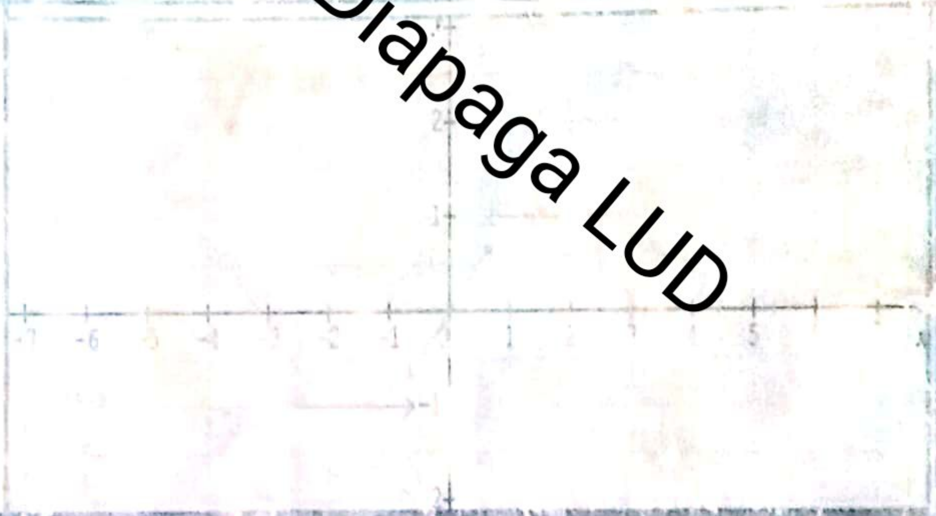
saka SAVADOGO

1re D

MATHEMATIQUES



Cours | Exercices +corrigés détaillés | Recueil de sujets de devoirs

Exercices d'entraînement

Corrigé des ex... CEAM

SITUATION GEOGRAPHIQUE

OUAGADOUGOU à CISSIN à côté du

GROUPE SCOLAIRE CEFISE BENAJA

Tél :78297259/70263347

Avant -Propos

nanuel scolaire de la collection LA BOUSSOLE a été conçu pour répondre aux besoins, maintes fois imés par les apprenants de disposer d'un outil pratique et performant à moindre coût, pour s'exercer de ière très efficace. Il est strictement conforme au nouveau programme officiel de mathématiques de la ;e de première D en vigueur au BURKINA FASO.

ıanuel scolaire est structuré de la façon suivante :

- Le cours détaillé par chapitre
- Des exercices et problèmes gradués et variés pour réinvestir le cours dans des situations données
- Les corrigés de bon nombre d' exercices du présent document
- Un recueil de sujets de devoir surveillé suivi de leurs corrigés

ıeilleure façon d'utiliser cet ouvrage est de lire d'abord le cours, traité ensuite les exercices proposés de confronter les résultats obtenus à ceux proposés par l'auteur.

ouhaite que cet ouvrage apporte aux utilisateurs toute l'aide qu'ils souhaitent et les conduise re les mathématiques avec plaisir.

d'améliorer à l'avenir le contenu de ce document et en faire un outil incontournable pour la réussite aux oirs et compositions de mathématiques, je remercie d'avance tous ceux qui auront l'amabilité de me faire de leurs remarques, critiques et suggestions constructives.

Bon usage à tous

L'auteur

Issaka SAVADOGO *(Professeur certifié)*

Tél :70514283
76072920
78981409

e-mail :savadogo87@gmail.com

sommaire

LES IMPLICATIONS DANS LE RAISONNEMENT MATHEMATIQUE

L'IMPLICATION/ L'EQUIVALENCE

Classe de 2nde DECOUVERTE

Exercice 1 : de la logique en français (d'après document ressource logique et raisonnement)
Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. A l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche. Est-il cosmonaute américain ?
2. A côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?

Exercice 2 : géométrie : fabrique d'implications. A changer avec exo diapo /garder comm

1. Etudier si les affirmations suivantes sont vraies. Justifier.

a) Si K est le milieu de $[AB]$, alors $KA=KB$.

b) Si $KA=KB$, alors K est le milieu de $[AB]$.

c) Si K est le milieu de $[AB]$, alors $KA+KB=AB$.

d) Si $KA+KB=AB$, alors K est le milieu de $[AB]$.

e) Si $K\in[AB]$, alors $KA+KB=AB$.

f) Si $KA+KB=AB$, alors $K\in[AB]$.

2. On donne ci-dessous des phrases ou des égalités .

$IM = IM'$

M' est l'image de M par la symétrie de centre I

M' appartient à (IM)

$IM + IM' = MM'$

I est le milieu de $[MM']$

I appartient à $[MM']$

Ecrire toutes les implications vraies.

Commentaires :

1. *Question 1 : Après avoir listé les implications proposées par les élèves, une discussion peut s'engager sur la véracité de celle-ci. Une fois les implications vraies établies, on s'intéressera à la réciproque de ces dernières afin que les élèves se rendent compte qu'une implication peut être vraie et sa réciproque fausse. Pour justifier qu'une implication est fausse, c'est le contre-exemple qui sera travaillé.*

Le symbole de l'implication « $\Rightarrow$ » peut être employé si la notion semble être comprise par les élèves.

2. *Question 2 : c'est le même type de questionnement ici. De plus lorsque l'implication et sa réciproque sont vraies, on introduit la notion de proposition équivalente. La notation n'est pertinente pour les élèves que si la notion qu'elle exprime est comprise.*

Exercice 3 : Expression algébrique et premières notions sur les fonctions
(d'après document ressource logique et raisonnement)

1. Résoudre l'équation : $(x-3)^2 = (x+9)^2$

Méthodes élèves attendues :

a. Résolution par développement ;

b. « Suppression des carrés » ;

c. Eventuellement résolution par 3ème identité remarquable pour certains élèves

Au moment des discussions :

- *Soumettre la solution fournie par un logiciel de calcul formel ;*
- *Identifier l'erreur commise en supprimant les carrés ;*
- *Profiter de l'identification de l'erreur pour introduire le vocabulaire.*

2. Voici quelques propositions, où a et b sont des nombres réels :

$(P1)$: $A^2 = B^2$ $(P2)$: $A = B$

$(P3)$: $A = -B$

$(P4)$: $(A+B)(A-B) = 0$

$(P5)$: $A = B$ ou $A = -B$ $(P6)$: $A = 0$ ou $B = 0$

a. Quelle sont les implications du type $(P1) \Rightarrow$ ……… vraies pour tout A,B réels ?

b. Parmi les propositions $(P2)$, $(P3)$, $(P4)$; $(P5)$ et $(P6)$, identifier celles qui impliquent la proposition $(P1)$ (pour tout A,B réels).

c. Quelles sont les propositions équivalentes (pour tout A,B réels) ?

Classe de 2nde REINVESTISSEMENT

Exercice 4 : Géométrie vectorielle
(d'après Hyperbole 2nde)

Dans chaque cas, dire si l'implication " H implique H' " est vraie puis si l'implication " H' implique H " est vraie puis donner les propositions équivalentes.

a) H : " C est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$ "
H' : " $ABDC$ est un parallélogramme".

b) H : " $ABDC$ est un parallélogramme de centre O "
H' : " O est le milieu de $[AC]$"

c) H : " $\overrightarrow{EF}(3;4)$ "
H' : " $E(0;2)$ et $F(3;6)$ "

d) H: " Les points I, J et K sont alignés "
H' : " $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IK}$ "

Exercice 5 : Inégalités et carrés. (d'après Hyperbole 2nde)

Dans chaque cas dire si l'implication est vraie ou fausse ; expliquer pourquoi. Lorsque l'implication est fausse, on pourra modifier l'énoncé afin d'obtenir une implication vraie.

1. Si $(x-4)^2 \geq 9$ alors $x \geq 7$
2. Si $a \leq 0$ et $b \geq 0$ alors $a^2 + 3 \leq b^2 + 3$
3. Si deux nombres réels a et b de $]-\infty;-1]$ sont tels que $a \leq b$ alors $5-(a+1)^2 \leq 5-(b+1)^2$.

Exercice 6 : Espace (d'après Déclic 2nde)
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Si l'implication est vraie, étudier sa réciproque (sauf 3 et 4)
1. Si deux droites sont sécantes, alors elles sont coplanaires.
2. Si deux droites sont parallèles, alors elles sont coplanaires.
3. Si deux plans sont parallèles alors toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre.
4. Si deux plans sont sécants, alors toute droite de l'un est sécante à toute droite de l'autre.
5. Si deux droites de l'espace sont non coplanaires, alors elles n'ont aucun point d'intersection

Exercice 7 : Fonctions trinômes (d'après Déclic 2nde)
Toutes les questions de cet exercice concernent une fonction polynôme de degré 2, notée f et définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$. Répondre par vrai ou faux en justifiant. On pourra s'aider de la calculatrice. Un dessin peut dans certains cas suffire.
1. Si $c=0$, alors $f(0)=0$.
2. Si $a<0$, alors, pour tout x, $f(x) \leq 0$.
3. Si les réels a b et c sont tous trois positifs alors pour tout x, $f(x) \geq 0$.

Classe de 1ère REINVESTISSEMENT

Exercice 8 pour (re)démarrer
Exercice simple à faire si besoin (selon la classe) pour réviser les notions d'implication-réciproque-équivalence.
Certaines lignes peuvent être supprimées en fonction de la progression. Peut être remplacé par un exercice de logique en français.

Trouver le lien entre les propositions du tableau. L'indiquer par un symbole logique dans la colonne du milieu.

x est un multiple de 5		Le chiffres des unités est 5
$x=2$		$x^2=4$
$xy>0$		$x>0$ et $y>0$
$\frac{1}{x}>0$		$x>0$
$\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$		$x>2$
ABC est rectangle en A		$BC^2=AB^2+AC^2$
C'est le 1er janvier		Le lycée est fermé
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$		$ABDC$ est un parallélogramme
$AB=CD$		$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
$AB \neq CD$		$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$
Il existe k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$		A, B, C et D sont alignés
$\lvert x-3 \rvert \leq 5$		$x \in [2 ; 8]$
$a = \sqrt{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$		$a^2 = b$, $a \geq 0$, $b \geq 0$

Exercice 9 : Les trinômes (d'après Odyssée 1ère)

Ces exercices prolongent la notion de trinôme vue en 2nde et interviennent tôt dans l'année. Ils demandent une bonne compréhension des notions mais certaines questions peuvent être justifiées graphiquement (ex1) alors que d'autres nécessitent un recours aux démonstrations du cours et aux formules (ex2 question 2).

Enoncé 1

On considère un trinôme $f(x)= ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ et son discriminant Δ. **P** désigne sa représentation graphique. Dire si les implications sont vraies. Qu'en est-il de leur réciproque ?

1. Si pour tout réel x , $ax^2+bx+c\leq 0$ alors $\Delta<0$.
2. Si a et c sont de signes opposés, le trinôme a des racines.
3. Si f a des racines opposées alors $b=0$.
4. Si le sommet de **P** est sur l'axe des ordonnées, alors $b=0$.
5. Si $c=0$ alors l'équation $f(x)=0$ possède au moins une solution.
6. f admet une racine double donc $f(x)\geq 0$ pour tout x.
7. f admet 2 et 3 comme racines donc sa forme factorisée est $(x-2)(x-3)$.
8. S'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1)f(x_2)<0$, alors $\Delta>0$.

Enoncé 2

On considère un trinôme $f(x)= ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

(P_1) : "Si $ac<0$, alors l'équation $f(x)=0$ a deux solutions distinctes."

1. La proposition (P_1) est-elle vraie ? Justifier.
2. a) Enoncer la contraposée (P_2) de (P_1) .
   b) La proposition (P_2) est-elle vraie ? Justifier.
3. a) Enoncer la réciproque (P_3) de la proposition (P_1).
   b) (P_3) est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 10 : avec les fonctions (d'après Hyperbole 1ère)

Dans chaque cas dire si les propositions P et Q sont équivalentes ; justifier.

1. x et y désignent des réels.

a) P : "$x=y$" Q : "$|x|=|y|$"

b) P : "$x=y$" Q : "$x^3=y^3$".

2. x et y désignent des réels positifs.

a) P : "$x=y$" Q : "$\sqrt{x}=\sqrt{y}$"

b) P : "$x=y$" Q : "$x^2=y^2$".

3. x et y désignent des réels non nuls.

a) P : "$x=y$" Q : "$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$"

b) P : "$x=y$" Q : "$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}$".

4. f et g sont des fonctions définies sur un intervalle I.

a) P : "f et g sont croissantes sur I." Q : "$f+g$ est croissante sur I."

b) P : "f et g sont monotones sur I." Q : "$f+g$ est monotone sur I."

c) P : "f et g sont croissantes sur I." Q : "fg est croissante sur I."

Classe de Tale REINVESTISSEMENT

Exercice 11 : transversal pour réinvestir les notions de 1ère

Compléter le tableau avec les symboles $\Rightarrow$; $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$

$x = \dfrac{\pi}{3}$		$\cos x = \dfrac{1}{2}$
$(\overline{AB}, \overline{AC}) = k\pi$, k entier relatif		A, B, C alignés
$Cos(x)=1$		$sin(2x)=2sinx$
$x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, k entier relatif		$sinx=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(d) $ax+by+c=0$ (d') $a'x+b'y+c'=0$ sont strictement parallèles		$ab'-a'b=0$
Pour tout x, $f(x)=g(x)$		Pour tout x, $f'(x)=g'(x)$
$u_n=f(n)$ pour tout n et f croissante sur R		(u_n) croissante
$\vec{u}.\vec{v} = 0$		$\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
$\vec{u} = 2\vec{v}$		$\vec{u}^2 = 4\vec{v}^2$
M orthocentre de ABC triangle		M est sur la hauteur issue de A
$x \geq Q_3$, x réel et Q_3 3ème quartile d'une série		Moins de 25% des données sont supérieures à x
Les valeurs prises par une variable aléatoire sont négatives		$E(X) \leq 0$

CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES

Classe de 2nde DECOUVERTE

On peut commencer par cet exercice et/ou l'activité découverte proposée dans le doc CNS en 1ère.

Exercice 12 : Inéquations et carrés (d'après π *xel* 2nde et Belin ancienne édition 2nde)

On s'intéresse à la condition $x^2 > 4$. On dresse une liste de 5 propositions :

1. $x > 3$ 2. $x > 1{,}9$ 3. $x < -10$ 4. $x < -3$ ou $x > 3$ 5. $x < -2$ ou $x > 2$

a) L'implication $(1) \Rightarrow x^2 > 4$ est-elle vraie ?

b) Dresser la liste des implications du type .....$\Rightarrow x^2 > 4$ qui sont vraies.

c) Dresser la liste des implications du type $x^2 > 4 \Rightarrow$ .....qui sont vraies.

2. Conditions nécessaires –suffisantes :

Ex: $x > 3$ implique $x^2 > 4$:

a) On dit que $x > 3$ est une condition suffisante pour que $x^2 > 4$. Cette condition n'est pas néces : par exemple $x > 2{,}5$ convient aussi.

Indiquer si chacune des conditions est suffisante pour que $x^2 > 4$:

$x > 100$ $x > 10^6$ $x > 1{,}9$ $x < -2$ $x < -2$ ou $x > 2$ $x < -10$

$x < -2{,}1$ $x < -3$ ou $x > 3$ $x < 0$ $x < -1$.

b) Parmi celles qui sont suffisantes, indiquer celle qui est également nécessaire.

.

Classe de 2nde REINVESTISSEMENT

Exercice 13 Géométrie (d'après Hyperbole 2nde)

Sur un forum mathématique, P31415 a posé la question suivante :

" Pour demain, je dois faire un exercice où on me demande de démontrer que ABCD est un parallélogr ne sais pas comment m'y prendre."

Prof répond : " Connais-tu une condition suffisante pour que ABCD soit un parallélogramme ? "

P31415 : "Non!"

M271 : " $\overline{AB} = \overline{DC}$ "

X007 : " AB = DC "

Z97910 : " $\overline{AB}$ et $\overline{DC}$ colinéaires "

GNI : "(AB) et (BC) parallèles "

$E = MC^2$ " $\overline{AD} = \overline{BC}$ "

A000 : "AC = AB + AD "

1. a) Parmi ces conditions, certaines sont effectivement suffisantes. Lesquelles ?
   b) En proposer d'autres.
2. a) Parmi les conditions ci-dessus certaines ne sont que nécessaires. Lesquelles?
   b) En proposer d'autres.

Classe de 1ère REINVESTISSEMENT

Exercice 14 : Activité transversale qui se prête à une synthèse

DECOUVERTE *Activité pour les 1ères et pouvant être adaptée pour les 2nde selon le niveau de la classe (en changeant les thèmes des questions de 2))*

I. Au carrefour des langages mathématiques et français

1. Notion de condition nécessaire (notée CN).

Observons la phrase : "Il me faut des œufs pour faire un quatre-quart".

- Que se passe-t-il si j'ai des œufs ?

Les œufs ne suffisent pas.

- Que se passe-t-il si je n'ai pas d'œufs ?

Les œufs sont nécessaires mais pas suffisants.

- Lien entre les propositions : quatre-quart$\Rightarrow$ œufs.

2. Notion de condition suffisante (notée CS)

Observons la phrase : "Il suffit de mettre de la levure pour que la pâte lève".

- Que se passe-t-il si je mets de la levure ?
- Que se passe-t-il si je n'en mets pas ? (***elle peut ne pas lever ou lever quand même si bien aérée)***

La levure n'est pas nécessaire mais elle est suffisante.

- Lien entre les propositions : levure$\Rightarrow$ pâte lève.

II. Travail sur la formulation.

1. Etude à partir de situations bien connues : le parallélogramme et le trinôme.

- Soit deux propositions : p : le quadrilatère est un parallélogramme.
  q : les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu.

a) Souligner l'hypothèse dans chaque phrase. Identifier les CN, CS et CNS.

b) Noter dans le tableau les implications $p \Rightarrow q$ ou $q \Rightarrow p$ ou l'équivalence $p \Leftrightarrow q$.

Phrase	Relation logique
Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il est nécessaire que ses diagonales se coupent en leur milieu.	
Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.	
Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, est que ses diagonales se coupent en leur milieu.	
Une condition nécessaire pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, est que ses diagonales se coupent en leur milieu.	
Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.	

- Classer les propositions suivantes en CN, CS et CNS pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. Rajouter une condition pour obtenir des CNS.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ $\quad AB = CD$ $\quad \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\quad (AD) // (BC)$

- Classer les propositions suivantes en CN, CS et CNS pour qu' un trinôme admette au moins une racine.

