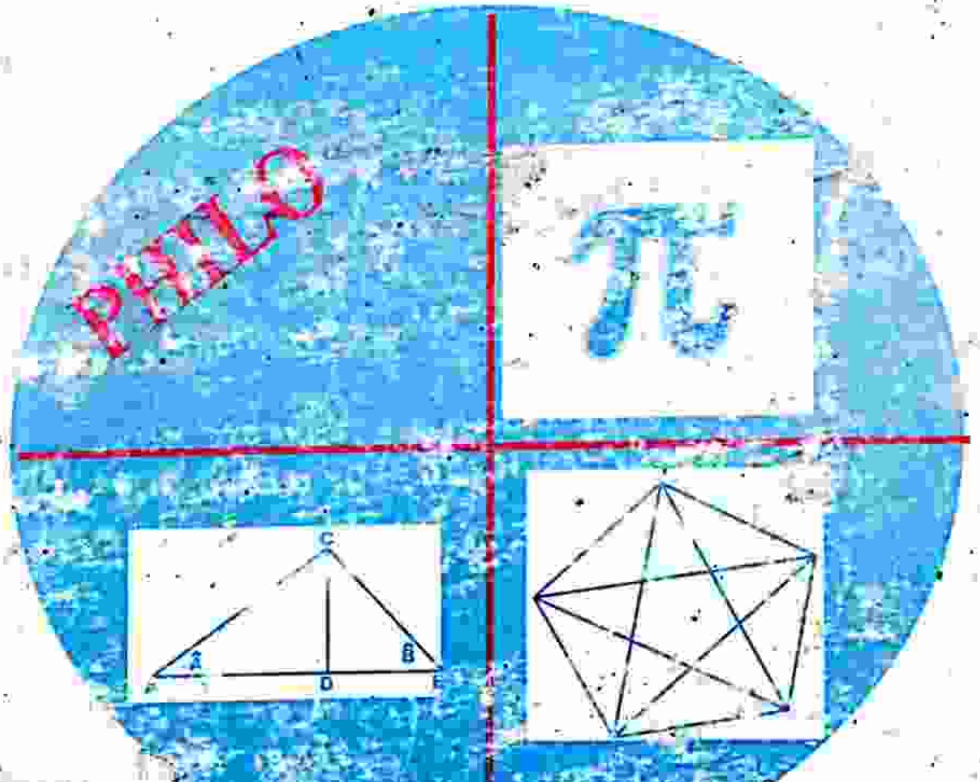
Collection

THERMATH

Edition 2013 - 2014
Revue et corrigée



Préparé par: Pierre Antoine Louis
Ingéniuer Economiste, Professeur de Mathématiques
Tél: (509) 3187-5294 / 3732-3162

TABLE DES MATIERES

Algèbre

Chapitre I

Sous-espace vectoriel

Soit F un sous ensemble nom vide d'un espace vectoriel E; on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est stable par combinaison linéaire c'est-à-dire :

$\forall \vec{u} \in F, \forall \vec{v} \in F, \forall(\alpha,\beta) \in \Re^2$ on a : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in F$

Remarque

- Tout sous-espace vectoriel contient le vecteur nul
- L'intersection $E_1 \cap E_2$ de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E. Par contre, la réunion $(E_1 \cup E_2)$ n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E.

Somme de deux sous-espaces vectoriels

La somme de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E est l'ensemble défini par : $E_1 + E_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 / (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in E_1.E_2\}$

C'est donc la plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $E_1 \cap E_2$

Sous-espaces vectoriels propres d'un espace vectoriel donné

On distingue deux sous-espaces vectoriels propres : ***la droite vectorielle et le plan vectoriel***

- ***La droite vectorielle*** est engendrée par un seul vecteur; sa dimension est 1 : dans un espace vectoriel de dimension 2, son équation cartésienne est de la forme : $ax+by=0$ où $\{(-b,a)\}$ en est une base

· Dans un espace vectoriel de dimension 3 son équation cartésienne est de la forme :

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \text{ ou } \begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dz=0 \end{cases}$$

où $\{(a,b,c)\}$ et $\left\{\left(1,-\frac{a}{b},-\frac{c}{d}\right)\right\}$ sont des bases respectives.

- ***Le plan vectoriel*** est engendré par deux vecteurs : sa dimension est 2 et son équation cartésienne est de la forme : $ax+by+cz=0$

Exercice

Identifier et donner une base de chacun des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E dans les cas suivants :

$$A=\{(x,y)\in E/2x-3y=0\}$$

$$B=\left\{(x,y,z)\in E/\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=-z\right\}$$

$$C=\left\{(x,y,z)\in E/\begin{cases}2x-y=0\\5x+2z=0\end{cases}\right\}$$

$$D=\{(x,y,z)\in E/2x-y+3z=0\}$$

$$E=\{(x,y,z)\in E/x-2y-z=0\}$$

$$F=\{(x,y,z)\in E/x+y+z=0\}$$

Remarque

La somme de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E est dite directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}_E\}$.

On écrit $E_1 \oplus E_2$ pour traduire que la somme de E_1 et E_2 est directe.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E sont dits supplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2$ c'est-à-dire : $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}_E\}$. Tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in E_1 \times E_2$

Remarques

- Dans un espace vectoriel de dimension 2, deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires
- Dans un espace vectoriel de dimension 3, un plan vectoriel et une droite

vectorielle non incluse dans le plan vectoriel sont supplémentaires

- $\{\vec{0}_E\}$ et E sont supplémentaires

Théorèmes

- Deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sont supplémentaires si et seulement s'ils admettent pour base respectives des parties complémentaires d'une base de E
- Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel de E alors :
- $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$

Idées et Statégies

- Une famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ d'un espace vectoriel E est une base de E si :
  - $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n) \neq 0$
  - $card(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n) = \dim E$
- Dans un espace vectoriel E de dimension 2, pour montrer que deux droites vectorielles $\vec{D}(\vec{u})$ et $\vec{\Delta}(\vec{v})$ sont supplémentaires, il suffit de prouver que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ forme une base de E.
- Dans un espace vectoriel E de dimension 3, pour montrer qu'une droite $\vec{D}(\vec{u})$ et un plan vectoriel $\vec{P}(\vec{v}, \vec{w})$ sont supplémentaires, il suffit de prouver que la droite vectorielle $\vec{D}$ n'est pas incluse dans le plan vectoriel $\vec{P}$ ou si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ forme une base de E

Exercices

Choisir la bonne réponse dans les exercices 1 à 8

1- Le sous espace
$$F = \left\{(x, y, z) \in E \,/\, \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases}\right\}$$
de l'espace vectoriel E est :

a)- Un plan vectoriel de dimension 2

b)- Une droite vectorielle de dimension 2

c)- Une droite vectorielle de dimension 1.

2- Une base du sous espace vectoriel $H = \left\{(x, y, z) \in E \,/\, \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases}\right\}$ de E est :

a) $\{(1;2)\}$ b) $\{(-2;5)\}$ c) $\left\{\left(1;2;-\frac{5}{2}\right)\right\}$ d) $\left\{\left(1;2;-\frac{2}{5}\right)\right\}$

3- Une base du sous espace vectoriel $G = \{(x, y, z) \in E \,/\, x + 2y - 3z = 0\}$ de l'espace vectoriel E est

a) $\{(2;1;0)\}$ b) $\{(-2;1;0)\ (3;0;-1)\}$ c) $\{(-2;1;0)\ (3;0;1)\}$

4- F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \oplus G = E$. Si F est une droite vectorielle de E et G est un plan vectoriel de E, alors :

a) $\dim E = 2$ b) $\dim E = 1$

c) $\dim E = 0$ d) $\dim E = 3$

5- F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \oplus G = E$. Si $\dim E = 4$ et que F est une droite vectorielle de E, alors :

a) $\dim G = 3$ b) $\dim G = 2$

c) $\dim G = 1$ d) $\dim G = 0$

6- F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Si $F \oplus G = E$, alors :

a) F et G ne sont pas supplémentaires dans E

b) $F \cap G = F$ c) $F \cap G = \{\vec{0}E\}$

7- F et G sont respectivement une droite vectorielle et un plan vectoriel d'un espace vectoriel E. Si F n'est pas incluse dans G, alors :

a) $F \oplus G = \{\vec{0}_E\}$ b) $F \cap G = E$.

c) F et G ne sont pas supplémentaires dans E.

d) F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaire de E.

8- Les sous-espaces A et B suivants de E sont supplémentaires. Lesquels ?

a) A : $2x+3y=0$ et B : $4x-6y=0$
b) A : $2x+y-z=0$ et B : $x=y=\frac{z}{3}$
c) A : $x-3y+5z=0$ et B : $\frac{x}{-2}=y=z$
d) B : $x-2y+z=0$ et B : $\frac{x}{-2}=y=\frac{z}{3}$

9.- Dans l'espace vectoriel R^3 rapporté à la base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; on considère la droite vectorielle (D) d'équations :

$$(D)=\begin{cases} x=-\lambda \\ y=2\lambda \quad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$$

et le plan vectoriel $\vec{P}$ d'équation $x+y-3z=0$.

$\vec{D}$ et $\vec{P}$ sont-ils supplémentaires dans R^3 ?

10.- Soient dans R^3, les vecteurs :

$\vec{U}(3;-1;0)$ $\vec{V}(1;-2;3)$ et $\vec{W}(-4;5;2)$.

On considère les sous-espaces : A engendré par $\vec{U}$ et B engendré par $\vec{V}$ et $\vec{W}$

1) Déterminer $(A\cap B)$ et $(A+B)$
2) La somme $A+B$ est-elle directe?

11.- Dans l'espace vectoriel E rapporté à la base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère la droite vectorielle $\vec{D}$ de direction $\vec{U}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ et le plan vectoriel $\vec{P}$ d'équation $3x+2y-z=0$. Montrer que $\vec{D}$ et $\vec{P}$ sont supplémentaires dans E.

12- Dans l'espace vectoriel E de la base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère un plan vectoriel $\vec{P}$ d'équation $2x+y-z=0$ et la droite vectorielle $\vec{D}$ d'équation $\frac{x}{3}=y=\frac{z}{-2}$. Montrer que $\vec{D}\cap\vec{P}=\{\vec{O}_E\}$.

13- E est un espace vecteriel de dimension 3 muni de la base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit F et G deux sous-espaces de E définis respectivement par :

$2x-3y+z=0$ et $(D)=\begin{cases} x=t \\ y=2t \quad t\in\Re \\ z=t \end{cases}$

Montrer que $F\oplus G=E$

Chapitre II

Objectif

- Déterminer : Le noyau et l'image d'une application linéaire
- L'ensemble des vecteurs invariants et changés en leurs opposés par une application linéaire

Application linéaire

Une application f d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F est dite linéaire si et seulement si : $\forall\vec{U}\in E,\forall\vec{V}\in E,\forall(\alpha,\beta)\in\Re^2$

on a : $f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v})$

- Conséquence : $f(\vec{O}_E)=\vec{O}_F$

Noyau d'une application linéaire

Le noyau d'une application linéaire f d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F est le sous-ensemble noté : Kerf ou Nf; défini par : $Kerf=\{\vec{u}\in E/f(\vec{u})\}=\vec{O}_F$ c'est donc un sous-espace vectoriel F

Image d'une application linéaire

L'image d'une application f d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F est le sous-ensemble noté Imf et défini par : $\mathrm{Im}\,f=\{\forall\vec{u}\in E,\exists\vec{u}\in F/\vec{u}'=f(\vec{u})\}$ c'est donc un sous-espace vectoriel de F .

- Vecteur invariant : Un vecteur $\vec{U}$ est invariant par une application linéaire si et seulement si $f(\vec{u})=\vec{u}$

Vecteur changé en son opposé : Un vecteur $\vec{U}$ est changé en son opposé par une application linéaire f si et seulement si $f(\vec{u})=-\vec{u}$

Idées et Stratégies

Pour montrer qu'un vecteur $f(\vec{i})$ est invariant par f, il suffit de prouver que $fof(\vec{i})=f(\vec{i})$ autrement dit $M_f f(\vec{i})=f(\vec{i})$

Exercices

1- Soit E un espace vectoriel réel muni d'une base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et f un endomorphisme de E défini par : $\begin{cases} x'=3x-4y+2z \\ y'=4x-7y+4z \\ z'=5x-10y+6z \end{cases}$

a) Ecrire la matrice de f dans la base B puis donner $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) Montrer que $fof=f$.

c) Vérifier que l'ensemble des vecteurs invariants par f est un plan vectoriel $\vec{P}$ dont on déterminera une base $(\vec{a},\vec{b})$

d) Vérifier que le noyau de f est une droite vectorielle $\vec{D}$ dont on précisera une base $(\vec{c})$.

e) Montrer que $B'=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ est une base de E puis écrire la matrice de f par rapport à cette base.

2- On considère l'endomorphisme f de l'espace vectoriel E de base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ défini par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Relativement à la base fixée

1) Déterminer Kerf. En donner une base
2) Déterminer Imf. En donner une base
3) Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires dans E?

3- L'espace vectoriel E étant rapporté à une base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on désigne par f L'endomorphisme de E défini par :

$$f: E \to E \quad (x', y', z')/\begin{cases} x' = y+z \\ y' = x+y+z \\ z' = x \end{cases}$$

1) Déterminer Kerf. En donner une base
2) Déterminer Imf. En donner une base
3) Montrer que Kerf et Imf sont supplémentaires dans E

4- Soit E un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; f étant l'endomorphisme de E défini dans la base B par : $f(\vec{i})=-\vec{j}-\vec{k}$; $f(\vec{j})=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{k}$; $f(\vec{k})=-\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$

1. Les vecteurs $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$ sont-ils linéairement indépendants?
2. a) Montrer que le noyau N de f est la droite vectoriel de base $\vec{u}$ ou $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

   b) Soit F l'image de f. Déterminer F.
3. Quels sont les éléments de E invariant par f. Prouver que $[\vec{u}, f(\vec{i}), f(\vec{j})]$ est une base de E. En déduire que F et N sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

5- Soit la matrice :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 7 & \dots & 8 \\ 5 & 4 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & 5 \end{bmatrix}$$

a) Compléter l'écriture de A de format 3 x 4, avec :

$a_{32}=5$; $a_{23}=-1$; $a_{33}=6$; $a_{13}=6$; $a_{31}=8$

b) Ecrire la transposée de A' de A et donner son format.

c) calculer $C = A^2 + 2A' - 5I$, avec I matrice unitaire.

6.- Soit E un espace vectoriel sur /R de dimension 3, muni d'une base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On désigne par f l'application linéaire de E vers E définie par :

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \to x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$$

avec

$$x'=\frac{1}{2}(x-y+z);\ y'=\frac{1}{2}(-x+y+z);\ z'=z$$

Montrer que :

1. Le noyau de f est une droite vectorielle $\vec{D}$

2. les vecteurs $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$ sont variants par f
3. L'image de E par f est plan vectoriel $\vec{P}$

Montrer que $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{O}_E\}$

7- Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension 3 dans lui-même définie analytiquement dans une base $B = (\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k})$ de E par :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x - z \\ z' = -x + y + 2z \end{cases}$$

1) Ecrire la matrice de f dans la base B. En déduire $f(\vec{i}), f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

2) Déterminer la matrice de fof dans la base B.

3) Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f.

4) Déterminer la noyau de f.

8- Soit E un espace vectoriel réel muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f un endomorphisme de E défini par : $f(\vec{i}) = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $f(\vec{k}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

a) Montrer que $fof = Id_E$.

b) Vérifier que l'ensemble des vecteurs invariants par f est un plan vectoriel $\vec{P}$ dont on déterminera une base $(\vec{u}, \vec{v})$.

c) Vérifier que l'ensemble des vecteurs changés en leurs opposés par f est une droite vectorielle $\vec{D}$ dont on précisera une base $(\vec{w})$.

d) Montrer que $B' = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de E puis écrire la matrice de f par rapport à cette base.

Chapitre III

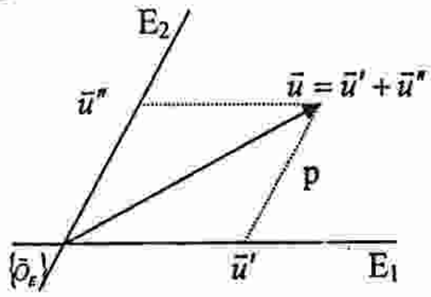
Projection et symétrie vectorielle

Projection vectorielle ou endomorphisme idempotent

Objectifs

Déterminer les éléments caractérisant une projection et définir analytiquement une projection vectorielle

E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E.



La projection vectorielle de E sur E_1 parallèlement à E_2 est l'endomorphisme défini par :

$$p : E \to E$$
$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' \to p(\vec{u}) = \vec{u}'$$

$\vec{u}'$: projeté de $\vec{u}$ sur E_1 parallèlement à E_2

$\vec{u}''$: projeté de $\vec{u}$ sur E_2 parallèlement à E_1

p : projeteur

Remarques

Une projection vectorielle est caractérisée par deux éléments caractéristiques :

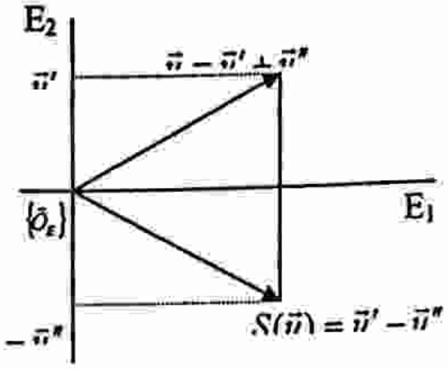
- **sa base** : l'ensemble des vecteurs invariants ou l'image
- **sa direction** : le noyau

Tout vecteur $\vec{u}$ appartenant à la direction d'une projection vectorielle f d'un espace vectoriel E est tel que $f(\vec{u}) = \vec{O}_E$

Tout vecteur $\vec{u}$ appartenant à la base d'une projection vectorielle f d'un espace vectoriel E est tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$

Symétrie vectorielle ou Involution

E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E.



La symétrie vectorielle E par rapport à E_1 de direction E_2 est l'endomorphisme de E défini par

$S : E \to E$

$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' \to S(\vec{u}) = \vec{u}' - \vec{u}''$

Propriété

- La projection vectorielle p de E sur E_1 parallèlement à E_2 est un endomorphisme de E possédant les propriétés suivantes :
- Le noyau de p est le sous-espace vectoriel de E_2
- L'image de E par p est le sous-espace vectoriel de E_1
- L'ensemble des vecteurs invariants par p est le sous-espace vectoriel de E_1
- pop = p c'est-à-dire $M_p.M_p = M_p$

Propriété

La symétrie vectorielle s de E par rapport à E_1 de direction E_2 est l'endomorphisme possédant les propriétés suivantes :

- L'ensemble des vecteurs de E invariants par S est le sous-espace vectoriel E_1
- L'ensemble des vecteurs changés en leurs opposés par S est le sous-espace vectoriel E_2
- sos = I_{dE}
- Une symétrie vectorielle est caractérisée par deux éléments caractéristiques :
- *Sa base* : l'ensemble des vecteurs invariants
- *Sa direction* : l'ensemble des vecteurs changés en leurs opposés.

Remarques

- Dans un espace de dimension 2 :
$$I_{dE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Dans un espace de dimension 3 :
$$I_{dE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Idées et Stratégies

- Pour montrer qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel donné est une projection vectorielle on établit que $fof = f$. Autrement dit : $M_f^2 = M_f$
- Dans un espace vectoriel de dimension 2, pour montrer qu'un endomorphisme est une projection vectorielle, on prouve que la trace de la matrice associée à l'endomorphisme est égale à 1 et que le déterminant est égal à zéro.
- Déterminer les sous-espaces vectoriels qui caractérisent une projection vectorielle revient à calculer : sa base : ensemble des vecteurs invariants ou l'image et sa direction : le noyau de f.

Idées et stratégies

- Pour montrer qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel donné est une symétrie vectorielle on établit que $fof = I_{dE}$.
Autrement dit : $M_f^2 = I_{dE}$.
- Dans un espace vectoriel de dimension 2, pour montrer qu'un endomorphisme est une symétrie vectorielle, on prouve que la trace de la matrice associée à l'endomorphisme est égale à 0 et que le déterminant est égal à - 1.
- Déterminer les sous-espaces vectoriels qui caractérisent une symétrie vectorielle revient à calculer : sa base : ensemble des vecteurs invariants et sa direction : ensemble des vecteurs changés en leurs opposés

Exercices

Compléter pour les exercices 1 à 4

1.- On dit projection vectorielle ou endomorphisme ……

2.- On dit symétrie vectorielle ou endomorphisme......

3.- Si f est une projection vectorielle d'un plan vectoriel E, de matrice $A=\begin{bmatrix}4 & a\\ -2 & b\end{bmatrix}$ dans une base de E, on a nécessairement le couple (a, b) égal à…

4.- Si f est une symétrie vectorielle d'un plan vectoriel E de matrice $A=\begin{bmatrix}3 & a\\ -4 & b\end{bmatrix}$ dans une base de E, on a nécessairement le couple (a, b) égal à…

Choisir la bonne réponse dans les exercices 5 et 6

5.- Si f est une projection vectorielle d'un plan vectoriel E, de matrice $A=\begin{bmatrix}-2 & a\\ 3 & b\end{bmatrix}$ dans une base de E, on a nécessairement :

a) a = -2 et b = -3 b) a = -2 et b = 3
c) a = 6 et b = -3

6.- Si f est une symétrie vectorielle d'un plan vectoriel E de matrice $A=\begin{bmatrix}-5 & a\\ 6 & b\end{bmatrix}$ dans une base de E, on a nécessairement :

a) a = 4 et b = 5 b) a = -4 et b = -5

7.- Soit E un espace vectoriel réel de base $B=(\vec{i},\vec{j})$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base B est : $\begin{pmatrix}a & 1\\ b & 3\end{pmatrix}$

1) Déterminer les réels a et b pour que f soit une projection vectorielle

2) Déterminer les sous-espaces vectoriels qui caractérisent cette projection vectorielle.

8.- Soit E un espace vectoriel réel de base $B=(\vec{i},\vec{j})$. On considère l'endomorphisme g de E dont la matrice dans la base B est : $\begin{pmatrix}a & 12\\ b & -7\end{pmatrix}$

1) Déterminer les réels a et b pour que g soit une symétrie vectorielle.

Déterminer les sous-espaces vectoriels qui caractérisent cette symétrie vectorielle.

9- Le plan vectoriel E_2 est rapporté a la base B = $(\vec{i}\ \ \vec{j})$. On considère un endomorphisme f de E_2 dont la matrice associée B est

$M=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}$ a) Montrer que $f o f = f$

b) Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f . En donner une base $\vec{U}$.

c) Déterminer le noyau de f . En donner une base $\vec{V}$.

d) Utiliser les résultats précédents pour justifies que f est une projection vectorielle dont on précisera ses caractéristiques.

10- Le Soit E un plan vectoriel muni d'une base (i , j) et f un endomorphisme de E tel que $f(i)=3(\vec{i}-\vec{j})$ et $f o f(\vec{i})=\overrightarrow{O_E}$

Trouver la matrice de f dans la base (i , j) puis vérifier que $f o f$ est l'endomorphisme nul de E.

Montrer que le noyau et l'ensemble image de f sont égaux.

g est un endomorphisme de E de matrice

$\begin{bmatrix}a & 2\\ 0 & b\end{bmatrix}$

dans la base $(\vec{i} \quad \vec{j})$. Déterminer les réels a et b sachant que $f+g$ est une symétrie vectorielle de E.

****

Relation entre deux projections vectorielles

Dans une même base d'un espace vectoriel E deux projections vectorielles f et g sont liées par la relation $f+g=Id_E$ c'est-à-dire $\mathrm{Mat}(f)+\mathrm{Mat}(g)=\mathrm{Mat}(Id_E)$

Relation entre deux symétries vectorielles

Dans une même base d'un espace vectoriel E, deux symétries vectorielles f et g sont liées par la relation $f+g=0$ c'est-à-dire $\mathrm{Mat}(f)+\mathrm{Mat}(g)=0$

Relation entre symétries vectorielles et projections vectorielles

Si la symétrie vectorielle f de matrice S et la projection vectorielle g de matrice P dans une même base d'un espace vectoriel E ont les mêmes éléments caractéristiques elles sont liés par la relation $S=2P-Id_E$.

Dans le cas contraire $S=Id_E-2P$.

Choisis la bonne réponse.

1.- Soit E un espace vectoriel réel, F et G sont deux *s. e. v.* supplémentaires dans E. Si f est une symétrie vectorielle de E sur F de direction G alors l'image d'un vecteur $\vec{u}$ de E par f est :

a) $\vec{U}_F$ b) $\vec{U}_G$ c) $-\vec{U}_G$ d) $\vec{U}_F-\vec{U}_G$

2 – Soit E un espace vectoriel réel, F et G deux s. e. v supplémentaires dans E.

Si f est la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G et g la projection vectorielle de E sur G parallèlement à F, alors les matrices de f et de g sont liées par la relation :

a) $\mathrm{Mat}(f)+\mathrm{Mat}(g)=0$

b) $\mathrm{Mat}(f)=Id_E-2\,\mathrm{Mat}(g)$

c) $\mathrm{Mat}(f)+\mathrm{Mat}(g)=\mathrm{Mat}(Id_E)$

Idées et stratégies

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B=(\vec{i},\vec{j})$; on note $\vec{D}$ la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et $\vec{\Delta}$ celle engendrée par $\vec{v}$

Pour définir une expression analytique de la projection vectorielle f de E sur $\vec{D}$ parallèlement à $\vec{\Delta}$ on peut procéder comme suit :

On identifie la base et la direction de f

Base de : $\vec{D}$ et direction de f : $\vec{\Delta}$

On établit un système

d'équation : $\begin{cases}\vec{u}\in\vec{D}\\ \vec{v}\in\vec{\Delta}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(\vec{u})=\vec{u}\\ f(\vec{v})=\vec{o}_E\end{cases}$

La résolution de ce système donne $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et conduit à l'expression analytique de f.

On peut aussi après avoir identifié la base et la direction de f procéder de cette façon

Pour tout vecteur $\vec{r}(x,y)$ d'image $\vec{r}'(x',y')$ par f on a :

$\vec{r}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ (1)

$\vec{r}'=\alpha\vec{u}$ (2)

on cherche α à partir de (1) que l'on portera dans (2)

INFO

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $B=(\vec{i} \quad \vec{j})$, la droite vectorielle $(\vec{D})$ d'équation : $ax+by=0$ est engendrée par un vecteur $\vec{u}=-b\vec{i}+a\vec{j}$

Idées et stratégies

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B=(\vec{i},\vec{j})$; on note $\vec{D}$ la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et $\vec{\Delta}$ celle engendrée par $\vec{v}$

Pour définir une expression analytique de la symétrie vectorielle g de E sur $\vec{D}$ de direction $\vec{\Delta}$ on peut procéder comme suit :

On identifie la base et la direction de g

Base de : $\vec{D}$ et direction de g : $\vec{\Delta}$

On établit un système d'équation :

$$\begin{cases}\vec{u}\in\vec{D}\\ \vec{v}\in\vec{\Delta}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g(\vec{u})=\vec{u}\\ g(\vec{v})=-\vec{v}\end{cases}$$

La résolution de ce système donne $g(\vec{i})$ et $g(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et conduit à l'expression analytique de g.

On peut aussi après avoir identifié la base et la direction de g procéder de cette façon

Pour tout vecteur $\vec{t}(x,y)$ d'image $\vec{t}'(x',y')$ par g on a : $\begin{matrix}\vec{t}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} & (1)\\ \vec{t}'=\alpha\vec{u}-\beta\vec{v} & (2)\end{matrix}$

on cherche α et β en fonction de x et y à partir de (1) que l'on portera dans (2) qui est la réponse à la question cherchée.

Exercices

Choisir la bonne réponse dans les exercices 1 à 4

1.- Si $\vec{D}: x+2y=0$ et $\vec{\Delta}: x+y=0$ sont deux droites vectorielles d'un espace vectoriel E de base $(\vec{i},\vec{j})$ alors l'expression analytique de l'endomorphisme f, projection vectorielle de E sur $\vec{D}$ parallèlement à $\vec{\Delta}$ est :

a) $\begin{cases}x'=3x+2y\\ y'=-4x-3y\end{cases}$ b) $\begin{cases}x'=-2x-2y\\ y'=3x+3y\end{cases}$

c) $\begin{cases}x'=-5x-4y\\ y'=6x+5y\end{cases}$ d) $\begin{cases}x'=4x+6y\\ y'=-2x-3y\end{cases}$

e) $\begin{cases}x'=2x+2y\\ y'=-x-y\end{cases}$

2.- Si $\vec{D}: x+y=0$ et $\vec{\Delta}: 2x+y=0$ sont deux droites vectorielles d'un espace vectoriel E de base $(\vec{i},\vec{j})$ alors l'expression analytique de l'endomorphisme f, projection vectorielle de E sur $\vec{D}$ parallèlement à $\vec{\Delta}$ est :

a) $\begin{cases}x'=2x+2y\\ y'=-x-y\end{cases}$ b) $\begin{cases}x'=-2x-2y\\ y'=3x+3y\end{cases}$

c) $\begin{cases}x'=2x+y\\ y'=-2x-y\end{cases}$ d) $\begin{cases}x'=4x+6y\\ y'=-2x-3y\end{cases}$

3.- Si $\begin{cases}x'=-2x-2y\\ y'=3x+3y\end{cases}$ est l'expression analytique de la projection f d'un espace vectoriel E muni d'une base donnée sur une droite $\vec{D}$ parallèlement à une droite $\vec{\Delta}$ alors l'expression analytique de la symétrie vectorielle de E sur $\vec{D}$ de direction $\vec{\Delta}$ est :

a) $\begin{cases}x'=3x+2y\\ y'=-4x-3y\end{cases}$ b) $\begin{cases}x'=-2x-2y\\ y'=3x+3y\end{cases}$

c) $\begin{cases}x'=-5x-4y\\ y'=6x+5y\end{cases}$ d) $\begin{cases}x'=4x+6y\\ y'=-2x-3y\end{cases}$

4.- Si $\begin{cases}x'=-7x-12y\\ y'=4x+7y\end{cases}$ est l'expression analytique de la symétrie vectorielle f d'un espace vectoriel E muni d'une base donnée par rapport à une droite $\vec{D}$ de direction une droite $\vec{\Delta}$ alors l'expression analytique de la projection vectorielle de E sur $\vec{D}$ parallèlement à $\vec{\Delta}$ est :

a) $\begin{cases}x'=2x+2y\\ y'=-x-y\end{cases}$ b) $\begin{cases}x'=-2x-2y\\ y'=3x+3y\end{cases}$

c) $\begin{cases}x'=-3x-6y\\ y'=2x+4y\end{cases}$ d) $\begin{cases}x'=4x+6y\\ y'=-2x-3y\end{cases}$

5- E est un plan vectoriel muni d'une base $B=(\vec{i},\vec{j})$ Pour un endomorphisme f de E, on sait que le noyau est la droite vectorielle d'équation $2x+3y=0$, et que l'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite vectorielle $x+y=0$.

a) Calculer $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$. En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

b) Montrer que f est un projecteur de E.

c) Justifier que f n'est pas bijectif

6- E est un plan vectoriel muni d'une base $B=(\vec{i},\vec{j})$. Pour un endomorphisme f de E, on sait que l'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite vectorielle d'équation $x-y=0$ et que l'ensemble des vecteurs changés en leurs opposés par f est la droite vectorielle d'équation $3x-2y=0$

a) Calculer $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$. En déduire la matrice de f dans la base B.

b) Monter que f est une symétrie vectorielle de E.

c) Justifier que f est bijectif.

7.- Dans l'espace vectoriel E rapporté à la base $B=(\vec{i},\vec{j})$, on considère les droites vectorielles

$(\vec{D}) : 5x-4y=0$ et $(\vec{\Delta}) : x-y=0$

1) Déterminer l'expression analytique de la symétrie vectorielle f par rapport à $(\vec{D})$ de direction $(\vec{\Delta})$ et la matrice associée

2) En déduire la définition analytique de la projection vectorielle g de E sur $(\vec{\Delta})$ parallèlement à $(\vec{D})$.

8.- Dans l'espace vectoriel E rapporté à une base $B=(\vec{i},\vec{j})$, on donne les sous-espaces vectoriels supplémentaires $(\vec{D})$ et $(\vec{\Delta})$ engendrés respectivement par les vecteurs $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$

a) Déterminer la matrice de l'endomorphisme f, projection vectorielle de E sur $(\vec{D})$ parallèlement à $(\vec{\Delta})$

b) En déduire la matrice de l'endomorphisme φ symétrie vectorielle s'effectuent par rapport à $(\vec{D})$ de direction $(\vec{\Delta})$

9.- E est un plan vectoriel muni de la base $(\vec{i},\ \vec{j})$. Soient f et g deux endomorphismes de E. f est définie analytiquement par : $\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=x-y \end{cases}$. g est défini par sa matrice $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ relativement à la base $(\vec{i},\ \vec{j})$. On pose $p=3f-g$.

a) Calculer $p(\vec{i})$ et $p(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$. En déduire la matrice de p dans la base $(\vec{i},\ \vec{j})$.

b) Calculer $pop(\vec{i})$ et $pop(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

c) Montrer que p est une projection vectorielle de E sur une droite vectorielle $\vec{D}$ Que l'on précisera parallèlement à une droite vectorielle $\vec{\Delta}$ dont on donnera la base $\vec{a}$.

10.- Dans le plan vectoriel E rapporté à la base orthonormée $B=(\vec{i},\vec{j})$, on considère la droite vectorielle $(\vec{D})$ de direction $\vec{I}=-\vec{i}+\vec{j}$ et la droite vectorielle $(\vec{D}')$ de direction $\vec{J}=\vec{i}+\vec{j}$. Déterminer la matrice par rapport à la base B de la symétrie vectorielle S par rapport à $(\vec{D})$ de direction $(\vec{D}')$

11- Soit E un espace vectoriel muni de la bade B = $(\vec{i}\ \ \vec{j})$, F et G sont deux droites vectorielles d'équations respectives : x + y = 0 et 4x + 3y = 0 . Soit f un endomorphisme de E tel que
Kerf =F et l'ensemble des vecteurs invariants par f est G.

a) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{i}\ \ \vec{j})$.

b) Montrer que f est un projecteur de E

c) On pose, $\forall\ \vec{u} \in$ E :

$g(\vec{u})=2f(\vec{u})-\vec{u}$; g est-elle une involution de E?

Idées et stratégies

- Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; on note $\vec{D}$ la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et $\vec{P}$ le plan vectoriel engendré par $(\vec{v},\vec{w})$

Pour définir l'expression analytique de la projection vectorielle f de E sur $\vec{P}$ parallèlement à $\vec{D}$, on peut procéder de la manière suivante :
On identifie la base et la direction de f
Base de f : $\vec{P}$ et direction de f : $\vec{D}$
On établit un système d'équation

$$\begin{cases}\vec{u}\in\vec{D}\\ \vec{v}\in\vec{P}\\ \vec{w}\in\vec{P}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(\vec{u})=\vec{o}_E\\ f(\vec{v})=\vec{v}\\ f(\vec{w})=\vec{w}\end{cases}$$

La résolution de ce système donnera $f(\vec{i}), f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ et conduira à l'expression analytique cherchée
On peut aussi procéder de cette façon; après avoir identifié la base et la direction de f
Pour tout vecteur $\vec{t}(x,y,z)$ d'image $\vec{t}'(x',y',z')$ par f on a :

$\vec{t}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\lambda\vec{w}$ (1)

$\vec{t}'=\beta\vec{v}+\lambda\vec{w}$ (2)

On cherche β et λ à partir de (1) que l'on portera dans $\vec{t}'$ qui est la question

Pour définir analytiquement l'endomorphisme f, symétrie vectorielle de E par rapport à $\vec{P}$ de direction $\vec{D}$, on peut procéder comme suit :

On identifie avec soin la base et la direction de f
⇔ Base de f : $\vec{P}$
⇔ Direction de f : $\vec{D}$
On établit un système d'équation

$$\begin{cases}\vec{u}\in\vec{D}\\ \vec{v}\in\vec{P}\\ \vec{w}\in\vec{P}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(\vec{u})=-\vec{u}\\ f(\vec{v})=\vec{v}\\ f(\vec{w})=\vec{w}\end{cases}$$

La résolution du système ainsi établi donnera $f(\vec{i}), f(\vec{j}); f(\vec{k})$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}, \vec{k}$ et conduira à la matrice de f dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ puis à l'expression analytique cherchée

On peut aussi, après avoir identifié la base et la direction de f, admettre que pour tout vecteur $\vec{t}(x,y,z)$ d'image $\vec{t}'(x',y',z')$ par f

$\vec{t}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\lambda\vec{w}$ (1)

$\vec{t}'=-\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\lambda\vec{w}$ (2)

- Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E défini par sa matrice M dans une base de E

Pour démontrer que f est une projection vectorielle de E sur un plan vectoriel $\vec{P}$ parallèlement à une droite vectorielle $\vec{D}$, on prouve que fof = f. Autrement dit $M_f\cdot M_f=M_f$
En effet la projection f se fait sur $\vec{P}$, parallèlement à $\vec{D}$; $\vec{P}$ est l'ensemble des vecteurs invariants par f et $\vec{D}$ son noyau

- Pour démontrer que f est une symétrie vectorielle de E sur un plan vectoriel $\vec{P}$ de direction la droite vectorielle $\vec{D}$, on prouve que $fof=IdE$

- Si une symétrie vectorielle f se fait par rapport à un plan vectoriel $\vec{P}$, de direction une droite vectorielle $\vec{D}$; $\vec{P}$ est l'ensemble des vecteurs invariants par f et $\vec{D}$ est l'ensemble des vecteurs changés en leurs opposés par f.

Exercices

1- E est un espace vectoriel muni d'une base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Pour un endomorphisme f de E on sait que l'ensemble des vecteurs invariants par f est le plan vectoriel

$\vec{P}$ engendré par les vecteurs $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ et que le noyau de f est la droite vectorielle $\vec{D}$ engendrée par le vecteur $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{k}$.

1) Déterminer $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$ en fonction de $\vec{i};\vec{j}\ \vec{k}$. En déduire la matrice f dans la base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et l'expression analytique de f.
2) Montrer que f est un projecteur de E. f est il bijectif ?
3) En déduire la matrice de la symétrie vectorielle g de E par rapport à $\vec{P}$ de direction $\vec{D}$ et l'expression analytique de g.

2- Dans l'espace vectoriel E rapporté à la base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la droite vectorielle $\vec{D}$ engendrée par le vecteur $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ et le plan vectoriel $\vec{P}$ engendré par les vecteurs $\vec{V}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{W}=-\vec{j}+\vec{k}$. Pour un endomorphisme f on sait que l'ensemble des vecteurs invariants par f est le plan vectoriel $\vec{P}$ et que l'ensemble des vecteurs changés en leurs opposés est la droite vectorielle $\vec{D}$.

a) Déterminer $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$ en fonction de $\vec{i};\vec{j}\ \vec{k}$. En déduire la matrice de f dans la base B et l'expression analytique de f.

b) Montrer que f est une symétrie vectorielle de E. f est-il bijectif ?

c) Déduire l'expression analytique de la projection vectorielle g de E sur $\vec{P}$ parallèlement à $\vec{D}$.

3.- Dans l'espace vectoriel E muni de la base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan vectoriel $\vec{p}$ d'équation : $x-y+2z=0$

1) Déterminer le réel m sachant que le vecteur : $\vec{w}=(m-1)\vec{i}+5\vec{j}+(2m+3)\vec{k}$ appartient au plan vectoriel $\vec{p}$.
2) Définir analytiquement la symétrie vectorielle f de E par rapport au plan vectoriel $\vec{P}$ de direction la droite vectorielle $\vec{D}$ d'équation : $x=y=-z$
3) En déduire la matrice de f dans la base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Bac 2003

4.- Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3 sur R dont la matrice dans une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$M=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 2\\ -4 & 8 & 4\\ 5 & -10 & -5\end{pmatrix}.$$

Démontrer que f est une projection vectorielle sur une droite vectorielle $\vec{D}$ dont on déterminera une base parallèlement à un plan vectoriel dont on déterminera une équation cartésienne

Bac 2004

5.- Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3 sur R dont la matrice dans une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Démontrer que f est une symétrie vectorielle par rapport à un plan vectoriel $\vec{P}$ dont on déterminera une équation cartésienne de direction une droite vectorielle $\vec{D}$ dont on déterminera une base

6.- Soit p une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension 3 dans lui-même définie analytiquement dans une base de E par :

$$\begin{cases}x'=y+z\\ y'=x-z\\ z'=-x+y+2z\end{cases}$$

Démontrer que p est une projection vectorielle sur un plan vectoriel $\vec{P}$, dont on déterminera une équation cartésienne, parallèlement à une droite vectorielle $\vec{D}$ dont on déterminera une base.

7.- L'espace vectoriel E étant rapporté à une base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; on désigne par f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(\vec{i})=-5\vec{i}-8\vec{j}+10\vec{k}$$
$$f(\vec{j})=8\vec{i}+15\vec{j}-20\vec{k}$$
$$f(\vec{k})=4\vec{i}+8\vec{j}-11\vec{k}$$

a) Quelle est la dimension de E?
b) Démontrer que f est une symétrie vectorielle
c) Déterminer les sous-espaces vectoriels qui caractérisent cette symétrie vectorielle

8.- Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur R et $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base donnée de E. on considère les vecteurs $\vec{u}_1(1,1,0)$; $\vec{u}_2\ (0,-1,1)$; $\vec{u}_3(1,-1,1)$

1) Montrer que le plan vectoriel $\vec{P}$ engendré par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ et la droite vectorielle $(\vec{D})$ engendrée par $\vec{u}_3$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
2) Déterminer les coordonnées (x', y', z') d'un vecteur $\vec{v}'$ image du vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (x, y, z) par la projection vectorielle p de E sur $\vec{P}$ parallèlement à $(\vec{D})$
3) Soit S la symétrie vectorielle de E par rapport à $\vec{P}$ de direction à $(\vec{D})$. Déduire de la question précédente la matrice et l'expression analytique de S.

9- Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on note $\vec{D}$ la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{P}$ le plan vectoriel engendré par $(\vec{i}-\vec{j};\ \vec{j}-\vec{k})$

1) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\vec{D}$ et $\vec{P}$ sont supplémentaires dans E.
2) Soit $\vec{X}$ un vecteur de E, de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ dans la base B, calculer les coordonnées de l'image de $\vec{X}$ par la projection vectorielle p de E sur $\vec{P}$ de direction $\vec{D}$.

10.- Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; on note S la symétrie vectorielle par rapport au plan vectoriel $\vec{P}$ d'équation $x+y+z=0$ et de direction la droite vectorielle $(\vec{D})$ d'équation :

$$\frac{x}{-1}=y=\frac{z}{2}$$

1) Calculer $S(\vec{j}-\vec{k}), S(\vec{i}-\vec{k}), S(-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$.
En déduire $S(\vec{i}), S(\vec{k})$ en fonction de $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$
2) Soit $\vec{U}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ un vecteur quelconque de E et $S(\vec{u})=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ son symétrique. Calculer x', y', z' en fonction de x, y, z

11.- Dans l'espace vectoriel E de base $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la droite vectorielle $\vec{D}$ engendrée par le vecteur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et le plan vectoriel d'équation $\vec{P}: x+y-z=0$

1) Déterminer l'expression analytique de la projection vectorielle de E sur $\vec{P}$ parallèlement à $\vec{D}$
2) En déduire la définition analytique de la symétrie vectorielle g de E par rapport à $\vec{D}$ de direction $\vec{P}$.

Géométrie

Chapitre I

Espace Affine

.- *Définition*

Un ensemble non vide ε d'éléments appelés points est un espace affine s'il existe une application φ de ε x ε dans un espace vectoriel réel E telle que : ∀ A, B, C ∈ ε ; $\varphi(A,B)=\overrightarrow{AB}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- Pour tout point O de ε et tout vecteur $\vec{u}$ de E il existe un point M de ε tel que : $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$
- Pour tous points A, B, C de l'espace affine ε associé à l'espace vectoriel E on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

INFO

- ❖ $\forall(A,\ G)\in\varepsilon^2 : \overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{GA}$
- ❖ $\forall(A,\ G,\ B)\in\ \varepsilon^3 : \overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AB}$ signifie que A est milieu de $[G,B]$.
- ❖ $\forall G, A, A' \in \varepsilon : \overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{GA'}$

Points et système de points pondérés

On appelle point pondéré, encore appelé point massif, tout couple $(A,\ \alpha)$ où $A\in\varepsilon$ et $\alpha\in\Re$

α est appellé coefficient, masse ou poids du point A.

- ❖ $\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);...;(A_n,\alpha_n)\}$ est donc un système de points pondérés.

Fonction vectorielle de Leibniz d'un système de points pondérés

Soit ε un espace affine associé à un espace vectoriel E. On appelle fonction vectorielle de Leibniz relative aux points A_1 ; A_2 ...; A_n affectés des coefficients respectifs $\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n$, l'application f de ε dans E définie par :

$f:\varepsilon\to E$

$$M\to f(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+......+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}$$

qui se lit : scmmation de $\alpha_i MA_i$ i allant de 1 à n

Propriété

- Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ c'est-à-dire $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=0$; alors l'application f est constante.
- Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ c'est-à-dire $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\neq 0$; alors l'application f est bijective.
  Il existe donc un unique point G tel que : $f(G)=\vec{O}_E$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA}=\vec{O}_E$ ou encore : $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+......+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{O}_E$. Le point G est donc le barycentre du système de points pondérés $\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);...;(A_n,\alpha_n)\}$.

.- *Définition*

On appelle barycentre des n points pondérés : $(A_i;\alpha_i)_{1\le i\le n}$ l'unique point G tel que :

$$f(G)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$$

On note: G = bar $\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);...;(A_n,\alpha_n)\}$ ou G=bar

A_1	.....	A_n
α_1	.....	α_n

Coordonnées du barycentre

L'espace ε étant muni du repère $(o,\vec{i},\vec{j})$. Soit $(A_i;\alpha_i)_{1\le i\le n}$ n points pondérés et G leur barycentre. Si $(x_A;y_A)$ sont les coordonnées du point $A_i(1\le i\le n)$ et (x, y) celles de G. Alors

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};\ y=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};$$

$$G\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha i\, x_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha i};\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha i\, y_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha i}\right)$$

L'espace ε étant muni du repère $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $(A_i;\alpha_i)_{1\le i\le n}$ n points et G leur barycentre. Si $(x_A;y_A;z_A)$ sont les coordonnées du point $A_i(1\le i\le n)$ et (x, y, z) celles de G alors :

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};\ y=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};\ z=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};$$

$$G\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha i\, x_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha i};\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha i\, y_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha i};\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha i\, z_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha i}\right)$$

Propriétés du barycentre

- Le barycentre de $\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);\dots;(A_n,\alpha_n)\}$ est le même que celui de : $\{(\lambda A_1,\lambda\alpha_1);(\lambda A_2,\lambda\alpha_2);\dots;(\lambda A_n,\lambda\alpha_n)\}$
- Si G est le centre du système $\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);\dots;(A_n,\alpha_n)\}$ et M un point de l'espace alors : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MG}$

Remarques

- Le barycentre de points pondérés affectés de coefficients égaux est appelé isobarycentre de ces points.
- G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si, il est l'isobarycentre des points
- A, B, C, c'est-à-dire $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
- G est le centre de gravité du tétraèdre ABCD si et seulement si, il est l'isobarycentre des points
- A, B, C, D ; c'est-à-dire $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Idées et stratégies

Dans un espace affine euclidien on donne trois points : $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix};B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix};C\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$

Les points A, B, C ne sont pas alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont libres

Les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC sont données

par : $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\quad y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}$

Les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A;\alpha);(B;\alpha);(C;\lambda)$ sont données par :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\lambda x_C}{\alpha+\beta+\lambda}$$

$$x_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\lambda y_C}{\alpha+\beta+\lambda}$$

Exercices

__Choisir la bonne réponse dans les exercices 1 à 10__

1.- Dans un repère du plan, on donne les points A(2, -2), B(4, 0) et C(0, 3). Si G = (4, 2) est le barycentre du système $S=\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,1)\}$ alors les cofficients α et β sont :

a) $\alpha=-2$ et $\beta=-\frac{9}{2}$ b) $\alpha=2$ et $\beta=-\frac{9}{2}$

c) $\alpha=-2$ et $\beta=\frac{9}{2}$ d) $\alpha=2$ et $\beta=\frac{9}{2}$

2- Dans l'espace affine E, on considère les points A, B, C, D affectés des coefficients respectifs 2, 3, -2, α. Si f est l'application définie par : ∀M ∈ E :

$f(M)=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}+\alpha\overrightarrow{MD}$. f est une application constante si :

a) α = 3 b) α = -3 c) = 2 d) α = -2

3.- Si I est le barycentre des points pondérés (K,2); (N,1) alors :

a) K est le milieu de [IN]

b) N est le milieu de [KN] c) $\overrightarrow{KI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{KN}$

c) $\overrightarrow{KI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NK}$ e) $\overrightarrow{KI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{NK}$

4.- Sachant que A(4, 1), B(-1, 3) ; C(2, 1) et $-3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, alors les coordonnées du point G sont :

a) (3, 4) b) (4, 5) c) (5, 6)
d) (5, 9) e) (5, 3)

5.- Le point $G=bar\{(A,2);(B,-1);(C,3)\}$; sachant que A(1, 2) ; B(-3, 1) ; C(5, 7) ; a pour coordonnées :

a) (4, 5) b) (5, 4)
c) (6, 4) d) (5, 6)
e) (4, 6) f) Aucune des réponses

6.- Si G est le barycentre des points pondérés (A, 2) ; (B, -1) alors :

a) $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{AB}$

c) A est le milieu du segment [GB]

7.- Si G est le barycentre des points pondérés : (A, 2) ; (B, 3) alors

a) $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$ b) $\overrightarrow{GA} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BA}$

c) A est le milieu du segment [GB]

8- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $5+2i$, $3-i$, $1+2i$. Si G est le centre de gravité du triangle ABC, alors le point G a pour affixe

a) $2+3i$ b) $-3+i$ c) $3+i$ d) -3-i.

1) Dans le plan affine (P), on considère les points non alignés A, B, et C. Le point G vérifiant $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ est la barycentre de :

a) (A, 2) ; (B, 3) et (C, 1).
b) (A, 2) ; (B, 3) et (C, -2)
c) (A, 1) ; (B, 1) et (C, -1)
d) (A, -2) ; (B, -3) et (c, -2)

9.- Si G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,2);(B,2);(C,-3)\}$ et I celui de $\{(A,2);(C,-3)\}$; alors G est aussi le barycentre de :

a) $\{(I,2);(B,2)\}$ b) $\{(I,-1);(B,2)\}$

c) $\{(I,-1);(A,2)\}$ d) $\{(I,2);(A,2)\}$

10.- Le barycentre G des points A(1 ; 2) B(0 ; 3) et C (-1 ; 4) de coefficients respectifs : $2-\lambda$; 3 et $1+2\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) est :

a) $G\left(\frac{17+6\lambda}{6+\lambda};\frac{1-3\lambda}{6+\lambda}\right)$ b) $G\left(\frac{1-3\lambda}{6+\lambda};\frac{17+6\lambda}{6+\lambda}\right)$

c) $G\left(\frac{-2}{6+\lambda};\frac{17+\lambda}{6+\lambda}\right)$ d) Aucune réponse

11.- Dans le plan affine P, le système de points pondérés R = {(A, α) ; (B, β)} ; (α, β : réels), admet un barycentre G défini par la relation : $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = 5\overrightarrow{AB}$ pour :

a) $\alpha = 1$ et $\beta = 3$ b) $\alpha = 3$ et $\beta = 5$

c) $\alpha = 6$ et $\beta = -2$ d) Aucune des réponses

12.- Dans le plan affine, on considère les points non alignés A, B et C. Déterminer le système de points pondérés dont le point G vérifiant la relation $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ est le barycentre.

13.- Dans le plan affine P, le système de points pondérés : $S = \{(A,\alpha);(B,B);(C,\lambda)\}$; $(\alpha, \beta, \lambda : réels)$; admet un barycentre G défini par la relation: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$.
Si A(-1;0) ; B(1;-1) et C(0;1) déterminer les coordonnées du point G

14.- Dans le plan affine muni du repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B, C tels que :
A (3, 10) ; B (4, 6) et C (-3, -1)

a) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis montrer que les points (A, B, C) ne sont pas alignés

b) Déterminer les coordonnées de I centre de gravité du triangle (A, B, C)

c) Déterminer les coordonnées de G, barycentre des points pondérés (A, 3) ; (B, -1) et (C, -1)

15.- Dans le plan affine euclidien P on considère les points A(0 :1) ; B(2 ;1) ;C(-1 ;1) ;D(1 ;4) affectés respectivement des coefficients 1, -1, 1 et -2.

1) Le barycentre G de ces points existe-il ?
2) Si oui, donner la relation vectorielle qui le caractérise. En déduire ses coordonnées.

16.- Le plan P étant rapporté à un repère d'origine 0, on donne les points : A (1, 2) affecté du coefficient α ; B (0, 3) affecté du coefficient 3 ; C (-1, 4) affecté du coefficient 1-2α.

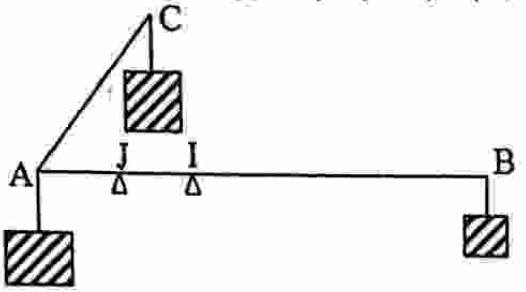
1. Calculer en fonction de α, les coordonnées du point G barycentre des trois A, B, C affectés des coefficients indiqués.
2. Déterminer α pour que le point G appartienne à la droite d'équation $x - y - 1 = 0$

Bacc 2001

17.- Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC si :

a) A(0, 2, 5) B(1, -6, 4) C(0, -5, -2)
b) A(3, 6, -2) B(1, 4, -7) C(2, 2, 1)

18.- Le système suivant est équilibré sous les effets des points I et J barycentres respectifs de {(B, 2) ; (C, 3) ;} et {(A, 5) ; (B, 2) ; (C, 3)}



1. Ecrire une relation vérifiée par les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$
2. Ecrire une relation vérifiée par les vecteurs $\overrightarrow{JA}$, $\overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{JC}$
3. En déduire que J est le milieu de [AI]

19- On considère dans le plan orienté un triangle ABC. Soient G le barycentre du système de points pondérés.
$\{(A,3), (B,1), (C,1)\}$, Q celui du système $\{(A,3); (C,1)\}$ et R celui de $\{(A,3)\ (B,1)\}$.

a) Démontrer que les droites (BQ) et (CR) passent par le point G.
b) Soit P le milieu de (BC). Démontrer que les points A, P, G soient alignés.

****

Fonction numérique ou scalaire de Leibniz

Soit ε un espace affine associé à un espace vectoriel E et $\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);....;(A_n,\alpha_n)\}$ un système de points pondérés.

On appelle fonction numérique de Leibniz relative à ce système de points pondérés, l'application f définie par :

$f : \varepsilon \to \Re$

$M \to f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\, i MA_i^2$

$f(M) = \alpha_1 MA_1^2 + ... + \alpha_n MA_n^2$

Idées et startégies

f étant l'application d'un espace affine euclidien dans R définie

par : $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \lambda MC^2$

si $\alpha + \beta + \lambda \neq 0$ alors le barycentre G des points pondérés existe et en introduisant G dans la relation on obtient :

$f(M) = (\alpha + \beta + \lambda) MG^2 + f(G)$

avec $f(G) = \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \lambda GC^2$

Si $\alpha + \beta + \lambda = 0$, en fixant le point A dans la relation on obtient :

$f(M) = K\overline{MA}(\overline{AB} + \overline{AC}) + AB^2 + AC^2$ et pour tout point I appartient [BC] on a

$\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AI}$

$f(M) = K\overline{MA}.(2\overline{AI}) + AB^2 + AC^2$

Si dans un plan affine euclidien G est barycentre d'un système de points pondérés $\{(A,\alpha);(B,B);(C,\lambda)\}$. L'ensemble des points M du plan tels que $MG^2 = a$ est :

⇔ Un cercle de centre G et de rayon $R = \sqrt{a}$ si $a \in \Re_+^*$

⇔ L'ensemble vide si $a \in \Re_-^*$

⇔ Réduit au point G si a = 0

⇔ $\overline{MA} \cdot \overline{AI}$: L'ensemble des points M du plan est la perpendiculaire au segment [AI]

⇔ MI = MJ : l'ensemble des points M du plan est la médiatrice du segment [IJ]

Idées et stratégies

Un point A appartient à un cercle (C) de centre G et de rayon R si AG = R.

Soit G le barycentre d'un système de points pondérés et (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MG^2 = a$ (a ∈ ℜ+)

⇔ $MG = \sqrt{a}$

M : point variable

G : point fixe

(E) : est donc un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{a}$.

Exercices

1.- Dans le plan affine euclidien (P), on considère les points A (1, 2) ; B (-3, 1) et C (5, 7)

a) Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points pondérés : (A, 2) ; (B, -1); (C, 3)

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M(x, y) du plan tels que :
$2MA^2 - MB^2 + 3MC^2 = 14$

c) Le point A appartient-il à (E). Justifier.

