0{,}3$. De ce fait $0\in[-1+\ln 2\,;+\infty[$.

Par suite, l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α dans $[\ln 2\,;+\infty[$.

d) Vérification de l'encadrement de α.

$h(1{,}59)\approx -0{,}0021$ et $h(1{,}60)\approx 0{,}0037$. Comme $h(1{,}59)$ et $h(1{,}60)$ sont de signes contraires,

Donc, $1{,}59<\alpha<1{,}60$.

6. **a)** $h(0)=2e^{-0}+0-2$

$=2-2=0$

h est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\ln 2[$

$x<0$ implique $h(x)>h(0)$. Puisque $h(0)=0$ alors $h(x)>0$

$0<x<\ln 2$ implique $h(x)<h(0)$ donc $h(x)<0$

Par ailleurs, h est strictement croissante sur $[\ln 2\,;+\infty[$

$\ln 2\le x<\alpha$ implique $h(x)<h(\alpha)$. Or $h(\alpha)=0$ alors $h(x)<0$

$x>\alpha$ implique $h(x)>h(\alpha)$ donc $h(x)>0$.

En définitive, $\forall x\in]-\infty\,;0[\cup]\alpha\,;+\infty[$, $h(x)>0$ et $\forall x\in]0\,;\alpha[$, $h(x)<0$

b) Pour tout nombre réel x, $(e^{x}-1)^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-x$ et de $h(x)$.

Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Il ressort du tableau que : $\forall x \in]-\infty\ ;0[\cup]\ \alpha\ ;+\infty\ [,\ f'(x) > 0,\ \forall x \in]\ \alpha\ ;+\infty\ [\ ,\ f'(x) < 0$ et $f'(0) = f'(\alpha) = 0$.

Sens de variation de f : $\forall x \in]-\infty\ ;\alpha\ ],\ f'(x) \geq 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\alpha\ ]$.
$\forall x \in]\alpha\ ;+\infty\ [,\ f'(x) \leq 0$ donc f est strictement décroissante sur $]\alpha\ ;+\infty\ [$.

c) $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{e^{\alpha} - 1}$ et $h(\alpha) = 2e^{-\alpha} + \alpha - 2$

$h(\alpha) = 0$ implique $2e^{-\alpha} = 2 - \alpha$

$$e^{\alpha} = \frac{2}{2-\alpha}$$

Par suite, $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{\dfrac{2}{2-\alpha} - 1}$

$$= \frac{\alpha^2(2-\alpha)}{2-2+\alpha}$$

$$= (2-\alpha)\alpha$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
f '(x)		+	1	+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	$(2-\alpha)\alpha$	↘	0

d) On a $1{,}59 < \alpha < 1{,}60$

$0{,}4 < 2 - \alpha < 0{,}41$

D'où $0{,}63 < (2-\alpha)\alpha < 0{,}65$

On en déduit que 0,6 est une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(\alpha)$.

e) $f(0) = 0$ et f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\alpha\ ]$
Donc, $x < 0$ implique $f(x) < f(0)$. Puisque $f(0) = 0$ alors $f(x) < 0$
$0 < x \leq \alpha$ implique $f(x) > f(0)$ donc $f(x) > 0$
Par ailleurs, f est continue et strictement décroissante sur $]\ \alpha\ ;+\infty\ [$
Il s'ensuit que $f(]\ \alpha\ ;+\infty\ [) =]\ 0\ ;f(\alpha)\ [$
Par conséquent : $\forall x \in]\ \alpha\ ;+\infty\ [,\ f(x) \in]\ 0\ ;f(\alpha)\ [$
On en déduit que : $f(x) > 0$
En définitive : $\forall x \in]-\infty\ ;0\ [,\ f(x) < 0$ et $\forall x \in]\ 0\ ;+\infty\ [,\ f(x) > 0$.

7. Soir $x \in \mathbb{R}^*$. On a $x \neq 0$

$-x \neq 0$

Donc, $-x \in \mathbb{R}^*$.

Et, $$f(-x) = \frac{(-x)^2}{e^{-x}-1}$$

$$= \frac{x^2e^x}{1-e^x}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{x^2e^x}{1-e^x}$.

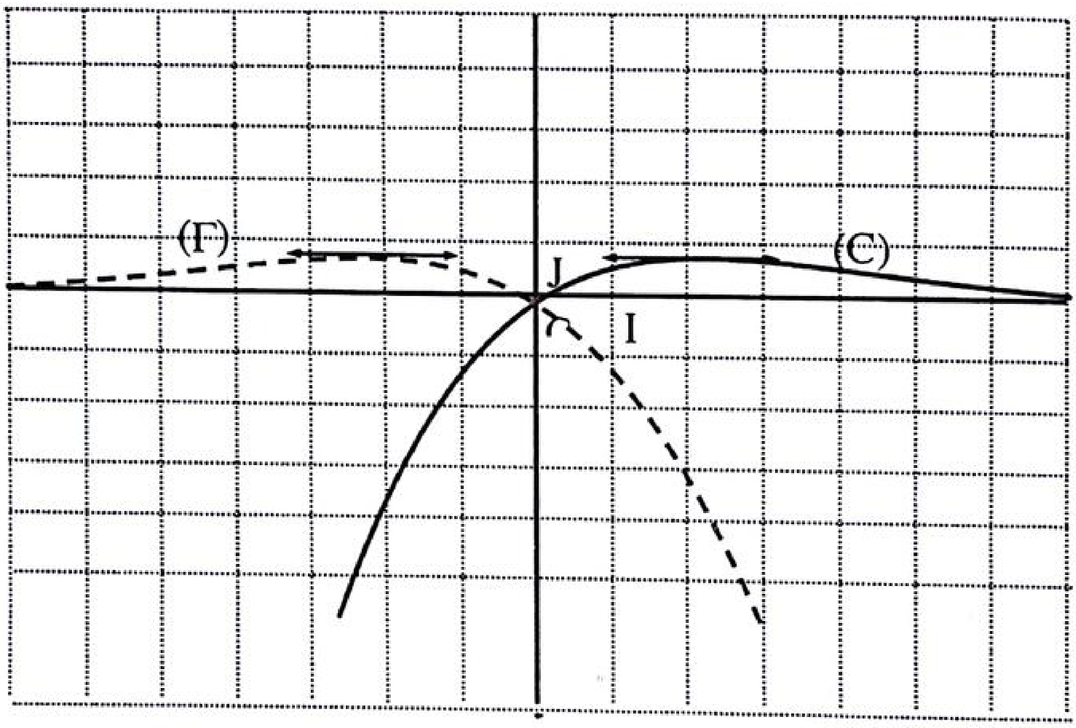
Donc, $g(x) = f(-x)$.

De plus $g(0) = 0$ et $f(0) = f(-0) = 0$ implique $g(0) = f(0)$.

En définitive, pour tout nombre réel x, $g(x) = f(-x)$.

Par conséquent (Γ) et (C) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

8. Tracé de (C) et de (Γ).



Partie B :

1. On a $I_n = \displaystyle\int_{\ln 2}^{1} \frac{x^n}{e^x-1}\,dx$ et $I_{n+1} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{1} \frac{x^{n+1}}{e^x-1}\,dx$.

$\forall x \in [\ln 2 ; 1]$, $x > 0$ et $x \leq 1$.

On a $x > 0$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x^n > 0$

Puisque $0 < x \leq 1$ donc, $x^{n+1} \leq x^n$.

Par ailleurs, $x > 0$ implique $e^x > 1$, $e^x - 1 > 0$

Par suite, $\dfrac{x^{n+1}}{e^x - 1} \leq \dfrac{x^n}{e^x - 1}$.

$$\int_{\ln 2}^{1} \frac{x^{n+1}}{e^x - 1}\,dx \leq \int_{\ln 2}^{1} \frac{x^n}{e^x - 1}\,dx .$$

D'où $I_{n+1} \leq I_n$.

On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.

2. $\forall x \in [\ln 2 \,;\, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x^n > 0$ et $e^x - 1 > 0$ donc $\dfrac{x^n}{e^x - 1} > 0$.

Il s'ensuit que $\displaystyle\int_{\ln 2}^{1} \frac{x^n}{e^x - 1}\,dx > 0$.

$$I_n > 0$$

Donc, la suite (I_n) est minorée par 0.

En définitive, la suite (I_n) est décroissante et minorée donc elle converge.

3. **a)** $\forall\, x \in [\ln 2 \,;\, 1]$, $\ln 2 \leq x \leq 1$

$$e^{\ln 2} \leq e^x \leq e$$

$$2 \leq e^x \leq e.$$

$$2 - 1 \leq e^x - 1 \leq e - 1.$$

$$\frac{1}{e - 1} \leq \frac{1}{e^x - 1} \leq 1.$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [\ln 2; 1]$, $x^n > 0$ alors $\dfrac{x^n}{e - 1} \leq \dfrac{x^n}{e^x - 1} \leq x^n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [\ln 2; 1]$: $\dfrac{x^n}{e - 1} \leq \dfrac{x^n}{e^x - 1} \leq x^n$

Donc,
$$\int_{\ln 2}^{1} \frac{x^n}{e-1}\,dx \leq I_n \leq \int_{\ln 2}^{1} x^n\,dx$$

$$\frac{1}{e-1}\int_{\ln 2}^{1} x^n\,dx \leq I_n \leq \int_{\ln 2}^{1} x^n dx .$$

On a $\int_{\ln 2}^{1} x^n dx = [\frac{1}{n+1} x^{n+1}]_{\ln 2}^{1}$

$$= \frac{1}{n+1}(1-\ln(2)^{n+1})$$

Donc, $\frac{1}{e-1}[\frac{1}{n+1}(1-\ln(2)^{n+1})] \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}(1-\ln(2)^{n+1})$.

4. $1 < 2 < e$ donc $\ln 1 < \ln 2 < \ln e$.

$0 < \ln 2 < 1$.

$-1 < \ln 2 < 1$

Par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} (\ln 2)^n = 0$

Puisque $\lim_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} (\ln 2)^{n+1} = 0$.

Par suite, $\lim_{n \to +\infty} (1-(\ln 2)^{n+1}) = 1$.

Par ailleurs, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1}(1-(\ln 2)^{n+1}) = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e-1}[\frac{1}{n+1}(1-(\ln 2)^{n+1})] = 0$

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

DEVOIR N° 14

EXERCICE 1

1. Voir figure

2. S(A) = K et S(B) = D donc le rapport de S est $\frac{KD}{AB}$.

Comme F milieu de [KD] et B milieu de [CE] alors $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$.

KBCE est un carré implique $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CE}$ donc $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{FB}$.
Par suite KE = FB
KBCE carré implique que KE = KD.
Par conséquent KD = FB.

On a A milieu de [FB] donc $AB = \frac{1}{2}KD$ et $\frac{KD}{AB} = 2$.

Finalement, le rapport de S est 2.

3. S(A) = K et S(B) = D donc l'angle de S est $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{KD}})$

On a $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{FB}$

Par ailleurs, KBCE est un carré de sens direct. Ce qui donne $Mes(\widehat{\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KE}}) = \frac{\pi}{2}$.

Il s'ensuit que $Mes(\widehat{\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{FB}}) = \frac{\pi}{2}$.

A ∈[FB] donc $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires même sens. De ce fait $(\widehat{\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{FB}})$.

Ce qui conduit à $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{KD}}) = -\frac{\pi}{2}$. On conclut que l'angle de S est $-\frac{\pi}{2}$.

4. Ω est le centre de S, S (A) = K et S (B) = D. Donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega K}}) = -\frac{\pi}{2}$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega D}}) = -\frac{\pi}{2}$.

Ce qui permet de dire que Ω est l'un des points d'intersection des cercles de diamètres [AK] et [BD].

c) $\forall x \in]-1;0[$, $\quad g(x) < 0$

$f(x) - x < 0$.

De ce fait, (C) est en dessous de (T) sur $]-1;0[$.

$\forall x \in]0;1[$, $\quad g(x) > 0$

$f(x) - x > 0$.

On en déduit que (C) est au dessus de (T) sur $]0;1[$.

Enfin, (C) et (T) se coupent au point d'abscisse 0.

4. Voir graphique.

5. a) f continue et strictement croissante sur $]-1;1[$.

Donc f est une bijection de $]-1;1[$ sur $f(]-1;1[)$

On a $f(]-1;1[) =]\lim_{x\to -1} f(x) ; \lim_{x\to 1} f(x)[$

$=]-\infty ; +\infty[$.

Par conséquent, f est une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Voir graphique.

c) f est une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$. Soit x élément de $]-1;1[$ et y un nombre réel.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = e^{2y}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

On en déduit que : $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$.

Partie B

1. a) Φof est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$(\Phi of)'(x) = f'(x)\,\Phi'(f(x))$

$= f'(x)\,(f^{-1})(f(x))$.

$= f'(x)\,(f^{-1}of)(x)$

$= x f'(x)$ car f et f^{-1} étant réciproques l'une de l'autre, on a $(f^{-1}of)(x) = x$

Par suite, Φof est une primitive de la fonction $x \longmapsto x\, f^{-1}(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Φ est une primitive de la fonction f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

Donc, $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \Phi(f(b)) - \Phi(f(a))$

$$= \Phi \circ f(b) - \Phi \circ f(a)$$

c) $\Phi \circ f$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto x\, f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Il s'ensuit que, $\int_a^b t f'(t)dt = \Phi \circ f(b) - \Phi \circ f(a)$.

D'après la question précédente $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \Phi \circ f(b) - \Phi \circ f(a)$.

Par conséquent, $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b t f'(t)dt$

d) $f(0) = 0$ Donc $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_{f(0)}^{f(x)} f^{-1}(t)dt$

D'après la question précédente, $\int_{f(0)}^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x t f'(t)dt$

Donc, $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x t f'(t)dt$

2. **a)** $\forall x \in]-1\,;1[$, $\int_0^x t f'(t)dt = \int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{(-2t)}{1-t^2}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

b) f est une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$.
Donc : $\forall y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in]-1;1[$ tel que $f(x) = y$.

Par suite, $\int_0^y f^{-1}(t)dt = \int_{f(0)}^{f(x)} f^{-1}(t)dt$

$$= \int_0^x t f'(t)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1 - x^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \left(\frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}\right)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(e^{2y} + 1)^2 - (e^{2y} - 1)^2}{(e^{2y} + 1)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4e^{2y}}{(e^{2y} + 1)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e^{y}}{e^{2y} + 1}\right)^2$$

$$= \ln\left(\frac{e^{2y} + 1}{2e^{y}}\right).$$

En définitive, $\int_0^y f^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right)$.

3. $\forall x \in [0\,;1]$, $x \geq 0$; $2x \geq 0$

$$e^{2x} \geq 1$$

$$e^{2x} - 1 \geq 0\,.$$

De plus, $e^{2x} + 1 > 0$ donc $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \geq 0$

On en déduit que f^{-1} est positive sur $[0\,;1]$

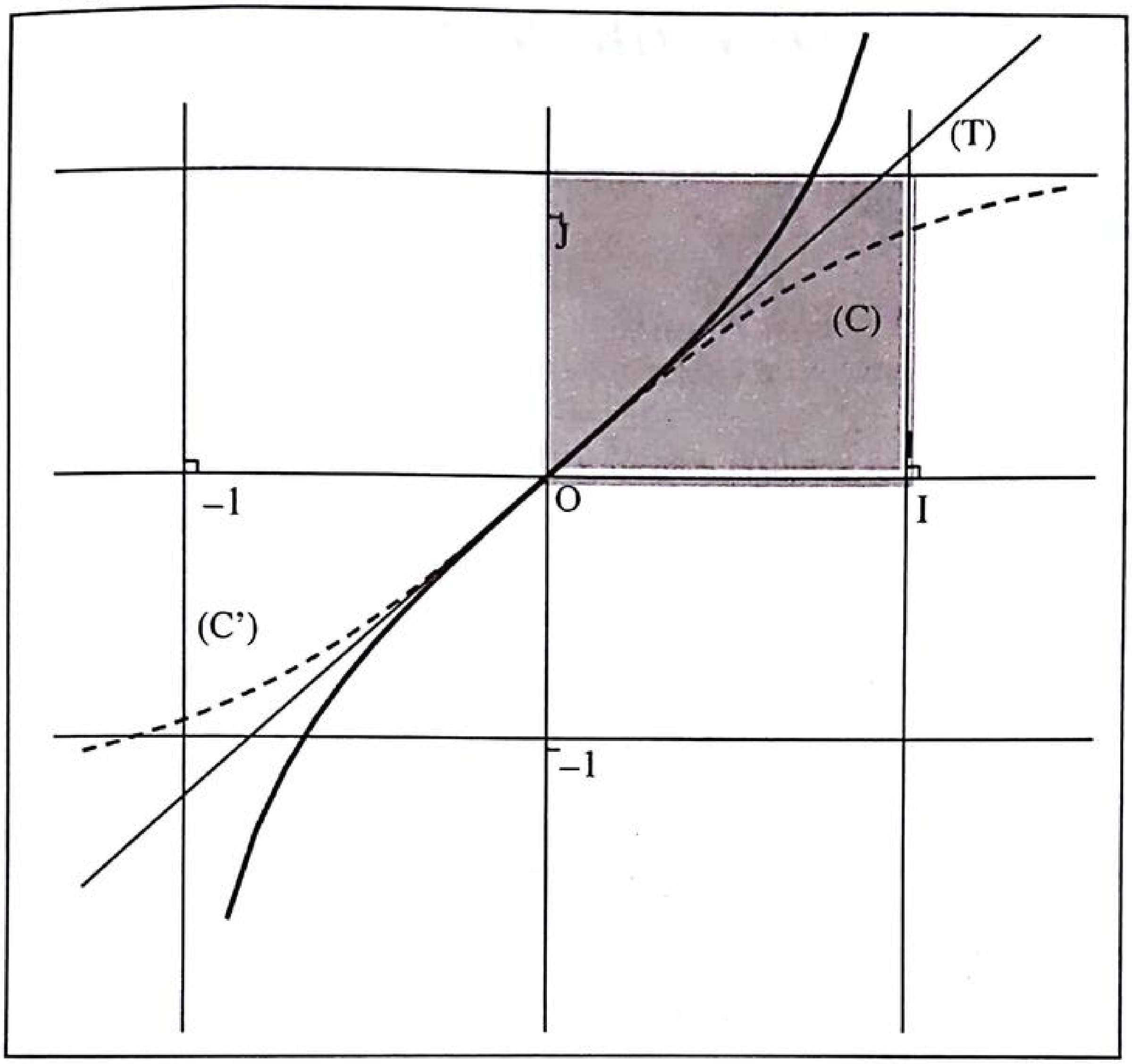
Par conséquent, l'aire $\mathcal{A} = \left(\int_0^1 f^{-1}(t)dt\right)(4cm^2)$.

On a $\int_0^1 f^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^{1} + e^{-1}}{2}\right)$

$$= \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right)$$

Finalement, $\mathcal{A} = 4\ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right)cm^2$

Figure



DEVOIR N° 15

EXERCICE 1

$3^0 \equiv 1[13]$, $3^1 \equiv 3[13]$, $3^2 \equiv 9[13]$, $3^3 \equiv 1[13]$.

On remarque que les exposants 0, 1 et 2 sont les restes dans la division euclidienne d'un entier naturel n par 3. Il s'ensuit que :

Pour $n = 3k$, $3^3 \equiv 1[13]$ et $3^{3k} \equiv 1[13]$ donc $3^n \equiv 1[13]$.

Par suite, $17\times 3^n \equiv 17[13]$

$17\times 3^n - 4 \equiv 17 - 4[13]$

$17\times 3^n - 4 \equiv 0[13]$.

Donc, $17\times 3^n - 4$ est divisible par 13

Pour $n = 3k+1$, $3^{3k+1} \equiv 3[13]$ donc $3^n \equiv 3[13]$.

Par suite, $17\times 3^n \equiv 51[13]$

$17\times 3^n - 4 \equiv 51 - 4[13]$

$17\times 3^n - 4 \equiv 47[13]$.

$17\times 3^n - 4 \equiv 8[13]$ avec $0 < 8 < 13$.

Donc $17\times 3^n - 4$ n'est pas divisible par 13.

Pour $n = 3k+2$; $3^{3k+2} \equiv 9[13]$ donc $3^n \equiv 9[13]$.

Par suite, $17\times 3^n \equiv 153[13]$

$17\times 3^n - 4 \equiv 153 - 4[13]$

$17\times 3^n - 4 \equiv 149[13]$.

$17\times 3^n - 4 \equiv 6[13]$ avec $0 < 6 < 13$.

Donc $17\times 3^n - 4$ n'est pas divisible par 13.

Il ressort de ce qui précède que $17\times 3^n - 4$ est divisible par 13 pour les entiers naturels $n = 3k$; $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2

1. a) Voir figure

b) ABC est rectangle en B et E milieu de [AC].
Donc E est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Ainsi AE = EB = EC (1)

$\text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$ donc EAB et équilatéral.

Par suite, AB = AE (2)
De (1) et (2), on a EC = AB.
Il existe donc un unique déplacement qui transforme B en C et A en E.
Ce déplacement est soit une translation ou une rotation.
De plus, les droites (AB) et (EC) sont sécantes.
Par conséquent, ce déplacement n'est pas une translation.
Donc il existe une rotation r transformant B en C et A en E.

c) r(B) = C et r(A) = E, donc l'angle de r est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EC}})$

E∈[AC] donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EC}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

Par conséquent l'angle de r est $\frac{\pi}{3}$.

d) r(B) = C et r(A) = E.
Donc le centre O de r est le point d'intersection des médiatrices des segments [BC] et [AE].

2. a) S(B) = E et S est une similitude centre O.

Donc l'angle de S est $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}})$ et le rapport de S est $\frac{OE}{OB}$.

La droite (BO) est la médiatrice de [AE] et r(A) = E.

Par suite, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}}) = \frac{\pi}{6}$. On en déduit que l'angle de S est $\frac{\pi}{6}$.

Par ailleurs, r(A) = E où r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Donc OAE est équilatéral de sens direct.

On a également AEB équilatéral, d'où $OB = 2OE\cos\frac{\pi}{6}$.

$$\frac{OE}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

En définitive l'angle de S est $\frac{\pi}{6}$ et le rapport de S est $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) J est le centre du cercle circonscrit au triangle OAE équilatéral de sens direct.

Il s'ensuit que : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ})} = \frac{\hat{\pi}}{6}$ et $OJ = \frac{\sqrt{3}}{3}OA$.

Donc, $S(A) = J$.

3. **a)** Voir figure

b) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ implique $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB}$

$(k-1)\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

De plus, $(k-1) - k = 1 \neq 0$.
Donc M est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs $k-1$ et $-k$.

c) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ implique que $M = \text{bar}\{(A\,;k-1)\,;(B\,;-k)\}$
Donc $\overrightarrow{EM'} = k\overrightarrow{EC}$ implique que $M' = \text{bar}\{(E\,;k-1)\,;(C\,;-k)\}$
De plus, $r(A) = E$ et $r(B) = C$.
Par la propriété de la conservation du barycentre par les rotations, le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs $k-1$ et $-k$ a pour image par r le barycentre des points pondérés E et C affectés des coefficients $(k-1)$ et $(-k)$.
Il en résulte que $r(M) = M'$.

Par ailleurs r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et $r(M)=M'$.

Ainsi $OM' = OM$ et $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})} = \frac{\pi}{3}$.

Donc OMM' est équilatéral (de sens direct).

d) Mes $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{3}$ et k est un nombre réel non nul.

Donc $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})} = \frac{\pi}{3}$ ou $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})} = -\frac{2\pi}{3}$.

Par suite $2\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})} = \frac{\widehat{2\pi}}{3}$ (1)

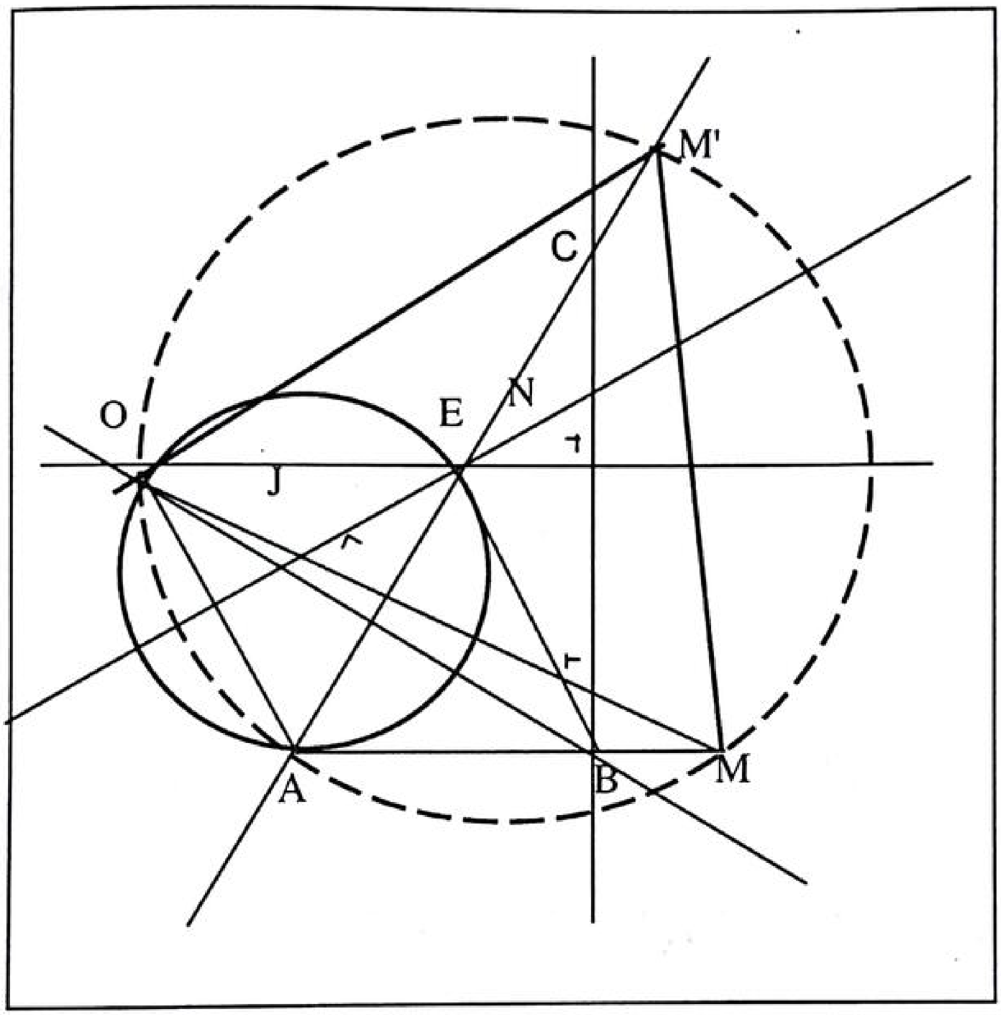
Par ailleurs $r(M) = M'$ implique que $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})} = \frac{\pi}{3}$.

Donc, $2\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})} = \frac{\widehat{2\pi}}{3}$ (2)

Des égalités (1) et (2), on obtient $2\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})} = 2\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})}$.
De plus les points O, M et M' ne sont pas alignés,
On conclut que les points O, A, M et M' sont cocycliques.

4. **a)** OAE équilatéral de sens direct et de centre J.
On a établi que $S(A) = J$
Par conséquent, OMM' équilatéral de sens direct et de centre N.
Donc $S(M) = N$
b) $S(M) = N$.
Par suite, lorsque M décrit la droite (AB), N décrit l'image de la droite (AB) par S.
Puisque $S(A) = J$ et $S(B) = E$ alors l'image de la droite (AB) par S est la droite (EJ)

Figure



PROBLEME

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x-1)\, e^{-\frac{1}{|x|}}$.

On a $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = -\infty$ donc, $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0} (x-1) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} (x-1)\, e^{-\frac{1}{|x|}} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Comme $f(0) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

On conclut que la fonction f est continue en 0.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)\, e^{-\frac{1}{|x|}}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} (x-1)\dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{|x|}}$

On a $\lim\limits_{x\to 0} (x-1) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{|x|}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$.

Posons $u = \dfrac{1}{x}$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to -\infty} ue^{u} = 0$.

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0$

Il s'ensuit que, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x-1)\dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0.$

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

Par ailleurs, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{|x|}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-(-\dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}})) = 0.$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x-1)\dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0.$

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

En définitive : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ implique $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$

Par conséquent, f est dérivable en 0.
On en déduit que $f'(0) = 0$

3. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) e^{-\frac{1}{|x|}}$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{|x|}} = 1$

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) e^{-\frac{1}{|x|}} = -\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) e^{-\frac{1}{|x|}} = +\infty.$

4. a) $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $f(x) - x = (x-1)e^{-\frac{1}{|x|}} - x$

$$= (x-1)e^{\frac{1}{x}} - x$$

$$= x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}.$$

Il en découle que, $\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - x) = 0$.

On en déduit que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

b) $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) - (x-2) = (x-1)e^{-\frac{1}{|x|}} - x + 2$

$$= (x-1)e^{-\frac{1}{x}} - x + 2$$

$$= x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) - e^{-\frac{1}{x}} + 2$$

$$= -\frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}} + 2.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - (x-2)) = 0$.

Donc, la droite (Δ') d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5. Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (1-x)e^{x} - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -xe^{-x}$.

Puisque, $e^{-x} > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $-x$.

Pour $x < 0$, $-x > 0$ donc, $h'(x) > 0$.

Par conséquent, la fonction h est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$.

On a $h(0) = 0$.

$\forall x \in]-\infty ; 0[$, $x < 0$ donc $h(x) < h(0)$

$h(x) < 0$

Par ailleurs,
Pour $x > 0$, $-x < 0$ donc $h'(x) < 0$.
Il s'ensuit que la fonction h est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $x > 0$ donc $h(x) < h(0)$
$h(x) < 0$

En définitive : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) < 0$.

On en déduit que $(1-x)e^{x} - 1 < 0$.

6. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(1-x)e^{x} - 1 < 0$ et $e^{-x} > 0$

Donc $e^{-x}[(1-x)e^{x} - 1] < 0$

$$1 - x - e^{-x} < 0$$

$$e^{-x} + x - 1 > 0$$

Par ailleurs, $\forall x \in]0 . +\infty[$, $x > 0, -x < 0$ donc $e^{-x} < e^{0}$

$$e^{-x} < 1$$

$$e^{-x} - 1 < 0$$

$$x(e^{-x} - 1) < 0 \text{ car } x > 0.$$

On a : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $e^{-x} + x - 1 > 0$ et $x(e^{-x} - 1) < 0$.

Par conséquent, $e^{-x} + x - 1 > x(e^{-x} - 1)$.

7. $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $f(x) - x = x((1 - \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} - 1)$.

D'après la question 5), $(1 - \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} - 1 < 0$ donc, $x(1 - \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} - 1) > 0$.

Par suite, $f(x) - x > 0$.
Par conséquent, la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur $]-\infty ; 0[$.

8. a) On a $(e^{-x} + x - 1) - (xe^{-x} - x) = e^{-x} + x - 1 - xe^{-x} + x$

$$= (1-x)e^{-x} - 1 + 2x$$

Donc, $(1-x)e^{-x} - 1 + 2x = (e^{-x} + x - 1) - (xe^{-x} - x)$

b) On a établi à la question 6) que : $\forall x \in]0; +\infty[$ $e^{-x} + x - 1 > x(e^{-x} - 1)$.

Par suite, $e^{-x} + x - 1 - x(e^{-x} - 1) > 0$.

Donc, $(1-x)e^{-x} - 1 + 2x > 0$

c) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x)-(x-2) = (x-1)e^{-\frac{1}{x}} - (x-2)$

$$= x\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{2}{x}\right)$$

D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $(1-x)e^{-x} - 1 + 2x > 0$

Puisque $x > 0$ implique $\frac{1}{x} > 0$ alors $\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{2}{x} > 0$.

Par conséquent, $x\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{2}{x}\right)$ car $x > 0$.

On en déduit que, $f(x) - (x-2) > 0$

En définitive, la courbe (C) est au dessus de la droite (Δ') sur $]0\,;\,+\infty[$.

9. $\forall x \in]-\infty\,;0[$, $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$ donc, $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}(x-1)e^{\frac{1}{x}}$

$$= \left(1 - \frac{x-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{x^2 - x + 1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = (x-1)e^{-\frac{1}{x}}$ donc, $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$

$$= \left(1 + \frac{x-1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{x^2 + x - 1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}.$$

10. a) Signe de f' sur $]-\infty\,;0[$:

On a $x^2 - x + 1 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

Signe de f' sur $]0\,;+\infty[$:

On a $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ et $x^2 > 0$.

Donc, le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 + x - 1$.

Les racines $P(x) = x^2 + x - 1$ sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Le coefficient du monôme de plus haut degré de P(x) est 1.

Donc $\forall x \in]-\infty\,; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty[,\ x^2 + x - 1 > 0$

$\forall x \in]\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}[,\ x^2 + x - 1 < 0$

De ce qui précède, $\forall\, x \in]0\,; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$.

Sens de variation de f :

$\forall x \in]-\infty\,;0\,[\cup]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty[,\ f'(x) > 0$

Il s'ensuit que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0\,[$ et sur $]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty[$,

$\forall x \in]0\,; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}[,\ f'(x) < 0.$

Par suite, la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}[$.

b) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
f ' (x)		+	0	−	0	+	
f (x)	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(0) = 0\,;\ f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{3}}$$

11. Voir figure.

Partie B

1. On a $\int_{\lambda}^{-1} f'(t)\,dt = \left[f(t)\right]_{\lambda}^{-1}$

$$= f(-1) - f(\lambda)$$

$$= (-1-1)\,e^{\frac{1}{-1}} - (\lambda - 1)\,e^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$= -\frac{2}{e} - (\lambda - 1)e^{\frac{1}{\lambda}}.$$

2. $\int_{\lambda}^{-1} f'(t)\,dt = \int_{\lambda}^{-1} (t^2 - t + 1)\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}\,dt$

On effectue une intégration par partie.

$u = t^2 - t + 1 \Rightarrow u' = 2t - 1$ et $v' = \frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}} \Rightarrow v = -e^{\frac{1}{t}}$

Par suite, $\int_{\lambda}^{-1} f'(t)\,dt = \left[(t^2 - t + 1)(-e^{\frac{1}{t}})\right]_{\lambda}^{-1} - \int_{\lambda}^{-1} (2t-1)(-e^{\frac{1}{t}})dt$

$$= -\frac{3}{e} + (\lambda^2 - \lambda + 1)e^{\frac{1}{\lambda}} + T(\lambda)$$

3. Il résulte des questions 1 et 2) que : $-\frac{2}{e} - (\lambda - 1)e^{\frac{1}{\lambda}} = -\frac{3}{e} + (\lambda^2 - \lambda + 1)e^{\frac{1}{\lambda}} + T(\lambda)$.