$\Delta = 0$ $\quad \Delta \geq 0$

LES QUANTIFICATEURS

QUANTIFICATEURS ET EGALITES/ QUANTIFICATEUR ET IMPLICATIONS

Classe de 2^{nde}

Exercice 1: faire prendre conscience de l'existence des quantificateurs qui sont souvent implicites (Quantificateurs +statut du signe « = »)

Soit f la fonction définie sur R par :

$f(x) = x^2 + 4x - 9$

1. Montrer que $f(x) = (x+2)^2 - 13$
2. Résoudre $f(x) = 4x + 1$

Commentaires : c'est un exercice classique que l'on rencontre sur le chapitre des fonctions, mais les questions sont souvent mal comprises par les élèves, cela étant dû aux différents statuts du signe « = » et à l'implicite des quantificateurs. Il s'agit donc de rendre les élèves attentifs à ces quantificateurs. On pourrait par exemple leur proposer les précisions suivantes :

Dans l'énoncé : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 + 4x - 9$ « définie sur $\mathbb{R}$ » traduit que cette égalité est vraie pour tout nombre réel x

Question 1 : il s'agit de montrer que cette égalité est vraie pour tout réel$x$

Question 2 : on résout une équation c'est-à-dire on cherche les valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vérifiée, on cherche s'il existe des réels x tels que $f(x) = 4x + 1$

Exercice 2 : Comprendre la nécessité de quantifier

1. Dans le domaine géométrique :

A et B sont des points donnés du plan, Dans quel cas (conditions sur le point M) ces égalités sont-elles vraies ?

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

***Commentaires** : il s'agit de faire prendre conscience aux élèves qu'écrire des égalités sans préciser dans quel domaine elles sont vraies n'est pas significatif. Le sens de ces égalités varie en fonction de la quantification du point M.*

2. Dans le domaine algébrique (cet exercice se prête à une synthèse)

Ces égalités et inégalités sont-elles vraies ou fausses ? (extrait du Math'X ex 5 page 145)

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(x+1)^2 = x^2 + 1$

$2x + 3 > 4x - 5$

$x^2 < x + 3$

$x^2 + 1 > 0$

$x^2 \geq 0$

$x^2 > -3$

$x^2 \geq x - 2$

Commentaires :

*L'objectif est de lancer un débat sur la véracité de ces différentes assertions et ainsi il n'est pas précisé dans la question « **dans quels cas** ces égalités ou inégalités sont-elles vraies ou fausses »mais ce sera le bilan de ce questionnement. (voir exemple de synthèse sur quantificateurs)*

Il faudra attirer l'attention sur le fait qu'il y a souvent une infinité de réponses possibles et que souvent on cherche « la plus générale » mais que dans l'application on est parfois dans des cas plus restreint.(Ex : ensemble de définition de fonction qui n'est pas IR ....)

Exemple de synthèse sur les quantificateurs

<u>En seconde</u> : on pourrait écrire ce genre de bilan : (conf « irem d'Orléans : quelque éléments de logique mathématique »)

On considère les deux égalités suivantes dans lesquelles x est un nombre réel

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ (1)

$(x+1)^2 = x^2 + 1$ (2)

L'égalité (1) est connue depuis la 3ème comme une identité remarquable, on peut remarquer que **pour tout réel** x l'égalité (1) est vérifiée, dans ce cas on écrit :

« pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ »

« pour tout » est appelé **quantificateur universel** .

On peut penser que l'égalité (2) est fausse. Et pourtant pour $x = 0$, elle est vérifiée. Peut-on dire que l'égalité (2) est vraie ? Non, car pour $x = 1$, cette égalité n'est pas vérifiée. La phrase est vraie si on écrit :

« il existe un réel x , tel que $(x+1)^2 = x^2 + 1$ ».

« il existe » est appelé **quantificateur existentiel.**

Remarques : (conf maths repères 2nd)

- « il existe » signifie « il existe au moins un » ; « on peut choisir» peut remplacer « il existe »

On peut constater que la phrase « il existe un réel x , tel que $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ » est aussi vraie (elle est vérifiée pour $x = 1$ par exemple)

- « pour tout » se dit aussi « quel que soit » ou « étant donné »

Exercice 3 : Géométrie

Vrai ou faux

quadrilatère :

- Les parallélogrammes ont leurs diagonales qui se coupent en leur milieu
- il existe des parallélogrammes qui ont leurs diagonales perpendiculaires

équation de droite

- Toute droite a une équation de la forme : $y = ax + b$ avec a et b réels
- Il existe des droites qui ne sont pas des représentations graphiques de fonctions affines.

Commentaires : dans la première proposition « les parallélogrammes ... » le quantificateur universel est implicite ; c'est une difficulté supplémentaire pour les élèves qui pensent parfois que cette proposition est vraie pour certains parallélogrammes et est fausse pour d'autres.

Exercice 4 :

L'énoncé « Si un carré a son aire supérieure à 1alors la longueur du côté de ce carré est supérieure à 1 ? » est-il vrai ? L'implication « si $x^2 > 1$ alors $x > 1$ » est-elle vraie ? *ex 4 doc ressources 2nd*

Commentaires : il s'agit d'insister sur le cadre dans lequel on propose un énoncé. La même implication peut être vraie (énoncé 1) , fausse (énoncé 2) suivant le contexte de la proposition conditionnelle.

Classe de 1ère

Exercice 5 :
Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3}n - 1 pour\, n \leq 32 \\ n^2\, pour\, n > 32 \end{cases}$$

Voici trois égalités concernant la suite u ; sont-elles exactes ?

$u_2 - u_1 = \frac{1}{3}$

$u_{29} - u_{30} = \frac{1}{3}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}$

Commentaires : dans la dernière égalité, on ne donne volontairement pas de précision sur l'entier n afin de provoquer un débat. Cette suite est assez artificielle, on peut donc repousser ce questionnement au moment des variations de suite avec un exercice comme le suivant :
Soit la suite u définie pour tout entier n par : $u_n = -(n-20)^2 + 7$.
Voici quatre inégalités concernant la suite u ; sont-elles exactes ?

$u_2 - u_1 > 0$

$u_{29} - u_{30} < 0$

$u_{n+1} - u_n > 0$

$u_{n+1} - u_n < 0$

Cependant travailler l'idée que l'intuition peut s'avérer inexacte, qu'induire une proposition mathématique à partir des premiers termes d'une suite n'est pas une preuve mathématique est à mettre en place le plus rapidement possible.

Exercice 6 : question de compréhension des notions (extraits de Odyssée 1ère S et 1ère ES) vrai ou faux ?

1. Au sujet de la dérivation :
   a. Il existe une infinité de fonctions ayant comme fonction dérivée la fonction constante définie sur **R** par $f(x) = 5$
   b. Soit f et g des fonctions définies sur **R** par $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ et $g(x) = (x-2)^2(x-1)$. Il existe un nombre réel a pour lequel les nombres dérivés de f et g en a sont les mêmes.
2. Au sujet des suites :
   a. Toute suite décroissante converge
   b. Toute suite croissante est positive
3. Au sujet de la trigonométrie :
   a. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, il existe un entier relatif k tel que : $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = -(\vec{v}\,;\,\vec{u}) + 2k\pi$
   b. Pour tous nombres réels non nuls α et β et pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\alpha\vec{u}\,;\,\beta\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + 2k\pi$

Commentaires : ces questions sont à proposer au fur et à mesure des chapitres et non en une fois (il est spécifié dans les programmes que les notions de logique doivent être abordées en situation), ces questions permettent une meilleure compréhension des notions en jeu.

Exercice 7 : raisonnement par récurrence

Propriété : pour tout entier n, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$

Vérifier que cette propriété est héréditaire.

Cette propriété est-elle vraie pour tout entier n ?

Existe-t-il des valeurs de n pour laquelle cette propriété est vraie ?

I.

LA NEGATION D'UNE PROPRIETE AVEC QUANTIFICATEURS

Classe de 2nde

Exercice 8 : raisonner avec l'évènement contraire

1. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Ecrire l'évènement contraire de l'évènement suivant : « Obtenir un trèfle » .
2. On tire une main au hasard dans un jeu de 32 cartes. Ecrire l'évènement contraire des évènements suivants :
   « obtenir au moins un as » ;
   « obtenir au plus deux as » ;
   « obtenir plus que deux as » ;
   « obtenir moins de trois as »
3. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Ecrire l'évènement contraire des évènements suivants obtenir « un trèfle et un roi » ; «obtenir un roi ou une dame » ;
4. Quelle est la condition contraire de « tous les murs de la pièce sont blancs »
5. On tire une main au hasard dans un jeu de 32 cartes. L'évènement contraire de l'évènement « toutes les cartes de la main sont des as » est-il « aucune carte n'est un as » ou « au moins une carte n'est pas un as »

Commentaires : l'évènement contraire de l'évènement A est la négation de A.
Dans la question 1) on s'intéresse à la négation de A : « non A » ; les élèves formuleront cet évènement contraire de deux manières : « ne pas obtenir de trèfle » et « obtenir un carreau ou un pic ou un cœur ». Il s'agit de ne pas accepter la première formulation car les élèves prennent la phrase comme un tout et se contentent de mettre « ne pas » devant ; il faut donc exiger que l'événement soit toujours exprimé sous la forme « obtenir… ».

Dans la question 2) la difficulté réside en la compréhension de « au moins un » et « au plus » et la distinction avec « moins de » et « plus de »
Dans la question 3) on s'intéresse à la négation de « A ou B » qui est « non A et non B » ; il est plus simple de déterminer l'évènement contraire de « A et B » que de « A ou B ».
Dans les questions 4) et 5) on va à l'encontre de l'intuition. Le côté visuel de la question 4) aide à la compréhension de cette négation.

LES ENSEMBLES ET LEURS RELATIONS

Classe de 2^{nde}

ENSEMBLES , SOUS-ENSEMBLES, APPARTENANCE, INCLUSION

Exercice 1 : (d'après Repère 2^{nde})

Vrai ou Faux ?

$\left\{-2;3;\frac{10}{3}\right\} \subset \square$

$\left\{-2;3;\frac{12}{3}\right\} \subset \square$

$\left\{-2;\sqrt{2};\sqrt{9}\right\} \subset \square$

$\left\{-6;2;10^{-10}\right\} \subset \square$

$\left\{-2;\sqrt{9};\pi\right\} \subset \square$

$\left\{-\frac{11}{8};-2;\sqrt{121}\right\} \subset \square$

$\left\{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1);10^{10}\right\} \subset \square$

$\left\{2;\frac{10}{2};\sqrt{9}\right\} \subset \square$

Exercice 2 : équations équivalentes

Deux équations ou inéquations équivalentes ont le même ensemble de solutions.

1 . On donne les équations $x^2 = 3x$ et $2x-6=0$.

a) Donner sans calcul l'ensemble des solutions (notés respectivement E et F) de ces équations.

b) Choisir la bonne affirmation : $E \subset F$ ou $F \subset E$ ou E=F ?

2. On donne les inéquations $x \geq 5$ et $-2x \geq -10$. Trouver un nombre x solution de l'une mais pas de l'autre. Ces inéquations sont-elles équivalentes ?

3. a) Peut-on écrire « $x^2 - 3x = x(2x-6)$ » pour tout x ? Justifier.

b) Montrer que les équations $x^2 - 3x = 0$ et $x(2x-6)=0$ sont équivalentes.

Exercice 3 : cercle, propriété caractéristique (d'après document ressource logique et raisonnement)

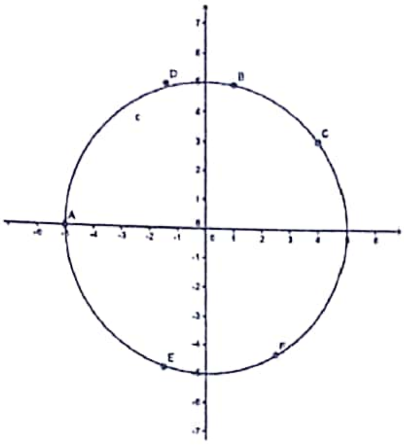
Autour de l'exemple 1

Activité autour de deux points du programme :
- propriété caractéristique
- appartenance à en ensemble.

Observation – conjecture :

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, placer les points A (-5; 0), B(1 ; 4,9), C(4 ; 3), D($-\sqrt{2}$; $3,5\sqrt{2}$), E($-\frac{3}{2}$; $-\frac{24}{5}$) et F(2,5 ; -4,3).

Quelle conjecture peut-on faire sur ces points ?



Réponse attendue : ils sont sur un cercle de centre O et de rayon 5 ; on trace alors le cercle, zoom, D et E semblent ne pas être sur le cercle, les autres points semblent bien sur le cercle.

Vérification de la conjecture.

2.a. Comment vérifier un point M est sur ce cercle ?

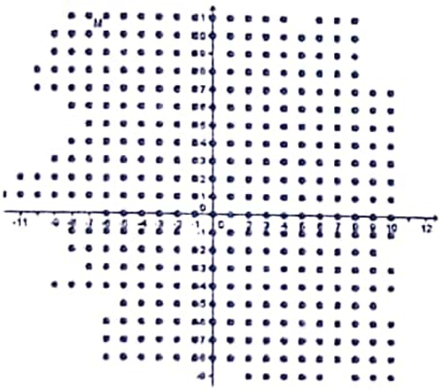
Réponse attendue : OM = 5 notion de distance

Quelle condition doivent vérifier les coordonnées x et y du point M pour qu'il appartienne à (C)?

Réponse attendue : $\sqrt{x^2+y^2}=5$ *ou* $x^2+y^2=25$

b. Pour chacun des points A, B, C, D, E et F, valider ou invalider la conjecture

Réponse attendue A et C appartiennent au cercle, B, D, E, F n'appartiennent pas au cercle.



Soit (O,I,J) un repère orthonormé. On considère les points suivants :

A(1;0) ; B(0;0) ; $C\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right)$; D(100;-148) ; $E\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$ F(3;-3)

a. Parmi ces points quels sont ceux dont les coordonnées vérifient la relation suivante : 3x+2y-3=0

b. Les coordonnées des points vérifient-ils les relations suivantes ?

$y=-\frac{3x-3}{2}$; $x=-\frac{2}{3}$; $y=-\frac{3}{4}x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{7}{4}x$

c. Vérifier par un calcul algébrique que la relation a est équivalente à une des relations du b.

d. On a représenté les points à coordonnées entières qui vérifient l'équation du a. Que peut-on conjecturer sur la nature de la courbe défini en a ?

INTERSECTION, REUNION, ET/OU, CONTRAIRE

Exercice 4 : exercice transversal sur réunion et intersection

1. a) Vrai ou Faux : le nombre $\sqrt{2}$ appartient à l'ensemble L $=(I \cap J) \cup K$

où I =]1 ;7[J =]4 ; 9,5[et K =]$-\infty$; 2]

b) Ecrire plus simplement tous les nombres de l'ensemble L.

2. L'univers d'une expérience est constitué des cartes d'un jeu de 32 cartes.

a) Vrai ou Faux : l'issue « roi de trèfle » appartient à l'événement S = $(N \cap R) \cup P$

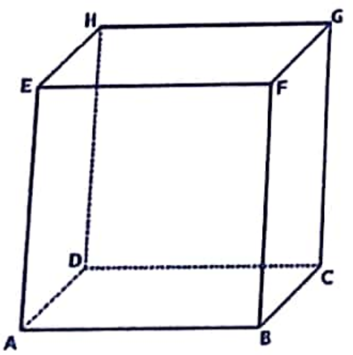
où N est l'événement « la carte est noire »,

R est l'événement « la carte est un roi » et P est l'événement la carte est un pique.

b) Ecrire toutes les issues de l'ensemble S.

3. ABCDEFGH est un cube

a) Vrai ou Faux : le point E appartient à l'ensemble X $=(U \cap V) \cup W$



où U désigne la face EFGH, V désigne la face HGCD et W désigne le segment [HG].

b) Mettre en couleur les points de l'ensemble X.

Exercice 5 : probabilités ; et/ou ; algorithmique

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie et on s'intéresse à l'événement « il y a exactement deux lancers consécutifs égaux ».

Compléter l'algorithme suivant pour qu'il simule 100 fois l'expérience et détermine la fréquence de l'événement A :

variables : I, L1, L2, L3, A

traitement : A prend la valeur 0

pour i de 1 à 100

L1 nombre au hasard dans l'ensemble {0 ;1}

L2 nombre au hasard dans l'ensemble {0 ;1}

L3 nombre au hasard dans l'ensemble {0 ;1}

Si ……………………………………………………alors

A prend la valeur A+1

sortie : Afficher A/100

Exercice 6 : négation de propriétés pour la fonction carré :

Formuler la négation des propositions suivantes :

« cet objet vérifie les propriétés A et la propriété B »

« cet objet vérifie la propriété A ou la propriété B »

Montrer que les propositions suivantes ne sont pas vraies :

1. La fonction carré est croissante et positive sur □

2. La fonction carré est croissante ou négative sur $]-\infty; 0[$.

Classe de $1^{ère}$

ENSEMBLES , SOUS-ENSEMBLES, APPARTENANCE, INCLUSION

Exercice 7: équations de droites et cercles comme propriétés caractéristiques

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle C de centre A(–3 ;5) et de rayon 4 et la droite D d'équation $y=-x$.

Ecrire un algorithme qui permettrait de savoir si un point M(x ;y) est un point de D ou un point de C, ou même un point d'intersection de C et D.

INTERSECTION, REUNION, ET/OU, CONTRAIRE

Exercice 8 : Inéquations et trigonométrie :

1°) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi\ ;\pi]$ les inéquations :

a) $1-2\sin(x)\geq 0$ b) $\sqrt{3}+2\cos(x)\geq 0$

2°) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi\ ;\pi]$ l'inéquation suivante et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

$$(1-2\sin(x))(\sqrt{3}+2\cos(x))\geq 0$$

Exercice 9 : négation de propriétés et suites :

Formuler la négation des propositions suivantes :

« cet objet vérifie les propriétés A et propriété B »

« cet objet vérifie la propriété A ou la propriété B »

Montrer que les propositions suivantes **ne sont pas vraies** :

1. La suite définie pour tout $n\geq 0$ par $u_n=(2n-9)^2$ est bornée.
2. La suite définie pour tout $n\geq 0$ par $u_n=(2n-9)^2$ est monotone.

Classe de Tale

ENSEMBLES , SOUS-ENSEMBLES, APPARTENANCE, INCLUSION

Exercice 10: Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par une fonction continue

Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2+1$.

a) Comparer $f(-3)$ et $f(2)$.

b) Que peut-on dire des intervalles $f([-3;2])$ et $[f(2);f(-3)]$?

c) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=4$ dans l'intervalle [-3 ;2] ?

INTERSECTION, REUNION, ET/OU, CONTRAIRE

Exercice 11 : Le théorème du toit

Soit P et P' deux plans **sécants** tels que D droite de P est parallèle à D' droite de P' (on suppose D et D' **distinctes**)

a) Si la droite Δ d'intersection de P avec P' est parallèle à D, que peut-on en conclure pour D'?

b) Si cette droite Δ est sécante à D en un point M, montrer que ce point M appartient aussi à P' et en déduire que P et P' sont confondus.

Enoncer le théorème du toit.