2.- .- On donne les points A et B d'un plan affine euclidien (P) et on note respectivement I et J le barycentre de $\{(A;1);\ (B;-4)\}$ et $\{(A;1);\ (B;2)\}$

a) Pour tout point M de (P) vérifier que :
$\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MI}$ et
$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MJ}$

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 2MB\right\|$$

3.- Dans le plan (P) muni d'un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A (2, 6) ; B (6, 4) ; C (4, -4)

1. Définir analytiquement l'ensemble (E) des points M (x, y) du plan tels que :
$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\|$$
2. Soit I le barycentre de {(A, ?) ; (B, 1); (C, -1)} et J celui de {(A, 3) ; (B, 1) ; (C, -2)}

a) Déterminer $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$

b) Déterminer $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MJ}$

c) En déduire géométriquement l'ensemble (F) des points du plan tels que :
$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\|$$

4.- On considère dans l'espace affine ε rapporté à un repère cartésien, les points variables A, B, C de coordonnées respectives A(a, 0, 0) ; B(0, b, 0) ; C(0, 0, c) affectés chacun de coefficients suivant pour A : (b + c) ; pour B : (c + a) pour C : (a + b). Les nombres réels variables a, b, c sont tels que
$a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$; $ab + bc + ca = 0$

a) Démontrer que ces trois points $ab+bc+ca \neq 0$ ont pour barycentre G et calculer les coordonnées x, y, z de celui- ci en fonction de a, b, c

b) Calculer x + y + z et en déduire l'ensemble des points G

5.- Dans un plan P rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B, C de coordonnées respectives (1, 0) ; (-1, 2) ; (3, 1)

1) Montrer qu'il existe dans P un point G et un seul tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Déterminer ses coordonnées (u, v)

2) Calculer GA^2, GB^2, GC^2

3) Pour tout point M de (P) ; calculer $MA^2 + MB^2 + MC^2$ en fonction de MG^2. Quel est alors l'ensemble des points M (P) tel que :

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 22$?

b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MO^2 = 4$? (O désigne l'origine du repère)

c) Construire ces deux ensembles dans le même repère.

6.- Dans un plan affine (P) rapporté à un repère orthonormé d'origine 0, on considère les points $A(3,0); B(0,4); C(7,3)$

a) Calculer les coordonnées du barycentre G des points A, B, C affectés des coefficients respectifs -1, 1, 1

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 25$

c) Déterminer l'ensemble (Δ) des points N du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NA}\right\| = \left\|\overrightarrow{NO}\right\|$

7.- Etant donné un carré ABCD de côté a, on associe à tout point M la fonction vectorielle f définie par $f(M) = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}$

a) Déterminer α pour que f soit constante

b) Démontrer alors lorsque M décrit le plan du carré, f(M) est tel que : $f(M)=-\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AD}$ en déduire les coordonnées de f(M)

c) Déterminer l'ensemble S des points M du plan ABCD tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|f(M)\right\|$$

8.- Dans un espace affine euclidien ε de dimension 2. On considère trois points distincts A, B, C soit f l'application de ε dans R définie par :

$$M\to f(M)=2\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2+3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2-2\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2$$

1) Justifier l'existence du barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2, 3, -2 et donner une relation vérifiée par les vecteurs $\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GB};\overrightarrow{GC}$
2) Montrer que $f(M)=3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|^2+k$ où k = f(G)
3) Discuter suivant les valeurs de k la nature de l'ensemble des points M de ε tel que $f(M)=4$

9.- Dans le plan muni d'un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A(-4, 4) ; B(-5, -1) ; C(1,1)

1) Déterminer le réel α pour que le point $G(-3;2)$ soit le barycentre des points pondérés $(A,\alpha);(B,1);(C,1)$
2) on considère l'application f de P dans R telle que $f(M)=2MA^2+MB^2+MC^2$ démontrer que l'on ait : $f(M)=4MG^2+40$ En déduire l'ensemble des points du plan tels que f(M)= 56
3) On suppose que M appartient à la droite d'équation $y=2x-7$

a) Calculer f(M) en fonction de l'abscisse x du point M

b) Montrer qu'il existe une valeur de x_0 et une seule pour laquelle f (M) est minimal

c) On note M_0 le point de (D) d'abscisse x_0 ; démontrer que les droites (D) et (G M_0) sont orthogonales

10.- Dans le plan euclidien (P) on donne deux points A et B distincts. On appelle 3a (a > 0) la distance AB et $G=bar\{(A,2);(B,1)\}$

1) Montrer que le point G est tel que :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

2) Quel est l'ensemble des points M du plan (P) vérifiant $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BA}$?
3) On se donne un réel m ; discuter suivant la valeur de m l'ensemble des points M du plan tel que $2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=m$

11.- Dans le plan affine euclidien (P), on considère un triangle équilatéral ABC tel que :

AB = BC = AC = a (a > 0)

1) Déterminer le point : $G=bar\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$ et préciser sur une ligne la position du point G
2) Déterminer l'ensemble des points M de P vérifiant :

a) $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=16$

b) $2MA^2+MB^2+MC^2=2a^2$

c) $MB^2+MC^2-2MA^2=2a^2$ (A est un élément de l'ensemble)

12.- .- Dans le plan affine euclidien (P), on considère le triangle ABC rectangle en A tel que AB = 3cm et AC = 4cm. Soit G le barycentre de $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$

Vérifier que :

AG²= $\frac{1}{16}(AB^2-AC^2)$

BG²= $\frac{1}{16}(9AB^2-AC^2)$

CG²= $\frac{1}{16}(AB^2-9AC^2)$

En déduire que :

2GA²-GB²-GC²= $\frac{75}{4}$

Quel est l'ensemble (E) des points M(x, y) du plan tels que : 2MA²-MB²-MC²= $\frac{216}{4}$

13.- Soit ABC un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse BC = 2a et I le milieu de (B, C)

a) Démontrer que le point G, défini par :

$$4\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

est symétrique du point I par rapport au point A

b) Quel est l'ensemble (F) des points M du plan tels que :

$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2$ (A ∈F)

14.- Soit un triangle ABC de cotes AB = 4a, AC = 5a et BC = 7a (a : longueur donnée)

1) M étant un point quelconque de l'espace, donner une expression plus simple du vecteur $\overrightarrow{V_1} = 7\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$, en utilisant la notion de barycentre

2) Que peut-on dire du vecteur : $\overrightarrow{V_2} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ lorsque M varie ?

3) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace lorsque $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ aient la même norme.

15- A, B et C sont trois points non alignés d'un plan affine (P)

a) Justifier que (B, $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$) est un repère de (P)

b) Déterminer dans le repère (B, $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$) les coordonnées du point G sachant que (A, B, C, G) est un parallélogramme

c) Déterminer les réels a et b sachant que le point G est le barycentre des points pondérés (A; a) ; (B; 2) ; (C; b)

1)

Idées et stratégies

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ Constitue un repère d'un espace affine si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace vectoriel associé.

16.- Dans l'espace affine ε associé à un espace vectoriel E, on considère les points : A (0, 2, 1) ; B (-1, -1, 0) ; C (4, 0, 0) et D (1, 1, -1)

1) $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ constitue-t-il un repère de ε ?

2) Déterminer les coordonnées du points G barycentre des points A, B, C et D affectés des coefficients 1, 3, $\frac{1}{2}$, 1

3) Soit I le milieu de (A, D) et J le point de l'espace tel que $\overrightarrow{JC} = -6\overrightarrow{JB}$. Déterminer une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$. Que peut-on en déduire.

Chapitre II

Applications affines

Soit f une application d'un espace affine ε associé à un espace vectoriel E on dit que *f* est une application affine dans ε, s'il existe un endomorphisme φ de E et un point A de ε tels que : pour tout M de ε :

$$\begin{matrix} f(A) = A' \\ f(M) = M' \end{matrix} \Rightarrow \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{A'M'}$$

❖ Une application affine bijective du plan est appelée transformation affine du plan

❖ Une application affine *f* est bijective si l'endomorphisme associé est bijectif

❖ Une application affine *f* est involutive si l'endomorphisme φ associé est involutif

❖ L'image d'une variété affine par une application affine est une variété affine

Expression analytique d'une application

Le plan est muni du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, *f* est une application affine du plan si et seulement si elle admet une expression analytique de la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = a'x + b'y + y_0 \end{cases}$$

Dans l'espace muni du repère $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, l'expression analytique d'une application et de la forme : $\begin{cases} x' = ax + by + cz + x_0 \\ y' = a'x + b'y + c'z + y_0 \\ z' = a''x + b''y + c''z + z_0 \end{cases}$

Idées et stratégies

❖ L'image d'une droite $D(A, \vec{u})$ par une application *f* est une droite $D'(A', \vec{u}')$ telle que $A' = f(A)$ et $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$ où φ est l'endomorphisme associé à *f*

❖ L'image d'un plan $P(A \;\; \vec{u} \;\; \vec{v})$ est un plan $P'(A', \vec{u}', \vec{v}')$ tel que $A' = f(A)$; $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$; $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$ où φ est l'endomorphisme associé à

Exercices

1.- Le plan affine E_2 étant rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère deux points A (-1, 2) et A'(2, 3) de E_2 et on désigne par φ l'endomorphisme du plan vectoriel associé à E_2 dont la matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, $M=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Définir l'application f transformant A en A' et dont l'endomorphisme associé est φ.

2.- Dans le plan affine (P) rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'application :

$f: M(x,y)\rightarrow M'(x',y')$ tel que :

$x'=7x+8y-14;\ \ y'=-6x-7y+14$

1) Montrer que f est application affine bijective
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f
3) f est-elle une application affine involutive ?

3.- Soit ε un espace affine associé à un espace vectoriel E ; ε étant rapporté au repère $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; f est une application affine de ε dans ε transformant le point A (1, 1, 2) en C (-3, 0, 2) et de l'endomorphisme φ tel que :

$\varphi(\vec{i})=\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}$; $\varphi(\vec{j})=3\vec{i}+\vec{k}$; $\varphi(\vec{k})=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

1) Etablir une relation entre les coordonnées d'un point M de ε et celles de son image M' par f et déterminer l'ensemble des points invariants par f
2) f est-elle involutive ? Est-elle bijective ?
3) Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation : $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=z-5$

4.- Soit $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère cartésien de l'espace affine ε associé à l'espace vectoriel E sur R et f l'application affine de ε définie par le point $A(1,-1,0)$ et son image A'(0, 2, 1) et

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

la matrice de l'application linéaire φ associé à f

1) L'application f est-elle bijective ?
2) Déterminer les coordonnées (x',y',z') de l'image M' du point $M(x,y,z)$ par f
3) Déterminer les images par f des deux droites D et D' ; D passant par 0 et de vecteur directeur $\vec{u}(1,-1,-1)$ et D' passant par 0 et de vecteur directeur $\vec{v}(1,1,1)$
4) Déterminer l'image par f du plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{v}_1(2,-1,1)$ et $\vec{v}_2(1,0,2)$

5.- Soit (P) le plan affine de repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'application f de P définie par :

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}(x+y-1)\\ y'=\frac{1}{2}(3x-y+3)\end{cases}$$

1) Montrer que f est une application affine et déterminer la matrice de son endomorphisme associé dans la base $(\vec{i},\vec{j})$
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f
3) f est-elle bijective ? Est-elle involutive ?

Exemples d'applications affines

A) Translation affine

Soit ε un espace affine associé à un espace vectoriel E. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application de ε dans lui-même qui, à tout point M, fait correspondre le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

Si l'on note t la translation de $\vec{u}$,
on a, pour tout (M, M') de $\varepsilon \times \varepsilon$:

$t(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

Remarque

- Une translation est une application affine dont l'endomorphisme associé est l'endomorphisme identique

B) Homothétie affine

On appelle homothétie affine de centre Ω et de rapport k ($k\in R^*$), l'application de l'espace affine ε dans lui-même qui, à tout point M de ε fait correspondre le point M' de ε tel que : $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

Remarque

Le centre d'une homothétie h dont le rapport est différent de 1 est le seul point invariant par h

Propriétés

Le plan est muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit k un nombre réel non nul et f l'application du plan dans lui-même, qui a tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases}x'=kx+p\\y'=ky+q\end{cases}$; où p et q sont des nombres réels

- Si k = 1 ; f est le translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$
- Si k ≠ 1 ; f est une homothétie de rapport k
- Les homothéties conservent le barycentre.

Idées et Stratégis

- Le barycentre G d'un système de points pondérés est le seul point invariant par une homothétie affine

****

.- Exercices

1- L'espace affine ε est muni du repère $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère l'application f définie par : $\begin{cases}x'=x+2\\y'=y-1\\z'=z-1\end{cases}$.

Préciser la nature de f.

2.- Même question, avec : $\begin{cases}x' &= 3x-4\\y' &= 3y\\z' &= 3z+2\end{cases}$

3.- Dans le plan affine euclidien, on donne les points A (1, 2) B (-3, 1) C (5, 7)

1) Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points pondérés (A, 2) ; (B, -1) ; (C, 3)

a) Déterminer l'ensemble des points $M(x, \; y)$ du plan tels que :

$\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=16$

b) Déterminer l'ensemble des points M (x, y) du plan tels que :

$2MA^2-MB^2+3MC^2=a\,(a>0)$

2. On considère l'application qui, à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$

a) Démontrer que l'application f est bijective

b) Préciser la nature de l'application f et ses éléments caractéristiques

c) Existe-t-il des points invariants par f ?

4- Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal, on considère les points A(-1 ; 2) B(0 ; 4) et C(1, 3).

a) Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points A, B et C affectés respectueusement des coefficient 2, -1, 3.

b) Caractériser la transformation f qui a tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$.

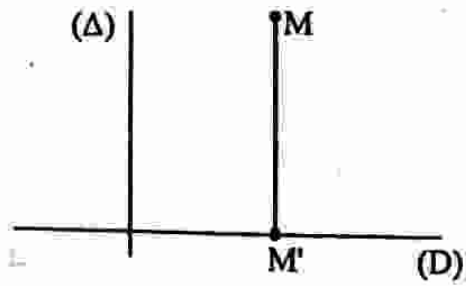
c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

d) $2MA^2-MB^2+3MC^2=8$.

C) Projection affine

Projection affine dans le plan

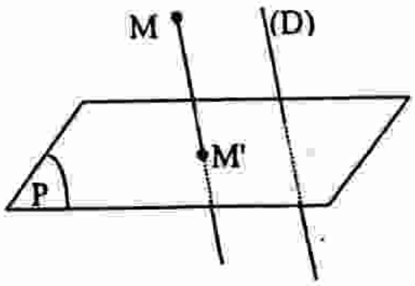
Soit deux droites D et Δ d'un espace affine ε muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On appelle projection sur (D) parallèlement à Δ, l'application p de ε dans lui-même qui à tout point M associe le point M' point d'intersection de (D) avec la parallèle à (Δ) passant par M



Pour tout vecteur $\vec{u}$ de Δ on a : $p(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MM}=\alpha\vec{u}\\M'\in D\end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

Projection dans l'espace

Soit (P) un plan de l'espace affine ε et (D) une droite non parallèle à (P). On appelle projection sur (P) parallèlement à (D), l'application p de ε dans lui-même qui à tout point M associe M', point d'intersection de (P) avec la parallèle à (D) passant par M



Pour tout vecteur $\vec{u}$ de (D) on

a : $p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \alpha\vec{u} \\ M' \in P \end{cases}$

Idées et stratégies

- Déterminer les éléments qui caractérisent une projection affine f revient à chercher sa base qui est l'ensemble des points invariants par f et sa direction qui est le noyau de l'endomorphisme associé à f
- Pour montrer qu'une application affine est une projection affine il suffit de prouver que l'endomorphisme associé est une projection vectorielle.

Exercices

1.- Dans le plan P muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, traduire analytiquement la projection sur la droite (D) d'équation : $5x - 4y + 2 = 0$ de direction $\vec{v}(2,-3)$

2.- Déterminer l'expression analytique de la projection affine f de l'espace affine ε sur le plan affine P d'équation $3x + 2y - 4z + 1 = 0$ de direction la droite vectorielle $x = y = z$

3.- Soit E l'espace affine rapporté à un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et f l'application de ε dans lui-même qui, associé à tout point M (x, y, z) le point M'(x', y', z') tel que :

$$\begin{cases} x' = -2y + z - 1 \\ y' = -x - y + z - 1 \\ z' = -2x - 4y + 3z - 2 \end{cases}$$

a) Quelle est la nature de f? Donner les éléments qui la caractérisent

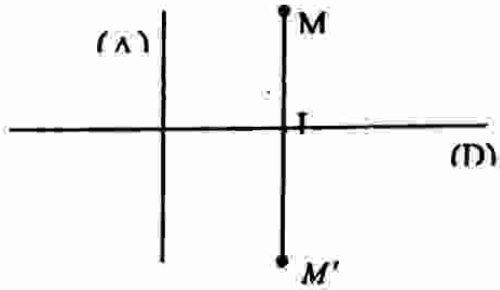
b) Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{4}$

c) Quelle est l'image par f du plan (P) d'équation $x + y - z + 5 = 0$
(le point B (-1, -1, 3) $\in$ P

D) Symétrie affine

Symétrie affine dans le plan

Soit ε, un espace affine muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ associé à un espace vectoriel E et (D) et (Δ) deux variétés affines dont les directions sont les sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

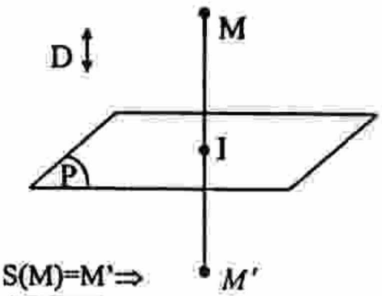


On appelle symétrie S par rapport à (D) de direction (Δ), toute involution affine c'est-à-dire toute application affine involutive dont l'endomorphisme associé est une symétrie vectorielle.

S étant la symétrie de ε par rapport à (D) de direction de (Δ) ; pour tout point M(x, y) de ε d'image $M'(x', y')$ par S on a : S(M)=M'$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \,//\, (\Delta) \\ I \text{ milieu de } [MM'] \text{ appartient à } (D) \end{cases}$$

Symétrie affine dans l'espace



S(M)=M'$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \,//\, (D) \\ I \text{ milieu de } [MM'] \text{ appartient à P} \end{cases}$$

Exercices

1.- Le plan (P) est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$; on considère les droites (D) et (D') d'équations :

$$(D): x - 2y - 1 = 0 \text{ et } (D'): \begin{cases} x' = 1 - 2t \\ y' = 3 + 5t \end{cases} \quad t \in R$$

Définir analytiquement l'application affine S, symétrie affine par rapport à D de direction (D')

2.- dans l'espace affine ε muni du repère$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan affine P d'équation : $2x-y+3z+5=0$ et la droite affine (D) de repère $(A,\vec{u})$ avec A (-1, 2, 0) ; $\vec{u}$(1, -1, 3) définir analytiquement l'application affine f, symétrie affine ε sur le plan P de direction la droite (D)

3.- Dans l'espace affine ε muni du repère$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan P d'équation : $2x-4y+3z-1=0$ et la droite affine (D) de repère $(A,\vec{u})$ avec A (1, 2, 1) ; $\vec{u}$(-1, 2, 5) définir analytiquement :

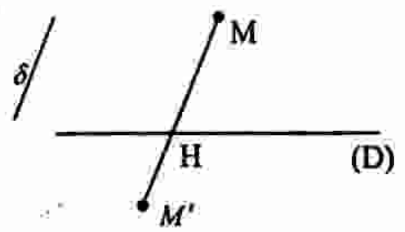
a) La symétrie par rapport à P de direction D
b) La symétrie par rapport à D de direction P
c) La projection sur P parallèlement à D

La projection sur D parallèlement à P

****

Affinité du plan

.- Affinité d'axe (D) de direction Δ et de rapport k



Soit (D) une droite δ une direction de droite distincte de celle de (D et k un nombre réel, on appelle affinité d'axe (D), de direction δ et de rapport k l'application f qui à tout point M du plan associe le point M' te l que : $\overrightarrow{HM'}=k\overrightarrow{HM}$,
où H est le projeté de M sur (D suivant la direction δ

Idées et stratégies

❖Toute affinité est une application affine
❖Pour montrer qu'une application f est une affinité, il suffit de prouver que pour tout point M d'une image M' par f, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant et f admet au moins un point invariant.

Exercice

Le plan affine P est rapporté au repère$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère l'application affine f de P dans lui-même qui, à tout point M(x, y) associe le point $M'(x,y)$ défini par :

$$x'=\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y-\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y'=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant
b) Etudier l'ensemble des points invariant par f
c) Reconnaître la nature de l'application

****

Chapitre III

Espaces vectoriels euclidiens

.- Forme bilinéaire symétrique

Soit E un espace vectoriel et f une application de E. L'application f est une forme bilinéaire symétrique sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall(\vec{u},\vec{v})\in E^2 \quad : f(\vec{u},\vec{v})=f(\vec{v},\vec{u})$
- $\forall\lambda\in\Re,\forall(\vec{u},\vec{v})\in E^2 \quad : f(\lambda\vec{u},\vec{v})=\lambda f(\vec{u},\vec{v})$
- $\forall(\vec{u},\vec{u}',\vec{v})\in E^3$
$: f(\vec{u}+\vec{u}',\vec{v})=f(\vec{u},\vec{v})+f(\vec{u}',\vec{v})$

.- Produit scalaire

On appelle produit scalaire définit sur E toute forme bilinéaire f telle que

$\forall\vec{u}\in E\setminus\{\vec{o}\}: f(\vec{u},\vec{u})>0$ et $f(\vec{o},\vec{o})=0$

- Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note $\vec{u}.\vec{v}$
- Dans l'espace vectoriel euclidien de dimension 2 : $\vec{u}(x,y);\vec{v}(x',y'):\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$
- Dans l'espace vectoriel euclidien de dimension 3 : $\vec{u}(x,y,z);\vec{v}(x',y',z')$: $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un espace vectoriel réel euclidien sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul
- Le vecteur nul est orthogonaux à tout vecteur de E.

.- Carré scalaire d'un vecteur

Le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$ est le nombre $\vec{u}.\vec{u}$ noté $\vec{u}^2$

Si $\vec{u}(x,y) : \vec{u}^2 = x^2 + y^2$; Si $\vec{u}(x,y,z) : \vec{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2$

.- Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est le réel positif défini par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

Si $\vec{u}(x,y) : \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

Si $\vec{u}(x,y,z) : \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Propriétés

- $\forall \vec{u} \in E : \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} \in E : \|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$

Remarques

- Un vecteur est dit normé ou unitaire si sa norme est égale à 1
- Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, alors $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est unitaire.
- *.- Base orthonormée*

○ Une base d'un espace vectoriel réel est dite orthonormée si les vecteurs de la base sont tous normés et deux à deux orthogonaux

Idées et stratégies

- Deux sous espaces vectoriels sont dits orthogonaux si tout vecteur de l'un est orthogonal à l'autre.
- Une droite vectorielle $\vec{D}$ et un plan vectoriel $\vec{P}$ sont orthogonaux. Si un vecteur non nul de $\vec{D}$ est orthogonal aux deux vecteur de $\vec{P}$
- Si une droite est orthogonale à un plan alors le vecteur normal du plan est le vecteur directeur de la droite.

.- Projection ~~orthogonale sur un plan vectoriel~~

La projection orthogonale f d'un espace vectoriel euclidien E sur un plan vectoriel P est la projection sur le plan vectoriel $\vec{P}$ ~~parallèlement~~ à la droite $\vec{D}$ orthogonale au plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E de transformé $\vec{u}'$ par f

on a : $\begin{cases} \vec{u} - \vec{u}' = \alpha \vec{n} \in (\vec{D}) \\ \vec{u}' \in \vec{P} \end{cases}$ $\vec{n}$ est le vecteur normal à P

Exercice

L'espace vectoriel euclidien E étant rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, vérifier que l'expression analytique de la projection orthogonale f sur le plan vectoriel $\vec{P}$ d'équation : $x - 2y + 2z = 0$ est telle que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{9}(8x + 2y - 2z) \\ y' = \frac{1}{9}(2x + 5y + 4z) \\ z' = \frac{1}{9}(-2x + 4y + 5z) \end{cases}$

Endomorphismes orthogonaux ou isométrie vectorielle d'un espace vectoriel Euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien et f de E un endomorphisme, f est une isométrie vectorielle de E si et seulement si f conserve la norme de tout vecteur de E c'est-à-dire : $\forall \vec{u} \in : \|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$

Propriétés

- f est une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien E si et seulement si f conserve le produit scalaire de deux vecteurs quelconques de E ; c'est-à-dire $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E$, $f(\vec{u}) f(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$
- f est une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien E si et seulement si f transforme une base orthonormée quelconque $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en une autre base orthonormée $(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$
- La composée deux isométrie vectorielles de E est une isométrie vectorielle de E

Isométries vectorielles d'un plan vectoriel euclidien.

Soit f un endomorphisme d'un plan vectoriel E_2 transformant une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ en une base orthonormée $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$. f est ~~une~~ base isométrie vectorielle de E_2 si et seulement si la matrice dans une base orthonormée de E est l'un des types

(1) $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ou (2) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$

Isométrie vectorielle positive ou rotation

Une application f d'un plan vectoriel euclidien est une isométrie positive ou une rotation vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée quelconque est de la forme : $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$

- Le déterminant d'une rotation vectorielle est égal à 1
- L'application identique du plan et l'homothétie de rapport -1 sont des rotations vectorielles

Isométrie vectorielle négative ou symétrie vectorielle orthogonale

Une application f d'un plan vectoriel euclidien est une isométrie vectorielle négative ou symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\vec{D}$ si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est de la forme :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \text{ avec } a^2+b^2=1$$

- Le déterminant d'une symétrie vectorielle orthogonale est égal à -1
- L'ensemble des vecteurs invariants par une symétrie vectorielle orthogonale est une droite vectorielle : axe de la symétrie
- La composée de deux symétrie vectorielles orthogonales est une rotation vectorielle (ou l'application identique)

  La composée d'une rotation vectorielle et d'une symétrie vectorielle orthogonale est une symétrie

Idées et stratégies

❖ Dans un problème, pour montrer qu'une application f est une isométrie vectorielle, il suffit de prouver l'une des propriétés suivantes :

❖ Que l'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée plus le déterminant de la matrice associé à f est égal à ±1

❖ Que f conserve le produit scalaire ou la norme, plus le déterminant de la matrice associé à f est égal à ±1

❖ Idées et stratégies

❖ Dans un problème, pour montrer qu'une application f est une isométrie vectorielle différente d'une rotation vectorielle ou tout simplement une symétrie vectorielle orthogonale, il suffit de prouver l'une des propriétés suivantes :

❖ Que l'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée plus le déterminant de la matrice associée à f est égal à -1

❖ Que f conserve le produit scalaire ou le norme plus le déterminant de la matrice associe à f est égal à -1

Exercices

1.- Dans un plan vectoriel muni, d'une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$, on considère l'application linéaire f dont la matrice dans cette base est

$$M=\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

a) Démontrer que f est transforme $(\vec{i},\vec{j})$ en une autre base orthonormée

b) Démontrer analytiquement que f conserve le produit scalaire

c) Démontrer que f conserve la norme. Conclure

Rotation et trigonométrie

Soit r une rotation vectorielle du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ de matrice $M=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ dans toute base orthonormée de $\vec{P}$

- Le réel a se nomme cosinus de la rotation r et s'écrit $a=\cos r$
- Le réel b se nomme sinus de la rotation r et s'écrit $b=\sin r$
- La matrice de r dans toute base orthonormée de P s'écrit alors $M=\begin{bmatrix} \cos r & -\sin r \\ \sin r & \cos r \end{bmatrix}$
- Si on pose r $=\alpha$ $M=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ où α est l'angle de rotation

Idées et stratégies

❖ Dans un problème, pour montrer qu'une application f est une isométrie vectorielle différente d'une symétrie vectorielle orthogonale ou tout simplement une rotation vectorielle, il suffit de prouver l'une des propriétés suivantes :

❖ Que l'image d'une orthonormée est une base orthonormée plus le déterminant de la matrice associée à f est égal à 1

❖ Que f conserve le produit scalaire ou la norme plus le déterminant de la matrice associée à f est égal à 1.

Exercices

1.- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$.

a) Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires.

b) Déterminer la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, de la rotation vectorielle φ transformant $\vec{u}$ en $\vec{v}$.

Idées et Stratégies

Si $(\vec{D}) = ax + by = 0$ est la droite vectorielle invariante par une symétrie vectorielle orthogonale S alors la droite vectorielle orthogonale à $(\vec{D})$ d'équation $bx - ay = 0$ est globalement invariante par S.

Idées et Stratégies

Soit r une rotation vectorielle et $S_{\vec{u}}$ une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite engendrée par $\vec{u}$. Pour trouver la symétrie orthogonale f telle que $foS_{\vec{u}} = r$ on procède comme suit:

$$(foS_{\vec{u}})oS_{\vec{u}^{-1}} = roS_{\vec{u}^{-1}} \text{ or } S_{\vec{u}^{-1}} = S_{\vec{u}} \ ;$$

$$\text{et } S_{\vec{u}} \circ S_{\vec{u}^{-1}} = e, \text{ donc } f = r \circ S_{\vec{u}}$$

2.- Dans le plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application linéaire f de $\vec{P}$ dans lui-même défini par :

$$f(\vec{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \text{ et } f(\vec{j}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}.$$

a) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. En déduire que f est une rotation vectorielle

b) Soit $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ un vecteur de $\vec{P}$ et $S_{\vec{u}}$ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$. Vérifier que la matrice de S dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est telle que $M(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2) Soit g la symétrie vectorielle orthogonale telle que $goS(\vec{u}) = f$.

a) Démontrer que g est composée d'une rotation vectorielle et d'une symétrie vectorielle orthogonale.

b) Déterminer la matrice de g dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. En déduire la base de la symétrie vectorielle orthogonale g.

3.- Dans un plan vectorielle euclidien rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs : $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \sqrt{2}\vec{i} + \lambda\vec{j}$ où λ est un réel strictement positif

1) Comment faut-il choisir λ pour qu'il existe une rotation vectoriel R telle que $R(\vec{u}) = \vec{v}$?

2) Déterminer alors la matrice de R dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et la mesure de l'angle de la rotation.

Soit $\vec{W} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. Montrer qu'il existe une isométrie vectorielle négative S, et une seule, telle que $\vec{W} = (SoR)\vec{u}$. Déterminer la matrice de S dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

<u>Produit Vectoriel</u>

Soit E un espace vectoriel rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ directe et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de vecteurs de E. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est défini par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

<u>Remarque</u>

La notation à l'aide des déterminants permet une mémorisation plus facile des résultats

$\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right)$

Idées et Stratégies

Pour montrer qu'une base orthonormée $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe, il suffit de prouver que $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$
Dans l'espace, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants si $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{o}$

Exercices

1.- Soit $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe d'un espace vectoriel E. Vérifier que :

a) $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k};\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i};\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$

b) $\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k};\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i};\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$

2.- L'espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 étant rapporté à la base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs :

$$\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)\ ;\ \vec{v}\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

1) Montrer que ces deux vecteurs sont unitaires et orthogonaux.
2) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit une base orthonormée directe.

3.- Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe, on considère les vecteurs $\vec{u}(1,-1,1)$; $\vec{v}(2,3,-1)$; $\vec{w}(1,2,3)$.

a) Calculer le produit vectoriel de ces vecteurs deux à deux

Comparer les réels $\vec{u}(\vec{v}\wedge\vec{w})$; $\vec{v}(\vec{w}\wedge\vec{u})$; $\vec{w}(\vec{u}\wedge\vec{v})$.

Chapitre IV

Espace affine euclidien

Un espace affine est dite euclidien ou métrique si l'espace vectoriel auquel il est associé est un espace vectoriel euclidien.

Distance euclidien

C'est l'application de ε x ε dans r₊ qui associe à tout bipoint (A, B) de ε x ε le réel $\|\overrightarrow{AB}\|$

$$d:\varepsilon\times\varepsilon\to r_+\qquad (A,B)\to d(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|$$

Isométrie du plan affine euclidien

Une application f d'un plan affine euclidien P est une isométrie affine si et seulement si pour tout bipoint (M_1, M_2) de transformé (M_1', M_2') par f on a :

$$\overline{M_1M_2}^2=\overline{M_1'M_2'}^2\Rightarrow M_1M_2=M_1'M_2'$$

Déplacements plans

Toute isométrie du plan affine euclidien pour laquelle la transformation orthogonale associée est une rotation vectorielle de l'espace vectoriel euclidien associé

Idées et stratégies

Toute application affine dont l'endomorphisme associé est une rotation vectorielle est une isométrie affine et toute isométrie affine admet un point fixe comme point invariant est une rotation affine

Antidéplacement plan

Toute isométrie du plan affine pour laquelle la transformation orthogonale associée est une symétrie vectorielle orthogonale de l'espace vectoriel euclidien

Idées et stratégies

Toute application affine dont l'endomorphisme associé est une symétrie vectorielle orthogonale est une isométrie affine et toute isométrie affine admettant une droite affine comme ensemble de points invariants est une symétrie orthogonale par rapport à cette droite affine

Remarques

- Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés
- Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé

Composée d'une rotation et d'une translation

Soit r une rotation d'angle α non nul et t une translation, tor est une rotation d'angle α

Composée de rotations

- Soit r et r' deux rotations d'angles respectifs α et α'
- Si $\hat{\alpha}+\alpha'\neq\hat{0}$, alors ror' est une rotation d'angle α
- Si $\hat{\alpha}+\alpha'=\hat{0}$, alors ror' est une rotation translation

Composition de déplacements et antidéplacements

- ❖ La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement
- ❖ La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement

Remarques

Pour montrer qu'une application f est une rotation affine ou un déplacement il suffit de prouver que f est une isométrie affine ayant un seul point fixe qui est le centre de rotation ou encore il suffit de prouver que l'endomorphisme associé à f est une rotation vectorielle différente de la rotation identique et que f admet un point fixe comme point invariant qui est le centre de la rotation.

Similitudes planes directes et indirectes

Soit f une application d'un plan affine euclidien P dans lui-même. On appelle similitude de rapport $k(k>0)$, l'application f de P dans P qui a tout bipoint (M, N) associe le bipoint (M', N') tel que M', N' = k M N

Définition analytique

Une application affine d'un plan affine euclidien P de dimension 2 dans lui-même est une similitude si et seulement si, elle est définie par des relations du type :

(1) $\begin{cases} x' = ax - by + x_0 \\ y' = bx + ay + y_0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = bx - ay + y_0 \end{cases}$

La première est similitude de plane directe et la seconde est une similitude de plane indirecte

Définition de la similitude par une relation du type $Z' = AZ + B$

Soit f une similitude plane directe définie par : $\begin{cases} x' = ax - by + x_0 & (1) \\ y' = by + ay + y_0 & (2) \end{cases}$

En multipliant (2) par i et en additionnant (1) et (2) on obtient :

$x' + iy' = (a + bi)(x + iy) + (x_0 + iy_0)$

Donc $Z' = AZ + B$

La relation $Z' = AZ + B$ est une similitude plane directe caractérisée par son centre l'ensemble des points invariants ; son rapport K tel que K = |A| et son angle θ qui est un argument de A

Définition de la similitude par une relation du type $Z' = A\overline{Z} + B$

Soit f une similitude plane ou directe définie par : $\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = bx - ay + y_0 \end{cases}$

En multipliant (2) par i, en additionnant (1) et (2) et en considérant que $i^2 = -1$ ou $-i^2 = 1$ on obtient : $Z' = A\overline{Z} + B$ avec $\overline{Z} = x - iy$; $Z' = x' + iy'$

La relation $Z' = A\overline{Z} + B$ traduit une similitude plane indirecte ou inverse caractérisée par :

- ❖ Son centre : un point d'affixe $Z_0 = \dfrac{A\overline{B} + B}{1 - A\overline{A}}$
- ❖ Son rapport k = | A |
- ❖ Sa mesure un argument de A.

Remarques

- ➢ Une rotation d'angle α est une similitude directe de rapport 1 et d'angle α.
- ➢ Une homothétie de rapport k $(k > 0)$ est une similitude directe de rapport k et d'angle nul.
- ➢ Une homothétie de rapport k $(k < 0)$ est une similitude de rapport – k et d'angle π.
- ➢ Une translation peut être considérée comme une similitude directe de rapport 1 et d'angle nul, dans ce cas le centre n'est pas défini.
- ➢ Si f est une similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle α alors f^{-1} est une similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.

Idées et stratégies

➢ Pour déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe S d'écriture complexe

o $Z' = aZ + b$ $(a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\})$, on peut procède de la façon suivante :

- ➢ Résoudre l'équation $Z = aZ + b$; on obtient le centre de S.
- ➢ Calculer le module de a ; on obtient le rapport de S.
- ➢ Déterminer un argument de a ; on obtient l'angle de S.

Exercices

1.- Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ on considère l'application f de P dans P définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x + y + 3 - \sqrt{3}\right) \\ y' = \frac{1}{2}\left(-x + \sqrt{3}y - 1 + \sqrt{3}\right) \end{cases}$$

a) Quels sont les points invariants par f

b) Montrer que f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle

2.- Dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$; soit f l'application qui à tout point M(x, y) associe le point $M'(x',y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 \end{cases}$$

Montrer que f est une rotation, trouver son centre

> **Idées et stratégies**
>
> Pour montrer qu'une application f est une symétrie orthogonale d'axe une droite affine ou un antidéplacement il suffit de prouver que f est une isométrie affine admettant une droite affine comme ensemble de points invariant ou encore il suffit de prouver l'endomorphisme associé à f est une symétrie vectorielle orthogonale.

3.- Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'application affine s définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$$

a) Montrer que S est une isométrie affine

b) Montrer qu'il y a une droite invariante par S

c) Caractériser géométriquement l'application S

4.- Dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, soit f l'application qui à tout point M(x, y) associe le point $M'(x',y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}y - \sqrt{2} \\ y' = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}y + 1 \end{cases}$$

a) Montrer que la transformation f est une isométrie affine

b) Trouver la nature de cette transformation en recherchant les points invariants

5.- Soit f une application du plan dans lui-même d'expression analytique
$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

a) Déterminer l'écriture complexe de f

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

c) Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1}.

6.- Dans le plan affine euclidien P, on considère l'application f qui à tout point M (x, y) associe le point $M'(x',y')$ tel que :

$x' = 2x - y + 3$ et $y' = x + 2y + 1$.

Dans ce plan P les points M et M' pourront être définis respectivement par leurs affixes

$Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$

a) Calculer Z' en fonction de Z et donner les éléments caractérisent l'application f.

b) Quel est l'ensemble de point défini dans le plan affine par : $|Z-1| = 4$? Préciser son image par l'application f.

> **Idées et stratégies**
>
> S étant la symétrie orthogonale par rapport à la droite (D), pour tout point M (x, y) du plan de transforme M' (x', y') par S on a :
>
> $$S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}\,\overrightarrow{MM'} = 0 \quad (1) \\ I \text{ milieu de } [MM'] \text{ appartient} \\ \text{à la droite } (D) \text{ de direction } \vec{u} \end{cases}$$

Complexe

Chapitre I

Nombres Complexes

.- *Activités préparatoires*

"Dieu fit le nombre entier, le reste est l'œuvre de l'homme." Cette phrase attribuée au mathématicien Allemand Kronecker (1823-1897), met en valeur l'idée qu'il est possible de construire, à partir des entiers naturels, de nouveaux ensembles de nombres.

Les ensembles de nombres N,Z,D,Q,R *sont inclus l'un dans l'autre :* $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$ *; construis de manière progressive, leur création visait à combler l'insuffisance des uns et des autres. Même l'ensemble R : le corps des nombres réels a été jugé insuffisant, limité et faible.*

Essayons donc de relever, à partir de la résolution de certaines équations, le degré de faiblesse de l'ensemble R.

Exemple

Soit à résoudre dans R, les équations suivantes :

a) $x^2 + 16 = 0$ b) $x^2 + 2x + 5 = 0$

Solution

a) $x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$

Absurde dans R, car on ne peut pas extraire dans R la racine carrée d'un nombre négatif

b) $x^2 + 2x + 5 = 0$

Évaluons Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$;

$\Delta = 2^2 - 4(1)(5) \Rightarrow \Delta = 4 - 20 \Rightarrow \Delta = -16 < 0$: pas de racines réelles

L'impossibilité de déterminer sur R les racines carrées des nombres négatifs met en évidence l'insuffisance du corps des nombres réels et prouve la nécessité de l'élaboration d'un nouvel ensemble de nombres.

En réponse à cette préoccupation d'importance, Bombelli, mathématicien du XVI^e siècle crée de nouveaux nombres : les nombres complexes. Ainsi fut créé le nombre i vérifiant l'égalité $i^2 = -1$. En effet, le nombre i : nombre des situations impossibles mit plusieurs siècles avant de s'imposer à tous. Ce nombre fantôme ne pouvant être réel disons qu'il est imaginaire.

Multiplions le fantôme par un réel b quelconque et ajoutons un réel a : Notons $a + ib$ le résultat : il vient de naître un nombre complexe

Présentation de l'ensemble C : Corps de nombres complexes

- Tout sous-ensemble C de matrice carrée d'ordre 2 défini par :
- $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in R \right\}$
- (C, +, x) est un corps commutatif
- Le sous-ensemble :

C_1 *de* $C : C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} / a \in R \right\}$

- est un sous-corps de C
- $U : (C_1, +, x) \rightarrow (R, +, x)$
- La bijection : $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$,

définit un isomorphisme de corps. En effet :

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$; $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

- $C_1 = R$ donc $R \subset C$
- C : Ensemble des membres complexes
- *On désigne généralement un nombre complexe par la lettre Z.*

Forme algébrique ou cartésien d'un nombre complexe.

Soit $Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ un nombre complexe, en effet : $Z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

Donc, $Z = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a été déjà identifiée à l'élément 1 de R

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à c et ne saurait identifier à aucun réel. Elle correspond conventionnellement au nombre *i* des situations impossibles. : $Z = a(1) + b(i)$ ce qui donne $Z = a + ib$.

La forme $Z = a + ib$ est appelée forme algébrique ou cartésienne du nombre complexe z.

NB.-

➢ Le réel a s'appelle partie réelle de z et se note Ré(Z)

➢ Le réel b s'appelle partie imaginaire de Z et se note Im(Z)

Z=Ré(Z) + iIm(Z)

Ré(Z) = 0 → $Z = ib$ est dit imaginaire

Im(Z) = 0 → $Z = a$ est dit réel

Remarque

- Si Ré(Z) = Im(Z) = 0 alors Z est le nombre complexe nul :
  $i^2 = -1$ $\quad i^3 = -i$ $\quad i^4 = 1$
- plus généralement; $\forall n \in \mathbb{N}$
  $i^{4n} = 1$; $\quad i^{4n+1} = i$; $\quad i^{4n+2} = -1$;
  $i^{4n+3} = -i$

Conjugué d'un nombre complexe

Le conjugué d'un nombre complexe Z est le nombre complexe noté $\overline{Z}$ tel que :

$$Ré(\overline{Z}) = Ré(Z)$$ et

$$\operatorname{Im}(\overline{Z}) = -\operatorname{Im}(Z)$$

Si $Z = a + ib$ alors $\overline{Z} = a - ib$

- *3 + 2i* a pour conjugué *3 – 2i*;
  -2 -3i a pour conjugué *-2 + 3i*
- *3 – 2i* a pour conjugué *3 + 2i*;
  2 a pour conjugué *2*
- *-5 + 2i* a pour conjugué *-5 – 2i*;
  3i a pour conjugué *- 3i*

Opérations dans C

.- Somme et produit de deux nombres complexes

Soient $Z_1 = a + ib$ et $Z_2 = c + id$ deux nombres complexes :

$Z_1 + Z_2 = (a + ib) + (c + id)$ et

$Z_1 Z_2 = (a + ib)(c + id)$

En appliquant les mêmes règles de calcul que dans R et en tenant compte que $i^2 = -1$ on obtient :

$$Z_1 + Z_2 = (a + c) + i(b + d) \text{ et}$$
$$Z_1 . Z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

On en déduit (en posant $Z_2 = -1$) :

$-Z_1 = -a - ib$; puis $Z_1 - Z_2 = (a - c) + i(b - d)$

Inverse d'un nombre complexe

Tout nombre complexe non nul $Z = a + ib$ admet une inverse Z' c'est-à-dire un nombre complexe Z' vérifiant $ZZ' = 1$ où Z' est noté Z^{-1} ou $\dfrac{1}{Z}$

$$Z = a + ib$$
$$Z^{-1} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Idées et Stratégies

Pour tout nombre complexe Z

$$Z + \overline{Z} = 2Ré(Z) \qquad Z - \overline{Z} = 2i\operatorname{Im}(Z)$$
$$Ré(Z) = \frac{Z + \overline{Z}}{2} \qquad \operatorname{Im}(Z) = \frac{Z - \overline{Z}}{2i}$$
$$Z\overline{Z} = [Ré(Z)]^2 + [\operatorname{Im}(Z)]^2$$

- Z est réel si et seulement si $Z = \overline{Z}$
- Z est imaginaire pur si et seulement si $Z = -\overline{Z}$

Pour tout nombres complexes $Z_1; Z_2; ...; Z_n$ on a :

$$\overline{Z_1 + Z_2 + ... + Z_n} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2} + ... + \overline{Z_n}$$

et $\overline{Z_1 \times Z_2 \times ... \times Z_n} = \overline{Z_1} \times \overline{Z_2} \times ... \times \overline{Z_n}$

Exercices

Choisir la bonne réponse dans les exercices 1 à 11

1- Si la représentation matricielle d'un nombre complexe est $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ alors la forme algébrique de ce nombre complexe est :

a) $2 + 3i$ b) $-3 + 2i$
c) $2 - 3i$ d) $3 + 2i$

2- Si la forme algébrique d'un nombre complexe Z est $-\sqrt{2} - i\sqrt{6}$, alors sa représentation matricielle est :

a) $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

3.- Si $Z=\frac{4-5i}{3+i}$ alors :

a) $\overline{Z}=\frac{4}{3-i}$ b) $\overline{Z}=\frac{7+19i}{10}$ c) $\overline{Z}=-\frac{7+19i}{10}$

d) $\overline{Z}=7+10i$ d) Aucune réponse

4.- Si $Z=\frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$ alors :

a) $\overline{Z}=\frac{100-i\sqrt{3}}{97}$ b) $\overline{Z}=\frac{97+97i\sqrt{3}}{97}$

c) $\overline{Z}=-1-i\sqrt{3}$ d) $\overline{Z}=-1+i\sqrt{3}$

d) Aucune réponse

5.- La forme algébrique du nombre complexe :
Z = (5 + 4i)(3 + 7i)(2 – 3i) est:

a) $115+i133$ b) $115-133i$

c) $-13+47i$ d) $-15+133i$

e) Aucune réponse

6.- La forme algébrique du nombre complexe $Z=\left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^2$ est :

a) $-1+i\sqrt{3}$ b) $1-i\sqrt{3}$ c) $-2\left(1+i\sqrt{3}\right)$

d) $2\left(1+i\sqrt{3}\right)$ e) Aucune réponse

7.- Si Z = 2 + 3i; alors $\overline{\left(\frac{1}{Z}\right)}$ est :

a) $\frac{2-3i}{13}$ b) $\frac{2+3i}{13}$ c) $\frac{2-3i}{5}$

d) $\frac{2+3i}{5}$ e) $\frac{-2+3i}{13}$ f) Aucune réponse

8- Si $Ré(Z)=-2$ et $\operatorname{Im}(Z)=3$, alors $(-2-3i)Z$ est égal à :

a) $2+2i$ b) $5+5i$

c) $5i$ d) 13

9- La forme algébrique du nombre complexe $Z=\frac{5i^{492}+3i^{893}\sqrt{3}}{i^{2004}+2i^{807}\sqrt{3}}$ est :

a) $1-i\sqrt{3}$ b) $1+i\sqrt{3}$

c) $-1-i\sqrt{3}$ d) $-1+i\sqrt{3}$

10- Le nombre complexe Z tel que : $3Z\overline{Z}+4\left(Z-\overline{Z}\right)=27+8i$ est :

a) $2\sqrt{2-i}$ ou $2\sqrt{2}+i$

b) $2\sqrt{2}+i$ ou $2\sqrt{2}-i$

c) $2\sqrt{2}+i$ ou $-2\sqrt{2}-i$

d) $2\sqrt{2}+i$ ou $-2\sqrt{2}+i$

11- Le nombre complexe $\frac{(i-1)^5}{(i+1)^4}+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$ est égal à :

a) 1 b) i

c) 2 d) -1+i

12.- Démontrer que pour tout nombre Z : $\overline{\overline{Z}}=Z$

13- Soients $Z_1=3+i$ et $Z_2=2-i$ deux nombres complexes. Calculer :

a) $\overline{Z_1+Z_2}$ b) $\overline{Z_1}+\overline{Z_2}$ c) $\overline{Z_1.Z_2}$ d) $\overline{Z_1}.\overline{Z_2}$

e) $\overline{\left(\frac{1}{Z_1}\right)}$ f) $\frac{1}{\overline{Z_1}}$ g) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$ h) $\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$

Quelles égalités pouvez-vous écrire?

14.- Pour tout nombre complexe $Z=a+ib$, démontrer que :

a) $Z+\overline{Z}=2a$; $Z-\overline{Z}=2ib$; $Z\overline{Z}=a^2+b^2$

$Z=\overline{Z} \Leftrightarrow Im(Z)=0$; $Z=-\overline{Z} \Leftrightarrow Ré(Z)=0$

15.- Effectuer : $Z=\frac{(1+2i)(1-2i)-(7-5i)-(7+5i)}{(2+3i)(2-3i)}$

16.- Calculer :

a) $(1-2i)^2-(1+2i)^2$ b) $(-1-3i)^2+(-1+3i)^2$

17.- Mettre sous la forme « a + ib » les nombres complexes suivants :

a) $\frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1+i}$ b) $\frac{\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{6}(1+i)}$ c) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

18.- Déterminer les parties réelles et imaginaires de $\frac{1}{z}$ avec

a) $Z=i$ b) Z = 2 + 3i c) Z = -2 –i

19- Sachant que Ré(Z) = -5 et Im(Z) = -3; déterminer la forme algébrique de :

a) 1 + Z b) iZ c) $\overline{Z}$ d) (2 + i)Z

20.- On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Calculer : $\overline{j}$; j^2; j^3 ; $1 + j + j^2$

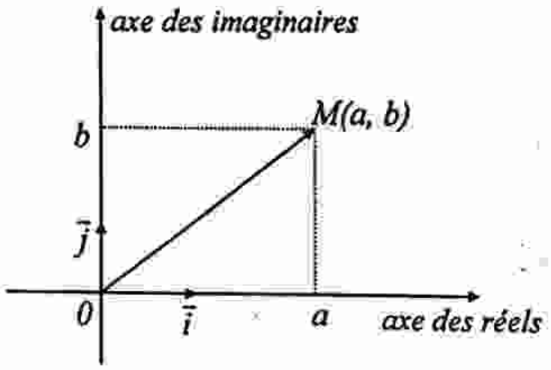
21.- On considère le polynôme complexe défini par : $f(Z) = Z^2 - (3+4i)Z - 1 + 5i$

a) Déterminer les expressions $f(Z_1)$ si $Z_1 = 2 + 3i$ puis $\overline{f(Z_1)}$ et $f(\overline{Z_1})$

Déterminer les expressions $\overline{f(Z)}$ et $f(\overline{Z})$. Ces polynômes en $\overline{Z}$ sont-ils identiques? Pourquoi?

****

Plan complexe



Le plan complexe euclidien de repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé plan complexe. Au nombre complexe $Z = a + ib$ est associé le point M(a, b) : le point M est l'image ponctuelle de $Z = a + ib$ et Z est l'affixe de M; on écrit donc $Z_M = a + ib$. Le nombre complexe $Z = a + ib$ est alors géométriquement représenté.

Idées et stratégies

✓ Un nombre complexe Z est réel si et seulement si $Im(Z) = 0$ ou $Z = \overline{Z}$

✓ Un nombre complexe Z est imaginaire si et seulement si $Ré(Z) = 0$ ou $Z = -\overline{Z}$

✓ Pour déterminer l'ensemble des points, on doit :

✓ Savoir traduire une donnée de l'énonce (par exemple : Z est réel; Z est imaginaire pur)

✓ Savoir reconnaître les ensembles les plus classiques (droite par équations de la forme :

$ax + by + c = 0$; cercle par une équation :

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$;

INFO

L'équation analytique d'un cercle (C) de centre $A(a,b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ est de la **forme :**

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$* \ (x-a)^2 + (y-b)^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (a,b)$$

Exercices

Choisir la bonne réponse dans les exercices 1 à 3

1- Le centre A et le rayon R du cercle (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ est :

a) $A(3;-2)$ et $R = 3$

b) $A(2;3)$ et $R = 3$

c) $A(3;-2)$ et $R = -3$

d) $A(3;-2)$ et $R = 3$

2- Dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ tel que le nombre complexe

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4}{(x-2)^2 + (y+3)^2} + \frac{x + 3y - 8}{(x-2)^2 + (y+3)^2} i$$

soit imaginaire pur est :

a) Une droite affine d'équation $x + 3y - 8 = 0$.

b) Un cercle de centre $A(3,-2)$ et de rayon 2, privé du point de coordonnées $(2;-3)$.

c) Un cercle de centre $A(3;-2)$ et de rayon 3 privé du point de coordonnées $(2;3)$.

3- Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ tels que le nombre complexe

$Z = (x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2) + i(2x + 3y - 2)$ soit réel est :

a) Un cercle de centre $A(-1;1)$ et de rayon 2.

b) Un cercle d centre $A(1;-1)$ et de rayon 2.

c) Une droite affine d'équation $2x + 3y - 2 = 0$

4- Soit *(P)* un plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. *M(x, y)* d'affixe $Z=x+iy$. On défini un nombre complexe *G* par $G = Z\bar{Z} + 4\bar{Z} - 3i\bar{Z} + 2i$.

a) Déterminer les parties réelle et imaginaire de G.

b) Déterminer et construire dans le même repère l'ensemble *(E)* des points *M(x, y)* tels que :

b_1) *G* soit réel

b_2) *G* soit imaginaire pur.

5- Soit $Z = \dfrac{z-4-2i}{z+2+i}$ un nombre complexe, déterminer le lieu des points M d'affixe $z = x+iy$ tels que Z soit un nombre réel.

6.- Soit $Z = \dfrac{z-4}{z+1}$ avec $z \neq -1$ et $z = x+iy$ un nombre complexe; déterminer l'ensemble des points M(*x*, *y*) du plan complexe d'affixe Z tels que Z soit réel.

7.- Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on pose : $Z = \dfrac{z+1}{z-2i}$ avec $z \neq 2i$, $Z = X + iY$, $z = x+iy$

a) Déterminer X et Y en fonction de x et de y

b) Vérifier que l'ensemble des points M(*x*, *y*) du plan tels que Z soit réel est une droite d'équation $2x - y + 2 = 0$ privée du point de coordonnées (0; 2)

c) Vérifier que l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que Z soit imaginaire pur est un cercle de centre $A = \left(-\frac{1}{2};1\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point de coordonnées (0 ; 2)

d) Construire ces deux ensembles dans le même repère

8.- Pour tout nombre complexe $z \neq i$ et $z = x+iy$, on considère le nombre Z défini $Z = \dfrac{z-1-i}{iz+1}$

1) Déterminer la partie réelle et imaginaire de Z

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a) Z soit égal à $\bar{Z}$

b) Z soit imaginaire pur

3) Construire ces deux ensembles dans le même repère

9.- Soit $z = x+iy$ un nombre complexe. On pose : $Z = \dfrac{1-iz}{1+iz}$ avec $z \neq i$

a) Déterminer une condition que doivent vérifier x et y pour que Z soit réel. Quel est alors l'ensemble des points M d'affixe z?

b) Déterminer une condition que doivent satisfaire *x* et *y* pour que Z soit imaginaire pur. Quel est alors l'ensemble des points M d'affixe z?

10.- Le plan affine étant muni du repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère le nombre complexe $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$; $z \neq 1$; $z = x+iy$

1) Déterminer les parties réelles et imaginaires et Z

2) Déterminer l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que :

a) Z soit réel b) Z soit imaginaire

c) O, M et M' soient alignés, M'étant le point d'affixe Z

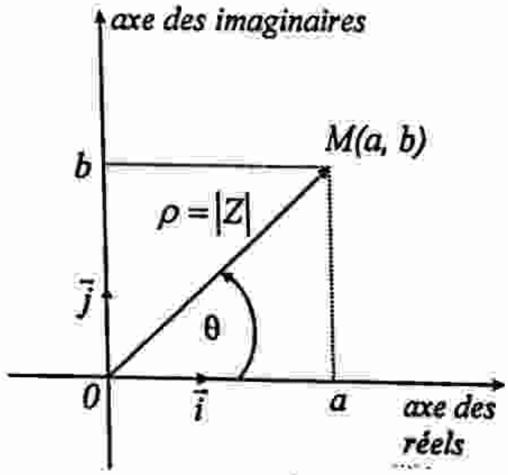
11- Soit Z un nombre complexe différent de -1 et $\bar{Z}$ son conjugué. On pose $Z' = \dfrac{2+\bar{Z}}{1+\bar{Z}}$. Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal, M(x ; y) et M'(x' ; y') désignent les points d'affixes respectives x' et y' en fonction de x et y

c) Montrer que l'ensemble (E) des points M(x ; y) de (P) tels que Z' soit imaginaire pur est un cercle privé d'un point que l'on précisera

Chapitre II

Objectif

- **Déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul**
- *Module d'un nombre complexe*



Norme algébrique du nombre $Z = a + ib$:

➢ C'est le réel positif donné par : $N(Z) = Z\overline{Z} = (a+ib)(a-ib)$; $N(Z) = a^2 + b^2$

Module d'un nombre complexe $Z = a + ib$:

C'est la racine carrée de la norme algébrique de Z; il est donné par : $|Z| = \sqrt{N(Z)} \Leftrightarrow |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

INFO

❖ Si A et B sont deux points d'un plan complexe donné d'affixes respectives Z_A et Z_B alors que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $Z_B - Z_A$ et il en résulte que $|Z_B - Z_A| = AB$

$$\left|\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}\right| = \frac{|Z_B - Z_A|}{|Z_D - Z_C|} = \frac{AB}{CD}$$

Remarque

Généralement on désigne par ρ le module d'un nombre complexe et par θ un argument :

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exercices résolus

-1-

Calculer le module du nombre complexe $Z = \frac{(2+3i)^2}{(1-i)^5}$

Solution

$$\Leftrightarrow |Z| = \left|\frac{(2+3i)^2}{(1-i)^5}\right|$$

$$\Leftrightarrow |Z| = \frac{|(2+3i)^2|}{|(1-i)^5|}$$

$$\Leftrightarrow |Z| = \frac{|2+3i|^2}{|(1-i)|^5}$$

$$\Leftrightarrow |Z| = \frac{\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)^2}{\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)^5}$$

$$\Leftrightarrow |Z| = \frac{\left(\sqrt{13}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^5}$$

$$\Leftrightarrow |Z| = \frac{13}{\left(\sqrt{2}\right)^4 . \sqrt{2}},$$

donc $|Z| = \frac{13}{4\sqrt{2}}$ ou $|Z| = \frac{13\sqrt{2}}{8}$.