Donc, $T(\lambda) = -\frac{2}{e} - (\lambda - 1)e^{\frac{1}{\lambda}} + \frac{3}{e} - (\lambda^2 - \lambda + 1)e^{\frac{1}{\lambda}}$

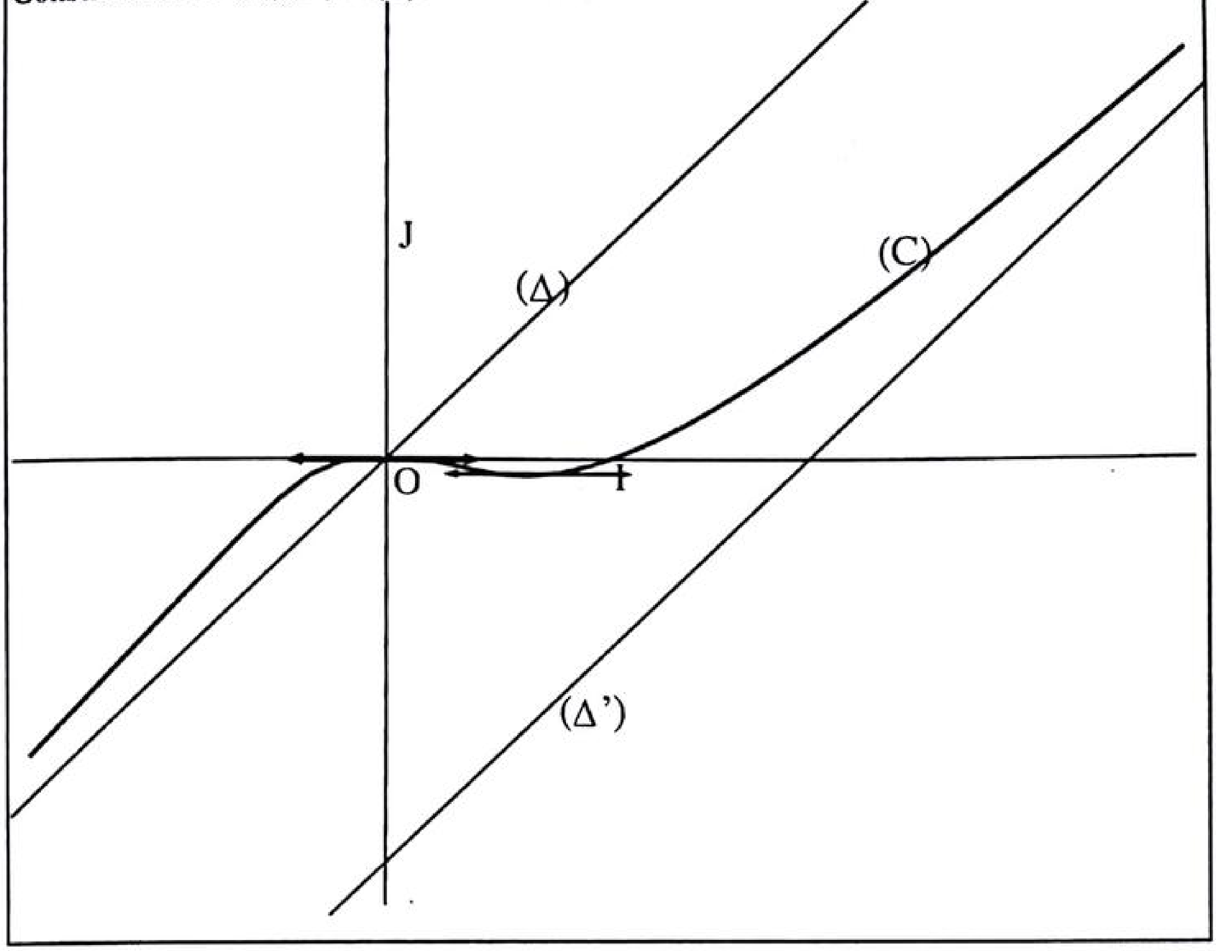
$$= \frac{1}{e} - \lambda^2 e^{\frac{1}{\lambda}}.$$

4. On a $\lim_{\lambda \to 0} \lambda^2 e^{\frac{1}{\lambda}} = 0$

Puisque $\lim_{\lambda \to 0} \lambda^2 = 0$ et $\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} = -\infty$ car $\lambda < 0$ implique $\lim_{\lambda \to 0} e^{\frac{1}{\lambda}} = 0$, alors

$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^2 e^{\frac{1}{\lambda}} = 0$ On en déduit que $\lim_{\lambda \to 0} T(\lambda) = \frac{1}{e}$.

Construction de (Δ), (Δ') et (C).



DEVOIR N° 16

EXERCICE 1

1. $(pu+qv)^2 = 1$ car p et q sont premiers entre eux.

   $p(pu+2quv)+q^2v^2=1$ donc d'après le théorème de Bézout p et q^2 sont premiers entre eux.

   Supposons pour un entier naturel k strictement supérieur à 2, p et q^k sont premiers entre eux.

   p et q premiers entre eux et, p et q^k premiers entre eux.

   Donc, p et q^{k+1} sont premiers entre eux.

   En conclusion, si p et q sont premiers entre eux alors pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, p et q^n sont premiers entre eux

2. q^n et p premiers entre eux.

   Il résulte de la question 1) que q^n et p^n sont premiers entre eux.

3. $59319 = 39^3$ et $456533 = 77^3$. De plus 39 et 77 premiers entre eux.

   Par conséquent 39^3 et 77^3 sont premiers entre eux.

   Il s'ensuit que 59319 et 456533 sont premiers entre eux.

EXERCICE 2

1. Voir figure

2. I milieu de [AB] et AIC équilatéral de sens direct donc IB=IA= IC
   On obtient IB = IC,

   De plus $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IB}}) = -\dfrac{2\pi}{3}$ donc r_I (C) = B.

3. a) $r_B \circ r_I$ est la composée de deux rotations de centres distincts dont la somme des angles est $\widehat{\frac{2\pi}{3}} - \widehat{\frac{2\pi}{3}} = \hat{0}$. Donc $r_B \circ r_I$ est une translation.

b) $r_B \circ r_I\ (I) = (r_B\ (r_I\ (I)) = r_B\ (I)$ car r_I rotation de centre I.

On a $r_B(I) = F$ donc $r_B \circ r_I\ (I) = F$

Par ailleurs, $r_B \circ r_I\ (C) = (r_B\ (r_I\ (C)) = r_B\ (B)$ car $r_I\ (C)=B$.

r_B est une rotation de centre B donc $r_B\ (B) = B$.

Par suite $r_B \circ r_I\ (C) = B$.

En définitive, $r_B \circ r_I$ est une translation avec $r_B \circ r_I\ (C) = B$ et $r_B \circ r_I\ (I) = F$ donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{IF}$.

On en déduit que FBCI est un parallélogramme.

4. FBCI parallélogramme donc les droites (FB) et (CI) sont parallèles.
On a $J \in (CI)$ donc les droites (FB) et (IJ) sont parallèles.
De plus, dans le triangle AFB, I milieu de [AB] et $J \in [AF]$.
D'après la propriété des droites des milieux, J est le milieu du segment [AF].

5. $r_B \circ r_C$ est la composée de deux rotations dont la somme des mesures des angles est $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

De ce fait $r_B \circ r_C$ est une rotation d'angle π, c'est-à-dire une symétrie centrale.

Par ailleurs $r_B \circ r_C\ (A) = r_B\ (r_C\ (A))$.

AIC équilatéral de sens direct implique $r_C(A) = I$.

De plus $r_B\ (I) = F$.

Donc $r_B \circ r_C\ (A) = F$.

On a $r_B \circ r_C$ est une symétrie centrale et $r_B \circ r_C\ (A) = F$.
De plus J est le milieu de [AF]

On conclut que $r_B \circ r_C$ est la symétrie de centre J.

6. $r_B \circ r_C$ est la symétrie de centre J donc $r_B \circ r_C\ (J) = J$.

Par suite, $r_B\ (r_C\ (J)) = J$ (1).

Comme $P = (r_B)^{-1}(J)$ alors $r_B\ (P) = J$ (2).

Il résulte de (1) et (2) que $r_C\ (J) = P$ car r_B est une bijection.

7. **a)** r_B (P)=J donc BJ =BP.

Par suite B appartient à la médiatrice de [PJ].

Par ailleurs, r_C (J) = P donc C appartient à la médiatrice de [PJ]

En définitive la droite (BC) est la médiatrice du segment [PJ].

b) (BC) médiatrice de [PJ] implique mes $\widehat{CBJ} = \frac{\pi}{3}$ et mes $\widehat{BCJ} = \frac{\pi}{6}$.

Donc, mes $\widehat{CJB} = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent le triangle BCJ est rectangle en J.

8. On a $P = (r_B)^{-1}(J)$ donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BP}}) = -\frac{2\pi}{3}$.

Par suite, $2(\widehat{\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BP}}) = \widehat{\frac{2\pi}{3}}$

Par ailleurs, $r_C(J) = P$ donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CJ};\overrightarrow{CP}}) = \frac{\pi}{3}$ et $2(\widehat{\overrightarrow{CJ};\overrightarrow{CP}}) = \widehat{\frac{2\pi}{3}}$.

En définitive, $2(\widehat{\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BP}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CJ};\overrightarrow{CP}})$.

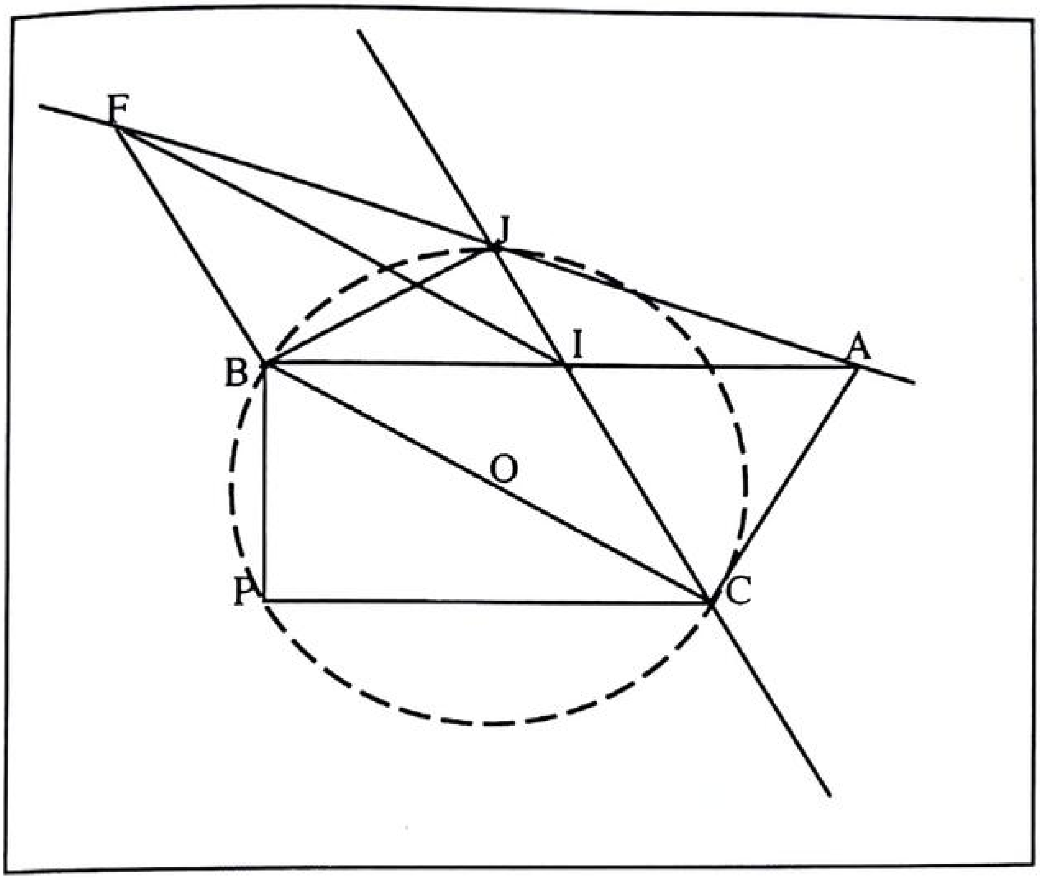
9. Puisque $2(\widehat{\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BP}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CJ};\overrightarrow{CP}})$ alors les points B, J, P et C sont cocycliques ou alignés.

On a r_C (J) = P, ce qui signifie que les points C, J et P ne sont pas alignés.

On conclut que les points B, J, P et C sont cocycliques.

Le triangle BCJ est rectangle en J et O est le milieu de [BC] donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle BCJ.

De ce fait O est le centre du cercle circonscrit au triangle PJC.



PROBLEME

Partie A

1. $x \in D_n \Leftrightarrow 1 - x^n > 0$

$\Leftrightarrow x^n < 1$

Pour n pair, $x^n < 1 \Leftrightarrow |x|^n < 1$

$\Leftrightarrow |x| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x < 1.$

On en déduit que $D_n =]-1 ; 1[$

Pour n impair, $x^n < 1 \Leftrightarrow x < 1.$

$D_n =]-\infty ; 1[.$

2. a) $\lim\limits_{x \to 1} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 1} \ln(1 - x^n)$

Or, $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x^n) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \ln(1 - x^n) = -\infty.$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 1} f_n(x) = -\infty$

b) Interprétation graphique : La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C_n).

3. **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 - x^n)$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^n) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x^n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 - x^n) = +\infty$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$ lorsque l'entier naturel n est impair.

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \quad \frac{f_n(x)}{x} = \frac{\ln[(-x^n)(1 - \frac{1}{x^n})]}{x}$$

$$= \frac{\ln(-x^n) + \ln(1 - \frac{1}{x^n})}{x}$$

$$= \frac{\ln((-x)^n)}{x} + \frac{1}{x}\ln(1 - \frac{1}{x^n}) \quad \text{car pour n est impair, } -x^n = (-x)^n.$$

$$= -n\frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{1}{x}\ln(1 - \frac{1}{x^n}).$$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - \frac{1}{x^n}) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 - \frac{1}{x^n}) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{x \to -\infty} (-n\frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{1}{x}\ln(1 - \frac{1}{x^n})) = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 0$.

b) Interprétation graphique : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 0$ donc la courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisse en $-\infty$.

4. Pour tout entier naturel n impair, il existe p tel que $n = 2p + 1$.

$$\forall x \in]-\infty ; 1[, \quad f_{2p+3}(x) - f_{2p+1}(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 - x^{2p+3}) = \ln(1 - x^{2p+1})$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^{2p+3} = 1 - x^{2p+1}$$

$$\Leftrightarrow x^{2p+3} = x^{2p+1}$$

$$\Leftrightarrow x^{2p+1}(x^2-1)$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=-1$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-1$$

Pour $x=0$, on a $f_{2p+1}(0)=0$ et pour $x=-1$, $f_{2p+1}(1)=\ln 2$.

Donc, pour n impair, toutes les courbes (C_n) passent par les points de coordonnées $(0,0)$ et $(-1,\ln 2)$.

5. $\forall x\in]-\infty\,;1[$, $\quad f_{2p+3}(x)-f_{2p+1}(x)=0 \Leftrightarrow \ln\ (1-x^{2p+3})=\ln\ (1-x^{2p+1})$

$$\Leftrightarrow x^{2p+1}(x^2-1)$$

Tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		0		1
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	
x^{2p+1}		$-$		$-$	0	$+$	
$f_{2p+3}(x)-f_{2p+1}(x)=0$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Il ressort du tableau que :

$\forall x\in]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$, $f_{2p+3}(x)-f_{2p+1}(x)<0$.

Donc, (C_{2p+1}) est au dessus de (C_{2p+3}) sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]0\,;1[$.

$\forall x\in]-1\,;0[$, $f_{2p+3}(x)-f_{2p+1}(x)>0$.

On en déduit que (C_{2p+1}) est en dessous de (C_{2p+3}) sur $]-1\,;0[$.

Enfin les courbes (C_{2p+1}) et (C_{2p+3}) se coupent aux points d'abscisses -1 et 0.

6. Pour n impair :

a) $\forall x\in]-\infty\,;1[$, $f_n\,'(x)=-\dfrac{n\,x^{n-1}}{1-x^n}$.

On a $1-x^n>0$.

Et $\quad x^{n-1}=0 \Leftrightarrow x=0$

n impair implique $n-1$ pair donc $x^{n-1}>0$

Donc, $]-\infty\,;0[\cup]0\,;1[$, $f_n\,'(x)<0$ et $f_n\,'(0)=0$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1
$f_n'(x)$		$-$	0	$-$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$			∞

Partie B

1. **a)** $\forall x \in]-1\,;1[,\ f_2'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}$.

Il s'ensuit que:

$\forall x \in]-1\,;0[,\ f_2'(x) > 0$, $\forall x \in]0\,;1[,\ f_2'(x) < 0$ et $f_2'(0) = 0$.

b) $\forall x \in]-1\,;0[,\ f_2'(x) > 0$ donc est strictement croissante sur $]-1\,;0[$.

$\forall x \in]0\,;1[,\ f_2'(x) < 0$ donc est strictement décroissante sur $]0\,;1[$.

c) Tableau de variation de f_2

X	-1		0		1
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2. Voir graphique.

3. g est continue et strictement décroissante sur $[0;1[$ donc g est une bijection de $[0;1[$ sur $g([0;1[)$
On a $g([0;1[) =]-\infty\,;0]$

4. **a)** Pour x appartenant à $[0;1[$ et y appartenant à $]-\infty\,;0]$.

$$g(x) = y \Leftrightarrow \ln(1-x^2) = y$$
$$\Leftrightarrow 1-x^2 = e^y$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{1-e^y} \text{ ou } x = -\sqrt{1-e^y}$$

On a : $-\sqrt{1-e^y} < 0$ donc $-\sqrt{1-e^y} \notin 0;1$.

Et, $y < 0 \Rightarrow e^y > 0$ et $e^y < 1$

$\Rightarrow -e^{y} < 0$ et $1-e^{y} > 0$

$\Rightarrow 1-e^{y} < 1$ et $1-e^{y} > 0$

$\Rightarrow 0 < 1-e^{y} < 1.$

$\Rightarrow 0 < \sqrt{1-e^{y}} < 1.$

Par conséquent, $g(x) = y \Leftrightarrow x = \sqrt{1-e^{y}}$.

On en déduit que : $\forall y \in]-\infty ; 0]$, $g^{-1}(y) = \sqrt{1-e^{y}}$.

b) $\forall y \in -\infty;0$, $(g^{-1})'(y) = \dfrac{-e^{y}}{2\sqrt{1-e^{y}}}$.

Partie C

1. **a)** $\forall x \in [0;\dfrac{\pi}{2}[$, $\dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x}$

$$= -\tan x$$

$$= \frac{1}{2}h(x).$$

b) $\forall x \in [0;\dfrac{\pi}{2}[$, $h(x) = 2\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc $H(x) = 2\ln(\cos x) + c$; $c \in \mathbb{R}$.

On a $H(0) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(\cos 0) + c = 0$

$\Leftrightarrow 2\ln 1 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = 0$

Par suite, $\forall x \in [0;\dfrac{\pi}{2}[$, $H(x) = 2\ln(\cos x)$.

2. $\forall x \in [0;\dfrac{\pi}{2}[$, $H'(x) = -2\tan x$.

En considérant le signe de la fonction tangente sur $[0 ; \dfrac{\pi}{2}[$, on a $H'(x) < 0$.

On en déduit que H est strictement décroissante sur $[0;\dfrac{\pi}{2}[$.

H étant dérivable et strictement décroissante sur $[0;\dfrac{\pi}{2}[$.

Donc, H est une bijection de $[0;\dfrac{\pi}{2}[$ sur $H([0;\dfrac{\pi}{2}[)$.

On a $H([0;\frac{\pi}{2}[) =]\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} H(x) ; H(0)]$

$=]-\infty ; 0]$.

3. $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}[,\ H(x) = 2\ln(\cos x)$.

$= \ln(\cos^2 x)$

$= \ln(1-(\sin^2 x))$

$= g(\sin x)$.

Par conséquent : $\forall x \in]-\infty;0[,\quad H^{-1}(x) = \sin^{-1} o g^{-1}(x)$

Donc, $(H^{-1})'(x) = (g^{-1})'(x) \times (\sin^{-1})'(g^{-1}(x))$

$$= \frac{-e^x}{2\sqrt{1-e^x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(1-e^x)}}$$

$$= \frac{-e^x}{2\sqrt{1-e^x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(1-e^x)}}$$

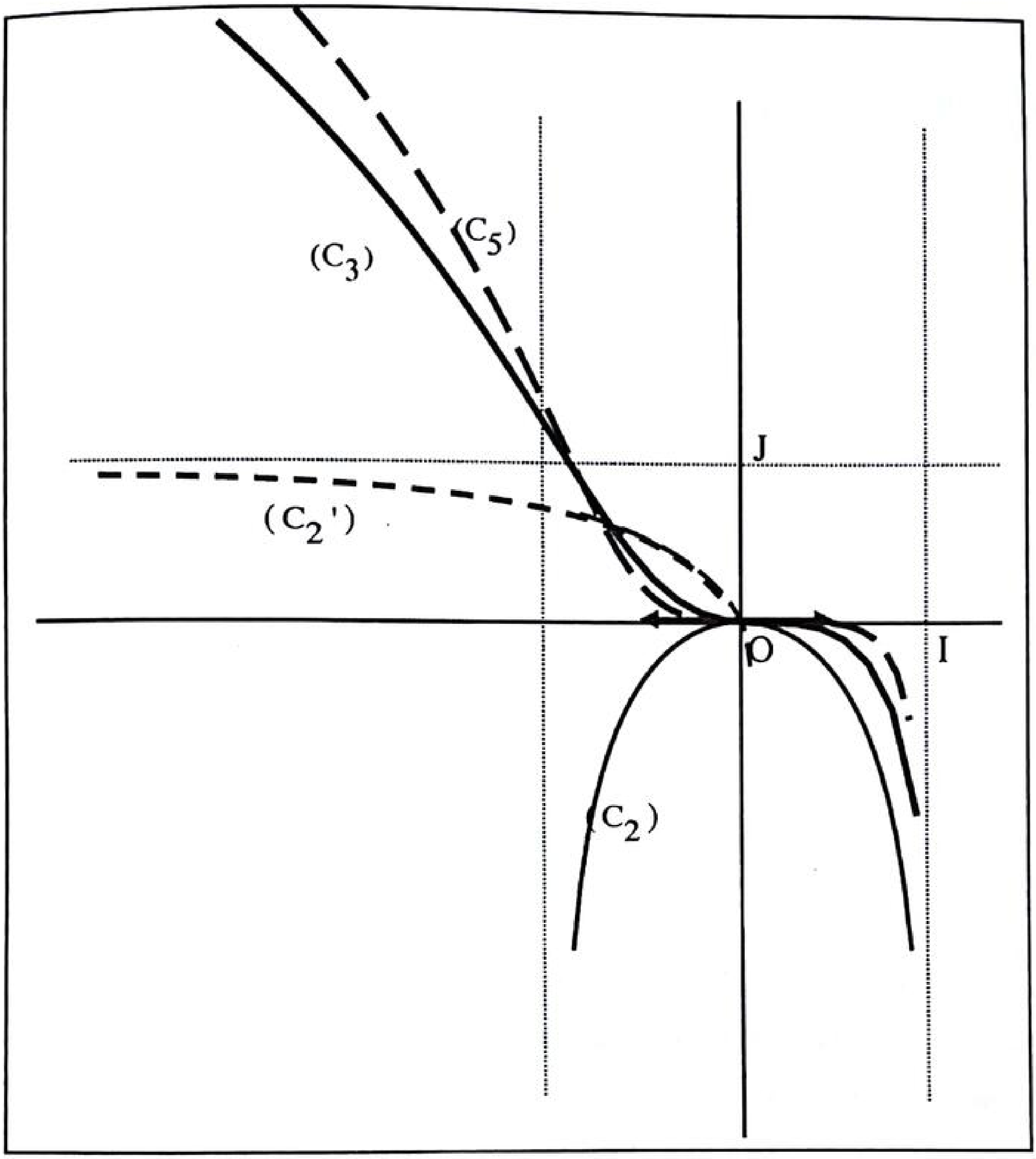
$$= \frac{-e^x}{2\sqrt{1-e^x}} \times \frac{1}{\sqrt{e^x}}.$$

$$= \frac{-\sqrt{e^x}}{2\sqrt{1-e^x}}$$

$$= \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{e^x}{1-e^x}}$$

Donc, $(H^{-1})'(x) = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{1}{e^{-x}-1}}$.

Tracé de (C_2), (C_2'), (C_3) et (C_5).



DEVOIR N° 17

EXERCICE 1

a) Soit δ_0=PGCD (x_0 ; y_0). Il existe k_0 et q_0 tels que $x_0 = k_0\,\delta_0$ et $y_0 = q_0\,\delta_0$.

Donc $\delta_0^{\,2}(k_0^{\,2} - 5q_0^{\,2}) = 1$.

Par conséquent $\delta_0^{\,2}$ divise 1 donc $\delta_0 = 1$ ou $\delta_0 = -1$.

On en déduit que $\delta_0 = 1$ car $\delta_0 > 0$.

Il en résulte que x_0 et y_0 sont premiers entre eux.

b) x_0 et y_0 sont premiers entre eux.

Par conséquent, ils ne peuvent pas être tous les deux pairs à la fois.

Supposons que x_0 et y_0 sont impairs.

Donc il existe p et q tels que $x_0 = 2p+1$ et $y_0 = 2q+1$.

Par suite, $2(p^2 - 5q^2 - q) = 3$. Ce qui signifie que 2 diviserait 3. Cela est impossible.

Donc x_0 et y_0 ne peuvent être tous les deux impairs à la fois.

Il en ressort que x_0 et y_0 n'ont pas la même parité.

2. $x_0^{\,2} - 5\,y_0^{\,2} = 1$.

$5\,y_0^{\,2} \equiv 0\,[5]$ donc $x_0^{\,2} \equiv 1[5]$ et $(x_0 - 1)(x_0 + 1) \equiv 0\ [5]$.

Puisque 5 est un nombre premier alors $x_0 \equiv 1\ [5]$ ou $x_0 \equiv -1\ [5]$.

On en déduit qu'il existe un entier k tel que $x_0 = 5k + 1$ ou $x_0 = 5k - 1$.

3. $y = 1 \Rightarrow 1 + 5y^2 = 6$

$y = 2 \Rightarrow 1 + 5y^2 = 21$

$y = 3 \Rightarrow 1 + 5y^2 = 46$

$y = 4 \Rightarrow 1 + 5y^2 = 81$.

Il en résulte que le couple (9 ; 4) est solution de (E).

EXERCICE 2

1. Voir figure.

2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

On a O milieu de [AB]

Donc $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}AB^2$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{AB}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}})$.

Puisque C est l'image de B par la similitude de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

alors $OC = 2OB = AB$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = \frac{2\pi}{3}$.

Par suite $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.
Par conséquent le triangle ABC rectangle en A.

Autre élément de réponse pour la question 1) :
Le cercle de centre O de diamètre [AB] coupe le segment [OC] en un point Ω.

On a $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = \frac{2\pi}{3}$ donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{3}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{O\Omega},\overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{3}$.

De plus, $OA = O\Omega$ d'où le triangle $O\Omega A$ est équilatéral.
Par ailleurs $OC = 2OB = 2O\Omega$ donc Ω milieu de [OC].
Par suite $\Omega A = \Omega O = \Omega C$ donc Ω est le cercle de diamètre [OC] passant par A.
Donc le triangle OAC est rectangle en A.
Puisque B appartient à la droite (OA) alors le triangle ABC est un rectangle en A.

3. $C = S(B)$, $K = S(A)$ et $F = S(C)$.
De plus S est une similitude directe et ABC est un triangle rectangle en A.
La similitude directe conserve les distances.
Il s'ensuit que KCF est un triangle rectangle en K.

4. a) $P = S_I(C)$ donc $(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IP}}) = \widehat{\frac{2\pi}{3}}$ et $IP = 2IC$

Par ailleurs, $S(B) = C$, $S(C) = F$, I milieu de [BC] et J milieu de [CF] implique $S(I) = J$.

Il s'ensuit que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JF},\overrightarrow{IC}}) = -\frac{2\pi}{3}$ et $JF = 2IC$.

Par suite, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JF},\overrightarrow{IP}}) = 0$ et $JF = IP$.

Donc, $\overrightarrow{JF} = \overrightarrow{IP}$ ce qui donne $\overrightarrow{JP} = \overrightarrow{CI}$.

Or I milieu de [BC] implique $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CI}$.

On déduit de ce qui précède que $\overrightarrow{JP} = \overrightarrow{IB}$.

Par conséquent $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{PB}$.

b) I est le milieu de [BC] et $P = S_I(C)$ où S_I est la similitude de centre I, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

En s'inspirant de la question 2), il s'ensuit que le triangle BCP est rectangle en B.

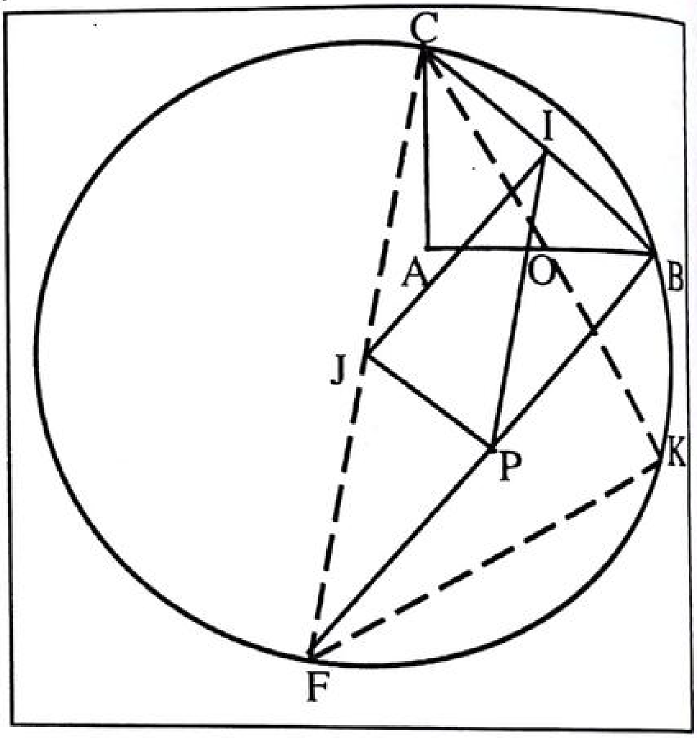
c) $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{PB}$ donc les droites (JI) et (PB) sont parallèles.
Dans le triangle CFB, I milieu de [BC] et J milieu de [FC] donc les droites (JI) et (FB) sont parallèles.
Donc les droites (PB) et (FB) sont confondues.
Il en découle que P appartient à la droite (FB)
Par conséquent d'après le théorème de Thalès donc P est milieu de [FB].

5. **a)** $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{PB}$ donc le quadrilatère JPBI est un parallélogramme.
De plus le triangle BCP est rectangle en B et $I \in (BC)$ donc $(PB) \perp (IB)$.
C'est ainsi que le quadrilatère JPBI est un rectangle.

b) JPBI est un rectangle. Donc JB = IP.
Or JC = IP donc JC = JB.
De plus BC=JC
On obtient JC = JB = BC.
Par suite le triangle JBC est équilatéral.

c) Le triangle CPB est rectangle en B et
P appartient à la droite (FB).
Donc le triangle BFC est rectangle en B.
Par suite B appartient au cercle de diamètre[FC].

Par ailleurs le triangle KCF est rectangle en K.
Donc les points K, C et F sont inscrits
Dans le cercle de diamètre [FC]
Par conséquent, les points F, K, B et C
appartiennent au cercle de diamètre [FC].



PROBLEME

Partie A

1. $x \in Df_n \Leftrightarrow \sqrt{x^2+n} + x > 0$.

$n > 0$ donc pour tout nombre réel x , $x^2 + n > x^2 \geq 0$

Par conséquent, $\sqrt{x^2+n} > |x|$. Or, $-x \leq |x|$.

Donc, $\sqrt{x^2+n} > -x$.

$\sqrt{x^2+n} + x > 0$.

On en déduit que l'ensemble de définition de f_n est $\mathbb{R}$.

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\sqrt{x^2+n} + x)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+n) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+n} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+n} + x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\sqrt{x^2+n} + x) = +\infty$

Il s'ensuit que, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\sqrt{x^2+n} + x)}{x}$.

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(\sqrt{1+\frac{n}{x^2}}+1\right)\right).$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{1+\dfrac{n}{x^2}}+1\right) = \ln 2$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(\sqrt{1+\dfrac{n}{x^2}}+1\right) = 0$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(\sqrt{1+\dfrac{n}{x^2}}+1\right)\right) = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x} = 0$.

Interprétation graphique : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x} = 0$ donc (C_n) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(\sqrt{x^2+n}+x)$.

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(\dfrac{n}{\sqrt{x^2+n}-x})$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{n}{\sqrt{x^2+n}-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(\dfrac{n}{\sqrt{x^2+n}-x}) = -\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x^2+n}+x)}{x}$.

Posons : $u = -x$.

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x^2+n}+x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{(-u)^2+n}-u)}{-u}$

$= \lim\limits_{u\to+\infty} (-\dfrac{1}{u})\ln(\sqrt{u^2+n}-u)$

$= \lim\limits_{u\to+\infty} (-\dfrac{1}{u})(\ln(n) - \ln(\sqrt{u^2+n}+u))$

$= \lim\limits_{u\to+\infty} [-\dfrac{\ln(n)}{u} + \dfrac{\ln(\sqrt{u^2+n}+u)}{u}]$

$= \lim\limits_{u\to+\infty} [-\dfrac{\ln(n)}{u} + \dfrac{f_n(u)}{u}]$.

On a $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{u} = 0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{f_n(u)}{u} = 0$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} [-\dfrac{\ln(n)}{u} + \dfrac{f_n(u)}{u}] = 0$

Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x^2+n}+x)}{x} = 0$.

En définitive, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = 0$.

Interprétation graphique : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = 0$.

Donc (C_n) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

3. a) Pour tout nombre réel x, $f_n'(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+n}}+1}{\sqrt{x^2+n}+x}$.

$$= \frac{x+\sqrt{x^2+n}}{\sqrt{x^2+n}\left(\sqrt{x^2+n}+x\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+n}}.$$

b) Pour tout nombre réel x, $f_n'(x) > 0$.

Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f_n.

x	$-\infty$ $+\infty$
$f_n'(x)$	+
$f_n(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

4. $f_n\left(\dfrac{1-n}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{\left(\dfrac{1-n}{2}\right)^2+n}+\dfrac{1-n}{2}\right)$

$$= \ln\left(\sqrt{\frac{1}{4}(1-2n+n^2)+n}+\frac{1-n}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{(1-2n+n^2)+4n}+\frac{1-n}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+2n+n^2}+\frac{1-n}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2}+\frac{1-n}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1-n}{2}\right)$$

$$= \ln 1$$
$$= 0.$$

5. On a $(T_n) : y = f_n'(0)(x-0) + f_n(0)$

Puisque, $f_n(0) = \dfrac{\ln n}{2}$ et $f_n'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Donc, $(T_n) : y = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(x-0) + \dfrac{\ln n}{2}$

$$y = \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{2}.$$

6. **a)** Pour tout nombre réel x, $h_n'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$$h_n'(x) = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{x^2+n}}{\sqrt{n}\sqrt{x^2+n}}.$$

Pour tout nombre réel x, $\sqrt{n}\sqrt{x^2+n} > 0$.

Il s'ensuit que, le signe de $h_n'(x)$ est celui de $\sqrt{n} - \sqrt{x^2+n}$.

Pour tout nombre réel x,

$$\begin{aligned} \sqrt{n} - \sqrt{x^2+n} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+n} = \sqrt{n} \\ &\Leftrightarrow x^2 + n = n \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\sqrt{n} - \sqrt{x^2+n} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+n} > \sqrt{n}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 + n > n \\ &\Leftrightarrow x^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq 0. \end{aligned}$$

On déduit de ce qui précède que pour tout nombre réel x, $h_n'(x) \leq 0$.

Donc h_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) $h_n(0) = 0$.

h_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Donc, $x < 0$ implique $h_n(x) > h_n(0)$. Or, $h_n(0) = 0$ donc $h_n(x) > 0$

Par suite, $f_n(x) - \left(\dfrac{x}{\sqrt{n}} + \dfrac{\ln n}{2}\right) > 0$.

$$f_n(x) > \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{2}\right)$$

Par conséquent, (C_n) est au dessus de (T_n) sur $]-\infty\,;0[$.

Par ailleurs, $x > 0$ implique $h_n(x) < h_n(0)$

$$h_n(x) < 0$$

On en déduit que $f_n(x) - \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{2}\right) < 0.$

$$f_n(x) < \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{2}.$$

Par suite, (C_n) est en - dessous de (T_n) sur$]0; +\infty[$,

Enfin (C_n) et (T_n) se coupent au point d'abscisse 0.

7. Pour tout nombre réel x,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+n+1} + x\right) - \ln\left(\sqrt{x^2+n} + x\right)$$

Pour tout entier naturel n, $n+1 > n$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + n+1 > x^2 + n$

$$\sqrt{x^2+n+1} > \sqrt{x^2+n}$$

$$\sqrt{x^2+n+1} + x > \sqrt{x^2+n} + x.$$

$\ln\left(\sqrt{x^2+n+1} + x\right) > \ln\left(\sqrt{x^2+n} + x\right)$, car la fonction ln est strictement croissante.

$$\ln\left(\sqrt{x^2+n+1} + x\right) - \ln\left(\sqrt{x^2+n} + x\right) > 0$$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0.$$

Par suite, la courbe (C_{n+1}) est au –dessus de la courbe (C_n) sur $\mathbb{R}$.

8. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R})$.

$f_n(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ alors, $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Partie B

1. Pour tout nombre réel, $f_1(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$.

Et, $f_1(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2+1}-x)$

$$= \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= -\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$$

$f_1(-x) = -f_1(x)$.

En définitive : $\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ et $f_1(-x) = -f_1(x)$

Donc, la fonction f_1 est impaire.