Exercice 12 : suites et algorithmes

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$ pour tout $n\geq 0$.

Compléter l'algorithme suivant pour qu'il donne (pour u_0 fixé) la plus petite valeur de n pour laquelle $5,9 < u_n < 6,1$

u nombre réel , n entier

n prend la valeur ….

u prend la valeur …..

Tant que ……………………………………

n prend la valeur ……..

u prend la valeur ………

Afficher n

DIFFERENTS TYPES DE RAISONNEMENTS

Classe de 2nde

LE CONTRE-EXEMPLE

Exercice 1 : Fonctions : tableaux de signes ou de variations (d'après Odyssée 2nde)

1) On donne le tableau de signes d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-8\ ;\ 7]$:

x	-8		-3		4		7
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

a. Donner, sur l'intervalle $[-8\ ;\ 7]$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.
b. Cédric affirme que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions. Élodie lui répond qu'on ne peut pas savoir. Qui a raison ? Justifier.

2) **Vrai ou faux ?**
À partir du tableau de variations de la fonction f, indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas répondre.

x	-4		-1		0		3
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4

a. L'image par f de 1 est 0.
b. L'image par f de 1 est -4.
c. L'image par f de -4 est 1.
d. Le nombre 0 n'a pas d'antécédent par f.
e. Le nombre 1 a deux antécédents par f.
f. Le nombre $f(2,5)$ est négatif.

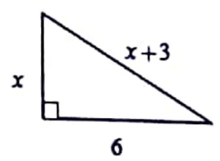
3) **Vrai ou faux ?**
Si $x \leq 3$, alors $x^2 \leq 9$

PAR CONTRAPOSEE

Exercice 2 : Thm de Pythagore

b) On considère un triangle dont les longueurs des côtés sont respectivement 53, 28 et 45. S'agit-il d'un triangle rectangle ?

c) On considère un triangle dont les longueurs des côtés sont respectivement 56, 30 et 47. S'agit-il d'un triangle rectangle ?



Calculer x.

d)

e) Dans un repère orthonormé, on donne les points M(3; -2), N(-2; -3) et P(-4; 3). Le triangle MNP est-il rectangle ?

Dans chaque cas : Utilise-t-on le théorème de Pythagore, sa réciproque ou sa contraposée pour répondre ?

Exercice 3 : Exercice en français

1. On dispose de 2 jetons :
Le jeton n°1 a une face verte et une face rouge.
Le jeton n°2 a une face blanche et une face noire.
On choisit au hasard un jeton et on le pose à plat sur la table. Pour chacun des cas suivants indiquer si la conclusion est juste ou fausse :
   a) On voit que la face est rouge donc on a choisi le jeton n°1. (juste, utilise l'implication)
   b) La face visible n'est pas rouge, donc on n'a pas choisi le jeton n°1 (faux, par contre-ex, la face pourrait être verte).
   c) On n'a pas choisi le jeton n°1, donc la face visible n'est pas rouge (juste, le raisonnement utilise pour justifier le même argument que a) : c'est la contraposée de l'implication a), vraie en même temps).

2. Voici 3 affirmations vraies.
   a) Les araignées sont des arachnides.
   b) Les scorpions sont des arachnides.
   c) Les arachnides subissent des mues.

Voici 3 raisonnements ; dire s'ils sont vrais ou faux en précisant la propriété utilisée.
- cet animal subit une mue donc c'est un arachnide.
- cet animal est une araignée donc il subit une mue.
- cet animal subit une mue et est une arachnide donc c'est une araignée.
- cet animal ne subit pas de mue donc ce n'est pas une arachnide. *(utilise la contraposée de c).*

DISJONCTION DES CAS

Exercice 4 : Chercher un nombre dont le carré est 7.

But :
Convaincre les élèves qu'il n'existe pas de nombre décimal dont le carré est 7 (autrement dit : $\sqrt{7}$ n'est pas décimal).

Idées de la preuve :
Il s'agit de démontrer qu'*aucun nombre décimal élevé au carré n'est égal à 7.*
Supposons qu'un tel nombre existe :

Comme $2^2=4$ et $3^2=9$, le nombre décimal cherché est strictement compris entre 2 et 3 . En particulier ce n'est pas un nombre entier.

On peut ensuite utiliser un tableau semblable au tableau ci-dessous,

Dernier chiffre de a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de a^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Quel que soit le dernier chiffre du nombre décimal cherché, le dernier chiffre de son carré ne sera jamais

7. Or le dernier chiffre de 7 est 7, donc aucun nombre décimal n'a pour carré 7. (on utilise aussi un raisonnement par l'absurde)

Exercice 5 : Parité de $n^2 + n$

Question ouverte : Que peut-on dire de la parité de n^2+n pour n nombre entier naturel ?

Commentaire : tous les élèves peuvent facilement entrer dans le problème en faisant des essais et en faisant une conjecture.

Pour la démonstration, on pourra raisonner par disjonction de cas.

Exercice 6 : Variations et signe de f(x) (d'après Odyssée 2^{nde})

Une fonction f est définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$. Elle est décroissante sur $[-4\ ;\ 1]$ puis croissante sur $[1\ ;\ 4]$. On sait de plus que $f(1) = 0$.

Démontrer que, pour tout $x \in [-4\ ;\ 4]$, $f(x) \geq 0$.

Exercice 7 : Démonstration : équation d'une droite

Dans le cours : Propriété : Toute droite du plan a une équation soit de la forme « x=c » soit de la forme « y=mx+p »

Démo par disjonction des cas

Exercice 8 : Géométrie dans

On se propose de démontrer le théorème suivant :

"si d et Δ sont deux droites parallèles et si d est contenue dans un plan P, alors Δ est parallèle à P."

1. Cas où Δ est incluse dans P. Conclure.
2. Cas où Δ n'est pas incluse dans P.
   On note L le plan contenant d et Δ.
   a) Faire une figure. Quelle est l'intersection de P et L ?
   b) On raisonne maintenant par l'absurde et on suppose pour cela que Δ n'est pas parallèle à P. Δ et P se couperaient alors en un point M. Pourquoi M appartiendrait-il à la droite d ? Où est la contradiction ? Conclure.

l'espace (d'après Hyperbole 2^{nde})

Dans cet exercice, on utilise aussi un raisonnement par l'absurde.

RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Voir exercices 4 et 8 ci-dessus (dans lesquels on utilise un raisonnement par disjonction de cas et un raisonnement par l'absurde)

Exercice 9 : Géométrie dans l'espace (Source : Odyssée seconde p 239)

ÉNONCÉ

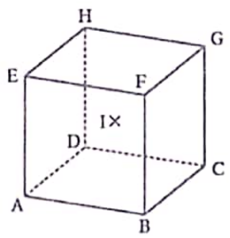
ABCDEFGH est un cube de côté 5 cm.

I est le milieu de [HB].

a. Donner la longueur de la diagonale d'une face du cube.

b. Dessiner en vraie grandeur le quadrilatère BCHE et le triangle ACH.

c. Le point I appartient-il aux plans de ces deux polygones ? Justifier.



Elément de solution

c. Le point I est le milieu de [HB], donc il est dans le même plan que le rectangle BCHE.
En revanche, si I était dans le plan du triangle ACH, alors toute la droite (HI) serait dans ce plan et donc le point B aussi car B ∈ [HI]. Or A, B et C sont dans la face du dessous mais pas H, donc ces points ne peuvent être dans un même plan.
On a donc une contradiction. On en déduit que le point I n'est pas dans un même plan que le triangle ACH.

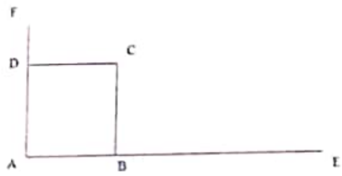
c. Pour montrer qu'un point appartient à un plan, on peut montrer qu'il appartient à une droite de ce plan.
Pour montrer qu'un point n'appartient pas à un plan, on peut raisonner par l'absurde*.

Exercice 10 : Points alignés

Construire la figure ci-dessous où
- A, D et F sont alignés
- A, B et E sont alignés
- ABCD est un carré de côté 8 cm
- DF = 5 cm et BE = 13 cm

Les points F, C et E sont-ils alignés ? Expliquer.

Commentaires : de nombreuses méthodes peuvent être utilisées pour résoudre ce problème :
- *Repérage et vecteurs colinéaires.*
- *On peut raisonner par les aires.*
- *On peut utiliser la trigonométrie de collège.*
- *On peut montrer que $EF \neq FC + CE$*
- *En raisonnant par l'absurde : si les points étaient alignés, on pourrait utiliser le thm de Thalès et on aurait l'égalité des quotients mais cette égalité est fausse.*

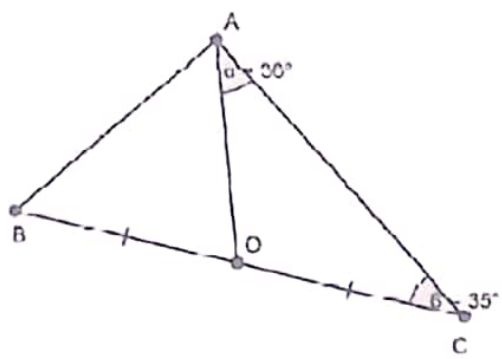


Exercice 11 : Propriétés de triangles

(d'après : document d'accompagnement du collège : raisonnement et démonstration)

Si A' est le symétrique de A par rapport à O, le quadrilatère ABA'C est-il rectangle ?

(si c'était un rectangle, AOC serait isocèle et les angles à la base seraient égaux).



Exercice 12 : Egalité impossible : recherche d'antécédents

Montrer que pour tout réel x différent de -2, $\frac{x+1}{x+2}$ est différent de 1.

Classe de 1ère

LE CONTRE-EXEMPLE

Exercice 13 : Nombre dérivé et tangentes

V ou F :

Toute fonction f définie sur ℝ de courbe représentative Cf dans un repère orthonormé du plan est telle que :

a) si Cf admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 alors $f(1)=0$.

b) si Cf admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 alors la fonction f admet un extremum local en 1.

c) si Cf admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 alors Cf ne coupe la droite d'équation $y=f(1)$ qu'en un seul point.

d) si Cf admet une tangente au point d'abscisse 1 parallèle à la droite D d'équation $y=-x+1$ alors $f'(1)=-1$.

Exercice 14 : Variations de suites

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en entourant VRAI *ou* FAUX *et justifier la réponse choisie. (Une réponse fausse sera justifiée par un contre-exemple.)*

1) (u_n) est une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si cette suite est croissante, alors
a) on est sûr que tous ses termes sont positifs.
b) on est sûr qu'au moins à partir d'un certain rang, $u_n > 0$.

2) (u_n) est une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si cette suite est décroissante, alors
a) il est possible que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1} \geq 0$.

3) (u_n) est une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $u_0 = 5$; $u_1 = 8$; $u_2 = 11$; $u_3 = 14$.
a) On peut affirmer que cette suite est arithmétique
b) On peut affirmer que cette suite est croissante.
c) Cette suite peut-être décroissante.

4) f est une fonction définie et croissante sur $[0 ; +\infty[$.
(u_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
On peut affirmer que la suite (u_n) est croissante.

5) f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$.
La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ est croissante.
On peut affirmer que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

PAR CONTRAPOSEE

Exercice 15 : Signe d'une fonction trinôme et signe de delta (d'après Odyssée 1ère S)

La fonction f est un trinôme du second degré de discriminant Δ.

On considère la proposition (P_1) suivante : « S'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1)f(x_2) < 0$, alors $\Delta > 0$ ».

1) Enoncer la contraposée (P_2) de la proposition (P_1). La proposition (P_2) est-elle vraie ? Justifier.
2) La proposition (P_1) est-elle vraie ? Justifier.
3) Enoncer la réciproque (P_3) de la proposition (P_1). La proposition (P_3) est-elle vraie ? Justifier.

Commentaire :

- *Il faut que les élèves sachent, avant de faire cet exercice, qu'une proposition et sa contraposée ont même valeur de vérité.*
- *Elément de réponse :*
  1) *D'après le cours, si Δ est négatif, le signe du trinôme f est constant. On a bien : pour tous réels x_1 et x_2,* $f(x_1)f(x_2) \geqslant 0$. *La proposition (P2) est vraie.*
  2) *Sa contraposée étant vraie, la proposition (P1) est vraie.*
  3) *La proposition (P3) est vraie. Le tableau de signe du trinôme dans le cas où $\Delta > 0$ le prouve.*

Exercice 16 : Fonction racine carrée (variations) (voir par exemple Transmath 1ère S)

But de l'exercice : démontrer que la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
(cela revient à démontrer que si a et b sont deux nombres tels que $0 \leq a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$)

a) Exprimer la négation de la conclusion.
b) Utiliser alors une propriété de la fonction carrée sur $[0\,;+\infty[$ pour conclure.

DISJONCTION DES CAS

Exercice 17 : thm : résolution d'une équation du second degré

Dans le cours

Exercice 18 : équations avec paramètres

- Donner, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ (m est un nombre réel)

Exercice 19 : L'équation $\sqrt{x} = a$

- Donner, suivant les valeurs de a, le nombre de solutions de l'équation $\sqrt{x} = a$.
-

Exercice 20 : expression du produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$= \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exercice 21 : Une suite périodique (d'après Déclic 1ère S)
Un phénomène périodique
On considère la suite u définie sur ℕ par $u_0=3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n}$.

On souhaite calculer le 1000ème terme de cette suite.

A) En utilisant un tableur, calculer les premiers termes de la suite. Emettre une conjecture.
B) Démontrer que pour tout entier n, $u_{n+2}=u_n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis répondre à la question posée.

(c'est pour trouver l'expression de u_n en fonction de n que l'on distinguera le cas « n pair » et « n impair »).

-
-

RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Exercice 22 : Non dérivabilité

Partie A
f est la fonction définie sur $[0 ;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$.
f est le produit des fonctions u et v définies sur $[0 ;+\infty[$ par $u(x) = x$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

1) La fonction u est-elle dérivable en 0 ? La fonction v est-elle dérivable en 0 ?
2) Etudier la dérivabilité de f en 0.
3) Un élève affirme « Un produit uv peut être dérivable en a bien que v ne soit pas dérivable en a. » Qu'en pensez-vous ?

Conclusion :
La condition « u et v sont dérivables en a » est une **condition suffisante** pour que le produit uv soit dérivable en a mais ce n'est pas une **condition nécessaire**.

Partie B
En utilisant le fait que la fonction définie sur $[0 ;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$ est dérivable en 0 et un **raisonnement par l'absurde**, montrer que la fonction $g : x \to (x+1)\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 23 : Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Classe de Tale

LE CONTRE-EXEMPLE

Exercice 24 : probabilités
Une urne contient des boules numérotées de 1 à n, réparties de la façon suivante : pour tout entier k, compris entre 1 et n, l'urne contient k boules portant le numéro k.
On tire au hasard une boule dans l'urne et on note X le numéro obtenu.
V ou F : si n est pair, alors P(X est pair) = $\frac{1}{2}$

Exercice 25 : Continuité
Cf cours sur la continuité ci-dessus (exercice 24)

Exercice 26 : Dérivation et extremum

Dans le cours

Théorème :
f étant une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** (par exemple $]a;b[$, $]a\,;+\infty[$, ...) admettant en c un extremum local, alors $f'(c)=0$.(fig1)

Attention
- ce résultat n'est pas toujours vrai pour un intervalle non ouvert (fig2)
- Si $f'(c) = 0$, il n'y a pas toujours d'extremum en c (fig3)

Figure 1

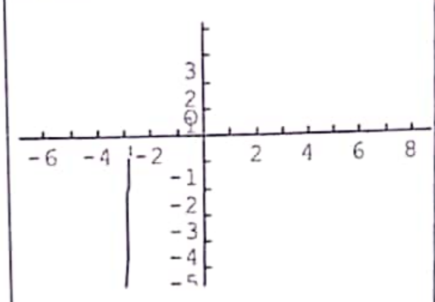


Figure 2

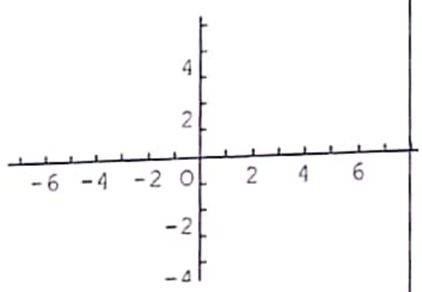
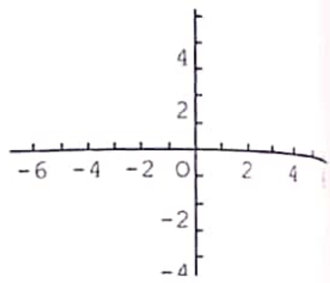


Figure 3



PAR CONTRAPOSEE

Exercice 27 : Fonction non dérivable donc non continue
La fonction …. est-elle dérivable ?? Non parce qu'elle n'est pas continue (contraposée du théorème : dérivable -> continue)

Extrait cours « continuité »
Théorème :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Conséquence : si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur I.
Pour démontrer qu'une fonction est continue en a, on peut démontrer qu'elle est dérivable en a.

Remarque : La réciproque de cette propriété est fausse. Une fonction continue en a n'est pas nécessairement dérivable en a.
Illustrer par un contre -exemple

Une fonction non continue sur I ne peut pas être dérivable sur I (contraposée du théorème)

DISJONCTION DES CAS

Exercice 28 : arithmétique en spé TS

Exercice 29 : thm : résolution d'une équation du second degré (dans □)

LA DEMONSTRATION PAR RECURRENCE

Exercice 30 : Avec des suites
On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_1 = 0$ et telle que pour tout entier naturel n non nul $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

1) a. En utilisant un tableur, donner les 40 premiers termes de cette suite.

b. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(n;u_n)$.

c. En observant le nuage de points, quelles conjectures peut-on faire concernant le comportement de la suite (variations, convergence,...) ?

2) On cherche une formule qui permette de calculer u_n en fonction de n.

a. Compléter le tableau de valeurs en faisant figure le calcul de $\frac{1}{u_n-1}$ pour les 40 premiers termes de la suite (u_n).

b. Conjecturer l'expression explicite de u_n en fonction de n.

c. Démontrer la formule conjecturée ainsi que les résultats conjecturés à la question 1)c.

Exercice 31 : En probabilités

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n, réparties de la façon suivante : pour tout entier k, compris entre 1 et n, l'urne contient k boules portant le numéro k.

On tire au hasard une boule dans l'urne et on note X le numéro obtenu.

1) Démontrer que $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2) Calculer E(X).

Exercice 32 : fausses récurrences

Situation 1 : n'oublions pas le premier rang !

Propriété : pour tout entier n, $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$

Vérifier que cette propriété est héréditaire.
Cette propriété est-elle vraie pour tout entier n ?
Existe-t-il des valeurs de n pour laquelle cette propriété est vraie ?