2- Déterminer l'ensemble (E) des points d'affixe Z vérifie :

$|Z - 2i| = 3$.

Solution

Soit A le point d'affixe $2i$ On a : $|Z - 2i| = AM \Leftrightarrow AM = 3$.

(E) est donc un cercle de centre $A(0,3)$ et de rayon $R = 3$.

3- Déterminer l'ensemble (F) des points M dont l'affixe Z vérifie :

$|Z - 1 + 2i| = |Z - 2 + 3i|$

Solution

$|Z-1+2i|=|Z-2+3i|$

$\Leftrightarrow |Z-(1-2i)|=|Z-(2-3i)|$

soient A et B les points d'affixes respectives $Z_A=1-2i$ et $Z_B=2-3i$,

on a : $|Z-Z_A|=|Z-Z_B|$.

$\Leftrightarrow AM=BM$

Donc (F) est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(1,-2)$ et $B(2,-3)$

Choisir la bonne réponse dan les exercice 1 à 4

1.- Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M du plan d'affixe $Z=x+yi$ tels que $|Z-3+2i|=4$ est :

a) Un cercle de centre (3 ;-2) et de rayon 2
b) Un cercle de centre (3 ;-2) et de rayon 4
c) La médiatrice du segment [CD] avec C(3 ;-2) et D(2 ;4)

2.- Le plan complexe (P) étant muni d'un repère orthonormal ; soit M un point de (P) d'affixe $Z=x+yi$. L'équation dans P du cercle de centre $\Omega(-2;3)$ et de rayon R = 5 est :

a) $|Z+2-3i|=25$ b) $|Z+2-3i|=5$
c) $|Z+2-3i|=|Z+2-5i|$

3.- Le plan complexe (P) étant muni d'un repère orthonormal. L'ensemble des points M d'affixe $Z=x+yi$ de (P) tels que $|Z-3+5i|=|Z+2-i|$ est :

a) La médiatrice du segment [CD] avec C(3 ;-5) et D(-2 ;1)
b) La médiatrice du segment [CD] avec C(-3 ;5) et D(2 ;-1)
c) Un cercle de centre (-3 ; 2) et de rayon 5

4.- Le plan complexe (P) étant muni d'un repère orthonormal. Soit C(-2 ;3) et D(1 ;-5) deux points de (P). si M est un point de (P) d'affixe $Z=x+yi$. L'équation de la médiatrice de [CD] est :

a) $(x+2)^2+(y-3)^2=(x-1)^2+(y-5)^2$
b) $|Z+2-3i|=|Z-1+5i|$
c) $|Z-2+3i|=|Z+1-5i|$

5- Déterminer le lieu des points M d'affixe $Z=x+iy$ tels que : $\left|\dfrac{Z-4-2i}{Z+2+i}\right|=1$

6.- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$

a) Vérifier que l'ensemble des points d'affixe $Z=x+iy$ tels que $|Z-5+3i|=3$ est un cercle de centre A(5; -3) et de rayon R = 3
b) Vérifier que l'ensemble des points d'affixe $Z=x+iy$ tels que $|Z+1+i|=|Z-3|$ est la médiatrice du segment [CD] avec C(-1, -1) ; D(3, 0)

7.- À tout nombre complexe Z, différent de $-2-i$, on associe le nombre complexe Z tel que : $Z=\dfrac{Z-4-2i}{Z+2+i}$.

Déterminer le lieu des points M d'affixe Z tels que :

a) $|Z|=1$; $|Z|=\dfrac{1}{2}$
b) Z est un nombre réel ; Z est un nombre imaginaire pur

8- Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé. Soit $Z=x+iy$ l'affixe du point M de ce plan. Déterminer l'ensemble (E) des points du plan dans les cas suivants :

a) $|Z-1+i|=2$ b) $|Z-3+i|=\sqrt{2}$
c) $|Z-3-2i|=|Z-7+2i|$ d) $|Z-3+2i|=|Z+4-5i|$

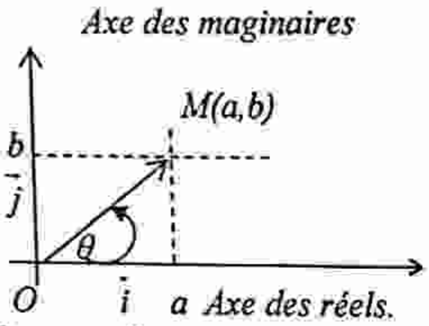
9.- Dans le plan complexe, on considère l'ensemble (C) défini par : $|Z-(1+i)|=4$ avec Z = x + iy

1) Montrer que (C) est un cercle
2) Démontrer que AM = 4 avec M 0 (C) équivaut à $(x-1)^2+(y-1)^2=16$
3) Soit (E) l'ensemble des points M du plan d'affixe Z défini par :
$x^2+y^2+x+4y-1=0$.
Ecrire (E) sous la forme de :
$(x+a)^2+(y+b)^2=k$
4) Caractériser l'ensemble des points M d'affixe Z tels que $\left|Z+\dfrac{1}{2}-2i\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Bacc 1996

Argument d'un nombre complexe.

Soient $Z = a + ib$ le nombre complexe représenté géométriquement ci-dessous



On appelle un argument du nombre complexe $Z = a + bi$ l'angle θ que fait l'axe des réels avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$

Remarques

Si a et b sont positifs, θ est tel que $tg\theta = \frac{b}{a}$

<u>Détermination d'un des arguments d'un nombre complexe Z=a+bi</u>

$Z = a + bi$.

En considérant la figure ci-dessus par théorème. $a = |Z|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{a}{|Z|}$

$b = |Z|\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{b}{|Z|}$ θ est donc tel que

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|Z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|Z|} \end{cases}$$

Tableau permettant de calculer un argument d'un nombre complexe.

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0		0

Quadrants

	1er	2ème	3ème	4ème
$\cos\theta$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\sin\theta$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
θ	α	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$-\alpha$

<u>Propriété du module et de l'argument d'un nombre complexe</u>

Pour tous nombres complexes Z et Z'

1) $|Z| = 0 \Rightarrow Z = 0$

2) $|ZZ'| = |Z|.|Z'|$ 3) $|Z| = |-Z| = |\overline{Z}|$

4) $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$

5) $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ $Z' \in \mathbb{C}^*$

Si θ et θ' sont des arguments respectifs de Z et Z' alors :

1) $\arg(-Z) = \pi + \theta$

2) $\arg(\overline{Z}) = -\theta$ 3) $\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\theta$

4) $\arg(Z.\overline{Z}) = \theta + \theta'$

5) $\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \theta - \theta'$

Exercices Résolus

Déterminer le module ℓ et un argument θ des nombres complexes suivants :

a) $Z = 4\sqrt{3} + 4i$

b) $Z = -\sqrt{3} + i$

c) $Z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$

d) $Z = 1 - i\sqrt{3}$

Solutions

a) $Z = 4\sqrt{3} + 4i$

Module de Z

$|Z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2}$

donc $|Z| = 8$

Un argument de Z est tel que :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{Z} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} \\ \sin\theta = \sin\dfrac{4}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\theta = \sin\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

D'où $\theta = \dfrac{\pi}{6} \quad (\text{mod}\, 2\pi)$

a et b étant positifs un argument θ de Z est tel que

$$tg\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow tg\theta = \frac{4}{4\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow tg\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow tg\theta = tg\frac{\pi}{6}$$

Donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}\ (\text{mod}\, 2\pi)$

b) $Z = -\sqrt{3} + i$

$\Leftrightarrow |Z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}$

$\Leftrightarrow |Z| = 2$

un argument de Z

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|Z|} \Rightarrow \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|Z|} \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\cos\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\theta = \sin\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \theta = \pi - \frac{\pi}{6}$$

soit $\theta = \dfrac{5\pi}{6}\ \text{mod}\, 2\pi$

C) $Z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |Z| = \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$

$\Leftrightarrow |Z| = 2\sqrt{2}$

Un argument θ de Z est tel que

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|Z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|Z|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\cos\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\theta = -\sin\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

$\theta = \pi + \dfrac{\pi}{6}$

soit $\theta = \dfrac{7\pi}{6}\ (\text{mod}\, 2\pi)$

d) $|Z| = 1 - i\sqrt{3}$

soit $|Z| = 2$

un argument θ de Z est tel que

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|Z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|Z|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\theta = -\sin\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \theta = -\frac{\pi}{3}\ (\text{mod}\, 2\pi)$$

Idées et Stratégies

Si θ est un argument d'un nombre complexe Z, alors $tg\theta = \dfrac{\text{Im}(Z)}{\text{Ré}(Z)}$

Exercice

Soit $Z = \dfrac{z+1}{z-2i}$; $z \neq 2i$ et $Z = x + iy$ un nombre complexe du plan

1) Déterminer la forme algébrique de Z avec $x^2 + (y-2)^2 \neq 0$ ou $(x, y) \neq (0,2)$

2) Déterminer l'ensemble (F) des points M(x, y) du plan tels que un argument de Z soit égal à $\frac{3\pi}{4}$

3) Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $|Z| = \sqrt{2}$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe de module ρ et d'argument θ on sait que

$a = \rho\cos\theta$ et $b = \rho\sin\theta$

$Z = a + bi \Rightarrow z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$

$Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

La forme $Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ s'appelle forme trigonométrique du nombre complexe $Z = a + bi$ où ρ et θ représentent respectivement le module et un argument de Z

Idées et Stratégies

Pour déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe Z = a + ib, on peut procéder comme suit :

On évalue le module de Z :

$$|Z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et on le met en facteur dans Z

- $Z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$
- $Z = \rho\left(\frac{a}{\rho} + i\frac{b}{\rho}\right)$

Ce qui donne $Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

- Si a > 0 et b > 0 $Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
- Si a < 0 et b > 0 $Z = \rho(-\cos\theta + i\sin\theta)$
- Donc $Z = \rho[\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)]$
- Si a < 0 et b < 0 $Z = \rho(-\cos\theta - i\sin\theta)$
- Donc $Z = \rho[\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)]$
- Si a > 0 et b < 0 $Z = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$
- Donc $Z = \rho[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

Idées et stratégies

Lorsqu'on élève un nombre complexe à la puissance n, on obtient un nombre complexe de module élevé à la puissance n et d'argument multiplié par la puissance n, soit : $Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe :

- $Z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

  $Z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

$Z^4 = \rho^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

- $Z^5 = \rho^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)$

  $Z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ (1)

$Z^n = [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos + i\sin\theta)^n$ (2)

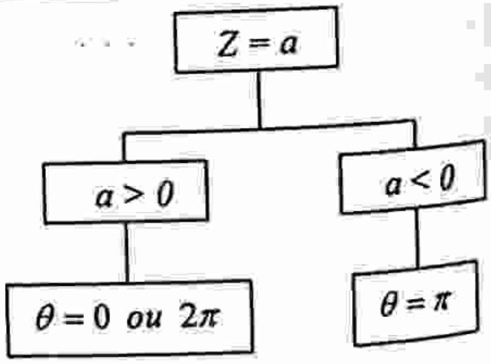
- $P = 1 \Rightarrow$ $Z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ (1)

  $Z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ (2)

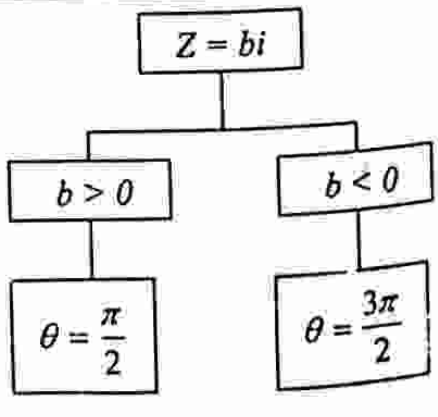
faisons (2) = (1)

- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ *, cette formule s'appelle formule de Moivre*

Organigramme permettant de déterminer un argument θ d'un nombre complexe Z réel:



Organigramme permettant de déterminer un argument θ d'un nombre complexe Z imaginaire pur :



INFO

Le plus souvent les opérations s'effectuent commodément si l'on adopte de préférence.
-La forme algébrique pour les additions et soustractions.
- La forme trigonométrique pour les multiplications, soustractions et puissances.

Exercices résolus

Déterminer la forme trigonométrique puis en déduire la forme algébrique du nombre complexe.

$$Z=\frac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{6}\right)^7}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^9}$$

Solution

Forme trigonométrique de $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{6}\right)^7$ et de $\left(1-i\sqrt{3}\right)^9$

Module de $\sqrt{2}-i\sqrt{6}$

$$\left|\sqrt{2}-i\sqrt{6}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{6}\right)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}-i\sqrt{6}=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2-i\sqrt{6}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2-i\sqrt{6}=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(2-i\sqrt{6}\right)^7=\left(2\sqrt{2}\right)^7\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)\right]$$

Module de $1-i\sqrt{3}$

$$\left|1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$$

$$1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$1-i\sqrt{3}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^9=2^9\left[\cos\left(-\frac{9\pi}{3}\right)+i\sin-\frac{9\pi}{3}\right]$$

$$\text{donc } Z=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^7\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)\right]}{2^9\left[\cos\left(-\frac{9\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{3}\right)\right]}$$

Or

$$\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^7}{2^9}=\frac{2^7\times\left(\sqrt{2}\right)^7}{2^9}=\frac{2^7\times\left(\sqrt{2}\right)^4\times\left(\sqrt{2}\right)^3}{2^9}$$

$$\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^7}{2^9}=\left(\sqrt{2}\right)^3=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow Z=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{3}+\frac{9\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{3}+\frac{9\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

<u>Choisir la bonne réponse dans les exercices 1 à 8</u>

1- Si Z est un nombre complexe de module unitaire et d'argument α, alors :

a) $\overline{Z}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ **b)** $\overline{Z}=-\frac{1}{Z}$

c) $\overline{Z}=\frac{1}{Z}$ **d)** $\frac{1}{Z}=-\cos\alpha+i\sin\alpha$

2- La forme algébrique du nombre complexe $\left(1+i\sqrt{3}\right)^5$ est :

a) $32+32i\sqrt{3}$ b) $32-32i\sqrt{3}$
c) $16-16i\sqrt{3}$ d) $16+16i\sqrt{3}$

3- La forme algébrique du nombre complexe $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$ est :

a) $-512-512i\sqrt{3}$ **b)** $498-512i$
c) $210+210i\sqrt{3}$ **d)** Aucune de ces réponses

4.- Un argument du nombre complexe $Z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5$ est :

a) $\frac{5\pi}{4}$ b) $\frac{5\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{3}$ d) aucune de ces réponse

5.- Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument du nombre complexe Z alors $\frac{4}{Z}$ a pour argument :

a) $4-\frac{\pi}{6}$ b) $-\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{24}{\pi}$

6.- Un argument du conjugué du nombre complexe $Z=\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ est :

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $-\frac{2\pi}{3}$

7.- $\left|\frac{\overline{Z}+7i.10^3}{Z-7i.10^3}\right|=...$

a)1 b) -1 c) i d) –i

8.- Si deux nombres complexes Z et Z' sont tels que $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $Z'=1+i$, alors la forme trigonométrique de $\frac{Z}{Z'}$ est :

a) $\frac{Z}{Z'}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

b) $\frac{Z}{Z'}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)$

c) $\frac{Z}{Z'}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

d) $\frac{Z}{Z'}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

9.- Relier chaque nombre complexe de gauche à sa forme trigonométrique inscrite à droite.

$-\sqrt{6}-i\sqrt{2}$	$4\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$
$\frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$	8(cos0 + isin0) $8(\cos\pi+i\sin\pi)$
-4 + 4i	$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
-4i	$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$
8	$4(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)$
$(-1-i)^4$	$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Idées et Stratégies

Un triangle inscrit dans un cercle dont le diamètre est l'un des côtés de ce triangle représente un triangle rectangle.

10- Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, unité 4 cm, on considère les points A, B d'affixes respectives a et b telles que : $a=1-i$ $b=1+i$. On note (C) le cercle de diamètre $[A,B]$.

a) Placer sur une figure les points A, B et le cercle (C).

b) Mettre les nombres complexes a et b sous forme trigonométrique.

c) Montrer que quelque soit le point M du cercle (C) différent de A et B de coordonnées (x,y), le triangle (AMB) est rectangle en M.

INFO

$|Z^n|=|Z|^n \Rightarrow |Z|=\sqrt[n]{|Z|^n}$ $n>1$

$\arg(Z^n)=n\arg(Z)$

$\Leftrightarrow \arg(Z)=\frac{\arg(Z^n)}{n}$

Idées et stratégies

Soit $A+iB$ la forme algébrique d'un nombre complexe Z et $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ sa forme trigonométrique. Dans un problème où il est question de déduire cosθ et sinθ, on procède de la façon suivante :

$$A=\rho\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{A}{\rho}$$

$$B=\rho\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{B}{\rho}$$

11- On considère le nombre complexe Z défini par : $Z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$.

a) Calculer Z^2.

b) Déterminer le module et un argument θ de Z^2 puis déduire le module et un argument de Z.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

12- On considère le nombre complexe Z définie par : $Z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.

1) a) Calculer Z^2.

b) Déterminer le module et un argument de Z^2 puis déduire le module et un argument de Z.

2) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

3) Déterminer les entiers naturels n tels que :

a) Z^n soit réel puis calculer Z^n correspondant à la plus petite valeur de n obtenu.

b) Z^n soit imaginaire pur.

13.- Soit $Z_1=1+i$ et $Z_2=1+i\sqrt{3}$ deux nombres complexes

a) Déterminer le module et un argument de Z_1 et de Z_2
b) Ecrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit Z_1Z_2
c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

14.- On donne les nombres complexes

$Z_1=\sqrt{2}(1+i)$ et $Z_2=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

a) Ecrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le quotient $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$

b) En déduire la valeur de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

15.- Soit Z_1 un nombre complexe de module ρ_1 et d'argument θ_1

1) Déterminer la forme trigonométrique
   a) De l'inverse du conjugué de l'opposé de Z_1
   b) De l'opposé du conjugué de Z_1^3
2) On considère maintenant le nombre complexe Z_2 de module ρ_2 et d'argument θ_2 vérifier que la forme trigonométrique
   a) du produit Z_1Z_2 est :
   $\rho_1\rho_2=[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$
   b) Du quotient $\frac{Z_1}{Z_2}$ est :
   $\frac{\rho_1}{\rho_2}=[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

16.- Soit $Z=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^6}$ un nombre complexe

a) Vérifier que la forme trigonométrique de Z est telle que :
$Z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{4}+i\sin\frac{15\pi}{4}\right)$
b) En déduire la forme exponentielle et la forme algébrique de Z.

17- Soit U l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

a- Comparer l'inverse et le conjugué d'un élément de U.
b- Soient Z_1 et Z_2 deux éléments de U tels que : $Z_1Z_2\neq -1$. Montrer que $Z=\frac{Z_1+Z_2}{1+Z_1Z_2}$ est un nombre réel.
c- Exprimer Z en fonction des arguments t_1 et t_2 de Z_1 et Z_2

18.- Déterminer la forme algébrique et exponentielle des nombres complexes suivants:

a) $Z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$
b) $Z=2\left(-\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$
c) $Z=-2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$
d) $Z=2\left(-\cos\frac{16\pi}{3}+i\sin\frac{16\pi}{3}\right)$
e) $Z=-2\left(\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\right)$

19.- Déterminer un argument du nombre complexe Z dans les cas suivants :

a) $Z=2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$
b) $Z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$
c) $Z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

20.- Déterminer un argument du conjugué du nombre complexe Z dans les cas suivants :

a) $Z=\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

b) $Z=2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

c) $Z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

d) $Z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

.- Soit Z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ, déterminer dans les exercices 21 à 26 la forme trigonométrique :

a) Du conjugué de Z
b) De l'opposé de Z
c) De l'inverse de Z
d) De l'opposé du conjugué de l'inverse de Z

21- $\rho=\sqrt{2}$ et $\theta=\frac{\pi}{4}$ **22-** $\rho=\sqrt{2}$ et $\theta=\frac{3\pi}{4}$

23- $\rho=8$ et $\theta=\frac{3\pi}{10}$ **24-** $\rho=2$ et $\theta=\frac{10\pi}{3}$

25- $\rho=2$ et $\theta=\frac{5\pi}{6}$ **26-** $\rho=2$ et $\theta=\frac{\pi}{3}$

27.- On considère le nombre complexe donné par $Z=\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

a) Déterminer la forme algébrique de Z.
b) Déterminer le module et un argument de Z.
c) Calculer Z^2, Z^3 et Z^{15}

28.- Soient $Z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1-i$ deux nombres complexes

a) Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes
b) En déduire le module et un argument des nombres complexes $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$ et Z^5

29.- Le nombre complexe Z s'écrit $Z=\frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$

a) Trouver la partie réelle de Z, sa partie imaginaire, son module et un de ses arguments. Construire le point M image de Z dans un repère orthonormé
b) Calculer Z^6

Ba:c 2004

30.- *Soit $z= z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ un nombre complexe.*

a) Déterminer le module et un argument de z
b) En déduire la forme trigonométrique de z
c) Déterminer z^n pour tout $n\in\mathbb{N}$
d) Calculer n pour que z^n soit
d_1) Réel
d_2) Soit imaginaire pur

31.- On considère le nombre complexe :
$U=-3+3i$

a) Déterminer la forme trigonométrique de U
b) Déterminer le nombre complexe Z tel que $UZ=6\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$
c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$

32.- On pose $Z_1=\sqrt{2}(1+i)$ $Z_2=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

a) Calculer le module et un argument $\frac{Z_1}{Z_2}$
b) Ecrire $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous forme algébrique
c) Déduisez-en des valeurs exactes de :
$\cos\frac{5\pi}{12}, \sin\frac{5\pi}{12}$
d) Quelle est la plus petite valeur strictement positive du naturel n telle que $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ soit réel?

33- On donne les nombres complexes suivants : $Z_1=\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ et $Z_2=2\sqrt{6}(1+i)$.

a) Déterminer la forme algébrique de $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$.
b) Déterminer la forme trigonométrique de Z.

En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

34- Z est un nombre complexe tel que : $Z=-3\left(\sin x\frac{\pi}{5}+i\cos x\frac{\pi}{5}\right)$. Déterminer sur $]-\pi, 0[$, un argument de Z^2

Chapitre III

Linéarisé un polynôme du type $\cos^n x$; $\text{xin}^n x$; $\cos^n x \sin^n x$

Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Exemple

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 a^0 b^3$$

donc

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

Pour trouver les coefficients dans le développement du binôme $(a+b)^n$ on peut aussi utiliser le triangle de pascal

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

Exercice d'approche :

Soit x un nombre réel quelconque et Z un nombre complexe défini par : $Z = \cos x + i \sin x$

- Prouver que : $Z\overline{Z} = 1$. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, Z^n \overline{Z}^n = 1$
- Simplifier : $Z^3 \overline{Z}^5 ; Z^5 \overline{Z}^2 ; Z^4 \overline{Z}^4$
- Exprimer cosx et sinx en fonction de Z et $\overline{Z}$.
- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$:

  $$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^n (Z+\overline{Z})^n \text{ et}$$

  $$\sin^n x = \left(\frac{1}{2i}\right)^n (Z-\overline{Z})^n$$

- Vérifier que :

  $Z^n + \overline{Z}^n = 2\cos nx$ et $Z^n - \overline{Z}^n = 2i \sin nx$
- A partir de la connaissance du développement du binôme $(a+b)^n$ et des formules établies, prouver que :

$$(Z-\overline{Z})^4 = 2\cos 4x - 8\cos 2x + 6$$

$$(Z-\overline{Z})^3 = 2i(\sin 3x - 3\sin x)$$

$$(Z+\overline{Z})^3 = 2(\cos 3x + 3cox)$$

.- Définition

Linéariser un polynôme du type $\cos^n x, \sin^n x, \cos^n x \sin^n x$ revient à le transformer en une somme de termes du type $\alpha \cos ax$ ou $\beta \cos bx$. Autrement dit c'est l'exprimer à l'aide de sinus ou de cosinus figurant au premier degré.

Pour tout nombre complexe Z de module unitaire et d'argument x on a :

$Z\overline{Z} = 1 \qquad Z^n \overline{Z}^n = 1 \qquad Z + \overline{Z} = 2\cos x$

$Z^n + \overline{Z}^n = 2\cos nx \quad \cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^n (Z+\overline{Z})^n$

$Z - \overline{Z} = 2i \sin x$

$Z^n - \overline{Z}^n = 2i \sin x \qquad \sin^n x = \left(\frac{1}{2i}\right)^n (Z-\overline{Z})^n$

Exercices

1.- Linéariser les expressions suivantes :

a) $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$

b) $g(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$

c) $f(x) = \cos^6 x - \sin^6 x$

d) $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$

Le principe de base de linéarisation tient dans les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} \cdot e^{-ix} = 1 \qquad e^{inx} \cdot e^{-inx} = 1$$

Exercice

Utiliser les formules d'Euler pour linéariser les expressions suivantes :

a) $f(x) = \sin^2 x \cos^4 x$

b) $g(x) = \cos^2 2x \cdot \sin^4 x$

c) $h(x) = \cos^2 x \sin^4 x$

Chapitre IV

Objectif

Définir et déterminer les racines carrées d'un nombre complexe non nul

.- *Définition*

On appelle racine carrée d'un nombre complexe non nul Z, tout nombre complexe m tel que $m^2 = Z$ donc, $|m|^2 = |Z|$

$m = x + yi$ est une racine du nombre complexe Z= a + bi si le couple (x, y) est solution du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \text{Re}(Z) & (1) \\ 2xy = \text{Im}(Z) & (2) \\ x^2 + y^2 = |Z| & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x + y = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \rho & (3) \end{cases} (\rho \text{ mod}\textit{ule de } Z)$$

(1) + (3) donne :

$$x = \frac{a+\rho}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{a+\rho}{2}} \quad (2)$$

donne $y = \dfrac{b}{2x}$

en effet : $m = x + yi \quad \Rightarrow \quad m = x\left(1 + \dfrac{y}{x}i\right)$

en remplaçant x et y dans m on obtient :

$$m = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\rho}{2}}\left(1 + \frac{bi}{a+\rho}\right)\right].$$

Cette formule permet de calculer les racines carrées d'un nombre complexe $Z = a + bi$ de module ρ

Remarque

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées

Exercices

Compléter pour les exercices 1 à 3

1.- Le nombre complexe U vérifiant $U^2 = 8 + 6i$ est :…

2.- Les racines carrées du nombre complexe $Z = 3 + 4i$ sont : …

3- Si $5 + 12i$ est une racine carrée d'un nombre complexe Z

Alors l'autre racine est…

Choisir la bonne réponse dans les exercices 4 à 7

4.- Le nombre complexe u vérifiant : $u^2 = -21 + 20i$ est :

a) $u = 2 - 5i$ ou $u = -2 + 5i$

b) $u = 2 - 5i$ ou $u = -2 - 5i$

c) $u = 2 + 5i$ et $u = -2 - 5i$

5.- Les deux racines du nombre complexe $z = -8 + 6i$ sont :

a) $-1 - 3i$ et $1 + 3i$ b) $-1 - 3i$ et $-1 + 3i$

c) $-1 - 5i$ et $-1 + 3i$

6.- Les deux racines carrées du nombre complexe -3-4i sont :

- $A: 2 - i$ et $2 + i$ $B: 1 - 2i$ et $1 + 2i$
- $C: 2 + i$ et $-2 - i$ $D: 2 - i$ et $-1 + 2i$

7.- Une des deux racines carrées du nombre complexe $-9 - 40i$ est :

- $A: -4 + 5i$ $B: 4 - 5i$
- $C: 5 - 4i$ $D: -5 - 4i$

8.- Déterminer les nombres complexes U vérifiant :

- $U^2 = -20 - 48i$ $U^2 = -3 - 4i$
- $U^2 = -8 + 6i$ $U^2 = 3 - 4i$
- $U^2 = 8i$ $U^2 = -9$
- $U^2 = -2i$ $U^2 = 5 + 12i$

9.- Déterminer les racines des nombres complexes Z suivants :

- $Z = 3 + 4i$ $Z = -5 + 12i$
- $Z = 15 - 8i$ $Z = 5 - 12i$
- $Z = -7 - 24i$
- $Z = 8 + 6i$ $Z = 117 - 44i$

Chapitre V

Equations dans c

Equation du second degré à coefficients réels

Soit à résoudre $aZ^2 + bZ + c = 0$, où a, b, c sont des nombres réels. On évalue Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées données par :

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Equation du second degré à coefficients complexes

$$aZ^2 + bZ + c = 0, a, b, c \in c$$

On évalue Δ. $\Delta = b^2 - 4ac$

- Dans le cas où le calcul de Δ conduit à un nombre complexe, on cherche une racine de Δ par la formule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{a+|\Delta|}{2}}\left(1 + \frac{bi}{a+|\Delta|}\right)$

et on détermine les solutions :

$$Z_0 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \; Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Choisir la bonne réponse dans les exercices 1 à 4

1.- Dans l'ensemble (C) des nombres complexe, l'ensemble S des solutions de l'équation $z^2 + 4 = 0$ est :

a) $S = \phi$ b) $S = \{-2;2\}$ c) $S = \{-2i;2i\}$

2.- Si $-3+4i$ est l'une des racines d'une équation du second degré à coefficient réels alors l'autre racine est :

a) $-3-4i$ b) $3-4i$ c) $3+4i$

3.- Dans l'ensemble c des nombres complexes l'équation $Z^2 + 9 = 0$

a) admet deux racines réelles -3 et 3
b) n'a pas de racine
c) admet deux racines imaginaires conjuguées $-3i$ et $3i$
d) admet une racine imaginaire $3i$

4.- La solution dans C^2 du système :
$\begin{cases} iZ - Z' = 2i \\ (1-i)Z + (2+i)Z' = 1+4i \end{cases}$ est : ...

a) $\{(3+i;1-i)\}$
b) $\{(8+i;-1+6i)\}$
c) $\{(8+i;5+3i)\}$

5.- Résoudre dans C x C les systèmes suivants

a) $\begin{cases} iZ - 3Z' = 2-3i \\ (1+i)Z + 2iZ' = 5-i \end{cases}$

b) $\begin{cases} (1+1)Z - 3iZ' = 3+2i \\ (3+5i)Z - (2-3i)Z' = 7-5i \end{cases}$

6.- Résoudre dans C les équations suivantes

a) $Z^2 - (-10i-5)Z - 14i - 48 = 0$
b) $Z^2 + 9 = 0$
c) $Z^2 - 5(2i-1)Z - 14i - 48 = 0$
d) $Z^2 + 2(1+i)Z - 5(1+2i) = 0$

7.- Résoudre dans C l'équation (E) :

$$-\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) - 13 = 0.$$

On posera $Z = \frac{z-3i}{2+z}$ et on résoudra l'équation $-Z^2 + 6Z - 13 = 0$

8.- On considère l'équation :

$$2Z^2 + bZ + 2 = 0 \quad (Z \in C)$$

où b désigne un nombre complexe.

a) Calculer le nombre b pour que $Z_1 = 1 + i$ soit solution de cette équation. En déduire l'autre racine Z_2
b) En utilisant la formule de Moivre, vérifier que :

$$Z_1^4 + Z_2^4 = -\frac{17}{4}$$

9.- Soit dans C, l'équation : $Z^2 - 2Z + 4 = 0$

1. Calculer ses racines Z' et Z''

2. Vérifier que $\frac{Z'}{Z''}+\frac{Z''}{Z'}$ est un nombre complexe réel.

10.- Soit $Z_1=\frac{3+i}{2-i}$ un nombre complexe

1. Ecrire Z_1 sous la forme $a + bi$
2. Montrer que Z_1 est une racine de l'équation :
   $Z^2 - 2Z + 2 = 0.$
   En déduire l'autre racine Z_2
3. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$

Bacc 2003

INFO

❖ Si A et B sont deux points d'un espace donné, alors les coordonnées d'un point C tel que A, B, C, sont alignés sont tel que :
$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}\quad(\lambda\in\Re)$

❖ OAB étant un triangle rectangle en O ; OACB sera un rectangle si $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC}$

C'est-à-dire si $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$.

11- On considère dans l'ensemble C des nombres complexes le polynôme $P(Z)=iZ^2-(3+i)Z+2-2i$.

a) Résoudre dans C, l'équation $P(Z)=0$

b) On note Z_1 et Z_2 la solution déterminer les coordonnées du point C tel que A, B, C soient alignés.

12- On considère l'application f de C dans C définit par : $f(Z)=Z^2+2Z+2$ ou Z est une variable complexe

1) a) Résoudre dans C l'équation $f(Z)=0$.

On note Z_1 et Z_2 les racines de l'équation $f(Z)=0$ avec $\text{Im}(Z_1)>\text{Im}(Z_2)$.

b) Pour tout entier naturel $n\geq 1$

. Calculer $Sn=Z_1^n+Z_2^n$

c) Trouver une relation indépendante de n entre S_n et S_{n+8}

2) On pose $f(Z)=\frac{Z+1}{Z-1}$.

a) Calculer $f(Z_1)+f(Z_2)$ et $f(Z_1)\cdot f(Z_2)$.

b) Vérifier qu'une équation du second degré admettant pour solution $f(Z_1)$ et $f(Z_2)$ est telle que $5Z^2-2Z+1=0$

13.- Soit dans c, l'équation :

$$(E): Z^2-2(\sqrt{3}+i)Z+2(3+i\sqrt{3})=0$$

On désigne les racines de (E) par Z_1 et Z_2; Z_1 étant la racine dont la partie imaginaire est négative

1) Résoudre (E)
2) Représenter dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ les points A et B d'affixe respectives Z_1 et Z_2. indiquer la nature du triangle OAB.
3) Déterminer le point C tel que OACB soit un rectangle.

14.- Soit (P) le polynôme définie sur (c) par

$P(z)=(z+2-3i)(z^2+iz+20)$

a) Résoudre dans C, l'équation $P(z) = 0$

b) Soit S la somme des racines de l'équation $P(z)= 0$

1) Trouver le module et un argument $\alpha\in]0\quad\pi[$

2) Trouver la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que S_n sont imaginaire pur

15-1) Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

a) $\Delta=-5-12i$ b) $\Delta=8+6i$
c) $\Delta=8-6i$ d) $\Delta=55+48i$

2- Résoudre dans C les équations suivantes.

a) $Z^2-(5+3i)Z+2+6i=0$
b) $Z^2-(1-3i)Z-4=0$
c) $Z^2+7+24i=0$

Equations se ramenant au second degré

Soit l'équation (E) :

$$aZ^3 + bZ^2 + cZ + d = 0$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes $(a \neq 0)$. Pour la résoudre on peut envisager deux cas :

- **Cas où l'on précise une racine Z_0**

On ramène l'équation sous la forme :

$$(Z - Z_0)(\alpha Z^2 + \beta Z + \lambda) = 0$$

où α, β, λ sont des nombres complexes à préciser

Idées et Stratégies

Si $a = 1$, l'équation se factorise ainsi :

$$(Z-Z_0)(Z^2+\alpha Z+\beta) = 0$$

- **Cas où l'on ne précise pas de racine**

On cherche une solution particulière à partir des indications fournies dans les énoncés du problème et on ramène le problème au premier cas.

<u>Factoriser un polynôme de degré supérieur ou égal à deux connaissant un zéro du polynôme.</u>

- **Tableau d'Honner**

Soit à factoriser le polynôme $f(z) = az^2 + bz + c$ sachant que Z_0 est une racine

	a	b	c
Z_0		aZ_0	$Z_0(b + aZ_0)$
	a	$b + aZ_0$	0

D'où $f(z) = (Z - Z_0)(aZ^2 + (b + aZ_0))$

Factoriser le polynôme complexe suivant $f(z) = Z^2 + (-2 - i)Z + 1 + i$ sachant que $f(1) = 0$

1	1	-2-i	1+i
		1	-1-i
	1	-1-i	0

$f(z) = (Z - 1)(Z - 1 - i)$

Soit à Factoriser le polynôme complexe suivant :

$f(z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ + d$

Sachant que Z_0 est un zéro.

a	b	c	d
	aZ_0	$Z_0(b + aZ_0)$	$Z_0[c + Z_0(b + aZ_0)]$
a	$b + aZ_0$	$c + Z_0(b + aZ_0)$	0

Posons $a = A$

$b + aZ_0 = B$

$c + Z_0(b + aZ_0) = C$

Donc $f(Z) = (Z - Z_0)(AZ^2 + BZ + C)$

Exercice

Factoriser le polynôme $f(Z) = Z^3 + 2(1 - i)Z^2 + (5 - 4i)Z - 10i$ si $f(2i) = 0$

	1	2-2i	5-4i	-10i
2i		2i	4i	10i
	1	2	5	0

Donc $f(z) = (Z - 2i)\,(Z^2 + 2Z + 5)$

soit le polynôme complexe f définie par :

$f(Z) = Z_3 - 3(1 + i)Z^2 + 8iZ + 4 - 4i.$

Déterminer les nombres complexe a et b tels que : $f(Z) = (Z - 2)(Z^2 + aZ + b)$

Idée et stratégie

Si A et B sont deux points d'un plan complexe d'affixes respectives Z_A et Z_B alors

$AB = |Z_B - Z_A|$

Un triangle ABC est triangle isocèle si et seulement si $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B} = i$ c'est-à-dire

$$\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Idées et stratégies

Une solution dont le point image est sur l'axe réel correspond à une solution réelle

Une solution dont le point image est sur l'axe imaginaire correspond à une solution imaginaire pur

Si Z_0 et Z_1 sont respectivement les solutions réelles et imaginaire pure d'une équation complexe du 3^e degré $AZ^3 + BZ^2 + CZ + D = 0$ alors on a : $(Z - Z_0)(Z - Z_1)(Z - a - bi) = 0$

Choisir la bonne réponse dans les exercices 1 à 5

1.- Z étant un nombre complexe, on pose $\forall Z \in C$; $f(z) = z^3 + (1-5i)z^2 - 2(5+i)z + 8i$;
$f(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$ pour :

a) $a = 1-3i$ et $b = 4$
b) $a = 1-3i$ et $b = -4$
c) $a = 1+3i$ et $b = -4$

2.- Z étant un nombre complexe, on pose :
$P(Z) = Z^3 - (6+9i)Z^2 + (-9+45i)Z + 54 - 54i$
. L'équation $P(Z) = 0$ admet une solution dont le point image est sur axe réel égale à :

a) 3 b) 2 c) 2 et 3
d) 2 ou 3 e) 3i

3.- Le plan complexe (P) étant muni d'un repère orthonormal. On désigne par (E) l'équation complexe :
$P(Z) = z^3 + (4-5i)z^2 + (8-20i)z - 40i = 0$; (E) admet une racine dont le point image est sur l'axe imaginaire égale à :

a) 2i b) 5i
c) 2 d) 5

4.- Soit dans C : l'ensemble des nombres complexes, l'équation :
$(E) = z^3 - (2+3i)z^2 + (5i-1)z + 2 - 2i = 0$.
Sachant que $Z_0 = 1$ est une racine de (E) ; l'ensemble solution de (E) est :

a) $S = \{1 ; 1+i ; 2i\}$ b) $S = \{3 ; 3+3i ; 6i\}$
c) $S = \{1 ; 1+i ; 3i\}$

5.- Z étant un nombre complexe, on pose : $P(Z) = z^3 + (1-5i)z^2 - 2(5+i)z + 8i$. La solution dans C de l'équation $P(Z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution dont le point image est sur axe imaginaire est :

a) $S = \{2i ; -2+2i ; 1+i\}$ b) $S = \{1 ; 1+i ; 2i\}$
c) $S = \{3 ; 3+3i ; 6i\}$

6.- Le plan complexe (P) étant muni d'un repère orthonormal, on désigne par (E) l'équation complexe : $z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz - i + 1 = 0$

1) Montrer que (E) admet une solution dont le point image A dans (P) est sur l'axe réel
2) Montrer que (E) admet une solution dont le point image B dans (P) est sur l'axe imaginaire
3) Montrer que (E) admet une solution distincte des deux précédentes dont le point image C forme avec A et B un triangle rectangle isocèle

7.- Soit l'équation (E) dans c :
$$Z^4 - 5Z^3 + 6Z^2 - 5Z + 1 = 0$$

a) Démontrer que (E) est équivalente au système : $\begin{cases} u = Z + \dfrac{1}{Z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$
b) Résoudre (E) dans C

8.- Soit l'équation d'inconnue Z :
(E) $Z^4 - (10i - 5)Z^2 - 14i - 48 = 0$
Résoudre (E) dans C

Interprétations géométriques du module et de l'argument.

$(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant un repère orthonormal direct du plan, soient a, b, c trois nombres complexes $(c \neq a$ et $c \neq b)$, d'image respectives A, B, C alors :

et

$$\left|\frac{c-b}{c-a}\right| = \frac{BC}{AC}$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = \arg(c-b) - \arg(c-a)$$

$$\arg\left(\frac{C-b}{C-a}\right) = (\vec{e}_1, \overrightarrow{BC}) - (\vec{e}_2 ; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$$

$$= (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

Nombres complexes et configurations du plan

Caractérisation complexe	Caractérisation géométrique
$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\theta}$ où $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\theta}$ $\theta \neq k\pi$ ($k \in Z$)	Triangle ABC est isocèle en A
$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = bi$ ($b \in R^* \setminus \{1\}$)	Triangle ABC est rectangle en A $mes\hat{A} = \frac{\pi}{2}$
$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ où $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$	Triangle ABC est équilatéral $AB = AC = BC$ et $mes\hat{A} = \frac{\pi}{3}$
$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$ où $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = -i$	Triangle ABC est rectangle isocèle en A
$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in R^*$	Les points A, B, C sont alignés

1- 1) Résoudre l'équation $(E): Z^2 - (1+3i)Z - 2 + 2i = 0$ où Z est une inconnue complexe.

2°) On pose :
$P(Z) = Z^3 - 3(1+i)Z^2 + 8iZ + 4 - 4i$

a) Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution réelle Z_0 l'on précisera. En déduire une factorisation de $P(Z)$.

b) Trouver toutes les solution de l'équation $P(Z) = 0$, on appellera Z_0 la solution réelle, Z_2 la solution imaginaire pure et Z_1 l'autre. Pour chacune d'elles, précisera le module et un argument.

c) Montrer que Z_0, Z_1, Z_2 forment une progression arithmétique dont on précisera la raison.

2.- Z étant un nombre complexe, on pose :
$P(Z) = Z^3 - (6+9i)Z^2 + (-9+45i)Z + 54 - 54i$

a) Montrer que l'équation P(Z) = 0 admet une racine réelle Z_0 que l'on précisera. En déduire une factorisation de P(Z)

b) Trouver toutes les solutions de l'équations P(Z) = 0. On appellera Z_2 la solution imaginaire pure, Z_0 la solution réelle et Z_1 l'autre. Pour chacune d'elles, préciser le module et un argument.

c) Montrer que Z_0, Z_1, Z_2 forment une suite géométrique dont on précisera la raison.

Bacc 2004

3.- Dans l'ensemble c des nombres complexes on considère le polynôme P définie par $\forall$ Z C,

$$P(Z) = Z^3 - 2(2+i)Z^2 + (5+8i)Z - 10i$$

On désigne par (E) l'équation P(Z) = 0. Sachant que (E) admet une racine particulière u = λi, λ ∈R, calculer cette racine

a) Résoudre dans c l'équation P(Z) = 0. on notera v et w les solutions de (E) distinctes de

b) u (v sera celle qui s'écrit sous la forme $a + ib$ avec $b < 0$)

c) dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives u, v et w déterminer les réels β et λ pour que le point A soit le barycentre des points 0, B et C affectés des coefficients respectifs 1, β et λ. Le point 0 désigne l'origine du repère.

Bacc 2003

4.- Soit dans C corps des nombres complexes l'équation suivante :

$$Z^3 - (4+4i)Z^2 - (2-8i)Z + 12 = 0 \quad (E)$$

a) Montrer que (E) a une racine réelle que l'on précisera puis résoudre (E). on distingue les trois solutions Z_1, Z_2 et Z_3 de (E) par $|Z_1| < |Z_2| < |Z_3|$

b) Dans le plan complexe, on note A_1, A_2 A_3 les points d'affixes respectifs Z_1, Z_2, Z_3

c) Déterminer le module et un argument du quotient $q = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z_3}$ en déduire la nature du triangle $A_1\ A_2\ A_3$

d) Déterminer l'affixe du point A_4 tels que $A_1A_2A_3A_4$ soit un carré

5.- Soit l'équation (E)

$$Z^4 + 2Z^3 + 2Z^2 - 2Z + 1 = 0 \quad (Z \in C)$$

1) Démontrer que si Z_0 est solution de (E), alors $\overline{Z_0}$ est solution de (E)

2)

a) Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$(E) \Leftrightarrow Z^2\left[\left(Z - \frac{1}{Z}\right)^2 + a\left(Z - \frac{1}{Z}\right) + b\right] = 0$$

b) Résoudre dans C l'équation :

$$Z^2 + aZ + b = 0$$

puis l'équation (E)

6.- Soit l'application de C dans lui-même définie par :

$$f(Z) = Z^4 - 4(1+i)Z^3 + 12iZ^2 + 8(1-i)Z - 20$$

a) Déterminer p et q pour que, pour tout Z de C, on fait : $f(Z) = (Z^2 + 2i)(Z^2 + pZ + q)$
Résoudre dans c l'équation f (Z) = 0

b) Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B, C, D dont les affixes sont les solutions de l'équation f (Z) = 0.
On prendra les notations suivantes :
- A est le point d'ordonnée négative.
- B est le point d'abscisse négative.
- C est le point de même abscisse que A.
- On vérifiera que D a même ordonnée que B.

Montrer que ABCD est un carré.

c) Calculer le module et l'argument des racines de l'équation f (Z) = 0

7.- On considère l'application f dans C définie par : $f(Z) = Z^3 + 8iZ^2 + 2(6i - 11)Z - 4(2i + 9)$

a) Démontrer que l'équation f (Z) = 0 admet une solution réelle Z_1 que l'on déterminera.

b) Résoudre dans c l'équation f (Z) = 0 (on notera Z_2 et Z_3 les autres racines).

c) Dans le plan complexe (P), on considère les points A, B, C d'affixes respectifs Z_1, Z_2, Z_3. Montrer que ces points ne sont pas alignés.

8.- Soit l'application de C dans C définie par : $f(Z) = Z^3 + aZ^2 + bZ - 42 + 24i$ où a et b sont des éléments de c.

1. Sachant que :
$f(1) = 44 + 32i$ et $f(-1) = 30 + 16i$,
déterminer a et b.
2. On suppose dans cette question que a = 5 et b = $-8 + 8i$.
3.
a) Démontrer qu'il existe un réel α et un seul, tel que $f(\alpha) = 0$
b) Résoudre alors dans c l'équation (E) et on note : Z : f (Z) = 0
c) On appelle Z_1 , Z_2 , Z_3 les solutions de (E) et on note :
$Z = Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3$. Calculer Z et déterminer le module et un argument de Z.

9.- Dans l'ensemble (C) des nombres complexes, on considère le polynôme :
$f(Z) = Z^3 - 6iZ^2 + 2(i-6)Z + 8i + 4$ où $Z \in (C)$

a) Calculer $f(2i)$, puis déterminer les nombres complexes a et b tels que :
$$f(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + aZ + b)$$

b) Vérifier que $(1-i)^2 = -2i$ et $(2-2i)^2 = 8i$ puis résoudre dans C l'équation $f(Z) = 0$

10.- Soit f l'application de C, ensemble des nombres complexes dans lui-même définie par :

$$f(Z) = Z^3 + (1 - 5i)Z^2 - 2((5 + i)Z + 8i$$

a) Calculer $f(2i)$. En déduire que $f(Z)$ peut s'exprimer comme produit d'un polynôme de degré un par un polynôme de degré deux de la variable Z.

b) Résoudre dans C l'équation $f(Z) = 0$. Calcule le module et l'argument de chacune des solutions.

c) On désignera par Z_1, Z_2, Z_3 les racines de l'équations $f(Z) = 0$, Z_2 étant la seule racine d'argument $\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

Etablir que (Z_1, Z_2, Z_3) est une suite géométrique dont on déterminera la raison

11- Soit dans C : corps des complexes l'équation suivante : $Z^3-2Z^2+2(2-3i)Z-20=0$.

1) a) Montrer que $Z_0=2i$ est une des racines de cette équation.

c) Calculer les deux autres racines Z_1 et Z_2 avec $Ré(Z_1)<Ré(Z_2)$.

2) Le plan (P) étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on désigne par A, B et C les points de (P) d'affixes Z_0, Z_1 et Z_2.

a) Déterminer l'affixe du barycentre G des points A, B, C affectés des coefficients $-1,1,1$ et construire les points A, B, C et G dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Déterminer l'ensemble des points M de (P) tels que : $-MA^2+MB^2+MC^2=36$.

12- On considère l'équation

$(E): Z^3-(8+3i)Z^2+(17+15i)Z-6-18i=0$ où Z est une inconnue complexe.

1) Résoudre (E) sachant qu'elle admet une solution réel. On notera b et c les deux autres racines avec $Ré(b)<Ré(c)$.

2) Soient A, B, C les points d'affixes respectives a, b, c, démontrer que le triangle (A, B, C) est rectangle isocèle en A.

3) Déterminer les coordonnées du points G barycentre des points A, B, C affectés des coefficients respectifs 1, -1, -1.

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe tels que : $MA^2-MB^2-MC^2=-4$.

5) Caractériser l'application f du plan qui à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

13- On considère la fonction f de la variable complexe Z définie par :

$f(Z)=Z^3-2(\sqrt{3}+i)Z^2+4(1+i\sqrt{3})Z-8i$.

a) Vérifier que : $f(Z)=(Z-2i)(Z^2)-2\sqrt{3}Z+4$.

b) Résoudre dans C l'équation $f(Z)=0$.

c) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique et expositionnelle.

14- Soit P le polynôme complexe défini par : $P(Z)=Z^2+2\sqrt{3}Z+4$.

1°) a) Résoudre dans C l'équation $P(Z)=0$.

c) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique.

2°) Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ *(unité 4 cm.* Soit A, B et C les points d'affixes respectives

$a=2i$ $b=\sqrt{3}+i$ $c=-\sqrt{3}+i$.

a) Placer les points A, B et C sur la figure.

b) Soit $Z=\dfrac{a-b}{c-b}$. Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.

c) Ecrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire la nature du triangle ABC ainsi qu'une mesure, en radian, de l'angle (BC, BA).

d) Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

15- Soit dans C l'équation d'inconnue $Z:(E)=Z^3-12Z^2+48Z-128=0$.

1) Vérifier que 8 est une solution de cette équation puis déterminer les nombres réels α,β,λ tels que pour tout nombres complexes Z :

$Z^3-12Z+48Z-128=(Z-8)(\alpha Z^2+\beta Z+\lambda)$.

2) Résoudre (E).

3) $(o,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan, l'unité graphique est 1cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives

$a=2-2i\sqrt{3}$ $b=2+2i\sqrt{3}$ et $c=8$.

a) Calculer le module et un argument de a puis placer les 3 points A, B et C.

b) Calculer le complexe $Z=\dfrac{a-c}{b-c}$,

Déterminer son module et son argument. Interpréter géométriquement le résultat. En déduire la nature du tringle ABC

Chapitre VI

Objectif

- Déterminer les racines n$^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

.- *Définition*

n étant un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe, on appelle racine n^{e} de Z, tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$

- Supposons Z = 0, 0 est l'unique solution
- Supposons $Z \neq 0$
- Forme trigonométrique de Z et de l'inconnue z on a :

$$Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$Z = [\rho \in \mathbb{R}_+^*; \theta \in \mathbb{R}]$$
$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$Z = [r \in \mathbb{R}_+^*; \alpha \in \mathbb{R}]$$

d'où $Z^n = r^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$z^n = Z \Rightarrow r^n(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

on obtient successivement:

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\alpha = \theta k 2\pi \end{cases} \quad \text{avec } r > 0 \text{ et } k \ 0Z$$

$$:\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{k2\pi}{n}; k \in Z \end{cases}$$

L'ensemble Z_k des racines n$^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe Z est de la forme :

$$\boxed{Z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)\right]; k \in Z}$$

$$k \in \{0, 1, ..., (n-1)\}$$

Idée et stratégie

Le plan étant du repère orthonormé direct (O,I), les points images des racines n^{e} sont sur le cercle (C) de centre O et de rayon $R = \sqrt[n]{\rho}$

✓ Lorsque n = 2 ; les points-images des deux racines carrés sont diamétralement opposées sur le cercle

✓ Lorsque n > 2, les points-images des n racines n^{e} sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés, inscrits dans le cercle (c)

✓ Les racines cubiques de l'unité sont données par $Zk = \left[1, \dfrac{k2\pi}{3}\right]$ avec $k \in \{0, \ 1, \ 2\}$

Exercices

Choisis la bonne réponse.

1- Soit $a = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right)$ *un nombre complexe. Si a est une racine cubique d'un nombre complexe Z alors Z est égal à :*

a) *i-2* b) *−i+2*

c) *-1+i* d) *1-i*

2) Soit $t = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}\right)$ *un nombre complexe. Si t est une racine cubique d'un nombre complexe U alors U est égal à :*

a) $-\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{3}-i$

c) $--\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ d) $-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$

Exercices

1.- Déterminer les racines cinquièmes d'un nombre complexe $U = 1 - i\sqrt{3}$ et montrer que dans le plan complexe les images de ces racines forment un pentagone régulier.

.2- Soit $U = -8 + 8i\sqrt{3}$ un nombre complexe

a) Déterminer les racines quatrième de U

b) Montrer que, dans le plan complexe, les images de ces racines sont les sommets d'un carré

3.- Reprendre l'exercice 1 avec $Z = 16\sqrt{2}(1+i)$

4.- On se propose de résoudre dans c l'équation (E) : $Z^3 = 2 - 11i$

a) Vérifier que $Z_0 = 2 - i$ est solution de (E)

b) Résoudre l'équation obtenue à partir de E en prenant pour nouvelle inconnue $t = \dfrac{Z}{Z_0}$ les solutions de cette équation en t seront données sous forme algébrique et sous forme trigonométrique

c) En déduire les solutions de E

5.- Soit Z un nombre complexe de module $\rho = 8$ et d'argument θ de mesure $\dfrac{3\pi}{10}$. Déterminer les racines cubiques de Z, puis représenter, dans le plan complexe, les points images de ces racines en indiquant la nature du pentagone dont ils sont les sommets.

6.- Soit Z le nombre complexe $Z = \dfrac{2(2-i)}{1-3i}$

a) Déterminer les parties réelle et imaginaire de Z

b) Déterminer sous forme trigonométrique les racines quatrièmes de Z

Chapitre VII

Objectif
Définir et caractériser une similitude plane directe et indirecte

Similitude plane directe

Une similitude plane directe est une transformation du plan complexe définie par :

$$S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$Z \rightarrow Z' = S(Z) = AZ + B, \text{ où } A \in \mathbb{C}^* ; B \in \mathbb{C}$$

Remarque :

Une similitude plane directe S est caractérisée par trois éléments :

- Son centre un point d'affixe w tel que S(w) = w $\left(w = \frac{B}{1-A}\right)$
- Son rapport k où k est module de A

Son angle ou sa mesure θ où θ est un argument de A

Idées et stratégies

Pour trouver l'écriture complexe ou l'image d'un point par une similitude directe de centre Ω, d'affixe w, de rapport k et d'angle θ, on peut utiliser la relation $Z' - w = k(Z - w)e^{i\theta}$

Si la similitude est de centre 0, on utilise la relation $Z' = kZe^{i\theta}$

Exercices

1.- Soit S la similitude directe de centre Ω(2, 0) de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer l'écriture complexe de S.

Idées et Stratégies

L'image d'un cercle (C) de centre A et de rayon R par une similitude directe S de rapport k est un cercle (C') de centre $A' = S(A)$ et rayon $R' = kR$

2.- Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $Z' = 3iZ - 1 - 7i$

1)
a) Justifier que S est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques
b) Déterminer l'expression analytique de S

2) Déterminer une équation de l'image par S de la droite (BC), B et C étant les points d'affixes respectives 2 et 3 – i

3) Déterminer une équation de (C'), image par S du cercle (C) d'équation :

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

Idées et Stratégies

Pour déterminer l'écriture complexe d'une application du plan dans lui-même d'expression analytique donnée, on peut procéder de la façon suivante :

- Écrire $Z' = x' + iy'$ et remplacer x' et y' en fonction de x et de y ;
- Remplacer x par $\frac{Z+\overline{Z}}{2}$; y par $\frac{Z-\overline{Z}}{2i}$ et de développer l'expression obtenue en fonction de Z et $\overline{Z}$
- Si *f* est la similitude directe de centre Ω ; de rapport k et d'angle θ alors f^{-1} est la similitude de centre Ω ; de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle – θ

3.- Soit *f* l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$.