Interprétation graphique ; La courbe (C_1) est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $f_1(x) = y$.

f_1 est impaire implique $f_1(-x) = -y$

Donc, $\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = y$ et $\ln(\sqrt{(-x)^2+1}-x) = -y$,

$$\sqrt{x^2+1}+x = e^y \ (1) \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2+1}-x = e^{-y} \ (2).$$

De (1) et (2), on déduit que $2x = e^y - e^{-y}$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

On en déduit que f_1^{-1} est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f_1^{-1}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

3. Tableau de variation de f_1.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	
$f_1(x)$	$-\infty$	0 ↗	$+\infty$

Tableau de variation de f_2.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f_2'(x)$		+	|	+	|	+	
$f_2(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{\ln 2}{2}$	↗	$+\infty$

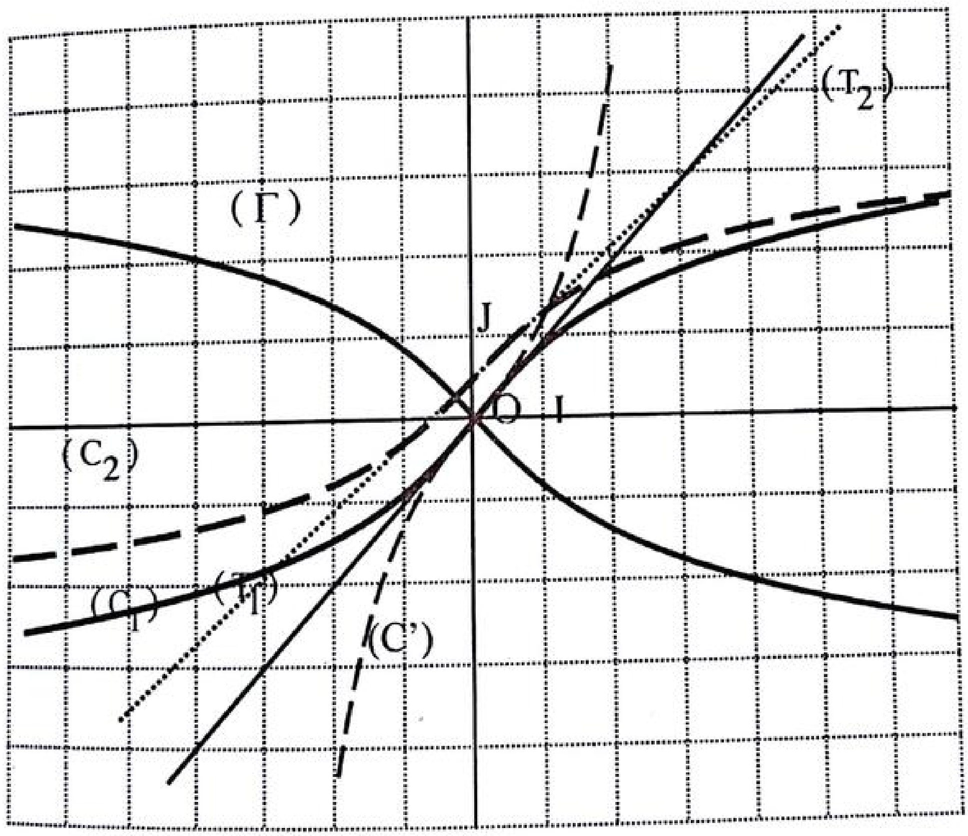
4. Construction : (C_1) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$: voir graphique

5. Pour tout nombre réel x, $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

$$= \ln(\sqrt{(-x)^2 + 1} + (-x))$$

$$= f_1(-x).$$

6. (Γ) est le symétrique de (C_1) par rapport l'axe des ordonnées.



Partie C

1. Pour tout nombre réel x, $f_1(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$$

$$= \ln(\sqrt{x^2+1}) + \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

2. Posons : $v_n(t) = (-t)^n$ et $S_n(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \ldots + (-t)^n$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $-t$ et S_n la somme de $(n+1)$ termes consécutifs de la suite (v_n)

Donc, $S_n(t) = \dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)}$

$$= \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$$

Il s'ensuit que : $\dfrac{1}{1+t} = S_n(t) + \dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t}$.

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \ldots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}.$$

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*\setminus\{-1\}$, $t \neq 0$ et $t \neq -1$, $t^2 \neq 0$ et $t^2 \neq -1$.

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

$$\frac{t}{1+t^2} = t - t^3 + t^5 - t^7 + t^9 + \ldots + (-1)^n t^{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+3}}{1+t^2}.$$

Donc, $\displaystyle\int_0^x \frac{t\,dt}{1+t^2} = \int_0^x (t - t^3 + t^5 - t^7 + \ldots + (-1)^n t^{2n+1})dt + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2}$

$$\frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2}$$

Or, $\dfrac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^x = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Donc, $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = P_n(x) + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2}$

où $P_n(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$

4. Pour tout nombre réel $t \in [0;1]$, $0 \le t \le 1$ donc $t^{2n+3} \ge 0$.

On a $1+t^2 \ge 1$ donc $\frac{1}{1+t^2} \le 1$.

En multipliant les deux membres par t^{2n+3},

$$\frac{t^{2n+3}}{1+t^2} \le t^{2n+3}$$

Donc,
$$\int_0^1 \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2} \le \int_0^1 t^{2n+3}dt.$$

Comme, $\int_0^1 t^{2n+3}dt = \left[\frac{1}{2n+4}t^{2n+4}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+4}$.

alors
$$\int_0^1 \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2} \le \frac{1}{2n+4}.$$

5. $f_1(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ où $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = P_n(x) + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2}$

avec $P_n(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$.

On a, $f_1(1) = \frac{1}{2}\ln(1^2+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1^2+1}}\right)$

Donc $f_1(1) = P_n(1) + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2} + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= U_n + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2}$$

où $U_n = P_n(1)$ donc $U_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+2}$.

6. $U_n = f_1(1) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2}$.

On a $\left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2}\right| = \int_0^1 \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2}$ et $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2} \leq \frac{1}{2n+4}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+4} = 0$ alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+3}\,dt}{1+t^2} = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}\ln 2$.

DEVOIR N° 18

EXERCICE 1

1. $N_2 = 11$ est un nombre premier ;

$N_3 = 111 = 3 \times 37$. Donc N_3 n'est pas un nombre premier

$N_4 = 1111 = 11 \times 101$ Donc N_4 n'est pas un nombre premier.

2. $(10-1)(10^{p-1} + 10^{p-2} + ... + 10^0) = 10^p - 1$

$9(10^{p-1} + 10^{p-2} + ... + 10^0) = 10^p - 1$.

Donc, $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

N_p est un entier naturel .

Par conséquent $10^p - 1$ est divisible par 9.

3. a) $p \geq 2$, $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9} = \dfrac{10^{2q} - 1}{9}$

$= (100-1)\left(\dfrac{100^{q-1} + 100^{q-2} + ... + 100^0}{9} \right)$

$= 11 \times (100^{q-1} + 100^{q-2} + ... + 100^0)$.

Donc N_p est divisible par 11, c'est à dire par N_2.

b) $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9} = \dfrac{10^{3q} - 1}{9}$

$N_p = (1000 - 1)\dfrac{1000^{q-1} + 1000^{q-2} + ... + 1000^0}{9}$

$N_p = 111 \times (1000^{q-1} + 1000^{q-2} + ... + 1000^0)$.

Donc N_p est divisible par N_3 .

c) $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9} = \dfrac{10^{kq} - 1}{9}$

$N_p = (10^k - 1)\left(\dfrac{10^{k(q-1)} + 10^{k(q-2)} + ... + 10^{k\times 0}}{9}\right)$

$N_k = \dfrac{10^k - 1}{9}$ implique $10^k - 1 = 9\ N_k$

Donc $N_p = (10^{k(q-1)} + 10^{k(q-2)} + ... + 10^{k\times 0}) \times N_k$.

Il s'ensuit que N_p est divisible par N_k.

EXERCICE 2

1. $8\sqrt{2}\,(-1 + i) = 16\,e^{\frac{3i\pi}{4}}$

Posons : $z = re^{i\alpha}$,

Il s'ensuit que pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 = 8\sqrt{2}\,(-1 + i) \Leftrightarrow r^4 = 16 \text{ et } 4\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[4]{16} \text{ et } \alpha = \frac{3\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}\,;\, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r = 2 \text{ et } \alpha_k = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\,;\, k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

Donc les solutions sont les nombres complexes $z_k = 2\,e^{i(\frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2})}$ où $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

On obtient $z_0 = 2\,e^{\frac{3i\pi}{16}}$, $z_1 = 2\,e^{\frac{11i\pi}{16}}$, $z_2 = 2\,e^{\frac{19i\pi}{16}}$ et $z_3 = 2\,e^{\frac{27i\pi}{16}}$.

Par conséquent, l'ensemble solution $S = \{\ 2\,e^{\frac{3i\pi}{16}}\,;\, 2\,e^{\frac{11i\pi}{16}}\,;\, 2\,e^{-\frac{13i\pi}{16}}\,;\, 2\,e^{-\frac{5i\pi}{16}}\ \}$

2. $$e^{\frac{3i\pi}{16}} + e^{\frac{11i\pi}{16}} + e^{-\frac{13i\pi}{16}} + e^{-\frac{5i\pi}{16}} = e^{\frac{3i\pi}{16}} + e^{\frac{11i\pi}{16}} + e^{\frac{19i\pi}{16}} + e^{\frac{27i\pi}{16}}$$

$$= e^{\frac{3i\pi}{16}}\,(1 + e^{\frac{8i\pi}{16}} + e^{i\pi} + e^{\frac{24i\pi}{16}})$$

$$= e^{\frac{3i\pi}{16}}(1 + i - 1 - i)$$
$$= 0$$

Il en résulte que la somme des solutions est nulle.

PROBLEME

Partie A

1. $\forall x \in]0;+\infty[,\ g'(x) = 2\ln x + (2x-1) \times \frac{1}{x} - 1$

$$= \ln x^2 + 2 - \frac{1}{x} - 1.$$

$$g'(x) = \ln(x^2) - \frac{1}{x} + 1.$$

2. **a)** $g'(1) = \ln(1^2) - \frac{1}{1} + 1 = 0.$

b) $\forall x \in]0;1[,\quad 0 < x < 1$

$$x^2 < 1\ ;$$

$$\ln(x^2) < \ln 1$$

$$\ln(x^2) < 0$$

$$\ln(x^2) + 1 < 1 \quad (1).$$

Par ailleurs, $0 < x < 1$ implique $1 < \frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x} < -1 \quad (2).$

En ajoutant membre à membre les inégalités (1) et (2),

Il s'ensuit que, $\ln(x^2) - \frac{1}{x} + 1 < 0.$

On en déduit que : $g'(x) < 0$.

On laisse le soin au lecteur, d'établir par une démarche semblable à la précédente que :

$\forall x \in]1;+\infty[,\ g'(x) > 0$

3. $\forall x \in]0;1[, \quad g'(x) < 0$

Donc, g est strictement décroissante sur $]0;1[$.

Et, $\forall x \in]1;+\infty[, \ g'(x) > 0$

Donc, g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

4. $g(1) = (2\times 1 - 1)\ln 1 - 1 + 1 = 0.$

g est strictement décroissante sur $]0;1[$.

Par suite, $\forall x \in]0;1[\ , \ x < 1$.

$g(x) > g(1)$.

$g(x) > 0$ car $g(1) = 0$

Par ailleurs, g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

$\forall x \in]1;+\infty[\ , \quad x > 1$

$g(x) > g(1)$

$g(x) > 0$.

En définitive : $\forall x \in]0;+\infty[\setminus \{1\}, \ g(x) > 0$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x}{\ln(x)} = \lim\limits_{x\to 0} (x^2 - x)\dfrac{1}{\ln x}$.

On a $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 - x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln x} = 0.$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 - x)\dfrac{1}{\ln x} = 0.$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$

De plus $f(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x}{\ln x}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x}{\frac{\ln x}{x-1}}.$$

Puisque $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$; $\lim_{x \to 1} (x) = 1$ alors $\lim_{x \to 1} \frac{x}{\frac{\ln x}{x-1}} = 1$.

Or $f(1) = 1$ donc $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Il en découle que f est continue en 1.

2. $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{x^2-x}{\ln x}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x-1)\frac{1}{\ln x}$$

Or, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x-1) = -1$ donc, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x-1)\frac{1}{\ln x} = 0$.

Donc, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.

On en déduit que f est dérivable à droite en 0

Interprétation graphique : La courbe (C) admet à droite au point d'abscisse 0 une demi – tangente horizontale.

3. **a)** Considérons la fonction k définie sur [0; 1] par : $k(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$

On a $\forall x \in [0; 1]$, $k'(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

k est strictement croissante sur [0 ; 1] et $k(0) = 0$.

Donc, $\forall x \in]0; 1[$, $x > 0$

$k(x) > k(0)$.

$k(x) > 0$ car $k(0) = 0$

On en déduit que $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1)$.

D'une manière analogue, en considérant p définie sur $[0 ; 1]$ par $p(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$,

on établit que : $\forall x \in]0 ; 1[$, $\ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

En définitive, $\forall x \in]0 ; 1[$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

b) $\forall x \in]0 ; 1[$, $0 < x < 1$ donc $x^2 < x$ (1)

$$\frac{x^2}{2} < x$$

Donc, $$0 < x - \frac{x^2}{2}.$$

Par conséquent, $$0 < x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}} < \frac{1}{\ln(x+1)} < \frac{1}{x - \frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{x+1}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}} < \frac{x+1}{\ln(x+1)} < \frac{x+1}{x - \frac{x^2}{2}} \quad \text{car } x+1 > 0$$

$$\frac{x+1}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}} - \frac{1}{x} < \frac{x+1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} < \frac{x+1}{x - \frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x}$$

Donc, $$\frac{\frac{3}{2}-\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}} < h(x) < \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{x}{2}}$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{3}{2}-\frac{x^2}{3}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}} = \frac{3}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = \frac{3}{2}$.

Par ailleurs, $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\frac{x^2-x}{\ln(x)}-1}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}\right).$$

Effectuons un changement de variable : Posons $u = x-1$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} u = 0$ avec $u > 0$.

Il s'ensuit que, $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \left(\frac{u+1}{\ln(u+1)} - \frac{1}{u}\right)$$

$$= \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} h(u) = \frac{3}{2}.$$

4. On a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{2}$.

Donc, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{2}$.

Par conséquent, la fonction f est dérivable en 1 et on a : $f'(1) = \frac{3}{2}$.

Partie C

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x}}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

De plus, $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $x > 1$ donc $\ln x > 0$

$$\frac{\ln x}{x} > 0 \text{ car } x > 0.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x}} = +\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x}} = +\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{x^2 - x}{\ln x}}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} \times \frac{1}{\dfrac{\ln x}{x}}.$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x}} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} \times \dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x}} = +\infty$.

Par suite, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interprétation graphique : On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

On en déduit que la courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. a) $\forall x \in]0;+\infty[\setminus\{1\}$, $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\ln x - (x^2 - x) \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

$$= \frac{(2x-1)\ln x - x + 1}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(\ln x)^2}.$$

b) $\forall x \in]0;+\infty[\setminus\{1\}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\ln x)^2}$ et $(\ln x)^2 > 0$.

Donc le signe de f' est celui de g sur $]0;+\infty[\setminus\{1\}$.

D'après la question 4) de la Partie A) : $\forall x \in]0;+\infty[\setminus\{1\}, g(x) > 0$

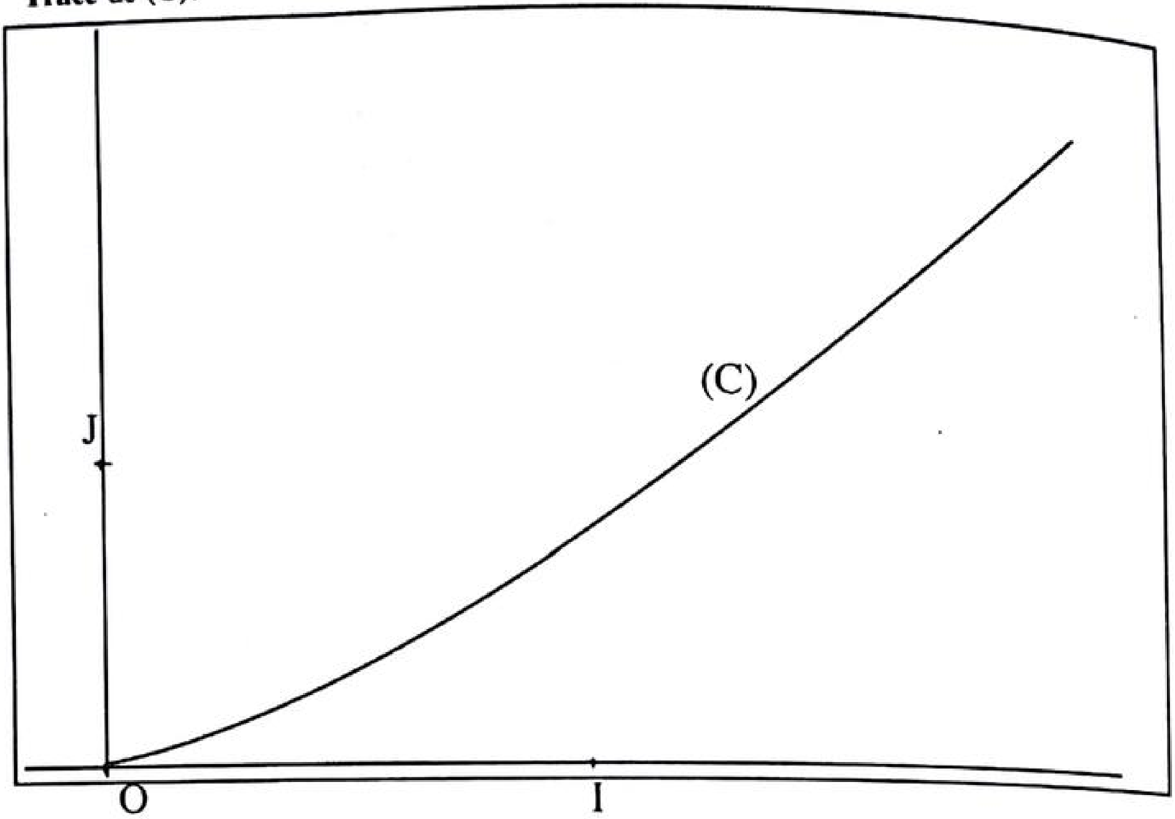
Il s'ensuit que : $\forall x \in]0;+\infty[\setminus\{1\}$, $f'(x) > 0$. De plus $f'(1) = \frac{3}{2}$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

c) Tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ 0	$+$	$\frac{3}{2}$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$			$+\infty$

3. Tracé de (C).



4. f est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Donc, f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $f([0\,;+\infty[) = [0\,;+\infty[$.

Partie D

1. f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $n > 0$ donc $\dfrac{1}{n} > 0$.

Par suite, $\dfrac{1}{n} \in [0\,;+\infty[$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution α_n dans $[0\,;+\infty[$.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2}$ donc $0 < \dfrac{1}{n} < 1$.

De plus, f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On en déduit que $0 < \alpha_n < 1$ pour tout entier naturel $n \geq 2$.

3. On a $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$.

Or pour tout entier naturel $n \geq 2$, $n+1 > n > 0$ donc $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

$$f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n).$$

Comme f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$ alors $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.

Donc, la suite (α_n) est strictement décroissante.

4. D'après la question 2) Partie D, pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a $0 < \alpha_n < 1$.

Il s'ensuit que la suite (α_n) est minorée.

De plus, la suite (α_n) est décroissante donc, la suite (α_n) est convergente.

5. a) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $V_n = n\alpha_n$.

On a $\qquad f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$.

$$\frac{\alpha_n^2 - \alpha_n}{\ln(\alpha_n)} = \frac{1}{n}.$$

$$\frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n - 1} = n\alpha_n.$$

$$\varphi(\alpha_n) = n\alpha_n.$$

On en déduit que : $V_n = \varphi(\alpha_n)$

b) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ car la suite (α_n) est strictement décroissante.

Donc $\varphi(\alpha_n) < \varphi(\alpha_{n+1})$.

$$V_n < V_{n+1}.$$

Par conséquent, la suite (V_n) est strictement croissante.

6. **a)** Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$.

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = L$ et $\lim\limits_{x \to L} f(x) = f(L)$ car f est continue en L donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\alpha_n) = f(L)$.

Il s'ensuit que $f(L) = 0$.

Puisque f réalise une bijection de sur $[0 ; +\infty[$ sur $[0 ; +\infty[$ avec $f(0) = 0$ alors $L = 0$.

b) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $V_n = \varphi(\alpha_n)$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x-1}$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} (x-1) = -1$ donc, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x-1} = +\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = +\infty$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = +\infty$. donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(\alpha_n) = +\infty$.

On conclut que : $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$.

DEVOIR N° 19

EXERCICE 1

1. a) $M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 16$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

On en déduit que (E) est une ellipse de centre O.

b) $OA^2 = 16$, $OB^2 = 4$ et $OF^2 = 16 - 4 = 12$.

Par suite, les foyers sont les points $F(2\sqrt{3},0)$ et $F'(-2\sqrt{3},0)$ et l'axe focal est la droite (OF)

Les sommets sur l'axe focal : Les points $A(4,0)$ et $A'(-4,0)$

Les autres sommets : Les points $B(0;2)$ et $B'(0;-2)$.

Les directrices : Les droites $(D) : x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ et et $(D') :\ x = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$

L'excentricité : $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Voir figure.

2. $\frac{1}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc, le rapport de S est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'angle de S est $-\frac{\pi}{4}$.

Affixe du centre Ω : $\dfrac{1+2i}{1-\frac{1}{2}(1-i)} = 3+i$.

Par conséquent, S est la similitude de centre $\Omega(3+i)$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

3. a) Soit (Γ) la conique de foyer F, de directrice (Δ) et d'excentricité e.

Soit M un point du plan et H son projeté orthogonal sur (Δ). Soit S une similitude directe de rapport k.

Posons : $S((\Delta)) = (\Delta')$, $S(M) = M'$, $S(F) = F'$ et $S(H) = H'$.

On a : $(MH) \perp (\Delta)$ avec $\{H\} = (MH) \cap (\Delta)$.

Les similitudes directes conservent l'orthogonalité donc : $(M'H') \perp (\Delta')$.

Les similitudes directes conservent le contact donc : avec $\{H'\} = (M'H') \cap (\Delta')$.

Les similitudes directes multiplient les distances par k donc : $\dfrac{M'F'}{M'H'} = \dfrac{kMF}{kMH} = \dfrac{MF}{MH}$.

$M' \in (\Gamma') \Leftrightarrow M \in (\Gamma)$, $(\Gamma') = S((\Gamma))$.

$\Leftrightarrow \dfrac{M'F'}{M'H'} = e.$

H' étant le projeté orthogonal de M' sur (Δ'), on conclut que l'image de (Γ) par S est la conique de foyer F', de directrice (Δ') et d'excentricité e. On aboutit à une conique de même nature.
On conclut que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature.

b) (E') est une ellipse de centre $O'(1+2i)$ où O' est l'image de O par s.

c) Affixe de $s(A)$: $z_A' = \frac{1}{2}(1-i)z_A + 1 + 2i = 3$

Affixe de $s(A')$: $z_{A'}' = \frac{1}{2}(1-i)z_{A'} + 1 + 2i = -1 + 4i$

Affixe de $s(B)$: $z_B' = \frac{1}{2}(1-i)z_B + 1 + 2i = 2 + 3i$

Affixe de $s(B')$: $z_{B'}' = \frac{1}{2}(1-i)z_{B'} + 1 + 2i = i$

Affixe de $s(F)$: $z_F' = \frac{1}{2}(1-i)z_F + \frac{3}{2} + i = 1 + \sqrt{3} + i(2 - \sqrt{3})$

Affixe de $s(F')$: $z_{F'}' = \frac{1}{2}(1-i)z_{F'} + \frac{3}{2} + i = 1 - \sqrt{3} + i(2 + \sqrt{3})$

4. Les éléments de symétries sont : Le centre $O'(1+2i)$, l'axe focal $(O'F')$ et la droite passant par O' et perpendiculaire à $(O'F')$.

5. Voir figure.

6. **a)** $z' = \frac{1}{2}(1-i)z + 1 + 2i$

$$x' + iy' = \frac{1}{2}(1-i)(x+iy) + 1 + 2i$$

$$x' + iy' = \frac{1}{2}(x + iy - ix + y) + 1 + 2i$$

$x' + iy' = \frac{1}{2}(x+y+2) + \frac{1}{2}i(-x+y+4)$. Il en découle $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y+2) \\ y' = \frac{1}{2}(-x+y+4) \end{cases}$ et $\begin{cases} x = x' - y' + 1 \\ y = x' + y' - 3. \end{cases}$

b) $M' \in s(D) \Leftrightarrow M \in (D)$

$$\Leftrightarrow x' - y' + 1 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x' - y' + 1 - \frac{8\sqrt{3}}{3} = 0.$$

Donc, une équation de l'image de (D) par s est $x - y + 1 - \frac{8\sqrt{3}}{3} = 0$.

Par une démarche analogue, une équation de l'image (D') de par s est $x - y + 1 + \frac{8\sqrt{3}}{3} = 0.$

c) On a : $\begin{cases} x = x' - y' + 1 \\ y = x' + y' - 3 \end{cases}$

Par suite, $M'(x', y') \in (E') \Leftrightarrow M(x, y) \in (E)$

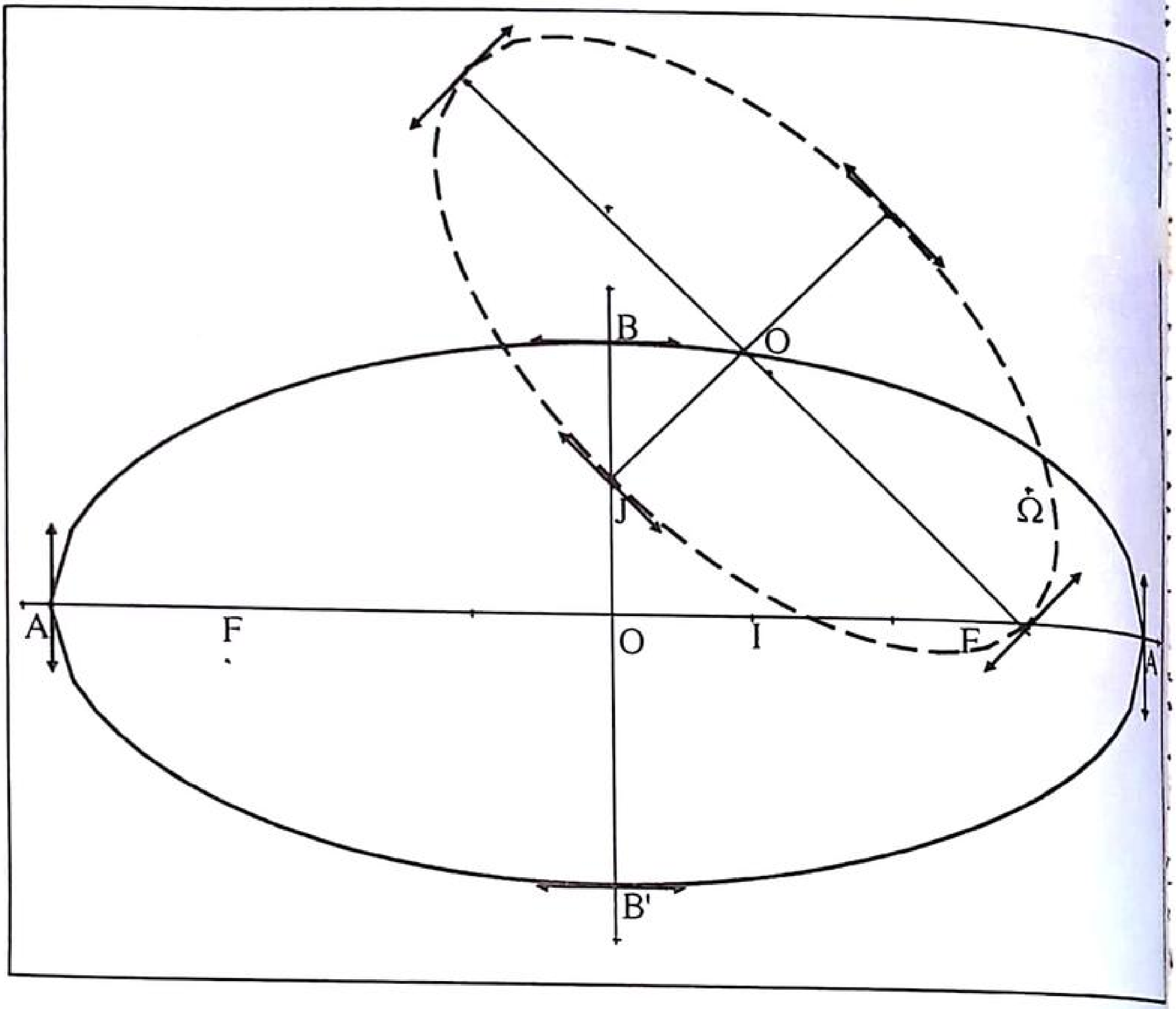
$$\Leftrightarrow (x' - y' + 1)^2 + 4(x' + y' - 3)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x'^2 + y'^2 - 2x'y' + 2x' - 2y' + 1) + 4(x'^2 + y'^2 + 2x'y' - 6x' - 6y' + 9) = 16$$

$$\Leftrightarrow 5x'^2 + 5y'^2 + 6x'y' - 22x' - 26y' + 21 = 0$$

Par conséquent, une équation de l'ensemble (E') est $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 22x - 26y + 21 = 0.$

Tracé de (E) et (E')



EXERCICE 2

1. **a)** $z_P \times z_Q = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$ donc, $z_P \times z_Q = -1$

b) $|z_P| = 1$ et $|z_Q| = 1$, donc $OP = 1$ et $OQ = 1$ donc, P et Q appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon 1.

c) P appartient à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ et au cercle de centre O et de rayon 1. Q appartient à la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et au cercle de centre O et de rayon 1 . On en déduit la construction de P et Q

d) $AP = AQ$ donc, le triangle APQ est isocèle en A

2. $|z-i|=|z-z_A|=AM$ et $\left|\dfrac{1}{z}+i\right|=\left|-\dfrac{1}{z}-i\right|=AN$.

3. Pour z différent de $0, i$ et $-i$, AMN isocèle en A si et seulement si $AM = AN$.
Donc, pour z différent de $0, i$ et $-i$,

$$\begin{aligned} AMN \text{ isocèle en } A \quad &\Leftrightarrow \quad |z-i|=\left|\frac{1}{z}+i\right| \\ &\Leftrightarrow \quad |z-i||z|=|1+iz| \\ &\Leftrightarrow \quad |z-i||z|=|i||z-i| \\ &\Leftrightarrow \quad |z|=1 \end{aligned}$$

Par conséquent, AMN isocèle en A et seulement si M appartient au cercle (C) .

4. Pour z différent de 0, i et $-$ i, M appartient au cercle $(C) \Rightarrow$ OM = 1

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |z|=1 \\ &\Rightarrow \sqrt{z\,\overline{z}}=1 \\ &\Rightarrow z\overline{z}=1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{z}=\overline{z} \end{aligned}$$

5. $|z|=1$ implique $\left|-\dfrac{1}{z}\right|=1$ donc, $ON=1$, Il s'ensuit que N appartient au cercle (C).

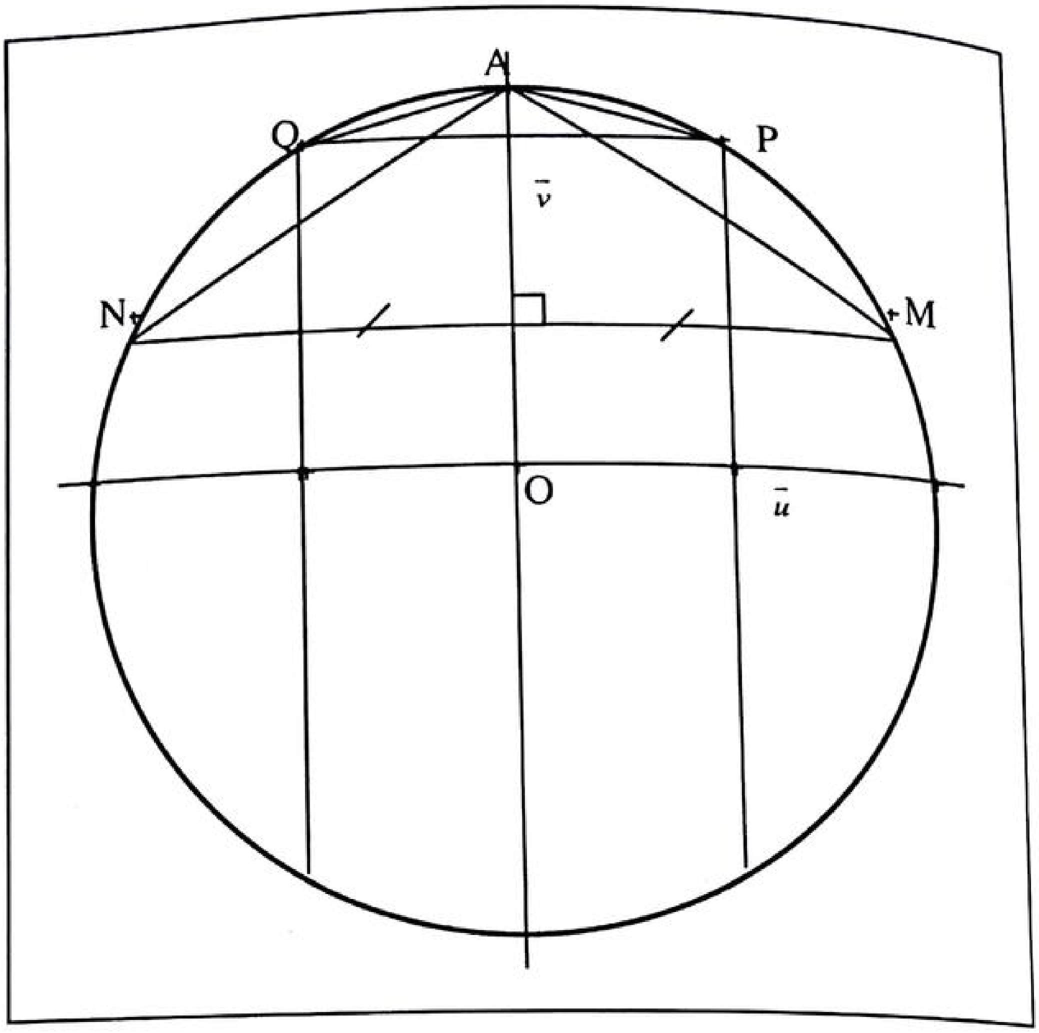
Par ailleurs, on a $\dfrac{1}{z}=\overline{z}$ donc $-\dfrac{1}{z}=-\overline{z}$. Soit I le milieu de $[MN]$. On a $z_I=\dfrac{z-\overline{z}}{2}=i\,\mathrm{Im}(z)$

Il en découle que le milieu du segment $[MN]$ appartient à l'axe imaginaire.

De plus, M appartient au cercle (C) implique $AM = AN$ car AMN isocèle en A .

Donc, A appartient à la médiatrice de $[MN]$. Comme A a pour affixe i, alors A appartient à l'axe imaginaire . On déduit de ce qui précède que l'axe imaginaire est la médiatrice de $[MN]$.

6. N appartient au cercle (C) et à la droite passant par M et qui est perpendiculaire à (OA)



PROBLEME

Partie A

Soit l'équation différentielle $(E): y'(x) - y(x) = (2x-1)e^{x^2} - e^x$

1. $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 2xe^{x^2} + (-1+1-x)e^x$

$$= 2xe^{x^2} - xe^x$$

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) - h(x) = 2xe^{x^2} - xe^x - (e^{x^2} + (1-x)e^x)$

$$h'(x) - h(x) = 2xe^{x^2} - xe^x - e^{x^2} - e^x + xe^x$$

$$h'(x) - h(x) = (2x-1)e^{x^2} - e^x$$

On en déduit que la fonction h est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)

2. $(E') \Leftrightarrow y' - y = 0$ donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto ke^{x}; k \in \mathbb{R}$.

3. h est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) donc, $h'(x) - h(x) = (2x-1)e^{x^2} - e^{x}$

On a $(E) \Leftrightarrow y' - y = (2x-1)e^{x^2} - e^{x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) - h(x) = (2x-1)e^{x^2} - e^{x}$

Il s'ensuit que, $(E) \Leftrightarrow y' - y - (h'(x) - h(x)) = (2x-1)e^{x^2} - e^{x} - ((2x-1)e^{x^2} - e^{x})$

$$(E) \Leftrightarrow (y-h)' - (y-h) = 0$$

Donc, y solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si et seulement si $y-h$ sur $\mathbb{R}$ de (E').