Situation 2 : peut-on se fier aux intuitions ?
On place n points distincts sur un cercle de façon à ce qu'en les joignant 2 à 2, on n'obtienne jamais 3 segments concourants.
On s'intéresse au nombre u_n de régions délimitées à l'intérieur du cercle par les segments joignant n points.
Déterminer les 5 premières valeurs de u_n

II. Quelle relation entre n et u_n peut-on conjecturer à partir de ces valeurs ?

III. Cette relation est-elle vérifiée pour un nombre n quelconque de points ?

Chapitre1 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES REELLES

I)Fonctions numériques réels

1.- Définitions :

On appelle fonction numérique réelle toute application f d'une partie D de R dans R. L'ensemble D est appelé ensemble de définition de f. D est donc l'ensemble des réels x tels que f(x) existe

Exemples : Soient P et Q deux polynômes

-Si $f(x) = P(x)$; $D = IR$

-Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$; $D = \{x \in R / Q(x) \neq 0\}$

-Si $f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$; $D = \left\{x \in R / \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\right\}$

-Si $f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$; $D = \{x \in R / P(x) \geq 0\ ,\ Q(x) > 0\}$

-Si $f(x) = \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)}$; $D = \{x \in R / P(x) \geq 0$ et $Q(x)$

2.- Opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions.
On définit les fonctions
$f + g$; $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$; et fog par :

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $fog(x) = f[g(x)]$

3.- Courbe représentative d'une fonction

L'ensemble des points M (x ; y) du plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$ est appelé courbe représentative de f.

On le note en général (C_f) ou (C).

$C_f = \{M(x;y) / x \in D_f$ et $y = f(x)\} = \{M(x, f(x)/x$

Exemple : Soit $f(x) = x - \sqrt{x}$ et (C) la courbe représentative de f.
Considérons les points $M_1(0 ; 0)$, $M_2(1 ; 2)$, $M_3(-1 ; 0)$
$f(1)= 0$donc $M_1 \in (C)$ $f(1) \neq 2$ donc $M_2 \notin (C)$
$-1 \notin D_f$ donc $M_3 \notin (C)$

La relation y= f (x) est appelée **équation de la courbe *(C)*** dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4.- Parité

Une fonction f est paire si quel que soit $x \in D_f$, on a
$-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

- f est dite impaire si quel que soit $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère

5.- Symétrie :

Soient M(x ; y), M' (x' ; y') deux points du plan. M et M' sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si $y = y'$ et $x + x' = 2a$, donc si $y = y'$ et $x' = 2a - x$

La courbe représentative (C_f) d'une fonction f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si quel que soit $M(x;y) \in (C_f)$, son symétrique M'(2a-x ;y) appartient aussi à (C_f)

Comme $M \in (C_f)$, on a y =f(x), donc y= f(2a-x) pour tout $x \in D_f$

Ainsi :

(C_f) est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si quel que soit $x \in D_f$, f(2a-x)=f(x)
En remplaçant x par x+a, l'égalité s'écrit f(a-x) = f(a+x)

Cas particulier :
Si $a = 0$, on a f(-x)=f(-x), donc la fonction est paire et (ζ) est symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées (droite d'équation x=0)

Considérons deux points M(x ; y), M' (x' ; y') et un point S(a ;b).
M et M' sont symétriques par rapport à S si et seulement si $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{SM'}$.
M et M' sont donc symétriques par rapport à S si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a - x \\ b - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix}$$

Donc si et seulement si $\begin{cases} a - x = x' - a \\ b - y = y' - b \end{cases}$, ou $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

La courbe représentative d'une fonction f est donc symétrique par rapport à S(a,b) si quel que soit M(x,y) de cette courbe, son symétrique M'(x' ;y') appartient aussi à la courbe.
Donc si $M \in (\zeta_f)$ alors $M' \in (\zeta_f)$

C'est-à-dire si $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in D_f \end{cases}$ alors $\begin{cases} y' = f(x') \\ x' \in D_f \end{cases}$

Or $y' = 2b - y$ et $x' = 2a - x$
$y' = f(x') \Leftrightarrow 2b - y = f(2a - x)$

Comme y = f(x), on a,
(ζ_f) est symétrique par rapport à S(a, b), si et seulement si quel que soit $x \in D_f$, $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

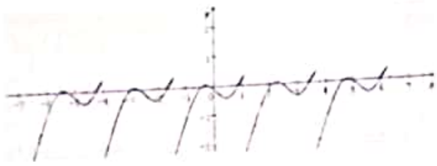
En remplacent x par a + x, cette égalité s'écrit : $f(a - x) + f(a + x) = 2b$
Si a = b = 0, S(0 ;0),et f(-x)+f(x)=0 c'est-à-dire f(-x)=-f(x) ; on a une fonction impaire.

6.- Périodicité

Une fonction f est dite **périodique** s'il existe un réel p tel que quelque soit $x \in D_f$, $(x + p) \in D_f$ et $f(x + p) = f(x)$. Le plus petit réel p strictement positif vérifiant cette propriété est appelé **la période de la fonction f**

On a, quel que soit $k \in \mathbb{Z}, f(x + kp) = f(x)$

Si on a une courbe représentative de f dans un intervalle de longueur p toute la courbe est obtenue par translation de vecteur $k.p.\vec{i}$



7.- Variation d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on appelle taux de variation de f entre x et x' de I, le réel $\tau_{xx'} = \dfrac{f(x) - f(x')}{x - x'}$

- On dit que f est **croissante** (respectivement strictement croissante) sur I si quels que soient x et x' de I tels que $x < x'$, on a $f(x) \leq f(x')$ (respectivement $f(x) < f(x')$)

- f est croissante sur I, si et seulement si quels que soient x et x' de I $\tau_{xx'} \geq 0$ (strictement croissante si $\tau_{xx'} > 0$)

- f est dite décroissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I) si et seulement quels que soient x et x' de I tels que $x < x'$ on a $f(x) \geq f(x')$ (respectivement $f(x) > f(x')$)

f est décroissante si et seulement si quels que soient x et x' de I $\tau_{xx'} \leq 0$ (strictement décroissante si $\tau_{xx'} < 0$)

f est dite monotone sur I si elle est soit décroissante sur I, soit croissante sur I.

Etudier les variations d'une fonction f, c'est subdiviser son domaine de définition, lorsque c'est possible, en un nombre fini d'intervalles sur chacun desquels f est monotone.

8.- Extremum local (ou relatif) :

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que :

f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant x_0 tel que quel que soit $x \in J$, $f(x) \geq f(x_0)$

f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant x_0 tel que quel que soit $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$

9.- Changement de repère :

On rappelle que l'équation d'une courbe *(C)* est la relation que vérifient les coordonnées des points de *(C)*. Soit *(C)* la courbe représentative d'une fonction f. $y = f(x)$ est donc l'équation de *(C)* dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Si M(x ;y) un point de *(C)*, alors $y = f(x)$. Soient $\Omega(x_0; y_0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ (où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non colinéaires) et soit $(X; Y)$ les coordonnées du point M dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. Nous avons :

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$

$\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

$\overrightarrow{O\Omega} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\vec{u} + Y\vec{v}$

$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X(a\vec{i} + b\vec{j}) + Y(c\vec{i} + d\vec{j})$

$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + Xa + Yc)\vec{i} + (y_0 + Xb + Yd)\vec{j}$

d'où $\begin{cases} x = x_0 + aX + cY \\ y = y_0 + bX + dY \end{cases}$ (formule de changement de repère)

Dans le cas où $\vec{u} = \vec{i}$ ou $\vec{v} = \vec{j}$ (c'est-à-dire a=1, b=0, c =0, d =1) les formules s'écrivent $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$. On a seulement un changement d'origine ou translation d'axes

Pour avoir l'équation de ***(C)*** dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ on porte les expressions X et Y dans l'équation $y = f(x)$

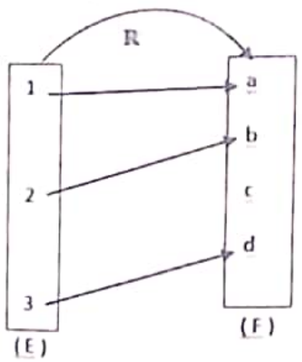
Soit $Y = F(X)$ l'équation de ***(C)*** dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

- Si F est paire l'axe des Y est un axe de symétrie et
- Si F est impaire, Ω est un centre de symétrie

Exemple : $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$

Soit (ζ_f) la courbe représentative de f dans $(O;\vec{i};\vec{j})$

Trouver l'équation de (ζ_f) dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où $\Omega(1,2)$ $\vec{u}(1,1)$ $\vec{v} = \vec{j}$



- Une application d'un ensemble (E) $\longrightarrow$(F) est surjective si chaque

Soit $M \in (\zeta_f)$ dont les coordonnées dans $(O;\vec{i};\vec{j})$ sont (x,y) et dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, (X ;Y)

La formule de changement de repère s'écrit $\begin{cases} x = 1 + 1X + 0Y \\ y = 2 + 1X + 1Y \end{cases}$ ou

$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = 2 + X + Y \end{cases}$ L'équation de (ζ_f) dans $(O;\vec{i};\vec{j})$ est $y = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$

$$2 + X + Y = 1 + X + 1 + \frac{1}{1 + X - 1}$$

$$2 + X + Y = X + 2 + \frac{1}{X}$$

$Y = \frac{1}{X}$ est l'équation de (ζ_f) dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

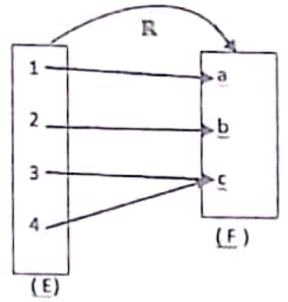
Chapitre 2 : Problèmes algébriques et numériques

I) Application injective, surjective et bijective

1) Définitions

Une application injective d'un ensemble (E) $\longrightarrow$(F) est une relation dans laquelle tout élément de l'ensemble d'arrivée (F) a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ (E).

élément de l'ensemble d'arrivée (F) a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ (E).



- Une application est bijective si elle est injective et surjective

Exemple1 :f :$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 4x - 1$

Vérifier si f est une application injective.

Correction

✓ $x_1, x_2 \in (E)$;si $f(x_1) \neq f(x_2)$ alors $x_1 \neq x_2$ et si $f(x_1)=f(x_2)$ alors $x_1=x_2$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1)=f(x_2)$

$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow 4x_1-1=4x_2-1 \Longrightarrow 4x_1=4x_2 \Longrightarrow x_1=x_2$ d'où f est une application injective

Exemple 2 :Soit g :$\mathbb{R} \longrightarrow [1;+\infty[$

$x \longmapsto 2x^2 - 3$

g est-elle injective ?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1)=f(x_2)$

$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow 2x_1^2 - 3 = 2x_2^2 - 3 \Longrightarrow 2x_1^2=2x_2^2 \Longrightarrow x_1^2=x_2^2 \Longrightarrow (x_1^2-x_2^2)=0$

$\Longrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)=0 \Longrightarrow x_1-x_2=0$ ou $x_1+x_2=0$

$\Longrightarrow x_1=x_2$ ou $x_1=-x_2$ d'où g n'est pas injective

Exemple 3 :f :$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 4x - 1$

Vérifier si f est une application surjective

Soit $y \in \mathbb{R}$

Résolvons f(x)=y

$f(x)=y \Longrightarrow 4x-1=y \Longrightarrow x=\frac{y+1}{4}$

Quelque soit $y \in \mathbb{R}$;l'équation f(x)=y admet au moins une solution $x=\frac{y+1}{4}$ donc f est une application surjective.

Exemple 4:g :$\mathbb{R} \longrightarrow [1;+\infty[$

$x \longmapsto 4x^2 - 1$

Vérifier si g est une application surjective.

Résolvons g(x)=y

$g(x)=y \Longrightarrow 4x^2-1=y \Longrightarrow x=\frac{\sqrt{y+1}}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{y+1}}{2}$

Quelque soit $y \in [1+\infty[$;l'équation g(x)=y admet deux solutions $x=\frac{\sqrt{y+1}}{2}$ et $x=-\frac{\sqrt{y+1}}{2}$ donc g est une application surjective.

II) Polynômes

1. Définitions :

On appelle monôme toute expression de la forme $a_n x^n$, où $a_n \in R$ et $n \in N$

Un polynôme est la somme de plusieurs monômes, c'est donc une expression de la forme

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in R$, $n \in N$

On peut définir un polynôme toute application P de IR dans IR qui peut s'écrire sous la forme

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in R$, $n \in N$

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Les réels $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont les coefficients de $P(x)$; et si $a_n \neq 0$, on dit que $P(x)$ est de degré n, et on note $d°P = n$

Exemple :

- $P(x) = (\sqrt{x^2+1})^2 = x^2 + 1$ $P(x)$ est un polynôme de degré 2
- $P(x) = |x|$ n'est pas un polynôme
- $P(x) = \sqrt{x}$ n'est pas un polynôme

- $\alpha \in R$ est racine de P(x) si et seulement si $P(\alpha) = 0$

- On appelle polynôme nul le polynôme qui est égal à 0 quel que soit x.

Si
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$
, $P(x)$ est le polynôme nul si et seulement si
$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$

- Deux polynômes
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$
et
$Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$
sont égaux si quel que soit x,
$P(x) = Q(x)$

$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow P(x) - Q(x) = 0 \Leftrightarrow (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$

donc $P(x) = Q(x)$ quel que soit x si
$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \cdots, a_1 = b_1; a_0 = b_0$

Exemple :
Déterminer les réels a, b et c de telle sorte que quel que soit x n'annulant pas le dénominateur, on ait
$\frac{2x^2 + x + 1}{x - 1} = ax + b + \frac{c}{x - 1}$

Quel que soit $x \neq 1$

$$ax + b + \frac{c}{x - 1} = \frac{ax(x - 1) + b(x - 1) + c}{x - 1}$$
$$= \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x - 1}$$
$$= \frac{ax^2 + x(b - a) - b + c}{x - 1}$$
$$= \frac{ax^2 + (b - a)x - b + c}{x - 1}$$

Par identification on a : $a = 2$, $b - 2 = 1$, et $-b + c = 1$. D'où a= 2, b =3 et c = 4

2. Factorisation :

Factoriser $P(x)$ c'est l'écrire sous la forme de produit de facteurs de degrés aussi faibles que possible.
Factoriser $P(x)$ par $Q(x)$ c'est trouver un autre polynôme $A(x)$ tel que $P(x) = Q(x).A(x)$

Si $A(x)$ existe, on dit que $P(x)$ est factorisable (ou divisible) par $Q(x)$

Remarque :

Si
$d°P = n$ et $d°Q = p$ $(p \leq n) \Leftrightarrow d°A = n - p$

Théorème 1:

- $P(x)$ est factorisable par $x - \alpha$ (où $\alpha \in R$) si et seulement si α est racine de $P(x)$.
- $P(x)$ est facrorisable par $x - \alpha$ si et seulement s'il existe $A(x)$ tel que $P(x) = (x - \alpha)A(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha \in R$
Posons
$h(x) = P(x) - P(\alpha)$, $h(x)$ est un polynôme
$h(\alpha) = P(\alpha) - P(\alpha) = 0$
α est racine de $h(x)$ donc $h(x)$ est factorisable par $x - \alpha$: il existe

$A(x)$ telque $h(x) = A(x).(x - \alpha)$
ou $P(x) - P(\alpha) = A(x).(x - \alpha)$
Donc quels que soient le polynôme $P(x)$ et le réel α, il existe un polynôme $A(x)$ tel que $P(x) = (x - \alpha)A(x) + P(\alpha)$
Ce résultat peut se généraliser ainsi :

Théorème 2

Quels que soient les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ tels que $d^\circ P(x) \geq d^\circ Q(x)$, il existe 2 polynômes $A(x)$ et $R(x)$ tels que $P(x) = A(x).Q(x) + R(x)$.

P(x) est le dividende, Q(x) le diviseur, A(x) le quotient et R(x) le reste de la division

Conséquences

- $P(x)$ est factorisable par $Q(x)$ si et seulement si $R(x) = 0$

Méthodes de factorisation

1er méthode : Méthode des coefficients indéterminés (identification)

Exemple : factoriser $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ par $Q(x) = x^2 + 1$

On doit chercher le polynôme $A(x)$ vérifiant $P(x) = A(x).Q(x)$

$d^\circ P = 4, d^\circ Q = 2, d^\circ A(x) = 2$

Posons $A(x) = ax^2 + bx + c$

On a $P(x) = A(x).Q(x)$ si et seulement si

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(ax^2 + bx + c)$$

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^2 + bx + c$$

$$= ax^4 + bx^3 + (a + c)x^2 + bx + c$$

Par identification des coeeficients des termes de même degré, on a

a =1, b =1, a + c = 2 et c = 1

d'où $A(x) = x^2 + x + 1$

$P(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$

2e méthode : Division euclidienne

Exemple : Factoriser

- $P(x) = 2x^5 + x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ par $Q(x) = x^2 + 2$

$2x^5+x^4+5x^3+3x^2+2x+2$	x^2+2
$\underline{2x^5+4x^3}$	$2x^3+x^2+x+1$
x^4+x^3	
$\underline{x^4+2x^2}$	
x^3+x^2	
$\underline{x^3+2x}$	
x^2+2	

$$P(x) = (x^2+2)(2x^3+x^2+x+1)$$

- $P(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1$ par $Q(x) = x^2$

$x^5-2x^3+x^2+x-1$	x^2-1
$\underline{x^5-x^3}$	x^3-x+1
$0-x^3$	
$\underline{-x^3+x}$	
$0+x^2-1$	

$$P(x) = (x^2-1)(x^3-x+1)$$

Remarque :

Si le reste de la division n'est pas nul, $P(x)$ n'est pas factorisable par $Q(x)$

3e méthode : Algorithme de Horner :

Ceci n'est, à proprment parler, une méthode de factorisation. C'est plutôt une disposition pratique de calcul. Elle utilise en fait la méthode des coefficients indéterminés.