1) Déterminer l'écriture complexe de *f*
2) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de *f*

Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1}

Idée et stratégie

✓ Une rotation d'angle α est une similitude directe de rapport 1 et d'angle α

✓ Une homothétie de rapport k(k > 0) est une similitude directe de rapport k et d'angle nulle ;

✓ Une homothétie de rapport k(k < 0) est une similitude directe de rapport k et d'angle π

✓ Une translation peut-être considérée comme une similitude directe de centre 1 et d'angle nul ; dans ce cas le centre n'est pas défini

La relation $Z' = Z + B$ traduit la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe B

✓ L'écriture complexe $Z' - w = k(Z - w)$ est celle d'une homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport k

✓ L'écriture complexe $Z' - w = e^{i\theta}(Z - w)$ est celle d'une rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle α

✓ L'image d'un cercle (C) de centre A et de rayon R par une homothétie de rapport k est le cercle (C) de centre $A' = h(A)$ et de rayon $R' = |k|.R$

✓ L'image d'une droite (D) passant par un point quelconque A par une homothétie h est une droite (D') parallèle à (D) passant par le point $A' = h(A)$

Idées et stratégies

Dans l'application complexe : $Z \mapsto Z' = AZ + B$ $A \neq 0$

- Si $A = 1$, la transformation associée est la translation de vecteur d'affixe B.
- Si $A = -1$, la transformation associée est la symétrie centrale.
- Si $A \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$, la transformation associée est l'homothétie de centre d'affixe $\frac{B}{1-A}$ et de rapport A.
- Si $|A| = 1$, la transformation associée est la rotation de centre d'affixe $\frac{B}{1-A}$ et d'angle $\theta = \arg(A)$
- Dans tous les cas la transformation associée est une similitude de centre d'affixe $\frac{B}{1-A}$, de rapport $k = |A|$ et d'angle $\theta = \arg(A)$.
- Si $B = 0$, la transformation associée à l'application complexe est de centre l'origine O. s'il s'agit d'une translation : c'est la translation de vecteur nul.

Remarque

L'écriture complexe $Z' = a\overline{Z} + b$ est celle d'une similitude inverse ou d'une similitude plane indirecte caractérisée par :

- Son centre Ω d'affixe $w = \frac{a\overline{b} + b}{1 - a\overline{a}}$
- Son rapport $k = |a|$

Son angle $\theta = \arg(a)$

Choisir la bonne réponse

1- Soit (P) un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et S la similitude directe de centre $A\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{5}\right)$, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

L'écriture complexe de S est :

a) $Z' = (1 + i)Z + 4 + 4i$

b) $Z' = (1 + i)Z - 4 + 4i$

c) $Z' = (-1 + i)Z - 1 + 2i$

d) $Z' = (-1 + i)Z + 1 - 2i$

2- - Soit (P) un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et S la similitude directe définie par :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

L'écriture complexe de S est :

a) $Z' = (1 - i)Z + 2 + i$

b) $Z' = (1 - i)Z + 2 - i$

c) $Z' = (-1 + i)Z - 1 + 2i$

d) $Z' = (-1 + i)Z + 1 - 2i$

3- Si f est une similitude de centre $\omega(1; -2)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, alors f^{-1} est une similitude directe de :

a) de centre centre $\omega(1; -2)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) de centre centre $\omega(1; -2)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

c) de centre centre $\omega(1; -2)$ de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure $\left(\frac{\pi}{4}\right)$

d) de centre centre $\omega(1; -2)$ de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

4- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on définit une similitude directe par : $Z \mapsto Z' = (1 + i)Z + 3 - 2i$.

l'image d'un cercle de centre $A(3\ ;\ -2)$ et de rayon $R=5$ est un cercle de centre A' et de reayon R' tel que :

a) $A'(8,\ -1)$ et $R'=5\sqrt{2}$

b) $A'(3,\ -2)$ et $R'=5$

c) $A'(8,-1)$ et $R'=5$ d) $A'(3,-2)$ et $R'=5\sqrt{2}$

5- La transformation associée à l'application complexe $Z \mapsto Z' = -5iZ + 2(1+5i)$ est :

a) L'homothétie de centre $A(1,\ 0)$ et de rapport $k=-5$.

b) La translation de vecteur $2\overrightarrow{OA}$ avec $\overrightarrow{OA}(1,5)$.

c) La similitude de centre $A(2,\ 0)$ de rapport $k=5$ et d'angle de mesure $\theta = -\frac{\pi}{2}$

6- La transformation associée à l'application complexe $Z \mapsto Z' = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)Z$ est :

a) L'homothétie de centre l'origine O et de rapport $k=\frac{1}{2}$

b) La translation de vecteur de vecteur nul

c) La similitude de centre l'origine O et d'angle de mesure $-\frac{7\pi}{6}$

d) La rotation de centre l'origine O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$

7- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ On donne 3 points $A(2,\ 1)$. $B(-4,\ 19)$ et $C(4,\ -5)$. Si B est l'image du point C a pour l'homothétie de centre A et de rapport $k=-3$, alors l'écriture complexe de cette homothétie est :

a) $Z'=3Z+8-4i$

b) $Z'=-3Z-8+4i$

c) $Z'=-3Z+8+4i$

d) $Z'=-3Z+8-4i$

8- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ On donne un point A d'affixe $Z_A=2-3i$ si un point B est l'image d'un point C d'affixe $Z_C=-5+4i$ par la translation de vecteur $3\overrightarrow{OA}$, alors ses coordonnées sont :

a) $B(2;\ -3)$ b) $B(-5;\ 1)$

c) $B(-1;\ -2)$ d) $B(1;\ -5)$

9- Soit (P) un plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ et h l'homothétie définie par $Z \mapsto Z' = -3Z + 8 + 4i$. L'image du point C d'affixe $Z_C=4-5i$ par cette homothétie est le point B d'affixe Z_B :

a) $Z_B=4-5i$ b) $Z_B=19-4i$

c) $Z_B=-4-19i$ d) $Z_B=-4+19i$

10- Soit (P) un plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, (D) la droite d'équation $2x-y+5=0$ et h l'homothétie définie par $Z \mapsto Z' = 3Z - 4 + 2i$ L'image de la droite (D) par h est la droite (Δ)d'équation

a) $2x-y-9=0$ b) $2x+y+25=0$

c) $2x-y-25=0$ d) $2x-y+25=0$

Exercices

1.- Soit le plan P rapporté à un repère orthonormé$(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1) On considère la transformation T de P dans P ; qui au point M(x, y), fait correspondre le point $M'(x', y')$ tel que :

$x' = x + 1$ et $y' = y + \sqrt{3}$.

Le point M a pour affixe le nombre $Z = x + iy$ et le point M' a pour affixe le nombre $Z' = x' + iy'$

a) Exprimer Z' en fonction de Z

b) Donner la nature de la transformation T

2) On considère maintenant la transformation R qui, au point M d'affixe Z associe le point M_1 d'affixe Z_1 tel que

$Z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z$.

Reconnaître l'application R

2- Dans le plan rapport à un repère orthonormal, on donne le poinrt $G(-3\ ;\ 2)$ barycentre du système de points pondérés $S = \{(A,2),\ \ (B,1),\ \ (C,1)\}$ et la transformation f qui, à tout point M d'affixe $Z=x+iy$ associe le point M' d'affixe $Z'=x'+iy'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

1- Caractériser la transformation f.

2- Vérifier que l'expression analytique de f est tel que : $\begin{cases} x' = -3x - 12 \\ y' = -3y + 8 \end{cases}$

3- Donner l'écriture complexe de f.

4- Démontrer que la droite (Δ) d'équation : $2x+5y-7=0$ est l'image par f de la droite (D) d'équation : $2x+5y-3=0$

3- 1°)- On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé l'application T_1 qui a tout point M ayant pour affixe le nombre complexe Z, associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = 2Z + 12 + 6i$. Caractériser géométriquement l'application T_1.

2°) A, B, C, D désignent les points d'affixe respectives :

$Z_A=3+4i$, $Z_B=-2i$, $Z_C=-2+2i$, $Z_D=-4+8i$. T est une application qui, a tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z'=aZ+b$ où a et b sont deux nombres complexe. Déterminer T pour que l'image de A soit B et l'image de C soit D. Caractériser géométriquement l'application T trouvée.

4- Dans un plan muni d'un repère orthonormal direct $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on note A le point d'affixe $Z_A=\sqrt{3}-3i$, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, T la translation de vecteur $2\overrightarrow{AO}$

a) Déterminer les coordonnées du pt B, image de A par la rotation R.

b) Déterminer les coordonnées du pt C, image de A par la translation T.

c) Déterminer la nature du triangle OBC

5.- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm), on considère la transformation R qui, à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z$

1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation
2) Soit (k) l'ensemble des points M d'affixe $Z=x+iy$ tels que : $|Z-2i|=2$
   a) Déterminer et construire (k)
   b) Déterminer et construire l'image de (k) par la transformation R
3) Soit (D) l'ensemble des points M d'affixe $Z=x+iy$ tels que $|Z-3+2i|=|Z+4-5i|$.
   a) Déterminer et construire (D)
   b) Déterminer et construire l'image de (D) par la transformation R

6.- Soit dans c l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$Z^2-3\left(\sqrt{3}+i\right)Z+3\left(2+i\sqrt{3}\right)=0$$

1) Montrer que cette équation admet une racine réelle Z' ; en déduire l'autre racine Z''
2) Dans le plan affine euclidien rapporté à un orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, M' et M'' désignent respectivement les images Z' et Z''. Déterminer les éléments qui caractérisent la similitude directe plane S telle que $S(0)=M'$ et $S(M')=M''$
   a) Résoudre dans C l'équation : $2iZ^2-2(1+i)Z+1-2i=0$. Déterminer le module et un argument de la solution ayant une partie réelle négative. Soit Z_1 cette solution, et Z_2 l'autre
   b) On considère dans le plan complexe, la transformation f qui, à tout point M d'affixe Z fait correspondre le point M' d'affixe Z' définie par : $Z'=Z_1Z+Z_1$. Démontrer que f est une similitude dont on déterminera le rapport, l'angle et le centre

7.- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A d'affixe -4, B d'affixe 4 ; E d'affixe $4i$; C et D tels que les quadrilatères $A\ 0\ E\ C$ et $B\ 0\ E\ D$ soient des carrés

1) Placer les points précédents dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$ et donner les affixes des points C et D
2) Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z'=(1+i)Z+4+4i$
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f
   b) Préciser les points f (A) et f (C) et déterminer l'image par f de la droite (C A)

Bacc 1999

Idées et Stratégies

- Si l'écriture complexe d'une application S est de la forme $Z' = aZ + b$ ($a, b \in C$), alors S est une similitude directe de centre Ω image de l'affixe de solution de l'équation $Z' = az + b$, de rapport $k = |a|$ et d'angle θ un argument de a.

8.- Dans le plan rapporté au repère orthonormal directe $(0,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'application T du plan dans lui même qui a tout point M d'affixe $Z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $Z' = x' + iy'$ tel que : $Z' = (-1+i)Z + 1 - 2i$

a) Donner la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques

b) Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x' et y' du point M'

c) Déterminer l'image par T du cercle centre (2 ; 1) et de rayon 3

Bacc 2000

9.- Z étant un nombre complexe quelconque, on considère le polynôme :

$$P(Z) = Z^3 - (1+i)Z^2 + 4Z - 4 - 4i$$

1. Calculer P(2i), en déduire le polynôme Q(Z) du second degré tel que pour tout complexe Z, $P(Z) = (Z - 2i)Q(Z)$
2. Résoudre dans R l'équation P(Z) = 0
3. Dans le plan complexe, on note A, B, C les images respectives de 2i ; 1 + i ; - 2i
4. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude S définie par : S(A) = A et S(B) = C

10.- Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1cm) ; placer les points A, b et C d'affixes respectives :

$a = 8$; $b = -4 + 4i$ et $c = -4i$

a) Ecrire chacun des complexes *a*, *b* et *c* sous forme trigonométrique

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle

c) La similitude directe de centre 0, de rapport

$k = 2$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme A en A' ; B en B' et C en C'. Placer ces images.

Bacc 2000

11.- Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 2 + i$ et $c = i$

1. Déterminer et représenter le transforme du quadrilatère OABC par la similitude directe de centre A, de rapport 2 et dont une mesure de l'angle est égale à $\frac{\pi}{2}$
2. On affecte les points O, A, C des coefficients respectifs 1, α, α avec ($\alpha \in R$)
   a) Déterminer α pour que B soit le barycentre des trois points O, A, C affectés de leurs coefficients respectifs

   Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tel que : $\|\overrightarrow{MO}\|^2 - \|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MC}\|^2 = -5$

12- Le plan complexe (P) est rapporté à un repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$

1) Déterminer l'ensemble (C) des points M de (P) d'affixe Z vérifiant :

$$|(1 - i\sqrt{3})Z - \sqrt{3} - i| = 4$$

2) On désigne par S l'application de (P) qui a tout point M d'affixe, associe le point M d'affixe Z' tel que :

$$Z' = (1 - i\sqrt{3})Z - \sqrt{3} - i$$

Quelles sont les images par S des points A d'affixe, Déterminer la nature et les éléments caractéristique de S

Probabilité

Chapitre I

Outils de dénombrement

Soit n et p deux naturels, les tirages de p boules, dans une urne qui en contient n, modélisent de nombreux problèmes dénombrement.

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Outil	Nombre de tirage
Tirages successifs avec remise	Oui	Non	P uplet de E	n^p
Tirages successifs sans remise	Oui	Oui	Arrangement de p de E	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Tirage simultané	Non	Oui	Combinaison de p de E	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Calculs de probabilités

- ❖ Objectif identifier les expériences aléatoires et dénombrer leur résultat

Expérience aléatoire

.- Définition

C'est une expérience ou épreuve dont le résultat est déterminé par le hasard autrement dit une expérience dont le résultat est imprévisible.

Eventualité

C'est un résultat possible d'une épreuve : une possibilité

Univers ou ensemble fondamental

L'univers des possibles : le plus souvent note Ω est l'ensemble des résultats d'une épreuve donnée ; c'est l'ensemble des cas possibles ou éventualités.

On lance un dé et on observe le numéro tiré; six résultats sont possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6 on dit qu'on a réalisé une expérience aléatoire (ou épreuve) comportant six éventualités et que l'univers associé à cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

On lance une pièce de monnaie et on observe la face indiquée ; deux résultats sont possibles : pile (P) ; face (F)

On a cette fois une expérience aléatoire comportant deux éventualités ; l'univers associé à cette épreuve est $\Omega = \{P, F\}$

Une urne contient des boules blanches, rouges et noires. On tire une boule dans cette urne et on note la couleur obtenue ; trois résultats sont possibles : B (la boule est blanche), R(la boule est rouge) et N(la boule est noire)

Evénements liés à une expérience aléatoire

Soit Ω l'univers associe à une expérience aléatoire.

- ❖ On appelle événement toute partie de Ω.
- ❖ Les événements élémentaires sont les parties de Ω formées d'un seul élément

  L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ est forme des éléments de l'univers qui n'appartient pas à A

Dans l'exemple du dé, l'univers associe est : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

- ❖ L'événement « on a obtenu un nombre pair » se note {2 ; 4 ; 6}
- ❖ {1} ; {2} ; {3} ; {4} ; {5} ; {6} sont les éléments élémentaires
- ❖ si A = {1 ; 2} alors $\overline{A} = \{3;4;5;6\}$

Par ailleurs :

- ❖ L'événement impossible est la partie vide notée ϕ

❖ L'événement certain est l'... même

Soient A et B deux événement de l'univers Ω

❖ L'événement $A \cup B$ est réalise si A ou B est réalise
❖ L'événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \phi$, c'est-à-dire si A et B ne peuvent être réalises simultanément

Probabilité d'un événement

On lance un dé bien équilibré et on note le numéro tiré; l'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ la chance d'apparition est la même pour chaque face :

❖ L'événement {3} à une chance sur six d'être réalisé; on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{6}$
❖ L'événement {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} à cinq chances sur six d'être réalisé; sa probabilité est $\frac{5}{6}$
❖ « obtenir un nombre impair » est l'événement {1, 3, 5} dont la probabilité est $\frac{3}{6}$
❖ l'événement certain Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} a six chance sur six d'être réalisé; sa probabilité est 1
❖ l'événement impossible n'a aucune chance d'être réalisé; sa probabilité est 0

.- *Définition*

Soit Ω l'univers associe à une expérience aléatoire. Une probabilité sur Ω est une application P de p(Ω) sur [0, 1], qui à chaque partie A et Ω associe le réel positif P(A) appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

Une probabilité est un nombre entre 0 et 1

❖ La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent ;
❖ La probabilité de l'événement certain est 1
❖ La probabilité de l'événement impossible est 0

...a probabilité de l'événement ...mentaire $\{a_i\}$ est notée $P\{a_i\}$

❖ *Une probabilité P est parfaitement déterminée par les données des probabilités des événements élémentaires*

a_i	a_1	…	a_i	…	a_n
$P\{a_i\}$	p_1	…	p_i	…	p_n

Exercice

On lance un dé pipé ; dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note le numéro tire. La probabilité d'apparition d'un nombre pair est le double de la probabilité d'apparition d'un nombre impaire et les probabilités d'apparition de deux nombres de même parité sont égales

a) Résumer dans un tableau les événements élémentaires $\{a_i\}$et les probabilités $P\{a_i\}$ associées
b) Quelle est la probabilité d'un nombre inférieur ou égal à 4

Cas particulier : équiprobabilité

Propriétés

Lorsque les événements élémentaires ont tous la même probabilité, la probabilité d'un événement A quelconque est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'élément de } A}{\text{nombred'élément de } \Omega}$$

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas "favorable"}}{\text{nombre de cas "possible"}}$$

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

$$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega}$$

NB.- Situations classiques d'équiprobabilité :

Dé équilibré (non pipé)

❖ Pièce équilibrée (non truquée)
❖ Tirages d'objets indiscernables au toucher, dans une urne
❖ Cartes bien battue
❖ Tirage au hasard

Propriétés des probabilités

Quels que soient les événements A et B de l'univers Ω

- $P(A \cup B) = P(A) + B(B) - P(A \cap B)$

Si A et B sont incompatibles alors :

- $P(A \cap B) = 0$

et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

De plus

- $A \cup \overline{A} = \Omega$ donc : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Pour tout événement A ;

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$$P(A) = \frac{cardA}{card(\Omega)}$$

Les éventualités de A sont appelées cas favorables
et celles de Ω cas possibles

Idées et stratégies

Si on lance une pièce de monnaie n fois et on s'intéresse aux n résultats obtenus dans l'ordre de leur apparition, l'univers correspondant à cette expérience est composé de 2^n éventualités

Choisir la bonne réponse dans les exercices 1 à 30

1.- On répète 5 fois le lancer d'une pièce de monnaie et on s'intéresse aux 5 résultats obtenus dans l'ordre de leur apparition. L'univers correspondant à cette expérience est composé de :

a) 5 éventualités b) 10 éventualités
c) 32 éventualités d) 64 éventualités

2.- Un commerçant dispose de 4 unités d'un certains article en stock. A la fin de la journée il fait l'inventaire. L'univers Ω des possibles correspondants est :

a) $\Omega = (0,1,2,3,4)$ b) $\Omega = \{1,2,3,4\}$
c) $\Omega = (1,2,3,4)$ d) $\Omega = \{0,1,2,3,4\}$

3.- On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie parfaite. Les éventualités étant les suites de « piles » ou de « face » obtenues. L'univers Ω des possibles est :

a) $\Omega = \{0,1,2,3\}$
b) $\Omega = \{PPP, PPF, PFF, PFP, FFF, FFP, FPP, FPF\}$
c) $\Omega = \{PPP, PPF, PFF, FFF\}$
d) Aucune réponse

4.- On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Les éventualités étant le nombre de piles obtenu. L'univers Ω des possibles est :

a) $\Omega = \{0,1,2,3\}$
b) $\Omega = \{PPP, PPF, PFF\}$
c) $\Omega = (PPP, PPF, PFF, FFF)$
d) Aucune réponse

5.- Si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé fini tels que : $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$; $P(A \cap B) = 0{,}25$ alors $P(A \cup B)$ égale à :

a) 0,65 b) 0,9 c) 0,60

6.- Si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé fini tels que :
$P(A) = 0{,}42$; $P(B) = 0{,}22$; $P(A \cup B) = 0{,}49$
alors $P(A \cap B)$ est égale à :

a) 0,13 b) 0,14 c) 0,15

7.- Si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé fini tels que :
$P(A \cup B) = \frac{5}{8}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$; alors $P(A)$ est égale à :

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{8}$

8.- A et B étant deux événements incompatibles tels que : P(A) = 0,5 et P(B) = 0,4 alors P(AχB) est égale à :

a) 0,1 b) 0,9 c) 0,45 d) 0,4

9.- Si A et B sont deux évènements compatibles tels que P(A) = P(B) = 0,45 et P(A1B) = 0,20 alors P(AχB) est égale à :

a) 0,60 b) 0,80
c) 0,70 d) 0,50

10.- Si on pipe une pièce de monnaie de telle sorte que face apparaisse 3 fois plus que pile alors la probabilité d'obtenir pile est :

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

11.- Une urne contient dix boules dont n noires et 10-n rouges (2#n<7). On extrait simultanément deux boules de l'urne. On admet l'équiprobabilité de tous tirages de deux boules lorsque la probabilité de tirer deux boules de couleurs différente est $\frac{7}{15}$, n'est égale à :

a) n = 7 b) n = 3 c) n = 4
d) n = 5 e) n = 3 ou n = 7

12.- Dans un groupe de huit élèves, composé de cinq filles et de trois garçons, on choisit au hasard trois élèves pour trois rôles dans une pièce de théâtre.
La probabilité pour que 2 filles exactement jouent deux des rôles est :

a) $\frac{15}{28}$ b) $\frac{15}{84}$
c) $\frac{5}{28}$ d) $\frac{13}{56}$

13.- On sait que 35% des individus d'une population lycéenne pratiquent le football (Sport A), que 25% pratiquent le Basket (Sport B) et 15% pratiquent les deux sports.

On interroge au hasard une personne de la population considérée. La probabilité pour que cette personne pratique au moins un des sports considéré est :

a) $\frac{11}{20}$ b) $\frac{5}{20}$
c) $\frac{7}{20}$ d) $\frac{9}{20}$

14.- Un sac contient deux boules noires et huit boules rouges. On extrait simultanément n boules du sac $(1 \leq n \leq 8)$. Lorsque la probabilité d'obtenir au moins une boule noire est $\frac{2}{3}$; n est égale à :
a) n = 3 b) n = 4 c) n = 2

15.- On tire au hasard et en même temps 3 timbres d'une pochette contenant 5 timbres haïtiens, 4 timbres américains et 6 timbres suisses. La probabilité de tirer 3 timbres d'un même pays est :

a) $\frac{120}{455}$ b) $\frac{34}{455}$
c) $\frac{30}{455}$ d) Aucune réponse

16.- On lance simultanément deux dés cubiques numérotés de 1 à 6. la probabilité pour que la somme des résultats soit 4 ou plus est :

a) $\frac{11}{36}$ b) $\frac{33}{36}$ c) $\frac{3}{36}$
d) $\frac{7}{36}$ e) Aucune réponse

17.- Si dans une classe il y a 22 filles et 18 garçons alors la chance de choisir au hasard un garçon dans la classe est :
a) 18% b) 22%
c) 36% d) 45%

18.- 30 pour 100 des jetons d'une boite sont rouges et les 28 autres sont noires. Si on tire simultanément deux jetons au hasard dans la boite alors le nombre de jetons qu'il y a dans la boite est :
a) 30 b) 70
c) 50 d) 40

8- Un lecteur dans une bibliothèque choisit un livre au hasard parmi 200 ouvrages dont 150 romans policiers et 50 biographes. 40% des romans policiers et 70 % des biographes sont écrits en français. La probabilité que le lecteur choisisse un livre écrit en français est :
a) 0,547 b) 0,745
c) 0,675 d) 0,475

19- On tire au hasard et simultanément 2 boules dans une boite contenant 5 rouges et des boules noires. Si la probabilité d'obtenir 2 rouges est $\frac{2}{9}$, alors le nombre de boules noires est :
a) 10 b) 7 c) 5 d) 9

20- Jacques a en main sept (7) pièces de monnaie : trois pièces d'une gourde (1) ; deux (2) pièces de cinquante (50) centimes et deux (2) pièces de vingt (20) centimes. Il tire au hasard et en même temps trois pièces, la probabilité pour qu'il obtienne une somme de deux gourdes est :

a) $\frac{3}{35}$ b) $\frac{2}{35}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{2}{7}$

21- On choisit 2 cartes au hasard parmi 10 cartes numérotées de 1 à 10 ; la probabilité pour que la somme des deux cartes tirées soit impaire est :

a) $\frac{27}{45}$ b) $\frac{24}{45}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{9}{5}$

22- Un sac contient 8 pièces de monnaie ; 3 pièces de 10 centimes, 4 pièces de 20 centimes, 1 pièce de 50 centimes. On tire ensemble 3 pièces, tous les groupes de 3 pièces ont même probabilité d'être tirés. La probabilité d'obtenir une somme supérieur ou égale à 60 centimes est…

a) $\frac{2}{28}$ b) $\frac{31}{56}$ c) $\frac{35}{36}$ d) $\frac{25}{36}$

23- On tire au hasard et simultanément une main de 5 cartes d'un jeu ordinaire de 32 cartes. La probabilité d'obtenir 3 carreaux est…

a) 0,678 b) 0,8670
c) 0,0678 d) 0,0768

24- On tire au hasard et ensemble 8 cartes d'un jeu de 32 cartes. La probabilité d'obtenir au moins un as est :

a) 0,29 b) 0,17
c) 0,92 d) 0,71
e) Autre (préciser)

25- Le jeu de borlette comporte 100 numéros et 3 lots. Une personne achète deux numéros différents ; la probabilité pour que cette personne gagne au moins un lot est :

a) 0,94 b) 0,60
c) 0,49 d) 0,06

26- Un jeu de cubes se compose de 13 cubes noires et 2 cubes rouges. Si la probabilité d'avoir au moins un cube rouge dépasse $\frac{6}{7}$, alors le nombre n de cubes qu'il faut prendre simultanément est tel que :

a) $n \in]4,\ 9]$ b) $n \in]7,\ 15]$
c) $n \in]9,\ 15]$ d) $n \in]12\ \ 15]$

27- A l'occasion d'une tombola 100 billets sont vendus. Parmi ceux ci, il y a deux gagnants. Si la probabilité de gagner au moins une fois est égale à $\frac{17}{75}$, alors on doit prendre :

a) 10 billets b) 12 billets
c) 15 billets d) 11 billets

28- Sur 1000 étudiants d'un lycée 500 étudient l'anglais ; 300 étudient l'espagnol ; 100 apprennent l'allemand ; 70 l'anglais et l'espagnol ; 50 l'anglais et l'allemand, 20 l'espagnol et l'allemand, 10 les trois langues. Si on interroge au hasard un de ces 1000 étudiants, la probabilité qu'il n'étudie aucune de ces langues est :

a) 0,12 b) 0,04
c) 0,23 d) aucune de ces réponses

29- A un examen technique, un étudiant doit répondre à 3 questions sur un total de 30. Sachant que des 30 questions proposées, il n'en connaît que 20 la probabilité qu'il a de répondre à aucune question :

a) 0,281 b) 0,0468
c) 0,0221 d) aucune de ces réponses

30.- Soit un dé cubique à six faces numérotés de 1 à 6. Si ce dé est truqué de manière que la probabilité d'obtenir le numéro « 1 » soit $\frac{1}{3}$ et que les autres numéros aient même probabilité. La probabilité d'obtenir un numéro pair sur ce dé est :

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{2}{15}$

31- - On considère l'équation du second degré : $ax^2 + bx + 2 = 0$. On jette simultanément un de cubique bleu et un de cubique rouge dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère, pour chaque lancer, l'équation précédente dans laquelle a est égal au nombre marqué sur le dé bleu et b le nombre marqué sur le dé rouge. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. L'équation admet deux racines distinctes.
2. L'équation a une racine double.
3. L'équation admet deux racines complexes conjuguées.

a) $\frac{9}{36}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{26}{36}$

32.- Dans un club de 9 personnes, composé de 5 filles et de 4 garçons ; on doit choisir 4 personnes pour jouer 4 rôles différents dans une petite pièce de théâtre. Déterminer la probabilité pour que :

a) Les 4 rôles soient tenus par 4 garçons
b) 3 filles exactement jouent trois des rôles
c) Au moins une fille joue l'un des rôles

33.- Dans un tiroir, on a rangé 15 casettes : 4 casettes de musique classique ; 8 cassettes de rock et 3 cassettes de jazz. On extrait au hasard et en même temps 3 cassettes parmi ces 15 cassettes. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. A : « On extrait une cassette de chaque sorte »
2. B : « On extrait 3 cassettes de rock »
3. C : « On extrait au moins une cassette de jazz »

Rép.- $P(A)=\dfrac{96}{455}, P(B)=\dfrac{56}{455}, P(C)=\dfrac{235}{455}$

34.- Une urne contenant 6 boules dont 2 rouges et 4 noires. Le tirage d'une boule rouge rapporte 20 gourdes et celui d'une boule noire ne rapporte rien, on extrait au hasard et simultanément 2 boules de l'urne.

Déterminer la probabilité
a) De ne rien gagner
b) De gagner 40 gourdes
c) De gagner seulement 20 gourdes

35.- Une Urne contient 15 boules dont n sont blanches $(n \geq 2)$ et le reste est rouge. On tire ensemble deux boules de l'urne.

1. Calculer, en fonction de n, la probabilité pour que les deux boules tirées soient blanches.
2. Pour quelle valeur de n cette probabilité est-elle a $\frac{1}{5}$?
3. La probabilité de tirer au moins une boule rouge est supérieur à $\frac{4}{7}$. Calculer le nombre maximal de boules blanches contenues initialement dans l'urne.

36.- Jean possède dans le tiroir de son armoire 5 paires de chaussettes noires, 3 paires de chaussettes vertes et 2 paires de chaussettes rouges, mais ces chaussettes sont mélangées dans le plus grand désordre et indiscernables au toucher.

Au moment où Jean s'apprête à s'habiller survient une panne d'électricité. Jean qui est pressé et qui n'a pas de lampe de poche, prend au hasard deux chaussettes dans le tiroir.

1) Calculer à 0,01 près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré 2 chaussettes noires.
2) Calculer à 0,01 près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré 2 chaussettes de même couleur.
3) En supposant que le nombre de chaussettes vertes et le nombre de chaussettes rouge restent inchangés, calculer quel devrait être le nombre n de chaussettes noires (….) contenue dans le tiroir pour que la probabilité d'avoir deux chaussettes noires soit égale à $\dfrac{2}{7}$

Rép : n = 12

37.- Une urne contient 4 boules blanches, 4 (3) boules rouges et 4 (3) boules jaunes. On tire simultanément 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants

1. A « obtenir 3 boules de même couleur »
2. B « obtenir 3 boules de couleurs différentes »
3. C « obtenir deux boules d'une couleur et la 3^e d'une autre couleur »
4. D « obtenir au moins une boule rouge »
5. E « obtenir aucune boule rouge »
6. F « obtenir au plus deux boules rouges »

38- Parmi 16 personnes 10 fument des cigarettes brunes, 5 fument des cigarettes blondes, 3 fument les deux. On choisit 3 personnes et on suppose que les groupes de 3 personnes ont tous la même probabilité d'être choisis. Déterminer la probabilité pour que :

a) Ces trois personnes fument des cigarettes.
b) Ces trois personnes ne fument pas des cigarettes.
c) une d'entre elles fume uniquement des cigarettes brunes.
d) Au moins deux d'entre elles fument des cigarettes brunes.

39- Une classe de terminale C d'un lycée compte 30 élèves, dont 10 filles.

1) À chaque cours de mathématiques le professeur interroge au hasard trois élèves. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) A : « Exactement deux des trois élèves interrogés sont des garçons »

b) B : « Les trois élèves interrogés sont de même sexe »

c) C : « Il y a au plus une fille parmi les trois élèves interrogés »

2) Parmi les 19 internes de la classe on compte 4 filles. On choisit au hasard, dans cette classe de 30 élèves, deux délégués de sexe différent. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) D : « Les deux délégués sont internes »

b) E : « Un seul des deux délégués est interne »

Rep : 1) a) ≈ 0,47 b) ≈ 0,31 c) ≈ 0,75
2)a) ≈ 0,14 b) ≈ 0,25

40- On tire simultanément 3 jetons dans une boite qui en contient 7 dont 4 portant le numéro « 1 » et trois portent le numéro « 2 ». Calculer la probabilité des évènements suivants :

a) A « les 2 jetons portent le numéro « 1 »
b) B « tirer au moins un jeton portant le numéro « 2 ».
c) C « tirer exactement 2 jetons portant des numéros différents. » Que peut-on dire de cet évènement ?
d) D « tirer 3 jetons dont la somme des numéros inscrits est supérieure ou égale à 4.

41- On tire au hasard et en même temps 2 enveloppes d'un lot de 6 dont 2 contenant chacune un billet de \$50, 3 autres contiennent chacune 1 billet de \$100 et le 6e est vide. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) A « tirer une somme de \$150.
b) B « tirer une somme de \$100 »
c) C ' « tirer une somme supérieur ou égale à \$50. Que peut-on dire de cet évènement.

Chapitre II

Probabilité conditionnelle

Définition Soit A un événement quelconque et B un événement de probabilité non nulle. La probabilité que l'événement A soit réalisé sachant que B est réalisée ou tout simplement la probabilité de A sachant que B est une probabilité conditionnelle. Cette probabilité notée $P(A/B)$ est défini par :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B)\neq 0$$

On déduit de la définition précédente, la probabilité de l'intersection

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B) \quad \text{si} \quad P(B)\neq 0$$

Remarque.-

En échangeant les lettres A et B, on a aussi : Si $p(A)\neq 0; p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B/A)$

Idées et Stratégies

Sur un arbre de probabilité :

- ❖ La somme des probabilités portées par les branches issues d'un même cœur est égale à 1
- ❖ La probabilité d'un événement est égale au produit des probabilités par les branches qui aboutissent à cet événement

Indépendance des deux événements

Définition On dit que deux événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Idées et Stratégies

Si les événements A et B sont indépendants et si $P(B)\neq 0$, on obtient :

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$$
$$\text{et } P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

On en déduit : $P(A/B)=p(A)$;
Ce qui traduit le fait que la réalisation de B n'influence pas la réalisation de A : A ne dépend pas B.
De même, or $P(A/B)=p(B)$, B ne dépend pas de A

Exercices

1.- On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes dont on a perdu l'as de pique

1) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants

   R : « La carte tirée est un roi »

   P : « La carte tirée est un pique »

   $R \cap P$: « La carte tirée est un roi et un pique »

2) Déterminer la probabilité de tirer un roi parmi les piques

2.- On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes

1) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : « la carte tirée est un roi »

   B : « la carte tirée est un pique »

   A ∩ B : « la carte tirée est le roi de pique »

2) Calculer la probabilité de A sachant que B

3.- Dans un collège de Port-au-Prince, 25% des élèves échouent en mathématiques, 15% échouent en chimie ; 10% échouent en mathématiques et en chimie. On choisit un élève au hasard

1. Si l'élève a échoué en chimie, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en mathématiques ?
2. Si l'élève a échoué en mathématiques quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoue en chimie ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'il ait échoue en mathématique ou en chimie ?

4.- Une boite A contient 8 objets dont 3 défectueux. Une boite B contient 5 dont 2 sont défectueux. On prend au hasard un objet dans chaque boite.

a) Quelle est la probabilité d'avoir 2 objets non défectueux ?

b) Quelle est la probabilité qu'un objet soit défectueux et l'autre non ?

c) Si l'un des objets est défectueux et l'autre non, quelle est la probabilité pour que l'objet défectueux provienne de la boite A ?

Chapitre III

Variable aléatoire – loi de probabilité

Objectif Découvrir une variable aléatoire et déterminer sa loi de probabilité

Variable aléatoire

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher. Deux sont blanches et les trois autres sont noires. On extrait ensemble deux boules de l'urne en convenant que chaque boule blanche tirée rapporte une gourde et on note X la somme ainsi gagnée. Lors du tirage, on peut obtenir 0, ou 1 ou 2 boules blanches, donc le gain X peut prendre les valeurs 0 ou 1 ou 2

X prend des valeurs réelles qui dépendent du résultat de l'expérience ; X est donc une variable aléatoire

Loi de probabilité ou distribution de d'une variable aléatoire X

C'est l'application f définie par

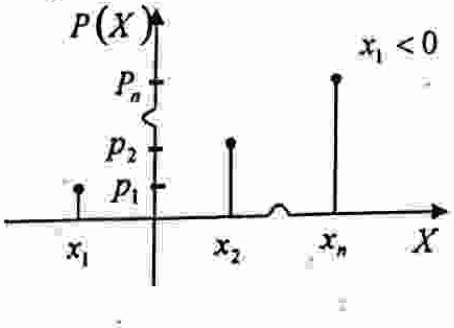
$f : X(\Omega) \to [0 \quad 1]$

$x_i \to f(x_i) = p(X = x_i) = p_i$

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1; x_2; ...; x_n$ avec les probabilités respectives $p_1; p_2; ...; p_n$. La loi de probabilité de X peut être résumée dans le tableau suivant :

X_i	x_1	x_2	...	x_n
P_i	p_1	p_2	...	p_n

Le diagramme correspondant à la loi de probabilité de la variable aléatoire X ci-dessus, appelé diagramme en bâtons, est donné par :



Fonction de répartition d'une variable aléatoire X et courbe cumulative

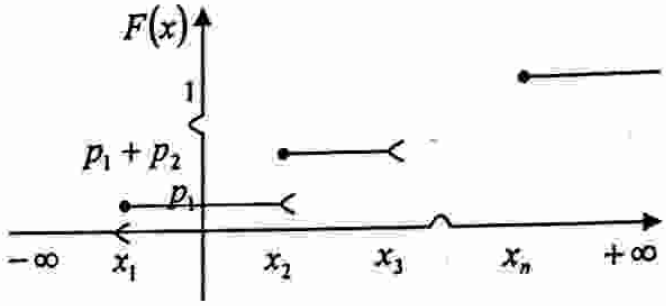
La fonction de répartition de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est définie ci-dessus est l'application F définie par :

$F : \Re \to [0;1]$

$x \to F(x) = P(X \le x)$

$x \in$	$]-\infty;-x_1[$	$[x_1;x_2[$	$[x_2;x_3[$	...	$[x_n;+\infty[$
$F(x)=$	0	p_1	p_1+p_2	...	1

La représentation graphique de cette fonction appelée « Courbe cumulative » est donnée



Espérance mathématique; Variance et écart-type d'une variable aléatoire X

Considérons la loi de probabilité de la variable aléatoire définie ci-dessus et ajoutons au tableau deux colonnes : x_iP_i et $x_i^2p_i$

X_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n	Total
P_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n	$\sum_{i=1}^{n} Pi = 1$
x_iP_i	x_1p_1	x_2p_2	x_3p_3	...	x_np_n	$\sum_{i=1}^{n} X_iPi = E(X)$
$x_i^2p_i$	$x_1^2p_1$	$x_2^2p_2$	$x_3^2p_3$	...	$x_n^2p_n$	$\sum_{i=1}^{n} X_i^2Pi = E(X^2)$

L'espérance mathématique de X encore appelée moyenne pondérée de X est le réel défini par :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} X_iP_i$$

Remarque

$$E(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + ... + x_n^2p_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2P_i$$

La variance de X notée V(X) est le réel positif défini par : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

L'écart-type de X notée $\sigma(X)$ correspond à la racine carrée de la variance

$$\sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Idées et Stratégies

- Un jeu est bénéfique, profitable ou avantageux si l'espérance mathématique est positive ou si la mise est inférieure à l'espérance mathématique
- Un jeu est déficitaire ou désavantageux si l'espérance mathématique est négative ou si la mise est supérieure à l'espérance mathématique
- Un jeu est équitable si l'espérance mathématique est nulle ou si elle est égale à la mise

Idées et Stratégies

Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X on suit les étapes suivantes

1) On détermine si possible l'univers associés à l'épreuve en question.
2) On détermine les valeurs prises par X.
3) On calcule les probabilités associées à chaque valeur de X

Exercices

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire dans les excecices 1 à 6

1.- D'une boite de 9 jetons numérotés de 1 à 9 ; on en tire simultanément 3 jetons. Si X est la variable aléatoire égale au nombre de jetons pairs tirés.

2.- D'une boite de 9 jetons numérotés de 1 à 9 ; on tire au hasard et simultanément 3 jetons. Le tirage d'un jeton pair rapporte 2 points et celui d'un jeton impair coûte 1 point. On note X la variable aléatoire égale à la somme des points éventuellement négative obtenue en tirant 3 jetons de la boite.

3.- D'un sac de 8 boules dont 4 noires et 4 rouges, on tire simultanément 4 boules. Soit n le nombre de boules noires tirées. Si X est l'aléa numérique tel que X = 2n-4.

4.- Une urne contient 7 jetons dont 4 portent le numéro 1 et 3 portent le numéro 2. on tire au hasard et ensemble 3 jetons de l'urne. Si X est la variable aléatoire égale à la somme des chiffres portés par les 3 jetons tirés.

5.- Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules de l'urne. Si X est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches restant dans l'urne après le tirage.

6.- On jette un dé non pipé numéroté de 1 à 6 ; chaque face à la même probabilité d'être apparue. Si on obtient un (1) on gagne 1 point ; si on obtient un (6) on gagne 6 points et on perd 2 points dans tous les autres cas. Si X est la variable aléatoire égale aux gains (éventuellement négatifs).

Cocher la bonne réponse dans les exercices 7 à 14.

7- Une variable aléatoire discrète X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3 avec les probabilités respectives $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{6}$. On donne les réponses suivantes :

a) $E(X)=3{,}5$ b) $V(X)=-2$

c) $\delta(X)=1{,}33$ d) $p\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 2\right)=\frac{7}{12}$

8- Une urne contient 10 boules 4 numérotées 1 et les autres portent le numéro 5. On tire au hasard et en même temps 2 boules de l'urne. Si X la variable aléatoire égale à la somme portée par les 2 boules tirées, alors l'écart type de X est :

a) $\delta(X)=\sqrt{2{,}61}$ b) $\delta(X)=0{,}76$

c) $\delta(X)=\sqrt{0{,}76}$ d) $\delta(X)=2{,}61$

9- Une urne contient 5 boules numérotées 1, 2, 3, 3, 4. Si on tire au hasard et simultanément 2 boules et on fait la somme X des nombres inscrits sur les deux boules tirées, alors l'écart type de X est :

a) $\delta(X)=5{,}2$ b $\delta(X)=\sqrt{1{,}56}$

c) $\delta(X)=\sqrt{5{,}2}$ d) $\delta(X)=1{,}56$

10- Un sac contient 10 billes dont 6 rouges et 4 vertes. Si on tire simultanément 3 billes du sac et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de billes rouges tirées alors l'écart type de X est :

a) $\delta(X)=1{,}8$ b $\delta(X)=\sqrt{1{,}8}$

c) $\delta(X)=\sqrt{0{,}56}$ d) $\delta(X)=0{,}56$

11- Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Si on tire au hasard et en même temps 3 jetons du sac et on désigne par X la variable aléatoire égale à la valeur du plus grand des numéros figurant sur les 3 jetons tirés. Alors l'espérance mathématique de X est :

a) $E(X)=6{,}7$ b $E(X)=8{,}7$

c) $E(X)=7{,}7$ d) $E(X)=8{,}25$

12- La loi de probabilité d'une variable aléatoire est donnée par le tableau suivant :

X_i	-2	-1	0	1	2
P_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	P_0	P_1	P_2

Sachant que $E(X)=\frac{1}{3}$ et $\delta(X)=\frac{5\sqrt{2}}{6}$, le triplet P_0, P_1, P_2 est égale à :

a) $(\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{6})$ b) $(\frac{1}{4};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{3})$

c) $(\frac{1}{6};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{3})$ d) $(\frac{1}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{6})$

13- Un sac contient 5 jetons où sont inscrits respectivement les entiers (-2), (-1), (0), (1), (2).

Si on tire simultanément 2 jetons et l'on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur la valeur absolue de la différence des nombres obtenus, alors l'écart type est :

a) $\delta(X)=1$ b $\delta(X)=\sqrt{1{,}73}$

c) $\delta(X)=2$ d) $\delta(X)=1{,}73$

14- Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5 ; on effectue dans cette urne deux tirages d'une boule au hasard, avec remise et on considère la variable aléatoire X qui, à chaque couple de boules, associe la somme des nombres obtenus. L'espérance mathématique de X est

a) 6,6 b) 7,6 c)6 d)5,6

15.- Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

X_i	-3	-2	-1	0	1	2
P_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	a	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Déterminer a puis construire le diagramme de la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

1) 2) Calculer $P(X>-1)$; $P(X\le 1)$; $P(-3\le X<1)$

2) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

3) Calculer l'espérance et l'écart-type de X

16.- Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire simultanément 3 boules au hasard. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées

1) Déterminer la loi de probabilité de X et construire son diagramme

2) Déterminer la probabilité des événements suivants :

$X=1$ b) $X>2$ c) $0\le X<3$

3) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X

4) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X

17.- Une urne contient 10 billets de une gourdes et 5 billets de deux gourdes. On tire au hasard et en même temps 4 billets de l'urne.

1) Déterminer la probabilité de tirer au plus deux billets de 2 gourdes

2) On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme en gourde des billets tirés.

a) Déterminer la loi de probabilité de X et construire son diagramme

b) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X

c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X

Rép.1) 0,92

2) c) E(X)= 5,33 V(X)=0,70 $\sigma(X)=0{,}83$

18.- La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	a

a) Compléter le tableau précédent

b) Représenter graphique la fonction de répartition de la variable aléatoire X

c) Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de X

E(X) = 2 V(X) = 2,64 $\delta(x)=1{,}62$

19.- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	1	3	7	10
$f(x=x_i)$	0,1	0,2	...	0,3	...

a) Compléter le tableau sachant que $p(X=3)=p(X=10)$

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart – type de X

c) Etudier et représenter la fonction de répartition de X

20.- Le tableau ci-dessous représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X

$X = x_i$	-2	-1	0	1	2
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{5}$	a	$\frac{3}{10}$	b	$\frac{1}{10}$

Si X représente le gain d'un joueur à un jeu

a) Déterminer a et b pour que ce jeu soit équitable

b) On suppose que $a = \frac{1}{10}$ et $b = \frac{3}{10}$, construire le diagramme en bâton et la courbe cumulative de la fonction de répartition de X

c) Calculer l'écart – type de X de la loi de probabilité de X

21.- On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. X étant la variable aléatoire définie par les résultats suivants :

- On gagne $2F$ pour chaque « 2 piles obtenues exactement »
- On gagne $1F$ pour chaque «2 faces obtenues exactement »
- On perd $1F$ pour chaque « 3faces obtenues exactement »
- On perd $2F$ pour chaque « 3piles obtenues exactement »

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X.

c) Calculer la variance et l'écart-type de X.

22.- La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est définie par le tableau ci-dessous

$x \in$	$]-\infty, -3[$	[-3, 5[	[5, 6[	[6, 8[	$[8, +\infty[$
F(x)	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	...

1) Compléter ce tableau et donner la courbe cumulative de F

2) Donner la loi de probabilité de X

3) Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type $\sigma(X)$

23- Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'un espace probabilisé $(\Omega; P:(\Omega); P)$. La fonction de répartition est définie par :

$x \le -1, F(x) = 0$	$-1 < x \le 1, F(x) = \frac{3}{20}$
$1 < x \le 2, F(x) = \frac{1}{4}$	$2 < x \le 4, F(x) = \frac{1}{2}$
$4 < x \le 5, F(x) = \frac{7}{10}$	$x > 5, F(x) = 1$

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X
3. Tracer, dans le plan muni d'un repère, la coure cumulative de F.

24- On donne le tableau de la probabilité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X suivant :

Xi	-2	1	3	7	a
Pi	1/10	b	2/10	3/10	2/10

1) Trouver b.

2) Déterminer a si $E(X) = \frac{47}{10}$.

3) Vérifier que le calcul de l'écart type de X donne 3,87.

4) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X suivant

25- Soit $(\Omega;\ p(\Omega);\ p)$ un espace probabilisé fini et X la variable aléatoire sur Ω prenant les valeurs -3, -2, 1, 3, 4 avec les probabilités respectives $\frac{1}{5}$, b, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, c. Si b=2c :

a) Déterminer les réels b et c.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X

Rép. a) $c=\frac{1}{6}$ et $b=\frac{1}{3}$

b) $E(X)=\frac{1}{10}$ $V(X)=7,69$

25- Dans un lot de 10 cartes dont 5 dames, 3 rois et 2 valets on extrait au hasard et simultanément deux cartes. Sachant qu'au tirage un roi rapporte 5 points, une dame 2 points, et valet fait perdre un point, on désigne par X la variable aléatoire correspond à la somme des points obtenus sur les deux cartes.

a) Quelles sont les valeurs de X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer la moyenne et l'écart type de X.

Rép. a) $X(\Omega)=\{-2 \quad 1, \quad 4, \quad 7, \quad 10\}$

c) $E(x)=\dfrac{23}{5} \quad \delta(x)=2{,}8$

26- On considère deux dés fantaisistes dont les faces sont numérotées de la façon suivante :

le premier 1, 2, 2, 3, 4, 4

le second 1, 3, 4, 5, 6, 8

a) On lance en même temps les deux dés et on appelle C le chiffre des unités de la sommes des points obtenus, on suppose que chaque face a la même probabilité d'être apparu.
   1) Préciser le nombre de résultats obtenus.
   2) Déterminer la probabilité pour que C soit un nombre premier.
b) Si X est la variable aléatoire égale au chiffre des unités de la somme des points obtenus lors des lancers des deux dés. Trouver l'écart-type de X.

27- On place dans un sac, 4 jetons blancs numérotés de 1 à 4 et 6 jetons noirs numérotés de 1 à 6. On tire simultanément 2 jetons de ce sac, on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1) a) Combien y a t-il de tirages distincts ?

b) Quelle est la probabilité de tirer deux jetons de même couleur ?

c) Quelle est la probabilité de tirer 2 jetons portant le même numéro.

2) On appelle X la variable aléatoire qui, au tirage des jetons numérotés a et b, associe la valeur absolue de la différence b-a.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Quelle est l aloi de probabilité de X ? Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

1) a) $Card\Omega=45$ b) $p(A)=\dfrac{7}{15}$

c) $E(X)=1{,}98 \quad V(X)=1{,}61$

28- un sac contient quatre jetons bleus numérotés 1, 2, 3, et 4 ; un autre sac contient trois jetons rouges numérotés 1, 2, et 3. on extrait un jeton de chaque sac ; soit a le nombre porté par le jeton bleu et b celui porté par le jeton rouge. Les couples (a, b) possibles. On suppose que tous ces couples (a, b) ont la même probabilité d'être obtenus. Soit X la variable aléatoire qui associe la nombre a+b à chaque tirage de deux jetons.

1) Quel est le nombre d'éventualités ?

2) Déterminer les valeurs prise par X, sa loi de probabilité et son diagramme.

3) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

4) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

1) $Card\Omega=12$

2) $X(\Omega)=\{2, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 7\}$

3) $E(X)=4{,}5 \;\; V(X)=1{,}92$

29- Dans une boite il y a 10 jetons dont 3 rouges et 7 blancs. Les jetons rouges portent le chiffre 2 et les jetons blancs le chiffre 1. On tire au hasard et successivement avec remise 2 jetons de la boite.

a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 jetons de même couleur.

b) Si *a* et *b* désignent respectivement les nombres portés par le premier et le second jetons tirés, on définit la variable aléatoire $X=a^2-b$.

1) Donner l'univers-image de X

2) Déterminer la loi de probabilité de X. En déduire la moyenne de X

30- Une variable aléatoire discrète prend les valeurs 1; -2 et 3 avec les probabilités respectives $\ln\alpha, \ln\beta$ et $\ln\lambda$ où les réels strictement positifs (α,β,λ) sont en progression géométrique puis on pose $E(x)=1$

a) Calculer. (α,β,λ)

c) Etudier et représenter la fonction de répartition de X

20.- Le tableau ci-dessous représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X

$X = x_i$	-2	-1	0	1	2
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{5}$	a	$\frac{3}{10}$	b	$\frac{1}{10}$

Si X représente le gain d'un joueur à un jeu

a) Déterminer a et b pour que ce jeu soit équitable

b) On suppose que $a = \frac{1}{10}$ et $b = \frac{3}{10}$, construire le diagramme en bâton et la courbe cumulative de la fonction de répartition de X

c) Calculer l'écart – type de X de la loi de probabilité de X

21.- On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. X étant la variable aléatoire définie par les résultats suivants :

- On gagne $2F$ pour chaque « 2 piles obtenues exactement »
- On gagne $1F$ pour chaque «2 faces obtenues exactement »
- On perd $1F$ pour chaque « 3faces obtenues exactement »
- On perd $2F$ pour chaque « 3piles obtenues exactement »

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X.

c) Calculer la variance et l'écart-type de X.

22.- La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est définie par le tableau ci-dessous

$x \in$	$]-\infty, -3[$	$[-3, 5[$	$[5, 6[$	$[6, 8[$	$[8, +\infty[$
F(x)	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	…

1) Compléter ce tableau et donner la courbe cumulative de F
2) Donner la loi de probabilité de X
3) Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type $\sigma(X)$

23- Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'un espace probabilisé $(\Omega; P:(\Omega); P)$. La fonction de répartition est définie par :

$x \leq -1, F(x) = 0$	$-1 < x \leq 1, F(x) = \frac{3}{20}$
$1 < x \leq 2, F(x) = \frac{1}{4}$	$2 < x \leq 4, F(x) = \frac{1}{2}$
$4 < x \leq 5, F(x) = \frac{7}{10}$	$x > 5, F(x) = 1$

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X
3. Tracer, dans le plan muni d'un repère, la coure cumulative de F.

24- On donne le tableau de la probabilité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X suivant :

Xi	-2	1	3	7	a
Pi	1/10	b	2/10	3/10	2/10

1) Trouver b.

2) Déterminer a si $E(X) = \frac{47}{10}$.

3) Vérifier que le calcul de l'écart type de X donne 3,87.

4) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X suivant

25- Soit $(\Omega;\ p(\Omega);\ p)$ un espace probabilisé fini et X la variable aléatoire sur Ω prenant les valeurs -3, -2, 1, 3, 4 avec les probabilités respectives $\frac{1}{5}$, b, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, c. Si b=2c :

a) Déterminer les réels b et c.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X

Rép. a) $c = \frac{1}{6}$ et $b = \frac{1}{3}$

b) $E(X) = \frac{1}{10}$ $V(X) = 7,69$

25- Dans un lot de 10 cartes dont 5 dames, 3 rois et 2 valets on extrait au hasard et simultanément deux cartes. Sachant qu'au tirage un roi rapporte 5 points, une dame 2 points, et valet fait perdre un point, on désigne par X la variable aléatoire correspond à la somme des points obtenus sur les deux cartes.

a) Quelles sont les valeurs de X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer la moyenne et l'écart type de X.

Rép. a) $X(\Omega)=\{-2 \quad 1, \quad 4, \quad 7, \quad 10\}$

c) $E(x)=\dfrac{23}{5} \quad \delta(x)=2{,}8$

26- On considère deux dés fantaisistes dont les faces sont numérotées de la façon suivante :

le premier 1, 2, 2, 3, 4, 4

le second 1, 3, 4, 5, 6, 8

a) On lance en même temps les deux dés et on appelle C le chiffre des unités de la sommes des points obtenus, on suppose que chaque face a la même probabilité d'être apparu.
   1) Préciser le nombre de résultats obtenus.
   2) Déterminer la probabilité pour que C soit un nombre premier.

b) Si X est la variable aléatoire égale au chiffre des unités de la somme des points obtenus lors des lancers des deux dés. Trouver l'écart-type de X.

27- On place dans un sac, 4 jetons blancs numérotés de 1 à 4 et 6 jetons noirs numérotés de 1 à 6. On tire simultanément 2 jetons de ce sac, on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1) a) Combien y a t-il de tirages distincts ?

b) Quelle est la probabilité de tirer deux jetons de même couleur ?

c) Quelle est la probabilité de tirer 2 jetons portant le même numéro.

2) On appelle X la variable aléatoire qui, au tirage des jetons numérotés a et b, associe la valeur absolue de la différence b-a.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Quelle est l aloi de probabilité de X ?

Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

1) a) $Card\Omega=45$ b) $p(A)=\dfrac{7}{15}$

c) $E(X)=1{,}98 \quad V(X)=1{,}61$

28- un sac contient quatre jetons bleus numérotés 1, 2, 3, et 4 ; un autre sac contient trois jetons rouges numérotés 1, 2, et 3. ; on extrait un jeton de chaque sac ; soit a le nombre porté par le jeton bleu et b celui porté par le jeton rouge. Les couples (a, b) possibles. On suppose que tous ces couples (a, b) ont la même probabilité d'être obtenus. Soit X la variable aléatoire qui associe la nombre a+b à chaque tirage de deux jetons.

1) Quel est le nombre d'éventualités ?

2) Déterminer les valeurs prise par X, sa loi de probabilité et son diagramme.

3) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

4) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

1) $Card\Omega=12$

2) $X(\Omega)=\{2, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 7\}$

3) $E(X)=4{,}5 \quad V(X)=1{,}92$

29- Dans une boite il y a 10 jetons dont 3 rouges et 7 blancs. Les jetons rouges portent le chiffre 2 et les jetons blancs le chiffre 1. On tire au hasard et successivement avec remise 2 jetons de la boite.

a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 jetons de même couleur.

b) Si *a* et *b* désignent respectivement les nombres portés par le premier et le second jetons tirés, on définit la variable aléatoire $X=a^2-b$.