Il en découle que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto ke^{x} + h(x); k \in \mathbb{R}$.

4. Déterminons le nombre réel k tel que $H(x) = ke^{x} + h(x)$

On a $H(1) = 0 \Leftrightarrow ke^{1} + h(1) = 0$

$$\Leftrightarrow ke + e + (1-1)e = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -1$$

En définitive, $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = -1 \times e^{x} + e^{x^2} + (1-x)e^{x}$

$$H(x) = e^{x^2} - xe^{x}$$

Partie B

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{x^2} - xe^{x})$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{x^2} - xe^{x}) = +\infty$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(e^{x^2} - xe^{x})}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(x\frac{e^{x^2}}{x^2} - e^{x}\right)$$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$; Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} x\dfrac{e^{x^2}}{x^2} = -\infty$

De plus, $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc, $\lim_{x\to-\infty}(x\frac{e^{x^2}}{x^2} - e^{x}) = -\infty$

Par conséquent, $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$

Nature de la branche infinie : Puisque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^{x^2} - xe^{x})$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{x^2}}{xe^{x}} - 1)xe^{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{x^2-x}}{x} - 1)xe^{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}((x-1)\frac{e^{x^2-x}}{x^2-x} - 1)xe^{x}.$$

On a ; $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ donc, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2-x}}{x^2-x} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty}((x-1)\frac{e^{x^2-x}}{x^2-x} - 1) = +\infty$

De plus, $\lim_{x\to+\infty} xe^{x} = +\infty$.

Par suite, $\lim_{x\to+\infty}((x-1)\frac{e^{x^2-x}}{x^2-x} - 1)xe^{x} = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2} - xe^{x}}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x} - e^{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{x^2-x}}{x} - 1)e^{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left((x-1)\frac{e^{x^2-x}}{x^2-x}-1\right)e^{x}$$

On a $\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)\frac{e^{x^2-x}}{x^2-x}-1\right)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} xe^{x}=+\infty$ donc,

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)\frac{e^{x^2-x}}{x^2-x}-1\right)e^{x}=+\infty$$

Donc, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

b) Interprétation graphique : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ donc, la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3. Pour tout nombre réel x, $f'(x)=2xe^{x^2}-(x+1)e^{x}$

4. a) $f'(1)=2\times1\times e^{1^2}-(1+1)e^{1}$
$=2e-2e$
$=0$

$f'(0)=2\times0\times e^{0^2}-(0+1)e^{0}=-1$

b) On a $2x-(x+1)=x-1$ donc, $\forall x\in]1;+\infty[$ $2x>x+1$ (1)

De plus, $\forall x\in]1;+\infty[$, $x^2>x$ donc, $e^{x^2}>e^{x}$ (2).

De (1) et (2) il s'ensuit que $2xe^{x^2}>(x+1)e^{x}$; $2xe^{x^2}-(x+1)e^{x}>0$

Par conséquent, $f'(x)>0$.

Par ailleurs, $\forall x\in]0;1[$, $2x<x+1$ et $e^{x^2}<e^{x}$ donc, $2xe^{x^2}<(x+1)e^{x}$

Par suite, $f'(x)<0$.

c) $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=2xe^{x^2}-(x+1)e^{x}$
$=2xe^{x^2}-e^{x}-xe^{x}$
$=x(2e^{x^2}-e^{x})-e^{x}$.

On a $\forall x\in]-\infty;0[$, $x<0$ et $x^2>0$ donc, $e^{x^2}>e^{x}$ car la fonction exp. est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$2e^{x^2} > e^x$$

$$x(2e^{x^2} - e^x) < 0 \text{ car } x < 0.$$

Puisque $e^x > 0$, donc $x(2e^{x^2} - e^x) - e^x < 0$. On en déduit que : $f'(x) < 0$

5. $\forall x \in]-\infty;1[$, $f'(x) < 0$ donc, f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$.
   $\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc, f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = e^{1^2} - 1 \times e^1 = e - e = 0$

6. Une équation de (T) est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. On a : $f'(0) = -1$ et. $f(0) = e^{0^2} - 0 \times e^0 = 1$
   Donc : $y = -(x-0) + 1$
   $y = -x + 1$.

Partie C

1. On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) + x - 1$
   $g(0) = f(0) + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $g(1) = f(1) + 1 - 1 = 0$.

2. a) $\forall x \in]0;+\infty[$, $t'(x) = xe^x > 0$
   Il s'ensuit que t est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
   Donc, $x > 0 \Rightarrow t(x) > t(0)$
   $\Rightarrow t(x) > 0$ car $t(0) = 0$.

   b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $\varphi'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \dfrac{t(x)}{x^2}$

   On a $\forall x \in]0;+\infty[$, $x^2 > 0$ et $t(x) > 0$. Par conséquent, $\dfrac{t(x)}{x^2} > 0$
   donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $\varphi'(x) > 0$
   On en déduit que la fonction φ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

c) La fonction φ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Pour tout nombre réel x appartenant à $]0;1[$, on a $0 < x^2 < x < 1$ donc, $\varphi(x^2) < \varphi(x)$

Pour tout nombre réel x appartenant à $]1;+\infty[$, on a $1 < x < x^2$ donc, $\varphi(x) < \varphi(x^2)$.

d) $\forall x \in]0;1[,\ \varphi(x^2) < \varphi(x)$

Donc, $\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} < \dfrac{e^x-1}{x}$

En multipliant membre à membre par x^2, $\quad e^{x^2} - 1 < x(e^x - 1)$

$$e^{x^2} - 1 - x(e^x - 1) < 0$$

$$e^{x^2} - 1 - xe^x + x < 0$$

$$e^{x^2} - xe^x + x - 1 < 0$$

On conclut que : $\forall x \in]0;1[,\ g(x) < 0$.

Par ailleurs, $\forall x \in]1;+\infty[,\ \varphi(x) < \varphi(x^2)$

Par suite, $\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} > \dfrac{e^x-1}{x}$

$$x(e^x - 1) < e^{x^2} - 1$$

$$e^{x^2} - 1 - xe^x + x > 0$$

$e^{x^2} - xe^x + x - 1 > 0$. Il en résulte que : $\forall x \in]1;+\infty[,\ g(x) > 0$

En définitive, $\forall x \in]0;1[,\ g(x) < 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[,\ g(x) > 0$.

Complément : Démontrons autrement que : $\forall x \in]1;+\infty[,\ g(x) > 0$.

$\forall x \in]1;+\infty[,\ g'(x) = f'(x) + 1$. Comme $\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) > 0$ alors $f'(x) + 1 > 0$.

On en déduit que $g'(x) > 0$.

$\forall x \in]1;+\infty[,\ g'(x) > 0$ donc, g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

Par suite, $x > 1 \Rightarrow g(x) > g(1)$

$\Rightarrow g(x) > 0$ car $g(1) = 0$.

3. $\forall x \in]-\infty;0[$, $x < 0$ et $x^2 > 0$

$$e^{x^2} > e^0 \text{ et } e^x < e^0$$

$$e^{x^2} - 1 > 0 \text{ et } e^x - 1 < 0 \text{ donc } e^{x^2} - 1 > 0 \text{ et } x(e^x - 1) > 0.$$

Par ailleurs, $\forall x \in]-\infty;0[$, $g(x) = e^{x^2} - xe^x + x - 1$

$= e^{x^2} - 1 + x(1 - e^x)$. Puisque $e^{x^2} - 1 > 0$ et $x(e^x - 1) > 0$

donc $e^{x^2} - 1 + x(1 - e^x) > 0$. On en déduit que : $\forall x \in]-\infty;0[$, $g(x) > 0$.

4. On a $\forall x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $g(x) > 0$.

$f(x) - (-x+1) > 0$. Donc (C_f) est au dessus de (T) sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$.

Par ailleurs, $\forall x \in]0;1[$, $g(x) < 0$.

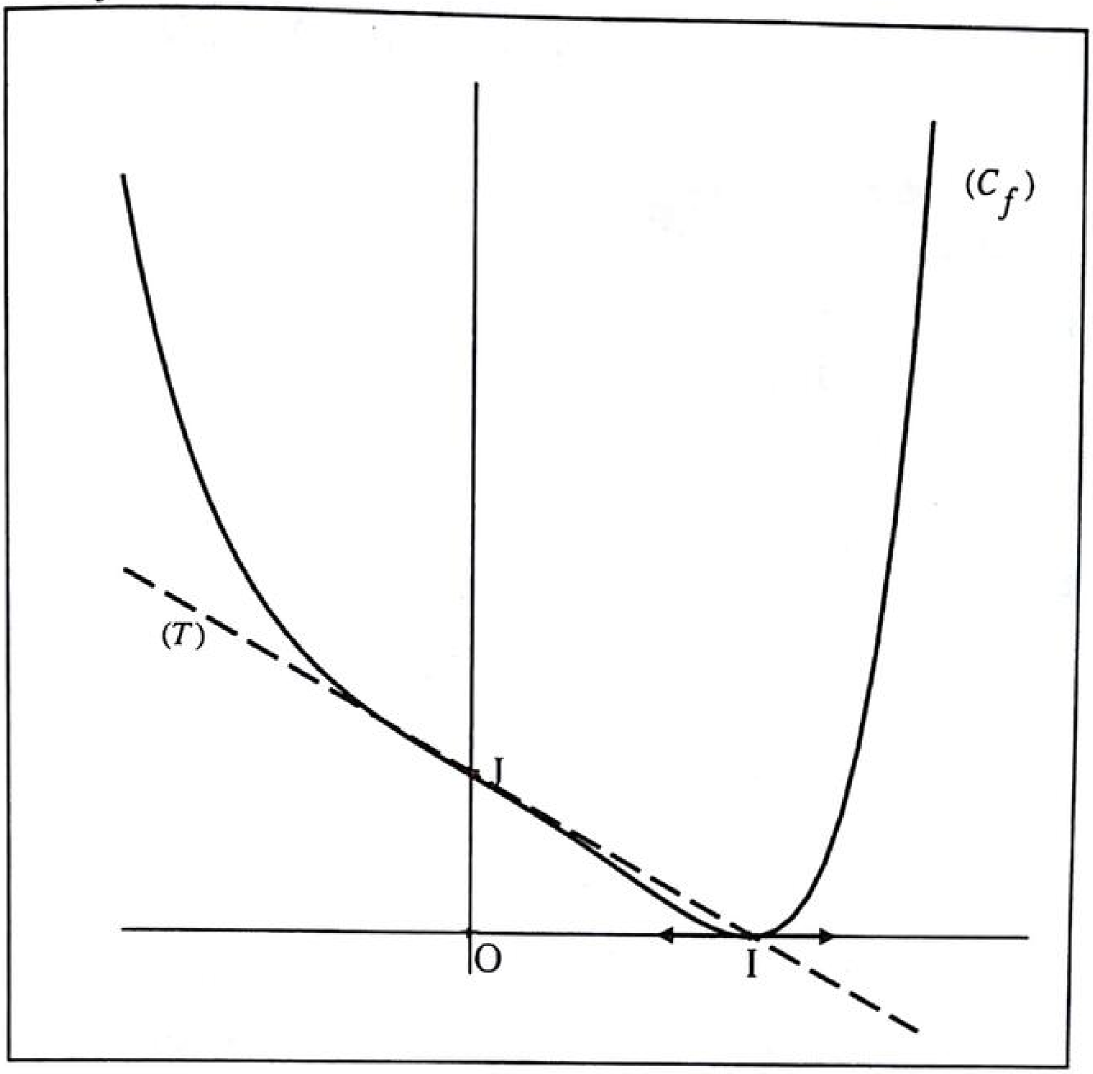
$f(x) - (-x+1) < 0$ donc (C_f) est en dessous de (T) sur $]0;1[$.

Enfin, pour $x = 0$ ou $x = 1, g(x) = 0$

$$f(x) - (-x+1) = 0$$

Par conséquent, (C_f) et (T) se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.

5. Tracé de (T) et (C_f).



DEVOIR N° 20

EXERCICE 1

1. $z' = i(x+iy)^2 + x + iy + 1$

$= i(x^2 - y^2 + 2ixy) + x + iy + 1$

$= x - 2xy + 1 + i(x^2 - y^2 + y)$.

2. **a)** z' est un nombre réel $\Leftrightarrow x^2 - y^2 + y = 0$

$$\Leftrightarrow (y - \frac{1}{2})^2 - x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{X^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 .$$

Posons $X = x$ et $Y = y - \frac{1}{2}$ et soit $S(0;\frac{1}{2})$ et $(X;Y)$ coordonnées de M dans (S,I,J)

Donc, l'ensemble (H_1) est une hyperbole équilatère de centre S, d'axe focal la droite d'équation $x = 0$. Les sommets sur l'axe focal sont les points $B(0;1)$ et O dans (S,I,J).

Les asymptotes sont les droites d'équations $y = x + \frac{1}{2}$ et $y = -x + \frac{1}{2}$.

Pour le tracé : Voir graphique.

b) z' est un imaginaire pure $\Leftrightarrow x - 2xy + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2xy = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{2x}$$

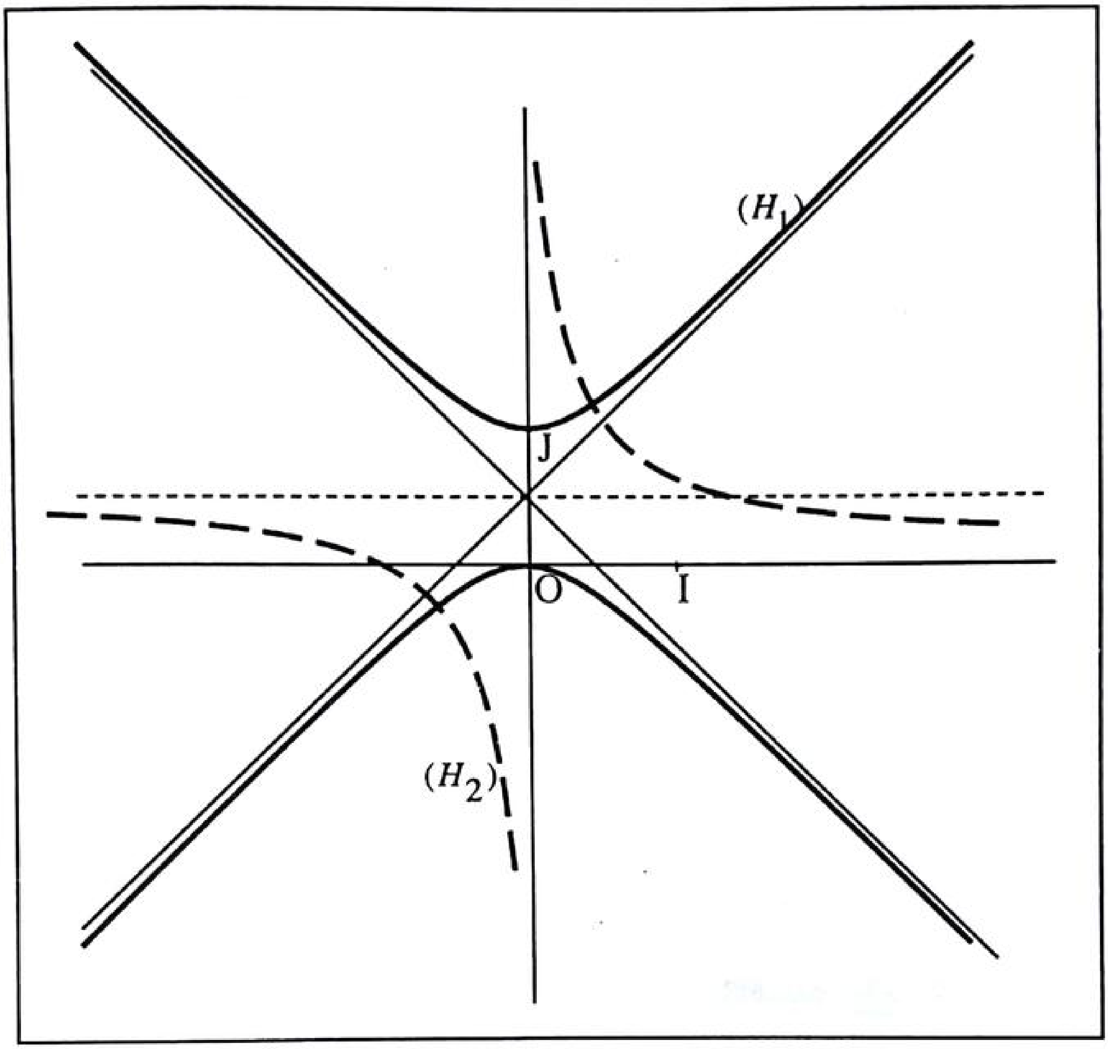
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}.$$

Par conséquent (H_2) est une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Les asymptotes sont les droites d'équations $x=0$ et $y=\frac{1}{2}$.

Pour le tracé : Voir graphique.

Tracé de (H_1) et (H_2)



EXERCICE 2

1. Posons : $u(x)=x^2z$. On a $u'(x)=x^2z'+2xz$; $u''(x)=x^2z''+2xz'+2xz'+2z$

Donc, x^2z est solution de $(E) \Leftrightarrow x^2(x^2z''+2xz'+2xz'+2z)-2x^2z=0$

$$\Leftrightarrow x^4z''+4x^3z'+2x^2z-2x^2z=0$$

$$\Leftrightarrow x^4z''+4x^3z'=0.$$

Posons $v(x) = x^4 z'$. On a $v'(x) = x^4 z'' + 4x^3 z'$

Par suite, $x^2 z$ est solution de $(E) \Leftrightarrow v'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow v(x) = A; A \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow x^4 z' = A; A \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, $x^2 z$ est solution de (E) si et seulement si z' est solution de $(E') : x^4 z = A; A \in \mathbb{R}$.

2. $(E') \Leftrightarrow z = \frac{A}{x^4}; A \in \mathbb{R}$. Donc, les solutions sur $]-\infty;0[$ de l'équation (E') sont les fonctions $x \mapsto \frac{A}{x^4}; A \in \mathbb{R}$.

3. z' est solution de $(E') \Leftrightarrow z' = \frac{A}{x^4}; A \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow z = -\frac{A}{3x^3} + B; A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow x^2 z = -\frac{A}{3x} + Bx^2; A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Il en découle que les solutions sur $]-\infty;0[$ de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto -\frac{A}{3x} + Bx^2$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

4. Laissé au soin du lecteur.

PROBLEME

Partie A

1. **a)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (\ln x)^2 = +\infty$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(2\ln(\sqrt{x}))^2}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$;

$$\lim_{x \to +\infty} 4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Interprétation graphique : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ donc, (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

2. **a)** $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x}$

b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $x > 0$ donc, le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln x$.

Pour x appartenant à $]0;+\infty[$, $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Par suite, $\forall x \in]0;1[$, $\ln x < 0$; $f'(x) < 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0;1[$.

$\forall x \in]1;+\infty[$, $\ln x > 0$; $f'(x) > 0$.

Il s'ensuit que f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

Tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = (ln1)^2 = 0.$

Partie B

1. **a)** f_1 est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$ donc, f_1 réalise une bijection de $]0;1[$ sur $f_1(]0;1[)$. On a $f_1(]0;1[) =]f_1(1); \lim_{x\to 0} f_1(x)[=]0;+\infty[$.

b) f_2 est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$ donc, f_1 réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur $f_2(]1;+\infty[)$. On a $f_2(]1;+\infty[) =]f_2(1); \lim_{x\to +\infty} f_2(x)[=]0;+\infty[$.

2. **a)** Soit $x \in]0;1[$ et $y \in]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} f_1(x) = y &\Leftrightarrow (\ln x)^2 = y \\ &\Leftrightarrow (\ln x)^2 = (\sqrt{y})^2 \\ &\Leftrightarrow \ln x = \sqrt{y} \text{ ou } \ln x = -\sqrt{y} \\ &\Leftrightarrow x = e^{\sqrt{y}} \text{ ou } x = e^{-\sqrt{y}} \\ &\Leftrightarrow x = e^{-\sqrt{y}} \text{ car } -\sqrt{y} < 0 \Rightarrow e^{-\sqrt{y}} \in]0;1[\end{aligned}$$

et $\sqrt{y} > 0 \Rightarrow e^{\sqrt{y}} \in]1;+\infty[$.

Il en résulte que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f_1^{-1}(x) = e^{-\sqrt{x}}$

Par ailleurs, soit, $x \in]1;+\infty[$ et $y \in]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f_2(x) = y &\Leftrightarrow x = e^{\sqrt{y}} \text{ ou } x = e^{-\sqrt{y}} \\ &\Leftrightarrow x = e^{\sqrt{y}} \text{ car } -\sqrt{y} < 0 \Rightarrow e^{-\sqrt{y}} \in]0;1[\end{aligned}$$

et $\sqrt{y} > 0 \Rightarrow e^{\sqrt{y}} \in]1;+\infty[$.

Par conséquent, $\forall x \in]0;+\infty[,\ f_2^{-1}(x) = e^{\sqrt{x}}$.

b) f_1^{-1} a même sens de variation que f_1 sur $]0;+\infty[$.
Il s'ensuit le tableau de variation suivant.

x	0		$+\infty$
${f_1^{-1}}'(x)$		$-$	
$f_1^{-1}(x)$	1	$\searrow$	0

f_2^{-1} a même sens de variation que f_2 sur $]0;+\infty[$.
Il en résulte le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
${f_2^{-1}}'(x)$		$+$	
$f_2^{-1}(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Une équation de (T_2) est $y = (f_2^{-1})'(1)(x-1) + f_2^{-1}(1)$

On a : $\forall x \in]0;+\infty[$, $(f_2^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$ donc, $(f_2^{-1})'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} e^{\sqrt{1}} = \dfrac{e}{2}$.

On a $f_2^{-1}(1) = e^{\sqrt{1}} = e$

Donc : $y = \dfrac{e}{2}(x-1) + e$

$y = \dfrac{e}{2}(x+1)$.

4. **a)** $\forall x \in]0;+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \dfrac{e}{2}$; $h''(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} e^{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

$$= \frac{-1}{4x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x} e^{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}.$$

b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $x\sqrt{x} > 0$ et $e^{\sqrt{x}} > 0$ donc, le signe de $h''(x)$ est celui de $\sqrt{x} - 1$

Pour $x \in]0;+\infty[$, $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $\sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Par conséquent, $\forall x \in]0;1[$, $h''(x) < 0$ donc, h' est strictement décroissante sur $]0;1[$.
$\forall x \in]1;+\infty[$, $h''(x) > 0$ donc, h' est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

c) $h'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} e^{\sqrt{1}} - \frac{e}{2} = \frac{e}{2} - \frac{e}{2} = 0$

De plus, h' strictement décroissante sur $]0;1[$.

Donc, $0 < x < 1 \Rightarrow h'(1) < h'(x)$

$\Rightarrow 0 < h'(x)$

Par ailleurs, h' strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

Donc, $x > 1 \Rightarrow h'(x) > h'(1)$

$\Rightarrow h'(x) > 0$

En définitive, h' est strictement positive sur. $]0;+\infty[\setminus\{1\}$.

5. $h(1) = e^{\sqrt{1}} - \frac{e}{2}(1+1) = e - e = 0$

$\forall x \in]0;+\infty[\setminus\{1\}$, $h'(x) > 0$ et $h'(1) = 0$. Par suite, h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Donc, $0 < x < 1 \Rightarrow h(x) < h(1)$

$\Rightarrow h(x) < 0$ car $h(1) = 0$

Par ailleurs, $x > 1 \Rightarrow h(x) > h(1)$

$\Rightarrow h(x) > 0$

On conclut que, $\forall x \in]0;1[$, $h(x) < 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[$, $h(x) > 0$

6. $\forall x \in]0;1[$, $h(x) < 0$

$f_2^{-1}(x) - \frac{e}{2}(x+1) < 0$. Donc, (Γ_2) est en dessous de (T_2) sur $]0;1[$.

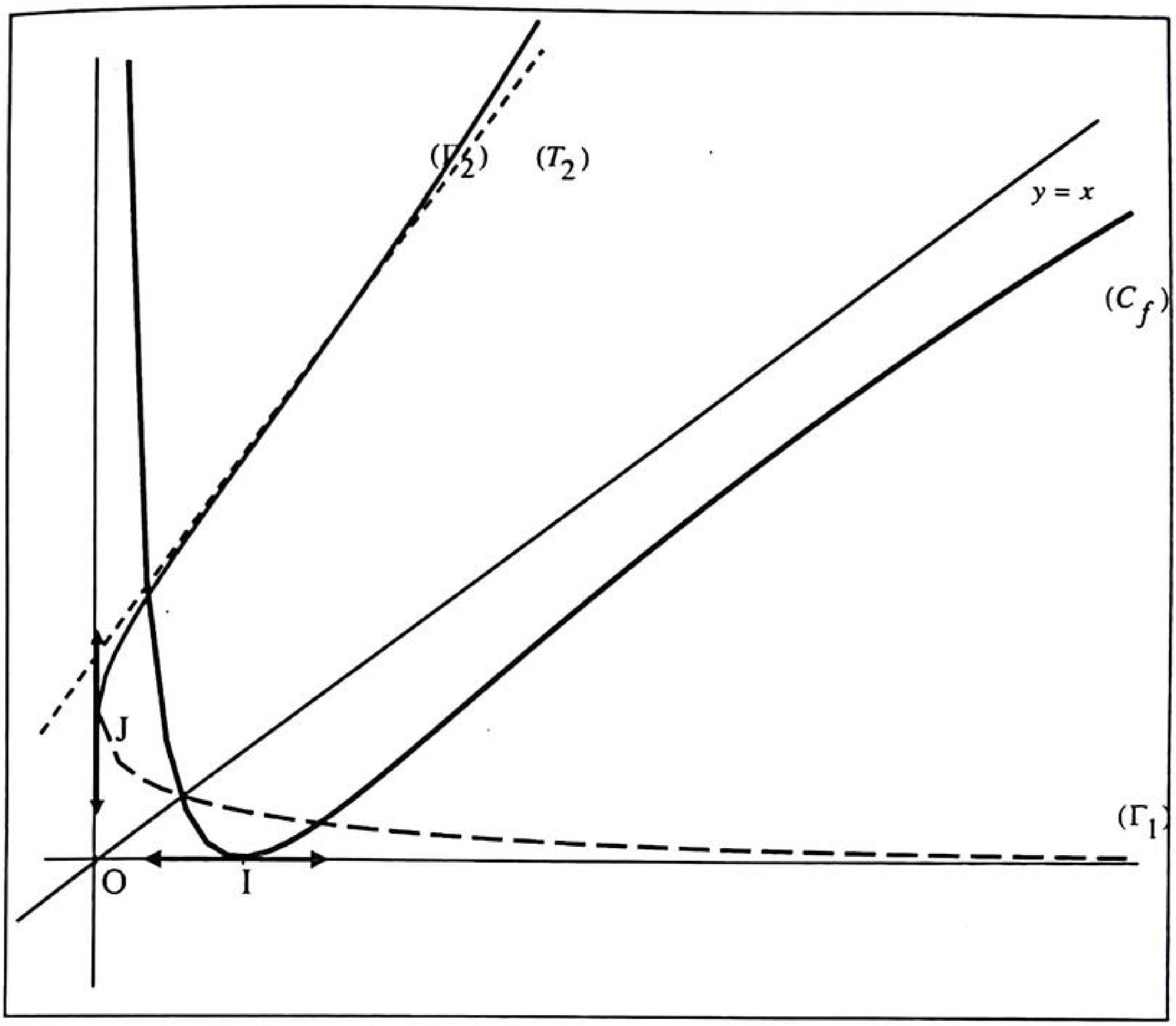
Ensuite, $\forall x \in]1;+\infty[$, $h(x) > 0$

$f_2^{-1}(x) - \frac{e}{2}(x+1) > 0$. Donc, (Γ_2) est au dessus de (T_2) sur $]1;+\infty[$.

Enfin, $h(1) = 0$

Pour $x = 1$, $f_2^{-1}(x) - \frac{e}{2}(x+1) = 0$. On en déduit que (Γ_2) et (T_2) se coupent au point d'abscisse 1.

7. Tracé de (T_2), (Γ_1), (Γ_2) et (C).



Partie C

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ donc, g est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction ln

2. $x \in \left[e^{-\sqrt{\lambda}};e^{\sqrt{\lambda}}\right] \Rightarrow e^{-\sqrt{\lambda}} \leq x \leq e^{\sqrt{\lambda}}$

$\Rightarrow \ln(e^{-\sqrt{\lambda}}) \leq \ln x \leq \ln(e^{\sqrt{\lambda}})$; la fonction ln étant strictement croissante sur $\left[e^{-\sqrt{\lambda}};e^{\sqrt{\lambda}}\right]$

$\Rightarrow -\sqrt{\lambda} \leq \ln x \leq \sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow |\ln x| \leq \sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow (\ln x)^2 \leq \lambda$. On en déduit que $\forall x \in \left[e^{-\sqrt{\lambda}};e^{\sqrt{\lambda}}\right], 0 \leq f(x) \leq \lambda.$

Par conséquent, $\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}} (\lambda - f(x))dx$ est l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite d'équation $y = \lambda$ et les droites d'équations $x = e^{\sqrt{\lambda}}$ et $x = e^{-\sqrt{\lambda}}$.

3. $$\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}} (\lambda - (f(x))dx = \int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{1} (\lambda - (f(x))dx + \int_{1}^{e^{\sqrt{\lambda}}} (\lambda - (f(x))dx$$

$$= \int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{1} (\lambda - (f_1(x))dx + \int_{1}^{e^{\sqrt{\lambda}}} (\lambda - (f_2(x))dx.$$

Les images de (C_1), les segments $[AB]$ et $[AC]$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ sont (Γ_1) et les segments $[EF]$ et $[EG]$.

Par ailleurs, les images de (C_2), les segments AB et $[AD]$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$, (Γ_2), les segments $[EF]$ et $[EH]$.

Puisque les symétries orthogonales conservent les aires alors $\Omega_3 = \Omega_1$ et $\Omega_4 = \Omega_2$.

$\Omega_1 = \int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{1} (\lambda - (f_1(x))dx$; $\Omega_2 = \int_{1}^{e^{\sqrt{\lambda}}} (\lambda - (f_2(x))dx$; $\Omega_3 = \int_0^{\lambda} (1 - f_1^{-1}(y))dy$;

$\Omega_4 = \int_0^{\lambda} (f_2^{-1}(y) - 1)dy$

Par conséquent, $$\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}} (\lambda - (f(x))dx = \Omega_1 + \Omega_2$$

$$= \Omega_3 + \Omega_4$$

$$= \int_0^{\lambda}(1 - f_1^{-1}(y))dy + \int_0^{\lambda}(f_2^{-1}(y) - 1)dy$$

$$= \int_0^{\lambda}(f_2^{-1}(y) - 1 + 1 - f_1^{-1}(y))dy$$

$$= \int_0^{\lambda}(f_2^{-1}(y) - f_1^{-1}(y))dy$$

En définitive, $\displaystyle\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}(\lambda - (f(x))dx = \int_0^{\lambda}(f_2^{-1}(y) - f_1^{-1}(y))dy$

4. On a $\displaystyle\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}(\lambda - (f(x))dx = \int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}\lambda dx - \int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}f(x)dx$

$$= \int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}\lambda dx - \int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}(\ln x)^2 dx$$

Effectuons une intégration par parties pour le calcul de $\displaystyle\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}(\ln x)^2 dx$.

Posons : $u' = 1$ et $v = (\ln x)^2$ donc, $u = x$ et $v' = \dfrac{2}{x}\ln x$.

Par suite,

$$\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}(\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2\right]_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}} - 2\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}\ln x dx$$

$$= \left[x(\ln x)^2\right]_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}} - 2\ \ x\ln x - x\ _{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}}$$

$$= e^{\sqrt{\lambda}}(ln(e^{\sqrt{\lambda}}))^2 - e^{-\sqrt{\lambda}}(ln(e^{-\sqrt{\lambda}}))^2 - 2(e^{\sqrt{\lambda}}ln(e^{\sqrt{\lambda}}) - e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}ln(e^{-\sqrt{\lambda}}) + e^{-\sqrt{\lambda}})$$

$$= \lambda e^{\sqrt{\lambda}} - \lambda e^{-\sqrt{\lambda}} - 2(\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}} - e^{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}})$$

$$= \lambda e^{\sqrt{\lambda}} - \lambda e^{-\sqrt{\lambda}} - 2((\sqrt{\lambda} - 1)e^{\sqrt{\lambda}} + (\sqrt{\lambda} + 1)e^{-\sqrt{\lambda}}).$$

Enfin,

$$\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}} \lambda dx - \int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}} (ln(x))^2 dx = \lambda x \Big|_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}} - (\lambda e^{\sqrt{\lambda}} - \lambda e^{-\sqrt{\lambda}} - 2((\sqrt{\lambda}-1)e^{\sqrt{\lambda}} + (\sqrt{\lambda}+1)e^{-\sqrt{\lambda}}))$$

$$= 2((\sqrt{\lambda}-1)e^{\sqrt{\lambda}} + (\sqrt{\lambda}+1)e^{-\sqrt{\lambda}})$$

On conclut que, $\int_{e^{-\sqrt{\lambda}}}^{e^{\sqrt{\lambda}}} (\lambda - (f(x))dx = 2(\sqrt{\lambda}-1)e^{\sqrt{\lambda}} + 2(\sqrt{\lambda}+1)e^{-\sqrt{\lambda}}$.

5. En utilisant la question 3) Partie C,

$$\int_0^1 (e^{\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{y}})dy = \int_{e^{-\sqrt{1}}}^{e^{\sqrt{1}}} (1-(f(x))dx = 2(\sqrt{1}-1)e^{\sqrt{1}} + 2(\sqrt{1}+1)e^{-\sqrt{1}}$$

$$= \frac{4}{e}$$

DEVOIR N° 21

EXERCICE 1

1. $\forall x \in]0;1]$, $0 < x < 1$ donc $\frac{1}{x} \geq 1$

$$e^{\frac{1}{x}} \geq e > 2$$

$$e^{\frac{1}{x}} > 2$$

$$e^{-\frac{1}{x}} < \frac{1}{2}$$

On conclut que : $\forall x \in]0;1]$, $x^2 e^{-\frac{1}{x}} < \frac{x^2}{2}$.

a) $\forall x \in]0;1]$, $x^2 e^{-\frac{1}{x}} < f(x) < \frac{x^2}{2}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2}{2} = 0$ (1).

Par ailleurs, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-\frac{1}{x}) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 e^{-\frac{1}{x}} = 0$ (2).

De (1) et (2) on déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$.

b) $\forall x \in]0;1]$, $x^2 e^{-\frac{1}{x}} < f(x) < \frac{x^2}{2}$

$$x e^{-\frac{1}{x}} < \frac{f(x)}{x} < \frac{x}{2}$$

$$xe^{-\frac{1}{x}} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < \frac{x}{2}$$

En s'inspirant du calcul de limite dans la question précédente on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} xe^{-\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{2} = 0$

Il en résulte que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$

Donc, la fonction f est dérivable à droite en 0.

EXERCICE 2

Partie A

1. $\forall x \in [0 ; 1]$, $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$.

   On a $e^{-x} > 0$ et $0 \leq x \leq 1$; $1 - x \geq 0$ donc $(1 - x)e^{-x} \geq 0$ et $f'(x) \geq 0$.

   De ce fait la fonction f est strictement croissante sur $[0; 1]$

2. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$, d'où $f([0 ; 1]) = [f(0) ; f(1)]$.