Soit à factoriser P(x) par Q(x)

Si $Q(x)$ est de la forme $(x-\alpha)$, la méthode la plus simple est la suivante :

Soit $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ et α un nombre réel. On veut factoriser $P(x)$ par $x-\alpha$. On doit donc trouver un polynôme $A(x)$ tel que :

$P(x) = (x - \alpha)A(x)$, $d^\circ A(x) = 2$

Posons $A(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$

$P(x) = (x - \alpha)(b_2x^2 + b_1x + b_0) \Leftrightarrow P(x) = (x - \alpha).A(x)$

$\Leftrightarrow P(x) = b_2x^3 + (b_1 - \alpha b_2)x^2 + (b_0 - \alpha b_1)x - \alpha b_0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = a_3 \\ b_1 - \alpha b_2 = a_2 \\ b_0 - \alpha b_1 = a_1 \\ -\alpha b_0 = a_0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow b_2 = a_3;\ b_1 = a_2 + \alpha b_2;\ b_0 = a_1 + \alpha b_1;\ b_0 = a_1 + \alpha b_1$ et $a_0 + \alpha b_0 = 0$ (si α est racine)

Disposition pratique :

Coefficients de P(x)	a_3	a_2	a_1	a_0
α	$=$	$+$ αb_2 $=$	$+$ αb_1 $=$	$+$ αb_0 $=$
Coefficients de A(x)	b_2	b_1	b_0	$P(\alpha)$

Exemples

○ $P(x) = 5x^3 - 16x^2 + 17x - 6$

$\alpha = 1$

Coefficients de P(x)	5	-16	17	-6
$\alpha = 1$	$=$	$+$ 1.5 $=$	$+$ 1(-11) $=$	$+$ 1.6 $=$
Coefficients de A(x)	5	-11	6	0

$A(x) = 5x^2 - 11x + 6$ et

$P(x) = (x - 1)(5x^2 - 11x + 6)$

Cette méthode, décrite pour n = 3, est valable pour tout polynôme de degré $n \geq 2$

$P(x) = 2x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 3$

$\alpha = 1$

P(x)	2	-7	6	2	0	-3
$\alpha = 1$		2	-5	1	3	3
A(x)	2	-5	1	3	3	0

$A(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 3$ et

$P(x) = (x - 1)(2x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 3)$

Remarque :

Si α n'est pas racine de P(x), P(x) n'est pas divisible par $x - \alpha$

$P(x) = (x - \alpha)A(x) + R$, $R \neq 0$, R est le reste de la division de P(x) par $x - \alpha$

Par identification, on a

$R = a_0 + \alpha b_0$

Dans ce cas

$P(\alpha) = R = a_0 + \alpha b_0$

Cette méthode permet donc de calculer très rapidement $P(\alpha)$

Exemple :

$P(x) = x^7 - 7x^5 + 3x^3 - 12x^2 + 1$

$P(3) = ?$

P(x)	1	0	-7	0	3	-12	0	1
$\alpha = 3$		3	9	6	18	63	153	459
Q(x)	1	3	2	6	21	51	153	460

$P(3) = 460$ et

$P(x) = (x - 3)(x^6 + 3x^5 + 2x^4 6x^3 + 21x^2 + 51x + 153) + 460$

Chapitre 3 : EQUATIONS-INEQUATIONS-SYSTEMES

I) RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES EQUATIONS ET INEQUATIONS

QUELQUES PROPRIETES DES NOMBRES REELS :

Soient a et b deux réels. On a :

- $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$
- $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 (b \neq 0)$

$a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow a$ et b sont de même signe

$\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow (a$ et b sont de même signe et $b \neq 0)$

- Quel que soit le réel c, $a \le b \Leftrightarrow a+c \le b+c$
- Quels que soient les réels c et d
  $a=b et c=d \Leftrightarrow a+c=b+d$
  si $a \le b$ et $c \le d$ alors $a+c \le b+d$
  - si $a \le b$ et $c \le d$ alors $a-d \le b-c$
  - Si $c \ge 0$, $a \le b \Leftrightarrow ac \le bc$
  - Si $c \le 0, a \le b \Leftrightarrow ac \ge bc$
  - Si $c > 0, a \le b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$
- Si a et b sont strictement positifs $a \le b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$
- $|a| = a$ si $a \ge 0$
  $|a| = -a$ si $a \le 0$
  $|a| = Sup(-a, a) =$ le plus grand de a et – a

$a^2 = b^2 \Leftrightarrow (|a| = |b|) \Leftrightarrow (a = b \text{ ou } a = -b)$

$\sqrt{x^2} = |x|$ quel que soit $x \in R$

- Si m et n sont des entiers naturels

$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$(a^m)^n = a^{m \times n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^0 = 1$ si $a \ne 0$

$a^1 = a$

$(ab)^m = a^m \cdot a^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Remarque :

Toutes ces propriétés sont encore valables pour des expressions contenant des variables.

II. TRINOMES ET EQUATIONS DU SECOND DEGRE

1. Définitions

Un trinôme du second degré est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ où a,b et c sont des réels et $a \ne 0$.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, on dit que α est une racine de $f(x)$ si $f(\alpha) = 0$.

Factoriser $f(x)$ c'est l'écrire, lorsque cela est possible, sous forme de produit de facteur de degré 0 ou 1, c'est-à-dire sous la forme $f(x) = a(x - x')(x - x'')$.

On a alors

$f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x - x')(x - x'') = 0 \Leftrightarrow x = x'$ ou

.

Factoriser un trinôme revient donc à chercher les racines de ce trinôme.

Si x' et x'' sont les racines du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors x' et x'' sont les solutions de l'équations $f(x) = 0$, et $S = \{x', x''\}$

2. *Factorisation :*

Soit à factoriser $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}x\right) + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$,

$$f(x) = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Δ est appelé discriminant du trinôme.

<u>1er cas :</u> $\Delta < 0$

$\Delta < 0$ donc $-\Delta > 0$

$$\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)\right] > 0 .$$

Et comme $a \neq 0$, $f(x)$ ne peut pas s'annuler, donc *f(x)* n'admet pas de racine.

<u>2e cas :</u> $\Delta = 0$, $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$

$f(x)$ admet une racine double $x = x' = x'' = -\frac{b}{2a}$.

La forme factorisée de f(x) est $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$

<u>3e cas :</u> $\Delta > 0$

$$f(x) = a\left[(x - \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2\right] = a\left[(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})\right]$$

$f(x) = a(x - x')(x - x'')$

avec $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = x' \text{ ou } x = x'')$

$f(x)$ admet donc deux racines distinctes x' et x''.

La forme factorisée de f(x) est $f(x) = a(x - x')(x - x'')$ avec

$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

<u>Remarque :</u>

Si b est pair, il existe $b' \in Z$ tel que $b = 2b'$

$$\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$$

Posons $\Delta' = b'^2 - ac$
$\Delta = 4\Delta'$

Δ' est appelé discriminant réduit

$$x' = \frac{-2b' + \sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-2b' - \sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

3)Résolution d'une équation du 2nd degré :

Soit à résoudre l'équation

$ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$

Si $\Delta < 0, S = \phi$

Si $\Delta = 0, S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

Si $\Delta > 0, S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

4)Somme et produit des racines

On considère le trinôme

$ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

Si $\Delta > 0$, on a deux racines distinctes

$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

On a alors

$$x'+x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

Et

$$x'x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

Ainsi

$S = x'+x'' = -\frac{b}{a}$

$P = x'x'' = \frac{c}{a}$

Remarque : Racines évidentes

Soit

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

- Si $f(1) = a + b + c = 0$ alors $x' = 1$ est racine, l'autre racine est $x'' = \frac{c}{ax'} = \frac{c}{a}$
- Si $f(-1) = a - b + c = 0$ alors $x' = -1$ est racine, l'autre racine est $x'' = \frac{c}{ax'} = -\frac{c}{a}$

Exemples :

- Résoudre $5x^2 - 4x - 1 = 0$

$x' = 1$ et $x'' = -\frac{1}{5}$ $\quad S = \left\{-\frac{1}{5}, 1\right\}$

- $23x^2 - 117x + 94x = 0$

23 - 117 + 94 = 0 donc $x' = 1$ est racine, $x'' = \frac{94}{23}$ $\quad S = \left\{1, \frac{94}{23}\right\}$

On peut aussi essayer 2 et -2

5)Signe d'un trinôme – inéquation du second degré

Soit

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Si $\Delta < 0$, $(-\Delta > 0)$:

et $(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{(-\Delta)}{4a^2} > 0$

Donc si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a

Si $\Delta = 0$

$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$

$(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$,

Donc si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a.

x		$-\frac{b}{2a}$	
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

- Si $\Delta > 0$ le trinôme a deux racines distinctes x' et x''

$f(x) = a(x - x')(x - x'')$

$x - x' > 0 \Leftrightarrow x > x'$

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$x-x'$		-	0	+	|	+	
$x-x''$		-	|	-	0	+	
$(x-x')(x-x'')$		+	0	-	0	+	
f(x)		Signe de a	0	signe de –a	0	signe de a	

C'est-à-dire que : si $x \in]-\infty; x'[\cup]x'', +\infty[$, $f(x)$ est du signe de a

Si $x \in]x'; x''[$, $f(x)$ est du signe de –a

Si $x = x'$ ou $x = x''$, $f(x) = 0$

La réciproque est aussi vraie, c'est-à-dire que si $f(x)$ et a sont de même signe alors $x \in]-\infty; x'[\cup]x''; +\infty[$ et si $f(x)$ et a sont de signe contraire $x \in]x'; x''[$

Donc pour étudier la position d'un réel α par rapport aux racines x' et x'' d'un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, on calcule $a \cdot f(x)$

- Si $a.f(\alpha) = 0$, α est une racine
- Si $a.f(\alpha) < 0$, alors $\alpha \in]x'; x''[$
- Si $a.f(\alpha) > 0$, alors $\alpha \in]-\infty; x'[\cup]x''; +\infty[$:

on compare α à $\frac{x'+x''}{2} = -\frac{b}{2a}$:

- Si $\alpha > -\frac{b}{2a}$ alors $\alpha > x''$
- Si $\alpha < -\frac{b}{2a}$, alors $\alpha < x'$

III) SYSTEMES D' EQUATIONS

SYSTEMES LINEAIRES :

Un système est linéaire si les inconnues sont toutes du 1er degré.

Exemple : $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 4y + z = 5 \end{cases}$

1. Une équation à deux inconnues :

C'est une équation de la forme $ax + by = c$ où x et y sont les inconnues

Résoudre une telle équation c'est chercher tous les couples (x ;y) de réels vérifiant cette égalité

Pour résoudre l'équation, on prend l'une des inconnues comme paramètre et on exprime l'autre en fonction de ce paramètre.

Exemple : Résoudre l'équation $2x - y = 3$

Posons $x = \lambda$

$y = 2\lambda - 3$

Les solutions de l'équation sont les couples $(\lambda; 2\lambda - 3)$ $\lambda \in R$

$S = \{(\lambda; 2\lambda - 3), \lambda \in R\}$

L'équation admet donc une infinité de solution (mais l'ensemble des solutions n'est pas R²)

Géométriquement, les solutions de telle équation sont les coordonnées des points de la droite d' équation cartésienne $y = 2x - 3$ et le système $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 3 \end{cases}$ est une équation paramétrique de cette droite

2. Système de deux équations à deux inconnues :

C'est un système de la forme
$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Méthode de résolution :

1er méthode : Déterminant

Soit à résoudre le système :
$\begin{cases} ax+by=c \ (1) \\ a'x+b'y=c' \ (2) \end{cases}$

$b'\times(1)$ donne $ab'x+bb'y=cb'$

$b\times(2)$ donne $a'bx+bb'y=c'b$

Par soustraction membre à membre on a :

$(ab'-a'b)x=cb'-bc'$

$a'\times(1)$ donne $aa'x+ba'y=ca'$

$a\times(2)$ donne $a'ax+ab'y=c'a$

Par soustraction membre à membre on a :

$(ab'-a'b)y=a'c-ac'$

- Si $a'b-ab'\neq 0$ on a une solution unique (x ;y) avec $x=\dfrac{cb'-bc'}{ab'-a'b}$ et $y=\dfrac{a'c-ac'}{ab'+ba'}$
- Si $a'b-ab'=0$
  - Si $a'c-ac'\neq 0$ ou $cb'-c'b\neq 0 \Rightarrow S=\phi$
  - Si $a'c-ac'=0$ et $cb'-c'b=0$

Le système admet une infinité de solution car il est équivalent à l'une des 2 équations (qui sont proportionnelles), et on revient au cas a)

Récapitulation :

On pose

$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$

- Si $\Delta\neq 0$, $S=\left\{\dfrac{\Delta_x}{\Delta};\dfrac{\Delta_y}{\Delta}\right\}$
- Si $\Delta=0, \Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0$ $\quad S=\phi$

Si $\Delta=0, \Delta_x=\Delta_y=0$ le système est équivalent à $ax+by=c$

En posant

$x=\lambda$, $(si\ b\neq 0)\Rightarrow y=\dfrac{c-a\lambda}{b}$ $\quad S=\left\{\left(\lambda;\dfrac{c-a\lambda}{b}\right)\lambda\in\right.$

Interprétation géométrique :

Les solutions d'un tel système sont les coordonnées des points d'intersection des deux droites (D) et (D') d'équations respectives
$ax+by=c$ et $a'x+b'y=c$

- Si $\Delta\neq 0$ les 2 droites se coupent en un point de coordonnées (x ;y) solution du système
- Si , $\Delta=0, \Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0$ (D) et (D') sont parallèles non confondues
- Si $\Delta=0, \Delta_x=\Delta_y=0$ les 2 droites sont confondues

2e méthode : Substitution

On isole l'une des inconnues dans l'une des équations et on la « porte » dans l'autre équation

3e méthode : Elimination

Soit à résoudre le système
$\begin{cases} ax+by=c \ (L_1) \\ a'x+b'y=c' \ (L_2) \end{cases}$

$a'\times L_1$ donne $aa'x+a'by=a'c$

$a \times L_2$ donne $aa'x + ab'y = ac'$

Par soustraction on a

$(a'b - ab')y = a'c - ac'$ (L'_2)

Le système est équivalent à

$$\begin{cases} ax + by = c & (L_1) \\ (a'b - ab')y = a'c - ac' & (L'_2) \end{cases}$$

Exemple : Résoudre le système (S)

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

En remplaçant la deuxième équation par la somme des deux équations , nous obtenons le système :

$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x = 4 \end{cases}$ équivalent à (S).

Ce qui donne, en simplifiant

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

On a alors :

$$S = \{(2;1)\}$$

- Si la méthode aboutit à un système de la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ 0 \cdot x = 0 \end{cases}$, le système est équivalent à (L_1) et on a une infinité de solution

$$S = \left\{\left(\lambda; \frac{c - \lambda}{a}\right)\right\}$$

- Si on a $\left.\begin{matrix} ax + by = c \\ 0 \cdot x = c'' \end{matrix}\right\}$ *avec* $c'' \neq 0 \Rightarrow S = \phi$

3. Système de 3 équations à 3 inconnues :

Soit à résoudre le système :

$$(S_1) \begin{cases} ax + by + cz = d & (L_1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (L_2) \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (L_3) \end{cases}$$

La meilleure méthode (et c'est celle du programme) est celle dite de Pivot de Gauss.

Description (simplifiée) de la méthode :

1ère étape : Elimination

On élimine à l'aide de (L_1) une des inconnues, par exemple x dans L_2 et L_3

On obtient alors un système (S_2) équivalent à (S_1), de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = d & (L_1) \\ b'_1y + c'_1 = d'_1 & (L'_2) \\ b''_1y + c''_1z = d''_1 & (L'_3) \end{cases}$$

2e étape :

A l'aide de (L'_2) on élimine dans (L'_3) l'une des inconnues. On obtient alors un système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ b'_1y + c'_1 = d'_1 \\ c''_2z = d''_2 & (L''_3) \end{cases}$$

équivalent à (S_1)

3e étape : substitution remontante

On détermine z à partir de (L''_3), puis on substitue dans (L''_2)

On refait les mêmes opérations pour y et x.

Exemple : Résoudre

$$\begin{cases} x + y + z = 3 & (L_1) \\ x - y + 2z = 2 & (L_2) \\ x - 2y - z = -2 & (L_3) \end{cases}$$

$(L_1) \rightarrow$

$(L_1 - L_2) \rightarrow$

$(L_1 - L_3) \rightarrow$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y - z = 1 & (L'_2) \\ 3y + 2z = 5 & (L'_3) \end{cases}$$

$(2L'_2 - L'_3) \rightarrow$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y-z=1 \\ 7y \quad =7 \end{cases}$$

$$ce\ qui\ donne \begin{cases} y=1 \\ 2-z=1 \\ z=1 \\ x=1 \end{cases}$$

$d'où \quad S=\{(1,1,1)\}$

Remarques :

- Si la méthode conduit à un système de la forme $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ b'_1 y+c'_1 z=d_1 \\ 0\cdot z=d''_2 \end{cases}$ avec $d''_2 \neq 0$, alors $S=\varnothing$
- Et si on obtient un système de la forme $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ b'_1 y+c'_1 z=d_1 \\ 0\cdot z=0 \end{cases}$, le système admet une infinité de solutions ; on prend l'une des inconnues comme paramètre et on exprime les autre en fonctions de ce paramètre. Un tel système est dit lié, l'une des équations est une combinaison linéaire des 2 autres.

IV. EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES

1)Equations irrationnelles :

Une équation est dite irrationnelle si l'inconnue figure sous au moins un radical.

Exemples : $2\sqrt{x-1}+2=x$ est une équation irrationnelle.

mais $x\sqrt{2}-3=0$ ne l'est pas.

On rappelle que si a et b sont positifs, $a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b$

a. Equation du type $\sqrt{f(x)}=g(x)$

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=[g(x)]^2 \\ et\ \ g(x)\geq 0 \end{cases}$$

Démonstration :si $\sqrt{f(x)}=g(x)$ alors $\begin{cases} f(x)=[g(x)]^2 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$ (Car sinon, on n'aurait pas l'égalité)

Réciproquement, si $f(x)=[g(x)]^2$ et $g(x)\geq 0$ alors $f(x)\geq 0$ et $\sqrt{f(x)}=\sqrt{[g(x)]^2}=g(x)$

Exemple : Résoudre (E) : $\sqrt{8-x}-x+2=0$

$$\sqrt{8-x}-x+2=0 \Leftrightarrow \sqrt{8-x}=x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x=(x-2)^2 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x=x^2-4x+4 \\ x\geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ x\geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-4)=0 \\ x\geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S=\{4\}\ car\ -1<2$$

b. Equation du type $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Exemple :

$(E)\ \sqrt{x^2 + x - 14} = \sqrt{1 - x}$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 14 = 1 - x \\ 1 - x \geq 0 \end{cases}$$

$x' = \frac{-1-4}{1}$ $x'' = \frac{-1+3}{1}$

$x' = -5$ $x'' = 3$

$x \leq 1$ $S = \{-5\}$

2. Inéquations irrationnelles :

On rappelle que si a et b sont positifs, $a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$

Considérons une équation $f(x) \geq g(x)$ et soient D_f l'ensemble de définition de f, D_g l'ensemble de définition de g et $D = D_f \cap D_g$

- si D_1 est la partie de D sur laquelle $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ on a sur D_1 et D_1 seulement , $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 \geq [g(x)]^2$
- sur D_2, complémentaire de D_1 dans D, il suffit de voir si l'inégalité est vérifiée ou non.