1) Donner l'univers-image de X

2) Déterminer la loi de probabilité de X. En déduire la moyenne de X

30- Une variable aléatoire discrète prend les valeurs 1; −2 et 3 avec les probabilités respectives $\ln\alpha, \ln\beta$ et $\ln\lambda$ où les réels strictement positifs (α,β,λ) sont en progression géométrique puis on pose $E(x)=1$

a) Calculer. (α,β,λ)

b) Calculer la variance et l'écart-type de X
c) Déterminer la fonc.ion de répartition de X

31- Dans une bibliothèque se trouvent 10 livres ; 50% de ces livres sont écrits en Anglais. 20% sont écrits en Allemand et 30 % sont écrits en Russe. On prélève au hasard et avec équiprobabilité 5 de ces livres.
1) Calculer la probabilité des évènements suivants
A : »3 livres sont écrits en une langue et 2 en une autre »
B : « Plus de 2 livres sont écrits en Anglais »
C) « Moins de 3 livres sont écrits en Russe »
2) Soit X l'aléa numérique qui, à chaque prélèvement de 5 livres, associe le nombre de volume en Russe prélevé.
a) Déterminer la loi de probabilité et la fonction de répartition de X puis les construire.
b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

32- Dans la salle de conférence pénètrent l'un après l'autre et au hasard 6 journalistes dont 4 haïtiens et deux canadiens.
a) Quelle est la probabilité que 2 haïtiens pénètrent en premier et un canadien en dernier.
b) Soit X la variable aléatoire qui prend pour le nombre de journalistes haïtiens qui pénètrent dans la salle avant le premier journaliste canadien.
1) Trouver la loi de la probabilité de X.
2) Calculer la variance de X.
3) Déterminer la fonction de réparation de X.

33.- Une variable aléatoire discrète X prend les valeurs 3, 4, 5 et 6. Sachant que $P(X>5)=\frac{1}{2}$; $P(X<5)=\frac{1}{3}$; $P(X=3)=P(X=4)$
Déterminer la loi de probabilité de X puis son diagramme en bâton
Déterminer la fonction de répartition de X et sa courbe cumulative
Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X

34.- Un jeu consiste à extraire une boule au hasard d'une contenant huit boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 8.
Le tirage d'une boule « impaire » rapporte une somme dont le montant est égal au numéro tiré.
Le tirage d'une boule « paire »fait perdre une somme dont le montant est égal à la moitié du numéro tiré.
Soit X la variable aléatoire égale au gain (éventuellement négatif) obtenu à l'issue d'un tirage.
Déterminer la loi de probabilité de X
Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
Accepteriez-vous de payer 1 gourde pour participer à ce jeu ?

35.- Un dé est truqué de telle sorte que les probabilités d'apparition soient proportionnelles aux numéros. Soit X la variable aléatoire définie par le numéro sorti
Définir la loi de probabilité de X puis construire son diagramme
Déterminer la fonction de répartition de X et construire sa courbe cumulative
Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type $\sigma(X)$

36- On jette successivement sur une table deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note X la variable aléatoire égale au produit des nombres obtenus.
Donner la loi de probabilité de X puis son diagramme en bâtons.
Donner la fonction de répartition de X et sa courbe cumulative.
Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

37- Dans le lancer d'un dé parfait, on considère l'aléa numérique discret X qui associe à « 1 » la valeur 0, à un nombre pair la valeur « 2 », à un nombre impair autre que « 1 » la valeur 5.
1- Donner les valeurs prises par X.
2- Déterminer la loi de probabilité de X et la représenter par un diagramme.
3- Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

38 Les six faces d'un dé cubique sont numérotées comme : 3, 4, 5, 6, 6, 6. On admet que lors d'un lancer, la probabilité d'apparition de chaque face est kx, x étant le numéro de la face supérieure et k un réel.

1- Trouver la valeur de k.

2- On considère l'épreuve qui consiste à lancer le dé une fois. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque épreuve associe le nombre inscrit sur la face supérieure du dé.

a- Trouver la loi de probabilité de X.

b- Décrire la fonction de répartition F de X et donner sa représentation graphique.

c- Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

39- Une expérience aléatoire consiste à tirer une carte des huit cartes retournées : sept, huit, neuf, dix, valet, dame, roi et as. Le tirage d'un as rapporte 20 points ; celui d'un roi et d'une dame rapporte 10 points ; celui d'un valet et d'un dix rapporte 5 points et celui des autres cartes ne rapporte rien. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus.

1- Déterminer la loi de probabilité et la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
2- Construire le diagramme de la loi de probabilité et la courbe cumulative de la fonction de répartition de X.
3- Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

Rép. $E(X)=6{,}25$ $V(X)=42{,}19$ $\sigma(X)=6{,}49$

40- Un jeu consiste à lire le nombre obtenu en grattant (4) cases placées côte à côte où peut apparaître au hasard sur chacune d'elles un et un seul des chiffres 1, 2, 3 et 4.

a) Justifier que la quantité de nombre possibles à lire est 256.
b) Calculer la probabilité de lire :
   1) Un nombre de quatre chiffres identiques.
   2) Un nombre de quatre chiffres différents.
c) X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le nombre lu est pair et la valeur 0 sinon. Donner la distribution de X et l'écart-type de X.

41- Un sac contient 7 jetons tels que trois sont noirs et portent des chiffres 1, 2, 2. Quatre sont rouges et portent es chiffres 1, 1, 1, 2. On tire ensemble 3 jetons du sac ; on suppose que les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

1) Calculer la probabilité pour que parmi les 3 jetons tirés, deux et deux seulement soient rouges.

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe la somme des chiffres portés par les jetons tirés.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

42- Un sac contient 7 boules bleues et 3 boules rouges. Un joueur tire simultanément 5 boules du sac. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues par le joueur.

1) a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\delta(X)$.

2) Pour chaque boule bleue tirée, le joueur gagne a gourdes et pour chaque boule rouge tirée, il perd b gourdes ; on note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Quelle est la loi de probabilité de Y.

b) Trouver une relation entre a et b si $E(Y)=0$

1) b) $E(X)=3{,}5$, $V(X)=0{,}58$, $\delta(X)=0{,}76$

2) b) $7a-3b=0$.

43.- Soit Ω l'univers fini associe a une épreuve et X une variable aléatoire définie sur Ω dont l'univers image est

$X(\Omega)=\{2;4;6;8;10\}$. Sachant que pour tout entier k de $X(\Omega)$ la probabilité de l'évènement (X=k) est proportionnelle a k

a) vérifier que $p(X=k)=\dfrac{k}{30}$

b) Déterminer la loi de probabilité de x. En déduire la variance de x

Définir la fonction de répartition de x

44.- On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Les éventualités étant les suites de « Piles » ou de « Faces » obtenues.

1) Déterminer l'univers des possibles
2) Calculer la probabilité de l'événement Pile apparaît exactement deux fois
3) On désigne par X l'aléa numérique discret représentant le nombre de fois que « Face » apparaît
   a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X et sa loi de probabilité
   b) Calculer la variance de X

45.- On lance trois fois de suite une pièce mal équilibrée. A chaque lancer, il y a une probabilité égale à $\frac{1}{3}$ d'obtenu « Pile » comme résultat. Les résultats des lancers successifs sont supposés indépendants. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de fois qu'on a obtenu « Pile » à l'issue des 3 lancers

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
c) Représenter cette loi par un diagramme en bâtons (les probabilités seront calculées à 10^{-2} près)

46.- On lance un dé blanc et un dé noir, chaque dé ayant ses faces numérotées de 1 à 6. Soit a le nombre obtenu sur la face supérieure du dé blanc et b celui obtenu sur la face supérieure du dé noir. Les éventualités sont les couples (a, b) possible. On suppose que tous les couples ont la même chance d'être obtenus. Soit x la variable aléatoire qui, à chaque couple (a, b) associe le réel x tel que :

- $x = b$ si a est pair;
- $x = b+1$ si a est impair et différent de 5 ;
- $x = b+2$ si a = 5

1) Quel est le nombre d'éventualités possibles ?
2) Déterminer la loi de probabilité de X
3) Déterminer la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement

4) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X

Rép.
$E(X) = 4{,}16 \quad V(X) = 3{,}41 \quad \delta(X) = 1{,}86$

47.- Dans un jeu de hasard, un joueur a misé une gourde sur le numéro 5. Le jeu consiste à jeter deux dés parfaits. Si le numéro 5 est obtenu sur chacun des deux dés, le joueur reçoit 5 gourdes. Si le numéro 5 est obtenu sur seul dé, le joueur reçoit 2 gourdes. S'il n'est obtenu sur aucun dé, le joueur perd sa mise

a) Quelles sont les probabilités respectives de ces 3 événements
b) Le gain du joueur (somme perçue sur la mise est une variable aléatoire). Quelle est son *espérance mathématique* ? Quelle conclusion peut-on tirer ?

48.- Un sac contient six boules numérotées : une porte, le numéro 1, deux portent le numéro 2 et trois portent le numéro 3. On tire simultanément deux boules du sac et suppose que les tirages sont équiprobables. On appelle X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage de deux boules fait correspondre la somme des deux numéros inscrits sur les deux boules

1) Quelle est la probabilité pour que :
   a) $X = 4$ b) $X \geq 5$
2) Quelle est la loi de probabilité de X
3) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X

Rép. $P(X=4)=0{,}27$ $\quad P(X\geq 5)=0{,}60$
$E(X) = 4{,}7 \quad \delta(X) = 0{,}94$

49- On dispose de 9 petits drapeaux dont 4 rouges, 3 bleus et 2 blancs. Les drapeaux rouges portent le chiffre 1, les bleus le chiffre 0 et les blancs le chiffre 3.

a) Si on place au hasard les 9 drapeaux autour d'un cercle métallique, quelle est la probabilité d'avoir les drapeaux de même couleur groupés ensemble?

b) On tire au hasard et simultanément 3 drapeaux parmi les 9.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 drapeaux de couleurs différentes?

2) Si X est la variable aléatoire correspondant à la son me des nombres inscrits sur les drapeaux tirés. Trouver la variance de X.

50- Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9 indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 jetons du sac.
1) Quelle est la probabilité pour que la somme des trois numéros d'un tirage soit paire ?
2) Un appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de numéros impairs figurant parmi les trois jetons tirés
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X

a) $P(A)=\frac{11}{21}$ b) $E(X)=1{,}66$

51- Une urne contient 10 boules dont trois portent le chiffre 1 ; trois portent le chiffre 2 et quatre portent le chiffre 3. on tire au hasard et en même temps 3 boules de l'urne et on note X la variable aléatoire égale à la somme des nombres inscrits sur les 3 boules tirées.
1) Déterminer la loi de probabilité de X et la fonction de répartition F.
2) Construit le diagramme de la loi de probabilité de X et la courbe cumulative de la fonction de répartition e x
3) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.
Rép
a) $E(X)=6{,}3$ b) $V(X)=1.63$;
c) $\delta(X)=1{,}276$

52- Les douze lettres du mot IRREDUCTIBLE sont inscrites sur douze cartes insérées dans douze enveloppes identiques. On prend simultanément cinq enveloppes :
1) Quelle est la probabilité pour qu'on puisse former le mot
a) BUT b) LEDUC
2) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de voyelles obtenues.
a) Former la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X

Rép. $P(BUT)=0{,}45$ $P(LEDUC)=0{,}027$

53.- Une urne contient cinq boules blanches, deux boules noires et trois boules rouges.
On extrait simultanément deux boules de l'urne et on suppose que les tirages sont équiprobables. On considère le jeu suivant :
- le tirage d'une boule noire rapporte 7 points
- le tirage d'une boule rouge rapporte 2 points
- le tirage d'une boule blanche enlève 2 points

On désigne par X la variable aléatoire réelle qui, à tout tirage de deux boules associe le nombre de points marqués
a) Donner la loi de probabilité de X
b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X
c) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Rép. $E(X)=2$ $\delta(X)=4{,}61$

54.- Une urne contient 10 boules dont 5 noires, 3 rouges et 2 blanches. On tire une boule de l'urne. On gagne une gourde si la boule est noire, on perd une gourde si la boule est rouge et on perd 2 gourdes si la boule est blanche. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le gain algébrique correspondant (une perte est considérée comme un gain négatif)
a. Laquelle des réponses suivantes donne la valeur $P(X\leq 1)$
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{8}{10}$ d)Aucune réponse
b. Déterminer la fonction de répartition de X et donner sa représentation graphique
c. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

55- . On dispose d'une pièce de monnaie et d'un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. (La pièce et le dé sont parfaitement symétriques). On réalise l'expérience consistant à lancer successivement la pièce et le dé, puis à tirer une carte dans un jeu ordinaire de 32 cartes.
a) Quel est le nombre d'issues possibles liées à cette expérience?
b) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair sur le dé et un cœur sur la carte tirée.

c) On désigne par X la variable aléatoire prenant la valeur $\frac{n}{2}$ si n est pair et $\frac{n+1}{2}$ si n est impair. (n étant le nombre obtenu sur le dé). Donner la loi de probabilité de X

56.- Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 5 sont numérotes 1 et les 5 autres sont numérotées 2. On tire simultanément 5 boules. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus

1) Etudier la loi de probabilité de X
2) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X
3) $E(X)=7{,}5$ $\quad V(X)=0{,}694$ $\quad \delta(X)=0{,}833$

57.- Une boite contient 6 boules vertes et n boules blanches parfaitement indiscernable au toucher. Un jeu consiste à tirer simultanément deux boules de la boite. Si le tirage est unicolore, le joueur gagne une gourde, si le tirage est bicolore, le joueur perd une gourde
Dans cette question, on suppose que n = 3. Calculer les probabilités d'obtenir respectivement un tirage unicolore et un tirage bicolore

a) Dans cette question, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain algébrique du joueur (le gain est négatif s'il y a perte).
b) Exprimer en fonction de n les probabilités $P(X=1)$ et $P(X=-1)$
c) Montrer que l'espérance mathématique est
$$E(X)=\frac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$$
d) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il équitable ?

58.- Une urne contient 4 jetons portant les numéros différents 1, 2, 3 et a $(a \in \mathbb{N}^*)$

La probabilité d'extraire les jetons 1, 2, 3 et a sont notées P_1 ; P_2 ; P_3 et P_a.
On suppose que ces probabilités sont dans cet ordre les 4 termes d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{12}$.

a) Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et P_a
b) Soit X la variable aléatoire qui associe au tirage d'un jeton le numéro de ce jeton.
c) Calculer a sachant $E(X)=\frac{53}{12}$. Dans ces conditions, étudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Rép. $P_1=\frac{1}{8}$ $\quad P_2=\frac{5}{24}$ $\quad P_3=\frac{7}{24}$ $\quad P_a=\frac{9}{24}$
$a=8$

59.- Une boite contient 7 jetons dont 3 rouges et 4 verts. On tire au hasard l'un après l'autre et sans remise tous les jetons de la boite.

a) Calculer la probabilité de tirer les jetons verts en premier.
b) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de jetons rouges tirés avant un premier vert.
   1) Déterminer la loi de probabilité de X.
   2) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X
   3) Étudier et représenter la fonction de répartition de X.

60.- Une urne contient huit boules dont 5 sont rouges et 3 sont blanches. On tire simultanément trois boules de l'urne et note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées

a) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches au plus ?
b) Quelle est la loi de probabilité de X
c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X
d) Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

61.- Un joueur lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Il gagne 2 gourdes pour chaque résultat « pile » et il perd 1 gourde pour chaque résultat « face »

a) Donner l'ensemble des issues
b) Quels sont les gains possibles ? Avec quelles probabilités ?

c) Déterminer le gain moyen que peut espérer le joueur sur un grand nombre de parties
d) Ce jeu lui est-il favorable s'il a misé 1 gourde avant de lancer la pièce de monnaie

62.- Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules blanches et une boule verte. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1) Calculer la probabilité de l'événement A « Avoir deux boules de la même couleur »
2) On considère le jeu suivant :
- Si on tire une boule rouge, on ne gagne rien
- Si on tire une boule verte, on gagne 3 gourdes
- Si on tire une boule blanche, on gagne 1 gourde. Soit X l'aléa numérique qui, à tout tirage simultané de 3 boules, associe le nombre de gourdes représentant le gain total du joueur.

a) Calculer l'espérance mathématique de X
b) Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne une somme strictement comprise entre 2 gourdes et 5 gourdes.

63.- Une urne contient 6 jetons : 3 jetons verts numérotes 1, 2 et 3 et 3 jetons rouges numérotes 2, 3 et 4. On tire simultanément deux jetons de l'urne. Tous les tirages possibles ont la même probabilité

1) Combien y-a-t-il de tirages possibles différents ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton de chaque couleur ?
3) On considère la variable aléatoire X qui à chaque tirage correspondre la valeur du jeton portant le plus petit numéro si les numéros sont distincts ou la demi somme augmentée de 1 si les numéros sont identiques.
   a) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X
   b) Représenter graphiquement la fonction de répartition de X

64.- Une urne contient cinq boules vertes et sept boules jaunes indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules de cette urne, les tirages étant supposent équiprobables.

1) Déterminer la probabilité des événements suivants :

a) « Les 3 boules sont de la même couleur »
b) « Deux boules au plus sont jaunes »

2) Chaque boule verte porte le nombre (-3) et chaque boule jaune porte le nombre (+2). On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 3 boules associe le produit des nombres obtenus
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Calculer l'écart-type de X
   c) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de X

Rép. P(A)=0,20 P(B)=0,84 $\delta(X)=14{,}66$

65.- Une urne contient 9 jetons indiscernables au toucher. Chaque jeton porte un mot de la phrase suivante : Il n'y a pas de mathématiques-sans- effort. On tire un jeton. On appelle X la variable qui, à chaque tirage associe le nombre de voyelle (distinctes ou non) du mot inscrit sur le jeton.

a) Déterminer la loi de probabilité de X
b) Représenter graphiquement la fonction de répartition de X
c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X

$$E(X)=\frac{14}{5} \quad V(X)=\frac{218}{81} \quad \delta(X)=\sqrt{\frac{218}{81}}$$

66.- Sur une table de travail on dépose successivement et au hasard sept ouvrages dont 4 de mathématiques et 3 de français..

a) Déterminer la probabilité de déposer 2 ouvrage de mathématiques e 1[er] et un ouvrage de français en dernier.

b) On désigne par X la variable aléatoire égale aux nombres d'ouvrages de mathématiques déposés avant le premier ouvrage de français. déterminer la distribution et la moyenne de X

Rép. $P(A)=\frac{6}{35}$ $E(X)=1$

67.- dix chevaux dont six noirs et quatre blancs pénètrent un par un sur une piste d'un cirque.

Ils sont nettement distincts les uns par rapport aux autres

1) De combien de façons peut-on les faire arriver sur la piste ?

2) Soit X la variable aléatoire tel que X soit le nombre de chevaux noirs précédant le premier cheval blanc qui arrive sur la piste

a)Déterminer la loi de probabilité de X

b)Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X

Rép E(X)=1, 2 $\delta(X)=1{,}24$

68.- Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La variable aléatoire X est égale au nombre de boules blanches restant dans l'urne après le tirage.

1) Déterminer la loi de probabilité de X puis son diagramme en bâton

2) Définir la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement

3) Calculer l'espérance mathématique E (X), la variance V (X) et l'écart-type $\sigma(X)$

Rép.- E (X) = 4,2 V (X) = 0,56 $\sigma(X)=0{,}75$

69.- Une urne contient 12 boules : 4 sont rouges et 8 sont noires. On admet que chaque boule a la même probabilité d'être choisie au tirage. On tire successivement 4 boules. Soit X la variable aléatoire égal au nombre de boules rouges apparues

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable X

b) Calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart-type

70.- À la Kermesse du collège, un jeu consiste à tirer 2 enveloppes parmi 5 dont une contient un billet de 1000 gourdes, 2 contiennent chacune un billet de 500 gourdes et les deux autres contiennent chacune une feuille sans valeur. Les enveloppes sont identiques et non transparentes. On note X la variable aléatoire égale à la somme gagnée par un joueur à ce jeu.

a) Donner la loi de probabilité de X et son diagramme

b) Etudier et représenter graphiquement la fonction répartition de X

c) Calculer l'expérience mathématique et l'écart type de X

d)

71.- Un jeu consiste à jeter un cubique numéroté de 1 à 6. Si on obtient un numéro impair, on gagne un nombre de points correspondant au double de ce numéro ; si on obtient un numéro pair on perd un nombre de points correspondant à ce numéro. On note X la variable aléatoire égale au gain(gain positif, gain négatif)

a) Donner la loi de probabilité de X et son diagramme

b) Etudier la fonction de répartition de X et construire sa courbe cumulative

c) Si chaque point équivaut à \$1, accepteriez-vous pour avoir le droit de jouer à ce jeu, de verser \$0,50

72.- La porte-monnaie de Louis contient 6 pièces de 10 francs parmi lesquelles se trouvent exactement 2 pièces fausses qui ne valent rien. Il règle un achat en choisissant au hasard deux de ces pièces. Soit X la somme déboursée par Louis.

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Déterminer la fonction de X et la représenter graphiquement.

c) Calculer l'espérance mathématique E (x) et l'écart-type $\sigma(x)$

$E(X)=13{,}33$ $\delta(X)=5{,}97$

73.- Chacun des mots de la phrase « rien ne sert de courir il faut partir à point » est inscrit sur un carton. On suppose les cartons indiscernables au toucher et on les place dans une urne. On tire un carton au hasard. Les tirages sont supposés équiprobables

- Si le mot inscrit sur le carton contient une voyelle, on gagne 10 points
- Si le mot inscrit sur le carton contient deux voyelles on perd 20 points
- Si le mot inscrit sur le carton contient trois voyelles on gagne 20 points

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de points obtenus (positifs ou négatifs)

1) Déterminer la loi de probabilité de X

2) Calculer l'expérience mathématique de X et l'écart-type de X
3) Sans changer les gains obtenus pour les mots contenant une ou trois voyelles, quelle devrait être la perte pour les mots contenant deux voyelles pour que le jeu soit équitable ?
Rép. 2) E(X)=−1 $\delta(X)=15.77$
3)-17,5

74.- Une loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte six portes de sortie, numérotées de 1 à 6. Soit x la variable aléatoire égale au numéro de la porte de sortie franchie par la bille. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{32}$	…	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	…	$\frac{1}{32}$

1) Compléter le tableau sachant que les probabilités des portes sorties 2 et 5 sont égales
2) La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 100 gourdes ; il reçoit 600 gourdes si la bille franchit les portes 1 ou 6 ; 200gourdes si la bille franchit les portes 3 ou 4. les portes 2 et 5 ne rapportent rien.
Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise. Soit y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur dans une partie
a) Déterminer la loi de probabilité de y
b) Le jeu est – il équitable ?
Rép. *La mise de 100 gourdes rapportent en moyenne 62,50 gdes ; ce qui correspond à une perte de 37,50 gdes donc le jeu n'est pas équitable.*

75.- Une urne contient 3 boules vertes, 4 boules rouges et 5 boules bleues. On tire au hasard et en même temps deux boules de l'urne.
1) Quelle est la probabilité d'avoir un tirage
a) un tirage unicolore b) Un tirage bicolore
2) Lorsqu'on tire une boule bleue, on marque un point ; lorsqu'on tire une boule rouge on perd un point ; lorsqu'on tire une boule verte, on marque zéro point, on désigne par X le nombre de points marqués
a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X
Calculer l'expérience mathématique et la variance de la variable aléatoire X

Chapitre IV

Epreuve de Bernouilli

Définition On appelle épreuve de Bernouilli, une expérience qui ne présente que deux issues possibles (succès ou échec).

La probabilité de succès est souvent notée p et celle d'échec q (p + q = 1)

Schéma de Bernouilli

On appelle schéma de Bernouilli la répétition de n épreuves de Bernouilli indépendantes les uns des autres; la probabilité de succès est la même d'une épreuve à l'autre.

Théorème

Exemple de schéma* de Bernouilli
- Lancer plusieurs fois de suite une pièce de monnaie équilibrée ou mal équilibrée
- Une suite de n tirages d'une boule dans une urne, avec remise après chaque tirage
- Lancer d'un dé etc.…
- Soit une suite de n épreuves de Bernouilli avec pour chaque épreuve : la probabilité p pour le succès et q l'échec
- La probabilité P_k d'obtenir k succès au cours de n épreuve est : $P_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ avec $0 \le k \le n$

Loi Binomiale

La variable X désignant le nombre de succès dans un schéma de Bernouilli suit la loi Binomiale de paramètres n et p noté B (n, p) où p est la probabilité de succès lors d'une épreuve et n le nombre d'épreuves répétées

Idées et Stratégies

- S'il y a répétition d'événements indépendants, on est en présence d'un schéma de Bernouilli
- La loi de probabilité ou la distribution d'une variable Binomiale X est donnée par $0 \le k \le n$
- $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

nombre de succès

➢ *Si une variable aléatoire X suit une distribution binomiale de paramètres n et p alors :*

➢ *L'espérance mathématique de X est donnée par* $E(X) = n\,p$

➢ *Sa variance est donnée par*

$V(X) = n\,p\,q$

1.- Une urne contient 5 boules dont 3 rouges et 2 noires. On tire deux boules de l'urne s'effectuant successivement avec remise ; c'est-à-dire après avoir tiré la première boule on note la couleur et on la remet dans l'urne avant de tirer la deuxième boule on désigne par X la variable aléatoire qui associe le nombre de boules rouges obtenues. Donner la loi de probabilité de X puis calculer son espérance mathématique et sa variance

2.- L'équipe de Football du Brésil a une probabilité de 4/5 de gagner chaque fois qu'elle joue. Sachant que l'équipe a joué 3 matches au premier tour de la Copa América (Paraguay 1999), Calculer la probabilité de gagner

a) Exactement deux matches ;
b) Au moins un match.

On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de matches gagnés par le Brésil au cours du premier tour.

c) Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la loi de probabilité de X et représenter cette loi par un diagramme en bâtons

3.- On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie mal équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir «face» comme résultat est la double de celle d'obtenir « pile» comme résultat. Les résultats des lancers successifs sont supposés indépendants. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de fois qu'on a obtenu « pile» à l'issu des 3 lancers.

1) Déterminer la loi de probabilité
2) Calculer l'espérance mathématique de X, la variance et l'écart-type de X.

4.- D'un jeu de 32 cartes contenant 4 as, on effectue le tirage d'une carte. Les trente deux éventualités sont équiprobables.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un as

2) Soit X la variable aléatoire associe au tirage d'un as le nombre 5 et au tirage d'une autre carte le nombre de (-1).

a) Déterminer la loi de probabilité de X
b) Etudier la fonction de répartition de X et tracer sa courbe.

3) On procède cinq fois de suite au tirage d'une carte que l'on replace dans le jeu avant chaque nouveau tirage et on note X la variable aléatoire au nombre d'as obtenus.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux as ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un as ?
c) Donner la loi de probabilité de X puis Calculer E(X), V(X) et $\sigma(X)$

5- 30 pour 100 des jetons d'une boite sont rouges et les 28 autres sont noirs, on tire simultanément deux jetons au hasard dans la boite.

a) Combien y a t-il de jetons dans la boite ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons de couleurs différentes ?
c) Si on extrait successivement avec remise 6 jetons au hasard dans la boite, quelle est la probabilité d'obtenir 4 jetons noirs ?

Rép. a) $n=40$ b) $P(A) \approx 0,43$ c) $P(4) \approx 0,324$

6.- Un homme en possession de 10 clés dont une est le bon essai d'ouvrir une porte. On suppose que les clés sont indiscernables. Il essaie les clés en remettant à chaque fois la clé essayée dans le trousseau.

1) Montrer que la probabilité d'ouvrir la porte au quatrième essaie seulement est égale à 0,0729

2) Il utilise maintenant une méthode consistant à mettre de coté la clé essayée et à continuer les essaies avec les clés restantes. Soit X le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte.

a) Déterminer la loi de probabilité de X
b) Calculer l'espérance mathématique de X et la variance.
c) Montrer que la variance de la variable aléatoire X est égale à 8,2

Analyse

Chapitre I

Objectif

Déterminer le domaine de définition d'une fonction numérique

Corps des nombres réels

Nombre réel On appelle nombre réel, tout nombre rationnel ou irrationnel

Nombre rationnel On appelle nombre rationnel, tout nombre dont le développement en fraction décimale est périodique.

Exemple 1:

$\frac{1}{11}=0,\overline{09}$; $\frac{17}{11}=1,\overline{54}$

Nombre irrationnel On appelle nombre irrationnel, tout nombre dont le développement en fraction décimale est illimité et non périodique.

Exemple 2 :

3,1415927....; $e=2,71828$......;

$\sqrt{3}=1,7320508$......; $\sqrt{2}=1,414213$.....

L'ensemble R est la réunion des rationnels et des irrationnelles.

Intervalle dans R

Soient a et b deux nombres réels quelconques tels que $a\leq b$. On appelle intervalle de R l'un quelconque des sous ensembles de R suivants :

$[a,b]=\{x\in\Re / a\leq x\leq b\}$

$]a,b[=\{x\in\Re / a<x<b\}$

$[a,b[=\{x\in\Re / a\leq x<b\}$

$]a,b]=\{x\in\Re / a<x\leq b\}$

Remarque

- $[a,a]=\{a\}$
- $[a,a[=]a,a]=]a,a[=\{\ \}$
- $[a,+\infty[=\{x\in R / x\geq a\}$

$]a,+\infty[=\{x\in R / x>a\}$

- $]-\infty,a]=\{x\in R / x\leq a\}$

$]-\infty,a[=\{x\in R / x<a\}$

Valeur absolue dans R

On appelle valeur absolue d'un réel x noté $|x|$, l'application f définie par

$f:R\rightarrow R_+$

$x\rightarrow |x|=\sup(x,-x)$

$$\text{Sup}(x;-x)=\begin{cases}x & si\ x>0\\ 0 & si\ x=0\\ -x & si\ x<0\end{cases}$$

$\forall(a,b)\in R^2 : |a.b|=|a|.|b|$

$\forall(a,b)\in R^2 : |a+b|\leq|a|+|b|$

$\forall a\in R,\ \forall b\in R^* : \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

$$\forall x\in R,\ si\ a\in R_+ : |x|=a\Rightarrow\begin{cases}x=a\\ ou\\ x=-a\end{cases}$$

Lemme

Théorème préliminaire c'est-à-dire un petit résultat qui annonce la démonstration d'un théorème

$\forall x\in R,\ si\ a\in R_+ : |x|\leq a\Rightarrow -a\leq x\leq a$

$\forall x\in R,\ si\ a\in R_- : |x|\leq a\ Absurde$

$$\forall x\in R,\ si\ a\in R_+ : |x|\geq a\Rightarrow\begin{cases}x\geq a\\ \text{ou}\\ x\leq -a\end{cases}$$

$\forall x\in R,\ si\ a\in R_- :\ |x|\geq a$: *Tout réel est solution*

Intervalle ouvert de centre xo et de rayon $\alpha>0$

$x_0-\alpha<x<x_0+\alpha$

$\Leftrightarrow\ x_0-\alpha-x_0<x-x_0<x_0-x_0+\alpha$

$-\alpha<x-x_0<\alpha \qquad |x-x_0|<\alpha$

Partie entière d'un nombre réel

La partie entière d'un nombre réel x noté E(x) est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

$E=(1,5)=1 \qquad E(-0,5)=-1$

$E=(-\sqrt{5})=-3 \qquad E=\left(\frac{9}{2}\right)=4$

Fonction partie entière

C'est la fonction définie par : $E:R\rightarrow Z$, $x\rightarrow E(x)$

Elle est définie par l'équivalence logique suivante :

$E(x)=n \qquad (n\in Z)\ \Leftrightarrow\ n\leq x<n+1$

Remarque

- $\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

  $E(x+k) = E(x) + k$

- .- ***Plus grand des deux réels a et b***
- Sup(a,b) = max (a,b) = a si a > b
- Sup(a,b) = max (a,b) = b si b > a

.- ***Plus petit de deux réels a et b***

- Inf(a,b) = min(a,b) = a si a < b
- Inf(a,b) = min(a,b) = b si b < a

Remarque

$$\text{Sup}(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

$$\text{Inf}(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

Idées et Stratégies

Pour comparer deux réels a et b, on étudie le signe de leur différence

$a - b \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow a < b$

$a - b \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow a > b$

Relier, si possible, chaque équation ou inéquation de gauche à son ensemble de solution inscrit à droite

$d(x-1,\ 3x+4) = 0$	$S = [2,3[$
$d(2x-1,\ 3x+4) < 2$	$]-7,-3[$
$d(x^2+2x,\ 2x+4) \leq 16$	$S = \left\{\frac{-5}{2}\right\}$
$E(x^2+7) = 8$	$]2,-1]$
$E(x+3) = 5$	$\left\{\frac{-1}{2}\right\}$
$E(1\text{-}x) = E(\sqrt{5})$	$\{-3\}$
$3E(x) + 4E(x+2) = 2E(x+9)$	$\{1\}$
$Sup(4x+5,\ 3x+2) = 3$	$[-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$
$Sup(4x+4,\ x+5) = 2$	$]-\sqrt{2},-1] \cup [1,\sqrt{2}[$
$Inf(2x+1,\ 4x+7) = 3$	

Fonction numérique

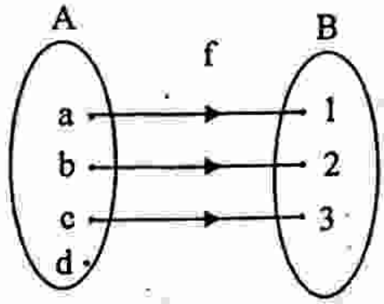
On appelle fonction numérique, toute application de R ou d'une partie de R vers R

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x)$

Domaine de définition d'une fonction numérique

Considérons deux ensembles A et B et f une fonction de A vers B



Le domaine de définition de f noté Df, est l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f dans B. $Df = \{a,b,c\}$

Périodicité d'une fonction

Une fonction f est périodique de période p si et seulement si

$\forall x \in Df, \exists p \in \mathbb{R}^* / f(x+p) = f(x)$

Exemple

1.- Démontrer que la fonction f telle que : *f(x)=sinx* est périodique.

Solution

Soit p cette période

$\forall x \in Df, \exists p \in \mathbb{R}^* / f(x+p) = f(x)$

$f(x+p) = \sin(x+p)$

$f(x+p) = f(x) \Rightarrow \sin(x+p) = \sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+p = k2\pi + x \\ x+p = k2\pi - x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow p = k2\pi$

La période fondamentale correspond à $k = 1$ d'où $p = 2\pi$

2.- Déterminer la période de la fonction f telle que : f(x) = Sin 7x

Solution

Soit p cette période $f(x+p) = f(x)$

$\sin(7x + 7p) = \sin 7x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 7p = k2\pi + 7x \\ 7x + 7p = k2\pi + \rho - 7x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 7p = k2\pi \Rightarrow p = \frac{k2\pi}{7}$

La période fondamentale correspond à $l = 1$, d'où $p = \frac{2\pi}{7}$

- Les fonctions sinx et cos x sont périodiques de période 2π. La fonction tgx est périodique de période π.

Généralités

Les fonctions *sinax* et *cosax* ; *sin(ax+b)* et *cos(ax+b)* *(a>0)* sont périodiques de période $\frac{2\pi}{|a|}$

Idées et Stratégies

- Si n est pair, les fonctions $\sin^n ax$ et $\cos^n ax$ sont périodiques de période $\frac{\pi}{|a|}$
- Si n est impair, les fonctions $\sin^n ax$ et $\cos^n ax$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{|a|}$
- Si f et g sont deux fonctions trigonométriques de périodes respectives p et p' alors (f + g) admet pour période le plus petit multiple commun de p et p'
- Une fonction f est bornée inférieurement et supérieurement sur un intervalle I de R ssi.
- $\forall x \in I, \exists (m,M) \in \mathbb{R}^2 / m \le f(x) \le M$

Exercices

1- Soit f la fonction définie par :

$$f : x \to (-1)^{E(x)}[x - E(x)]$$

Montrer que f est périodique de période 2.

2.- Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques de période p dont on précisera.

a) $f(x) = tgx + \sin\frac{3}{2}x$ b) $f(x) = \cos^2 3x$

c) $f(x) = \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ d) $f(x) = tg^4 2x$

e) $f(x) = \sin^5 3x$ f) $f(x) = \cos 5x$

g) $f(x) = \cos 5x$ h) $f(x) = \cos 2x + \sin 3x$

i) $f(x) = tg3x + \cos 2x$

j) $f(x) = \sin 2x + \cos^3 x$

3.- Montrer que les fonctions suivantes sont bornées

a) $f : x \to \frac{2}{x+1}$ *sur* $[2;4]$

b) $f : x \to \sqrt{2x+4}$ *sur* $[0;5]$

4.- Les fonctions suivantes sont-elles bornées ?

a) $f : x \to 2x\sin x$

b) $f : x \to \frac{1-\cos x}{x^2}$

5.- Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f : x \to \frac{|3x-5|}{\sqrt{x - E(x)}}$

b) $g : x \to \frac{2x+3}{x-|x|}$

c) $h : x \to \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-3}}{\cos 2x}$

6.- Soit la fonction définie par :

$f : x \to 2x - 2E(x)$

a) Démontrer que f est périodique de période 1

b) Résoudre dans R, l'équation f(x) = 0

Choisis la bonne réponse

7- Les valeurs des réels *a* et *b* pour lesquelles la fonction *f* est définie sur IR \ {-1, 3} par $f(x) = \frac{x+3}{x^2+ax+b}$ sont :

a) *a = -2 et b = 3*

b) *a = -2 et b = -3*

c) *a = 2 et b = - 3*

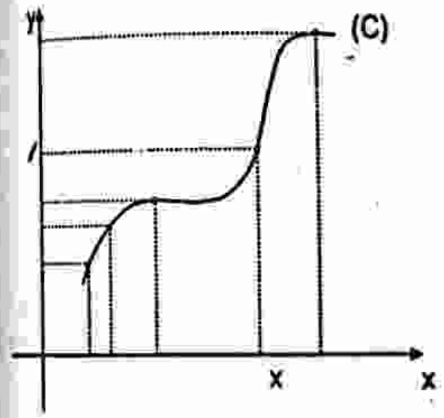
d) *a = 2 et b = 3*

Chapitre II

Objectif :

- **Étudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction numérique**
    - Limites d'une fonction
    - Approche de la notion de limite

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction. Lorsque x tend vers x_0 par valeurs positives ou valeurs négatives x appartient à l'intervalle ouvert de centre x_0 et de rayon α :



$x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\quad \Leftrightarrow \quad x_0-\alpha < x < x_0+\alpha$

$-\alpha < x - x_0 < \alpha \qquad |x-x_0| < \alpha(1)$

En même temps la fonction f(x) décrit l'intervalle ouvert de centre l et de rayon ε

$f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\quad \Leftrightarrow \quad \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$

$-\varepsilon < f(x)-\ell < \varepsilon \qquad |f(x)-\ell| < \varepsilon(2)$

On dit que la limite de la fonction définie ou non au point x_0 existe si quelque soit l'intervalle J de centre l, il existe un intervalle I de centre x_0 tel que $F(I) \subset J$. En d'autres termes :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in Df$;

$|x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$

Tableau résumant les limites finies et infinies :

x	f(x)	Conditions
x_0	ℓ	$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \|x-x_0\| < \alpha \Rightarrow \|f(x)-\ell\| < \varepsilon$
∞	ℓ	$\forall \varepsilon >, \exists A > 0, \|x-x_0\| < \alpha \Rightarrow \|f(x)-\ell\| < \varepsilon$
x_0	∞	$\forall \varepsilon >, \exists \alpha > 0, \|x-x_0\| < \alpha \Rightarrow \|f(x)\| > B$
$+\infty$	$-\infty$	$\forall B > 0, \exists \alpha > 0, \|x-x_0\| < \alpha \Rightarrow \|f(x)\| > B$
$+\infty$	$+\infty$	$\forall B > 0, \exists A > 0, x > A \Rightarrow f(x) < B$
$-\infty$	$-\infty$	$\forall B > 0, \exists A > 0, x > A \Rightarrow f(x) > B$
$-\infty$	$+\infty$	$\forall B > 0, \exists A > 0, x < -A \Rightarrow f(x) < -B$
		$\forall B > 0, \exists A > 0, x < -A \Rightarrow f(x) > B$

Limites de références

Les résultats suivants seront couramment utilisés dans les calculs de limites de fonctions $(n \in \mathbb{N}^*)$

$\lim_{x\to 0} x^n = 0$	$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty$
$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2n-1}} = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} x^{2n} - 1 = -\infty$
$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2n-1}} = +\infty$	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Formes indéterminées ou cas d'incertitudes : $\frac{0}{0}; 0.\infty; \frac{\infty}{\infty}; \infty-\infty$

Remarques

- La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de sa fonction monôme de plus haut degré.
- La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

******

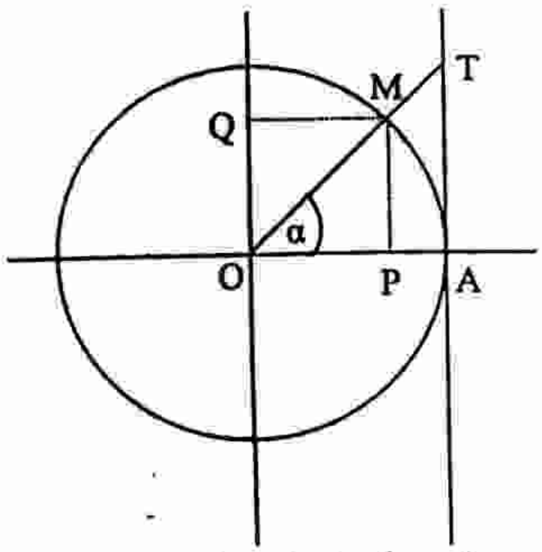
Propriétés

Soit f une fonction

- S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]A,+\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]A,+\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to} f(x) = -\infty$
- Soit f une fonction s'il existe deux fonctions g, h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]A,+\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ alors $\lim_{x \to +\infty} = f(x) = \ell$

On a des propriétés analogues lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers x_0. Ces propriétés sont deux formulations des " théorèmes des gendarmes ".

Limites des fonctions trigonométriques



Désignons par A_1, et A_3 les aires respectives délimitées par les triangles OMP; OTA et A_2 l'aire limite par l'arc OMA. Evaluons chacune de ces aires :

$A_1 = \dfrac{\overline{OP}.\overline{PM}}{2}$ donc, $A_1 = \dfrac{\sin x \cos x}{2}$

avec $\overline{OP} = \cos x$ et $\overline{PM} = \overline{OQ} = \sin x$

$A_2 : \begin{matrix} 2\pi \to \pi R^2 \\ x \to A_2 \end{matrix} \Rightarrow A_2 = \dfrac{xR^2}{2}$ or, R = 1 donc

$A_2 = \dfrac{x}{2}$

$A_3 = \dfrac{\overline{OA}.\overline{AT}}{2}$ donc $A_3 = \dfrac{tgx}{2}$

avec $\overline{OA} = R = 1$ et $\overline{AT} = tgx$

comme $A_1 \leq A_2 \leq A_3$ on a : $\dfrac{\cos x \sin x}{2} \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{tgx}{2}$

$$\cos x \sin x \leq x \leq tgx$$

en divisant par sinx on obtient : $\cos x \leq \dfrac{x}{\sin x} \leq \dfrac{1}{\cos x}$ (1)

ce qui correspond également à : $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{\cos x}$ (2)

En prenant la limite des relations (1) et (2) lorsque x tend vers 0 et en appliquant le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

1.- Montrer que, en revenant à la définition de la limite :

a) $\lim_{x \to 1}(3x + ') = 4$ b) $\lim_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 1$

c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ d) $\lim_{x \to +\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right) = 2$

2.- Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions f et g définies par

$f : x \to 5x^3 - 8x + 4$

$g : x \to \dfrac{9x^5 - 6x^2 + 5}{x^2 - 2x + 5}$

Idées et stratégies

Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en l'infini. Dans un problème où il est question, on utilise le " théorème des gendarmes "

3.- Calculer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction :

$f: x \to 2x+1-3\sin x$

4.- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-3x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{|x|}$

5.- Calculer :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}+x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)$

Rappel

- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$
- $x-a=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{a}\right)^3$

5.- Calculer :

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-1}{\sqrt{x+2}-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{x+1}$

6.- Préciser le domaine de définition de la fonction f définie par :

$x \to f(x)=2x+1+\sqrt{x^2+x+2}$.

Calculer la limite de lorsque x tend vers l'infini.

7.- Soit la fonction f défini par :

$x \to f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+16}-\sqrt{4x^2+2x}}{x^2-2x}$

a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Calculer la limite de f lorsque x tend vers plus l'infini et lorsque x tend vers 2.

Rappel

Pour tous nombres réels p et q on a :

- $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p+\sin q=2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\cos p-\cos q=-2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p-\sin q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$.

Rappel

Pour tout nombre réel x on a :

$1-\cos 2x=2\sin^2 x$ $1+\cos 2x=2\cos^2 x$

$1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ $1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}$

$\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2}$

8.- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin x}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-tgx}{1-\cot gx}$ f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{4\cos^2 x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$ l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2\pi x}{x-1}$

l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-cox}{1-\sin x-\cos x}$ n) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$

9.- Relier chaque calcul de gauche à son résultat inscrit à droite

$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$	$3\sqrt[3]{4}$
$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+3}\right)-x$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$
$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$	2
	$\frac{1}{2}$
	$\frac{3}{2}$

Choisir la bonne réponse dans les exercices 10 à 13

10.- La limite en $-\infty$ de :

$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+x-2}$ est : ....

a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\infty$

11.- La fonction $\frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{\sqrt{x+2}-1}$ a pour limite en -1

a) 2 b) 1 c) -2 d) Aucune réponse

12.- La limite $\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ est : ....

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1

Continuité d'une fonction

Soit f une fonction et x_0 un nombre réel. On dit que f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Remarque

➢ *Si f n'est pas continue en x_0 alors elle est discontinue en ce point.*

➢ *f est discontinue en x_0 dans l'un des cas suivants :*

- *$f(x_0)$ n'existe*
- $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

x_0 est un point isolé : pas d'intervalle ouvert centre en x_0

Fonction continue à gauche en un point xo

Une fonction f est continue à gauche en un point x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

Fonction continue à droite en un point xo

Une fonction f est continue à droite en un point x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

NB .-

f est continue au point x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

➢ *Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert $]a,b[$ si elle est continue en tout point de $]a,b[$.*

➢ *Une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.*

Soit une fonction continue sur un intervalle K. S'il existe deux éléments a et b (a < b) de K tels que f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$ c'est le principe de localisation.

Prolongement par continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 et vérifiant $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq \ell$ $x\in R$ Alors la fonction g : $\begin{cases} x\to f(x) \\ x_0\to \ell \end{cases}$ si $x\neq x_0$ qui est définie et continue en x_0 est appelée : ***prolongement par continuité de f en x_0***

Dérivation

Une fonction f est dérivable en un point x_0 si elle admet en ce point un nombre dérivé fini c'est-à-dire si la limite du rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0 est finie.

Remarque

Une fonction f est dérivable en un point x_0 si le nombre dérivé à gauche est égale au nombre dérivé à droite c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Fonctions dérivées.

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I, on peut définir sur I la fonction $f' : x \to f'(x)$ appelée fonction dérivée de f.

Dérivées des fonctions trigonométriques.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin x$; f est dérivable en x_0 ce point un nombre dérivé fini :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{2\cos\frac{x + x_0}{2} \sin\frac{x - x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{2\cos\frac{x + x_0}{2} \sin\frac{x - x_0}{2}}{2\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \cos\frac{x + x_0}{2} \frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \cos\frac{x_0 + x_0}{2} . \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}$$

donc $f'(x_0) = \cos x_0$

D'une manière générale $f(x) = \sin x : f'(x) = \cos x$

- Si $f(x) = \cos x$, une démonstration analogue à la précédente conduit à $f'(x) = -\sin x$

- *Dérivée de tgx :*

$$f(x) = tgx \Rightarrow f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

Dérivée de fonctions composées.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle k et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant u(k). La fonction vous est dérivable sur K et l'on a : $(vou)' = u' \times (v'ou)$

donc, $(\sin u)' = u' \cos u$; $(\cos u)' = -u' \sin u$

Dérivées des fonctions élémentaires

f	f'
$x \to k$ $(k \in R)$	$x \to 0$
$x \to x$	$x \to 1$
$x \to \frac{1}{x}$	$x \to -\frac{1}{x^2}$
$x \to x^n$	$x \to n x^{n-1}$
$x \to \sqrt{x}$	$x \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \to \sin x$	$x \to \cos x$
$x \to \cos x$	$x \to -\sin x$
$x \to tgx$	$x \to 1 + tg^2 x$

Dérivées et opérations sur les fonctions

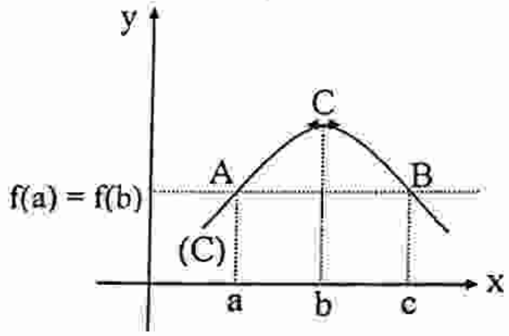
f	f'
$u + v$	$u' + v'$
$k u$ $(k \in R)$	ku'
uv	$u'v + v'u$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{uv - vVu}{v^2}$
u^m $(m \in Z^*)$	$mu'u^{m-1}$
$x \to u(ax + b)$	$x \to au'(ax + b)$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
tgu	$\frac{u'}{\cos^2 u}$

Interprétation du nombre dérivé

- Si f est dérivable en un point x_o, la courbe représentative de f admet au point $M_0(x_o ; f(x_o))$ une tangente de coefficient directeur $f'(x_o)$; cette tangente en M_o a pour équation : $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$.
- Si f n'est pas dérivable en un point x_o, la courbe représentative de f admet au point d'abscisse x_o deux demi-tangentes. Le point d'abscisse x_o est un point anguleux pour la courbe (C) de f.

Théorème de Rolle

- Si une fonction f est continue sur [a, b], dérivable sur *]a, b[* et prend des valeurs égales pour $x = a$ et $x = b$ c'est-à-dire $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un point C ∈]a, b[tel que $f'(C) = 0$

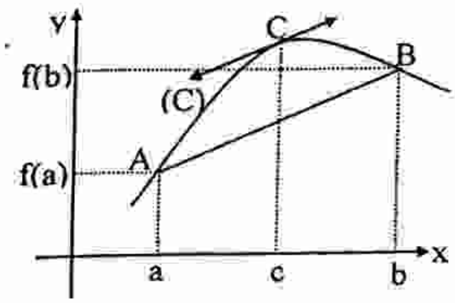


Interprétation géométrique

Sur la courbe (C) représentative de f il existe au moins un point C distinct de A et B où la tangente est parallèle à AB

Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur [a, b], dérivable sur]a, b[alors il existe un point C tel que :
$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$.
En posant $b = a + h$, $c = a + \theta h$ $a<c<b$,
On a : $f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h)$, avec $0<\theta<1$



Interprétation géométrique

Sur l'arc AB de la courbe (C) de f, il existe au moins un point C où la tangente est parallèle à la droite (AB)

Théorème de Gauchy

Soient f et g deux fonctions continues sur [a, b], dérivables sur]a, b[et que g'(x) ne s'annule en aucun point de]a, b[, il existe un point d'abscisse c appartenant à]a, b[tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Règle de l'Hospital

- Si f et g sont deux fonctions continues satisfaisant aux conditions de Gauchy sur le segment [a, b] et s'annulant au point x = a, c'est-à-dire f(a) = g(a) = 0
- Si en outre, la limite du rapport $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe lorsque x tend vers a alors :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dérivées successives d'une fonction

Soit f d'une fonction et I un intervalle

- Si f est dérivable, sur I, sa dérivée f' est appelée dérivée première de f ; on la note aussi $f^{(1)}$
- Si f' est dérivable sur I, sa dérivée f'' appelée dérivée seconde de f ; on la note aussi $f^{(2)}$
- de proche en proche, la fonction dérivée nième de f sur I, si elle existe, est la dérivée de la fonction $(n-1)^{ième}$ de f sur I ; on la note $f^{(n)}$,
- $f^{(n)}$ est aussi appelée dérivée d'ordre n de la fonction f

$f', f'', ..., f^{(n)}$ sont notées respectivement $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, ..., \frac{d^nf}{dx^n}$ (notation Leibnitz)

1.- On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

a) Montrer que f est une bijection de $R-\{1\}$ vers $R-\{2\}$. Définir alors f^{-1}

b) Vérifier que $fof^{-1}(x) = x$

c) Calculer de deux façons $(f^{-1})'(x)$

2.- Soit f la fonction définie par :

$$f : x \to 4x^2 - 4x + 3 \ sur \ [2,+\infty[$$

a) f est-elle bijective sur [2, +4[

b) Si oui, déterminer l'ensemble des valeurs de f

c) Définir f^{-1} et vérifier que $f^{-1}of = Id$

Chapitre III

Bijection réciproque d'une fonction continue et monotone

Soit f une fonction et strictement monotone sur un intervalle I

- f réalise une bijection de I sur f(I)
- la bijection réciproque notée f^{-1}, est continue sur f(I)
- f^{-1} est strictement monotone et a le même sens de variation que f

$$\begin{array}{l} y = f(x) \\ x \in I \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I) \end{array}$$

Soit I et I' deux intervalles de R

Soit f une fonction continue sur I, telle que f(I) $\subset$ I' et g une fonction continue sur I'. La fonction gof telle que : $gof = g[f(x)]$ est continue sur I

Fonction dérivée de la composée deux fonctions dérivables

Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0 alors gof est dérivable en x_0 et l'on a : $(gof)' = g'of.f'$

Démonstration

Multiplions et divisons par $y - y_0$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \times \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \times \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= g'[f(x_0)] \times f'(x_0) = g'of(x_0) \times f'(x_0)$$

Donc, $\boxed{(gof)' = g'of \times f'}$

Dérivée de la réciproque d'une fonction

Soit f une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle I, telle que :

$\forall x \in I, f'(x) \neq 0$

- La fonction f réalise une bijection de I sur f(I)
- La bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur f(I) et on a : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'of^{-1}}$

Démonstration

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow f'(x_0)(f^{-1})'_{y_0} = 1$$

Nombre dérivée de f^{-1} en x_0

$$(f^{-1})'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x_0)]}$$

Donc, $\boxed{(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{(f'of^{-1})(x)}}$

Fonctions circulaires réciproques

.- *Fonction Arc Sinus*

La fonction Sinus est continue et strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$; c'est donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.

Elle réalise donc une bijection réciproque continue et strictement croissante de $[-1,1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ appelée arc sinus et notée arc sin

$$\begin{array}{l} y = arc\sin x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{array}$$

- La fonction arc sinus étant bijective on a : *arc sinx = arc siny* $\Rightarrow x = y$
- La fonction y = arc sinx est dérivable sur [-1,1]

$y = arc \sin x \Rightarrow x = \sin y$

$$y'_{(x)} . x'_{(y)} = 1 \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{1}{x'(y)}$$

$$x = \sin y \Rightarrow x'_{(y)} = \cos y \quad \Rightarrow \quad y'_{(x)} = \frac{1}{\cos y}$$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$ *or* $x = \sin y$

$y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $\cos y > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos y = \sqrt{1-x^2}$

Donc, $y'_{(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = Arc \sin x \Rightarrow y'_{(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

d'une manière générale

$y = Arc \sin u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

.- *Fonction Arc Cosinus*

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1,1]$; c'est donc une bijection. Etant bijective, elle réalise une bijection réciproque continue et strictement décroissante de $[-1,1]$ sur $[0, \pi]$ appelée Arc cosinus et notée arc cos

$$\begin{matrix} y = Arc\cos x \\ -1 \le x \le 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \cos y \\ 0 \le y \le \pi \end{matrix}$$

- La fonction arc cosinus étant bijective on a : Arc cosx = Arc cosy $\Leftrightarrow$ x = y
- La fonction arc cosx est dérivable sur $[-1,1]$. Sa dérivée est donnée par : $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

D'une manière générale

$y = arc\cos u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

.- *Fonction Arc Tangente*

La fonction tangente est continue et strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur R. C'est donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur R ; Elle admet une réciproque de R sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ appelée arc tangente et notée Arc tg

$$\begin{matrix} y = arc\, tgx \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = tgy \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

Sa dérivée est donnée par : $\dfrac{1}{1+x^2}$

D'une manière générale

$y = arctgu \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

Exercices

1.- Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

f est-elle continue au point $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

2.- Soit f l'application de R dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in R \bullet \{2\} \; ; \; f(x) = \frac{\sqrt{4x^2(x^2-4x+4)}}{(x-2)(x^2+1)}$$

$$f(2) = -\frac{4}{5}$$

1) f est-elle continue en 0 ? est-elle continue 2 ?
2) la fonction f est-elle dérivable en 0 ? est-elle dérivable en 2 ?

3.- Soit f la fonction définie par :

$$f : x \to \sqrt{1+x^3}$$

a) Préciser le domaine de définition et la dérivée première de f
b) f est-elle dérivable en -1 ? est-elle dérivable en 1 ?
c) En déduire $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{2}}{x-1}$

4.- Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+2x^3+x^2}}{(x+1)(x^2-x+1)} & \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

a) f est-elle continue en $x_0 = -1$? en $x_0 = 0$?
b) f est-elle dérivable en $x_0 = -1$? en $x_0 = 0$?

5.- On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$x \to f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$$

a) Etudier la continuité de f en $x_o = 0$ *et* $x_o = -1$
b) Etudier la dérivabilité de f en $x_o = 0$ *et* $x_o = -1$

6.- Peut-on prolonger par continuité les fonctions f et g définies par :

$$f : x \to f(x) = 2x + \frac{\sqrt{9x^2}}{x} \text{ en } x_0 = 0$$

$$\text{et } g : x \to g(x) = 2x + \frac{\sqrt{9x^2}}{|x|} \text{ en } x_0 = 0$$

7.- Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que f soit dérivable au point $x_0 = 0$

8.- Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = ax + b & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable au point $x_0 = 2$

9.- Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}\cos x - 1}{2\cos 2x + 1} \\ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

f est-elle continue au point $x_o = \dfrac{\pi}{3}$?