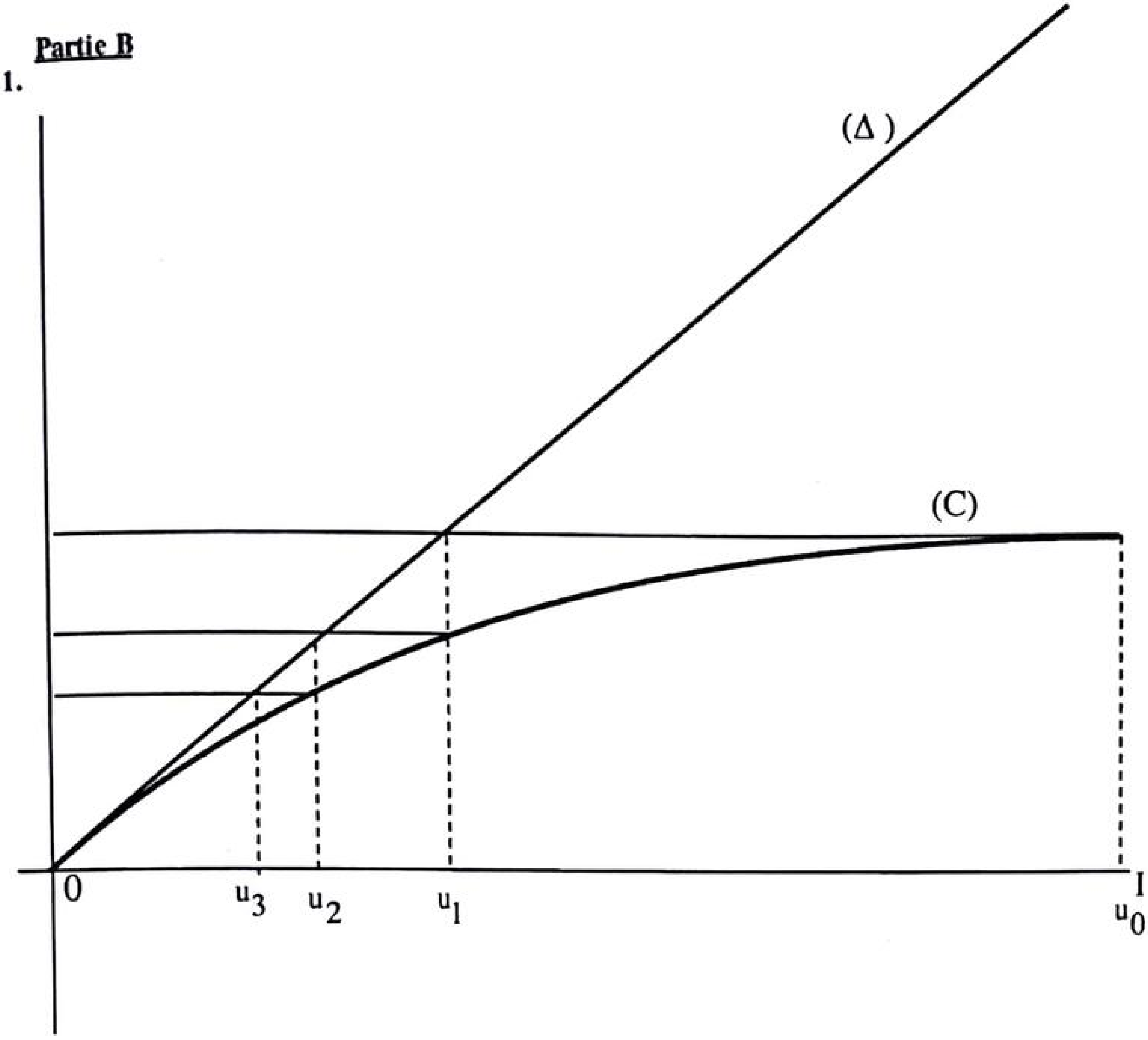
   On a $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{e}$.

   Donc $f([0; 1]) = [0 ; \frac{1}{e}]$. Il s'ensuit que : $\forall x \in [0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; \frac{1}{e}]$.

   On en déduit que : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$.

Partie B

1.



2. **a)** $u_0 = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$.

Supposons que pour un entier naturel $k \geq 0$, $0 \leq u_k \leq 1$.

On a $u_{k+1} = f(u_k)$ et $u_k \in [0 ; 1]$ donc $0 \leq f(u_k) \leq \frac{1}{e}$

Par suite, $0 \leq u_{k+1} \leq \frac{1}{e}$.

Par conséquent, $0 \leq u_{k+1} \leq 1$.

En définitive : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$.

b) $u_0 = 1$

$u_1 = f(1)$

$= \frac{1}{e}$. Puisque $\frac{1}{e} < 1$, donc $u_1 < u_0$

Supposons que pour un entier naturel $k \geq 0$, $u_{k+1} \leq u_k$.

$u_{(k+1)+1} = f(u_{k+1})$ et $u_{k+1} = f(u_k)$

La fonction f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

On a $u_k \in [0; 1]$, $u_{k+1} \in [0; 1]$ et $u_{k+1} \leq u_k$ donc $f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$

Il s'ensuit que : $u_{(k+1)+1} \leq u_{k+1}$.

On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante.

3. D'après la question 2a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ donc la suite (u_n) est minorée.

Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée alors elle converge vers une limite L.

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ implique $0 \leq \lim_{n \to +\infty} u_n \leq 1$

On aboutit à $0 \leq L \leq 1$.

4. La fonction f est continue sur $[0 ; 1]$ et $L \in [0 ; 1]$ donc f est continue en L.
Part suite L est solution de l'équation $f(x) = x$

Pour $x \in [0 ; 1]$, $f(x) = x \Leftrightarrow x e^{-x} = x$

$$\Leftrightarrow x(e^{-x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1.$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Donc : $L = 0$.

PROBLEME

Partie A

1. Voir figure

2. Soit Q le milieu de [AB et M un point de la médiatrice (Δ) de [AB] .

On a $Q(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})$, $\overline{QM}\ (x+\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;y+\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{AB}\ (\sqrt{3}\ ;-3)$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overline{QM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\,(x+\frac{\sqrt{3}}{2})+(-3)\,(y+\frac{1}{2})=0$$

$$\Leftrightarrow -x+y\sqrt{3}=0.$$

Donc, une équation de la médiatrice de [AB] est $-x+y\sqrt{3}=0$.

3. C appartient à la médiatrice de [AB] implique $-x_C+y_C\sqrt{3}=0$.

Par ailleurs, C appartient à la droite d'équation y =1 implique $y_C=1$.

Par suite, $x_C=\sqrt{3}$

On en déduit que l'affixe de C est $\sqrt{3}+i$.

4. Vérifier que $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{\sqrt{3}+i-(-\sqrt{3}+i)}{-2i-(-\sqrt{3}+i)}$

$$=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+3i)}{12}$$

$$=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par conséquent, $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{\pi}{3}$ et AB = AC.

Il en résulte que ABC est équilatéral de sens direct.

5. On a OA =OB =OC donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Par suite, O est le centre de gravité du triangle ABC.

Partie B

1. f est la composée de deux rotations de centres distincts dont la somme des mesures des angles est : $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}$. Donc, f est une rotation d'angle $-\frac{5\pi}{6}$.

2. **a)** ABC est un triangle équilatéral de centre O et de sens direct.
Donc, $r_O(B)=C$.
De plus ACD est un triangle rectangle isocèle en A de sens direct donc, $r_A(C)=D$.
Par conséquent, $r_A(r_O(B)) = r_A(C) = D$
Il s'ensuit que $f(B)=D$.

b) ABC est équilatéral de sens direct et de centre O implique $r_O(C) = A$.
r_A est une rotation de centre A donc $r_A(r_O(C))=r_A(A)=A$.
Par suite, $f(C) = A$.

c) Voir figure : Ω est le point d'intersection des médiatrices de [AC] et [BD].

3. **a)** On a AB = AC = AD donc AB = AD.
Par suite ABD est isocèle en A.

On a $\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})}=\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}+\widehat{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})}$
$$=\widehat{\frac{5\pi}{6}}.$$

Par conséquent $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})}=-\frac{\pi}{12}$.

On a $\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF})}=\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})}+\widehat{(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BF})}$
$$=-\widehat{\frac{\pi}{12}}-\widehat{\frac{\pi}{4}}$$
$$=-\widehat{\frac{\pi}{3}}.$$

Il en découle que : $\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF})}=\widehat{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})}$
On en déduit que le point F appartient à la droite (BC).

b) r_A est une rotation d'angle droit direct donc l'image de la droite (AB) par r_A est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AB), c'est à dire la droite (AK).

Par ailleurs, r_A (C) =D donc l'image de la droite (BC) est la droite passant par D et perpendiculaire à (BC). Sachant que le triangle BFD est rectangle en F et que F appartient à la droite (BC) alors l'image de (BC) par r_A est la droite (DF).

On a B qui est le point l'intersection des droites (AB) et (BC).
Il s'ensuit que son image est le point d'intersection des droites (AK) et (DF), c'est à dire le point K

NB :Si un point appartient à l'intersection de deux lignes ,son image par r_A *appartient à l'intersection des images de ces lignes.*

c) ABC est un triangle équilatéral de centre O et de sens direct donc, r_O (A) = B.

De plus, r_A (B) =K

Par conséquent, $r_A(r_O(A)) = r_A$ (B) =K.

On en déduit que l'image de A par f est le point K.
En définitive, f est une rotation de centre Ω donc Ω appartient à la médiatrice de [AK].

4. ABD est isocèle en A donc A appartient à la médiatrice de [BD]
De plus BFD est isocèle en F donc F appartient à la médiatrice de [BD].
Par conséquent, la droite (AF) est la médiatrice de [BD]

5. On a r_A (B) = K et r_A (C) = D.

Puisque la rotation conserve les angles orientés alors $\widehat{(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AD})}=\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$.

On a r_A (B) =K donc AB =AK.

Par ailleurs, ABD est isocèle en A donc AB =AD.
En définitive, AD = AK.

6. On a $\widehat{(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AD})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$.

Le triangle ABC étant équilatéral de sens direct, Mes$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{3}$

Donc, Mes$\widehat{(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AD})} = \frac{\pi}{3}$.

De plus AD =AK
Par conséquent, DAK est équilatéral de sens direct.

7. Pour la construction, f est une rotation d'angle non nul et f(A) = K .
Donc, le centre Ω de f appartient à la médiatrice de [AK]
Comme DAK est équilatéral alors la médiatrice de [AK] est la droite passant par D et perpendiculaire à (AK) Par ailleurs, f(B) =D donc Ω appartient à la médiatrice de [BD]
Il s'ensuit que Ω est le point d'intersection des médiatrices des segments [AK] et [BD].

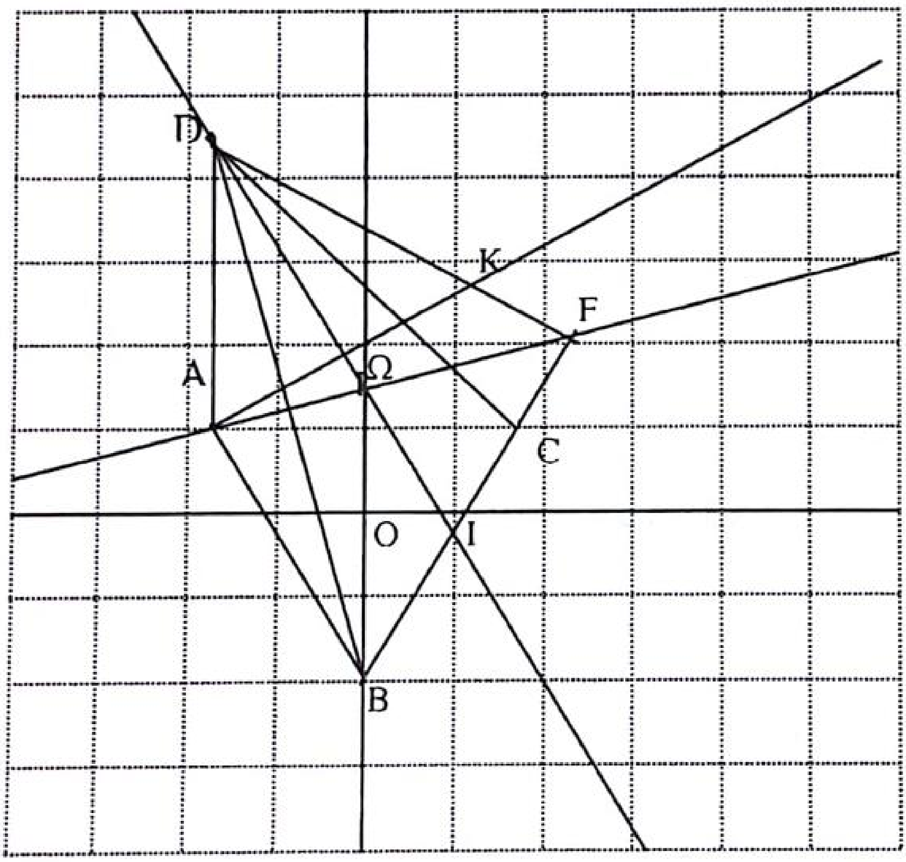
Partie C

1. **a)** AKD est équilatéral donc D appartient à la médiatrice de [AK]
De plus, Ω appartient à la médiatrice de [AK].
Finalement, $(D\Omega)$ est la médiatrice de [AK].

b) $(D\Omega)$ est la médiatrice de [AK] implique que (AK) et $(D\Omega)$ sont perpendiculaires.
Par ailleurs, (AB) et (AK) sont perpendiculaires.
Donc, les droites (AB) et $(D\Omega)$ sont parallèles.

2. $(B\Omega)$ est la médiatrice de [AC] alors $(B\Omega)$ et (AC) sont perpendiculaires.
Par ailleurs, ACD est un triangle rectangle en A donc (AC) et (AD) sont perpendiculaires.
Par suite, les droites $(B\Omega)$ et (AD) sont parallèles.
En définitive, $(B\Omega)$ et (AD) sont parallèles et, (AB) et $(D\Omega)$ sont parallèles
On en déduit que le quadrilatère $AB\Omega D$ est un parallélogramme.

3. $AB\Omega D$ est un parallélogramme donc $AD = B\Omega$ et $AB = D\Omega$
Or Ω appartient à la médiatrice de [BD] donc $B\Omega = D\Omega$.
Par suite, $AD = B\Omega = D\Omega = AB$.
Il en résulte que le quadrilatère $AB\Omega D$ est un losange.



DEVOIR N° 22

EXERCICE 1

1. Pour tout nombre réel non nul x, $\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{(a+b)x^2 + bx + c}{x(x^2+1)}$.

On en déduit que : $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$.

2. $\forall x \in]0;+\infty[$, $\quad xf'(x) = \frac{f(x)}{x^2+1}$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\ln f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k \quad \text{où k est un nombre réel.}$$

$$\ln f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k$$

Or $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc $\ln f(1 = \ln(1) - \frac{1}{2}\ln(1^2+1) + k$

$$\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln(1) - \frac{1}{2}\ln(1^2+1) + k$$

$$k = 0.$$

Par conséquent, $\ln f(x) = \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

EXERCICE 2

I)

1. $I_0 = \ln 2$ et $I_1 = 2\ln 2 - 1$.

2. a) $\forall\, t \in [0;1],\, t \geq 0$, ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ t^n \geq 0 ;\ 1 + t^n \geq 1$ donc $\ln(1 + t^n) \geq 0$

On en déduit que : $\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt \geq 0$ d'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0$.

b) $\forall\, t \in [0;1]$, $0 \leq t \leq 1$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ t^n \geq 0$ donc $t^{n+1} \leq t^n$

$$1 + t^{n+1} \leq 1 + t^n$$

$$\ln(1 + t^{n+1}) \leq \ln(1 + t^n) .$$

$$I_{n+1} \leq I_n .$$

Donc, la suite (I_n) est décroissante.

3. On obtient de la question 2) que la suite (I_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente.

II)

1. $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x$. Donc, $f'(x) > 0$. Par conséquent f est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc, f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur l'intervalle $J = f\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$. On a $J = \mathbb{R}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Or, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\quad f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

$$f'(x) = 1 + f^2(x).$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(f^{-1}(x)) = 1 + (f(f^{-1}(x)))^2$.

$= 1 + x^2$.

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3. $\int_0^1 (f^{-1})'(t)dt = [\, f^{-1}(t)]_0^1$

$= f^{-1}(1) - f^{-1}(0)$

$= \dfrac{\pi}{4} - 0.$

On en déduit que : $\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2} dt = \dfrac{\pi}{4}$.

4. $I_2 = \int_0^1 \ln(1+t^2)\, dt$.

En utilisant le résultat qui précède et en effectuant une intégration par parties, on a :

$I_2 = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$.

PROBLEME

Partie A

1. a) $|1 + i\sqrt{3}\,| = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2}$

$= 2.$

Soit α un argument de $1+ i\sqrt{3}$: $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc, $\alpha = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\, k \in Z$.

Il en résulte que $\dfrac{\pi}{3}$ est un argument de $1+ i\sqrt{3}$.

b) $(1+i\sqrt{3})^3 = [2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})]^3$

$= 2^3(\cos\dfrac{3\pi}{3} + i\sin\dfrac{3\pi}{3}).$

$= -8.$

2. **a)** $P(1+i\sqrt{3}) =$

$$(1+i\sqrt{3})^3 - [-1+i(2+\sqrt{3})](1+i\sqrt{3})^2 - 2[1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) + 4(-\sqrt{3}+i)$$
$$= 0$$

b) On peut effectuer la division euclidienne de

$z^3 - [-1+i(2+\sqrt{3})]z^2 - 2[1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})z + 4(-\sqrt{3}+i)$ par $z - 1 - i\sqrt{3}$.

c) $(2+2i)^2 = 4(1+i)^2$

$= 4(1+2i-1)$

$= 8i.$

Par ailleurs, pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1-i\sqrt{3})(z^2+2(1-i)z-4i) = 0$

$\Leftrightarrow z - 1 - i\sqrt{3} = 0$ ou $z^2 + 2(1-i)z - 4i = 0.$

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2(1-i)z - 4i = 0.$

Le discriminant $\Delta = 8i$ donc $\Delta = (2+2i)^2$.

Donc, les solutions sont $z_1 = 2i$ et $z_2 = -2$.

Par suite, $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 1 - i\sqrt{3} = 0$ ou $z = 2i$ ou $z = -2$.

On en déduit que les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont les nombres complexes : -2 , $2i$ et $1+i\sqrt{3}$.

Partie B

1. Voir figure.

2. $OA = |-2| = 2$, $OB = |2i| = 2$ et $OC = |1+i\sqrt{3}| = OC = 2$.
Il s'ensuit que, $OA = OB = OC = 2$
Donc, les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

3. Soit E le milieu de [OA].
D'après la propriété du barycentre partiel, G est le barycentre des points pondérés (E, –2) et (B, 1).
Par conséquent, $\overline{EG} = \overline{BE}$.
Il en résulte que, G est le point tel que E est milieu de [GB].

4. **a)** $BA^2 - BB^2 + BO^2 = BA^2 + BO^2,$

$= |2+2i|^2 + |2i|^2$
$= 8 + 4$
$= 12.$

On en déduit que $B \in (\Gamma)$

b) Par l'homogénéité du barycentre G = bar {(A, 1) ; (B ; −1) ; (O ; 1)}
Donc, l'ensemble (Γ) est l'ensemble { }, le singleton {G}, un cercle de centre G.
Puisque B ∈(Γ) alors (Γ) est différent de l'ensemble vide et (Γ) est différent de {G}.
Par conséquent, (Γ) est le cercle de centre G passant par B.
Pour la construction de (Γ) voir la figure.

Partie C

1. r_2 est une rotation de centre O et r_2 (B) = C.

Donc, l'angle de r_2 est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}})$.

mes $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}) = \arg(z_C) - \arg(z_B) + 2k\pi\ ; k\in\mathbb{Z}$.

Or, $\frac{\pi}{3}$ est un argument de z_C et $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z_B .

Par suite, mes $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que r_2 est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

2. K est le symétrique de C par rapport à (OB) donc, le triangle KOC est isocèle en O .

Par ailleurs,
$$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OK}}) = 2\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}})$$
$$= 2\times\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\pi}{3}.$$

En définitive, KOB est un triangle isocèle avec $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OK}}) = \frac{\pi}{3}$.

Donc, le triangle KOC est équilatéral de sens direct.

3. a) On a $IB = \sqrt{2}$ et $IO = \sqrt{2}$ donc $IB = IO$

De plus,
$$\frac{z_B - z_I}{z_O - z_I} = \frac{2i + 1-i}{1-i}$$
$$= i$$

Comme mes $(\widehat{\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IB}}) = \arg\left(\frac{z_B - z_I}{z_O - z_I}\right) + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ alors mes $(\widehat{\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IB}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

En définitive, IB = IO et mes $\widehat{(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IB})} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ implique $r_1(O) = B$.

De plus, $r_2(B) = C$ donc $r_2(r_1(O)) = r_2(B) = C$

Par conséquent, $(r_2 \circ r_1)(O) = C$.

Donc, $f(O) = C$.

b) f est la composée de deux rotations dont la somme des angles est $\widehat{\frac{\pi}{2}} - \widehat{\frac{\pi}{6}} = \widehat{\frac{\pi}{3}}$ qui n'est pas une mesure de l'angle nul donc, f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

De plus $f(O) = C$

Puisque triangle KOC est équilatéral de sens direct donc C est l'image de O par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On en déduit que f est la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

4. **a)** $z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\right) z = 1 + i\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow (1 - i\sqrt{3})z = 2(1 + i\sqrt{3})$$
$$\Leftrightarrow z = -1 + i\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow z = z_K.$$

Car K est le symétrique de B $(1 + i\sqrt{3})$ par rapport à (OB) qui est l'axe imaginaire.
Il s'ensuit que K est l'unique point invariant de l'application g.

b) $z_O' = 1 + i\sqrt{3}$

Donc, l'image de O par g est le point C.

c) g est une isométrie qui admet un seul point invariant K donc, g est une rotation de centre K.
De plus, $g(O) = C$.
En définitive, g est la rotation de centre K telle que $g(O) = C$.
Il s'ensuit que $g = f$.

5. Soit (Ψ) l'ensemble des points M tels que $|z' - 1 - i\sqrt{3}| = 2$

Pour $z \in \mathbb{C}$, $M \in (\Psi) \Leftrightarrow |z' - 1 - i\sqrt{3}| = 2$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left|1+i\sqrt{3}\right|\left|z\right| = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad |z| = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad OM = 2 \ .$$

Donc, l'ensemble des points M tels que $|z' - 1 - i\sqrt{3}\ | = 2$ est le cercle (C) vu plus haut.

Partie D

1. Dans le triangle OCB, $B' \in [OB]$, $P \in [BP]$ et $C' \in [OC]$.

D'une part, les droites (OC) et (P B') sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{BB'}{BO} = \dfrac{BP}{BC}$

Par ailleurs, les droites (OB) et (PC') sont parallèles donc, $\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{OC'}{OC}$.

Par suite, $\dfrac{BB'}{BO} = \dfrac{OC'}{OC}$

Puisque les points B et C appartiennent à un même cercle de centre O alors OB =OC.
Par conséquent, BB' = OC'.

2. **a)** BB' = OC' donc il existe un unique déplacement d c'est à dire une translation ou rotation tel que d(O) =B et d(C') =B'.
De plus les droites (OC') et (BB') ne sont pas colinéaires donc d est une rotation r.

b) L'angle de la rotation est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{BB'}})$.

On a
$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{BB'}}) &= \hat{\pi} + (\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{B'B}}) \\
&= \hat{\pi} + (\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}) \\
&= \hat{\pi} + \widehat{\frac{\pi}{6}} \\
&= \widehat{-\frac{5\pi}{6}} \ .
\end{aligned}$$

Donc, $-\dfrac{5\pi}{6}$ est l'angle de r.

3. Le triangle OCB est isocèle en O donc, OB = CO

De plus, $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{BO}}) = -\widehat{\dfrac{5\pi}{6}}$.

En définitive, r (C) = O.

On a r(O) = B et r (C) = O.
Par conséquent, le centreΩ de r est le point d'intersection des médiatrices des segments [OB] et [OC].

4. $r(C') = B'$ donc $\widehat{(\overrightarrow{\Omega C'};\overrightarrow{\Omega B'})} = -\widehat{\frac{5\pi}{6}}$

$$2\,\widehat{(\overrightarrow{\Omega C'};\overrightarrow{\Omega B'})} = \widehat{\frac{\pi}{3}}.$$

Par ailleurs, $C' \in [OC]$ et $B' \in [OB]$ implique $\widehat{(\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OB'})} = \widehat{(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB})}$.

Or, $\widehat{(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB})} = \widehat{\frac{\pi}{6}}$.

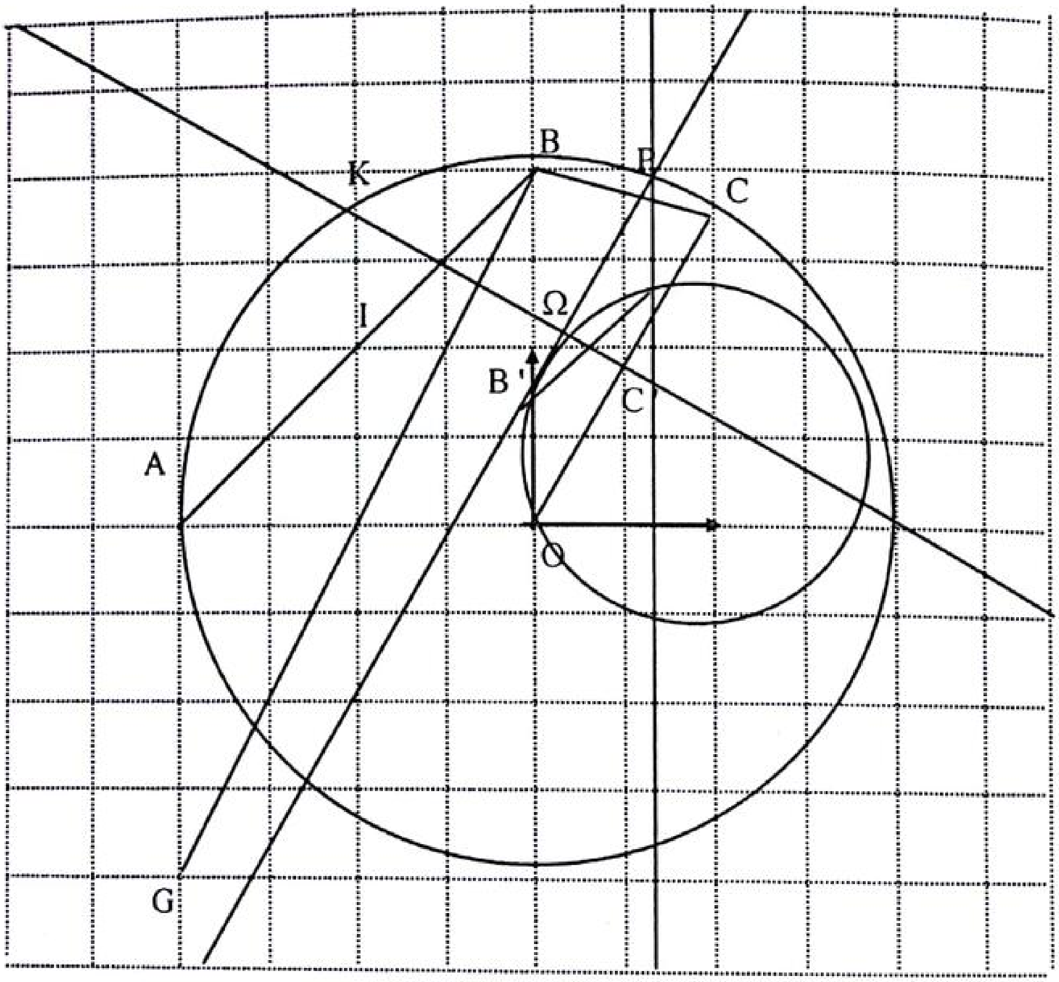
Donc $\widehat{(\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OB'})} = \widehat{\frac{\pi}{6}}$

En définitive, $2\,\widehat{(\overrightarrow{\Omega C'},\overrightarrow{\Omega B'})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OB'})}$.

De plus, les points Ω, B' et C' ne sont pas alignés.

On conclut que les points Ω , B ', O et C' sont cocycliques.

Figure



DEVOIR N° 23

EXERCICE 1

1. a) f est solution sur $\mathbb{R}$ de $y''+y=0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x)+f(x)=0$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (g''(x)-2g(x)-2g'(x)+4g(x))e^{-2x}+e^{-2x}g(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (g''(x)-4g'(x)+5g(x))e^{-2x}=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g''(x)-4g'(x)+5g(x)=0 \quad \text{car } e^{-2x} \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow g \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation } (E): y''-4y'+5y=0$$

b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y''+y=0$ sont les fonctions

$x \mapsto A\cos x + B\sin x$, $A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}$.

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos x + B\sin x \Leftrightarrow e^{-2x}g(x) = A\cos x + B\sin x$

$$\Leftrightarrow g(x) = (A\cos x + B\sin x)e^{2x}; A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}.$$

Donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation *(E)* sont les fonctions

$x \mapsto (A\cos x + B\sin x)e^{2x}$, $A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}$.

2. Déterminons les réels A et B tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (A\cos x + B\sin x)e^{2x}$

avec $h(\frac{\pi}{4}) = 1$; $h'(\frac{\pi}{4}) = -1$.

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \left[(2A+B)\cos x + (-A+2B)\sin x\right]e^{2x}$.

Par conséquent,

$$\text{On a : } \begin{cases} h(\frac{\pi}{4}) = 1 \\ h'(\frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A\cos\frac{\pi}{4} + B\sin\frac{\pi}{4})e^{\frac{\pi}{2}} = 1 \\ \left[(2A+B)\cos\frac{\pi}{4} + (-A+2B)\sin\frac{\pi}{4}\right]e^{\frac{\pi}{2}} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}} \\ A+3B=-\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$. Donc, $\forall x\in\mathbb{R}, h(x)=(2\cos x-\sin x)\sqrt{2}e^{2x-\frac{\pi}{2}}$

3. **a)** On a h solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) donc, $h''(x)-4h'(x)+5h(x)=0$

Par suite, $h'(x)h''(x)-4h'(x)h'(x)+5h'(x)h(x)=0$

$$4[h'(x)]^2=h'(x)h''(x)+5h'(x)h(x)$$

Donc, $H(x)=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{x}\left[h''(t)h'(t)+5h'(t)h(t)\right]dt$

$$=\left[\frac{1}{8}(h'(t))^2+\frac{5}{8}(h(t))^2\right]_{\frac{\pi}{4}}^{x}.$$

b) $h(\frac{\pi}{4})=1$ et $h'(\frac{\pi}{4})=-1$ donc,

$$H(x)=\frac{1}{8}(h'(x))^2+\frac{5}{8}(h(x))^2-(\frac{1}{8}(h'(\frac{\pi}{4}))^2+\frac{5}{8}(h(\frac{\pi}{4}))^2)$$

$$=\frac{1}{8}(h'(x))^2+\frac{5}{8}(h(x))^2-(\frac{1}{8}+\frac{5}{8}).$$

$\forall x\in\mathbb{R}, h(x)=(2\cos x-\sin x)\sqrt{2}e^{2x-\frac{\pi}{2}}$ et $h'(x)=(3\cos x-4\sin x)\sqrt{2}e^{2x-\frac{\pi}{2}}$.

On conclut que : $\forall x\in\mathbb{R},\ H(x)=\frac{1}{4}(8\cos^2 x-22\sin(2x)+21)e^{4x-\pi}-\frac{3}{4}$.

EXERCICE 2

1. f étant solution sur $]0;+\infty[$ de (E) alors, $\forall x\in\,]0;+\infty[, xf'(x)-f(x)=1$

Par suite, $\forall x\in\,]0;+\infty[, f'(x)=\frac{f(x)+1}{x}$; $f''(x)=\frac{xf'(x)-f(x)-1}{x^2}$

Puisque $xf'(x)-f(x)=1$ alors, $f''(x)=0$ donc, f est solution de l'équation différentielle $y''=0$

2. On a $(E')\Leftrightarrow y'=c_1;(c_1\in\mathbb{R})$.

$$\Leftrightarrow y=c_1x+c_2;(c_1\in\mathbb{R};c_2\in\mathbb{R}).$$

Donc, les solutions sur $]0;+\infty[$ de l'équation (E') sont les fonctions

$x\mapsto c_1x+c_2;(c_1\in\mathbb{R};c_2\in\mathbb{R})$.

3. $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \alpha x + \beta, f'(x) = \alpha$ donc, $\alpha x - \alpha x - \beta = 1$; $\beta = -1$.

Par conséquent, f est solution de (E) si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta = -1$.

4. En considérant les questions 2) et 3), $(E) \Leftrightarrow y = -1 + c_1 x; c_1 \in \mathbb{R}$.

Donc, les solutions sur $]0;+\infty[$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto -1 + c_1 x; (c_1 \in \mathbb{R})$.

EXERCICE 3

1. G est le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 1) et (C ; − 1).

Donc, $\overrightarrow{BG} = \dfrac{1}{1+1-1}\overrightarrow{BA} - \dfrac{1}{1+1-1}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CA}$. Il s'ensuit que ACBG est un parallélogramme.

ACBG étant un parallélogramme, on a AC = BG et AG = BC.

De plus, le triangle ABC est équilatéral donc, AB = AC = BC.

Finalement, BG = AC = BC = AG. On en déduit que le quadrilatère ACBG est un losange.

2. **a)** O est le symétrique de E par rapport à B signifie que B est le milieu de [OE] et F est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ signifie que $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{CB}$. Voir figure pour la construction.

b) On a $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{CB}$. Puisque $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AG}$ alors $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AG}$.

Par suite, le quadrilatère AGFO est un parallélogramme. Il en découle que $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AO}$ (1)

Par ailleurs, E étant le symétrique de O par rapport à B, on a $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BE}$.

De plus, O milieu de [AB] implique $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BE}$. (2)

En définitive, de (1) et (2), on a $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{BE}$.

On en déduit que F est l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

3. **a)** $t(A) = t_{\overrightarrow{BE}}(t_{\overrightarrow{CB}}(A))$

Puisque ACBG losange alors, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CB}$ donc, $t_{\overrightarrow{CB}}(A) = G$.

On a $t_{\overrightarrow{BE}}(G) = F$. On conclut que : $t(A) = t_{\overrightarrow{BE}}(G)$

Donc, $t(A) = F$.

Par ailleurs, $t(C) = t_{\overrightarrow{BE}}(t_{\overrightarrow{CB}}(C))$.

Puisque $t_{\overrightarrow{CB}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ alors, $t_{\overrightarrow{CB}}(C) = B$.

De plus, $t_{\overrightarrow{BE}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$ alors, $t_{\overrightarrow{BE}}(B) = E$.

En définitive : $t(C) = t_{\overrightarrow{BE}}(B)$

$t(C) = E$.

b) t est une translation, $t(B) = K$ et $t(A) = F$ donc, par la propriété caractéristique des translations, $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{BA}$.

Il s'ensuit que K appartient à la droite passant par F et parallèle à la droite (AB).
Comme AGFO parallélogramme alors (AO) // (GF). Or $B \in (AO)$ donc, (AB) // (GF).
On en déduit que, K appartient à la droite (GF).
Voir figure pour la construction de K.

c) On a $t(A) = F$, $t(B) = K$ et $t(C) = E$.
Donc, l'image du triangle ABC par la translation t est le triangle FKE.

4. **a)** $f = t \circ S_{(OC)}$

Le triangle ABC est équilatéral et O milieu de [BC] donc, la droite (OC) est axe de symétrie du triangle ABC. On en déduit que l'image de ABC par $S_{(OC)}$ est ABC.

De plus, le triangle FKE est l'image du triangle ABC par la translation t .

Par conséquent, le triangle FKE est l'image du triangle ABC par $t \circ S_{(OC)}$

On en déduit que, le triangle FKE est l'image du triangle ABC par l'application f.

b) t est la composée de deux translations de vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CB}$ donc, t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB}$.

Puisque $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}$ alors t est la translation de vecteur $\overrightarrow{CE}$.
De plus, ABC est équilatéral avec O milieu de [AB] donc, (OC) est la médiatrice de [AB].
Il en ressort que, OBC est un triangle rectangle en O.
Comme le point E appartient à la droite (OB) alors, OEC est un triangle rectangle en O.

Par suite, les droites (OC) et (CE) ne sont pas perpendiculaires. Donc le vecteur $\overrightarrow{CE}$ n'est pas un vecteur normal à la droite (OC).

En conclusion, $f = t \circ S_{(OC)}$, où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{CE}$ qui n'est pas normal à (OC).

On en déduit que l'application f est une symétrie glissée.

c) $t_{\overrightarrow{BE}}(G) = F$ donc, $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{BE}$. Or, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BE}$ donc, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{GF}$.

Par suite, le quadrilatère OGFB est un parallélogramme. De plus, (OB) et (OG) sont perpendiculaires.
Par conséquent, le quadrilatère OGFB est un rectangle.
Il en ressort que (OG) // (BF) et O projeté orthogonal de B sur la droite (OG).

Donc, $S_{(OG)} \circ S_{(BF)} = t_{2\overline{BO}} = t_{\overline{EO}}$ car B est le milieu du segment [OE].