Exemple : Résoudre l'inéquation,

$\sqrt{2(x+1)} \geq x - 2$

$D = \{x \in R / 2(x+1) \geq 0\} = [-1;+\infty[$

$\sqrt{2(x+1)} \geq 0$ sur D

$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2;+\infty[$

$D = [-1;2[\cup [2;+\infty[$

- *Sur* $[-1;2[$ l'inégalité est toujours vérifiée car $x - 2 < 0$ et $\sqrt{2(x+1)} \geq 0$ Donc, tous les réels de cet intervalle sont solutions $S' = [-1;2[$
- Sur $[2;+\infty[$ $\sqrt{2(x+1)} \geq 0$ $x - 2 \geq 0$ Donc ;$2(x+1) \geq (x-2)^2$

$x^2 - 6x + 2 \leq 0$

$\Delta' = 3^2 - 2 = 7$

$x' = 2 - \sqrt{7}$ et $x'' = 3 + \sqrt{7}$

$x^2 - 6x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [3 - \sqrt{7} ; 3 + \sqrt{7}]$

$S'' = [2 ; +\infty[\cap [3 - \sqrt{7} ; 3 + \sqrt{7}] = [2 ; 3 + \sqrt{7}]$

$S = S' \cup S'' = [1 ; 2[\cup [2 ; 3 + \sqrt{7}]$

$S = [-1 ; 3 + \sqrt{7}]$

EXERCICES

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $-x^2-4x+5 \geqslant 0$
2) $x^2+x-3 \geqslant 0$
3) $-3x^2+4x-2>0$
4) $(2x-3)(-2x^2+5x+3)>0$
5) $\dfrac{1-4x}{x^2+x+1} \leqslant 0$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^4+x^2+1=0$
2) $3x^4-4x^2+1=0$
3) $\sqrt{2x-1}=1-2x$
4) $x-5\sqrt{x}+6=0$
5) $\sqrt{x^2-8}=2x-5$

Exercice 3

Déterminer dans les cas suivants les réels x et y (s'ils existent) sachant que leur somme est égale à S et leur produit égal à P :

1) $S=29$ et $P=198$
2) $S=200$ et $P=9999$

CORRIGE

Exercice 1

1) $S=[-5;1]$
2) $S=\left]-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right[$
3) $S=\varnothing$
4) $S=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2};3\right[$
5) $S=\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right[$

Exercice 3

1) $\begin{cases} x=11 \\ y=18 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=18 \\ y=11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=99 \\ y=101 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=101 \\ y=99 \end{cases}$

$\boxed{S=\{(11;18);(18;11)\}}$

$\boxed{S=\{(99;101);(101;99)\}}$

4) $S=\{4;9\}$

5) $S=\left\{3;\frac{11}{3}\right\}$

Exercice 2

1) $S=\varnothing$

2) $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3};1;-1\right\}$

3) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Chapitre 4 : LIMITES D'UNE FONCTION

1. Limite en un point :

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, f une fonction définie sur I sauf peut être en x_0 et $l \in R$.

On dit que f admet l comme limite en x_0, ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0, si, lorsque x prend des valeurs très proches de x_0, les nombres $f(x)$ deviennent très proches de l (ils finissent par appartenir à l'intervalle $]l-\alpha;l+\alpha[$, aussi petit que soit le réel positif α)

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0} f = l$

On dit que la limite de f en x_0 est $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si lorsqu'on donne à x des valeurs de plus en plus proches de x_0, $f(x)$ prend des valeurs indéfiniment grandes. (f(x) peut être plus grand que n'importe quel nombre M, aussi grand soit-il, pourvu que x soit assez proche de x_0)

Exemple : $f(x) = \frac{1}{|x|}$

Quand x prend des valeurs très proches de 0, f(x) devient indéfiniment grande donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

On dit que la limite de f en x_0 est $-\infty$ si $\lim\limits_{x_0} f(x) = -\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

2. Limite à l'infini :

On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si lorsqu'on donne à x des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ devient très proche de l.

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ devient indéfiniment grand

On écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si $\lim_{x\to+\infty} (-f(x)) = +\infty$

3. Fonctions de référence :

- $f(x) = x$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0 \quad (x_0 \in R)$

- $f(x) = a \quad (a \in R)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

- $f(x) = \frac{1}{x}$

$D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

4. Limite à gauche – limite à droite :

Soit une fonction définie sur $]x_0, x_0 + \alpha[$ $\alpha \in R_+^*$; on dit que l est la limite de f à droite en x_0 si l est la limite de f(x) quand x tend vers x_0 par valeurs supérieurs, c'est-à-dire quand x tend vers x_0 et $x > x_0$.

On écrit $l = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

Si f est définie sur $]x_0 - \alpha; x_0[$, on dit que l est la limite de f à gauche de x_0 si l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs inférieurs, c'est-à-dire quand x tend vers x_0 et $x < x_0$.

On écrit $l = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

5. Opérations sur les limites

- **Limite d'une somme :**

lim f	lim g	lim (f+g)
l	l'	l+l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
l	∞	∞

- **Limite d'un produit :**

lim f	lim g	lim (f.g)
l	l'	l.l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l \neq 0$	∞	∞
0	∞	Forme indéterminée

- **Limite d'un quotient :**

lim f	lim g	lim (f/g)
l	$l' \neq 0$	l/l'
∞	∞	Forme indéterminée
l	∞	0
0	0	Forme indéterminée
$l > 0$	0^+	$+\infty$
$l > 0$	0^-	$-\infty$
∞	0	∞

Exemples :

- $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=\frac{1^2+1}{1}=2$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+x\right)=+\infty$
- $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x+1}{x^2-x-2}\right)=+\infty$

Remarques :

Lorsque la limite d'une fonction est de la forme $\frac{l}{0}$ où $l\neq 0$, alors le résultat est ∞. Pour savoir si c'est $+\infty$ *ou* $-\infty$, on étudie le signe du dénominateur.

Exemple : $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\infty$

Limite d'une fonction irrationnelle :

Si $f(x)\geq 0$ dans un intervalle ouvert contenant x_0 et $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ alors

$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$

Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=+\infty$

- ***Les formes indéterminées :***
  - ***Limite d'un polynôme :***

La limite d'une fonction polynôme quand x tend vers l'infini, est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple :

$f(x)=x^2-x+1$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty-\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} x^2\left[1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]=\lim_{x\to +\infty} x^2=+\infty$

Limite d'une fonction rationnelle

La limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur (quand x tend vers l'infini)

Exemple : $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^3-1}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+1}{x^3-1}=\frac{+\infty}{+\infty}=$ F.I

Levons l'indétermination :

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2(2+\frac{1}{x^2})}{x^3(1-\frac{1}{x^3})}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{x}=0$

Si la limite d'une fonction rationnelle en x_0 est de la forme $\frac{0}{0}$, on met $x-x_0$ en facteur et on simplifie

Exemple : $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{0}{0}=$ F.I

Limite d'une fonction irrationnelle

Si la limite d'une fonction irrationnelle est de la forme $\frac{0}{0}$ *ou* $+\infty-\infty$, on lève l'indétermination en utilisant l'expression conjuguée.

Si elle est de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, on met les termes de plus hauts degrés en facteur

Exemples :

- $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - (+\infty) \text{ F.I}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{(x + \sqrt{x^2+1})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} = 0^-$$

▪ $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x - |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

Chapitre 5 : DERIVABILITE

1. Dérivabilité en un point –Nombre dérivé :

a. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée nombre dérivé de f en x_0 ; on la note $f'(x_0)$

On a donc $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ou, en posant $x=x_0+h$,

$f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Exemple : $f(x) = x^2 + x - 1$

f est-elle dérivable en $x_0=1$?

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to1} \frac{(x^2 + x - 1) - (1 + 1 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to1} (x+2)$$

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3$$

On a une limite finie, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$

b. Dérivabilité à gauche – dérivabilité à droite

On dit que f est dérivable à droite en x_0 (respectivement à gauche) si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^+ (respectivement vers x_0^-)

Les limites lorsqu'elles existent, sont appelées respectivement nombre dérivé à gauche et nombre dérivé à droite de x_0, et notés $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$

$f_d'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $f_g'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, lorsqu'elles sont finies

Théorème :

Pour qu'une fonction f soit dérivable en x_0 ; il faut et il suffit que les nombres dérivés à gauche et à droite soient finis et égaux, c'est-à-dire si :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(finie)

2. Dérivabilité sur un intervalle :

f est dérivable sur $]a,b[$ si elle est dérivable en chaque point de cet intervalle.

f est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à gauche en b et dérivable à droite en a.

Théorème :

Si f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0.

Démonstration : f est dérivable en x_0 donc

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est un réel l

Posons

$$\begin{cases} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \text{ si } x \neq x_0 \\ f(x_0) = 0 \end{cases}$$

On a

$$f(x) = [f(x) + l](x - x_0) + f(x_0)$$

Donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x_0) + f(x)(x - x_0) + l(x - x_0)]$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x)(x - x_0) + \lim_{x \to x_0} l(x - x_0)$$

Or

$$\lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} f(x)(x - x_0) = 0 \text{ et } \lim_{x \to x_0} l(x - x_0) = 0$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

d'où la continuité de f en 0

3. Fonction dérivée :

a. Définition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On appelle fonction dérivée de f (ou dérivée de f) sur I la fonction notée f', qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x.

$$f' : x \mapsto f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

b. Dérivée des fonctions usuelles

Démonstration :

- Si f(x)=a quel que soit $x \in R$.

f est constante

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{a - a}{h} = 0$$

donc

$$f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 0$$

- Si $f(x)=x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} =$$

- Si $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(x + h)^2 - (x^2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} 2x + h = 2x$$

- Si $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left[C_n^0 x^n h^0 + \cdots + C_n^{n-1} x h^{n-1} + C_n^n h^n - x^n\right]$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left[C_n^1 x^{n-1} h + \cdots + C_n^n h^n\right] = \lim_{h \to 0^+} \left(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} h + \cdots + C_n^n h^{n-1}\right) = C_n^1 x^{n-1} = n x^{n-1}$$

- Si $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x + h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x - x - h}{x(x + h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{x(x + h)}}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{x(x + h)} = -\frac{1}{x^2}$$

- Si $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exemple : Calculer le nombre dérivé de $f : x \to x^3$ en 2

$$f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, f'(2) = 12$$

c. Opérations sur les fonctions dérivées :

Théorème :

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I alors $u+v$, $u\cdot v$ et $\lambda u (\lambda \in \mathbb{R})$ sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I.

Et on a :

$$(u+v)' = u'+v'$$
$$(u\cdot v)' = vu'+u'v$$
$$(\lambda u)' = \lambda\cdot u'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

En particulier

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

Si u est dérivable et strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable et

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Démonstration :

- u et v sont dérivables sur I, donc quel que soit $x_0 \in I$, $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$ et $\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$ sont finies

$$= \lim_{x\to x_0} u'(x_0)+v'(x_0)$$

D'où

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0)+v'(x_0)$$
$$(u+v)' = u'+v'$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(u.v)(x)-(u.v)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[u(x)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right] + \lim_{x\to x_0}\left[v(x_0)\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\right]$$

Puisque u et v sont dérivables, elles sont continues en x_0. Donc

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0) \text{ et } \lim_{x\to x_0} v(x) = v(x_0)$$

D'où $(uv)'(x_0)=u'(x_0).v(x_0) +u(x_0).v'(x_0)$

- Si v est constante, $v(x) = \lambda$ quel que soit x,

$$(u.v)' = (\lambda u)' = \lambda' u + \lambda u$$
or $\lambda' = 0$
$$(\lambda u)' = \lambda.u'$$

- $$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{u}(x)-\frac{1}{u}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{u(x)}-\frac{1}{u(x_0)}}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{u(x_0)-u(x)}{x-x_0}\times\frac{1}{u(x)u(x_0)}$$

$$= \frac{-u'(x_0)}{[u(x_0)]^2}$$

$$d'ou \left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\times\frac{1}{v}\right)' = u'\left(\frac{1}{v}\right) + \left(\frac{1}{v}\right)'u = \left(u'\times\frac{1}{v}\right) + \left(\frac{-v'}{v^2}\times u\right) = \frac{u'\times v - v'\times u}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{u(x)}-\sqrt{u(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{(x-x_0)(\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)})}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\times\frac{1}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)}}\right]$$

b) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$$f'(x) = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

$$f'(x) = \frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

Conséquences :

Si u est dérivable, u^2 est dérivable ($u^2 = u\times u$) et $(u^2)' = 2uu'$

Plus généralement, $u^n (n\in\mathbb{N})$ est dérivable et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

Toute fonction polynôme est dérivable sur R

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

Si u est une fonction dérivable sur I, et tel que $u(x)\neq 0$ pour tout $x\in J$, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur J

Exercices

a) Montrer que $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$

b) Soit $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, avec $ad-bc\neq 0$.

Montrer que $f'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

Réponses

a) $u(x)\neq 0$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu^{n-1}.u'}{(u^n)^2} = \frac{-nu^{n-1}.u'}{u^{2n}} = \frac{-nu'}{u^{2n}.u^{-n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

Théorème :

Quel que soit $n\in Z^*$,

$(u^n)' = nu^{n-1}.u'$

d. Dérivée seconde d'une fonction :

Si f est dérivable sur I et sa dérivée f ' est, elle aussi dérivable sur I, on dit que f est 2 fois dérivable sur I et la dérivée de f ', notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

Application à la dérivée.

a. Tangente à la courbe :

Soit (ζ_f) la courbe représentative d'une fonction f et $A(x_0;f(x_0))$ et $M(x, f(x))$ deux points de (ζ_f)

Considérons la droite (AM) ; elle a pour pente (ou coefficient directeur) $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Si on fait tendre M vers A, x va tendre vers x_0 et la droite (AM) va tendre vers une position limite (T) appelé droite tangente à la courbe au point A, et sa pente tend vers

$\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x)$ (pente de (T)) :

c'est la tangente de l'angle que fait la droite (T) avec l'axe des abscisses.

Considérons un point M(x,y) de (T), on doit avoir :

$$\tan\alpha = f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

(équation de la tangente (T) à la courbe (ζ_f) au point A(x_0 ;f(x_0))

Remarques : Si $f'(x_0) = \frac{p}{q}$,

alors

Si $f'(x_0) = 0$, on a une tangente parallèle à l'axe des abscisses(tangente horizontale).

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$, f n'est pas dérivable en x_0, on a une tangente parallèle à l'axe des ordonnées

Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, (f n'est pas dérivable en x_0) on a deux demi tangentes à gauche et à droite de M_0, de pentes respectives $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$. On dit que l'on a un point anguleux.

b. Sens de variation :

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si quel que soit $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I

Si quelque soit $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I

Si quel que soit $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

Si l' inégalité est stricte, f est strictement croissante (respectivement décroissante)

c. Extremums relatifs

Théorème :

Si f est dérivable sur I ouvert, et $x_0 \in I$, et si f admet un extremum en x_0, alors $f'(x) = 0$

La réciproque n'est pas vraie

Exemple :

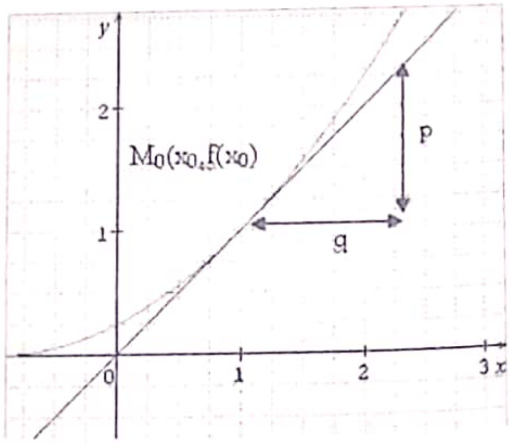
$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$ mais on n'a ni maximum, ni minimum en 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	Φ	+
$f'(x)$	↗	0	↗

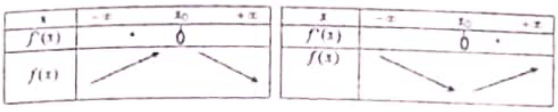
T



Théorème :

f admet un extremum en x_0 si et seulement si f ' s'annule et change de signe en x_0

 savadogo87@gmail.com



5. Plan d'étude d'une fonction :

- Domaine de définition
- Etude de la parité – Périodicité
  - Si f est une fonction paire ou impaire, on fait l'étude sur $D_e = D_f \cap [0\,;+\infty[$ ou $D_f \cap]-\infty\,;0]$ et on complète par symétrie
  - Si f est périodique de période T, on fait l'étude sur un intervalle de longueur T puis on complète par translation de vecteur $kT\vec{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$
- Limites aux bornes de D_e
- Dérivée
- Tableau de variation
- Courbe

EXERCICES

Exercice 1 :

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$
2) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{2}$
3) $f(x) = (\sqrt{x} + 1) \times (x^2 - 2)$
4) $f(x) = (2x - \sqrt{x}) \times (x + 4)$
5) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 4x}$
6) $f(x) = \dfrac{-3}{2x - 1}$
7) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$
8) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$
9) $f(x) = (-5x^2 + 1)^2$

Exercice 2 :

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ avec $a = 1$.

2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ avec $a = 3$.

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ avec $a = 9$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+2x-1}{x}$.
On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer les abscisses des points de la courbe C où la tangente est horizontale.

2) Existe t-il des points de la courbe C où la tangente admet un coefficient directeur égal à -2 ?

3) Déterminer les abscisses des points de la courbe C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

Exercice 2

1) $T : y = f(1) + f'(1)(x-1)$; $f(1) = 3$; $f'(x) = 6x - 1$; $f'(1) = 5$; $T : y = 5x - 2$

2) $T : y = f(3) + f'(3)(x-3)$; $f(3) = 7$; $f'(x) = \dfrac{-5}{(x-2)^2}$; $f'(3) = -5$; $T : y = -5x + 22$

3) $T : y = f(9) + f'(9)(x-9)$; $f(9) = \dfrac{1}{3}$; $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times x - \sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$; $f'(9) = \dfrac{-1}{54}$; $T : y = \dfrac{-1}{54}x + \dfrac{1}{2}$

4) $f'(x) = \left(2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times (x+4) + (2x - \sqrt{x}) \times 1$ (forme fg)

5) $f'(x) = -\dfrac{(-4)}{(1-4x)^2} = \dfrac{4}{(1-4x)^2}$ (forme $\dfrac{1}{f}$)

6) $f(x) = -3 \times \dfrac{1}{2x-1}$; $f'(x) = -3 \times \dfrac{(-2)}{(2x-1)^2} = \dfrac{6}{(2x-1)^2}$ (forme $\dfrac{1}{f}$)

7) $f'(x) = \dfrac{2 \times (3x+2) - (2x-1) \times 3}{(3x+2)^2} = \cdots = \dfrac{7}{(3x+2)^2}$ (forme $\dfrac{f}{g}$)

8) $f'(x) = \dfrac{(6x-4)(2x-3) - 2(3x^2-4x+1)}{(2x-3)^2} = \cdots = \dfrac{6x^2 - 18x + 10}{(2x-3)^2}$ (forme $\dfrac{f}{g}$)

9) $f'(x) = 2 \times (-10x) \times (-5x^2+1) = -20x(-5x^2+1)$ (forme f^2)

Exercice 3

Rappel : le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est égal à $f'(a)$.