10.- Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Préciser l'ensemble de définition de f
b) f est-elle continue en 0 ?

11.- Soit la fonction f définie par :

$$x \to f(x) = \sqrt{1 - \cos 2(\pi \sin x)}$$

Etudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$

12.- Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } \neq 0 \\ f(0) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = 2$

13.- Même question

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } \neq 0 \\ f(0) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

14.- Calculer la dérivée **première** des fonctions d'expressions suivantes :

a) $f(x) = \sin 3x$ b) $f(x) = \cos 4x$
c) $f(x) = \sin(2x + 3)$ d) $f(x) = \cos(5x - 2)$
e) $f(x) = x - \sin x$ f) $f(x) = 2\sin x + 1$
g) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ h) $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$
i) $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$ j) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos x + \sin x}$
k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ l) $f(x) = \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$

15.- Soit la fonction f définie par

$f(x) = \cos^4 x + 2\cos^3 x + 1$

a) Déterminer le domaine de définition Df de f
b) Vérifier que :
$\forall x \in Df : f'(x) = -2\sin x \cos^2 x(2\cos x + 3)$

16.- Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2\sin 2x}{1 + \cos x}$$

a) Vérifier que : $Df = \mathbb{R} - \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
b) Calculer la dérivée première de *f*.

17.- Soit la fonction définie par :

$$f : x \to \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x}$$

a) Déterminer Df ; justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0, \pi]$
b) Calculer la dérivée première de *f*.

17-1 Calculer la dérivée première de ces *fonctions* :

a) $f(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{2 + \cos x}$ b) $f(x) = \dfrac{tgx}{1 - 2\sin x}$

18.- Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

1) Calculer f(-1), f(1), $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, f(0) et f(1)
2) En déduire que l'équation f(x) = 0 admet trois racines réelles distinctes comprises entre -1 et 1
3) Calculer $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$. En posant $x = \cos\alpha$; déduire les trois racines de l'équation f(x) = 0 sous forme trigonométrique

19.- Vérifier le théorème de Rolle pour la fonction f suivante : $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sur [1,2]

20.- a)Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction g telle que $g(x) = \sqrt{x}$ avec x > 0 sur [0,1]
b)Soit la fonction $y = ax^2 + bx + c$, montrer que le nombre t de la formule des accroissements finis : $f(x+h) - f(x) = hf'(x)(x+th)$ $0 < t < 1$ est indépendante de x et de h. Donner une interprétation géométrique.

21.- Soit f la fonction qui, à tout réel différent de a associe $f(x) = \frac{1}{x-a}$. On notera successivement par $f^{(1)}; f^{(2)}; ....; f^{(n)}$ les fonctions dérivées de f

1) Préciser $f^{(1)}_{(x)}; f^{(2)}_{(x)}; f^{(3)}_{(x)}$
2) Etablir par récurrence que :

$$f^{(n)}_{(x)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$$

22.- Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \quad x \in R- \{-1,1\}.$$

En déduire la dérivée d'ordre n de la fonction f définie par : $x \to f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

23.- Soit la fonction f définie par :

$$f : x \to x\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

a) Calculer le domaine de définition et la dérivée première de f
b) Montrer que pour tout x réel, on a f'(x)>0

24.- On désigne par J l'intervalle :

$$J = \{x / x \in R, \ -3 \le x \le 3\}$$

L'on envisage l'application f de J dans R définie par :

$$\forall x \in J : \ f(x) = x^3$$

Démontrer la propriété suivante : $\forall x_0$ et $x_1 \in J$ l'inéquation suivante est toujours vérifiée :

$$|f(x) - f(x_0)| \le 27|x_1 - x_0|$$

En déduire que f continue en tout point de J.

Existence et calcul de la dérivée

25- On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

d) Montrer que f est une bijection de R − {1} vers R − {2}. Définir alors f^{1}
e) Vérifier que $fof^{-1}(x) = x$
f) Calculer de deux façons $(f^{-1})'(x)$

26.- Soit f la fonction définie par :

$$f : x \to 4x^2 - 4x + 3 \ sur \ [2,+\infty[$$

d) f est-elle bijective sur [2, +4[
e) Si oui, déterminer l'ensemble des valeurs de f
f) Définir f^{-1} et vérifier que $f^{1}of = Id$

27.- Soient f et g les fonctions numériques de la variable réelle x telles que :

$$x \to f(x) = \frac{3x+1}{2x-1} \text{ et } x \to g(x) = 5x^2 - 3x + 1$$

28.- Montrer que f est une bijection de

$$R\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\} \text{ sur } R\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

1. Déterminer la fonction réciproque de f
2. Déterminer la fonction composée gof
3. Calculer les fonctions dérivées f' et g'
4. Calculer la fonction dérivée $(gof)'$ de deux manières suivantes :
   a) En utilisant le résultat du 3e
   b) En utilisant le théorème sur la dérivée d'une fonction composée et les résultats du 4e

29.- Exprimer en fonction de x

a) $sin(arc\ sinx)$ b) $sin(arc\ cosx)$
c) $cos(arc\ cosx)$ d) $tg(arc\ sinx)$
e) $sin(arc\ tgx)$ f) $cos(arc\ sinx)$

30.- On considère la somme : y = arc tga + arc tgb. Calculer tgy en fonction de a et b

31.- Vérifier que si arc cosx + arc cosy + arc cosz $=\pi$, alors $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1 = 0$

32.- Résoudre dans R les équations suivantes :

a) $Arc\cos\frac{1}{3} + Arc\cos\frac{1}{4} = Arc\sin x$

b) $Arc\sin x + Arc\sin\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2}$

c) $Arc\sin(2x-3) = \frac{\pi}{6}$

d) $Arc\sin(x^2 - 3x + 2) = 0$

e) $Arctg2x + arctg3x = \frac{\pi}{4}$

33.- Calculer le domaine de définition et la dérivée des fonctions d'expressions suivantes :

a) $f(x) = Arc\cos(x^2 - 3x + 1)$

b) $f(x) = Arc\sin(2x+3)$

c) $f(x) = Arctg\left(\frac{2-x}{x+3}\right)$

d) $f(x) = Arc\sin\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

e) $f(x) = Arctg\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

f) $f(x) = Arc\sin\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

g) $f(x) = Arc\cos(2x^2 - 1)$

h) $f(x) = Arcstg(\sin\lambda)$

i) $f(x) = Arc\sin(4x^2 + 3x + 1)$

j) $f(x) = Arc\sin(-2x + 5)$

Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un procède utile permettant de démontrer qu'une propriété est vraie au rang n. Soit a démontrer par récurrence que la proposition P_n est vrai pour tout entier naturel n

- On vérifie que P_0 est vrai c'est-à-dire la proposition est vraie au rang n
- On suppose que la proposition est vraie au rang
- On démontre qu'elle est vraie au rang n+1

34.- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11

35.- Démontrer par récurrence les égalités suivantes, n est un entier naturel quelconque

a) $1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots\dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

****

Chapitre IV

Suites réelles ou suites numériques

Exercice d'approche

Soit l'application u définie par :

$n \to U_n = \frac{3n+2}{n+3}$

1.a) Déterminer les images par U des six premiers entiers naturels ainsi que du 11^e entier naturel

b) Vérifier que $U_{n+1} \neq U_n + 1$

2.Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - 3$ pour tout n de N

3.Réaliser une représentation par flèches où l'on donnera une idée sur les ensembles de départ et d'arrivée de u

Définition. On appelle suite numérique toute application de N ou d'une partie de N vers R

$$U : N \to R$$
$$n \to U_n$$

Remarque

- U_n se lit U indice n est la notation indicielle ou le terme général de la suite (U_n)

Idées et stratégies

Si le premier terme d'une suite numérique (U_n) est U_p alors le nième terme ou ie terme de rang n est U_{n-1+p}

Exercices

1.- Soit ((U$_n$) la suite de terme général : $U_n = \frac{n+3}{n+1}$

1) calculer les 3 premiers termes de (U$_n$) ainsi que le terme U_{15}
2) quel est le rang du terme U_{15}

2. Même question avec :

$$U_n = \frac{3n+5}{n} \; ; \qquad U_n = \sqrt{2n-10}$$

Remarque

En général, une suite numérique (U$_n$) est déterminée par l'un des procèdes suivants :

- Une formule explicite permettant de calculer U$_n$ en fonction de n : c'est le cas des suites du type $U_n = f(n)$ où f est une application numérique à variable réelle.
- Au moins un premier terme et une relation permettant de trouver les termes de proche en proche dite : relation de récurrence.

Suite périodique

- La suite (U$_n$) est dite périodique de période p si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^* /$ $U_{n+p} = U_n$

Suites bornées

Soit (U$_n$) $\in$ I une suite numérique

- (U$_n$) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout n $\in$ I, on a : $U_n \geq m$
- (U$_n$) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout n $\in$ I, on a : $U_n \leq M$
- (U$_n$) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Suites monotones

Soit (U$_n$) n $\in$ I une suite numérique.

- Si pour tout n élément de I $U_{n+1} - U_n \geq 0$; alors la suite (U$_n$) est croissante
- Si pour tout n élément de I, $U_{n+1} - U_n \leq 0$; alors la suite (U$_n$) est décroissante
- Si pour tout n élément de I, $U_{n+1} - U_n = 0$; alors la suite (U$_n$) est constante

Idées et stratégies

Pour démonter qu'un suite (U$_n$) est monotone on peut utiliser l'un des procèdes suintants :

- Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$
- Comparer à 1 le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$; lorsque la suite (U$_n$) est strictement positive
- Etudier le sens de variation de la fonction f, lorsque la suite est du type : U$_n$ = f(n)
- Faire un raisonnement par récurrence
- Etudier la monotonie ou le sens de variation d'une suite réelle (U$_n$) revient à dire si (U$_n$) est croissante, décroissante ou constante.

Suite stationnaire

- Une suite est stationnaire si elle constante à partir d'un certain rang

Limite d'une suite numérique

- Une suite (U$_n$) admet une limite ℓ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$, $n > p \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$
- On admet que si une suite a une limite, cette limite est unique

Suite convergente

- Une suite (U$_n$) est convergente si sa limite est finie c'est-à-dire si $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \ell (\ell \in \Re)$

Suite divergente

- Une suite (U$_n$) est divergente si elle n'est pas convergente

Idées et Stratégies

- Toute suite réelle croissante et majorée est convergente
- Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente
- Toute suite réelle croissante et admet une limite finie est majorée par cette limite et minorée par son premier terme et par conséquent este bornée.
- Toute suite réelle décroissante et admet une limite finie est minorée par cette limite et majorée par son premier terme et par conséquent est bornée
- Toute suite périodique n'a pas de limite finie et par conséquent n'est pas convergente.

Suites adjacentes

- Deux suites (U$_n$) sont adjacentes si et seulement si l'une est croissante et l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

Exercices

1.- Soit la suite (U_n) définie par :

$$U_n = \frac{6n+2}{2n+1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) Calculer les trois premiers termes de (U_n) ainsi que son 10^e terme

b) Etudier la monotonie de (U_n)

2.- Soit trois réels a, b, c et la suite (U_n) de terme général $U_n = an^2 + bn + c$

a) Calculer a, b et c sachant que l'ensemble des indices de la suite est $\mathbb{N}$ et que les trois premiers termes sont 1 ; 6 et 15

b) Calculer le 6^e terme de la suite

c) Calculer U_{n+1} en fonction de n et de U_n

3- (U_n)est une suite réelle telle que $U_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* U_n = U_{n-1} + 2n - 3$.

a) Calculer les trois termes qui suivent successivement le 1^{er}.

b) Détermine 3 réels a, b, c sachant que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = an^2 + bn + c$.

c) Calculer le 11^e terme de la suite.

4- La suite U est définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $U_n = (-1)^n + 2n$.

a-) Calculer les trois premiers et le 7^e termes de la suite.

b-) Déterminer, en indiquant leur rang, les termes de la suit qui prennent la valeur 13.

c) Montrer que U est croissante. En déduire un minorant de la suite.

d-) Montrer que la suite est divergente. En déduire qu'elle n'est pas majorée.

Idées et stratégies

- L'ensemble des majorants k d'une suite réelle (U_n) est tel que : $U_n - k \leq 0$.
- L'ensemble des minorants k d'une suite réelle (U_n) est tel que : $U_n - k \geq 0$.
- Toute suite croissante (U_n) $n \in N$ est minorée par son premier terme $U_0 : \forall n \in N : U_n \geq U_0$

5 On considère la suite réelle (U_n) définie pour tout entier naturel n par

$$U_n = \frac{5n^2+2}{n^2+1}.$$

1- Calculer les deux premiers et le 11^e termes de la suite (U_n).

2- Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante. En déduire un minorant de la suite.

3- Trouver l'ensemble des majorants de la suite. Déduire que la suite (U_n) est convergente.

6.- Soit la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{3n+5}{n+2}, \ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

a) Calculer son premier terme et son dixième terme

b) Étudier le sens de variation de (V_n) lorsque n tend vers $+\infty$

c) En déduire que (V_n) est bornée

7.- Soit la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n - 5}{U_n - 1} \quad U_1 = 2$$

a) Calculer $U_2, U_3,$ et U_4

b) Calculer U_{n+2} en fonction de U_n. que peut-on en déduire ?

c) (U_n) est-elle convergente ?

8.- On considère la suite (W_n) définie par :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

a) Calculer W_1, W_2, W_3 et W_4

b) Étudier le sens de variation de (W_n)

9.- Soit la suite (U_n) définie par :

$$U_0 = 1,\ U_1 = 3 \ \forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$
$$U_n = 3U_{n-1} - 2U_{n-2}$$

Calculer $U_2, U_3,$ et U_4

10.- On considère la suite (V_n) définie par :

$$\begin{cases} V_n = n & \text{si } 0 \leq n \leq 4 \\ V_n = \frac{1}{4}V_{n-1} + 3 & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

Calculer les dix premiers termes (V_n). que peut-on en déduire. (8) 1

Idées et stratégies

- *Le nombre de termes n de la suite (U_n) tel que $S = U_k + \ldots + U_p$ est : $n = p - k + 1$.*
- *De même si U_k et U_p sont respectivement premier et dernier terme d'une suite finie U_n alors le nombre de termes de(U_n)est $n = p - k + 1$*

11.- Soit la suite (U_n) définie par :

$$U_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}, \forall\ n \in \mathbb{N}$$

a) Déterminer deux constantes a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3}$$

b) Étudier le sens de variation de (U_n)

c) Soit la suite réelle définie par le terme général : $S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p = U_0 + U_1 + ... + U_n$

d) Donner en fonction de n l'expression et montrer que S_n est convergente.

.- **Choisir la bonne réponse dans les exercices 13 à 21**

13- Si U_{75} et U_{250} sont respectivement 1er et dernier terme d'une suite infinie *(U_n) alors le nombre de terme de la suite et :*

a)175 *b)174* *c)176* *d) 325*

14.- La suite (U_n) n $\in \mathbb{N}$ définie par :

n $\in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ est :

a) croissante b) décroissante c) constante

15.- La suite (U_n) définie par :

$\begin{cases} U_0 = a \\ U_n = \frac{1}{5}U_{n-1} + 4 \end{cases}$ est constante si

a) a = 1 b) a = 3 c) a = 4 d) a = 5

16.- La suite $U_n = \dfrac{n+3}{2n+5}$ est :

a) croissante et majorée par $\frac{1}{2}$

b) décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$

c) croissante et n'est pas majorée

d) décroissante et non minorée

17.- La suite (U_n) définie pour tout naturel n par :

$$U_n = \frac{n-1}{n^2 - n + 1}$$

a) est croissante

b) est décroissante

c) est constante

d) n'est ni croissante ni décroissante

18.- La limite de la suite (U_n) telle que $U_n = \dfrac{\ln(1+n)}{n+1}$ quand $n \to +\infty$ est :

a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) 2

19.- Soit (U_n) la suite définie sur N par: $U_n = \dfrac{n+2}{2n+5}$, alors

a) (U_n) est croissante b) (U_n) est décroissante

c) (U_n) est divergente d) (U_n) est constante

20- Si (U_n) n $\in \mathbb{N}$ est une suite réelle qui converge vers un réel non nul ℓ, alors :

a) (U_n) est majorée et non bornée.

b) (U_n) est minorée et non bornée.

c) (U_n) n'est ni majorée, ni minorée.

21- Si une suite numérique U_n est telle que: *$S=U_{29}+...+U_{639}$, alors le nombre de terme de cette suite est :*

a) 668 *b) 610* *c) 609* *d) 611*

****

Suite arithmétique (S.A) ou progression arithmétique (P.A)

Exercice d'approche

Soit 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, … une suite nombres réels on constate que chacun de ces nombres à l'exception du premier est égal à son précédent augmenté de 2. Il s'agit donc d'une suite arithmétique de raison 2

Définition On appelle suite arithmétique (S.A) ou progression arithmétique (P.A), toute suite de nombres réels où chacun d'eux à l'exception du premier est égal à son précédent augmenté d'une constante appelée raison de la progression.

- Généralement on désigne la raison d'une progression arithmétique par la lettre r
- Si (U_n) désigne une suite S.A de raison r la définition précédente se traduit par :

$$U_n = U_{n-1} + r\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$$
$$U_{n+1} = U_n + r\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

Idées et stratégies

Trois nombres a, b et c sont dans cet ordre les termes d'une P.A si et seulement si $b = \frac{a+c}{2}$

Idées et stratégies

Toute suite (U_n) de la forme an + b est une suite arithmétique de raison r = a et de premier terme $U_0 = b$

- Expression du terme général U_n d'une S.A en fonction du premier terme, du nombre de termes n et de la raison.

Soit $U_0, U_1, U_2, ..., U_n$ les termes d'une S.A de raison r on a : U_0 $\quad U_1 = U_0 + r$

$U_2 = U_1 + r = U_0 + 2r$

$U_3 = U_2 + r = U_0 + 3r \quad ...$

$U_n = U_{n-1} + r = U_0 + nr \quad \forall n \in N$,

$\boxed{U_n = U_1 + (n-1)r}$

D'une manière générale $p \le n$;

$\boxed{U_n = U_p + (n-p)r}$

Idées et stratégies

Le nombre de termes d'une P.A de 1ère terme a, de raison r et de dernier terme b est donné par : $n = \frac{b-a}{r} + 1$

Le nombre de moyens arithmétique d'une progression de raison r qu'on peut insérer entre a et b est donné par : $m = \frac{b-a}{r} - 1$

Pour trouver quelques nombres en progression arithmétiques on procède comme suit

- Si la quantité de nombres à trouver est impaire, on choisit pour inconnues : $a - \left(\frac{n-1}{2}\right)r, ..., a-r, a, a+r, ..., a + \left(\frac{n-1}{2}\right)r$

•

- Si la quantité de nombres à trouver est paire, on choisit pour inconnues : $a;\ a+r;\ a+2r;\ ..;\ a+(n-1)r$

Dans les deux cas, a et r seront trouvés à partir des équations issues de l'énoncés du problème

- Dans toute suite arithmétique, la somme des termes équidistants aux extrêmes est égale à la somme des extrêmes

Somme des (n + 1) termes d'une suite arithmétique

Soit $U_0, U_1, ..., U_n$ les (n + 1) d'une S.A on a :

$$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n \quad (1)$$

Écrivons cette somme d'une autre façon

$$S_n = U_n + ... + U_1 + U_0 \quad (2)$$

Faisons (1) + (2)

$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + ... + (U_n + U_0)$ Comme $(U_1 + U_{n-1}) = (U_2 + U_{n-2}) = ... = (U_0 + U_n)$

$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_n) + ... + (U_n + U_n)$

$\Rightarrow 2S_n = (n+1)(U_n + U_0) \quad S_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$

Une démonstration analogue conduit à :

$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$$

La somme des n premiers termes d'une S.A

<u>Exemple :</u> La suite (U_n) définie sur N par : $\begin{cases} U_{n+1} = U_n - \frac{2}{3} \\ U_0 = -1 \end{cases}$.

a) Quelle est la nature de la suite (U_n) ?
b) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3
c) Exprimer U_n en fonction de n
d) Calculer la somme $U_0 + U_1 + ... + U_{12} = -65$

Solution

a) $U_{n+1} - U_n = -\frac{2}{3}$ donc U_n est S. A de raison $r = -\frac{2}{3}$

b) $U_1 = U_0 + r = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$; $U_2 = -\frac{7}{3}$; $U_3 = -3$

c) Exprimons U_n en fonction de n

$U_n = U_0 + nr \Rightarrow U_n = -1 - \frac{2}{3}n$

d) Calculons la somme $U_0 + U_1 + ... + U_{12}$ on a :

$$S_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2} \Rightarrow S_{12} = \frac{13(U_0 + U_{12})}{2}$$

Avec $U_{12} = U_0 + 12r = -1 + 12\left(-\frac{2}{3}\right) = -9$ Donc :

$$U_0 + U_1 + ... + U_{12} = \frac{13(-1-9)}{2}$$

Soit $U_0 + U_1 + ... + U_{12} = -65$

Exercices

1.- Reprendre l'exercice précédent avec la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_{n+1} = U_n - 4 \\ U_0 = 0 \end{cases}$

2- On considère les suites U et V définies respectivement sur **N** par

$U_0 = 2, \quad U_{n+1} = U_n + 2(3n+4)$ et $V_n = U_n - 3n^2$

a) Calculer V_0 V_1 et V_2

b) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

c) On pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} V_i$. Exprimer V_n ,U_n puis Sn en fonction de *n*.

3.- Calculer le $51^{ième}$ nombre impair

4.- Calculer le $99^{ième}$ terme d 'un P.A dont le $7^{ième}$ terme est 29 et le $44^{ième}$ est 177

5.- Calculer le premier terme et le $19^{ième}$ terme d'une S.A sachant le $7^{ième}$ est 47 et le $10^{ième}$ terme est 62

6.- Déterminer 3 nombres en progression arithmétique sachant que leur somme est 9 et la somme de leurs carrés est 35.

7.- Déterminer quatre nombres en progression arithmétique sachant leur somme est 16 et la somme de leurs carrés est 84.

8.- Une P.A commence par 6 et la raison est 7. la somme des termes est 41094. Quel est le nombre de termes ?

9.- Pour une S.A :
$U_1 = 11, \; U_n = 433; \; S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n = 47062$
Calculer n et r

10.- Calculer la somme de termes d'une P.A ayant pour premier terme 2 pour raison 4 et contenant 20 termes

11.- Déterminer le premier terme a et la raison r, d'une S.A de telle façon que quelque soit l'entier naturel, la somme de n premier termes de cette suite soit égale à $7n + 2n^2$

12.- Déterminer la somme des 26 premiers entiers naturels impairs

13.- Déterminer la somme des 50 premiers entiers naturels pairs non nuls

14.- Déterminer la somme des 37 premiers entiers naturels non nuls

15.- Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_n = U_{n-1} + 5 \\ U_1 = 2 \end{cases}$

a) Montrer que (U_n) est une S.A dont on précisera la raison
b) Calculer U_n, puis S_n en fonction de n
c) Déterminer n sachant que $S_n = 354$

16.- Pour une suite S.A on donne $U_3 = 10$ et $U_6 = 40$

a) Calculer la raison et le premier terme de la suite
b) Déterminer l'expression de U_n en fonction de n
c) Quel est le sens de variation de (U_n)

17.- On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{-7U_n - 8}{2U_n + 1} \text{ et } U_0 = 1$$

a) Calculer U_1, U_2 et U_3
b) Montrer que la suite (V_n) définie sur N par : $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison
c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

18.- On considère la suite (U_n) définie par :
$U_{n+1} = \frac{3U_n - 2}{2U_n - 1}, \; \forall n \in N, U_0 = 0$

a) Calculer U_1, U_2 et U_3s
b) On construit une suite (V_n) telle que : $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$. Calculer V_0 et V_1 et montrer que (V_n) est une S.A dont on précisera la raison et le premier terme

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. En déduire $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n$

d) Calculer la somme suivante : $S_{10} = V_0 + V_1 + ... + V_9$

19.- Dans le but de recherche une nappe d'eau chaude susceptible de chauffer un groupe d'immeubles, on se propose d'effectuer un forage. Une somme de 76800 gourdes a été débloquée. L'entreprise de forage a soumis le devis suivant :

- Le premier mètre coûte 100 gourdes
- Le deuxième mètre coûte 140 gourdes et ainsi de suite en augmentant toujours de 40 gourdes par mètre

a) Quelle profondeur pourra-t-on atteindre ?
b) Que coûtera le dernier mètre ?

20- On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une S.A. de raison r. Calculer :
1) U_6 *et* S_6 connaissant $U_2 = 4$ *et* $r = 3$.
2) U_0 et S_8 connaissant $U_7 = 100$ et $r = 5$.
3) r et U_0 connaissant $S_9 = 95$ et $S_8 = 100$.

21- Soit la suite 5,10,15,...,505.
a) Déterminer le 101^e terme de la suite.
b) Déterminer le nombre de moyens inséré entre 5 et 505 et le nombre de terme de la suite.
c) Calculer la somme $S = 5 + 10 + 15 + ...505$.

Choisir la bonne réponse dans les exercices 21 à 43

21.- Si (U_n) est une S. A, alors la somme $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ équivaut à :

a) $S_n = \dfrac{n(U_0 + U_n)}{2}$

b) $S_n = \dfrac{(n+1)(2U_0 + nr)}{2}$

c) $S_n = \dfrac{n(2U_0 + nr)}{2}$

22.- Si (U_n) est une S. A, alors la somme $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ équivaut à :

a) $S_n = \dfrac{(n+1)(U_1 + U_n)}{2}$

b) $S_n = \dfrac{n(2U_1 + nr)}{2}$

c) $S_n = \dfrac{n[2U_1 + (n-1)r]}{2}$

23.- Si les deux termes d'une S.A sont dans cet ordre -4 et 1 alors son 25^e terme est :
a) 120 b) 124 c) 116 d) – 124

24.- La suite arithmétique (U_n) est telle que : $U_3 = \dfrac{29}{2}$ et $U_7 = \dfrac{25}{2}$ le terme U_5 vaut :
a) $\dfrac{27}{2}$ b) $\dfrac{31}{2}$ c) 13 d) 27

25.- Le 15^e terme de la progression arithmétique 1,4,7,10,13,….est :
a) 43 b) 151 c) 121 d) 46 e) 51

26.- Si (U_n) est une S.A de raison – 5 alors :
a) $\forall n N$, $U_{n-1} - U_n = 5$ b) $U_{10} = U_2 + 40$
c) $U_3 = U_7 + 20$ d) $\forall n N$, $\dfrac{U_n + 1}{U_n} = -5$

27.- (U_n) est la suite arithmétique de raison 3 telle que $U_1 = 2$:
a) $U_{100} = 298$ b) $U_0 = 1$ c) $U_n = 3n - 5$
d) $U_n = 3n-2$ e) $U_n = -2n + 3$

28.- Si (U_n) est une S.A telle que $U_0 = -97$ et $r = 3$ alors son centième vaut :
a)203 b)200 c)-217 d)-203

29.- S_n est la somme de (n + 1) premiers termes d'une S.A de raison r. Si $U_2 = 4$ et $r = 3$, alors :
a)$S_6 = 94$ b) $S_6 = -49$ c) $S_6 = 49$ d) $S_6 = 0$

30.- Si (U_n) est la suite arithmétique telle que : $U_{30} = 100$ et $U_{20} = 50$ alors la somme S_{10} des10 premiers termes est :
a)-275 b)225 c)-225 d)275

31.- Si -13 et -28 sont respectivement le $4^{ième}$ et le $7^{ième}$ terme d'une suite arithmétique, alors le $1^{ère}$ terme U_0 et la raison r de cette suite ont pour valeurs :
a) $U_0 = -2, r = 5$ b) $U_0 = 2, r = -5$
c) $U_0 = 3, r = 2$ c) $U_0 = -3, r = -2$

32.- Si (U_n) est la suite arithmétique telle que $U_4 = 8$ et $U_7 = -1$ alors la somme :

$S_{15} = U_0 + U_1 + ... + U_{14}$ vaut :

a)-20 b)20 c)-15 d)15 e)-40

33.- S_n est la somme des n premiers termes d'une S.A de raison r. si $U_3 = 5$ et $r = 2$, alors S_6 égal:

a) 100 b) 121 c) 103 d) Aucune réponse

34.- La somme des 10 premiers entiers naturels non nul est :

a)603 b)703 c)803 d) Aucune réponse

35.- La somme 1 + 4 + 7 + ... + 76 est égal à :

a) 582 b) 852 c) 871
d) 874 e)1001

36.- Si (U_n) est une suite arithmétique de raison 50 et terme initial $U_0 = 1300$ alors :

$S = U_0 + U_1 + ... + U_{20}$ vaut :

a) 7200 b) 37800 c) 37275 d) 36000

37.- Le nombre m de moyens arithmétiques d'une progression de raison 5 qu'on peut insérer entre 3 et 33 est :

a) m= 4 b) m= 5 c) m = 6 d) m = 7

38.- La somme des 100 premiers termes de la suite : 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... est :

a) 10200 b) 10300 c) 100500
d) 101500 e) aucune réponse

39.- Si (U_n) est une S.A de raison 3 et de premier terme U_1 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ U_n est égale à :

a) $U_1 + 3n$ b) $U_1 - 3n$
c) $U_1 + 3n - 3$ d) Aucune réponse

40.- Le nombre de termes de la progression : 3, 7, 11, ..., 35 est :

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11

41.- Le 50^e nombre impair est :

a) 99 b) 101 c) 103 d) Aucune réponse

42.- Le 10^e nombre pair non nul est :

a) 20 b) 18 c) 22 d) Aucune réponse

43- Soit (U_n) une suite arithmétique définie sur N. Si les 3^e et 20^e termes de cette suite sont respectivement 5 et -80, alors la somme de n premiers termes de cette suite est égale à -20 pour :

a) n=6 b) n=7
c) n=11 d) n=8

Compléter

1) Si (U_n) est une S.A. de raison r, $\forall (n, p) \in N^2 : p < n$, alors Un est égal à c.

2) Si U est une S.A. définie sur N par $U_n=3n+5$, alors la somme $U_0 + U_1 + ..U_n$ est égal à ...

3) La somme 1+2+3+...+...+100 est égale à...

****

Suite géométrique (S.G) ou progression géométrique (P.G)

Exercice d'approche

Soit 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... une suite de nombres réels. On constate que chacun de ces nombres à l'exception du premier est égal à son précédent multiplié par 2, il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 2.

Définition

On appelle suite géométrique (S.G) ou progression géométrique (P.G) toute suite de nombres réels où chacun d'eux à l'exception du premier est égal à son précédent multiplié par une constante appelée raison de la progression.

Généralement on désigne la raison d'une progression géométrique par la lettre q. Si (U_n) désigne une (S.G) de raison q la définition précédente se traduit par :

$$U_n = U_{n-1} \times q \qquad n \in N^*$$
$$U_{n+1} = U_n \times q \qquad n \in N$$

Idées et stratégies

Trois nombres a, b, c sont dans cet ordre les termes d'une S.G si et seulement si $b^2 = ac$

Expression du terme général U_n d'une suite géométrique en fonction du premier terme, du nombre de terme n et de la raison

Soit $U_0, U_1, U_2, ..., U_n$ les termes d'une S.G de raison q on a : U_0 $\quad U_1 = U_0.q$

$$U_2 = U_1.q = U_0q^2$$
$$U_3 = U_2q = U_0q^3 \quad ...$$
$$U_n = U_{n-1}.q = U_0q^n \qquad \forall nN$$
$$\boxed{U_n = U_0q^n}$$

Si la suite commence par U_1 une démonstration analogue à la précédente conduit à :

$\forall nN^*$, $\boxed{U_n = U_1q^{n-1}}$

D'une manière générale :

$p \leq n$; $U_n = U_pq^{n-p}$

Idées et stratégies

Le nombre de termes d'une S.G de 1^{re} terme a, de dernier b et de raison q est donnée par : $n = \dfrac{\ln\left|\frac{b}{a}\right|}{\ln|q|} + 1$

➢Le nombre de moyens géométriques d'une progression de raison q qu'on peut insérer entre a et b est donné par : $m = \dfrac{\ln\left|\frac{b}{a}\right|}{\ln|q|} - 1$

➢Pour trouver trois nombres en progression géométrique, on les choisit ainsi : a, aq, aq^2 où a et q seront trouvés à partir des équations issues de l'énoncé du problème

➢Dans toute suite géométrique le produit des termes équidistants aux extrêmes est égal au produit des extrêmes

-*Somme des (n + 1) termes d'une S.G*

Soit $U_0, U_1, ..., U_n$ les (n + 1) termes d'une S.G de raison q on a :

$$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n \quad (1)$$

Multiplions S_n par q

$$qS_n = U_0q + U_1q + ... + U_nq \quad (1)$$
$$qS_n = U_1 + U_2 + ... + U_{n+1} \quad (2)$$

(1)- (2) donne

$$S_n - qS_n = U_0 - U_{n+1} \Rightarrow$$
$$(1-q)S_n = U_0 - U_0q^{n+1}$$
$$(1-q)S_n = U_0(1-q^{n+1}) \Rightarrow$$
$$S_n = \frac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q}, = S_n = \frac{U_0}{1-q}(1-q^{n+1})$$

Si la suite commence par U_1 une démonstration analogue conduit à

$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{U_1(1-q^n)}{1-q},$$

La somme des n premiers termes

INFO

Pour toute S.G de 1^{er} terme *U_0 ou U_1 et de raison q, on a :*

$U_nq = U_0q^{n+1}$ $\qquad S_n = \dfrac{U_0 - U_{n+1}}{1-q}$

$U_{n+1} = U_0q^{n+1}$

$U_{n+1} = U_1q^n$ $\qquad S_n = \dfrac{U_1 - U_{n+1}}{1-q}$

Exercices

1.- (U_n) est une S. G de raison q et dont les termes sont positifs. On suppose de plus que $U_1U_3 = 36$ et que $U_3 + U_4 = 72$

a) Calculer le terme U_2

b) Calculer la raison q

c) Calculer la somme $S_8 = U_1 + U_2 + ... + U_8$

Rép.- a) $U_2 = 6$ b) $q = 3$ c) $S_8 = 6560$

2.- La suite (U_n) est définie sur N par : $U_n = 5\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

a) Calculer U_0, U_1, U_2, U_3

b) Démontrer que (Un) est une S. G

c) Calculer la somme $U_0 + U_1 + ... + U_9$

Rép.- a) $U_0 = \frac{15}{2}$ $\quad U_1 = \frac{45}{4}$ $\quad U_2 = \frac{135}{8}$ $\quad U_3 = \frac{405}{16}$

b) $U_{n+1} = \frac{3}{2}U_n$, donc est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{2}$

c) $S = \frac{870375}{1024}$

1.- Déterminer la raison et le premier terme U_0 d'une P.G connaissant le troisième terme 16 et le sixième terme 1024.

2.- Déterminer la raison et le premier terme U_1 d'une S.G sachant son troisième terme 24 et le sixième terme 192.

3.- Déterminer le premier terme, la raison et le $13^{\text{ième}}$ terme d'une P.G sachant que son $4^{\text{ième}}$ terme est 32 et son $8^{\text{ième}}$ terme est 512.

4.- On considère une S.G (U_n) telle que :

$$U_1.U_2.U_3 = 512$$

a) Déterminer U_2
b) Trouver U_1 et U_3 si $U_1 + U_3 = 20$

5.- Trouver trois nombres en progression géométrique sachant que leur somme est 7 et la somme de leur inverse est $\frac{7}{4}$

6.- On considère une P.G de 10 termes ; sachant que le $4^{\text{ième}}$ terme est égal à $\frac{3}{2}$ et le $9^{\text{ième}}$ terme est 48 ; calculer la raison, le premier terme, le dernier terme et la somme des termes

7.- Soit (U_n) une S.G de termes strictement positifs tels que :

$$U_0 + U_1 = 12 \text{ et } U_0.U_2 = 64$$

a) Calculer la raison q de cette suite
b) Quel est le comportement de (U_n) lorsque n tend vers $+\infty$
c) Calculer U_6 et $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_6$

8.- Déterminer trois réels distincts a, b et c vérifiant les 3 conditions suivantes

➢ a, b, c sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique
➢ b, c, a sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique
➢ $a + b + c = 18$

9.- Trouver trois réels a, b, c sachant que dans cet ordre, ils forment une S.G décroissante et que

$$\begin{cases} \ln a + \ln c = \ln b + \ln 2 \\ a + b + c = 7 \end{cases}$$

10.- Pour une S.G :

$$U_n = 7,\ q = \frac{1}{3}$$

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = 2548$$

11.- Etant donne un réel α, on considère les suites réelles (U_n) $n \in N$ et (V_n) $n \in N$ définies par :

$$U_0 \in R,\ U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 3,\ \ V_n = U_n + \alpha$$

a) Calculer V_{n+1} en fonction de V_n et de α
b) Comment choisir α pour que (V_n) soit une S.G
c) Calculer U_n en fonction de U_0 et n. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n$

12.- Soit la suite (U_n) $n \in N^*$ de raison q strictement positive et de premier terme $U_1 = \frac{1}{2}$ telle que : $81U_{10} = 16U_6$

a) Déterminer la raison de cette suite.
b) Calculer la somme $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

13.- Soient (U_n) et (V_n) deux suites définies sur N par : $\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 6 \end{cases}$ et $V_n = U_n - 12$

a) Démontrer que (V_n) est une S.G dont précisera la raison
b) Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + . + V_n$. En déduire la somme
$$S_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_n.$$
c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} s_n$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} S'_n$

13.- On considère la suite qui, à tout entier n strictement positif associe le nombre U_n tel que :

a) U_n est strictement positif
b) U_n est une S.G de raison $\frac{2}{3}$
c) les trois premiers termes vérifient l'égalité
$$5U_1U_3 = 6U_2 \text{ (E)}$$
1. Calculer U_1 puis exprimer U_n en fonction de n
2. Calculer U_2 et U_3 et vérifier l'égalité (E)
3. Étudier le sens de variation de (U_n)

4. Exprimer la somme $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ en fonction de n
5. La suite S_n est-elle convergente ?

14.- On considère les suites (U_n) et (V_n) définie par : $2U_n = U_{n-1} + 5$, $U_1 = 2$, $V_n = U_n - 5$

1. Montrer que (V_n) est une S.G dont on précisera la raison et le premier terme
2. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n
3. Déterminer la limite de V_n lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire celle de U_n
4. Calculer $S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$ et $S'_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$

15.- On donne la suite (U_n) définie par :

$$U_0 = -1 \text{ et } \forall n \in N \text{ ; } U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2$$

a) Calculer U_1 et U_2
b) On pose $V_n = U_n + 3$, exprimer V_{n+1} en fonction de V_n. quelle est la nature de la suite (V_n)
c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
d) Calculer la somme $V_0 + V_1 + ... + V_{10}$

16.- Soient les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_1 = 7$

$U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 6}{5}$ et $V_n = U_n - 2$

a) Calculer U_1, V_1, V_2
b) Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.
c) Exprimer (U_n) et (V_n) en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} V_n$

Calculer les sommes $S_n = \sum_{i=0}^{n} Ui$ et $S_n = \sum_{i=0}^{n} Vi$

puis $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} S'_n$

17.- On considère la suite (U_n) définie sur] par :

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$$

Soit la suite (V_n) définie pour tout naturel n par : $V_n = U_n - 3$

a) Déterminer que (V_n) est une S.G dont on précisera la raison

b) Exprimer V_n et U_n en fonction de n
c) En déduire la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$
d) Déterminer, en fonction de n, la somme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{n-1}$

Bacc 2002

18.- On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 3}{U_n + 1} \end{cases} \quad n \in N$$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3
2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{U_n - 3}{U_n - 1} \quad n \in N$$

a) Démontrer que (V_n) est une S.G
b) Préciser le terme général de la suite (V_n)
c) En déduire le terme général U_n de la suite (V_n).

Bac 2003

19.- On considère la suite (U_n) définie par

$U_n = \dfrac{2-n}{2}; n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (U_n) est une arithmétique
b) Calculer la somme $S_{15} = U_0 + U_1 + ... + U_{15}$
c) On pose $V_n = 4^{U_n}$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique puis déterminer la limite de V_n quand $n \to +\infty$

20- Soient les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$U_{n+1} = \dfrac{1 + 2U_n}{2 + U_n}$ et $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$

Calculer U_1, U_2, U_3, V_0 ; V_1 et V_2
Montrer que V_n est une S.G dont on précisera la raison. Exprimer U_n et V_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}$

d) Calculer les sommes: $S_n = \sum_{i=0}^{n} Vi$ et

$S'_n = \sum_{i=0}^{n} Ui$ puis

23.- Soit $n \in N$, on pose $I_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{2x} dx \quad n \geq 1$

a) Exprimer I_n en fonction de n

b) Montrer que I_i est une S. A dont on précisera la raison et le premier terme
c) Soit la suite (V_n) est une S.G dont on précisera la raison et le premier terme

24.- Soit $I_n = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$

a) Exprimer I_n en fonction de n
b) Montrer que (I_n) est une S.G dont on précisera la raison et le premier terme I_0
c) Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = I_0 + I_1 + \ldots + I_n$. En déduire la somme $S_{10} = I_0 + I_1 + \ldots + I_9$

25- . Soit α un réel donné et (V_n) la suite réelle définie par $V_0=4$ et $\forall n \in N,\ V_{n+1}= \alpha V_n - 5$

a) Quelle valeur doit-on donné au réel α pour que la suite (V_n) soit constante.
b) On suppose que a= $\frac{2}{3}$ et on pose $U_n = V_n - 15,\ n \in N$

3) Montrer que (U_n) est une S.G dont on précisera la raison.

4) Calculer U_n puis $Sn = \sum_{i=0}^{n} Ui$ en fonction de n. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$

26- On note (V_n) une suite géometrique de raison positive définie sur ℕ

Par : $\begin{cases} V_1 + V_3 = 36 \\ V_2 + V_4 = 72 \end{cases}$

a) Calculer la raison q et le premier terme V_0 de cette suite.
b) Déterminer V_n en fonction de n

On pose $Sn = \sum_{i=0}^{n} Vi$. Déterminer S_n en fonction de n. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$

27- Soit la suite numérique réelle (U_n) définie par son premier terme $U_0 = -4$, et pour tout nombre n par $U_n = \frac{2}{5}U_{n-1} - 3$.

a) Déterminer le réel α tel que la suite (U_n) définie par $V_n = U_n + \alpha$ soit une S.G. dont on précisera la raison et le 1er terme.
b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n.
c) on pose : $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$.
Calculer S_n en fonction de n puis en déduire S'_n
d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} S'_n$

28 Soit (U_n) une S.G réelle définie sur N, de premier terme non nul et de raison strictement positive. Sachant que le premier terme vaut 16 fois le cinquième.

a) Calculer la raison q de cette suite.
b) Justifier que, si le 1er terme vaut 4, alors $\forall n \in N, U_n = 2^{-n+2}$. En déduire que (U_n) est convergente.
c) Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite.

29- Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = 2n-1$.

1) a) Montrer que (U_n) est une S.A dont on précisera la raison.
2) On pose $\forall n \in N, V_n = e^{U_n}$.
a) Montrer que (V_n)est une S.G. dont on précisera la raison.
b) Montrer que $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
c) Calculer le produit $P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n$
d) Trouver l'entier naturel n tel que $V_n > 12$

30- Soient les suite (U_n) et (V_n) telles que : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n \end{cases}$ et $V_n = \ln(U_n)$

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b) Exprimer U_n en fonction de n.
c) Montrer que (V_n) est une S.A dont on précisera la raison et le 1er terme.
d) Exprimer (V_n) en fonction de n
e) Calculer les sommes

$S_n = V_0+V_1+V_{n-1}$ et $S'_n = U_0+U_1+U_{n-1}$

Choisir la bonne réponse dans les exercices 31 à 48

31.- La somme des 7 premiers termes de la suite 3, 9, 27, 81,...., est :
a) 9940 b) 9930 c) 9939 d) 9950

32.- Si (U_n) est une S.G de raison $q = \frac{1}{2}$, de terme initial $U_0 = 4$ et $U_n = \frac{1}{4}$ alors n = ...
a) 4 b) 16 c) 8 d) 2

33.- Soit (U_n) une S.G de n termes déterminée par son premier terme -6 et sa raison $\frac{1}{3}$, la limite de la somme de ses termes quand n tend vers $+\infty$ est :
a) -4 b) 9 c) -9 d) 4

34.- La raison q et le 1er terme U_1 d'une S.G sachant que le 4e terme est 24 et le 7e terme est 192 sont :
a) $q = 2$ et $U_1 = 3$ b) $q = 3$ et $U_1 = 2$
c) $q = 2$ et $U_1 = 2$ d) Aucune réponse

35.- La raison q et le 1er terme U_0 d'une S.G sachant que le 3e terme est 16 et le 6e terme est 1024 sont
a) $q = 4$ et $U_0 = 2$ b) $q = 4$ et $U_0 = 1$
c) $q = 4$ et $U_0 = 3$ d) *Aucune réponse*

36.- La suite géométrique (U_n) est telle que : $U_1.U_2.U_3 = 729$. *Le terme U_2 vaut ...*
a) 4 b) 16 c) 9 d) Aucune réponse

37.- S_n est la somme des (n + 1) premiers termes d'une S.G de raison q. Si $U_2 = 9$ et $q = 3$ alors S_4 = ...
a) 63 b) 31 c) 65 d) Aucune réponse

38.- S_n est la somme des n premiers termes d'une S.G de raison q. Si $U_3 = 4$ *et* $q = 2$ alors S_5 = ...
a) 32 b) 31 c) 33 d) 35

39.- Si (U_n) est une S.G de raison q et du nombre de terme n sachant que $U_1 = 1$, $U_n = 16$ et $S_n = 31$ alors le couple (n, q) = ...
a) (5,2) b) (5,3) c) (6,3) d) Aucune réponse

40.- Soit (U_n) une S.G de raison q et du nombre de terme n. Si $U_1 = 1$ $U_{n+1} = 128$ $S_n = 127$ alors le couple (n,q) = ...
a) (7,2) b) (7,3) c) (6,2) d) (6,3)

41.- Le nombre m de moyens géométriques d'une progression de raison 2 qu'on peut insérer entre 2 et 128 est :
a) m = 4 b) m = 5 c) m = 6 d) m = 7

42.- Si (U_n) est une S.G de raison 2 et de premier terme U_1 alors pour tout $n \in N$, U_n est égale à :
a) $U_1.2^{n+1}$ b) $U_1.2^{n-1}$ c) $U_1.2^n$ d) $U_1.2^{n-2}$

43.- Le 10ème terme de la suite 2, 4, 8, 16, ... est :
a) 729 b) 1024 c) 512 d) Aucune réponse

44.- La somme des 6 premiers termes de la suite 1, 3, 9, 27, ... est :
a) 324 b) 364 c) 362 d) Aucune réponse

45.- Si (U_n) est une S.G de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $U_1 = 2$ et S_n la somme des n premiers termes de (U_n) alors $\lim_{n \to +\infty} S_n = ...$:
a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 4 d) Aucune réponse

46.- Le nombre de termes de cette progression 2, *4, 8, ..., 1024 est :*
a) 9 b) 10 c) 11 d) 12

47.- La somme *1+3+9+...+2187* vaut »
a) 3280 b) 3281 c) 3283
d) Aucune de ces réponses

48- Si (Un) est une suite géométrique telle que : $U_6=12$ et $U_8=48$, alors la raison de cette suite est :
a) -2 b) 4 c)-4 d) 2

49- Si U_n $n \in N^*$ est une suite géométrique de raison 2 et de 3e terme 8, alors la somme de ces 6 premiers termes est :
a) 128 b) 136 c) 126 d) 120

Chapitre V

Fonction logarithme népérien

Définition La fonction logarithme népérien vient pour honorer la mémoire du mathématicien Ecossais John Napier (1550-1617)

C'est en cherchant un moyen de simplifier les calculs numériques que Napier imagina un procède de multiplication et de division au moyen de la baguette chiffrée connue sous le nom de réglettes de Napier. En 1614, il publia son premier traité sur les logarithmes, malheureusement il mourut trois ans après.

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction notée ln vérifiant les propriétés suivantes :

- Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$
- L'image de 1 est 0
- Sa dérivée première est $\frac{1}{x}$

donc $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \to \ln x$

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Pour tout nombre réel a et tout nombre rationnel m on a :

- $\ln a^m = m \ln a$

La fonction ln est continue et monotone croissante sur $]0,+\infty[$, elle est donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$ par conséquent : pour tous nombres réels a et b strictement positifs

- ln a = ln b si et seulement si a = b

ln a < ln b si et seulement si a < b

Objectif

- Utiliser les propriétés pour résoudre des équations ou inéquations comportant des logarithmes

Idées et stratégies

Pour résoudre une équation comportant des logarithmes, on peut utiliser le procède suivant :

- Déterminer les contraintes sur l'inconnue

Se ramener à une ou plusieurs égalités de la forme : ln a = ln b, pour déterminer une équation équivalente

1.- Exprimer chacun des nombres suivants en fonctions de ln2 :

$$\ln 8;\ \ln\frac{1}{16};\ \ln\sqrt{2};\ \ln\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ln 16;\ \ln 512$$

2.- Exprimer chacun des nombres suivants en fonctions de ln3 et ln5 :

$\ln 15;\ \ln\frac{25}{3};\ \ln 75\sqrt{5};\ \ln 45$

3.- Simplifier les expressions suivantes

a) $A = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

b) $B = 10\ln(\sqrt{5}+2) + 5\ln(9-4\sqrt{5})$

c) $C = \ln(2+\sqrt{2}) + \ln(2-\sqrt{2}) + 2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $D == \ln e^4 + \ln e^{\frac{1}{4}} + \ln\sqrt{e} - \ln\frac{1}{\sqrt{e}}$ $(\ln e = 1)$

e) $E = \ln 25 + 3\ln\frac{1}{5} + 3\ln\sqrt{5}$

f) $F = \ln\left((3\sqrt{2}-\sqrt{17})^{50}\right) + \ln\left((3\sqrt{2}+\sqrt{17})^{50}\right)$

Exemple 1.-

1.- Résoudre dans R, l'équation ln(2x-3) + 2ln(x+1) = ln(6x-3)

Solution

Contraintes sur l'inconnue :

$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ x+1>0 \\ 6x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{3}{2},+\infty\right[$$

Ramenons l'équation sous la forme ln a = ln b

$\ln(2x-3) + 2\ln(x+1) = \ln(6x-3)$

$\Rightarrow \quad \ln(2x-3) + \ln(x+1)^2 = \ln(6x-3)$

$\Rightarrow \quad \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

$(2x-3)(x+1)^2 = 6x-3$

$\Rightarrow x(2x+5)(x-2)=0$

$x=0 \quad x=-\frac{5}{2} \quad x=2$

La solution retenue est : x = 2 donc S = {2}

Idées et stratégies

Pour résoudre une inéquation comportant des logarithmes, on peut utiliser le procédé suivant :

- Déterminer les contraintes sur l'inconnue ;
- Se ramener a une ou plusieurs inégalités de la forme : *ln a < ln b*

Exemple 2.-

Résoudre dans R, l'inéquation suivante : $\ln(x+2) \le \ln(x^2-4)$

Solution

Contraintes sur l'inconnue :

$\begin{cases} x+2>0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]2,+\infty[$

L'inéquation étant déjà sous la forme $\ln a \le \ln b$

on a : $(x+2) \le (x^2-4)$

donc $x \in]-\infty,-2[\cup [3,+\infty[$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est

$(]2;\ +\infty[\cap]-\infty,\ -2[\cup]3\ \ +\infty[)$

d'où $S = [3,+\infty[$

Le nombre *e*

On note *e* l'unique nombre réel tel que :

ln e = 1 ; e est appellé base du logarithme népérien

On a : e = 2,718281828456

Remarque

- Pour tout nombre rationnel m, on a : $\ln e^m = m \ln e = m$

Exercice

On donne l'équation $(E): \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=1$

a) Déterminer l'ensemble V de validité de (E)

b) Donner une équation équivalente à (E)

c) Résoudre dans R, l'équation (E)

Calcul de limites logarithmiques

.- Limites de référence

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0 \quad n \ge 1$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^n \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Exercice

1.- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x+5\ln x}{x-2\ln x}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5\ln 4x-2}{2\ln 4x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2+2}{\ln x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln x)^2$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x-2}\ln(x-1)$

Dérivées logarithmiques

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et qui ne s'annulent pas, on a :

$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \qquad (\ln uv)' = \frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}$

$\left(\ln \frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{u}-\frac{v'}{v} \qquad (\ln u^m)' = m\frac{u'}{u}$

Exercice

2.- Calculer le domaine de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f : x \to \ln(x-3)^2$ b) $f : x \to \ln(x-3)^3$

c) $f : x \to \ln(x^2-4)$ d) $f : x \to \ln(x+1)(x-2)$

e) $f : x \to \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$ f) $f : x \to \sqrt{\ln(x-2)}$

Fonction logarithme de base a

a étant un réel strictement positif et différent de 1, on appelle fonction logarithme de base a la fonction notée $\log_a$ définie par :

$\log : R_+^* \to R$

$x \to \log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Propriétés

Pour tout nombre réel positif différent de 1 on a :

- $\log_a^1 = 0; \quad \log_a^a = 1$

Pour tous nombres réels strictement positifs b, c et a strictement différent de 1 on a :

- $\log_a^{bc} = \log_a^b + \log_a^c$

  $\log_a^{\frac{b}{c}} = \log_a^b - \log_a^c$

Pour tous nombres réels strictement positifs b et a différent de 1 et pour tout nombre rationnel n

- $\log_a^{b^n} = n\log_a^b$

  $\log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$

En particulier si a = 10 ; $\log_{10}^x = \log^x$. On parle donc de logarithme à base 10

- ln : logarithme népérien log : logarithme décimal

Généralement on n'écrit pas la base 10

INFO

$1 = \ln e \quad 1 = \log 10$

$3 = \ln e^3 \quad 3 = \log 10^3$

Exercice

Vérifier que pour tout réel positif x différent de zéro : log ; + log ; = log ; ⇔ $a = 16$

Fonction exponentielle de base e

Exercice d'approche

Déterminer la réciproque de la fonction f définie par : $f : x \to \ln x$

Solution

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \to \ln x$

Posons f(x) = y

$\Leftrightarrow y = \ln x \Rightarrow \ln x = e^y$

$\Leftrightarrow x = e^y \quad : f^{-1}(x) = e^x$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

$x \to e^x$

On appelle fonction exponentielle notée Exp ou e, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien : $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \to e^x$

Propriétés

$e^0 = 1$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$

$\forall a \in \mathbb{R} : e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

$\forall a,b \in \mathbb{R} : e^{a+b} = e^a . e^b$

$\forall a,b \in \mathbb{R} : \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in Q : e^{na} = (e^a)^n$

$\forall x \in \mathbb{R} : \ln e^x = x$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : e^{\ln x} = x$

Exercice résolu

a) Déterminer les racines du polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 2x^2 + 9x - 5 = 0$. En déduire une factorisation de P(x)

b) Résoudre dans R , l'équation $2e^{2x} + 9e^x - 5 = 0$

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $2e^{2x} > 5 - 9e^x$

Solution

a) $P(x) = 2x^2 + 9x - 5$

$P(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 9x - 5 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ ou $x = -5$

une factorisation de P(x) : P(x) = (2x -1)(x+5)

b) $2e^{2x} + 9e^x - 5 = 0$

on a : $e^x = -5$ pas de solution

$e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln 2 \qquad S = \{-\ln 2\}$

c) $2e^{2x} > 5 - 9e^x \Rightarrow 2e^{2x} + 9e^x - 5 > 0$

$S =]-\ln 2; +\infty[$

Dérivée de la fonction exponentielle

Soit la fonction f définie par : $f : x \to e^x$

$y = e^x$

- Comme la fonction *ln* est bijective, on a : $\ln y = \ln e^x \Rightarrow \ln y = x$
- Dérivons les deux membres :

$\frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y \qquad$ donc : $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

- D'une manière générale $f(x) = e^{U(x)}$

$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

Remarque

- La fonction $f(x) = e^{\sqrt{u(x)}}$ a le même domaine de définition que $\sqrt{U_{(x)}}$

Limites des fonctions exponentielles

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n e^x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$n \geq 1$

Exercices

Choisir la bonne réponse dans les exercices 1 à 3

1.- Le domaine de définition de la fonction f telle que : $f(x)=e^{\sqrt{x^2-4}}$ est :

a) $Df=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

b) $Df=]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$ c) $Df=[-2,2]$

2.- $\lim\limits_{U\to 0}\frac{e^u-1}{u}=$

a) 0 b) 1 c) -1 d) 2

3.- La dérivée première de la fonction f telle que : $f(x)=e^{x^2-2x+1}$ est :

a) $f'(x)=(2x+2)e^{x^2-2x+1}$

b) $f'(x)=(2x-2)e^{x^2-2x+1}$

c) $f'(x)=e^{2x-2}$

4.- Vérifier que pour tout réel x :

a) $\frac{2e^x-5}{2e^x+3}=\frac{2-5e^{-x}}{2+3e^{-x}}=1-\frac{8}{2e^x+3}$

b) $\frac{e^{-x}}{e^x+2}=\frac{1}{e^{2x}+2e^x}=\frac{e^{-2x}}{1+2e^{-x}}$

c) $\frac{e^{2x}}{e^x+2}=\frac{e^x}{1+2e^{-x}}=\frac{1}{e^{-x}+2e^{-2x}}$

5.- Soit la fonction f définie par : $f:x\to\frac{1}{2}\left(e^{-x}+e^x\right)$

a) Montrer que $\forall x\in R$ on a : $f(2x)=2[f(x)]^2-1$

b) Résoudre dans R l'équation : $f(2x)-6f(x)+5=0$

6.- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^x-3}{5e^x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2e^x-3}{5e^x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln-1}{x-e}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\left(e^x-2\right)$

7.- **Préciser le domaine de définition et la dérivée première des fonctions suivantes.**

a) $f(x)=\ln\left(3e^x-7e^{-x}+20\right)$.

b) $f(x)=\ln\left(e^{2x}-3e^{x+1}+2e^2\right)$.

c) $f(x)=\ln\left(\frac{-e^{2x}+3}{e^{2x}-1}\right)$

d) $f(x)=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

e) $f(x)=e^{\frac{x-1}{x+1}}$

8.- Calculer le domaine de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\ln(-x)$ b) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

c) $f(x)=\ln\left(\frac{3x-4}{x-2}\right)$ d) $f(x)=\ln\left(\frac{x-3}{x-1}\right)$

e) $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ f) $f(x)=\ln[\ln(\ln x)]$

g) $f(x)=\ln\sqrt{x}$ h) $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$

i) $f(x)=\left(x^2-3\right)e^x$ j) $f(x)=e^{\sqrt{x^2-2x+3}}$

k) $f(x)=\frac{e^x+3}{e^x+1}$ l) $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$

m) $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x+1)(x-1)$

9-.- Résoudre dans R, les équations suivantes :

a) $\ln(2x+1)+\ln(3-x)=\ln 3+\ln(1-3x)$

b) $2\ln x+\ln(2x-3)=\ln(3x-2)$

c) $(\ln x)^2-6\ln x+5+0$

d) $\ln(x+2)=1+\ln(x-3)$

e) $(\ln x)^2+7\ln x-6=0$

f) $\log(3x-4)+\log(10x-4)-2\log(5x-2=0$

10.- Résoudre dans R les inéquations suivantes :

a) $1+\ln(x+3)>\ln(x^2+2x-3)$

b) $1+\ln x<0$

c) $\ln(3x+2)\geq\ln(x-1)$

d) $\ln(x+5)+\ln(x+4)\leq\ln(x+13)$.

e) $(1-\ln x)(3+\ln x)\geq 0$

f) $\ln\left(x^2-4e^2\right)<1+\ln 3x$

g) $\ln(x+2)+\ln(x+4)<\ln(x+8)$

11.- Soit la fonction polynôme définies sur R par : $f(x)=2x^3-x^2-13x-6$

a) Déterminer une fonction trinôme du second degré dont le produit par (x + 2) donne f (x)

En déduire la résolution dans R de

b) l'inéquation $2e^{3x}-e^{2x}-13e^x-6\geq 0$

Concours Faculté des Sciences

12- Soit $P(x)=e^{3x+1}-2e^{+1}+e^{x+1}$

a) Factoriser $P(x)$.

b) Résoudre successivement les équations

➢ $\left|e^{3x+1}-e^{2x+1}=e^{2x+1}-e^{x+1}\right|$

➢ $e^{3x+1} - e^{2x+1} = e^{2x+1} - e^{x+1}$

Concours Faculté des Sciences

13- Relier chaque fonction de la colonne A à son ensemble de définition inscrit dans la colonne B

Colonne A	
$f(x) = \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)$	a
$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$	b
$f(x) = \ln\left\lvert\frac{x-3}{x-2}\right\rvert$	c
$f(x) = \ln(x-2)(x-3)$	d
$f(x) = \ln(x-2) + \ln(x-3)$	e
$f(x) = \ln(x^2-9)^3$	f
$f(x) = \ln(x^2-9)^3$	g
$f(x) = \ln(x-3)$	h

	Colonne B
1	$Df =]3, +\infty[$
2	$Df = \Re \setminus [-3, 3]$
3	$Df =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$
4	$Df =]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$
5	$Df =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$
6	$Df =]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$

14- <u>Relier chaque fonction de la colonne A à sa dérivé première inscrite dans la colonne B</u>

Colonne A	
$f(x) = \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)$	a
$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$	b
$f(x) = \ln\left\lvert\frac{x-3}{x-2}\right\rvert$	c
$f(x) = \ln(x-2)(x-3)$	d
$f(x) = \ln(x-2) + \ln(x-3)$	e
$f(x) = \ln(x^2-9)^3$	f
$f(x) = \ln(x^2-9)^3$	g
$f(x) = \ln(x-3)$	h

	Colonne B
1	$f'(x) = \frac{2x-5}{(x-3)(x-2)}$
2	$f'(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$
3	$f'(x) = \frac{-1}{x^2-5x+6}$
4	$f'(x) = \frac{2x}{x^2-9}$
5	$f'(x) \frac{4x}{x^2-9}$
6	$f'(x) = \frac{1}{x-3}$
7	$f'(x) = \frac{6x}{x^2-9}$

15- Relier chaque équation de la colonne A à son ensemble de solution inscrit dans la colonne B

a)

Colonne A	
$\ln(x+2)+\ln(x-2)=\ln 45$	a
$\ln(x-2)(x+2)=\ln 45$	b
$\ln(x-2)(x-1)=\ln 12$	c
$\ln(x-2)+\ln(x-1)=\ln 12$	d

	Colonne B
1	$S=\{7\}$
2	$S=\{-7\}$
3	$S=\{-7,\ 7\}$
4	$S=\{-2\}$
5	$S=\{5\}$
6	$S=\{-2\ \ 5\}$

b)

Colonne A	
$\frac{1}{2}\ln(x-1)+2\ln 2=\ln(x-1)$	a
$\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$	b
$\ln(1-5x)+\ln 2=\ln(2x+3)+\ln(3-15x$	c

	Colonne B
	$S=\left\{\frac{1}{5},\ \ -\frac{7}{6}\right\}$
	$S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$
	$S=\left\{-\frac{7}{6}\right\}$
	$S=\{7-4\sqrt{2};\ 7+4\sqrt{2}\}$
	$S=\{7+4\sqrt{2}\}$

16.- Relier chaque inéquation de gauche à son ensemble de solution inscrit à droite.