Puisque $O \in (CG)$ alors, $S_{(OG)} \circ S_{(GF)} = S_{(OC)} \circ S_{(BF)}$.

Il s'ensuit que, $S_{(OC)} \circ S_{(BF)} = t_{\overline{EO}}$

Par suite, $S_{(OC)} \circ S_{(BF)} \circ S_{(BF)} = t_{\overline{EO}} \circ S_{(BF)}$

$S_{(OC)} \circ I_d = t_{\overline{EO}} \circ S_{(BF)}$ car $S_{(BF)} \circ S_{(BF)} = I_d$

$S_{(OC)} = t_{\overline{EO}} \circ S_{(BF)}$ car $S_{(OC)} \circ I_d = S_{(OC)}$.

d) $f = t \circ S_{(OC)}$

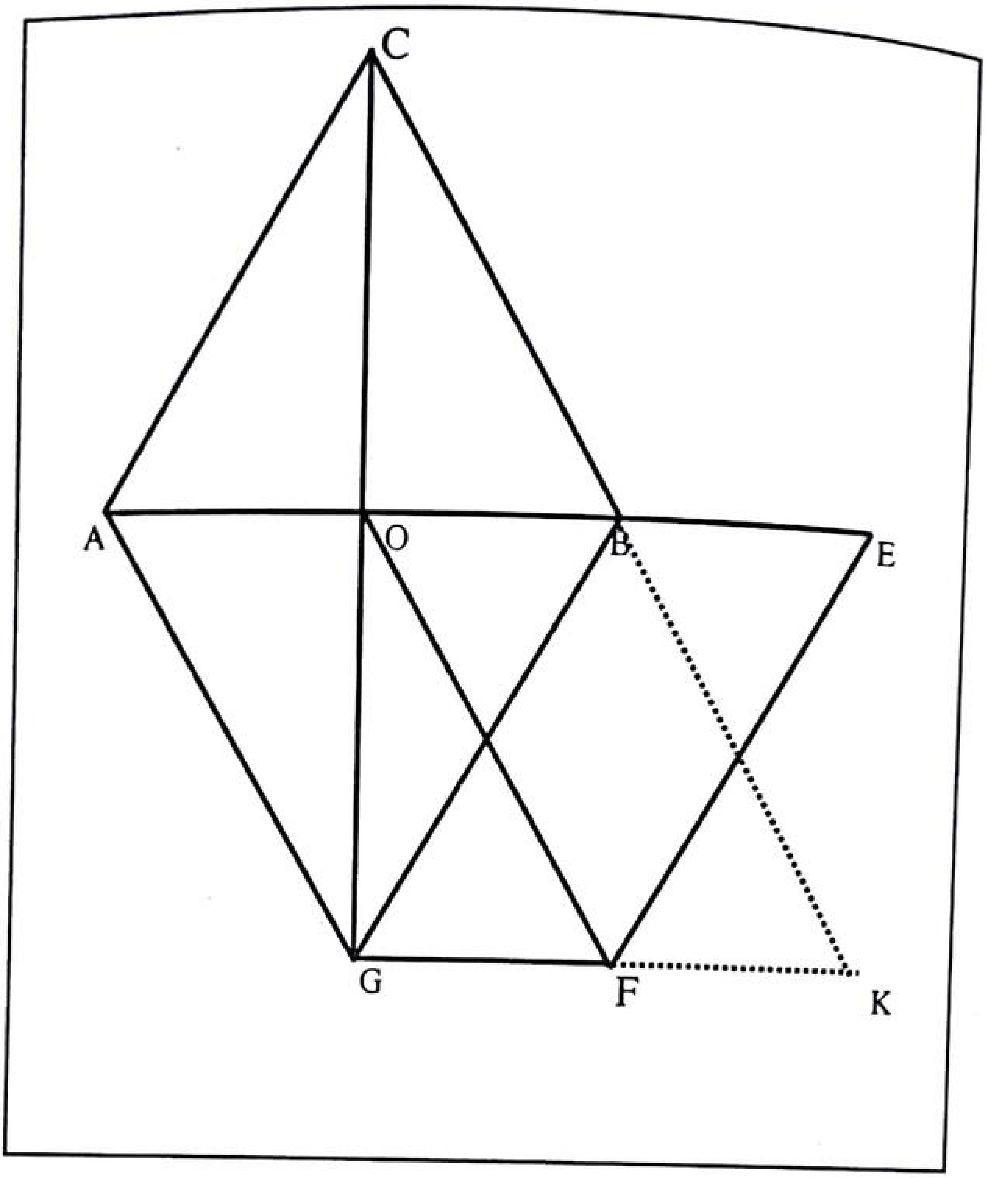
$= t_{\overline{CE}} \circ t_{\overline{EO}} \circ S_{(BF)}$

$= t_{\overline{CE}+\overline{EO}} \circ S_{(BF)}$

$= t_{\overline{CO}} \circ S_{(BF)}$. On a C, O et G alignés, et (OG) // (BF) donc les droites (OC) et (BF) sont parallèles. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est un vecteur directeur de la droite (OC).

Par conséquent, l'application f est la symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{BF}$ et d'axe (OC).

Figure



DEVOIR N° 24

EXERCICE 1

I)

1. $(2-i\sqrt{3})^3 = (1-4i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$

$(2-i\sqrt{3})^3 = -10-9i\sqrt{3}.$

3. Pour $z \in \mathbb{C}$, $z^3 = -10-9i\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{2-i\sqrt{3}}\right)^3 = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{z}{2-i\sqrt{3}} = 1$ ou $\dfrac{z}{2-i\sqrt{3}} = j$ ou $\dfrac{z}{2-i\sqrt{3}} = \bar{j}$.

En définitive, les solutions de (E) sont : $2-i\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3i\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{5}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

II)

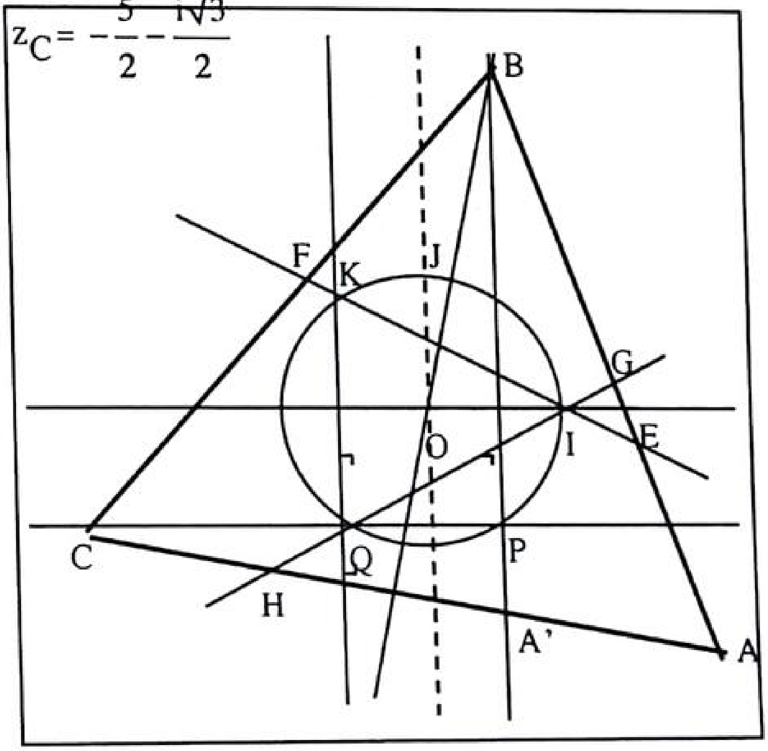
$z_A = 2-i\sqrt{3}$, $z_B = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3i\sqrt{3}}{2}$ et $z_C = -\dfrac{5}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

2. a) $z_A = 1 + 2z_P$

b) $z_C = -2 + z_Q$.

3. Le point C est obtenu en ajoutant -2 à l'abscisse de Q
Soit A' le point tel que P milieu de [OA']. Le point A est obtenu en ajoutant 1 à l'abscisse de A'.

4. Le triangle ABC est équilatéral donc B appartient à la médiatrice de [AC], puisque l'abscisse de B est $\dfrac{1}{2}$ donc B est le point d'intersection de la médiatrice de [AC] et de la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.



III)

1. ABC et IKQ sont des triangles équilatéraux de sens direct.
On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r} \\ \hline (AC) & (AB) \\ (IQ) & (IK) \end{array}$$

Puisque $(AC)\cap(IQ) = \{H\}$ et $(AB)\cap(IK) = \{E\}$ alors $r(H) = E$.
Par une démarche analogue, on démontre que $r(G) = F$.

2. On a $r(H) = E$ et $r(G) = F$.
Or r est une isométrie et les isométries conservent les distances donc $EF = HG$.

EXERCICE 2

1. $I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos t)\sin t e^{\sin^2 t}\, dt.$

Posons : $u(t) = e^{\sin^2 t}$ donc $u'(t) = 2\cos t \sin t e^{\sin^2 t}$

Il s'ensuit que : $I_1 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u'(t)\, dt$

$$I_1 = \frac{1}{2}[u(t)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}[e^{\sin^2 t}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}(1 - e).$$

2. **a)** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{2n} - I_{2(n+1)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos t)^{2n}(1 - \cos^2 t)\sin t e^{\sin^2 t}\, dt$

On a : $(\cos t)^{2n} \geq 0$; $1 - \cos^2 t \geq 0$; $e^{\sin^2 t} > 0$ et $\forall\ t \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ $\sin t \geq 0$

Donc, $(\cos t)^{2n}(1 - \cos^2 t)\sin t e^{\sin^2 t} \geq 0.$

Par conséquent, $I_{2n} \geq I_{2(n+1)}$.

Il en résulte que (I_{2n}) est décroissante.

b) Laissé au soin du lecteur.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\cos t)^{2n} \geq 0$; $e^{\sin^2 t} > 0$ et $\forall\, t \in [\frac{\pi}{2} ; \pi]$, $\sin t \geq 0$;

Donc pour tout $t \in [\frac{\pi}{2} ; \pi]$, $(\cos t)^{2n} \sin t\, e^{\sin^2 t} \geq 0$.

C'est ainsi que $I_{2n} \geq 0$.

Par conséquent la suite (I_{2n}) est positive.

Nous laissons le soin au lecteur de justifier que la suite (I_{2n+1}) est négative.

4. La suite (I_{2n}) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

La suite (I_{2n+1}) est croissante et majorée par 0 donc elle converge.

5. $I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos t)^n \sin t\, e^{\sin t}\, dt$ donc $I_{n+2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos t)^{n+2} \sin t\, e^{\sin t}\, dt$

$I_{n+2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos t)^{n+2} \sin t\, e^{\sin t}\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos t)^{n+1} \cos t \sin t\, e^{\sin^2 t}\, dt$

Posons : $u = \cos^{n+1} t$ et $v' = \cos t \sin t\, e^{\sin^2 t}$

Donc, $u' = -(n+1)\sin t \cos^n t$ et $v = \frac{1}{2} e^{\sin^2 t}$.

Donc, $I_{n+2} = [\frac{1}{2} \cos^{n+1} t\, e^{\sin^2 t}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{n+1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos t)^n \sin t\, e^{\sin^2 t}\, dt$.

Par suite, pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+2} = \frac{1}{2} \left((-1)^{n+1} + (n+1) I_n \right)$

6. $I_3 = I_{1+2} = \frac{1}{2} ((-1)^{1+1} + (1+1)I_1)$; $I_3 = \frac{1}{2}(1 + 2I_1)$ d'où $I_3 = \frac{1}{2} + I_1$

$I_5 = I_{3+2} = \frac{1}{2} ((-1)^{3+1} + (3+1)I_3)$;

$I_5 = \frac{1}{2} + 2I_3 = \frac{1}{2} + 2(\frac{1}{2} + I_1)$

Donc $I_5 = \frac{3}{2} + 2I_1$

7. $I_{2\times1+1} = I_3 = \frac{1}{2} + I_1 = I_1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{1}$

$$= 1\times I_1 + \frac{1}{2}\times\frac{1\,!}{1\,!}.$$

$$= (1!)I_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{0}\frac{1\,!}{(1-k)\,!}$$

$$= (1!)I_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1-1}\frac{1\,!}{(1-k)\,!}$$

Supposons que pour un entier naturel $j > 1$, $I_{2j+1} = (j!)I_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{j\,!}{(j-k)\,!}$.

Démontrons que : $I_{2(j+1)+1} = ((j+1)!)I_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j+1-1}\frac{(j+1)\,!}{(j+1-k)\,!}$.

On a : $I_{2(j+1)+1} = I_{(2j+1)+2}$

$$= \frac{1}{2}\left(((-1)^{2j+1+1} + (2j+2)((j!)I_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{j!}{(j-k)!}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + (j+1)(j!)I_1 + \frac{1}{2}(j+1)\sum_{k=0}^{j-1}\frac{j!}{(j-k)!}$$

$$= \frac{1}{2} + (j+1)!)I_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(j+1)!}{(j+1-(k+1))!}$$

Effectuons un changement de variable. Posons : $u = k+1$.

Donc $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(j+1)!}{(j+1-(k+1))!})) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{u=1}^{j}\frac{(j+1)!}{(j+1-u)!}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(j+1)!}{(j+1-0)!} + \sum_{u=1}^{j+1-1}\frac{(j+1)!}{(j+1-u)!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{u=0}^{j+1-1}\frac{(j+1)!}{(j+1-u)!}.$$

Les variables k et u étant muettes,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(j+1)!}{(j+1-(k+1))!})) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j+1-1}\frac{(j+1)!}{(j+1-k)!}$$

Par conséquent, $I_{2(j+1)+1} = ((j+1)!)I_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j+1-1}\frac{(j+1)!}{(j+1-k)!}$.

On en déduit que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{2n+1} = (n!)I_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!}.$$

8. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}I_{n+2}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} = 0$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}I_{n+2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

Donc, la suite (V_n) est convergente.

b) Pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+2} = \frac{1}{2}\left((-1)^{n+1} + (n+1)I_n\right)$

Donc, $2I_{n+2} = (-1)^{n+1} + (n+1)I_n$; $\frac{2}{n+1}I_{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + I_n$

Par conséquent, $V_n - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

c) Pour tout entier naturel non nul n, $\left|V_n - I_n\right| = \frac{1}{n+1}$.

Les suites (I_n) et (V_n) convergent et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|V_n - I_n\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ alors (I_n) et (V_n) convergent vers la même limite.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ donc, $L = 0$.

DEVOIR N° 25

EXERCICE 1

1. On se réfère au nombre de permutations d'un ensemble à 6 éléments
Il en résulte 6 !, c'est-à-dire 720 manières possibles.

2. Le nombre de manières pour que chacune des filles soit servie en premier est 5!
Puisque nous avons 2 filles, nous obtenons $2\times5!$, soit 240 manières pour que une fille soit servie en premier. Par suite, la probabilité qu'une fille soit servie en premier est $\frac{2\times5!}{6!}$, soit $\frac{1}{3}$.

3. Le nombre de manières pour que les filles soient servies avant les garçons est $2!\times 4!$
Donc la probabilité que les filles soient servies avant les garçons est $\frac{2\times4!}{6!}$, soit $\frac{1}{15}$.

4. **a)** La probabilité que les filles soient servies deux fois de suite avant les garçons est
$13\times\left(\frac{1}{15}\right)^2\times\left(\frac{14}{15}\right)^{12}$, c'est-à-dire 0,0252.

b) On a un schéma de Bernoulli à 14 épreuves.
Appelons succès l'événement « les filles reçoivent leurs repas avant les garçons »
La probabilité du succès est $\frac{1}{15}$.
Par conséquent, la probabilité que les filles reçoivent 4 fois leurs repas avant les garçons est
$C_{14}^{4}\times\left(\frac{1}{15}\right)^4\times\left(1-\frac{1}{15}\right)^{14-4}$, soit 0, 02.

b) Appelons n le nombre de services reçus par les élèves.
La probabilité que les filles ne soient pas servies avant les garçons pendant la durée du séjour est
$C_{n}^{0}\times\left(\frac{1}{15}\right)^0\times\left(\frac{14}{15}\right)^n$.

Par suite,

$$C_n^0 \times \left(\frac{1}{15}\right)^0 \times \left(\frac{14}{15}\right)^n \leq 0{,}4 \iff \left(\frac{14}{15}\right)^n \leq 0{,}4$$

$$\iff n \ln\left(\frac{14}{15}\right) \leq \ln(0{,}4)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln(0{,}4)}{\ln(14)-\ln(15)}.$$

$\frac{\ln(0{,}4)}{\ln(14)-\ln(15)} \simeq 13{,}28.$

Par conséquent, le nombre minimal de services est 14.

EXERCICE 2

I)

1. $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)^2 e^{-x}$
$= +\infty.$

2. $\forall x \in]-\infty\,;-1]$, $g'(x) = (1-x^2)\,e^{-x}$.
Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$.

3. $g(-1) = 0$.
g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$.
$g(]-\infty\,;-1]) = [0\,;+\infty[$.
Or $2\in[0\,;+\infty[$ donc l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution α dans $]-\infty\,;-1]$.

Par ailleurs $g(-1) = 0$ et $g(-2) = e^2$.

Puisque $0 < 2 < e^2$ alors $-2 < \alpha < -1$.
On en déduit que $\alpha \in [-2\,;-1]$.

II)

1. $\forall x \in[-2\,;-1]$, $f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{x}{2}}$.
Il s'ensuit que f est strictement décroissante sur $[-2\,;-1]$.

2. $f([-2\,;-1]) = [-1-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\,;-1-\sqrt{2}e^{-1}]$.
On a $-1-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx -1{,}86$ et $-1-\sqrt{2}e^{-1} \approx -1{,}52$.
Donc $f([-2\,;-1]) \subset [-2\,;-1]$.

3. $\forall x \in I,\ f'(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{x}{2}}$

Donc $|f'(x)| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{x}{2}}$.

Nous avons $-2 \leq x \leq -1$

$$-1 \leq \frac{x}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

$$e^{-1} \leq e^{\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{1}{2}}$$ (la fonction exponentielle étant strictement croissante)

$$\frac{\sqrt{2}}{2e} \leq |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}.$$

Puisque $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \approx 0{,}42$ donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} < 0{,}5$. Il s'ensuit que : $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

4. $f(\alpha) = -1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{\alpha}{2}}$

$g(\alpha) = (\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = 2 \Rightarrow (-\alpha-1)e^{-\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \qquad e^{\frac{\alpha}{2}} = (-\alpha-1)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par suite, $f(\alpha) = -1 - \sqrt{2}(-\alpha-1)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $f(\alpha) = \alpha$

5. **a)** $U_0 = -2$ donc $U_0 \in I$.

Supposons que pour un entier naturel $k>0$, $U_k \in I$.

Il s'ensuit que $f(U_k) \in f(I)$

Or $f(I) \subset I$ et $U_{k+1} = f(U_k)$ donc $U_{k+1} \in I$.

Par conséquent pour tout entier naturel n , $U_n \in I$.

b) f est dérivable sur $[-2\,;-1]$

De plus $\forall x \in [-2\,;-1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

On a $\alpha \in [-2\,;-1]$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall x \in [-2;-1]$, $|f(x)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.

Puisque $f(\alpha)=\alpha$ alors $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

c) $\alpha \in [-2;-1]$ donc $-2 \leq \alpha \leq -1$

$$-2+1 \leq U_0-\alpha \leq -2+2$$

$$-1 \leq U_0-\alpha \leq 0.$$

$$-1 \leq U_0-\alpha \leq 1.$$

Donc $|U_0-\alpha| \leq 1$.

Or $(\frac{1}{2})^0 = 1$.

Par suite, $|U_0-\alpha| \leq (\frac{1}{2})^0$.

Supposons que pour un entier k>0, $|U_k-\alpha| \leq (\frac{1}{2})^k$.

Démontrons que $|U_{k+1}-\alpha| \leq (\frac{1}{2})^{k+1}$.

D'après la question précédente, $|U_{k+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_k-\alpha|$.

Donc $$|U_{k+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^k$$

$$|U_{k+1}-\alpha| \leq (\frac{1}{2})^{k+1}.$$

Par conséquent, pour tout entier naturel n, $|U_n-\alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$.

d) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$.

e) Il suffit que $(\frac{1}{2})^n \leq 10^{-3}$

$(\frac{1}{2})^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n\ln(\frac{1}{2}) \leq -3\ln(10)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{-3\ln(10)}{-\ln(2)}$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(2)}$. On obtient $p = 10$.

PROBLEME

Partie A

1. **a)** $A = \text{bar}\{(P\,;1)\,;(Q\,;2)\}$ donc $\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

$B = \text{bar}\{(P;1);(Q\,;-2)\}$ donc $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PQ}$

b) $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MP}{MQ} = 2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{MQ})(\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MQ}) = 0$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA}.(-\overrightarrow{MB}) = 0$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre [AB]

Donc, (Γ) est le cercle de diamètre [AB]

c) Voir figure.

Partie B

1. Voir figure.

2. On a K milieu de [AC] et I milieu de [AB] . Or AB = AC donc AK = AI

De plus $\widehat{(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AK})} = \widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{3}$

Par conséquent le triangle AIK est équilatéral de sens direct.
Par ailleurs D est l'image de K par la symétrie orthogonale d'axe (AB) .
Les points A et I étant invariants par la symétrie d'axe (AB), il s'ensuit que le triangle IAD est équilatéral de sens direct.

Le triangle ABC est équilatéral de sens direct et K est le milieu de [AC] donc (BK) est bissectrice de l'angle $(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}})$. Par suite, $Mes(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}})=\frac{\pi}{3}$ implique $Mes(\widehat{\overline{BK};\overline{BA}})=\frac{\pi}{6}$.

Par ailleurs, D est le symétrique de K par rapport à (AB) donc BD = BK et $Mes(\widehat{\overline{BK};\overline{BD}})=\frac{\pi}{3}$.

On en déduit que le triangle DBK est équilatéral de sens direct.

3. **a)** $R_I o R_O$, $R_J o R_O$ et $R_K o R_O$ sont des composées de deux rotations de centre distincts dont la somme des mesures des angles est $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi$.

Par suite, $R_I o R_O$, $R_J o R_O$ et $R_K o R_O$ sont des rotations d'angle π, c'est à dire des symétries centrales.

b) ABC est équilatéral de sens direct et de centre O.

Donc, $R_O(A) = B$, $R_O(B) = C$ et $R_O(C) = A$

Par ailleurs, les triangles IAD, JBE sont équilatéraux de sens direct

Il en découle que : $R_I o R_O\ (C) = R_I\ (A)$ donc, $R_I o R_O\ (C) = D$.

$R_J o R_O\ (A) = R_J\ (B)$ donc, $R_J o R_O\ (A) = E$

$R_K o R_O (B) = R_K\ (C)$ donc, $R_K o R_O\ (B) = F$.

c) *On rappel que toute symétrie centrale s est telle que* $s = s^{-1}$.

D'après ce qui précède, $R_I o R_O (C) = D$

Donc, $R_I o R_O (D) = C$

$R_O\ (D) = R_I^{-1}(C)$.

$R_O\ (D) = E$.

Par ailleurs, $R_J o R_O\ (A) = E$ donc $R_J o R_O\ (E) = A$.

$R_O\ (E) = R_J^{-1}\ (A)$.

$R_O\ (E) = F$.

Enfin, $R_K o R_O (B) = F$ donc $R_K o R_O (F) = B$.

$R_O\ (F) = R_K^{-1}(B)$

$R_O\ (F) = D$.

En définitive, $R_O\ (E) = F$, $R_O\ (F) = D$ et $R_O\ (D) = E$.

4. **a)** On a $R_O(D)=E$, $R_O(E)=F$ et $R_O(F)=D$.

Par suite, O est équidistant des points E, F et D.
Par conséquent, O est le centre du cercle circonscrit au triangle DEF.

b) $R_O(D)=E$, $R_O(E)=F$ et $R_O(F)=D$

Puisque les rotations conservent les angles orientés alors, $(\widehat{\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DF}})=(\widehat{\overrightarrow{EF};\overrightarrow{ED}})=(\widehat{\overrightarrow{FD};\overrightarrow{FE}})$.
Donc, le triangle DEF est équilatéral.

De plus R_O est une rotation d'angle droit

On conclut que le triangle DEF est équilatéral de sens direct.

Partie C

1. O est invariant par toute similitude directe qui transforme ABC en DEF
Il s'ensuit que, O est le centre de toute similitude directe qui transforme ABC en DEF.

2. **a)** O est le centre du triangle ABC donc, OA = OB = OC
O est le centre du triangle DEF donc, OD = OE = OF.

On en déduit que $\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{OF}{OC}$

b) $r(A)=B$, $r(B)=C$, $r(D)=E$, $r(E)=F$ et $r(O)=O$

Donc, $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})=(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OE}})=\widehat{\dfrac{2\pi}{3}}$

Par suite, $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}})=(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OE}})$

Par ailleurs, $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}})=(\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}})=\widehat{\dfrac{2\pi}{3}}$

Il s'ensuit que, $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OE}})=(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OF}})$

En définitive, $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}})=(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OE}})=(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OF}})$

3. s_1 la similitude de centre O qui transforme A en D

Donc, le rapport de s_1 est $\dfrac{OD}{OA}$ et l'angle de s_1 est $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}})$

On a $\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{OD}{OA}$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OE}})=(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}})$

Par conséquent, E est l'image de B par s_1

De même, $\frac{OF}{OC}=\frac{OD}{OA}$ et $\widehat{(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OF})}=\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})}$

On en déduit que : F est l'image de C par s_1.

4. a) s_2 est une rotation de centre O

L'angle de s_2 est $\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE})}$

On a : $\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE})}=\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})}+\widehat{(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OE})}$

$$=\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})}+\widehat{\frac{2\pi}{3}}$$

Donc, l'angle de s_2 est la somme des angles de s_1 et de la rotation $r(O;\frac{2\pi}{3})$.

Le rapport de s_2 est $\frac{OE}{OA}=\frac{OD}{OA}\times 1$.

Donc, le rapport de s_2 est le produit des rapports de s_1 et de la rotation $r(O;\frac{2\pi}{3})$

En définitive, s_2 et $s_1 o r(O\,;\frac{2\pi}{3})$ ont le même centre, le même rapport et le même angle.

On en déduit que : $s_2=s_1 o r(O\,;\frac{2\pi}{3})$.

Par ailleurs, s_3 est une rotation de centre O.

L'angle de s_3 est $\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF})}$

On a : $\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF})}=\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})}+\widehat{(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OF})}$

$$=\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})}-\widehat{\frac{2\pi}{3}}.$$

Donc, l'angle de s_3 est la somme des angles de s_1 et de la rotation $r(O;-\frac{2\pi}{3})$

Le rapport de s_3 est $\frac{OF}{OA}=\frac{OD}{OA}\times 1$

Donc, le rapport de s_3 est le produit des rapports de s_1 et de la rotation $r(O;-\frac{2\pi}{3})$.

En définitive, s_3 et $s_1 o r(O\,;-\frac{2\pi}{3})$ ont le même centre, le même rapport et le même angle.

On en déduit que : $s_3 = s_1 o r(O\,;-\frac{2\pi}{3})$.

b) $s_2{}^2 = s_1 o r(O\,;\frac{2\pi}{3}) o s_1 o r(O\,;\frac{2\pi}{3})$

$= s_1 o s_1 o r(O\,;\frac{2\pi}{3}) o r(O\,;\frac{2\pi}{3})$

$= s_1{}^2 o r(O\,;-\frac{2\pi}{3})$

Donc, $s_2{}^3 = s_2{}^2 o s_2$

$= s_1{}^2 o r(O\,;-\frac{2\pi}{3}) o s_1 o r(O\,;\frac{2\pi}{3})$

$= s_1{}^2 o s_1 r(O\,;-\frac{2\pi}{3}) o r(O\,;\frac{2\pi}{3})$

$= s_1{}^3$

Par ailleurs, $s_3{}^2 = s_1 o r(O\,;-\frac{2\pi}{3}) o s_1 o r(O\,;-\frac{2\pi}{3})$

$= s_1 o s_1 o r(O\,;-\frac{2\pi}{3}) o r(O\,;-\frac{2\pi}{3})$

$= s_1{}^2 o r(O\,;\frac{2\pi}{3})$.

Par suite, $s_3{}^3 = s_3{}^2 o s_3$

$= s_1{}^2 o r(O\,;\frac{2\pi}{3}) o s_1 o r(O\,;-\frac{2\pi}{3})$

$= s_1{}^2 o s_1 r(O\,;\frac{2\pi}{3}) o r(O\,;-\frac{2\pi}{3})$

$= s_1{}^3$.

Partie D

1. On a $\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AD})} = \widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})}$

$= \widehat{(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})} + \hat{\pi} + \widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})}$

La droite (AO) est la bissectrice de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}$ donc, $\widehat{(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})} = -\widehat{\frac{\pi}{6}}$.

Par ailleurs, $D = S_{(AB)}(K)$ implique $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}) = -(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AK}})$.

Or $K \in]AC[$ implique $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AK}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \widehat{\frac{\pi}{3}}$

Par conséquent, $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AD}}) = \widehat{-\frac{\pi}{6}} + \hat{\pi} - \widehat{\frac{\pi}{3}}$

$$= \widehat{\frac{\pi}{2}}.$$

On en déduit que les droites (OA) et (AD) sont perpendiculaires.

2. $s_1(A) = D$ implique que les droites (OA) et (AD) sont perpendiculaires.

Par conséquent, $s_1(D) = A_2$ implique que les droites (OD) et (DA_2) sont perpendiculaires.

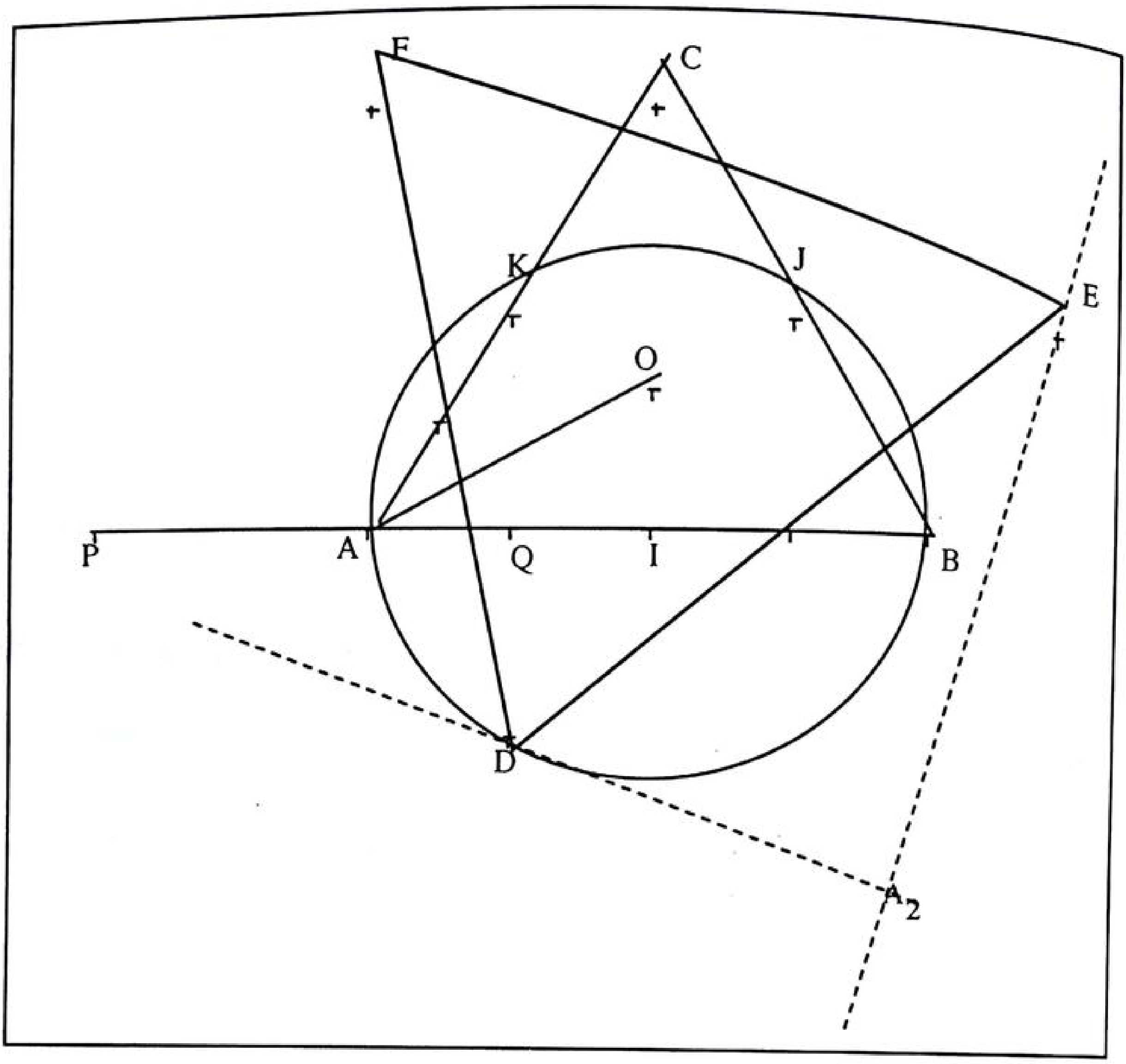
3. **a)** (Γ) est le cercle de diamètre [AB]

Comme $s_1(A) = D$ et $s_1(B) = E$ alors l'image de (Γ) par s_1 est le cercle de diamètre [DE].

b) D appartient à (Γ) donc A_2 appartient au cercle de diamètre [DE].

4. Construction de A_2 : A_2 est l'autre point d'intersection de la perpendiculaire à (OD) passant par D et du cercle de diamètre [DE].

Figure



DEVOIR N° 26

EXERCICE 1

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = 2U_{n+1} + 8\ln\sqrt{2}$

$$= 2\left(\frac{1}{2}U_n - \ln 2\right) + 8\ln\sqrt{2}$$

$$= U_n - 2\ln 2 + 8\ln\sqrt{2}$$

$$= U_n - 4\ln\sqrt{2} + 8\ln\sqrt{2}$$

$$= U_n + 4\ln\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2U_n + 8\ln\sqrt{2}\right)$$

$= \frac{1}{2}V_n$. D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Premier terme : $V_0 = 2U_0 + 8\ln\sqrt{2}$ d'où $V_0 = 6\ln 2$

2. a) $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0$; $V_n = (6\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$; $U_n = \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\right)\ln 2$.

b) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (6\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -2\ln 2$

3. a) $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.

S_n est la somme des n+1 termes consécutifs de la suite géométrique (V_n) de raison $\frac{1}{2}$.

Il s'ensuit que : $S_n = 6\ln 2 \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$.

En définitive, $S_n = (12\ln 2)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

b) Effectuons un raisonnement par récurrence.

$S'_0 = U_0$ et $(6\ln 2)(1-(\frac{1}{2})^{0+1}) - 2(0+1)\ln 2 = U_0$

Donc, $S'_0 = (6\ln 2)(1-(\frac{1}{2})^{0+1}) - 2(0+1)\ln 2.$

Supposons pour un entier naturel $k > 0$, $S'_k = (6\ln 2)(1-(\frac{1}{2})^{k+1}) - 2(k+1)\ln 2.$

$S'_{k+1} = S'_k + U_{k+1}$

$S'_{k+1} = 6\ln 2(1-(\frac{1}{2})^{k+1}) - 2(k+1)\ln 2 + (3(\frac{1}{2})^{k+1} - 2)\ln 2$

$= 6\ln 2(1-2(\frac{1}{2})^{k+1+1}) - 2(k+1+1)\ln 2 + 6(\frac{1}{2})^{k+1+1}$

$= 6\ln 2(1-(\frac{1}{2})^{k+1+1}) - 2(k+1+1)\ln 2.$

On conclut que pour tout entier naturel n, $S'_n = 6\ln 2(1-(\frac{1}{2})^{n+1}) - 2(n+1)\ln 2.$

Autre méthode pour la question 3b)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = 2U_n + 8\ln\sqrt{2}.$

$U_n = \frac{1}{2}V_n - 2\ln 2$

$S'_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n.$

$S'_n = \frac{1}{2}V_0 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}V_1 - 2\ln 2 + \ldots + \frac{1}{2}V_n - 2\ln 2.$

$S'_n = \frac{1}{2}(V_0 + V_1 + \ldots + V_n) - 2(n+1)\ln 2.$ Les termes égaux à $2\ln 2$ sont autant que les termes de la suite (V_n). Donc, $S'_n = \frac{1}{2}(V_0 + V_1 + \ldots + V_n) - 2(n+1)\ln 2.$

On conclut à l'aide de la question 3a) que : $S'_n = 6\ln 2(1-(\frac{1}{2})^{n+1}) - 2(n+1)\ln 2.$

EXERCICE 2

1. a) $P(A) = \dfrac{C_8^2}{C_{12}^2} = 0,42.$

b) $P(A) = \dfrac{C_8^1 \times C_4^1}{C_{12}^2} \times \dfrac{C_8^1}{C_{12}^1} = 0,32.$

2. Soi l'événement C : « Konan réussit l'épreuve »

$C = A \cup B$ avec $A \cap B = \phi$ donc $P(C) = P(A) + P(B)$

$$P(C) = 0,42 + 0,32$$

$$P(C) = 0,74.$$

3. a) La probabilité que un élève réussisse l'épreuve est 0,74.