La dérivée de f est définie par : $f'(x) = \dfrac{(-2x+2)x-(-x^2+2x-1)}{x^2} = \dfrac{-x^2+1}{x^2}$.

1) La tangente est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul.
On résoud donc l'équation $f'(x) = 0$. On obtient $x = 1$ ou $x = -1$.

2) Cela revient à résoudre l'équation $f'(x) = -2$ qui n'admet pas de solutions. Il n'y a donc pas de points répondant à la question.

3) Les coefficients directeurs de la tangente et de la droite doivent être égaux.
Cela revient donc à résoudre l'équation $f'(x) = -\dfrac{2}{3}$. Le calcul donne $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Chapitre 6 :FONCTIONS RATIONNELLES-ASYMPTOTES

1. Asymptotes

a. Branches infinies:

La courbe représentative d'une fonction f admet une branche infinie si l'une des coordonnées d'un point M(x,y) de cette courbe peut tendre vers l'infini. C'est-à-dire si on a l'un des cas suivants

$\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

b. Asymptotes :

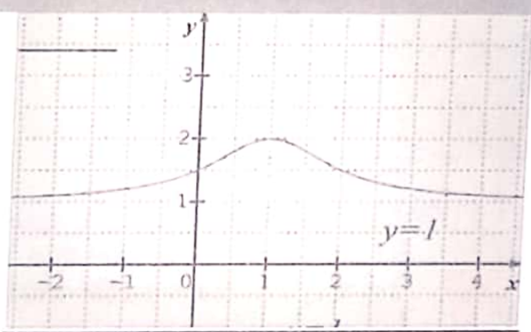
i. Définition :

Une droite (D) est une asymptote à la courbe (ζ) si la distance d'un point M(x ; y) de la courbe à la droite (D) tend vers 0 quand M s'éloigne indéfiniment sur la branche infinie.

Asymptote horizontale (parallèle à l'axe des abscisses):

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation. $y = l$ est une asymptote horizontale

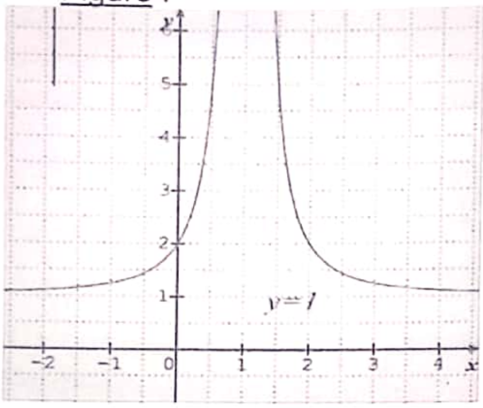
Figure :



Asymptote verticale (parallèle à l'axe des ordonnées):

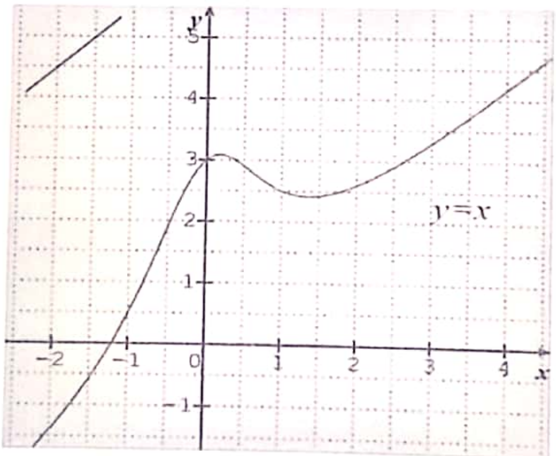
Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, alors la droite d' équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f

Figure :



ii. Asymptote oblique :

La courbe (ζ_f) admet une asymptote oblique si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ et s'il existe deux réels a et b tels que $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$; l'équation de l'asymptote est alors y= a x + b



Détermination de a et b :

Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ et s'il existe deux réels a et b tel que $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ alors

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)-(ax+b)}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-a=0$$

,

Donc, $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ lorsque cette limite existe.

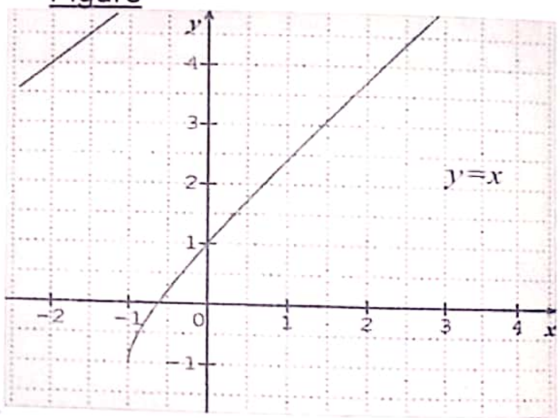
$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

donc $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$ si cette limite existe.

Remarques

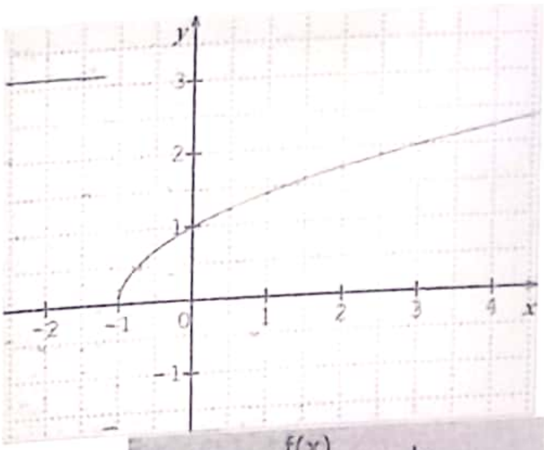
- Si f(x) est de la forme $f(x)=\alpha x+b+\varphi(x)$ ou φ est telle que $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$, alors la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est une asymptote à la courbe.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ mais $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\infty$, la courbe admet une branche infinie parabolique de direction asymptotique y = ax

Figure



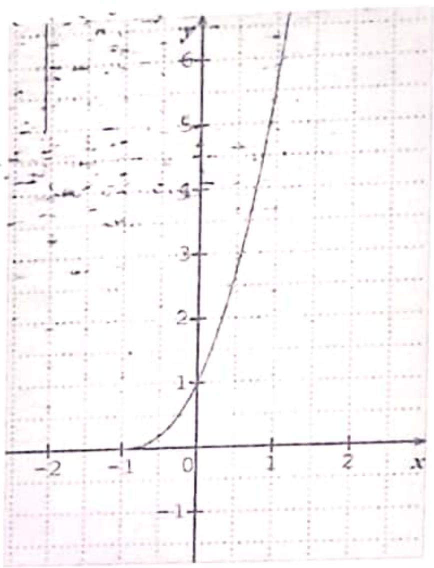
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ mais $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ la courbe n'admet pas d'asymptote mais une branche infinie parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.

Figure :



- Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, la courbe n'admet pas d'asymptote mais une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

Figure :



2. Fonctions homographiques

(

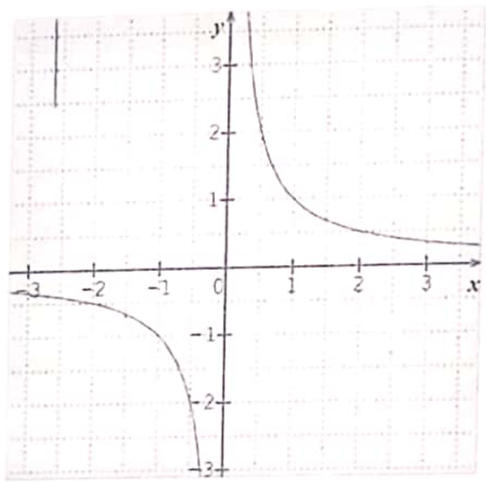
$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

)

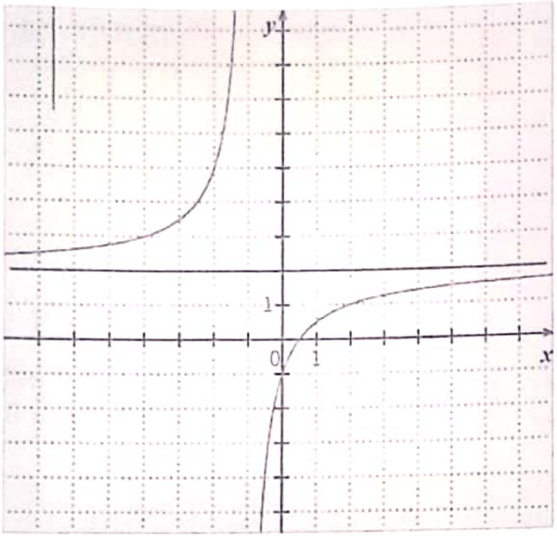
1e exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$

- $D =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
- Comme f est impaire, on peut réduire le domaine d'étude à $D_e =]0;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote parallèle à (y'Oy)
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote parallèle à (x'Ox)
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

x	0		+∞
f'(x)	‖	−	
f(x)	‖ +∞	↘	0



2e exemple : $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$



3. Fonctions du type

$f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ avec $a' \neq 0$

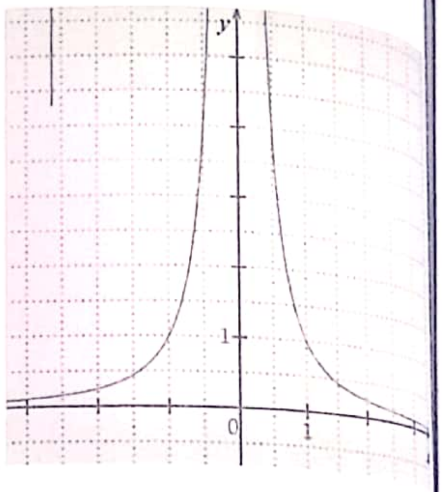
<u>*1e exemple*</u> $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

- $D =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
- Comme f est paire, on peut réduire le domaine d'étude à

  $D_e =]0;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote parallèle à (y'Oy)

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote parallèle à (x'Ox)
- $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

x	0		$+\infty$
f'(x)	‖	-	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	0



<u>*2e exemple*</u> : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$

- $D_f =]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$
- f n'est ni paire ni impaire
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

. Donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale (parallèle) à (x'Ox) en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

. Donc la droite d'équation x=0 est une asymptote verticale (parallèle à (y'Oy)

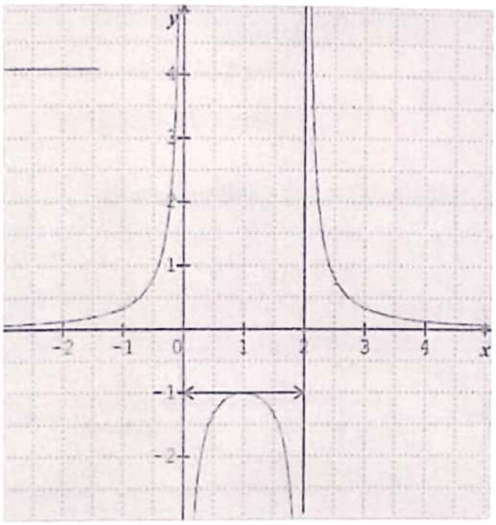
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

. Donc la droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale (parallèle à (y'Oy)

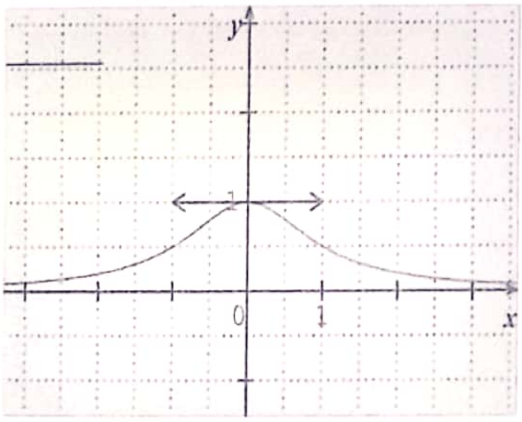
- $f'(x) = -\dfrac{2(x-1)}{(x^2-2x)^2}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
2(x-1)		-	‖	-	0	+	‖	+	
$(x^2-2x)^2$		+	0	+		+	0	+	
f'(x)		+	‖	+	0	-	‖	-	
f(x)	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Courbe



3e exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$



4. Fonctions du type

$f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ avec $a \neq 0$ et $d \neq 0$

1e exemple : $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x}$

- $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
- $f(-x) = \dfrac{x^2-x+1}{-x}$ et $-f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{-x}$

f n'est ni paire ni impaire.

$D_e = D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

- *limites*

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

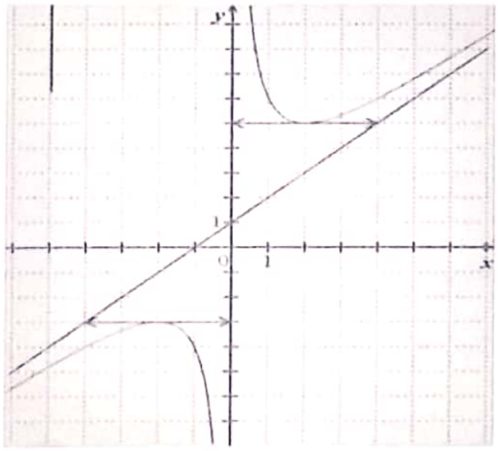
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

- $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Tangentes horizontales en $x_0=-2$ et $x_1=2$

Courbe :



2e exemple :

$f(x) = -x + \dfrac{1}{x}$

- $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
- $f(-x) = x - \dfrac{1}{x}$; $-f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ f est impaire.

$D_e =]0;+\infty[$

- *Limites*

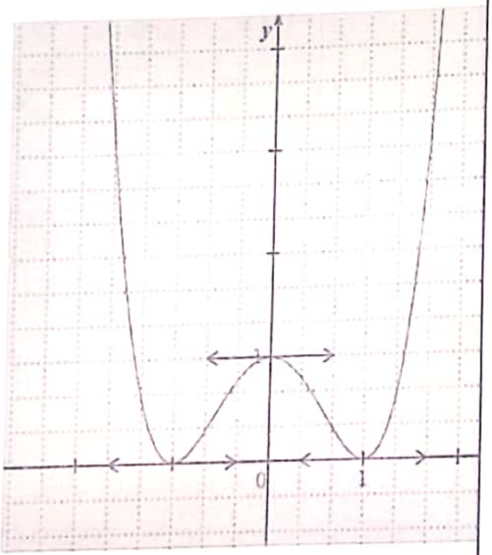
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$;

donc la droite d'équation

- *Limites*
  - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = 3x^2 + 1$
- *Tableau de variation :*

$f'(x)$ ne peut pas être égal à 0

x	0	+∞
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	+∞



◆ $M_0(0\ ;0)$ est un point d'inflexion si f'' s'annule en x_0 et change de signe en x_0

$f''(x) = 6x$

$f''(0) = 0$

x	−∞	0	+∞
f''	-	0	+

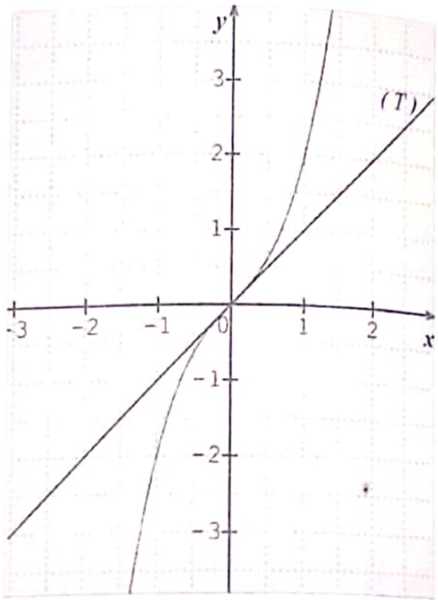
Donc M_0 est un point d'inflexion

◆ Equation de la tangente (T) en M_0 :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

ou $(T) : y = x$

<u>Courbe</u> :



FONCTIONS IRRATIONNELLES

<u>1e exemple :</u> $f(x) = \sqrt{x}$

- $D_f = [0;+\infty[$
- f n'est ni paire, ni impaire
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- *Dérivabilité :*
- Sur $]0\ ;+\infty[$, $x > 0$, donc f est dérivable sur cet intervalle et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{pour } x > 0$$

En 0,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}==+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0, et la courbe représentative de f admet une demi tangente verticale en 0

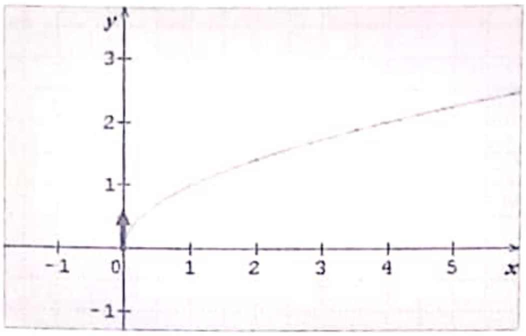
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$ $+\infty$

- *Branches infinies :*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

Donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction asymptotique $(x'0x)$

Courbe :



2e exemple :

$f(x) = x + \sqrt{-x}$

- $D_f =]-\infty;0]$

$\lim_{x\to0} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- *Dérivabilité* : sur $]-\infty;0[$, f est dérivable et

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{-x}}$$

en 0 :

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x+\sqrt{-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}+\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x}$$

$$=1+\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x\sqrt{-x}}$$

$$=1+\lim_{x\to0^-}-\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0, et la courbe de f admet en 0 une demi tangente verticale

- branches infinies

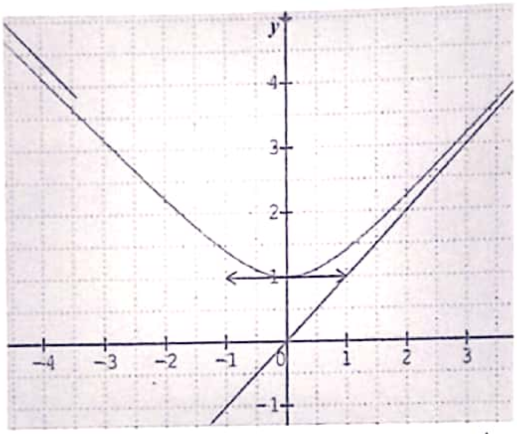
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{-x}}{x}\right)=1(=a)$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x}=+\infty$$

La courbe admet donc en $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction asymptotique y=x.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

3 ^{e} exemple $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$



EXEMPLE DE FONCTION AVEC VALEURS ABSOLUES

$f(x) = |x^2 - 4|$

- $D_f = R$
- f est paire, $D_e = [0;+\infty[$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 4$

Dérivabilité :

X	0		2		$+\infty$
x^2-4		-	0	+	
$\lvert x^2-4 \rvert$		$4-x^2$	0	x^2-4	

Sur $[0;2[$,

$f(x) = -x^2 + 4$

Elle est dérivable sur cet intervalle et

$f'(x) = -2x$

Sur $]2;+\infty[$

f est dérivable et

$f'(x) = 2x$

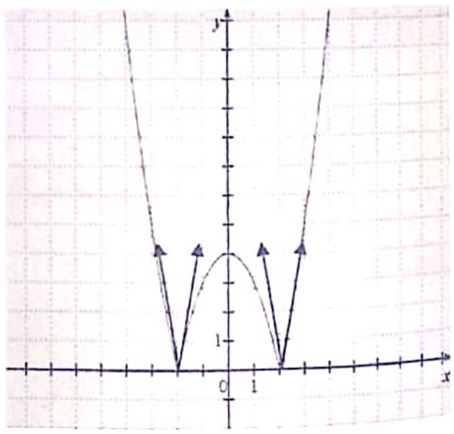
En 2 :

$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} (x+2) =$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{-x^2 + 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} -(x+2)$

f n'est pas dérivable en 2 et la courbe représentative de f admet en ce point deux demi tangentes à gauche et à droite de pentes respectives -4 et 4

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-2x	‖	2x	
$f'(x)$		-	-4 ‖ +4	+	
$f(x)$	4	↘	0	↗	$+\infty$



Chapitre 8 : **FONCTIONS ASSOCIEES**

1.-POSITION RELATIVE DE DEUX COURBES :

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I

Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I$ alors (ζ_f) est au dessus de (ζ_g) sur I

Conséquences :

Si $f(x) \geq 0$ quel que soit $x \in D_f$ la courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0^+$ la droite équation $y = ax + b$ est une asymptote et la courbe représentative de f est au dessus de cette asymptote.