Colonne A	
$\ln(x+2)+\ln(x+4)<\ln(x+8)$	a
$(1-\ln x)(3+\ln x)\geq 0$	b
$\ln(x^2-4e^2)<1+\ln 3x$	c
$\ln(x+2)<3$	d
$3e^x-7e^{-x}+20\leq 0$	e
$\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\geq 2$	f
$e^{2x}-3e^{x+1}+2\leq 0$	g

	Colonne B
1	$]0;\ln\sqrt{3}]$
2	$]-\infty;-\ln 3]$
3	$S=]-2;0[$
4	$S=[e^{-3},e]$
5	$S=]2e;4e[$
6	$S=[e^{-3};e^{3}]$
7	$S=]-2e^{3}-2[$
8	$S=[-1;-1+\ln 2]$

17.- Soit le polynôme :

$P(x)=2x^3-13x^2-10x+21$

1) Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que : $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ et les déterminer puis résoudre dans R l'équation $P(x)=0$.

2) En déduire les solutions dans R des équations suivantes :

a) $2(\ln x)^3-13(\ln x)^2-10\ln x+21=0$.

b) $10+13e^x-2e^{2x}=21e^{-x}$

18.- On considère l'expression :

$P(x)=e^{3x}-e^{2x}-14e^x+24$

Calculer $P(\ln 2)$ puis résoudre l'équation $P(x)=0$

19.- Résoudre dans R, les équations suivantes :

a) $e^{2x+1}-5e^{x+2}-6e^3=0$

b) $2e^{2x+1}+e^{x+1}=e^{1+\ln 2}$

c) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{3}{5}$

d) $4^x-3.2^{x+2}-2^6=0$ e) $e^{2x-1}-\sqrt{e^{2x+2}}-2e^3=0$

f) $e^{4x+2}-\dfrac{2^2}{e^{4x+2}}=e^2-1$

g) $3^x+\dfrac{6}{3^x}=5$

h) $\dfrac{e^x-e^x}{2}=\dfrac{15}{8}$

20.- Résoudre dans R^2, les systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases}5\log_2^x+2\log_2^y=8\\4\log_2^x-3\log_2^y=50\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=65\\\ln x+\ln y=3\end{cases}$

3) $\begin{cases}5\log_2^x+2\log_2^y=8\\4\log_2^x-3\log_2^y=11\end{cases}$

4) $\begin{cases}x+y=65\\\log x+\log y=3\end{cases}$

5) $\begin{cases}7(\log_y^x+2\log_x^y)=50\\xy=256\end{cases}$

6) $\begin{cases}\log_x^e+\log_y^e=\dfrac{7}{3}\\\ln xy=\dfrac{7}{2}\end{cases}$

21) Résoudre dans $\Re^2$, le système :

$\begin{cases}4u-2v=8\\3u+v=11\end{cases}$

2) En déduire la résolution des équations :

a) $\begin{cases}4\ln x-2\ln y=8\\3\ln x+\ln y=11\end{cases}$

b) $\begin{cases}4e^x-2e^y=8\\3e^x+e^y=11\end{cases}$

22- Résoudre dans R.

a) $\ln(\ln x)=0$ b) $\ln(x^2-e^2)=1+\ln x$

c) $\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\dfrac{1}{2}\ln x$

d) $1+\ln(x+3)>\ln(x^2+2x-3)$

e) $4e^{2x}+15e^{-x}=19$

23- Résoudre dans R :

a) $3^{1+2x}=2$

b) $4^{x+3}=3$

c) $e^{4x}-7e^{2x}+10=0$

d) $\ln|x<1|$

24-- Soit la fonction définie par :

$f:x\to\ln\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right)$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Montrer que f est une bijection de Df sur un ensemble I que l'on précisera.

3) En déduire $f^{-1}(x)$

25.- Même question avec

$f:x\to\dfrac{2e^x-4}{e^x-3}$

26.- Soit la fonction $f:x\to\dfrac{\ln x-2}{\ln x-1}$

a) Donner l'ensemble de définition de f puis calculer sa dérivée première.

b) Résoudre dans R l'équation f(x) = 3

c) Pour quelle de x la fonction f s'annule-t-elle ?

27.- Résoudre dans R^2, le système :

$$\begin{cases} \log(-x+2y)+1=\log(2x-3y+4) \\ 3^{3x+y}.3^{-x-6y}=81 \end{cases}$$

Choisir la bonne réponse dans les exercices 27 à 73

28.- Soit la fonction f définie sur $R \setminus [-3, 3]$ par : $f(x)=\ln(x^2-9)^2$.

L'expression de sa dérivée est :

a) $f'(x)=\frac{6x}{x^2-9}$ b) $f'(x)=\frac{9}{x^2-9}$

c) $f'(x)=\frac{4x}{x^2-9}$ d) $f'(x)=\frac{-9}{x^2-9}$

29.- L'ensemble des solutions de R, de l'équation : $e^{2x}-7e^x+12=0$

a) $S=\{3,4\}$ b) $S=\{e^3,e^4\}$

c) $S=\{\ln 3,\ln 4\}$ d) $S=\left\{\ln\frac{1}{3},\ln\frac{1}{9}\right\}$

30.- Le réel $b=\frac{1}{2}\ln(e^3)^{\frac{1}{3}}$ équivaut à ;

a) $\frac{1}{2}$ b) 3 c $\frac{2}{3}$ d) 1

31.- L'expression de la dérivée de la fonction f définie par : $f: x \to 1-(2x+1)e^{-2x}$ est :

a) $f'(x)=4xe^{-2x}$ b) $f'(x)=-4xe^{-2x}$

c) $f'(x)=-2xe^{-2x}$ d) $f'(x)=-1(2x+1)xe^{-2x}$

32.- soit $A=e^{2\ln 2}-\ln e^4$ alors :

a) A = 2 b) A = 4 c) A = 8 d) A = 0

33.- La dérivée de la fonction f telle que : $f(x)=(x+1)e^{x-1}$ est :

a) $f'(x)=(x+2)e^{x-1}$ b) $f'(x)=(x+2)e^x$

c) $f'(x)=(x-2)e^{x-1}$ d) $f'(x)=(x+1)e^{x-1}$

34.- La solution R^2, du système :

$$\begin{cases} x+y=7 \\ \ln x+\ln y=\ln 12 \end{cases}$$

a) S = {(7, 12)}

c) S = {(4, 3); (4, 3)} b) S = {(4, 3)} d) S = {(3, 4)}

35.- L'équation : $e^{-x}-3e^x+2=0$ a pour solution:

a) S = { } b) S = { 0 } c) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ d) S = { 1 }

36.- L'équation ln (3x + 2) – lnx = 0 a pour solution :

a) S = { } b) S = { 0 } c) S = { 2 } d) S = { -1 }

37.- Soit la fonction f définie par :

$f(x)=\frac{e^{x-1}}{e^{x+1}}$ alors

a) f est croissant sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$

b) $f'(x)=\frac{2xe^{x^2-1}(2x+1)}{(e^{x+1})^2}$

c) f est constante sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$

d) f est décroissant sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$

38.- Le domaine de définition f telle que :

$f(x)=\frac{e^{2x-5}-4}{\ln(2x+5)}$ est :

a) $Df=\left]-\frac{5}{2}+\infty\right[$

b) $Df=\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right[$

c) $Df=\left]-\frac{5}{2}-2\right[\cup\left]-2,+\infty\right[$

39.- L'équation de la tangente à la courbe représentative(C) de la fonction f telle que :

$f(x)=\frac{e^{3x+1}-3}{e^{4x^2}}$ au point d'abscisse $x_0=0$ est :

a) $y=3e^x+e-3$ b) $y=3e^x+e+3$

c) $y=-3e^x+e-3$ d) Autre (préciser)

40.- La fonction $g: x \to \ln\frac{-2}{-x+3}$ est définie sur :

a) $-x+3>0$ b) $-x+3<0$ c) $x>3$ d) $x>-3$

41.- L'équation

$$\begin{cases} x+y=4e \\ \ln x+\ln y=2+\ln 3 \end{cases}$$ a pour solution

a) $S=\{(e,3e),(3e,e)\}$ b) $S=\{\ln(e,3)\}$

c) $S=\{(e,-3e),(3e,e)\}$ d) Autre (préciser)

42.- Si f est une fonction telle que :

$f(x)=x^2(a+b\ln x)$, $f(1)=3$ et $f'(1)=4$

alors le couple (a, b)

a) (a, b) = (-2, 3) b) (a, b) = (3, -2)

c) (a, b) = (3, 2) d) (a, b) = (2, 3)

43.- L'inéquation $e^{-x-1} \le e^{(x+1)(x-5)}$ a pour solution :
a) $]-\infty,1]\cup[4,+\infty[$ b) $]-\infty,1[\cup]4,+\infty[$
c) $]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$ d) $]-\infty,-1]\cup[4,+\infty[$

44.- Les coordonnées du point d'inflexion à la courbe représentative de la fonction f définie par : $f:x\to(x+2)e^{-x}$ sont :
a) (2, 0) b) (0, 2) c) (-2, 0) d) (0, -2)

45.- Soit la fonction :

$$f:x\to ax+b-\frac{4e^x}{e^x+2}$$

La courbe représentative (C) de f passe par le point de coordonnées (ln2, ln2) et admet ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses pour (a, b) = …
a) (-1, 2) b) (2, 1) c) (1, 2) d) (1, -2)

46.- Le point d'inflexion à la courbe représentative de la fonction :
$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ est :
a) $\left(\sqrt{e};\frac{3\sqrt{e}}{2e}\right)$ b) $\left(\sqrt{e};\frac{3\sqrt{e}}{e}\right)$ c) $\left(\sqrt{e};e\right)$

47.- La réciproque de la fonction f d'expression $f(x)=\ln(2x+1)$ sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$ est :
a) $f^{-1}(x)=\frac{\ln x+1}{2}$ b) $f^{-1}(x)=\frac{e^x-1}{2}$
c) $f^{-1}(x)=\frac{\ln x-2}{3}$ d) $f^{-1}(x)=\frac{e^x+1}{2}$

48.- La fonction f d'expression $f(x)=e^{2x+1}$ admet sur $]-\infty\ \ +\infty[$ pour réciproque :
a) $f^{-1}(x)=\frac{\ln x+1}{2}$ b) $f^{-1}(x)=\frac{\ln x-1}{2}$
c) $f^{-1}(x)=\frac{\ln x-2}{3}$ d) Autre préciser

49.- La courbe représentative de la fonction f d'expression $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ a un sommet égal à :
a) $S=(1,e)$ b) $S=\left(1,\frac{1}{e}\right)$
c) $S=(e,1)$ d) $S=\left(\frac{1}{e},?\right)$ e) $S=(e,e)$

50.- L'équation lnx = -5 à pour solution :
a) e^{-5} b) $-\frac{1}{5}$ c) $-e^{-5}$ d) -5

51.- La dérivée de la fonction f d'expression $f(x)=e^{2x^2}$ est :
a) $f'(x)=e^{2x^2}$ b) $f'(x)=2xe^{2x^2}$
c) $f'(x)=4xe^{2x^2}$ d) $f'(x)=e^{2x^2}$

52.- Lequel de ces nombres donne ln3 ?
a) $\frac{\ln 5}{\ln 10}$ b) $\frac{\ln 9}{\ln 3}$ c) $\ln 15-\ln 5$

53.- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln x}{-x+3\ln x}=\ldots$
a) $+\infty$ b) -3 c) 3 d) indéterminée

54.- La solution de l'inéquation $3e^{-x}\ge 1$ est :
a) $]-\infty,\ln 5]$ b) $]-\infty,\ln 3]$
c) $]-\infty,\ln\frac{5}{3}[$ d) $]-\infty,\frac{5}{3}[$

55.- L'ensemble des solutions du système :
$\begin{cases}x^2+y^2=34\\ \ln x+\ln y=\ln 15\end{cases}$ est
a) S = {(-3, 5) ; (5, -3)}
b) S = {(-5, -3) ; (5, -3)}
c) S = {(3, 5) ; (5, 3)}
d) S = {(2, 5) ; (5, 2)}

55.- L'égalité $\ln(x^2-4)=\ln(x+2)+\ln(x-2)$ est vraie si :
a) $x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ b) $x\in R\setminus\{-2,2\}$
c) $x\in]-\infty,-2[$ d) $x\in]2,+\infty[$

56.- L'inégalité 1 + ln(x + 3) > ln(x^2 + 2x - 3) est vraie si :
a) x ∈]-3 ; +∞ [b) $x\in]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$
c) x ∈]1; +∞ [d) $x\in R$

57.- L'égalité $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\ln|x+1|=0$ si
a) $x\ne 1$ b) $x\ne -1$
c) $x\ne -1$ et $x\ne 1$ d) $x\ne -1$ ou $x\ne 1$

58.- La fonction f d'expression :
$f(x)=\ln(e^{2x}+3e^x-5)$ a pour dérivée :

a) $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}+3e^{x}}{\ln\left(e^{2x}+3e^{x}-5\right)}$

b) $f'(x)=2e^{2x}+3e^{x}$

c) $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}+3e^{x}}{e^{2x}+3e^{x}-5}$

59.- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-1}{3\ln x-1}=\ldots$

a) $-\frac{1}{3}$ b) -1 c) 1

d) -2 e) $\frac{1}{3}$ f) indéterminée

60.- $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-1}=\ldots$

a) $\frac{1}{e}$ b) e c) 1

d) -1 e) $\frac{1}{3}$ f) indéterminée

61.- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x+x^2}=\ldots$

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) indéterminée

62.- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}=\ldots$

a) 0 b) -1 c) 1 d) indéterminée

63.- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\ldots$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$

c) 1 d) indéterminée

64.- La solution dans R, de l'équation :

$4[\ln(\log x)]^2-7\ln\log x+3=0$ est :

a) $\left\{e, e^{\frac{3}{4}}\right\}$ b) $\left\{1, \frac{3}{4}\right\}$ c) $\left\{10^{e}, 10^{e^{\frac{3}{4}}}\right\}$

65.- L'équation $\log_x^9=2$ a pour solution :

a) $S=\{6\}$ b) $S=\{3\}$ c) $S=\{2\}$

66.- Si f est la fonction numérique définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=a+b\ln(1+x)$; $f(0)=3$ et $f'(3)=-1$ alors le couple (a, b) est :

a) (3, 4) b) (3, -1) c) (-4, -1)

d) (-1, 3) e) (-4, 3)

67.- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^{x}-3}{e^{x}+1}=$

a) 2 b) -3 c) 1 d) $-\frac{3}{2}$

68.- $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=$

a) $\frac{1}{e}$ b) 1 c) $\frac{1}{e-1}$

69.- La limite de la fonction $x\to\dfrac{e^{x}-2}{e^{x}+1}$ en $+\infty$ est :

a) -2 b) 1 c) -1 d) 2

70.- Si la fonction est définie par $f(x)=e^{\sin 2x}$ alors $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est égal à :

a) 2 b) 0 c) $2e$ d) -2^{e}

71.- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2\ln x}{1-\ln x}=$

a) 1 b) -2 c) 2

72.- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}x^2e^{x+1}=$

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1

73.- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+2}{e^{x}-1}=$

a) -2 b) 1 c) -1

73.- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}+2}{e^{x}-1}=$

a) 1 b) -1 c) -2

****

Chapitre VI

Primitives d'une fonction

Définition et propriétés

Exercice d'approche

Dans chacun des cas suivants, déterminer une fonction F dérivable sur un intervalle I que l'on précisera et dont la dérivée est la fonction f

a) $f:x\to5$ b) $f:x\to x^3$

c) $f:x\to\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d) $f:x\to\cos x$

e) $f:x\to-\dfrac{1}{x^2}$ f) $f:x\to\sin x$

g) $f:x\to\dfrac{1}{\cos^2x}$ h) $f:x\to-\dfrac{1}{\sin^2x}$

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F de I vers R, dérivable sur I et telle que, pour tout élément x de I, $F'(x)=f(x)$

Exemple 1

La fonction $F:x\to x^2-\cos x+\sqrt{x}$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $f:x\to 2x+\sin x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriétés

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet une primitive sur I.

Ensemble des primitives d'une fonction

Démonstration

- Soit C un nombre réel. La fonction x → F(x) + C est dérivable sur I et a la même dérivée que la fonction x → F(x) ; donc la fonction x → F(x) + C est une primitive de f sur I.
- Soit G une primitive de f sur I. La fonction G − F est dérivable sur I et on a : $\forall x\in I,(G-F)'(x)=G'(x)-F'(x)$;

donc G − F est une fonction constante sur I. On en déduit que G est de la forme x → F(x) + C, où C ∈ R

Propriétés 1

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I

- Pour tout nombre réel C, la fonction x → F(x) + C est une primitive de f sur I
- Toute primitive de f sur I est de la forme x → F(x) + C où C ∈ R

Propriétés 2

Si f est une fonction admettant une primitive sur un intervalle I, y_0 un nombre réel et x_0 un élément de I alors il existe une primitive de f sur I et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I ; toute primitive G de f sur I est telle que : $\forall x\in I$, G(x) = F(x) + C

On a : $G(x_0)=y_0 \Leftrightarrow F(x_0)+C=y_0$

$\Leftrightarrow C=-F(x_0)+y_0$

donc la fonction G : x → F(x) − F(x_0) + y_0 est la primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0

Idées et Stratégies

- Une primitive de la fonction x → f(x) est x → F(x)
- Les primitives de la fonction x → f(x) sont x → F(x) + C, où C ∈ R

Choisir la bonne réponse dans les exercices 1 et 2

1- a et b sont deux réels donnés. Si f et g sont deux fonctions définies sur R par $f(x)=(2x+1)e^x$ et $g(x)=(ax+b)e^x$, alors g est une primitive de f sur R si et seulement si la couple (a, b) est égal à :

a) (-3 ; 2) b) (3, -2) c) (2, -3)
d) (-2 ; 3) e) Aucune de ces réponses.

2- Si f est une fonction réelle définie par et dérivable sur R telle que

$f(2)=2$ et $\forall x\in\Re$, $f'(x)=\frac{-14x}{(x^2+3)^2}$, alors

a) $f(x)=\frac{x^2+10}{x^2-3}$ b) $f(x)=\frac{x^2-10}{x^2+3}$ c) $f(x)=\frac{x^2+10}{x^2+2}$ d) $f(x)=\frac{x^2+10}{x^2+3}$

***

Calculs de primitive

La connaissance des dérivées des fonctions élémentaires permet de dresser le tableau suivant, où C désigne une constante arbitraire

1.- Déterminer une primitive sur I =]0,+ ∞[de chacune des fonctions suivantes :

Exercices

a) $f : x \to x^3 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x}$

b) $f : x \to x^3 + 2x - 5 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f : x \to \frac{2}{x} + \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - 5$

2.- Déterminer la primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I, vérifiant les conditions indiquées :

a) $f(x) = x^3 - \frac{2}{x^2}$, $I =]0; +\infty[$ et $F(2) = 0$

b)

$f(x) = 2x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I =]0; +\infty[$ et $F(1) = 1$

Fonction f	Primitive de f
$x \to \sin x$	$x \to -\cos x + C$
$x \to \sin ax$	$x \to -\frac{1}{a}\cos ax + C$
$x \to \sin(ax+b)$	$x \to -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$x \to \cos x$	$x \to \sin x + C$
$x \to \cos ax$	$x \to \frac{1}{a}\sin ax + C$
$x \to \cos(ax+b)$	$x \to \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$x \to \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \to tgx + C$
$x \to -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \to \cot gx + C$
$x \to \frac{a}{\cos^2 ax}$	$x \to tgax + C$
$x \to \frac{a}{\sin^2 ax}$	$x \to \cot gax + C$
$x \to e^x$	$x \to e^x + C$
$x \to e^{ax}$	$x \to \frac{1}{a}e^{ax} + C$
$x \to \ln x$	$x \to x\ln x - x + C$

3.- Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

a) $f'(x) = \cos x - 2\sin x + 5e$ $\quad I = R$

Fonction f	Primitive de f
$x \to a \quad (a \in R)$	$x \to ax + c$
$x \to x^n \quad (n \in Q - \{1\})$	$x \to \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \to \frac{1}{x^n} (n \in R - \{1\})$	$x \to -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \to 2\sqrt{x} + c$
$x \to \frac{1}{x}$	$x \to \ln\lvert x\rvert + c$
$x \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \to \arcsin x + c$
$x \to \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \to \arccos x + c$
$x \to \frac{1}{1+x^2}$	$x \to arctgx$

b) $f(x) = x + \sin x + tg^2 x \qquad I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

c) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x} + \ln x$

$I = \Re^+ - \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

d) $f(x) = \cos 5x - 3\sin 2x + 4e^{2x} \qquad I = R$

e) $f(x) = \cos(-5x+3) + e^{3x+1} \qquad I = R$

4.-Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle I, qui vérifie les conditions indiquées

a) $f(x) = 3\sin x - 4\cos x$ $\quad I = R$ et $F(\pi) = -1$

b) $f(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x$ $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

F(0)=1

c) $f(x) = \cos x$ $\qquad I = r$ et $F\left(\pi/2\right) = -1$

Primitives de u' ×(vou)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant u (k) la fonction $u' \times (vou)$ admet pour primitif sur I la fonction vou est dérivable sur I et sa dérivée est $u' \times (vou)$. On en déduit le tableau suivant :

Fonction f	Une primitive f
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2$
$u'u^m$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\dfrac{u^{m+1}}{m+1}$
$\dfrac{u'}{u^m}$ ($m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$)	$-\dfrac{1}{(m-1)u^{m-1}}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'e^u$	e^U

Exercices

5- a) $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ b) $f(x)=-\dfrac{1}{x^3}$

c) $f(x)=-\dfrac{3}{x-2}$ d) $f(x)=-\dfrac{-\frac{3}{2}}{x-1}$

e) $f(x)=\dfrac{\frac{5}{2}}{x-3}$

6.- Déterminer les primitives de la fonction f sur R dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=(x+5)(x^2+10x+2)$
b) $f(x)=x(x^2+1)$
c) $f(x)=(x^2+x)(2x+1)$
d) $f(x)=2x^2(x^3+1)$
e) $f(x)=3(2-3x)^2$
f) $f(x)=x^3(x^4-5)^2$
g) $f(x)=(2ax+b)(ax^2+bx+c)$
h) $f(x)=8x^2(x^3-2)$

7.- Déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I que l'on précisera dans chacun des cas suivants

a) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$

c) $f(x)=\dfrac{x-3}{(x+3)^4}$ d) $f(x)=\dfrac{9x^2-4x}{\sqrt{3x^3-2x^2}}$

e) $f(x)=\dfrac{3x^2-4}{x^3-4x+2}$ f) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

g) $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-10x+4}$ h) $f(x)=\dfrac{2x-3}{2x^2-6x+1}$

i) $f(x)=\dfrac{2x+3}{\sqrt{(x^2+3x+1)^3}}$

8.- Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle I

a) $f(x)=\dfrac{3x-1}{(3x^2-2x+1)^2}$ $I=\left]-\dfrac{1}{3},1\right[$

b) $f(x)=\dfrac{2}{(1+x)^4}$ $I=]1,+\infty[$

c) $f(x)=\dfrac{3x^2+2}{2(x^3+2x)^3}$ $I=]-\infty,0[$

d) $f(x)=\dfrac{3x}{(x^2+1)^2}$ $I=]-1,+\infty[$

e) $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x^3+1)^3}$ $I=]-1,+\infty[$

f) $f(x)=\dfrac{5x^3}{(x^4+2)^3}$ $I=\mathbb{R}$

Primitives de polynômes trigonométriques

Objectif Déterminer les primitives d'une fonction trigonométrique de la forme $x \to \cos^n x \sin^m x$, n et m étant des entiers naturels non nuls.

Idées et Stratégies

Pour déterminer les primitives des fonctions du type $x \to \cos^n x \sin^m x$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$), on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- Si m et n sont de même parité, linéariser $\cos^n \sin^m x$
- Si m et n sont de parités différentes, utiliser la relation $\cos^2+\sin^2 x=1$ et écrire $\cos^n \sin^m x$ sous la forme $\cos x P(\sin x)$ si n est impair ou Sin P(cosx) si m est impair ; P désignant un polynôme.

Exercices

1.- Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\cos^3 x$ b) $f(x)=Sin^4 x$

c) $f(x)=\cos^4 x$ d) $f(x)=Sin^3 x$

e) $f(x)=Sin^3 xCosxdx$ f) $f(x)=Sin^3 x\cos^2 x$

g) $f(x)=\cos^3 xSin^3 x$

h) $f(x)=Sin^4 xCos^5 xdx$

2.- 1) Soit la fonction : $f : x \to Cos^4 xSin^2 x$

Après avoir linéarisé *f(x)* ; démontrer qu'une primitive sur R de la fonction est :

$$F : x \to -\frac{1}{192}Sin6x-\frac{1}{64}Sin4x+\frac{1}{64}Sin2x+\frac{1}{16}x$$

2) Soit la fonction $g : x \to 2Sin^5 xCos^4 x$

a) Démontrer que :

$$\forall x \in \Re, g(x)=2Sinx\left(\cos^8 x-2\cos^6 x+\cos^4 x\right)$$

b) En déduire une primitive sur R de la fonction g

Idées et Stratégies 1

Pour calculer les primitives d'une fonction de puissance de sinus ou de cosinus, on linéarise d'abord. Cependant, si la puissance est impaire, il n'est pas nécessaire de linéariser car la transformation de la puissance impaire en un produit contenant une puissance paire maximale et les opérations algébriques permettent d'utiliser la forme $u'u^m$ des tableaux de référence

Idées et Stratégies 2

Pour calculer les primitives d'une fonction de produit de sinus, de deux cosinus ou d'un produit de sinus et d'un cosinus, on transforme d'abord le produit en somme suivant les formules :

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) f(x) = cos5x cos3x b) f(x) = sin4x sin7x

c) f(x) = sin4x cos6x

Idées et Stratégies 3

En ce qui concerne les fonctions rationnelles, si les formules des tableaux de référence ne peuvent pas être appliquées, on transforme l'écriture de la fonction si cette dernière n'est pas indiquée.

Plusieurs cas sont à envisager :

- Le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur, on fait une division algébrique
- Le degré du numérateur de la fonction est inférieur à celui du dénominateur et que ce dernier est factorisable, on ramène la fonction sous la forme $\frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}$; où x_1, x_2 sont les zéros du dénominateur et *a*, *b* deux réels à préciser
- Le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur et que ce dernier n'est pas factorisable.

1-Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

A-a) $f(x)=\frac{x^2+4x+5}{x+1}$

b) $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

c) $f(x)=\frac{3x^2-8x+4}{x^2}$

d) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4x+3}$

e) $f(x)=\frac{5x-7}{x^2-3x+2}$

f) $f(x)=\frac{3x+5}{x^2-1}$

B.- Déterminer une primitive de la fonction

$$f : x \to \frac{5x-1}{x^2+x+1}$$

$$f(x)=\frac{5x-1}{x^2+x+1}=\frac{5x}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$f(x)=5\frac{x}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\frac{2x}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\frac{2x+1-1}{x^2+x+}-\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)-\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{7}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{7}{2}\frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{7}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{7}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{7}{2}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{7}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$f(x)=\frac{5}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{7\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

or une primitive de $\frac{a}{t^2+a^2}$ est $arctg\frac{t}{a}$. Il s'en suit que : une primitive de f est :

$$f(x)=\frac{5}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{7\sqrt{3}}{3}arctg\ 2\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{5}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{7\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3}}$$

2.-

A- Déterminer une primitive de la fonction :

$$f:x\to\frac{1}{2x^2+8x+20}$$

$$f(x)=\frac{1}{2x^2+8x+20}$$

$$f(x)=\frac{1}{2(x^2+4x+10)}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+4x+4+6}$$

$$\Leftrightarrow f=\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}$$

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2\sqrt{6}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}}}$$

B- Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\frac{3x+2}{x^2-4x+7}$ b) $f(x)=\frac{5}{2x^2+12x+26}$

2.- Soit la fonction : $f:x\to\frac{2x^2-x-2}{2x^2+3x+1}$

1) Déterminer trois nombres réels a,b,c tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left(-1,\frac{1}{2}\right), f(x)=a+\frac{b}{2x+1}+\frac{c}{x+1}$$

2) En déduire les primitives de f sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

3.- Soit la fonction :

$$f:x\to\frac{x^2-4x+2}{(x-3)^2}$$

1) Déterminer trois nombres réels a,b,c tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\},\ f(x)=a+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$$

2) En déduire la primitive F de f sur $]-\infty,3[$, telle que : F(2) = 5

4.- Soit la fonction :

$$f:x\to\frac{x^2-2x-2}{x^3-1}$$

1) Déterminer trois nombres réels a,b,c tels que : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$,

$$f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

2) En déduire la primitive F de f sur $]-\infty,1[$, telle que : $F(-1)=-\ln 2$

5.- Soit la fonction d'expression :

$$f(x)=\frac{3x^2-6x+5}{(x-1)^2}$$

a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout x différent de 1 on a :

$$f(x)=a+\frac{b}{(x-1)^2}$$

b) En déduire la primitive de f sur$]1,+\infty[$ qui prend la valeur 6 pour $x = 2$

6.- Déterminer une primitive F de la fonction f après avoir effectué la transformation d'écriture indiquée

a) $f(x)=\frac{x+2}{(x-2)^2}$.

Mettre $f(x)$ sous la forme :

$$f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x-2)^2}$$

b) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

Mettre $f(x)$ sous la forme : $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-1)^2}=f(x)$

c) $f(x)=\frac{x^4+x^2+1}{x^5+x^2}$.

Mettre $f(x)$ sous la forme $f(x)=\frac{ax}{x^2+1}+\frac{b}{x^3}$

d) $f(x)=\frac{12x+16}{(x+2)^2}$.

Mettre $f(x)$ sous la forme

$$f(x)=\frac{a}{(x+2)^2}+\frac{b}{x+2}$$

7.- Soit la fonction f d'expression

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}.$$

Trouver deux nombres réels a et b tels que f admet pour primitive la fonction F d'expression :

$$F(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

8.- Soit f la fonction définie dans R par :

$$f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$$

a) Vérifier que : $\frac{2}{e^x+1}=2-\frac{2U'_{(x)}}{U_{(x)}}$

où $U_{(x)}=e^x+1$ et $U'_{(x)}$ est la dérivée de $U_{(x)}$

b) En déduire une primitive de f

c) Résoudre dans R, l'équation $f(x)=x+e^x$

Bacc 1998

9.- Soit la fonction f définie sur $]5;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x^2-11x+2}{x-5}$$

Déterminer trois nombres réels a,b,c tels que pour tout x de $]5;+\infty[$ on a :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-5}$$

3) En déduire une primitive F de f sur $]5;+\infty[$ et la valeur du réel $I=F(7)-F(6)$

10.- Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-1}{x^2-1}$$

Déterminer quatre réels nombres réels a,b,c et d tels que $\forall x\in I$ on a :

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2-1}$$

En déduire une primitive F de f sur $]1;+\infty[$ et la valeur du réel $J=F(3)-F(2)$

Choisir la bonne réponse dans les exercices 11 à 17

11.- Une primitive de $f(x) = x + \ln x$ sur $]0,+\infty[$ est :

a) $x\ln x-\frac{1}{2}x^2$ b) $x\ln x+\frac{1}{2}x^2$

c) $x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2$ d) $x\ln x-x+\frac{1}{2}x^2$

12.- Une primitive sur R de la fonction $x\to 3x^2+2x+1$ est :

a) $x\to x^3+x^2+x$

b) $x\to x^3+x^2+x+1$

c) $x\to x^3+2x+x+5$

13.- L'ensemble des primitives de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{-x+2}{-x^2+4x-5}$ est :

a) $F(x)=\ln|-x^2+4x-5|+c$

b) $F(x)=2\ln\left|-x^2+4x-5\right|+c$

c) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|-x^2-4x-5\right|+c$

d) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|-x^2+4x-5\right|+c$

14.- Une primitive sur R de la fonction $x \to x^2+3$ est :

a) $x \to 2x$ b) $x \to \frac{x^3}{3}+c$

c) $x \to \frac{x^3}{3}+3x$ d) $x \to \frac{x^3}{3}+3x+c$

15.- Une primitive sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ de la fonction :

$f : x \to \frac{x^2-2x+5}{2x+1}$ est une des relations :

a) $F(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{25}{8}\ln|2x+1|$

b) $F(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{27}{8}\ln|2x+1|$

c) $F(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{5}x+\frac{27}{5}\ln|2x+1|$

d) Aucune de ces réponses

16.- Une primitive de : $f : x \to \frac{3x^2-8x+4}{x^2}$.

sur$]0,+\infty[$ est une des relations

a) $F(x)=3x-8\ln|x|-\frac{4}{x}$

b) $F(x)=3x+8\ln|x|-\frac{4}{x}$

c) $F(x)=3x-8\ln|x|+\frac{4}{x}$

d) Aucune de ces réponses

17.- Une primitive sur $]1;+\infty[$ de la fonction numérique : $f : x \to \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ est

a) $2\sqrt{x^2-1}$ b) $\sqrt{x^2-1}$

c) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ d) $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

18.- Soit la fonction numérique f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $x \to \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$

a) Démontrer qu'il existe des nombres réels a et b tels que, pour tout éléments x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ on ait : $f(x)=a+b\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

b) En déduire une primitive de f

****

Chapitre VII

Intégration

Fonction en escalier Soit f une fonction définie sur un intervalle [a, b], on dit que f est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $(x_0=a;x_1;...;x_{n-1};x_n=b)$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts : $]x_0,x_1[;]x_1,x_2[;...;]x_{n-1};x_n[$

$\forall x \in]x_{i-1};x_i[: f(x)=ki=\text{constante}$

Intégrale au sens de Riemann

On appelle intégrale au sens de Riemann d'une fonction en escalier f sur [a, b] la somme :

$$I=ki(x_i-x_{i-1})=\int_a^b f(x)dx.$$

$\int_a^b f(x)dx$ se lit somme ou intégrale de a, b de f(x) dx

Exemple

1.- Soit f la fonction définie sur [-1, 6] par :

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si & -1<x<0 \\ 3 & si & 0<x<\frac{3}{2} \\ -1 & si & \frac{3}{2}<x<3 \\ 1 & si & 3<x<4 \\ 2 & si & 4<x<5 \\ 3 & si & 5<x<6 \end{cases}$$

Vérifier que : $I=\int_{-1}^{6} f(x)dx=11$

2.- Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_{-2}^{6} E(x)dx$

Solution

$\forall x \in]i, i+1[: E(i) = i$, soit]-2, -1[;]-1, 0[;]0, 1[;]1, 2[;]2, 3[;]3, 4[;]4, 5[;]5, 6[une subdivision de [-2, 6] on a :

$x \in]-2, -1[$, E(x) = -2
$x \in]-1, 0[$, E(x) = -1
$x \in]0, 1[$, E(x) = 0
$x \in]1, 2[$, E(x) = 1
$x \in]2, 3[$, E(x) = 2
$x \in]3, 4[$, E(x) = 3
$x \in]4, 5[$, E(x) = 4
$x \in]5, 6[$, E(x) = 5

donc I = -2 – 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5
soit I = 12

3.- Calculer les intégrales suivantes

a) $I = \int_{-3}^{3} 2|E(x) - 1|dx$

b) $J = \int_{-2}^{5} |E(x) - (x-1)|dx$

c) $K = \int_{-3}^{3} 2E(x)dx$

d) $M = \int_{-6}^{-2} [E(x) + 1]dx$

Intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I = [a, b]. On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur I

On note : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Remarque

Le réel F(b) – F(a) est indépendant du choix de la primitive de f

Vocabulaire

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit somme (ou intégrale) de a à b de f(x) dx
- $[F(x)]_a^b$ se lit F(x) pris entre a et b
- a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer x par toute autre lettre (sauf a et b) et écrire $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(s)ds$; x est appelée variable muette
- L'intégrale $\int f(x)dx$ est appeée intégrale indefinie
- L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est appelee intégrale définie
- $\int f(x)dx = F(x) + C$
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ est un réel

Exemples

1.- Calculer l'intégrale $I = \int_1^4 (-x^2 + 6x - 5)dx$

Solution

$$I = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_1^4$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + 3(4) - 5(4)\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 3(1) - 5(1)\right)$$

$$I = \left(-\frac{64}{3} + 48 - 20\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right)$$

$$= \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{20}{3} + \frac{7}{3} \qquad I = \frac{27}{3} \text{ ; soit } I = 9$$

2.- Calculer l'intégrale $J = \int (x^4 - 3x - 7)dx$

Solution

$J = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} - 7x + C$ soit,

$J = \frac{x^5}{5} - x^3 - 7x + C$

3.- Calculer l'intégrale $K = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$

Solution

$$K = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{1+1}\right) - \left(-\frac{1}{0+1}\right)$$

$K = -\frac{1}{2} + 1$ soit $K = \frac{1}{2}$

4.- Calculer l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x + \cos 3x)dx$

Solution

$$K = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{6} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{6}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0 + \frac{1}{3}\sin 0\right)$$

$$K = \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{3}\times 0\right)$$

$$K = \left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times 1\right) - \left(-\frac{1}{2} + 0\right)$$

$$K = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \text{ soit } K = \frac{7}{12}$$

Propriétés 1

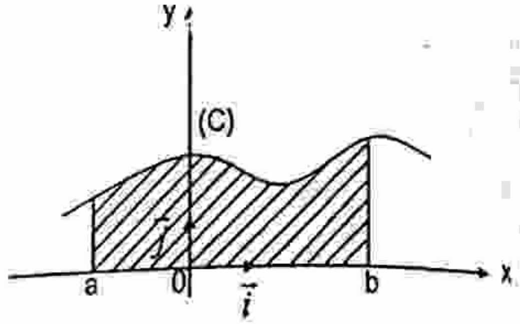
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, α et β deux nombres réels ; a, b et c deux éléments de I, on a :

- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$ (Intégrale d'un produit par un réel)
- $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$ (linéarité)
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (intégrale d'une somme)
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

- *si* $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- *si* $f \geq g$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Interprétation graphique de l'intégral

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I ; (C) sa courbe représentative, a et b deux éléments de I $(a < b)$: $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire (en unité d'aire) du domaine D délimité par (C) ; $(0,\vec{i})$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, l'aire de D peut être notée A(D)



L'aire du domaine D est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Exemples

1.- Calculer l'aire en cm^2, de l'ensemble D des points $M(x, y)$ tels que : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq y \leq \cos x$ l'unité graphique étant 2 cm sur chaque axe.

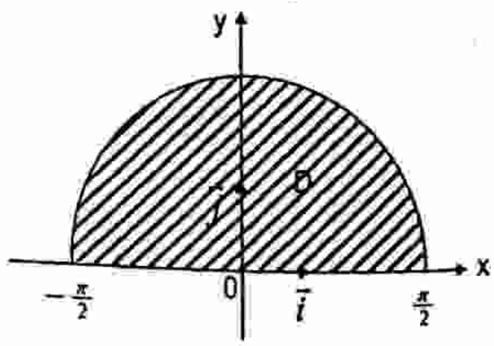
Solution

La fonction cosinus étant continue et positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$A(D) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \times 2cm \times 2cm$$

$$A(D) = \left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \times 2cm \times 2cm$$

soit, $A(D) = 8cm^2$



2.- La courbe montrée est la représentation graphique de la fonction $x \rightarrow x^2 - 1$ calculer l'aire du domaine colorié. L'unité graphique étant 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées

Solution

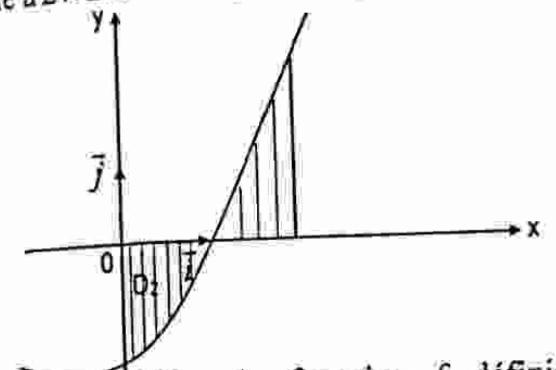
on a : $A(D) = D(D_1) - A(D_2)$

$$A(D)=\int_1^2\left(x^2-1\right)dx-\int_0^1\left(x^2-1\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2+\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1$$

$A(D)=\frac{4}{3}+\frac{3}{2}$ A = 2 u.a

On en déduit que l'aire du domaine colorie est égale à $2\times 2cm\times 3cm$, soit $A(D)=12cm^2$



3.- On considère la fonction f définie par $f: x\to -x^2+4$ on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ unité graphique : 1 cm calculer en cm², l'aire de la partie limitée par la courbe (C) et l'axe $(0,\vec{i})$

Solution

On a : $A(D)=A(D_1)+A(D_2)$

$$A(D)=\int_{-2}^0\left(-x^2+4\right)dx+\int_0^2\left(-x^2+4\right)dx$$

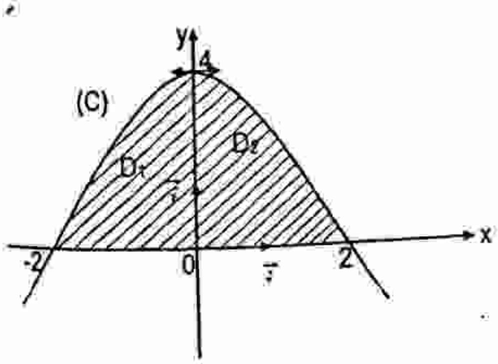
$$A(D)=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^0+\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2$$

$A(D)=\frac{16}{3}+\frac{16}{3}$ $A(D)=10{,}66$

On en déduit que l'aire du domaine est égale à

$A(D)=10{,}66\times 1cm\times 1cm$

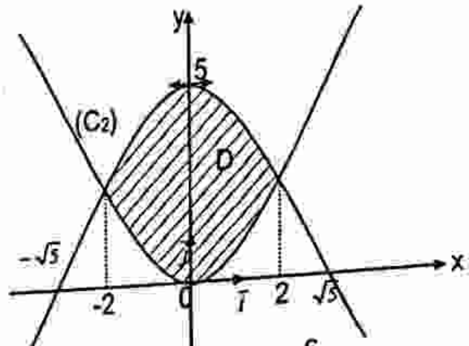
$A(D)=10{,}66cm^2$



4.- Soit f et g deux fonctions d'équations respectives $x^2=4y$ et $x^2=5-y$. On note (C₁) et (C₂) respectivement les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ unité graphique 2 cm. Evaluer en cm², l'aire du domaine délimité par ces deux courbes

Solution

La représentation graphique de ces deux courbes est donnée par :



On a : $\forall x\in D$, $f<g$ ou $g>f$

Donc, $g(x)>f(x)$

$$A(D)=\int_{-2}^2\left[g(x)-f(x)\right]dx$$

$$A(D)=\int_{-2}^2\left(5-x^2-\frac{1}{4}x^2\right)dx$$

$$A(D)=\int_{-2}^2\left[-\frac{5}{4}x^2+5\right]dx$$

$$A(D)=\left[-\frac{5}{12}x^3+5x\right]_{-2}^2$$

$$A(D)=\frac{40}{3}$$

On en déduit que l'aire du domaine limite par ces deux courbes est égale à :

$A(D)=\frac{40}{3}\times 2cm\times 2cm$

soit $A(D)=\frac{160}{3}cm$, où $A(D)=53{,}33cm^2$

5.- La courbe montrée est la représentation graphique de la fonction $f: x\to x+1+\frac{4}{(x-1)^2}$.

Calculer la surface S de la portion du plan comprise entre la courbe (C), son asymptote oblique et les droites d'équations $x=3$ et $x=5$

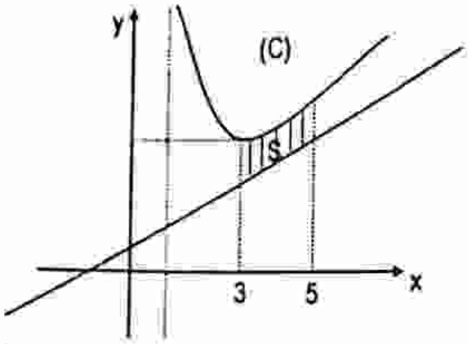
Solution

on a : $S=\int_3^5\left(f(x)-y\right)dx$

$$S = \int_3^5 \left(x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2} - x - 1 \right) dx$$

$$S = \int_3^5 \frac{dx}{(x-1)^2} \quad S = \left[-\frac{1}{x-1} \right]_3^5.$$

S = 0,25



On en déduit que la surface S cherchée est égale à 0,25 unité de surface.

Interprétation cinématique de l'intégrale

Un mobile se déplace sur un axe à la vitesse v(t), t étant la variable du temps. Si l'on suppose que v est positive entre les instants t_1 et t_2, alors la distance parcourue par le mobile entre ces deux instants est : $d = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

Exemple

Un corps est lâche, avec une vitesse initiale nulle à l'instant $t_0 = 0$, d'une hauteur de 1 000 m et est soumis à l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\ ms^{-2}$

1) Quelle distance a-t-il parcouru après 5 secondes de chute ?
2) A quel instant T exprime en secondes, touche-t-il le sol ?

Solution

1) La distance en mètres parcourue après 5 secondes de chute est : $d = \int_0^5 v(t)dt$

or v(t) = g(t) $d = \int_0^5 gt.dt$ $d = \left[\frac{1}{2}gt^2 \right]_0^5$ $d = 122{,}5m$

2) Il touche le sol à l'instant :

$\int_0^T gtdt = 1000$ $\quad \frac{1}{2}gT^2 = 1000$

donc, T = 14,3 secondes

Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a \neq b)$, on appelle valeur moyenne de f sur [a, b] le nombre réel tel que :

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exercices

1- Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par $x \to -x^2 + 6x - 5$ sur $[1, 4]$

2- f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle $\left[0 \quad \frac{\pi}{4}\right]$ respectivement par

$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ *et*

$g(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$.

a) Calculer la valeur moyenne M de f sur l'intervalle $\left[0 \quad \frac{\pi}{4}\right]$.

b) Calculer la valeur du réel N tel que $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx$.

c) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$

d) Montrer que : $I - J = \frac{\pi}{4}M$ et $I + J = N$

En déduire I et J

Choisir la bonne réponse dans les exercices 3 à 16

3- La valeur moyenne de la fonction $f : x \to \sin x$ sur l'intervalle $[0 \quad \pi]$

a) 0 b) $\frac{2}{\pi}$ c) $\frac{-1}{\pi}$ d) $\frac{-2}{\pi}$

4.- $\int_1^4 (-x^2 + 6x + 5)dx =$

a) 8 b) 9 c) Autre (préciser)

5.- $\int_0^1 (3x^2 + 4x + 5)dx =$

a) 8 b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{9}{4}$ e) Autre (préciser)

6.- $\int_1^2 (2x + 1)dx =$

a) 4 b) 3 c) 2 d) Autre (préciser)

7.- $\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}dx =$

a) $2(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ b) $3(\sqrt{5}-\sqrt{2})$
c) $-2(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ d) $-2(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

8.- $\int_0^1 (x^2+2x+1)dx =$
a) $\frac{9}{4}$ b) 3 c)) Autre (préciser)

9.- $\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x} dx =$
a) 4 b) 3 c) -2
d) Autre (préciser)

10.- $\int_0^2 |x-1| dx =$
a) 1 b) 2 c) -3
c) Autre (préciser)

11.- $\int_{-3}^0 |x^2-x-2| dx =$
a) $\frac{57}{6}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{1}{3}$
d) Autre (préciser)

12.- $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} =$
a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$
Autre (préciser)

13.- $\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} =$
a) $-\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) Autre (préciser)

14.- $\int_2^5 \left(2+\frac{1}{x^2}\right)dx =$
a) 63 b) 10 c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{63}{10}$ e) Autre (préciser)

15.- $\int_0^3 \frac{4dx}{(x+1)^2} dx =$
a) -4 b) 6 c) 3 d) Autre (préciser)

16.- $\int_1^2 (2x+3)dx =$
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) Autre (préciser)

17- Relier chaque intégral de la colonne A à son résultat inscrit dans la colonne B.

-a-

Colonne A	
$\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x}{e^x+2} dx$	a
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgx}{\cos^2 x} dx$	b
$\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x(e^x-2)dx$	c
$\int_1^5 \frac{dx}{1-2x} dx$	d

Colonne B	
1	$\frac{1}{2}$
2	ln2
3	$-\frac{1}{2}$
4	$\ln\frac{1}{3}$
5	2

-b-

Colonne A	
$\int_0^1 \frac{xdx}{x+1}$	a
$\int \frac{xdx}{x+2}$	b
$\int_4^5 \frac{(x+2)dx}{x^2-4x+3}$	c
$\int_3^5 \frac{(5x-7)dx}{x^2-3x+2}$	d

Colonne B	
1	$1-\ln 2$
2	$1-2\ln 2$
3	$\ln\frac{27}{4}$
4	$\ln\frac{27}{2}$
5	$\ln\sqrt{\frac{27}{2}}$
6	$\ln 108$

-c-

Colonne A	
$\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^x+1}$	a
$\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x(e^x-3)dx$	b
$\int_{-3}^0 \|x^2-x-2\| dx$	c
$\int_{\ln 2}^{\ln 3} 2e^{2n}(e^{2x}-4)dx$	d

Colonne B	
1	9/4
2	49/2
3	25/2
4	59/6
5	ln2
6	2ln2

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, a et b deux éléments de I. On sait que la fonction uv est dérivable et que (uv)'=u'v+v'u. Si de plus les fonctions u' et v' sont continues sur I, alors uv' et u'v sont continue sur I.

On a : $\int_a^b (uv)'_{(x)}dx = \int_a^b (u'v)_{(x)}dx + \int_a^b (uv')(x)dx$

donc :

$\int_a^b u_{(x)}v'_{(x)}dx = \left[u_{(x)}.v_{(x)}\right]_a^b - \int_a^b u'_{(x)}v_{(x)}dx$ ou

$\int_a^b v_{(x)}u'_{(x)}dx = \left[u_{(x)}.v_{(x)}\right]_a^b - \int_a^b u_{(x)}v'_{(x)}dx$

En posant $u'_{(x)}dx = du$; $v'_{(x)}dx = dv$

on obtient $u_{(x)} = u$ $v_{(x)} = v$

$$\boxed{\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu}$$

$$\boxed{\int_a^b vdu = [uv]_a^b - \int_a^b udv}$$

Une disposition efficace des calculs pouvant favoriser la mémorisation de la formule est la suivante :

$u = \ldots \Rightarrow du = \ldots$

$dv = \ldots \Rightarrow v = \ldots$

Idées et Stratégies 1

Le procède d'intégration par parties s'applique pour intégrer le produit :

- D'un monôme ou polynôme par un sinus ou un cosinus
- D'un monôme ou polynôme par une exponentielle
- D'un monôme par certaines fonctions racines carrées

Pour toutes ces considérations, on applique la formule $\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$ et on choisit u égal au monôme ou au polynôme

Idées et Stratégies 2

Pour intégrer un produit d'une exponentielle par un cosinus ou un sinus on utilise la formule $\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$ et on choisit u égal à l'exponentielle

Idées et Stratégies 3

Pour intégrer un produit d'un monôme par un logarithme ou un logarithme seul on utilise la formule : $\int_a^b vdu = [uv]_a^b - \int udv$ et on choisit v égal au logarithme

Remarque

- Si le résultat souhaité n'est pas trouvé, on permute le rôle de u et dv

Choisir la bonne réponse dans les questions 1 à 5

1.- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx =$

a) 1 b) 0 c) -1 d) -2
d) Autre préciser

2.- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx =$

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\frac{1}{4}$ e) $-\frac{1}{4}$
f) Autre préciser

3.- $\int_0^1 xe^x dx =$

a) e b) –e c) 0 d) 1 e) Autre préciser

4.- $\int_1^e (x - \ln x)dx =$

a) $\frac{e^2+2}{2}$ b) $\frac{e^2+3}{2}$ c) Autre (préciser)

5.- $\int_0^{\pi} \cos x e^x dx =$

a) $e^{\pi} - 1$ b) $\frac{e^{\pi}-1}{2}$ c) $\frac{e^{\pi}+1}{2}$
d) Autre (préciser)

6- Relier chaque intégral de la colonne A à son résultat inscrit dans la colonne B.