Donc, la probabilité que seulement les deux premiers interrogés réussissent l'épreuve est

$(0,74)^2 \times (0,26)^4$, soit 0,0025.

b) On a un schéma de Bernoulli à 6 épreuves et la probabilité du succès dans une épreuve est 0,74.

Par conséquent, la probabilité que seulement 2 d'entre les 6 élèves réussissent l'épreuve est

$C_6^2 (0,74)^2 \times (0,26)^4$, soit 0,0037.

PROBLEME

Partie A

1. a) Voir figure.

b) $r_C(M) = K$ implique $KC = CM$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{CM};\overrightarrow{CK}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Donc, le triangle KCM est équilatéral de sens direct.

c) $r_A(B) = C$ implique $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

On a $M \in [AB] \setminus \{A ; B\}$ donc $(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\widehat{2\pi}}{3}$ puis $2(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}}) = -\dfrac{\widehat{2\pi}}{3}$

Par ailleurs, le triangle KCM est équilatéral de sens direct.

Donc, $\widehat{(\overrightarrow{KM};\overrightarrow{KC})} = -\frac{\widehat{\pi}}{3}$ puis $2\widehat{(\overrightarrow{KM};\overrightarrow{KC})} = -\frac{\widehat{2\pi}}{3}$

Par conséquent, $2\widehat{(\overrightarrow{KM};\overrightarrow{KC})} = 2\widehat{(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC})}$.
De plus KCM est un triangle donc K, C et M sont non alignés.
Il s'ensuit que les points A, M, K et C sont cocycliques.

d) On a Mes $\widehat{CAK}$ = mes $\widehat{KAM}$ et $M \in [AB] \setminus \{A ; B\}$.

Donc, mes $\widehat{CAK}$ = mes $\widehat{KAB}$

Ainsi, (AK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$.

Par ailleurs, $r_A(B) = C$ donc ABC est isocèle en A.

On en déduit que (AK) médiatrice de [BC].
Par suite, K appartient à la médiatrice de [BC].

2. **a)** On a:

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r_K} \\ \hline K & K \\ C & B \\ M & F \end{array}$$

r_K est une rotation donc elle conserve les angles orientés

KCM a pour image KBF par r_K.

Comme KCM est équilatéral de sens direct alors KBF est équilatéral de sens direct.

b) On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r_K} \\ \hline K & K \\ C & B \\ M & F \\ (\Gamma) & (\Gamma') \end{array}$$

(Γ) est l'image de (Γ') par r_K.

Comme I est le centre de (Γ) et J le centre de (Γ') donc $r_K(I) = J$.

3. On a : $r_K(C) = B$ donc $KC = KB$.
KCM équilatéral donc $KC = KM$.
Par suite, $KB = KM$.
Par conséquent $K \in (D)$.

Par ailleurs, $A \in (\Gamma)$, $M \in (\Gamma)$ et I est le centre de (Γ) implique $AI = IM$.

Il en résulte que I appartient à la droite (D').

Partie B

1. $r_J \circ r_I(M) = r_J[r_I(M)]$.

   On a KCM est équilatéral de sens direct et de centre I.

   Donc, $r_I(M) = K$.

   De plus, KBF est équilatéral de sens direct et de centre J donc $r_J(K) = B$.

   En définitive, $r_J \circ r_I(M) = B$

2. $r_J \circ r_I$ est la composée de deux rotations de centres distincts dont la somme des angles est

   $\widehat{\frac{2\pi}{3}} + \widehat{\frac{2\pi}{3}} = -\widehat{\frac{2\pi}{3}}$. Donc, $r_J \circ r_I$ est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

3. (Δ') est l'image de (IJ) par la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{3}$

   (Δ) est l'image de (IJ) par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

4. $r_J \circ r_I = S_{\Delta'} \circ S_{IJ} \circ S_{IJ} \circ S_{\Delta}$

   $= S_{\Delta'} \circ I_d \circ S_{\Delta}$.

   On en déduit que $r_J \circ r_I = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.

5. $r_J = S_{\Delta'} \circ S_{IJ}$ donc $J \in (\Delta')$

   De plus, $r_J \circ r_I = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ avec $r_J \circ r_I$ rotation de centre O.

   Donc $O \in (\Delta')$.
   Il s'ensuit que, (Δ') est la droite (OJ).
   Par un procédé analogue on établit que (Δ) est la droite (OI).

6. $r_J \circ r_I(O) = O$ implique $r_I(O) = r_J^{-1}(O)$. Posons $O' = r_I(O)$.

   De ce fait, I appartient à la médiatrice de [OO'].

   On a $r_J^{-1}(O) = O'$ donc J appartient à la médiatrice de [OO'].

   Puisque IOO' est isocèle en I alors (IJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IO'})}$

Par conséquent, $\widehat{(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IJ})} = \frac{\pi}{3}$ ou $\widehat{(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IJ})} = -\frac{2\pi}{3}$ (1)

Par ailleurs, (IJ) est la médiatrice de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{JO};\overrightarrow{JO'})}$.

Donc, $\widehat{(\overrightarrow{JO};\overrightarrow{JI})} = -\frac{\pi}{3}$ ou $\widehat{(\overrightarrow{JO};\overrightarrow{JI})} = \frac{2\pi}{3}$ (2)

Aucune des mesures des angles non orientés du triangle IOJ ne peut être égale à $\frac{2\pi}{3}$.

Il en résulte que le triangle IOJ est équilatéral de sens direct.

7. IOJ est équilatéral. Donc, O appartient à la médiatrice de [IJ].
   Puisque $r_K(I) = J$ alors K appartient à la médiatrice de [IJ].
   Il s'ensuit que (OK) est la médiatrice de [IJ].
   Par ailleurs, $r_J \circ r_I(M) = B$ où $r_J \circ r_I$ est une rotation de centre O.
   Donc, $O \in (D)$
   De plus, $K \in (D)$
   Par conséquent (OK) est la droite (D).
   On conclut que : (D) est la médiatrice de [IJ].

Partie C

1. (D) médiatrice de [MB] donc $(D) \perp (MB)$.
   (D') est la médiatrice de [AM] donc $(D') \perp (AM)$
   De plus $M \in (AB)$.
   On en déduit que les droites (D) et (D') sont parallèles.
   Il en résulte que f est une translation.

2. $f(A) = s \circ s'(A)$
   $= s[s'(A)]$
   $= s(M)$ car (D') est la médiatrice de [AM].
   Donc, f(A) = B car (D) est la médiatrice de [MB].
   Par ailleurs, $f(I) = s \circ s'(I) = s[s'(I)]$ car I appartient à (D').
   Par conséquent, f(I) = J car (D) est la médiatrice de [IJ] .

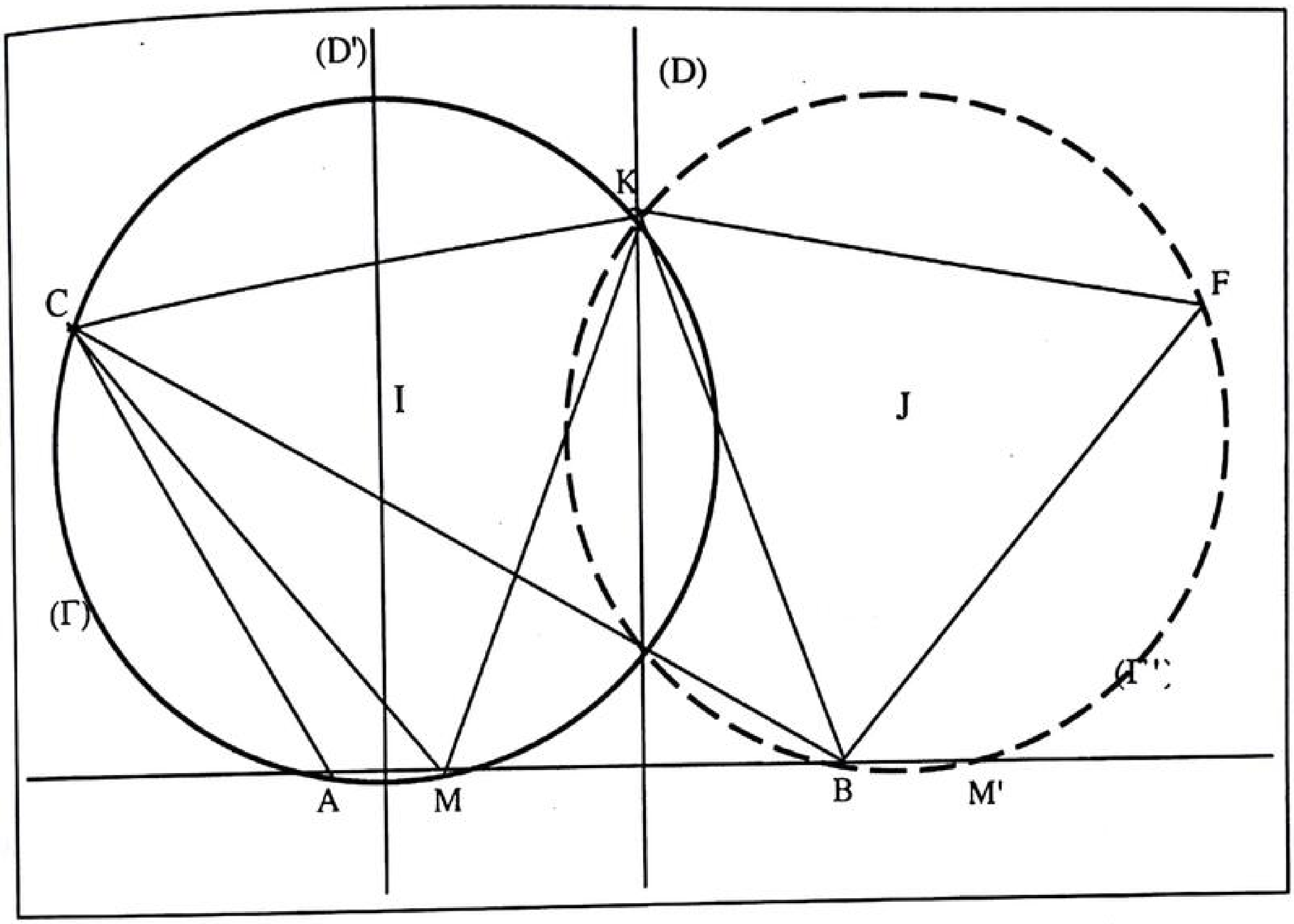
3. f translation et f(A) = B, f(I) = J ainsi $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BJ}$.
   On en déduit que IABJ est un parallélogramme.

4. a) f(I) = J, f(A) = B, I est le centre de (Γ) et $A \in (\Gamma)$
   Donc, l'image de (Γ) par f est le cercle de centre J passant par B c'est à dire le cercle (Γ').
   Par suite, (Γ') est l'image de (Γ) par f.
   Par ailleurs, f(A) = B .
   Donc, l'image de (AB) par la translation f est la droite passant B et parallèle à (AB).

On obtient la droite (AB).
Il en résulte que (AB) est globalement invariant par f.

b) On a : $\begin{array}{c|c} & f \\ (AB) & (AB). \\ (\Gamma) & (\Gamma') \end{array}$

De plus $(AB) \cap (\Gamma) = \{A ; M\}$, $(AB) \cap (\Gamma') = \{B ; M'\}$ et $f(A) = B$
Donc, $f(M) = M'$.



DEVOIR N° 27

EXERCICE 1

1. $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = x^2 - kx + 2; g_k'(x) = 2x - k; g_k''(x) = 2$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, g_k''(x) - 2g_k'(x) + g_k(x) = 2 - 2(2x - k) + x^2 - kx + 2$

$$= x^2 - 4x + 4 + 2k - kx$$
$$= (x-2)^2 - k(x-2)$$
$$= (x-2)(x-2-k).$$

On conclut que pour tout nombre réel k, g_k est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

2. **a)** $(E') : y'' - 2y' + y = 0 \Leftrightarrow y'' - y - (y' - y) = 0$

$$\Leftrightarrow (y' - y)' - (y' - y) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (F) : y' - y = Ae^x ; A \in \mathbb{R}$$ car $y' - y$ solution de l'équation différentielle $u' - u = 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = Axe^x ; h'(x) = (A + Ax)e^x$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) - h(x) = (A + Ax)e^x - Axe^x = Ae^x$. Il en découle que h est solution sur $\mathbb{R}$ de (F)

3. **a)** $f - h$ est solution de $(F') \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (f-h)'(x) - (f-h)(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - f(x) = h'(x) - h(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - f(x) = Ae^x ; A \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow f \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (F).$$

On en déduit que f est solution de (F) si et seulement si $f - h$ est solution de (F')

b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (F') sont les fonctions $x \mapsto Be^x$ où $B \in \mathbb{R}$.

Soit f solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (F). On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - h(x) = Be^x ; B \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = (Ax + B)e^x ; A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (F) sont les fonctions $x \mapsto (Ax+B)e^{x}$ où $A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}$.
Puisque les équations (E') et (F) sont équivalentes alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E') sont les fonctions $x \mapsto (Ax+B)e^{x}$ où $A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}$.

4. En s'inspirant de la question 3b), les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto (Ax+B)e^{x} + g_k(x)$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{R}$.

5. Déterminons les nombres réels A et B tels que $h_k(k) = 0$ et $h_k'(k) = k$

$\forall x \in \mathbb{R}, h_k(x) = (Ax+B)e^{x} + g_k(x)$ où $A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ h_k'(x) = (A(x+1)+B)e^{x} + 2x - k$

Donc, $\begin{cases} h_k(k) = 0 \\ h_k'(k) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Ak+B)e^{k} + 2 = 0 \\ (Ak+A+B)e^{k} + k = k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Ak+B = -2e^{-k} \\ (A(k+1)+B)e^{k} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Ak+B = -2e^{-k} \\ B = -A(k+1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2e^{-k} \\ B = -2(k+1)e^{-k} \end{cases}$

Il en découle que: $\forall x \in \mathbb{R}, h_k(x) = (2xe^{-k} - 2(k+1)e^{-k})e^{x} + x^2 - kx + 2$

EXERCICE 2

1. a) *Première méthode.*

$\forall n \geq 2$ et $\forall x \geq 0$, $(x+1)^{n} = (x+1)^{2}(x+1)^{n-2}$

On a : $(x+1)^{2} \geq 2x \geq 0$ et $(x+1)^{n-2} \geq 1$ donc, $(x+1)^{2}(x+1)^{n-2} \geq 2x$

Par conséquent, $(x+1)^{n} \geq 2x$

Deuxième méthode: Utilisons un raisonnement par récurrence

On a $(x+1)^{2} \geq 2x$

Supposons que pour un entier k>2, $(x+1)^k \geq 2x$

$(x+1)^{k+1} = (x+1)^k(x+1)$. On a $x+1 \geq 1$. Or $(x+1)^k \geq 2x$

Donc, $(x+1)^k(x+1) \geq 2x$. Il s'ensuit que $(x+1)^{k+1} \geq 2x$

En définitive, étant donné un nombre réel x , pour tout entier naturel $n \geq 2$, $(x+1)^n \geq 2x$

Troisième méthode Utilisation de la formule de binôme de Newton.

$(x+1)^n = 1 + nx + \ldots + x^n$ avec $x \geq 0$.

Donc, Or $n \geq 2$ donc, $1 + nx \geq 2x$.. On conclut que : $(x+1)^n = 1 + nx$.

b) $\forall x \geq 1, \ln(x) \geq 0$. Puisque $(x+1)^n \geq 2x$ alors $2x\ln x \leq (x+1)^n \ln x$

2. **a)** $\forall t \in]0;+\infty[,\ f'(t) = 2t\ln t$

b) $\forall t \geq 1,\ 2t\ln t \leq (t+1)^n \ln t$ donc, $\int_1^x 2\,t\ln t dt \leq \int_1^x (t+1)^n \ln t dt$.

On a : $\int_1^x 2\,t\ln t dt = [f(t)]_1^x = [t^2\ln t - \frac{t^2}{2}]_1^x$ donc, $\int_1^x 2\,t\ln t dt = x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$.

On en déduit que : $x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \leq \int_1^x (t+1)^n \ln t dt$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\right)$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = +\infty$.

Comme, $\int_1^x 2\,t\ln t dt \leq \int_1^x (t+1)^n \ln t dt$ alors, $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\int_1^x (t+1)^n \ln t\right) = +\infty$.

PROBLEME

1. **a)** Soit $M(x;y)$ un point du plan et H son projeté orthogonal sur la droite (D).

$$M(x;y) \in (P) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = 1$$
$$\Leftrightarrow MF = MH$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2$$
$$\Leftrightarrow (y+1)^2=(x+2)^2-(x-1)^2$$
$$\Leftrightarrow (y+1)^2=3(2x+1)$$
$$\Leftrightarrow (y+1)^2-6x-3=0$$

b) $M(x;y)\in(P)\Leftrightarrow(y+1)^2=6(x+\frac{1}{2})$

Posons $X=x+\frac{1}{2}$ et $Y=y+1$ et soit $S(-\frac{1}{2};-1)$ On a (X,Y) coordonnées de M dans le repère $(S,\vec{u},\vec{v})$. Par suite, $Y^2=6X$ est l'équation réduite de la parabole (P) dans le repère $(S,\vec{u},\vec{v})$ donc $S(-\frac{1}{2};-1)$ est le sommet de (P).

2. a) $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$

$x'+iy'=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(x+iy)$

$x'+iy'=\frac{1}{2}(x+iy+ix\sqrt{3}-y\sqrt{3})$

$x'+iy'=\frac{1}{2}(x-y\sqrt{3})+\frac{1}{2}(y+x\sqrt{3})i$. Il s'ensuit que : $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}(x-y\sqrt{3}) \\ y'=\frac{1}{2}(x\sqrt{3}+y). \end{cases}$

Il en découle que : $x=\frac{1}{2}(x'+y'\sqrt{3})$ et $y=\frac{1}{2}(-x'\sqrt{3}+y')$.

b) L'image d'une parabole par une rotation est une parabole. Il en découle que (P') est une parabole.

$M\in(P)\Leftrightarrow(y+1)^2-6x-3=0$

$M\in(P)\Leftrightarrow(\frac{1}{2}(-x'\sqrt{3}+y')+1)^2-6(\frac{1}{2}(x'+y'\sqrt{3})-3=0$

$M\in(P)\Leftrightarrow\frac{1}{4}(3x'^2-2x'y'\sqrt{3}+y'^2)+(-x'\sqrt{3}+y')+1-3x'-3y'\sqrt{3}-3=0$

$M\in(P)\Leftrightarrow 3x'^2+y'^2-2x'y'\sqrt{3}-(12+4\sqrt{3})x'+(4-12\sqrt{3})y'-8=0.$

On en déduit qu'une équation de (P') est $3x^2+y^2-2xy\sqrt{3}-(12+4\sqrt{3})x+(4-12\sqrt{3})y-8=0$

3. **a)** $z'_S = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(-\frac{1}{2}-i) = -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2} - i(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2} - i(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4})$

b) $M' \in (\Delta') \Leftrightarrow M \in (\Delta)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(-x'\sqrt{3}+y') = -1$

$\Leftrightarrow -x'\sqrt{3}+y'+2=0$. Donc, une équation de (Δ') est $-x\sqrt{3}+y+2=0$

4. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-1+\sqrt{6x+3}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1+\sqrt{6x+3}}{x} = 0$

Par suite, la courbe (Γ_1) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

b) $\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[, g_1'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x+3}}$.

Par conséquent, la fonction g_1 est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Tableau de variation de g_1.

x	$-\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g_1(x)$	$+$
$g_1'(x)$	$-1 \nearrow +\infty$

$g_1(-\frac{1}{2}) = -1$

5. **a)** $\forall x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[, g_1(x)+g_2(x) = -1+\sqrt{6x+3}-1-\sqrt{6x+3} = -2 = 2\times(-1)$

$= 2\times(-1)$.

Donc, les courbes (Γ_1) et (Γ_2) sont symétriques par rapport à la droite (Δ).

b) Voir graphique.

6. $\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[, G'(x) = \sqrt{6x+3}$. Donc, G est une primitive de sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{6x+3}$

7. $M \in (P) \Leftrightarrow (y+1)^2 - 6x - 3 = 0$

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[, (y+1)^2 = 6x+3 \Leftrightarrow y+1 = \sqrt{6x+3}$ ou $y+1 = -\sqrt{6x+3}$

$\Leftrightarrow y = -1+\sqrt{6x+3}$ ou $y = -1-\sqrt{6x+3}$

$\Leftrightarrow y = g_1(x)$ ou $y = g_2(x)$

Il s'ensuit que, étant donné un point $M(x;y)$ du plan, $M \in (P) \Leftrightarrow M \in (\Gamma_1)$ ou $M \in (\Gamma_2)$

On conclut que : $(P) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$.

8. **a)** $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} (g_1(x) - g_2(x))dx$

$= 2\int_{\lambda}^{0} \sqrt{6x+3}\,dx$

$= \left[\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{6x+3}\right]_{\lambda}^{0} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3}(2\lambda+1)\sqrt{6\lambda+3}$

b) $\lim\limits_{\lambda \to -\frac{1}{2}} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to -\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3}(2\lambda+1)\sqrt{6\lambda+3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

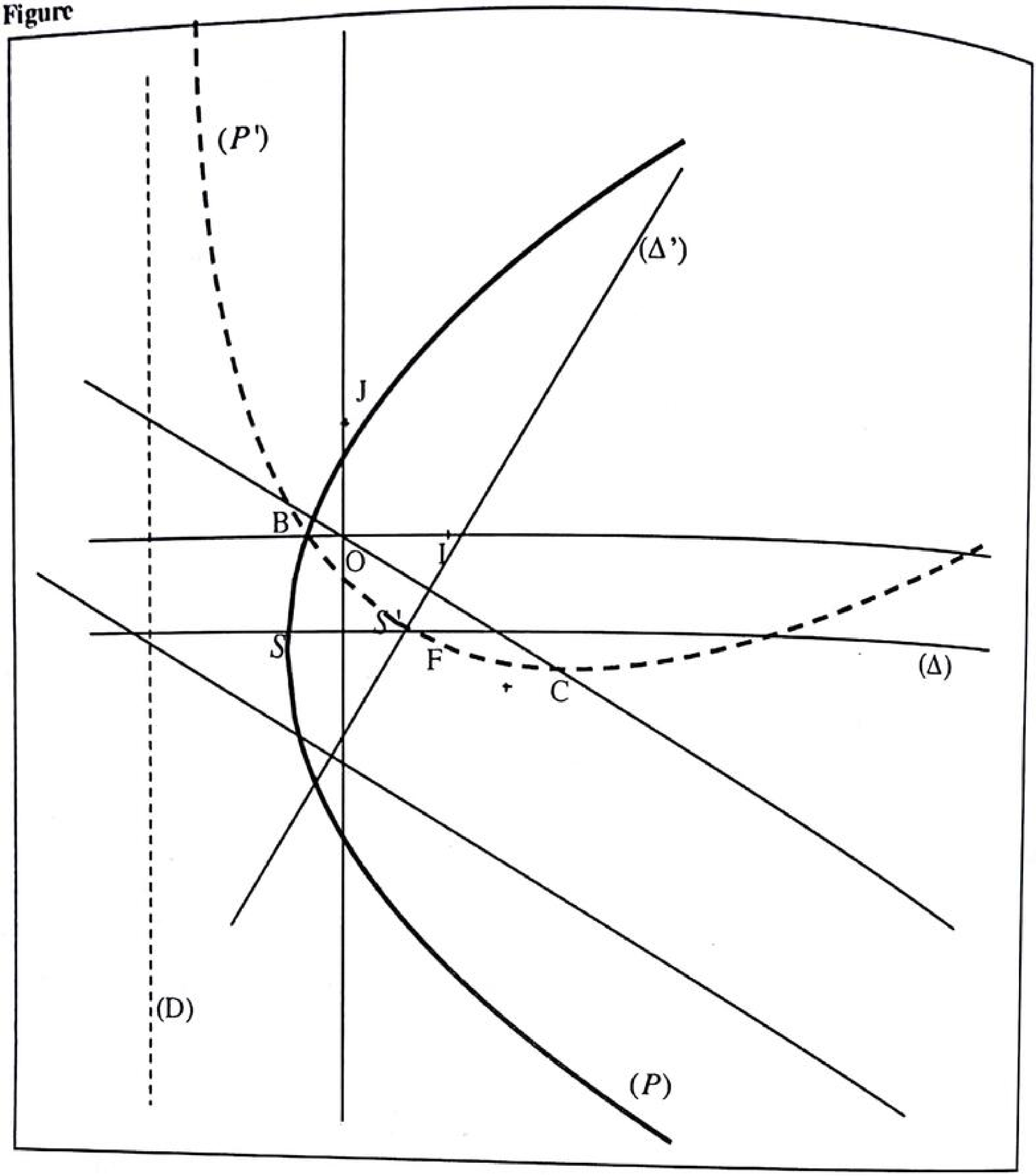
9. r est une rotation de centre O et les droites (OJ) et (Δ) sont perpendiculaires.

De plus, la droite (Δ) a pour image par la rotation r la droite (Δ'). On en déduit que l'image de la droite (OJ) par la rotation r est la droite passant par O et perpendiculaire à (Δ'). Or la droite passant par O et perpendiculaire à la droite (Δ') est la droite (BC) alors, (BC) est l'image de (OJ) par r.

Par ailleurs, une rotation est une isométrie donc, r conserve les aires.

Par conséquent, l'aire de la partie du plan délimitée par l'aire A de la portion du plan délimitée par la droite (OJ) et la parabole (P) est égale à l'aire A' de la partie du plan délimitée par la droite (BC) et l'ensemble (P').

Figure



DEVOIR N° 28

EXERCICE 1

1. **a)** $u_0 = 4$ donc $u_0 > 0$.

Supposons que pour un entier naturel $k > 0$, $u_k > 0$

$u_{k+1} = \ln(u_k + 1)$. On a $u_k > 0$ donc $1 + u_k > 1$ et $\ln(u_k + 1) > \ln(1)$.

Par suite, $u_{k+1} > 0$. En conclusion, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

b) $u_n - u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n)$.

Soit la fonction h définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = x - \ln(1+x)$

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Il s'ensuit que la fonction h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

On a $h(]0;+\infty[) =]0;+\infty[$ et $u_n > 0$ donc $h(u_n) > 0$; c'est-à-dire $u_n - \ln(1 + u_n) > 0$.

De ce fait, $u_n - u_{n+1} > 0$, donc $u_n > u_{n+1}$.

On en déduit que la suite u est décroissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc la suite (u) est minorée.

La suite u est donc décroissante et minorée. De ce fait la suite u converge.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Donc $L > 0$.

Or f est continue sur $]-1;+\infty[$ donc f est continue en L, alors $f(L) = L$.

Par conséquent L vérifie l'équation $f(x) = x$.

4. **a)** La fonction g est strictement croissante sur $]-1;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

b) $g(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$

g est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

$g(]0;+\infty[) =]-\infty;0[$. Donc g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;0[$

Puisque $0 \notin]-\infty;0[$ alors l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]0;+\infty[$.

Par ailleurs, g est continue et strictement croissante sur $]-1;0[$.

On a : $g(]-1;0[) =]-\infty;0[$. Donc g réalise une bijection de $]-1;0[$ sur $]-\infty;0[$.

Comme $0 \notin]-\infty;0[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-1;0[$.

Il s'ensuit que, 0 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $]-1;+\infty[$

5. Pour tout $x \in]-1;0[$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x = 0$

$$\Leftrightarrow \ln(1+x) = x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x.$$

Donc 0 est également l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ et L vérifie l'équation $f(x) = x$

Il s'ensuit que $L = 0$.

EXERCICE 2

1. Chacun des 3 élèves peut recevoir le prix donc on a une expérience équiprobable. L'univers Ω est l'ensemble des distributions possibles sachant qu'un élève peut recevoir 0 à 5 livres.

Donc $\text{card}(\Omega) = 3^5$.

2. a) Dans ce cas, un élève reçoit 0 livre, un autre 2 livres et le dernier 3 livres.

On obtient 3! façons de faire ce choix.

Pour chaque choix, on a $1 \times C_5^2 \times C_3^3$ distributions possibles.

Par suite, $\text{card.}(A) = 3! \times 1 \times C_5^2 \times C_3^3$.

Par conséquent, $P(A) = \dfrac{60}{243}$

$$= \frac{20}{81}.$$

b) Dans ce cas un seul élève reçoit un seul livre.

On a 3 possibilités de choisir cet élève à qui on a C_5^1 possibilités de lui attribuer un livre.

Donc, C_4^2 façons pour le second et C_2^2 façons pour le troisième.

D'où, $\text{card.}(B) = 3 \times C_5^1 \times C_4^2 \times C_2^2$

Par suite $P(B) = \dfrac{90}{243} = \dfrac{10}{27}$.

3. Soit C l'événement « Une fille reçoit exactement deux livres ».

On a Card C = $C_5^2 \times 2^3$.

Donc, $P(C) = \dfrac{80}{243}$.

4. On a un schéma de Bernoulli à 4 épreuves et lors d'une épreuve, la probabilité du succès.

(une fille gagne exactement deux livres) est $\dfrac{80}{243}$.

Donc la probabilité recherchée est $C_4^1 \times \dfrac{80}{243} \times (1 - \dfrac{80}{243})^3$ c'est-à-dire 0,4.

5. **a)** Une fille peut recevoir 0 à 5 livres d'où les valeurs de X sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

$(X = 0)$ = « la fille n'a pas de livre ».

Les livres sont donc repartis entre les garçons qui sont au nombre de 2.

Il s'ensuit que, $P(X = 0) = \dfrac{2^5}{243} = \dfrac{32}{243}$.

$(X = 1)$ = « la fille a exactement un livre ».

Card $(X = 1) = 5 \times 2^4$ donc $P(X = 1) = \dfrac{80}{243}$.

Pour $(X = 2)$, voir la question 1c) donc $P(X = 2) = \dfrac{80}{243}$.

$(X = 3)$ = « la fille a exactement trois livres ».

Card $(X = 3) = 2^2 \times C_5^3$ donc $P(X = 3) = \dfrac{40}{243}$.

$(X = 4)$ = « la fille a exactement quatre livres ».

Card $(X = 4) = 2 \times C_5^4$ donc $P(X = 4) = \dfrac{10}{243}$.

On a : $P(X = 5) = \dfrac{1}{243}$.

La loi de probabilité est consignée dans le tableau ci –dessous

x	0	1	2	3	4	5
P(X = x)	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

b) On obtient $E(X) = \frac{405}{243} = \frac{5}{3}$.

PROBLEME

Partie A

1. Voir figure

2. $S(O) = A$ et $S(I) = B$ donc l'angle de S est $\widehat{(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{AB})}$

$$\widehat{(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB})} = \widehat{(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{AB})} \text{ car } I\in[OA]$$

$$= \hat{\pi} - \widehat{(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AI})}$$

Le triangle IAB est rectangle isocèle en I et de sens direct donc $\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI})} = \widehat{\frac{\pi}{4}}$

Donc, $\widehat{(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{AB})} = \widehat{\frac{3\pi}{4}}$.

Par conséquent, l'angle de S est $\frac{3\pi}{4}$.

3. a) Ω est le centre de S.

$S(O) = A$ donc $\widehat{(\overrightarrow{\Omega O}\,;\overrightarrow{\Omega A})} = \widehat{\frac{3\pi}{4}}$

$$2\widehat{(\overrightarrow{\Omega O}\,;\overrightarrow{\Omega A})} = -\widehat{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit K le milieu du segment [AF]. Le triangle AOF est rectangle en O.
Donc, K est le centre du cercle circonscrit au triangle AOF.

Le triangle AOF est rectangle isocèle en O et de sens direct implique $\widehat{(\overrightarrow{KO};\overrightarrow{KA})} = -\widehat{\frac{\pi}{2}}$.

Par suite, $2\widehat{(\overrightarrow{\Omega O}\,;\overrightarrow{\Omega A})} = \widehat{(\overrightarrow{KO}\,;\overrightarrow{KA})}$

On en déduit que Ω appartient au cercle (C').

Par ailleurs, S (I) = B donc $\widehat{(\overrightarrow{\Omega I};\overrightarrow{\Omega B})} = \widehat{\frac{3\pi}{4}}$

Considérons E le milieu du segment [AB]. Le triangle IAB est rectangle en I
Donc E est le centre du cercle circonscrit au triangle IAB.

Le triangle IAB est rectangle isocèle en I et de sens direct implique $\widehat{(\overrightarrow{EI};\overrightarrow{EB})} = -\widehat{\frac{\pi}{2}}$.

En définitive, $2\,\widehat{(\overrightarrow{\Omega I};\overrightarrow{\Omega B})} = \widehat{(\overrightarrow{EI};\overrightarrow{EB})}$

Il en résulte que Ω appartient au cercle (C).
Par conséquent, le point Ω appartient aux cercles (C) et (C').

b) (C) cercle circonscrit au triangle IAB et (C') cercle circonscrit au triangle AOF donc A appartient à l'intersection des cercles (C) et (C')
De plus, S(O) = A
Donc, Ω est distinct du point A. On en déduit que Ω est l'autre point d'intersection des cercles (C) et (C').

<u>Partie B</u>

1. $A_0 = O$, $B_0 = I$ et $A_1 = A$.

Les points O, A et B sont alignés donc les points A_0, B_0 et A_1 sont alignés.

Supposons pour un entier naturel k >0, A_k, B_k et A_{k+1} alignés.

On a $S(A_k) = A_{k+1}$, $S(B_k) = B_{k+1}$ et $S(A_{k+1}) = A_{(k+1)+1}$.

La similitude directe conserve l'alignement.

Puisque les points A_k, B_k et A_{k+1} sont alignés alors les points A_{k+1}, B_{k+1} et $A_{(k+1)+1}$ sont alignés. En définitive, pour tout entier naturels n, A_n, B_n et A_{n+1} sont alignés.

2. $S(A_n) = A_{n+1} \Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+1}})} = \widehat{\frac{3\pi}{4}}$

$S(A_{n+1}) = A_{n+2} \Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{\Omega A_{n+1}};\overrightarrow{\Omega A_{n+2}})} = \widehat{\frac{3\pi}{4}}$

Par suite, $\widehat{(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+2}})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+1}})} + \widehat{(\overrightarrow{\Omega A_{n+1}};\overrightarrow{\Omega A_{n+2}})}$

$$= \widehat{\frac{3\pi}{4}} + \widehat{\frac{3\pi}{4}}$$

On en déduit qu'une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+2}})}$ est $-\frac{\pi}{2}$.

3. **a)** $B_0 = I$, $A_1 = A$ et $B_1 = B$.

Le triangle IAB est rectangle isocèle en I et de sens direct.

Donc, le triangle $B_0\ A_1\ B_1$ est rectangle isocèle en B_0 et de sens direct.

Supposons pour un entier naturel k>0, $B_k\ A_{k+1}\ B_{k+1}$ est rectangle isocèle en B_k et de sens direct.

On a $S(B_k) = B_{k+1}$, $S(A_{k+1}) = A_{(k+1)+1}$ et $S(B_{k+1}) = B_{(k+1)+1}$.

La similitude directe conserve les angles orientés.

Or le triangle $B_k\ A_{k+1}\ B_{k+1}$ est rectangle isocèle en B_k et de sens direct.

Par suite le triangle $B_{k+1}\ A_{(k+1)+1}\ B_{(k+1)+1}$ est rectangle isocèle en B_{k+1} et de sens direct.

En définitive, pour tout entier naturel n, $B_n\ A_{n+1}\ B_{n+1}$ est rectangle isocèle en B_n et de sens direct.

b) $B_n\ A_{n+1}\ B_{n+1}$ est rectangle isocèle en B_n et de sens direct.

Il s'ensuit que, $\widehat{(\overrightarrow{A_{n+1}B_n};\overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}})} = -\widehat{\frac{\pi}{4}}$.

$$2\widehat{(\overrightarrow{A_{n+1}B_n};\overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}})} = -\widehat{\frac{\pi}{2}} \quad (1)$$

Par ailleurs,

$S(B_n) = B_{n+1}$ implique $\widehat{(\overrightarrow{\Omega B_n};\overrightarrow{\Omega B_{n+1}})} = \widehat{\frac{3\pi}{4}}$

$$2\widehat{(\overrightarrow{\Omega B_n};\overrightarrow{\Omega B_{n+1}})} = -\widehat{\frac{\pi}{2}} \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on a $2\widehat{(\overrightarrow{A_{n+1}B_n};\overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}})} = 2\widehat{(\overrightarrow{\Omega B_n};\overrightarrow{\Omega B_{n+1}})}$.

De plus, B_n, A_{n+1} et B_{n+1} non alignés.

Par conséquent, pour tout entier naturel n, les points Ω, B_n, A_{n+1} et B_{n+1} sont cocycliques.

4. Ω appartient au cercle circonscrit au triangle $B_n\ A_{n+1}\ B_{n+1}$.

Le triangle $B_n\ A_{n+1}\ B_{n+1}$ est rectangle en B_n.

Donc, le cercle circonscrit au triangle $B_n\ A_{n+1}\ B_{n+1}$ est le cercle de diamètre $[A_{n+1}B_{n+1}]$.

Par suite, le triangle $\Omega\ A_{n+1}\ B_{n+1}$ est rectangle en Ω.

On en déduit que les droites (ΩA_{n+1}) et (ΩB_{n+1}) sont perpendiculaires.

5. a) $S^4 = SoSoSoS$; $S^4 = (SoS)o(SoS)$.

$S(O) = A$ et $S(I) = B$ donc, le rapport de S est $\frac{AB}{OI}$.

Il s'ensuit que S est la similitude de centre, de rapport $\frac{AB}{OI}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

Donc, SoS est la similitude de centre Ω, de rapport $(\frac{AB}{OI})^2$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Et $(SoS)o(SoS)$ est la similitude de centre Ω, de rapport $(\frac{AB}{OI})^4$ et d'angle π.

On en déduit que S^4 est l'homothétie de centre Ω, de rapport $(\frac{AB}{OI})^4$.

b) $$\begin{aligned} S^4(A_n) &= SoSoSoS(A_n) \\ &= SoSoS(S(A_n)) \\ &= SoSoS(A_{n+1}) \\ &= SoS(S(A_{n+1}) \\ &= A_{n+4}. \end{aligned}$$

Puisque S^4 est une homothétie de centre Ω et $S^4(A_n) = A_{n+4}$ alors les points Ω, A_n et A_{n+4} sont alignés.

6. Voir figure.

Partie C

1. a) L'affixe de A et 2
L'affixe de B et $1 + i$.
b) $S(O) = A$, $S(I) = B$ et l'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
Donc, $z_A = az_O + b$ et $z_B = az_I + b$.
Par conséquent, $z' = (-1 + i)z + 2$.

2. Ω est le point invariant de S.
Donc, $z_\Omega = (-1 + i)z_\Omega + 2$

On en déduit que l'affixe de Ω est $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

3. **a)** S^2 est une similitude de $(\frac{AB}{OI})^2$ et d'angle $2\times\frac{3\pi}{4}$.

IAB est rectangle isocèle en I implique $AB = \sqrt{2}\ AI$

$$\frac{AB}{OI} = \sqrt{2}$$

Donc, Le rapport de S^2 est $(\sqrt{2})^2$.

Il s'ensuit que S^2 est de rapport $(\sqrt{2})^2$ et d'angle $\frac{3\times 2\times\pi}{4}$

Supposons que jusqu'à un entier k>2, S^k est de rapport $(\sqrt{2})^k$ et d'angle $\frac{3k\pi}{4}$

On a : $S^{k+1} = S^k oS$.

$S^k oS$ qui est une similitude de rapport $(\sqrt{2})^k \times \sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3k\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$.

Donc, S^{k+1} est une similitude de rapport $(\sqrt{2})^{k+1}$ et d'angle $\frac{3(k+1)\pi}{4}$.

En conclusion, pour tout entier naturel $n \geq 2$, le rapport de S^n est $(\sqrt{2})^n$ et l'angle de S^n est $\frac{3n\pi}{4}$

b) S^n est la similitude de centre Ω de rapport $(\sqrt{2})^n$ et d'angle $\frac{3n\pi}{4}$.

Son écriture complexe est de la forme $z' = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{3n\pi}{4}} z + b$ où $b \in \mathbb{C}$.

On a $z' = (\sqrt{2})^n (e^{i\frac{3\pi}{4}})^n z + b$

$z' = (-1+i)^n z + b \quad (1)$

Par ailleurs, $z_\Omega = (-1+i)^n z_\Omega + b \quad (2)$.

Des relations (1) et (2), on déduit que $z' = (-1+i)^n (z - z_\Omega) + z_\Omega$.

4. **a)** Pour tout entier naturel n, $d_n = | z_{B_n} - z_{A_{n+1}} |$.

$B_n A_{n+1} B_{n+1}$ est un triangle rectangle isocèle en B_n.

Donc, $B_{n+1} A_{(n+1)+1} B_{(n+1)+1}$ est un triangle rectangle isocèle en B_{n+1}.

Par conséquent, $A_{n+1}B_{n+1} = \sqrt{2}\ A_{n+1}B_n \quad (1)$

Et, $A_{(n+1)+1}B_{(n+1)+1} = \sqrt{2}\ A_{(n+1)+1}B_{n+1}$ (2)

Par ailleurs, $S(A_{n+1}) = A_{(n+1)+1}$ et $S(B_n) = B_{(n+1)+1}$

Donc $A_{(n+1)+1}B_{(n+1)+1} = \sqrt{2}\ A_{n+1}B_{n+1}$ (3)

Des égalités (2) et (3), on a : $A_{n+1}B_{n+1} = A_{(n+1)+1}B_{n+1}$

A l'aide de l'égalité (1), on déduit que : $A_{(n+1)+1}B_{n+1} = \sqrt{2}\ A_{n+1}\,B_n$.

Finalement, $d_{n+1} = \sqrt{2}\ d_n$.

La suite (d_n) est donc une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

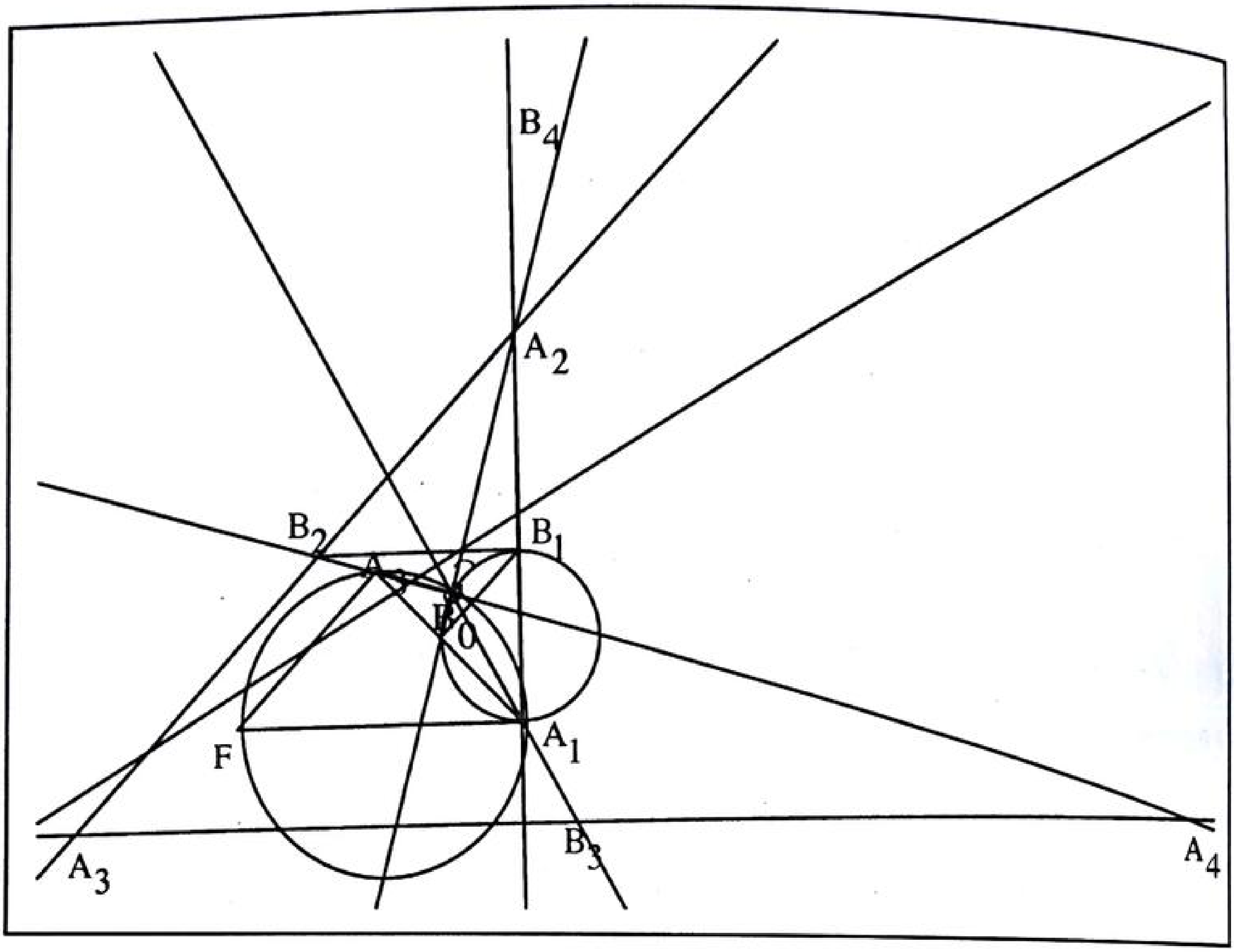
Le premier terme est
$$\begin{aligned} d_0 &= \left|z_{B_0} - z_{A_1}\right| \\ &= A_1 B_0 \\ &= OI \\ &= 1. \end{aligned}$$

b) S_n est une somme de n termes consécutifs de la suite géométrique (d_n).

Le premier terme de la somme S_n est d_1 avec $d_1 = d_0\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Donc,
$$\begin{aligned} S_n &= \sqrt{2}\,\frac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}(1+\sqrt{2})\frac{1-(\sqrt{2})^n}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} \\ &= -(\sqrt{2}+2)(1-(\sqrt{2})^n). \\ &= (\sqrt{2}+2)((\sqrt{2})^n - 1). \end{aligned}$$

Figure



RÉSUMÉ DE COURS

COURS

L'essentiel du cours sur les limites et continuité

I) Limites

1) Limites et opérations sur les fonctions

limf	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
limg	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim(f + g)	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

limf	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
limg	l'	l' ; $l'>0$	l' ; $l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
lim fg	$l\times l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

limf	l ; $l\neq 0$	$+\infty$ (ou $-\infty$)	0 et f >0	0 et f < 0
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

2) Limite de la composée de deux fonctions

Propriété : Si $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\mapsto b} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\mapsto a} g(f(x)) = l$.

3) Branches paraboliques.

Propriété : Soit f une fonction telle que : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto+\infty \\ (ou -\infty)}} f(x) = +\infty(ou\ -\infty)$

- si $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (ou -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = 0$, (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en $+\infty$.
- si $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (ou -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (ou $-\infty$), (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnée en $+\infty$.

II) Continuité

1) Continuité en un nombre réel a

Définition : Une fonction f est *continue* en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et ; a et b éléments de K.Tout nombre réel compris entre f(a) et f(b) admet au moins un antécédent par f compris entre a et b.

3) Fonctions continues et strictement monotones

Soit f une fonction continue.

Intervalles	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
[a ;b]	[f(a) ; f(b)]	[f(b) ; f(a)]
[a ;b [	[f(a) ; $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)$ [	] $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)$; f(a)]
] a ;b [	] $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)$ [	] $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)$ [
] a ; +∞ [	] $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ [	] $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)$ [

Propriété : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K. Alors :
- f réalise une bijection de K sur f(K).
- f^{-1} est continue et a le même sens de variation que f.

4) Fonctions racines nième

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle fonction *racine n-ième* la réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$.

L'essentiel du cours sur la dérivation

1) Dérivabilité en un nombre réel a.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K, et $a \in K$.

On dit que f est *dérivable* en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$ où L est un nombre réel.

L est appelé le nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$.

Remarque : Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty (ou -\infty)$ alors (C_f) admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

2) Calculs de dérivées.

f(x)	k	x	$x^r ; r \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\tan x$
f'(x)	0	1	rx^{r-1}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

u	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$u^r ; r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$	$\sqrt{u}$	e^u	$\ln\lvert u\rvert$
u'	$u'v + uv'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$ru'u^{r-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u}$

3) Dérivée d'une fonction composée

Propriété : Soit u une fonction dérivable en a et v une fonction dérivable en u(a).

- La fonction vou est dérivable en a
- $(vou)'(a) = u'(a) \times v'(u(a))$.

4) Dérivation et bijection

Propriété : Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle K tel que : $\forall x \in K, f'(x) \neq 0$.

- f réalise une bijection de K sur f(K).
- $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ avec $f(a) = b$.

5) Théorème de l'Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K. S'il existe deux nombres réels m et M tels que : $\forall x \in K, m \leq f'(x) \leq M$ alors pour tout a et b éléments de K tels que $a < b$, on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

L'essentiel du cours sur les primitives

1) Primitive d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle K. On appelle *primitive* de f sur K toute fonction F de K vers $\mathbb{R}$ dérivable sur K telle que : $\forall x \in K, F(x) = f(x)$.

2) Ensemble des primitives d'une fonction

Propriété : Soit F une primitive de f sur un intervalle K. Les primitives de f sur K sont les Fonctions $x \mapsto F(x) + c$; $c \in \mathbb{R}$.

3) Primitives de fonctions élémentaires

$f'(x)$	a	x^r ; $r \neq -1$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^n}$; $n \neq 1$	e^x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)$	$ax + c$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$	$2\sqrt{x}$	$\ln x + c$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + c$	$e^x + c$	$\tan x + c$

4) Primitives et opérations sur les fonctions

Fonction	u	v	$u+v$	ku ; $k \in \mathbb{R}$	u^r ; $r \neq -1$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u^n}$
Primitive	U	V	$U+V$	kU	$\frac{1}{n+1}u^{r+1}$	$2\sqrt{u}$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$

L'essentiel du cours sur la fonction logarithme népérien

1) Définitions et premières propriétés

Définition : On appelle fonction *logarithme népérien* et on note *ln* la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Propriété : Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et r un nombre rationnel non nul.

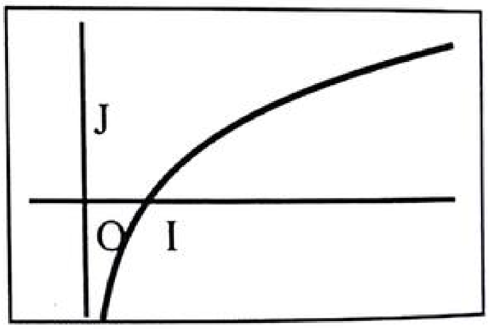
- $\ln ab = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln a^r = r\ln a$.

2) Etude de la fonction ln

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$.

Tableau de variation et courbe représentative

x	0	+∞
ln'x	+	
lnx	−∞ ↗	+∞



Propriété : Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

3) Fonctions comportant ln

Propriété ; Soit u une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle K.

- $\ln\circ|u|$ dérivable sur K
- $(\ln\circ|u|)' = \dfrac{u'}{u}$
- La fonction $\ln\circ|u|$ est une primitive sur K de la fonction $\dfrac{u'}{u}$.

L'essentiel du cours sur la fonction exponentielle

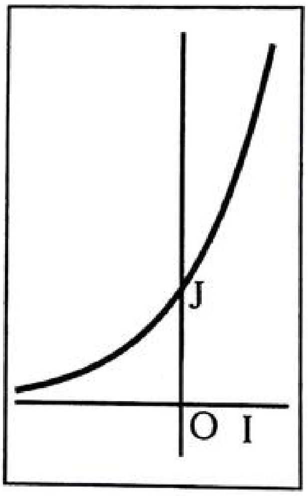
1) Définition : On appelle *fonction exponentielle* et on note *exp* la réciproque de la fonction ln.

2) Etude de la fonction exponentielle

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

Tableau de variation et courbe représentative

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
exp'x	+
expx	$-\infty \nearrow +\infty$



Propriété : Soit a et b deux nombres réels.

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

3) Fonctions comportant exp

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K.

- La fonction $\exp o u$ est dérivable sur K
- $(\exp o u)' = u' \times \exp o u$
- La fonction $\exp o u$ est une primitive sur K de la fonction $u' \times \exp o u$

L'essentiel du cours sur les suites numériques

1) Majoration – minoration

Propriété : Soit u une suite numérique définie sur un ensemble E.

- u est dite majorée s'il existe un nombre réel M tel que : $\forall n \in E, u_n \leq M$.
- u est dite minorée s'il existe un nombre réel m tel que : $\forall n \in E, u_n \geq m$.
- u est dite bornée si u est majorée et minorée.

2) Sens de variation

Propriété : Soit u une suite numérique définie sur un ensemble E.

- u est dite croissante si pour tout n élément de E, $u_n \leq u_{n+1}$
- u est dite décroissante si pour tout n élément de E, $u_{n+1} \leq u_n$
- u est dite constante si pour tout n élément de E, $u_{n+1} = u_n$.

3) Raisonnement par récurrence

Pour démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel N donné l'assertion P(n) est vraie.

- On vérifie que P(N) vraie
- On suppose que pour un entier naturel k supérieur à N, P(k) est vraie et on démontre que P(k+1) est vraie.
- On conclut que : $\forall n \geq N$. P(n) est vraie.

4) **Suites arithmétiques et suites géométriques**

	suite arithmétique	suite géométrique
Premier terme	u_0	u_0
Raison	$r; r \in \mathbb{R}$	$q; q \in \mathbb{R}$
formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
formule explicite	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 q^n$
somme de termes consécutifs $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$	$\frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$	$u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; $q \neq 1$

5) Limite d'une suite numérique

a) Définition : Une suite est dite *converge* si sa limite existe et est finie sinon on dit qu'elle *diverge*

b) Limites des suites (a^n), (n^α) et $(\ln n)$.

terme général	Condition	limite
$a^n; a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$	$a \leq -1$ $-1 < a < 1$ $a=1$ $a>1$	*pas de limite* 0 1 $+\infty$
$n^\alpha; n \in \mathbb{N}^*$	$\alpha < 0$ $\alpha = 0$ $\alpha > 0$	0 1 $+\infty$
$\ln n ; n \in \mathbb{N}^*$		$+\infty$

6) Propriété : Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

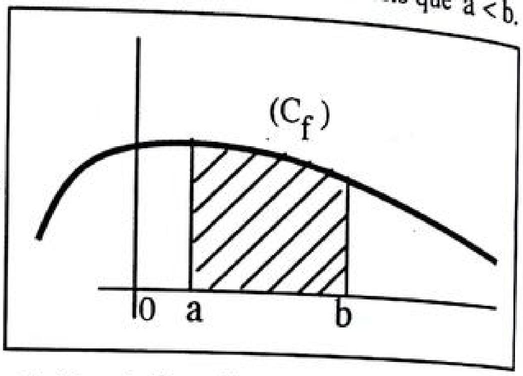
L'essentiel du cours sur les intégrales

1) Intégrale d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K et F une primitive de f sur K. On appelle *intégrale de a à b de f* le nombre réel noté $\int_a^b f(x)dx$ où $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

2) Calcul d'aire

Propriété : Soit $f \geq 0$ une fonction continue sur un intervalle K et a et b deux éléments de K tels que $a < b$.



$A(D) = (\int_a^b f(x)dx) \times UA$ est l'aire de la partie (D) du plan délimitée par (C_f) et les droites d'équations $y = 0$, $x = a$ et $x = b$ où UA est l'unité d'aire.

(D) est la partie hachurée sur la figure.

3) La fonction F telle que: $\forall x \in K, F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur K qui s'annule en a

4) Propriétés algébriques de l'intégrale.

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles)
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ où k ne dépend pas de x.

5) Propriétés de comparaison

- $\forall x \in [a;b],\ f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $\forall x \in [a;b],\ f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

6) Intégration par parties.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

7) Intégrales de fonctions paires et fonctions impaires.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0 et a élément de K.

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
- Si f et paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

L'essentiel du cours les équations différentielles

1) Equation du type $y' - ay = 0$

Propriété : Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$.

2) Equation du type $y'' - w^2y = 0$

Propriété : Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - w^2y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Aet^{wx} + Be^{-wx}$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

3) Equation du type $y'' + w^2y = 0$

Propriété : Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + w^2y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto A\cos(wx) + B\sin(wx)$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

L'essentiel du cours sur les barycentres

1) Barycentre de plus de deux points pondérés

Définition : Soit $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

L'unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ est appelé barycentre des points pondéré $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$.

2) Réduction de la somme $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$

Propriété : Soit $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés.

Si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ alors $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \overrightarrow{MG}$ sinon $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur constant.

3) Lieux géométriques

Propriété : Soit $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés.

- Si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ alors l'ensemble des points M tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^{\ 2} = k$ est soit l'ensemble vide, soit le singleton $\{G\}$ ou un cercle de centre G où G est le barycentre des points pondérés $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$.
- Sinon l'ensemble $\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^{\ 2} = k$ est l'ensemble vide, le plan ou une droite de vecteur normal $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$.

L'essentiel du cours sur les nombres complexes

1) Définition : On appelle *nombre complexe* tout nombre de la forme $a+ib$ où a et b sont des nombres réels et $i^2=-1$.

$a+ib$ est appelé *forme algébrique* du nombre complexe.

Le nombre complexe $z=a+ib$ est appelé *affixe* du point $M(a,b)$.

2) Affixe d'un vecteur

Propriété : Soit A et B deux points et, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_A-Z_B$ et $Z_{\vec{u}+\vec{v}}=Z_{\vec{u}}+Z_{\vec{v}}$.

3) Conjugué d'un nombre complexe

Définition : On appelle *conjugué* du nombre complexe $z=x+iy$ le nombre complexe $\bar{z}=x-iy$.

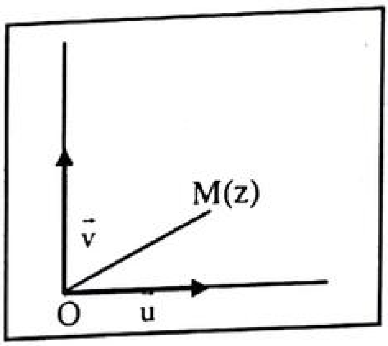
4) Module d'un nombre complexe

Définition : On appelle *module* d'un nombre complexe $z=a+ib$ le nombre réel positif noté $|z|$ où

$|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

5) Argument d'un nombre complexe non nul.

Définition : On appelle *argument* d'un nombre complexe z non nul d'image M dans le repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ et on note $\arg(z)$ toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}})$.



6) Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Définition : Soit $z=x+iy$ un nombre complexe non nul de module r et d'argument α

- $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ est l'expression de z sous *forme trigonométrique*.

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ et $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$.

- $z = re^{i\alpha}$ est l'expression de z sous *forme exponentielle*.

7) Racines n - ième d'un nombre complexe non nul

Définition : On appelle *racine n – ième* du nombre complexe Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

8) Opérations sur les nombres complexes, conjugués modules et arguments.

Complexes	Conjugués	Modules	Arguments
$z+z'$	$\bar{z}+\bar{z'}$		
zz'	$\overline{zz'}$	$\lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\arg(z)+\arg(z')+2k\pi$
$\dfrac{1}{z}$	$\dfrac{1}{\bar{z}}$	$\dfrac{1}{\lvert z\rvert}$	$-\arg(z)+2k\pi$
$\dfrac{z}{z'}$	$\dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$	$\dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg(z)-\arg(z')+2k\pi$
z^n	$\bar{z}^n$	$\lvert z\rvert^n$	$n\arg(z)+2k\pi$
$z_B - z_A$		AB	$mes(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}})+2k\pi$
$\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$		$\dfrac{DC}{AB}$	$mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})+2k\pi$

9) Nombres complexes et configuration géométriques

ABC équilatéral de sens direct	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
ABC rectangle isocèle direct	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$
A, B et C alignés	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
A, B, C et D Cocycliques	$\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right)\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right) \in \mathbb{R}^*$ et trois des points non alignés

L'essentiel du cours sur les isométries

1) Définition : On appelle *isométrie* toute application qui conserve les distances.

2) Décompositions d'isométries

Propriété : Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$ Pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une unique droite (Δ') telle que : $t_{\vec{u}} = S_{\Delta'} o S_{\Delta}$.

(Δ') est l'image de (Δ) par la translation $\frac{1}{2}\vec{u}$.

Propriété : Soit $r(O,\alpha)$ la rotation de centre O et d'angle α. Pour toute droite (Δ) passant par O, il existe une unique droite (Δ') telle que : $r(O,\alpha) = S_{\Delta'} o S_{\Delta}$

(Δ') est l'image de (Δ) par la rotation $r(O,\frac{\alpha}{2})$.

3) Composions d'isométries

Propriété : Soit r une rotation d'angle α et t une translation. Alors tor est une rotation d'angle α.

Définition : Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. On appelle *symétrie glissée d'axe* (Δ) *et de vecteur* $\vec{u}$, la composée de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur $\vec{u}$.

Propriété : Soit (Δ) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

- Si $\vec{u} \perp (\Delta)$ alors $S_{(\Delta)} o t_{\vec{u}}$ est une symétrie orthogonale.
- Sinon $S_{(\Delta)} o t_{\vec{u}}$ est une symétrie glissée.

L'essentiel du cours sur les similitudes directes

1) Définition : On appelle *similitude directe du plan* la composée d'une homothétie et d'un déplacement.

2) Propriété : Soit f une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$ alors f est une translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$ alors $f = RoH$ où $R = r(\Omega, \arg(a))$ et $H = h(\Omega, |a|)$ où $\Omega(\frac{b}{1-a})$.

3) Propriété caractéristique des similitudes directes

Soit f une application, α un nombre réel et k un nombre réel strictement positif.
f est une similitude directe de rapport k et d'angle α si et seulement si pour tout M et N tels que :
$f(M) = M'$ et $f(N) = N'$, on a $M'N' = kMN$ et $(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}) = \hat{\alpha}$.

4) Similitudes directes et configurations géométriques

- Toute similitude directe conserve l'alignement, l'orthogonalité, le parallélisme, les angles orientés, le contact, le barycentre.
- Toute similitude directe transforme les droites en droites, les segments en segments, les demi droites en demi droites, les cercles en cercles.
- Toute similitude directe de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2.

L'essentiel du cours sur les coniques

1) Définition : Soit (D) une droite, F un point n'appartenant pas à (D) et e un nombre réel strictement positif.On appelle *conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e* l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonale de M sur (D).

La conique est :

- une parabole si $e = 1$
- une ellipse si $e < 1$
- une hyperbole si $e > 1$.

2) a- <u>Parabole</u>

L'équation réduite d'une parabole est de la forme $y^2 = 2px$; $p > 0$.

Equation réduite	$y^2 = 2ax$	$x^2 = 2ay$
Axe focal	$(O,\vec{i})$	$(O,\vec{j})$
Foyer	$F\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$	$F\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$
Directrice	$(D): x = -\frac{a}{2}$	$(D): y = -\frac{a}{2}$

b- <u>Ellipse</u>

L'équation réduite d'une ellipse est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

	$a > b$	$a < b$
Axe focal	$(O,\vec{i})$	$(O,\vec{j})$
Demi- distance focale c	$\sqrt{a^2 - b^2}$	$\sqrt{b^2 - a^2}$
Foyers	$F\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ $F'\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$	$F\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ $F'\begin{pmatrix} 0 \\ -c \end{pmatrix}$
Directrices	$(D): x = \frac{a^2}{c}$ $(D'): x = \frac{-a^2}{c}$	$(D): y = \frac{b^2}{c}$ $(D'): y = \frac{-b^2}{c}$

c- <u>Hyperbole</u>

L'équation réduite d'une hyperbole est de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Demi distance focale c	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Equation réduite	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Axe focal	$(O,\vec{i})$	$(O,\vec{j})$
Foyers	$F\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ $F'\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$	$F\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ $F'\begin{pmatrix} 0 \\ -c \end{pmatrix}$

3a) Définition bifocale d'une ellipse

Soit (E) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $a > b > 0.$, de foyers F et F'.

(E) est l'ensemble des points M tels que: $MF + MF' = 2a$.

3b) Définition bifocale de l'hyperbole

Soit (Γ) l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ de foyers F et F'.

(Γ) est l'ensemble des points M tels que: $|MF - MF'| = 2a$.

L'essentiel du cours d'arithmétique

1) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a est un *multiple* de b si il existe un entier relatif k tel que : $a = kb$. Si de plus $b \neq 0$ on dit que b est un *diviseur* de a.

Remarque : Les multiples de b sont les entiers relatifs de la forme bk où k est un entier relatif.

2) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Propriété : Soit a un entier relatif et b un entier relatif non nul. Il existe un unique couple d'entiers relatifs (q,r) tels que : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

q est appelé *quotient* et r *reste* de la division euclidienne de a par b.

3) Congruence modulo n où n est un entier naturel non nul

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que *a est congru à b modulo n* si $a-b$ est un multiple de n.

Propriété : Soit a, b, c, et d des entiers relatifs; k un entier relatif et n un entier naturel non nul.

- Si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$ alors $a+c \equiv b+d\,[n]$ et $ac \equiv bd\,[n]$
- Si $a \equiv b\,[n]$ alors $ka \equiv kb\,[n]$, $ka \equiv kb\,[kn]$ si $k>0$ et $a^k \equiv b^k\,[n]$ si $k>0$.

4) Nombres premiers entre eux

Définition : Deux entiers relatifs non nuls a et b sont dits *premiers* entre si $PGCD(a;b)=1$.

Théorème de Bézout

Soit a et b deux entiers relatifs.
a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que :
$au+bv=1$.

Propriété (Algorithme d'Euclide)

Soit a et b deux entiers naturels tels que : $a>b>0$ et r le reste de la division euclidienne de a par b.

- Si $r=0$ alors $PGCD(a;b)=b$.
- Si non $PGCD(a;b)=PGCD(b;r)$

Théorème de Gauss

Soit a, b et c trois entiers relatifs. Si a divise bc et, a et b premiers entre eux alors a divise c.

Propriété : Soit a et b deux entiers relatifs non nuls tels que: $\delta = PGCD(a;b)$ et $\mu = PPCM(a;b)$.
On a : $\mu\delta = |a| \times |b|$.

5) Nombres premiers

Propriété fondamentale : Soit x un entier naturel non nul supérieur ou égal à 1.
Il existe une unique suite de nombres premiers $(p_i)_{1\le i\le k}$ où $p_i < p_{i+1}$ et une unique suite d'entiers naturels $(\alpha_i)_{1\le i\le k}$ tels que : $x = p_1^{\alpha 1} \times p_2^{\alpha 2} \times .... \times p_k^{\alpha k}$.
Cette décomposition est unique.

L'essentiel du cours sur la probabilité

1) Défínion de probabilité

Définition :Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.
On appelle *probabilité* sur Ω toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ telle que :

- $P(\Omega)=1$
- $P(\phi)=0$
- $\forall A \subset \Omega$, $P(A)= P(\{a_1\}) + P(\{a_2\})+ \ldots + P(\{a_n\})$ où $A=\{a_1;a_2;\ldots;a_n\}$.

Propriété : Soit A et B deux événements.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

2) Equiprobabilité

Définition :Une expérience est dite équiprobable si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Propriété : Soit Ω l'univers d'une expérience équiprobable et $A \subset \Omega$.

On a $P(A) = \dfrac{\text{Card}A}{\text{Card }\Omega}$

3) Evénements indépendants

Définition : Soit Ω l'univers d'une expérience et P une probabilité sur Ω. Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

4) a - Expériences aléatoires indépendantes

Définition : Soit Ω_1 l'univers d'une expérience aléatoire E_1 et Ω_2 l'univers d'une expérience aléatoire E_2. A_1 et A_2 deux événements inclus respectivement dans Ω_1 et Ω_2. E_1 et E_2 sont dit[illegible] indépendantes si : $P(A_1 \cap A_2)=P(A_1) \times P(A_2)$.

b- Epreuve de Bernoulli

Définition : On appelle *épreuve de Bernoulli* toute expérience aléatoire à deux éventualités.

c- Schéma de Bernoulli

Définition : On appelle *schéma de Bernoulli* toute expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de façon indépendante une expérience de Bernoulli.

Propriété : Au cours d'un schéma de Bernoulli à n épreuves de Bernoulli où p la probabilité du succès lors d'une épreuve de Bernoulli, la probabilité d'avoir k succès ($0 \leq k \leq n$) au cours des n épreuves est

$$P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

5) Caractéristiques d'une variable aléatoire

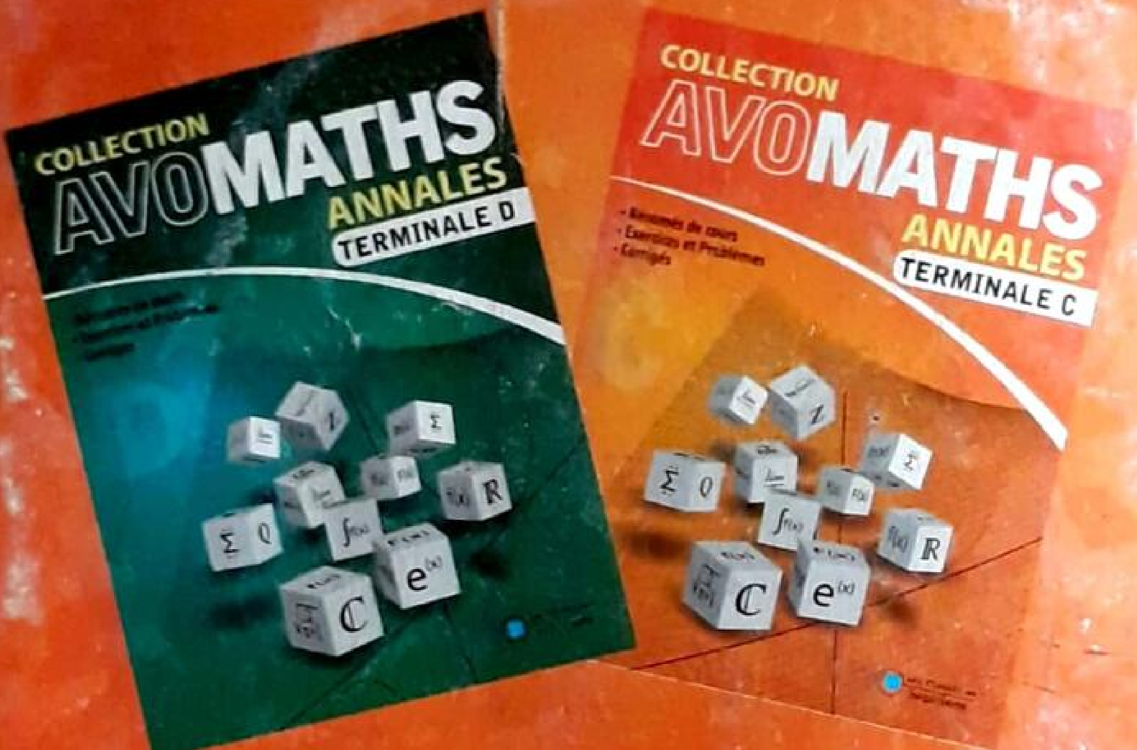
Définition : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire , P une probabilité sur Ω et $X = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une variable aléatoire sur Ω.

- *L'espérance mathématique* de X est $E(X) = \sum_1^n x_i P(X = x_i)$
- *La variance* de X est $V(X) = X_1{}^2 P(X=X_1) + X_2{}^2 P(X=X_2) + \ldots + X_n{}^2 P(X=X_n) - (E(X))^2$.
- *L'écart-type* est de X $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Création et Réalisation de la maquette :
Service PAO Les Classiques Ivoiriens

ISBN :
978-2-916472-95-9

Dépôt Légal :
N° 9673 du 03 Octobre 2011
04 Trimestre 2011


COLLECTION
AVOMATHS
ANNALES
TERMINALE D
COLLECTION
AVOMATHS
- Résumés de cours
- Exercices et Problèmes
- Corrigés
ANNALES
TERMINALE C