Colonne A	
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos 4x dx$	a
$\int_{-1}^0 (x^2-5)e^x dx$	b
$\int_0^3 x\sqrt{3-x}dx$	c
$\int_1^3 \ln(x+1)dx$	d

Colonne B	
1	6ln2-2
2	$\frac{12\sqrt{3}}{5}$
3	-3.
4	$-\frac{\pi}{32}$

8.- Vérifier à l'aide de la méthode d'intégration par parties les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\pi} x\cos x dx = -2$ b) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = -2\pi$

c) $\int_0^{\pi} x\cos 2x dx = 0$ d) $\int_0^1 xe^x dx = 1$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x^2 - 4)\cos x dx = \frac{3\pi^2}{4} - 10$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = -\frac{1}{2}$

9.- Même question

a) $\int_1^3 \ln(x+1)dx = 6\ln 2 - 2$

b) $\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = \ln\frac{16}{27}$

c) $\int_3^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)dx = \ln\frac{5^5}{4^5}$

d) $\int_0^3 x\sqrt{3-x}dx = \frac{12\sqrt{3}}{5}$

e) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \frac{4}{15}$

f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx = \frac{\pi + 3\sqrt{3}}{9}$

10.- a) Prouver, en utilisant successivement deux intégrations par partie que : $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos 2t dt = \frac{1}{4}$

b) En utilisant a) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos^2 t dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\sin^2 t dt$

(On pourra calculer I + J et I – J)

11.- On pose $I = \int_0^t e^x \sin x dx$ et $J = \int_0^t e^x \cos x dx$

a) A l'aide d'une intégration par parties de I, démontrer que : $I + J = e^t \sin t$

b) On considère une fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \left(\sin x + \cos x - \frac{1}{2}\right)e^x$;

Calculer $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$, l'intégrale $F(t) = \frac{1}{2}$

12.- On donne les intégrales :

$$I = \int_0^1 xe^{2x}dx \text{ et } J = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale I. En déduire la valeur de $\int_0^1 |x|e^{2x}dx$

b) Calculer la valeur de l'intégrale J, puis à l'aide d'une intégration par parties déduisez en $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

c) Justifier le résultat b) en faisant un changement de variable c'est-à-dire en posant $t = \sqrt{1-x}$

Choisir la bonne réponse dans les exercices 13 à 1189

13.- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x + 2x\cos 2x)dx =$

a) $\frac{\pi}{4}$ b) 0 c) π d) $\frac{\pi}{2}$ e) Aucune réponse

14.- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9x\sin^2 x\cos x dx =$

a) $\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}$ b) $\frac{3\pi}{2} - 2$

c) $\frac{3\pi}{16}$ d) Aucune de ces réponses

15.- $\int_0^1 \ln(x+1)dx =$

a) 2ln2 – 1 b) ln4 + 1
c) 6ln2 -2 d) Aucune de ces réponses

16.- $\int_0^t x\sin x dx =$

a) -tsint + cost b) -tcost + sint
c) tcost – sint d) Aucune de ces réponses

17.- $I = \int_{-1}^0 (x^2 - 5)e^x dx$

a) $\frac{e^3 - 3}{4}$ b) -3 c) 3 d) Aucune (préciser)

18.- $\int_1^e (x-1)\ln x dx$

a) -3 b) 3 c) $\frac{e^3 - 3}{4}$ d) Aucune (préciser)

19.- Soit la fonction f définie par :

$$x \to f(x) = \frac{3e^x+2}{e^x+2}$$

a) Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{2e^x}{e^x+2}$

b) En déduire le calcul de l'intégrale $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$

20.-

a) Déterminer la dérivée de la fonction f définie par :
$x \to f(x) = (\ln x)^2$ sur $]0,+\infty[$

b) Calculer l'intégrale $I = \int_1^e (\ln x)^2 dx$

c) Calculer l'intégrale $a_0 = \int_{\sqrt{e}}^{e} \left(2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)dx$

21.- a) On pose $a_n = e^{\frac{n+1}{2}}, \forall n \in N$, et

$$U_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \left(2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)dx$$

Montrer que (U_n) est une S.G dont on précisera la raison et le premier terme

b) On pose $V_n = e^{U_n}$, $\forall n \in N$, montrer que (V_n) montrer que (U_n) est une S.G dont on précisera la raison et le premier terme

22.- Soit l'intégral $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel x, on a :
$\cos^4 x = a\cos 4x + b\cos 2x + c$

b) Calculer l'intégral A

23.- a)Calculer cos3x en fonction de cosx et $\cos^3 x$. En déduire une expression simple de $\cos^3 x$ en fonction de cosx et cos3x.

b) En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$

c) Indiquer une autre façon de calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$

24.- a) Linéariser $\sin^4 x$

b) Calculer $f(t) = \int_0^t \left(4\sin^4 x - \frac{3}{2}\right)dx$

c) Résoudre l'équation f(t) = 0

25.- On considère l'expression :

$$f(x) = \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}$$

a) Pour $\cos x + 1 \neq 0$, mettre f(x) sous la forme d'un polynôme en sinx et cosx puis linéariser ce polynôme

b) Calculer l'intégrale définie $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

c) Calculer l'intégrale définie
$J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

26.- a)Calculer l'intégrale $I = \int_{e^2}^{x} \frac{1}{t}(2\ln t - 3)dt$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation I = 0

27.- On considère les fonctions g et f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}+5e^x+4}{e^x+2}$ et $g(x) = \frac{5e^x+8}{e^x+2}$

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :
$f(x) = e^x + 2 + \frac{e^x}{e^x+2}$
2. Pour tout x de R, calculer :
$f(x) - g(x)$ et $\int_0^{\ln 2}(f(x) - g(x))dx$
3. Déduire de 1 et 2 la valeur de l'intégrale :
$K = \int_0^{\ln 2} g(x)dx$

28.- On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)}$

a) Préciser les intervalle sur lesquels cette fonction est définie et continue et démontrer qu'il existe deux constant a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{bx}{x^2+1}$

b) Calculer l'intégral $I = \int_0^t f(x)dx$ (t > 0)

c) Déterminer la limite de F(t) lors que t tend vers $+\infty$

29.- Déterminer les nombres réels a et b tels que : $\forall t \in R \setminus \{-1, 2\}, \frac{1}{t^2-t-2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}$

a) Calculer l'intégrale : $A = \int_0^1 \frac{dt}{t^2-t-2}$

30.- Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que : $x \in \mathbb{R}^*$ $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

a) Calculer l'intégrale $B = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$

31.- Soit f la fonction numérique définie $]1,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{-3x^2+16x+22}{(2x+5)(x-1)^2}$

b) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{2x+5} + \frac{b}{(x-1)^2}$

c) En déduire une primitive de f sur $]1,+\infty[$

d) Calculer l'intégrale $\int_2^3 f(x)dx$

32.- Soient a et b deux nombres réels, on considère la fonction f, définie sur l'ensemble R des nombres réel par : $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$, et on désigne par f' sa dérivée

1.- a) Calculer f'(x)

b) Déterminer les réels a et b tels que : $f(\ln 3) = -9$ et $f'(\ln 3) = 0$

2.- Le but de cette partie est le calcul de l'intégrale $I = \int_{-1}^1 [(2x+1)e^{2x} - 6(x+1)e^x]dx$, soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = e^{2x} - 6e^x$

On pose $x \in R$: g(x) = xf(x)

a) Calculer g'(x)

b) En déduire la valeur exacte de I

33.- Calculer en fonction du réel a l'intervalle $I(a) = \int_0^a (6e^{2x} - 2e^x)dx$

a) Résoudre dans R l'équation I(a) = 4

34.- Vérifier que]-1, 2[:

$$\frac{2x^2+x-13}{x^2-x-2} = 2 - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x+1}$$

en déduire une primitive sur]-1, 2[de la fonction : $f : x \to \frac{2x^2+x-13}{x^2-x-2}$

a) Calculer alors l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$

35.- Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin^2 x dx$

a) Calculer I + J et I – J

b) En déduire I et J

36- On donne :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos^2 x\, dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin^2 x\, dx$$

a) Calculer I + J et I – J

b) En déduire I et J

37.- a) Calculer la dérivée de la fonction $x \to \sqrt{x^2-2}$

b) En déduire la dérivée de la fonction f définie sur [0, 1] par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$

c) Calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$

(*Concours Faculté des Sciences*)

38- Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x dx \text{ et } J_n = \int e^{-nx}\cos x dx$$

1) Calculer I_0 et J_0

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) En intégrant par parties I_n et J_n, montrer que I_n et J_n vérifient le système :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

3) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim_{n \to +\infty} J_n$

(*Concours Faculté des Sciences*

39- Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

1) a)Montrer que pour tout $x \in R$:

$$f(x) = e^x - \frac{e^x}{e\ +1}$$

b) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$

2) Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = \ln(e^x+1)$

a) Calculer la dérivée première de la fonction g.

b) En déduire à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégale :

$$J = \int_0^1 e^x \ln\left(e^x + 1\right)dx$$

40.- Montrer que pour tout réel $x : \dfrac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire l'intégrale $\int_0^{\ln 2} \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

b) Déterminer 2 réels a et b tels que, pour tout x de $]0, +\infty[$, on ait :

$$\frac{2e^x - 3}{e^x - 1} = a + \frac{be^x}{e^x - 1}$$

b) En déduire l'intégrale $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \dfrac{2e^x - 3}{e^x - 1}dx$

Donner la valeur de J sous la forme lnt, où t est un rationnel

41.- On considère la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)e^x$$

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que la fonction F définie par :
$$F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^x$$

Soit une primitive de f sur R

2. En déduire la valeur de l'intégrale
$$I = \int_{-3}^{0} f(x)dx$$

Bac 2002

42- Etablir une correspondance entre les éléments de la colonne A à ceux de la colonne B. Donner la réponse sous forme de couple. Exemple le couple (1, …)

Colonne A	*Colonne B*
1) $\int \sin^3 x \cos dx$	a) $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$
2) $\int \sin^3 x \cos^2 dx$	b) $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c$
3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x\, dx$	c) $-\frac{1}{4}\cos^4 x + c$
4- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos x dx$	d) $\frac{1}{4}\sin^4 x + c$
5- $\int \cos^3 x \sin dx$	
6- $\int_{-3}^{0} (x^2 + 2x - 3)e^x$	e) $\frac{\sqrt{2}}{40}$
	f) $\frac{3\pi - 8}{32}$
	g) $-3 - 6e^{-3}$
	h- $-3 - 6e \quad -3$

Chapitre VIII

Représentation graphique d'une fonction

Idées et stratégies

(C) étant la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

- *Si* $\lim\limits_{+\infty} f = a$ *ou* $\lim\limits_{-\infty} f = a$ *(C) admet une asymptote parallèle à* $(O, \vec{i})$ *d'équation y=a.*
- *Si* $\lim\limits_{x_0} |f| = +\infty$ *(C) admet une asymptote parallèle à* $(O, \vec{j})$ *d'équation* $x = x_0$
- *Si* $\lim\limits_{+\infty} |f| = +\infty$ *: il y a éventualité d'une asymptote oblique.*
- *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b$ *: la droite d'équation y=ax+b est asymptote oblique à (C)..*
- *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \infty$ *: (C) admet une branche parabolique de direction : celle de la droite : y=ax.*
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ *: (C)admet une branche parabolique de direction* $\left(O, \vec{j}\right)$ *ou l'axe des ordonnées.*

❖ *Si* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ *: (C) admet une branche parabolique de direction* $(O, \vec{i})$ *ou l'axe des abcisses*

Idées et stratégies

La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ *admet en l'infini* (∞) *une asymptote oblique d'équation* $y=\left|ax+\frac{b}{\sqrt{a}+a}\right|$*, c'est-à-dire :*

❖ En $(-\infty)$: $y=-\left(ax+\frac{b}{\sqrt{a}+a}\right)$

❖ En $(\mp\infty)$: $y=\left(ax+\frac{b}{\sqrt{a}+a}\right)$

Si $a=1$

❖ En $(-\infty)$: $y=-\left(x+\frac{b}{2}\right)$

❖ En $(+\infty)$: $y=\left(x+\frac{b}{2}\right)$

La courbe représentative de la fonction f *définie par* $f(x)=\sqrt{ax+b}$ *admet en* (∞) *une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.*

Choisir la bonne réponse :

1- Dans un repère, la courbe représentative *(C)* de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+1}$ admet en plus l'infini $(+\infty)$:

a) Une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

b) Une branche parabolique de direction l'axe des abcisses.

c) Une branche parabolique de direction *y=x.*

d) Une limite finie.

2- Dans un repère, la courbe représentative (C) de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}$ admet en moins l'infini $(-\infty)$:

a) Une asymptote oblique d'équations $y=x-6$

b) Une branche parabolique de direction $y=x$.

c) Une asymptote oblique d'équation $y=-x+3$.

d) Une asymptote horizontale d'équation $y=-6$

3- Dans un repère, la courbe représentative *(C)* de la fonction f définie par $f(x)=\ln(\ln x)$admet en plus l'infini $(+\infty)$:

a) Une asymptote oblique d'équation $y=x+1$.

b) Une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

c) Une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

d) Une asymptote verticale d'équation $x=-1$.

4- Dans un repère, la courbe représentative *(C)* de la fonction f définie par $f(x)=(x^2-3)e^x$ admet en plus l'infini $(+\infty)$:

a) Une asymptote oblique d'équation $y=x-3$.

b) Une branche parabolique de direction l'axe des abcisses.

c) Une asymptote horizontale d'équation $x=0$.

d) Une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Exercices

1.- Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes d'expression :

a) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$ b) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}+\frac{1}{x}$

c) $f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\cos x}$ d) $f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin x}$

e) $f(x)=2\sin x+1$ f) $f(x)=\frac{1}{2-\sin x}$

g) $f(x)=\arcsin(2x+3)$

h) $f(x)=\arccos(x^2-3x+1)$

2.- f est la fonction définie et dérivable sur $]-\infty, \ 1] \cup [3, \ +\infty[$ par : $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ et $f(0) = \sqrt{3}$.

a) Déterminer $f(x)$ puis justifier que $Df =]-\infty, \ 1] \cup [3, \ +\infty[$

b) Montrer que en $(+\infty)$ la courbe *(C)* de f admet une asymptote oblique que l'on précisera. En déduire l'équation de l'asymptote oblique à *(C) en* $(-\infty)$.

c) Etudier les variations de f puis sa tracer sa courbe *(C)*.

3- Soit la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$

a) Etudier ses variations dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \ \frac{3\pi}{4}\right[$ puis tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

b) Calculer les primitives de f. On mettra d'abord $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = A + B\frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}$$

c) Calculer la valeur de l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x=0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

4-Soit la fonction f d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

1. Sans construire le courbe (C) de f, calculer la surface comprise entre l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = t$ $(t > 2)$. Cette surface a-t-elle une limite lorsque t tend vers plus l'infini ?
2. Construire la courbe (C) de f et hachure la surface en question ?

5.- Soit la fonction f d'expression :

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

1. Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f. En déduire la position de (C) par rapport à (D)
2. Etudier et représenter graphiquement f
3. Calculer, en fonction de a, l'aire du domaine limite par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x=2 et x=a (a>2). Quelle est la limite de cette aire lorsque a tend vers plus l'infini ?

Idées et stratégies

Lorsque le degré du numérateur d'une fonction dépasse celui du dénominateur de deux unités, la courbe représentative de cette fonction admet une parabole comme asymptote. Une telle asymptote est appelée asymptote curviligne.

4- a) Déterminer toutes les racines du polynôme $2x^3 + x^2 - 3$.

b) Etudier la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3+x^2+3}{x}$ et en construire la courbe *(C)* dans un repère orthonormé.

c) Préciser la position de *(c)* par rapport à la parabole *(P)* d'équation $y = x^2 + x$

d) Calculer en fonction de a l'aire de la région limitée par la courbe *(C)*, la parabole *(P)*, la droite $x=1$ et la droite $x=a$. $(a>1)$.

e) Déterminer *a, à 0,01* près pour que cette aire soit égale à 1.

5.- On considère la fonction numérique :

$$f : x \to \frac{x^4}{x^2-1}$$

1. Montrer que f peut s'écrire sous la forme :
$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1}$$
En déduire que la parabole équation $g(x) = x^2 + 1$ est asymptote à la courbe représentative (C) de f
2. Etudier et représenter graphiquement f

3. Calculer l'aire limitée par la courbe l'asymptote équation $g(x)=x^2+1$ et les droites équations $x=\sqrt{2}$ et $x=3$

6- Dans un plan muni d'un repère orthonormal, on désigne par (P) la courbe de la fonction $g:x\to x^2-3x+3$ et par (C) la courbe de la fonction f définie par $f(x)=\frac{(x-1)^3}{x}$.

1) Montrer que les courbes (C) sont asymptotes au voisinage respectifs de $-\infty$ et de $+\infty$ puis étudier la position de (C) par rapport à (P).

2) Etudier f puis dresser un tableau résumé des variations de g.

3) Tracer (C) et (P) puis évaluer l'aire du domaine D formé des points $M(x,y): 1\le x\le e$ $f(x)\le y\le g(x)$

Idées et stratégies

Lorsqu'on étudie l'intersection d'une courbe avec l'axe des ordonnées, si on débouche sur une équation du 3ième degré, il n'est pas nécessaire de chercher à résoudre l'équation. On dit qu'elle admet au moins une racine et on note $x=\alpha$ cette racine

7.- Soit la fonction numérique définie par :

$$f:x\to x+1+\frac{4}{(x-1)^2}$$

1. Montrer que la courbe représentative (C) de f admet une A.O équation : $(\Delta): y=x+1$. En déduire la position de (C) par rapport à (Δ)
2. Etudier les variations de f et construire sa courbe (C) dans un repère orthonormé
3. Calculer la surface S de la portion du plan comprise entre la courbe (C), son asymptote oblique et les droites équations $x=3$ et $x=\lambda$ $(\lambda>4)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} S$

5.

Pour approfondir

1.- On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=x+1-\frac{2}{(2x-1)^2}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$. En déduire une interprétation géométrique
2. Etudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé
3. Calculer, en fonction de Q, l'aire du domaine limite par la courbe (C), la droite (D) équation y = x +1 et les droites équations x = 1 et x = a (a > 1). Quelle est la limite de cette aire lorsque a tend vers plus l'infini ?

2.- Soit f la fonction d'expression :

$$f(x)=x+1+\frac{3x+1}{x^2}$$

1. Préciser le domaine de définition de f
2. Quel est le comportement de f aux bornes de Df ?
3. Vérifier que pour tout x appartenant à Df on a : $f'(x)\frac{(x-2)(x+1)^2}{x^3}$
4. Etudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé
5. Vérifier que le point I(0, 1) est centre de symétrie pour (C) de f
6. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe (C) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$

3.- Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{2x^2+2x-1}{x^2+x}$$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f'(x)=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}$
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$
3. Déterminer toutes les primitives de f sur $]0;+\infty[$. En déduire celle qui s'annule pour $x=1$

6.- Soit la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x)=\frac{-x^3+5x}{x^2+3}$

1. Déterminer les réels a et b tels que :

$$f(x) = ax + \frac{bx}{x^2+3}$$

En déduire que la courbe (C) de f admet la droite (D) équation y = -x comme asymptote oblique. Etudier la position de (C) par rapport (D)

2. Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm)
3. Déterminer l'aire de la portion du plan limite par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite $x = \sqrt{5}$

7.- Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x+x^2}{(x+1)^2}$$

1. Vérifier que f(x) peut se mettre sous la forme de $f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$
2. En déduire une primitive de f vérifiant la relation F(0) = -2
3. Etudier les variations de f, puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal

Bac Juillet 98

8.- Pour une fonction réelle g définie et dérivable sur R, on sait que : ∀ x ∈ R, $g'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$ et $g(1)=1$

a) Déterminer g(x) pour x ∈R

b) Etudier le sens de variation de g

c) Trouver l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de la fonction g en son point d'abscisse $x_0 = 1$. Tracer la droite (T) (indiquer le point de tangence à (C) de g.

<u>Exemple d'études de fonctions ln</u>

1) Soit f la fonction à variable réelle x définie par :

$f(x) = xe^x$ si $x \in]-\infty;\ 0]$ et

$f(x) = x\ln x$ si $x \in]0;\ +\infty[$

a) Préciser l'ensemble de définition de f.

b) Etudier la continuité puis la dérivabilité de f, en0. f est-elle continue sur $\Re$? Justifier.

f est-elle dérivable sur $\Re$? Justifier.

c) Etudier f puis tracer sa courbe (C) en repère orthonormé.

d) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda)$ si

$$A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx \quad (0 < \lambda \le 1)$$

Solution

a) Précisons l'ensemble de définition de f.

Puisque $f(x) = xe^x$ si $x \in]-\infty,\ 0]$ donc $f(x)$ est définie sur $\Re_-$

De plus $\forall x \in]0,\ +\infty[$; $\ln x$ est définie sur $\Re_+^*$. Il en résulte que f est partout définie sur $\Re$ d'où $Df =]-\infty\ \ +\infty[$

b) Etude de la continuité et dérivabilité de f en 0.

Comme $f(0) = 0e^0 = 0$ et

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (xe^x) = 0$

et $\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} (x\ln x) = 0$ donc

$\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^+} f(x) = f(0)$

Par conséquent f est continue en 0.

Etude de la dérivabilité de f en o

$$\lim_{0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{0^-} \frac{xe^x - 0}{x-0}$$

$$\lim_{0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{0^-} (e^x) = 1$$

Donc f est dérivable à gauche en 0.

$$\lim_{0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{0^+} \frac{x\ln x - 0}{x-0}$$

$$\lim_{0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{0^+} (\ln x) = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

Il en résulte que f n'est pas dérivable en 0.

f est continue en 0 ; elle est continue en tout point de $\Re_-^*$ et $\Re_+^*$ comme produit de deux fonctions $(x \to x$ et $x \to e^x)$ continues.

Il en résulte que f est continue sur $\Re$. Par contre, f n'est pas dérivable sur $\Re$ puisqu'elle ne l'est pas au point de 0 de $\Re$.

c) Etude et courbe de f

- Domaine de définition et continuité.

D'après l'étude précédente, f est définie et continue sur $\Re$.

Limites aux bornes de Df

- $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty}(xe^x) = 0$, donc (C) admet l'équation $y = 0$ comme A.H.
- $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty}(x\ln x) = +\infty$

Il y a donc éventualité d'une asymptote oblique

$$\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty}\frac{x\ln x}{x}$$

$$\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty}(\ln x) = +\infty$$

Donc il n' y a pas d'asymptote oblique mais plutôt (C) admet une branche parabolique de direction $y'oy$

Sens de variation

Calcul et signe de la dérivée première.

On sait que f n'est pas dérivable sur $\Re$, mais elle est sur $\Re_-$ et $\Re_+^*$

Donc :

$\forall x \in \Re_- : f(x) = xe^x$

$f'(x) = (xe^x)' = (x+1)e^x$

$\forall x \in \Re_+^* : f(x) = x\ln x$

$\Re_- : f(x) = 0$

Sur $\Leftrightarrow e^x(x+1) = 0, \forall x \in \Re_-\ e^x > 0$

$\Leftrightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \ \in \Re_-$

Sur $\Re_+ : f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -1 \Rightarrow \ln x = -\ln e$

D'où $x = \dfrac{1}{e}$ $\left(\dfrac{1}{e} \in \Re_+^*\right)$

Tableau de signes de $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-1 \,\|\|\, -\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	$\|$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

Lorsque $x \in \left]-\infty, \ -1\right[\cup \left]0, \ \dfrac{1}{e}\right[; f'(x) < 0$: donc f est strictement décroissante.

Sur les intervalles $\left]-1, \ 0\right[$ et $\left]\dfrac{1}{e}, \ +\infty\right[; f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

f admet deux minima absolus : l'un en -1 et l'autre en $\dfrac{1}{e}$.

Au point d'abscisse 0 (C) admet un point anguleux (à cause de deux demi tangentes distinctes : l'une de pente 1 et l'autre verticale)

Recherche des minima

Pour $x = -1$, on a :

$f(-1) = (-1)e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$ donc le point $S_1\left(-1 \ \ -\dfrac{1}{e}\right)$ est un sommet de (C)

Pour $x = \dfrac{1}{e}$, on a :

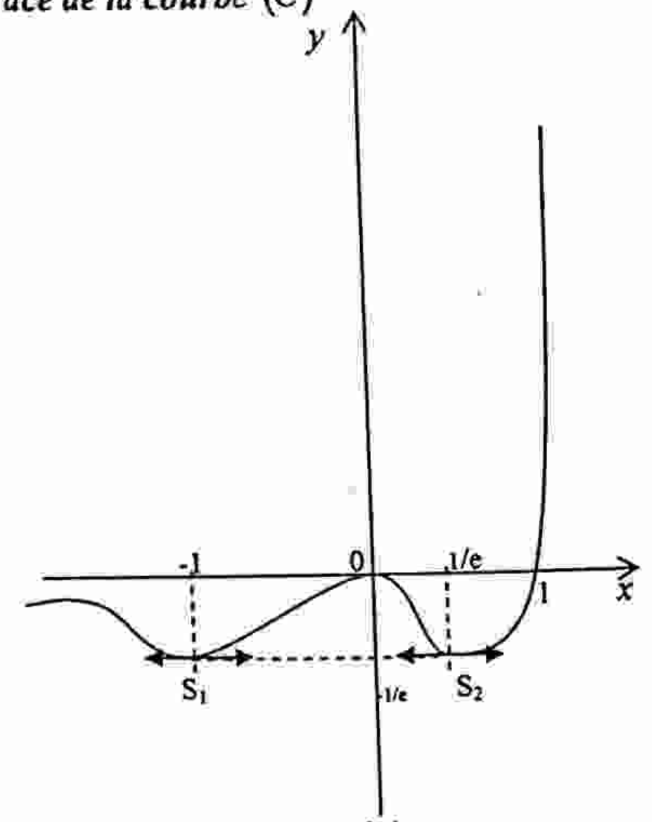
$f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \left(\dfrac{1}{e}\right)\ln\dfrac{1}{e} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$, donc le point $S_2 = \left(\dfrac{1}{e} \ \ -\dfrac{1}{e}\right)$ est un sommet de (C)

- Valeurs remarquables (points sur les axes)

$y'oy : x = 0$ alors $f(0) = 0e^0 = 0$

donc $0(0; \ 0) \in (C)$

Tracé de la courbe (C)



e) Calculons $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda)$

Si $A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$ et $0 < \lambda \le 1$

Comme $0 < \lambda \le 1$, donc $x > 0$, on doit donc prendre $f(x) = x\ln x$ comme fonction à intégrer or sur $\Re_+^*$ une primitive de f est la fonction F

définie par $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2$

(Obtenue à l'aide d'intégration par parties)

Il vient donc :

$$A(\lambda) = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_\lambda^1$$

$$A(\lambda) = \left(\frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{1}{8}.1^2\right) - \left(\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda - \frac{1}{4}\lambda^2\right)$$

$$A(\lambda) = -\frac{1}{4} + \frac{\lambda^2\ln\lambda}{2} + \frac{1^2}{4}$$

Or quand $\lambda \to 0^+ \Rightarrow \frac{\lambda^2\ln\lambda}{2} \to 0$ et $\frac{\lambda^2}{4} \to 0$

Il en résulte que $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda) = -\frac{1}{4}$

2.- Etude de la fonction $f : x \to -1 + (\ln x)^2$

Solution

.- Ensemble de définition

On a : $Df =]0;+\infty[$

.- Etude aux bornes de l'ensemble de définition

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$;

Donc, la droite (OJ) est asymptote à (C)

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; il y a éventualité d'une asymptote oblique

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left[-\frac{1}{x} + \left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\right] = 0$$

Donc, (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI)

.- Dérivée et sens de variation

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction : $f' : x \to \frac{2\ln x}{x}$

.- Signe de la dérivée

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\ln x = 0$

$2 \neq 0 \Rightarrow \ln x = 0$

$\ln x = \ln 1 \Rightarrow x = 1$

.- Tableau de la dérivée

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$\forall x \in]0,1[$, $f(x) < 0$,

donc, f est décroissante sur $]0;1[$;

$\forall x \in]1,+\infty[$, $f(x) > 0$

donc, f est croissante sur $]1;+\infty[$;

Pour $x = 1$; $f'(x) = 0$

donc f admet un extremum de nature un minimum

.- Calcul de l'ordonnée du sommet

$x = 1 \Rightarrow f(1) = -1$; $S = (1, -1)$

.- Point sur les axes de coordonnées

$(C) \cap X'OX$: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$-1 + (\ln x)^2 = 0$

$(\ln x)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\ln x + 1)(\ln x - 1) = 0$

$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow \ln x = -\ln e \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

$\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \ln e \Rightarrow x = e$

$(C)\cap X'OX = \left\{\left(\frac{1}{e},0\right);(e,0)\right\}$

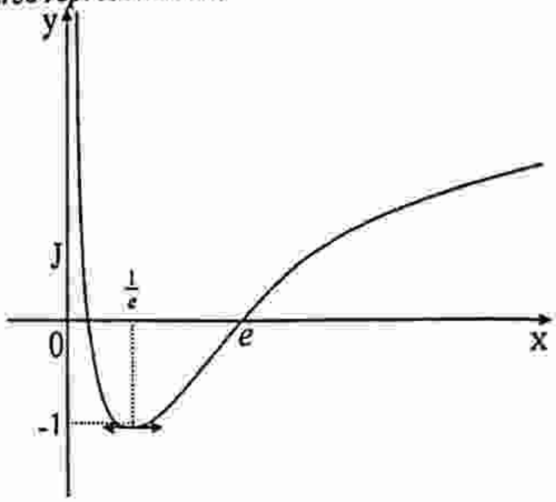
$(C)\cap Y'OY:\ x=0 \notin Df$

$(C)\cap Y'OY=\{\ \}$

.- *Tableau de variation*

x	0		$\frac{1}{e}$		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖								
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

.- *Courbe représentative*



3.- Etudier et représenter graphiquement la fonction : $f : x \to \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$

Démontrer que $\Omega\left(-\frac{1}{2},0\right)$ est un centre de symétrie et un point d'inflexion de la courbe (C) de f

Solution

Ensemble de définition

f(x) existe $\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \neq 0 \quad x \neq 0 \quad et \quad x+1 \neq 0$

On a : $Df = \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$

ou $Df =]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$

Limites aux bornes de l'ensemble de définition

On a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = 0$

Donc la droite (OI) est asymptote à (C)

On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = \ln 0^+ = -\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = \ln 0^+ = -\infty$$

donc, la droite (OJ) est asymptote à (C)

on a : $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = \ln(+\infty) = +\infty$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = \ln(+\infty) = +\infty$$

donc, la droite (Δ) d'équation x = -1 est asymptote verticale à (C)

.- *Dérivée et sens de variation*

$$f(x) = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} \Rightarrow \frac{1}{x^2+x}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
1		+		+		+	
x^2+x		+	0	-	0	+	
f'(x)		+	‖	-	‖	+	

On a :

$\forall x \in]-\infty \quad -1[\cup]0 \quad +\infty[$ donc

est croissante sur]-∞, 1[∪]0, +∞[

$\forall x \in]-1 \quad 0[$[, f'(x) < 0 ;

donc, f est décroissante sur $]-1;0[$

.- ***Intersection de la courbe (C) avec les axes de coordonnées***

$(C)\cap x'0x:\ y=0 \quad \to$ f(x) = 0 Ψ $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = 0$

$$\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = \ln 1 \Rightarrow \left|\frac{x}{x+1}\right| = 1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} = 1 \text{ ou } \frac{x}{x+1} = -1$$

donc, $x = -\frac{1}{2}$; $(C)\cap x'ox = \left\{\left(-\frac{1}{2},0\right)\right\}$

$(C)\cap y'oy:\ x=0 \notin Df$

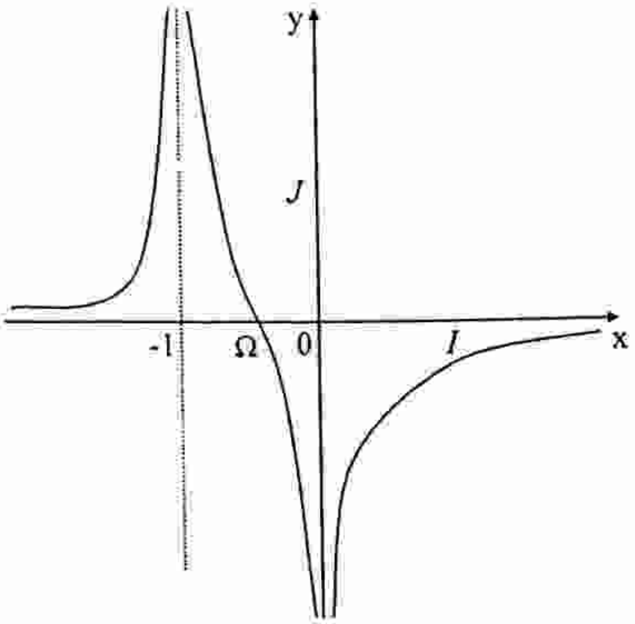
$(C)\cap y'oy:\ y=\{\ \}$: (C)

ne rencontre pas l'axe des ordonnées

.- *Tableau de variation*

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		
$f'(x)$		+	‖	−		−	‖	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

.- Courbe représentative



b) Démontrons que $\Omega\left(-\frac{1}{2};0\right)$ est un centre de symétrie et un point d'inflexion de (C)

on doit avoir $f\left(-\frac{1}{2}+x\right)+f\left(-\frac{1}{2}-x\right)=0$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}+x\right)=\ln\left|\frac{-1+2x}{1+2x}\right|=\ln|-1+2x|-\ln|1+2x|$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}-x\right)=\ln\left|\frac{-1-2x}{1-2x}\right|=\ln\left|\frac{1+2x}{-1+2x}\right|$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}-x\right)=\ln|1+2x|-\ln|-1+2x|$$

donc :

$$f\left(-\tfrac{1}{2}+x\right)+f\left(-\tfrac{1}{2}-x\right)=\ln|-1+2x|-\ln|1+2x|+\ln|1+2x|-\ln|-1+2x|$$

$$f\left(-\frac{1}{2}+x\right)+f\left(-\frac{1}{2}-x\right)=0\ ;$$

de ce fait, $\Omega\left(-\frac{1}{2};0\right)$ est bien centre de symétrie de (C).

<u>Remarquons que</u>

$x=-\frac{1}{2}$ est l'abscisse du point d'ordonnées nulle où la dérivée seconde $f''(x)=\frac{-(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}$ s'annule, Il s'en suit que $\Omega\left(-\frac{1}{2};0\right)$ est un point d'inflexion de (C).

4.- Soit la fonction $f : x \to \ln(1-\ln x)$.

a) Etudier les variations de f. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition Df

b) Montrer que f est une bijection de Df sur un ensemble I que l'on précisera.

c) Construire la courbe (C) représentant f dans un repère orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm. Bacc 2004

Solution

.- Déterminons le domaine de définition de f :

f existe $\Leftrightarrow x>0$ et $1-\ln x>0 \Rightarrow x<e$, $Df=]0,e[$

.- Limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, x = 0 est A.V

on a : $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=-\infty$, x = e est A.V

.- Dérivée et sens de variation

$f'(x)=\ln(1-\ln x)$ $\qquad$ $f'(x)=\frac{(1-\ln x)'}{1-\ln x}$

$$f'(x)=\frac{-1}{x(1-\ln x)}$$

$\forall x\in Df,\ f'(x)<0$

donc, f est strictement décroissante sur Df

.- Points d'intersection avec les axes de coordonnées

$x=0\notin Df \Rightarrow (C)\cap y'oy=\{\ \}$

$y=0\Rightarrow \ln(1-\ln x)=0$

ln (1 - lnx) = ln1 Ψ 1 – lnx = 1 d'où x = 1

(C) ∩ x'ox = {(1, 0)}

.- Tableau de variation

x	0		1		e
$f'(x)$		–		–	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

b) Montrons que f est une bijection de Df sur un ensemble I que l'on précisera

f : Df ⟶ I ou f :]0, e[⟶]-∞, +∞[

f est bijective

$\forall x,x'\in Df : f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$

$\Leftrightarrow \ln(1-\ln x)=\ln(1-\ln x')$

$\Leftrightarrow -\ln x=-\ln x' \Rightarrow x=x'$

f est surjective

$$\forall y \in I, \exists x \in Df \,/\, f(x) = y$$

$$f(x) = y \Rightarrow \ln(1 - \ln x) = y$$

$$\ln(1 - \ln x) = \ln e^y$$

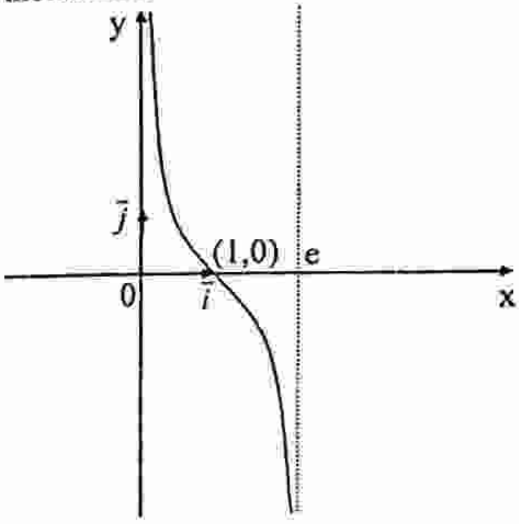
$$1 - \ln x = e^y \Rightarrow -\ln x = e^y - 1$$

$$\ln x = 1 - e^y \text{ donc } x = e^{1-e^y}$$

$\forall y \in I$, x existe dans]0, e[

f est effectivement une bijection de]0, e[sur]-∞ ; +∞[

c) Construction de la courbe (C) de f dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm



5.- Etude de la fonction $f : x \to \frac{e^x - 3}{e^x - 1}$

Solution

.- Ensemble de définition

on a : $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

.- Étude aux bornes de l'ensemble de définition

on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ y = 3 est A.V

on a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y = 1 est A.H

.- Dérivée et sens de variation

$$f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x - 3)}{(e^x - 1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\forall x \in Df, f'(x) > 0$$

donc f est strictement croissante sur Df

.- Points sur les axes de coordonnées

$$x = 0 \notin Df : (C) \cap y'oy = \{\ \}$$

$$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x - 3}{e^x - 1} = 0$$

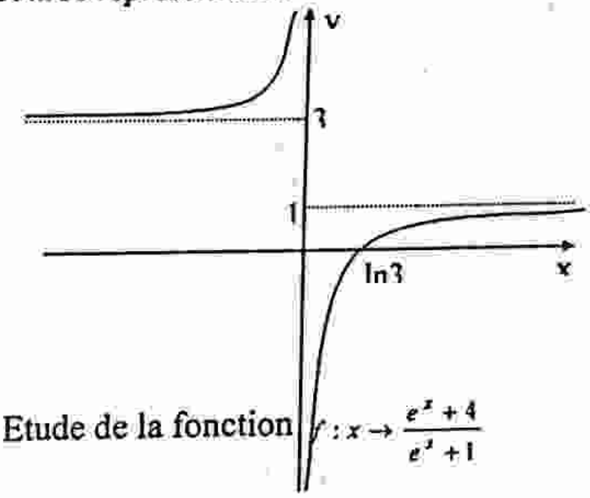
$$e^x - 3 = 0 \Rightarrow x = \ln 3$$

$$(C) \cap X'OX = \{(\ln 3; 0)\}$$

.- Tableau de variation

x	−∞	0		ln3	+∞
f'(x)	+	‖	+		+
f(x)	3 ↗ +∞	‖	−∞ ↗	0	↗ 1

.- Courbe représentative



6.- Etude de la fonction $f : x \to \frac{e^x + 4}{e^x + 1}$

Solution

.- Ensemble de définition

on a : Df = R =]-∞ ; +∞[

.- étude aux bornes de l'ensemble de définition

on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$ y = 4 est A.H

on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y = 1 est A.H

.- Dérivée et sens de variation

$$f(x) = \frac{e^x + 4}{e^x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x + 4)}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\forall x \in Df, f'(x) < 0$$

donc f est strictement décroissante sur Df

.- Points sur les axes de coordonnées

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{5}{2}$ $\quad C \cap y'oy = \{0; \frac{5}{2}\}$

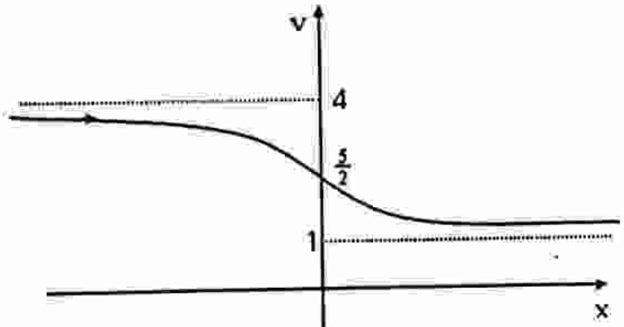
$y = 0 \Rightarrow \frac{e^x + 4}{e^x + 1} = 0 \Rightarrow e^x = -4$

absurde donc : $C \cap x'ox = \{\ \}$

.- Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	4 ↘	$\frac{5}{2}$ ↘	1

.- Courbe représentative



c) Montrons que f est une bijection sur un ensemble I que l'on précisera $f: Df \to I$ ou $f : \mathbb{R} \to]1;4[$ f est bijective ssi

.- f est bijective

$\forall x, x' \in \mathfrak{R} : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$\Leftrightarrow \frac{e^x + 4}{e^x + 1} = \frac{e^{x'} + 4}{e^{x'} + 1}$

$\Leftrightarrow (e^x + 4)(e^{x'} + 1) = (e^x + 1)(e^{x'} + 4)$

$\Leftrightarrow e^x e^{x'} + e^x + 4e^{x'} + 4 = e^x \cdot e^{x'} + 4e^x + e^{x'} + 4$

$\Leftrightarrow 3e^x = 3e^{x'} \Rightarrow e^x = e^{x'}$

$\Leftrightarrow x = x'$

.- f est surjective

$\forall y, \in]1;4[, \exists x \in \mathbb{R} / f(x) = y$

$f(x) = y \Rightarrow \frac{e^x + 4}{e^x + 1} = y$

$e^x + 4 = ye^x + y$

$(1 - y)e^x = y - 4 \Rightarrow e^x = \frac{y - 4}{1 - y}$

$x = \ln\left(\frac{y - 4}{1 - y}\right)$

$\forall y \in]1;4[$; x existe dans R, il s'en suit que f est une bijection de $]-\infty ; +\infty[$ sur $]1 ; 4[$.

7.- Soit f la fonction définie par : $f : x \to xe^{2x}$

a) Préciser le domaine de définition de f

b) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que : $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$. En déduire une primitive de f sur R.

c) Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et tracer la courbe représentative de f sur cet intervalle.

Bac 2003

Solution

$f(x) = xe^{2x}$

.- Domaine de définition de f

on a : $Df = \mathbb{R} \Rightarrow Df =]-\infty;+\infty[$

.- Montrons qu'il existe deux réels a et b tels que :

$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$

$f(x) = xe^{2x}$

$f'(x) = u'v + v'u$

$f'(x) = 1e^{2x} + 2e^{2x} \cdot x$

$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$

$f''(x) = 2e^{2x} + 2(e^{2x} + 2xe^{2x})$

$f''(x) = 2e^{ex} + 2e^{2x} + 4xe^{2x}$

$f''(x) 4e^{2x} + 4xe^{2x}$

$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$

$4e^{2x} + 4xe^{2x} + a(2xe^{2x} + e^{2x}) + bxe^{2x} = 0$

$(4 + 2a + b)xe^{2x} + (4 + a)e^{2x} = 0$

$[(4 + 2a + b)x + (4 + a)]e^{2x} = 0$

on a : $4 + 2a + b = 0 \quad (1)$

$4 + a = 0 \quad (2)$

$\boxed{a = -4 \text{ et } b = 4}$

déduisons une primitive de f sur |

$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$

$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$

$4f(x) = -f''(x) + 4f'(x)$

$f(x) = \frac{1}{4}(-f''(x) + 4f'(x))$

$\int f(x)dx = \frac{1}{4}\int [-f''(x) + 4f'(x)]dx$

$\int f(x)dx = \frac{1}{4}(-f'(x) + 4f(x))$

Soit $F(x)=f(x)-\frac{1}{4}f'(x)$

$$F(x)=xe^{2x}-\frac{1}{4}\left(2xe^{2x}+e^{2x}\right)$$

$$F(x)=xe^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}$$

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}}$$

.- *Variation et courbe représentative de f sur* $]0;+\infty[$

$$f(x)=xe^{2x}$$

.- *Ensemble de définition*

$$Df=[0;+\infty[$$

.- *Limites aux bornes*

$$f(0)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^{2x}=+\infty$$

il y a éventualité d'une A.O

.- *Dérivée et sens de variation*

on a :

$$f'(x)=2xe^{2x}+e^{2x}$$

$$f'(x)=(2x+1)e^{2x}$$

$$f'(x)=0;\forall x\in[0;+\infty[,e^{2x}>0$$

$$2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\notin Df$$

Donc $f'(x)>0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

.- *Direction asymptotique*

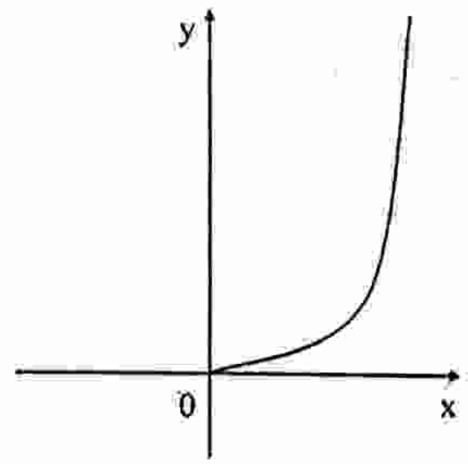
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{2x}}{x}=+\infty$$

La courbe admet une branche parabolique de direction oy

.- *Tableau de variation*

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative



9.- Étude de la fonction $f:x\to\ln(-x)$

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $F:x\to x[a\ln(-x)+b]$ soit une primitive de f.
2. En déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C) de f et les droites d'équations x = -2 et x = -1

10.- Soit la fonction :

$$f:x\to\ln\left(\frac{3x-4}{x-2}\right)$$

1. Préciser le domaine de définition de f et les limites aux bornes
2. Montrer que $\forall x\in\,]2;\ +\infty[$; on a : $f(x)>0$
3. Présenter dans un tableau les variations de f et tracer sa courbe représentative (C)
4. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe (C) de f au point d'abscisse 4

11.- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer la valeur de x telle que f(x) = 0 et écrire l'équation de la tangente à la courbe (C) de f en ce point

3. Montrer qu'une primitive de $x \to \frac{\ln x}{x}$ est : $x \to \frac{(\ln x)^2}{2}$. En déduire l'ensemble des primitives F de f .

Bacc 2001

12.- Soit f la fonction numérique réelle définie par :

$$x \to -\frac{\ln x}{x^2}$$

1. Déterminer les constantes réelles a et b sachant que : $F : x \to \frac{a \ln x + b}{x}$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$
2. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative (C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé
3. Calculer l'aire du domaine plan limite par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Bacc 2002

13- Résoudre l'inéquation $\ln|x| < 1$

1) On considère la fonction f de la variation réelle x définie comme suit :

$$\begin{cases} f(x) = 2x - x\ln|x| & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de f au point $x_0 = 0$

b) Construire la courbe représentative (C) de f

14.- Soit f la fonction de R vers R définie par :

$$f(x) = ae^{2x} + be^{x}$$

où a et b désignent deux paramètres réels.

1) Calculer a et b de façon que la courbe (C) représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, soit au point d'abscisse 0 tangente à la droite d'équation $y = 2x - 3$

2) Soit g la fonction de R vers R définie par $g(x) = e^{2x} - 4e^{x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de g dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation

b) Écrire l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0

c) Tracer (C) aussi que la tangente étudiée

15- Soit f la fonction définie par :

$$f : x \to \frac{1}{2}x^2 e^{x+1}$$

a) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 3 cm

b) Calculer l'aire du domaine plan défini par :

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

16.- Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{x}$$

1) Étudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (unité graphique 2cm)

2) Soit la fonction F définie par :

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{x}$$

Déterminer les réels a, b, et c pour que F soit une primitive de f

3) Calculer l'aire du domaine plan limite par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \sqrt{3}$

17- Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f : x \to \frac{\ln x}{x^2}.$$

1) Vérifier, en faisant une intégration par parties, qu'une primitive de f sur $\Re_+^*$ est

$$x \to \frac{-\ln x - 1}{x}.$$

2) Soit la fonction réelle g définie et dérivable sur $\Re_+^*$ par $g'(x) = \frac{-2 - \ln x}{x^2}$ et $g(1) = 3$.

a) Déterminer $g(x)$ et préciser les variations de g.

b) Tracer la courbe (C) de f en repère orthonormé.

18- Si f est la fonction réelle définie par $f(\ln 3)=0$ et $\forall x \in \Re$ $f'(x)=\dfrac{7e^x}{(e^x+4)^2}$

a) Déterminer $f(x)$.

b) On suppose que $f(x)=\dfrac{e^x-3}{e^x+4}$, vérifier que : $\forall x \in \Re,\ f(x)=\dfrac{1-3e^{-x}}{1+4e^{-x}}$.

c) Etudier les variations de f puis construire sa courbe représentative (C).

19- Si f est la fonction réelle définie par : $f'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$ et $f(\ln 2)=0$, $\forall x \in \Re^*$

a) Déterminer $f(x)$.

b) On suppose que $f(x)=\dfrac{e^x-2}{e^x-1}$, vérifier que $\forall x \in \Re, f(x)=\dfrac{1-2e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

c) Etudier les variations de f puis construire sa courbe représentative (C).

20- On considère la fonction numérique $f_m(x)=\dfrac{3+m\ln x}{x}$ où $x \in \Re$. On note (C_m) la courbe représentative f_m dans un repère $(o,\vec{i}\ \ \vec{j})$.

a) Montrer que, lorsque m décrit $\Re$, les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

b) Pour $m=1$, étudier les variations de f_1 puis tracer sa courbe (C_1) dans un repère $(o,\vec{i}\ \ \vec{j})$.

c) Déterminer l'équation de la tangente au point d'ordonnée nulle de (C).

d) Montrer qu'une primitive de $x \to \dfrac{\ln x}{x}$ est $x \to \dfrac{(\ln)^2}{2}$. En déduire l'ensemble des primitives F_1 de f_1 et celle qui prend la valeur $\dfrac{11}{2}$ lorsque $x=e$.

20 On considère la fonction numérique f_m définie par $f_m(x)=\dfrac{mx+2}{e^x}$.

a) Montrer que, lorsque m décrit sur $\Re$ les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

b) Etudier les variations de f lorsque $m=1$ puis tracer sa courbe (C_1) dans un repère orthonormé $(o,\vec{i}\ \ \vec{j})$.

c) Vérifier que le point A par lequel passent toutes les courbes est aussi le point d'inflexion de la courbe (C_1) de f_1.

d) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégral $I=\int_0^1 f(x)dx$.

20- Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=(3x^2+4)e^{2x}$.

a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C).

b) Déterminer 3 réels a, b, c tels que la fonction $F: x \to (ax^2+bx+c)e^{2x}$ soit une primitive de f.

c) Prouver que le calcul de l'intégral $I=\int_{-1}^{0} f(x)dx$ donne $I=\dfrac{1}{4}\left(11-\dfrac{23}{e^2}\right)$

21- Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{(1-\ln x)^2}{x}$.

a- Etudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

b- Ecrire l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0=1$.

22- Soit f la fonction numérique de la variable de la variable réelle x définie par : $f(x)=(x-2)e^{2x}$.

ii. Etudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

iii. Déterminer les réels a et b telle que la fonction $g(x)=(ax+b)e^{2x}$ soit une primitive de f.

23.- On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=2\ln x-x+3$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(o,\vec{i}\ ;\vec{j})$; unité graphique 2cm

a) Déterminer la limite de f quand x tend vers 0^+

b) Calculer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$. Pour cela on écrire f(x) sous la forme : $f(x)=x\left(2\frac{\ln x}{x}-1+\frac{3}{x}\right)$

c) Etudier les variations de f(x) et tracer sa courbe représentative (C)

Bac 2001

24.- Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=x^2+2(1-\ln x)$

a) Calculer f(1). Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

b) Tracer orthonormé $(o,\vec{i}\ ;\vec{j})$: unité 1 cm

c) Calculer l'aire du domaine plan défini par : $1\le x\le 3$ et $0\prec y\le f(x)$

Bacc 2003

25.- Soit la fonction : $f:x\to\ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$

a) Etudier les variations de f

b) En quel point la courbe (C) de f coupe-t-elle l'axe $x'ox$?

c) Tracer la courbe (C) de f

d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C) de f au point d'abscisse $x_0=3$

Bac 2004

26.- Soit la fonction : $f:x\to\ln(x^2)$

a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C)

b) Etudier l'équation de la tangente à la (C) de f au point d'abscisse $x_0=e$

c) Vérifier que la fonction F définie par $F(x)=x\ln(x^2)-2x$ de f sur chacun des intervalles où elle est définie

27.- f est la fonction définie sur $[1;e^2]$ par :

$f(x)=(2-\ln x)\ln x$

a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de f

b) Résoudre l'équation lnx = 1 et donner le signe $1-\ln x$ pour x > 0

c) Déduire les variations de f

d) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormal $(o,\vec{i}\ ;\vec{j})$

e) F est la fonction définie sur $[1;e^2]$ par :

$F(x)=x\left[4\ln x-(\ln x)^2-4\right]$

Montrer que F est une primitive de f sur $[1;e^2]$

28.- .- On considère la fonction numérique :

$f:x\to\frac{e^x}{x+1}$

a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Calculer la dérivée f' de f

c) Etudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$; $-\infty$ et -1

d) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe (C)

e) Ecrire équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0=0$

Bac Août 2003

29.- Soit la fonction définie par : $f:x\to e^x(e^x-2)$

a) Etudier les variations et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé unité 1 cm

b) Utiliser la courbe (C) pour résoudre l'équation : $e^{2x}-2e^x-3=0$
Retrouver les résultats algébriquement

c) Utiliser la courbe (C) pour étudier suivant le nombre réel m le nombre de racines de l'équation $e^{2x}-2e^x-m=0$

30.- Soit f la fonction numérique définie pour tout réel x par : $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$

On déduire par (C) la courbe représentative de f

a) Montrer que la droite (D) d'équation y = x – 1 est asymptote à (C)

b) Montrer que pour tout réel x on a :

$$f(x)-(x-1)=2-\frac{2e^x}{e^x+1}$$

c) Soit α un réel supérieur ou égal à 1.n On désigne par $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limite par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation x = 1 et $x=\alpha$. Calculer $A(\alpha)$; préciser A (2) à 10^{-2} près

Bac Sept 97

31.- On considère la fonction numérique f définie pour tout x par : $f(x)=(2-x)e^{-x}$

On appelle (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique étant 2 cm

a) Calculer la fonction dérivée f' et étudier son signe. Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
b) En déduire que (C) possède une asymptote lorsque x tend vers $+\infty$
c) Dresser le tableau de variation de f
d) On appelle (D) la tangente à (C) ; trouver une équation cartésienne de (D)
e) Tracer avec soin (D) (C) dans le même repère $(o,\vec{i},\vec{j})$

32- dans le plan muni d'un repère orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$: unité 2 cm, (C) désigne la courbe représentative de la fonction $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$.

a) Trouver le domaine de définition de f puis déterminer 3 réels a, b, c tels que : $\forall x \in Df; f(x)=ae^x+b+\dfrac{c}{e^x-1}$. En déduire la courbe (٢) don't l'équation est asymptote curviligne à (C) au voisinage de plus l'infini.
b) Etudier f puis tracer (C) et (٢).
c) Calculer en Cm^2, l'aire du domaine limité par (C) et (٢) et les droites d'équations : $x=ln2$ et $x=ln5$. On vérifiera que $\dfrac{1}{e^x-1}=-\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}-1}$

33- Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par : $f(x)=x+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1) Montrer que les droites d'équations $(D): y=x+1$ et $(\Delta): y=x-1$ sont respectivement asymptote oblique à la courbe (C) de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Monter que f est impaire.
3) Etudier et représenter graphiquement f.

34- Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes

a) $f(x)=ln(1+e^{-x})$ b) $f(x)=e^{|x|}+\ln|x|$

c) $f(x)=(1+x)(1+e^{-x})$

d) $f(x)=2x+\dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$ $f(x)=e^x+ln\,x$

e) $f(x)=x+ln\left(\dfrac{e^x+3}{e^x+1}\right)$ $f(x)=\dfrac{e^{2x}+2}{e^{2x}-1}$

35- Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x)=\ln(e^{4x}+4e^{-x})$ et (C) la courbe représentative de f en repère orthonormé.

1) Trouver le domaine de définition Df puis vérifier que :

a) $\forall x \in Df : f(x)=4x+\ln(1+4e^{-5x})$. En déduire que (D) : $y = 4x$ est Asymptote oblique à (C)

b) $\forall x \in Df : f(x)=-x+\ln 4+\ln\left(\dfrac{e^{5x}}{4}+1\right)$. En déduire que (Δ) : $y = -x + ln4$ est asymptote oblique

f) 2) Etudier les variations de f puis tracer (C) dans un repère orthonormé

36- Les fonctions numériques f et g sont définies respectivement par : $f(x)= e^{|x|}.\ln|x|$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$. On se propose d'étudier la fonction f. Puis de représenter sa courbe (C) dans le plan muni de d'un repère orthonormal.

PIERRE ANTOINE LOUIS

Ami fidèle, défenseur et protecteur des jeunes, l'homme qui lutte contre l'exclusion sociale, pour l'intégration, l'émergence des jeunes de son pays