2.- FONCTIONS ASSOCIEES :

Soit une fonction f ;

Si $g(x) = -f(x)$ la courbe de g se déduis de celle de f par symétrie par rapport à $(x'0x)$.

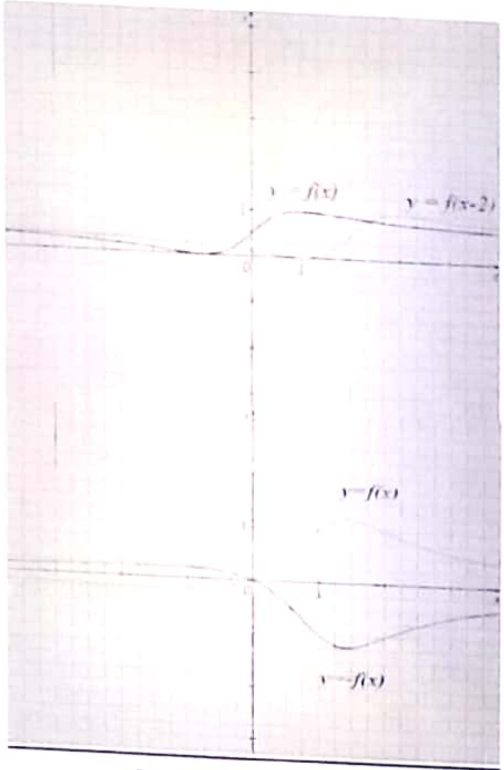
En effet, si $x \in D_f$ et $y = f(x)$, on a

$-y = -f(x) = g(x)$

Donc si $M(x; y) \in (\zeta_f)$

alors $M'(x, -y) \in (\zeta g)$

Figure



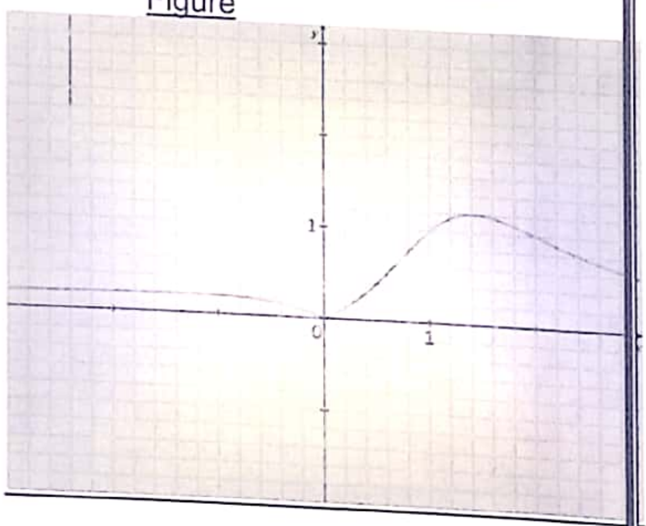
- Si $h(x) = |f(x)|$

$h(x) = f(x)$ *si* $f(x) \geq 0$

et $h(x) = -f(x)$ *si* $f(x) \leq 0$

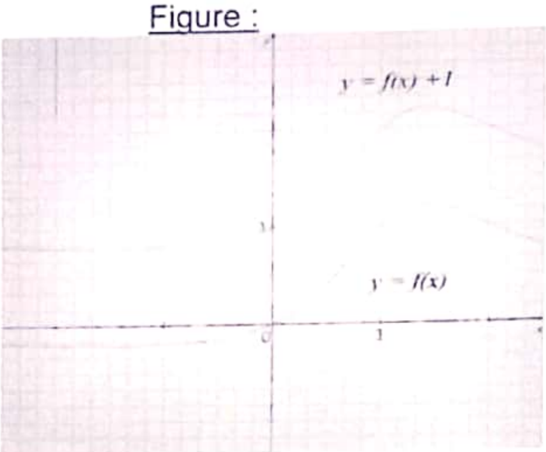
La courbe représentative de h est la réunion des parties de (ζ_f) et $(\zeta_{|f|})$ qui se trouvent au dessus de l'axe des abscisses.

Figure



- Si $j(x) = f(x) + b$, $b \in R$ la courbe représentative de j se déduit de celle de f par translation de vecteur $b\vec{j}$

Figure :

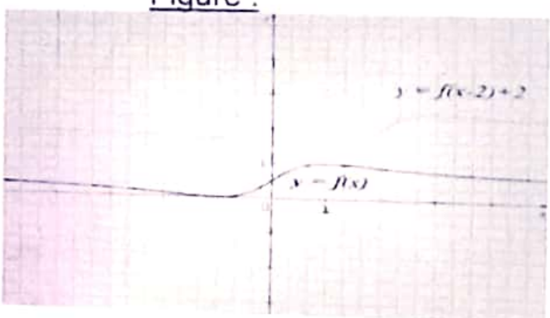


- Si $k(x) = f(x - a)$ la courbe représentative de k se déduit de celle de f par translation de vecteur $a\vec{i}$

Figure :

si $l(x) = f(x - a) + b$, la courbe représentative de l se déduit de celle de f par translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$.

Figure :

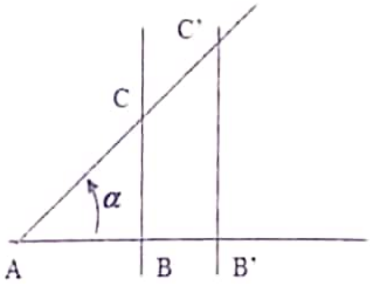


CHAPITRE 9 : TRIGONOMETRIE

I) RAPPEL ET DEFINITIONS :

Figure :

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$$
$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

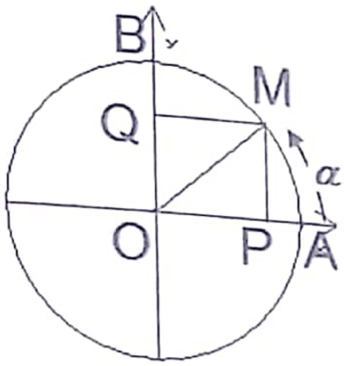


Cercle trigonométrique :

Une unité de longueur étant choisie, on appelle cercle trigonométrique un cercle centré en un point 0, de rayon 1, et sur lequel on a choisi un point A comme origine pour la mesure des arcs. On lui associe le repère $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ avec $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ orienté dans le sens direct.

On prend l'axe (OA) comme origine de la mesure des angles.

Figure :



2)Mesure d'arcs – Mesure d'angles :

Prenons un point M du cercle trigonométrique.

$\overrightarrow{AM}$ désigne un arc orienté.

Le radian est l'arc dont la longueur est égale au rayon.

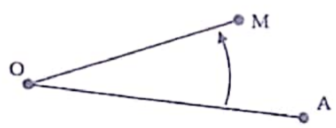
Un angle de 1 radian est un angle au centre qui intercepte un arc de 1 radian.

La mesure / de la longueur d'un arc est donnée par $l = R\alpha$ où R est le rayon et α la mesure en radian de l'angle correspondant.

1. Angles de deux vecteurs

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ désigne un angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$

Figure :

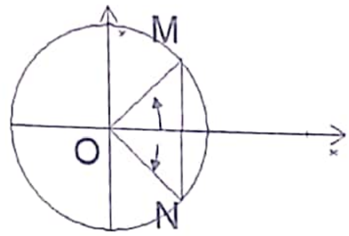


C'est aussi l'angle des deux demi-droites de même origine O.

Quelques propriétés des angles orientés :

- Deux angles orientés $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{ON})$ sont dits opposés si M et N sont symétriques par rapport à la droite (OA)

Figure :



- ***Relation de Chasles :***

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs

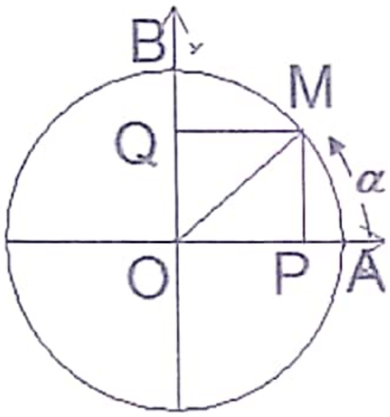
Quel que soit $\vec{w}$

$$(\vec{u};\vec{w}) + (\vec{w};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$$

2. Fonctions circulaires :

On considère l'application φ qui, à tout angle α, fait correspondre le point M(x ; y) du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = \alpha$

Figure :



$\varphi(\alpha) = M \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = \alpha$

On a alors

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OM} = OP = x$$

$$\sin\alpha = \frac{PM}{OM} = PM = OQ = y$$

$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}$

$\tan\alpha = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{AR}{OA} = AR$

$\varphi(\alpha + 2\pi) = M$

$\varphi(\alpha + 2k\pi) = M$

$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$

$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle OPM, on a

$$OM^2=OP^2+PM^2$$

$1 = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2$ ou

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

et

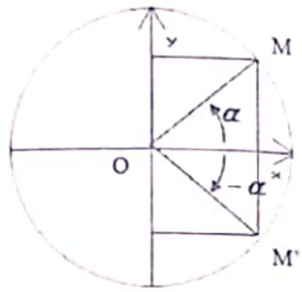
$-1 \le \sin\alpha < 1$ et $-1 \le \cos\alpha \le 1$

3. Angles associés :

i. Angles opposés :

Deux angles α et α' sont opposés si leurs images M et M' par φ sont symétriques par rapport à l'axe (OA) (on écrit $\alpha = -\alpha'$)

Figure :



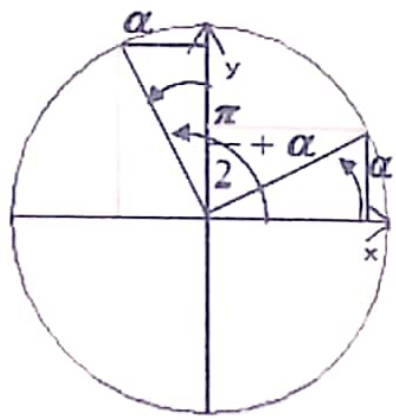
On a

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos\alpha' = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin\alpha' = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \tan\alpha = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha\end{array}}$$

ii. Angles supplémentaires :

α et α' sont supplémentaires si $\alpha + \alpha' = \pi$, donc si $\alpha' = \pi - \alpha$

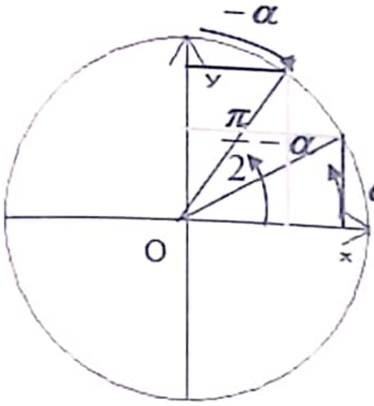
Figure :



iii. Angles complémentaires :

α et α' sont complémentaires, si $\alpha + \alpha' = \dfrac{\pi}{2}$, donc si $\alpha' = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$

Figure :



$$\cos\alpha' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\sin\alpha' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\tan\alpha' = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha} = \text{cot an}\alpha$$

iv. Angles dont la différence est π

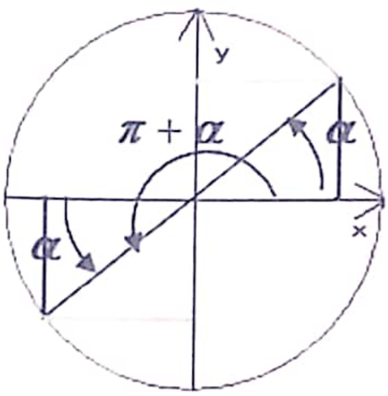
C'est-à-dire

$\alpha - \alpha' = \pi$ ou $\alpha' = \pi + \alpha$

Figure :

$$\cos\alpha' = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin\alpha' = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan\alpha' = \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cos\alpha' = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin\alpha' = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan\alpha' = \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

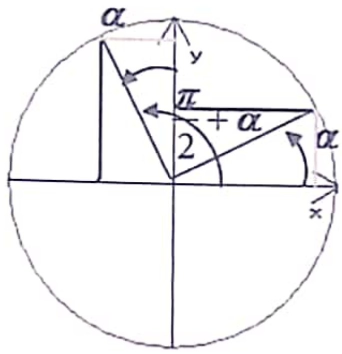


v. Angles dont la différence est $\frac{\pi}{2}$

C'est-à-dire

$\alpha - \alpha' = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha' = \frac{\pi}{2} + \alpha$

Figure :



7. Angles remarquables :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

II- FORMULES DE TRANSFORMATION :

1. Formules d'addition :

Rappel : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u};\vec{v})$

Et si

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$

Soit M un point du cercle trigonométrique tel que

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = a$

$M(\cos a, \sin a)$

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ tel que

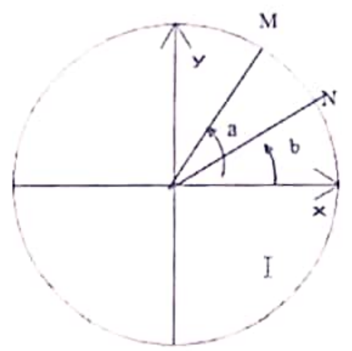
$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = a$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}) = b$

Figure :

$M(\cos a, \sin a)$

$N(\cos b, \sin b)$

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$



$a - b = (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$

D'une part,

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\|\|\overrightarrow{ON}\|\cos(a-b)$ (1)

D'autre part,

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos a\cos b + \sin a \sin b$ (2)

Comme $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = 1$,

(1) et (2) donnent $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

On a donc :

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

$\cos(a+b) = \cos[a-(-b)]$
$= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$

d'où

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Puisque $\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

On a:

$\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) = \cos[(\frac{\pi}{2} - a) - b] = \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos b + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin b$

$= \sin a \cos b + \cos a \sin b$ (car $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$)

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b)\cos a$

$$\boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a}$$

Calcul de tan(a+b):

On suppose que $\cos(a+b) \neq 0$ et $\cos a.\cos b \neq 0$

$\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$

Comme $\cos a.\cos b \neq 0$

$\tan(a-b) = \tan[a+(-b)] = \dfrac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \tan(-b)}$

$$\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$$

$\tan(a-b) = \tan[a+(-b)] = \dfrac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \tan(-b)}$

$$\boxed{\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}}$$

2. Formules de duplication :

$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a -$

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin 2a = \sin(a + a) = 2\sin a \cos a$

$\tan 2a = \tan(a + a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ d'où
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Alors

$\cos 2a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a$

- $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$

- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

Expression de cos2a et de sin2a en fonction de tan a :

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = \frac{2\sin a \cos a}{1} = \frac{2\sin a \cos a}{\cos^2 a + \sin^2 a}$$

En supposant que $\cos a = 0$

- $$\sin 2a = \frac{\dfrac{2\sin a \cos a}{\cos^2 a}}{\dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a}}$$

$$\sin 2a = \frac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a + \sin^2 a} = \frac{\dfrac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a}}{\dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a}}$$

$$\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

- $\tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Comme $\sin 2a = \dfrac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$

alors $\sin a = \dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1 + \tan^2\frac{a}{2}}$

et si on pose $t = \tan\dfrac{a}{2}$

- $\sin a = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

Comme $\cos 2a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 - \tan^2 a}$

alors $\cos a = \dfrac{1 - \tan^2\frac{a}{2}}{1 - \tan^2\frac{a}{2}}$

- $\cos a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$
- $\tan a = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

Remarque :

$\tan^2 a = \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a}$

$1 + \tan^2 a = \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 1 = \dfrac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{1}{\cos^2 a}$

3. Formules de transformation d'un produit en somme :

On rappelle que :

$\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ (1)
$\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ (2)
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ (3)
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ (4)

(1) + (2) donne $\cos(a - b) + \cos(a - b) = 2\cos a \cos b$
(2) − (1) donne $\cos(a - b) - \cos(a - b) = 2\sin a \sin b$
(3) + (4) $\sin(a - b) + \sin(a - b) = 2\sin a \cos b$
(3) − (4) $\sin(a - b) - \sin(A - b) = 2\sin b \cos a$

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$

$\sin a \sin b = -\dfrac{1}{2}[\cos(a + b) - \cos(a - b)]$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

$\sin b \cos a = \dfrac{1}{2}[\sin(a + b) - \sin(a - b)]$

4. Formules de transformation d'une somme en produit :

Posons

$p = a + b$ et $q = a - b$

On a $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$

(1) et (2) s'ecrit $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

(2) - (1) $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

(3) + (4) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

(3) - (4) $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

III. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES :

On rappelle que $\boxed{\begin{array}{l}\cos(x+2k\pi) = \cos x \\ \sin(x+2k\pi) = \sin x\end{array}}$

quels que soient $x \in R$ et $k \in Z$

$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$

$\tan(x+\pi) = \tan x$

$\tan(x+k\pi) = \tan x$ quelque soit $k \in Z$

1. Equation du type cosx = a,

$a \in R$

Si $|a| > 1$, équation n'admet aucune solution

Si $|a| \leq 1$, on a une infinité de solution. En effet si α est solution, (c'est-à-dire $\cos\alpha = a$), $-\alpha$ est aussi solution (car $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = a$)

Et comme $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha = a$ quel que soit $k \in Z$, $\alpha + 2k\pi$ est aussi solution, de même que $-\alpha + 2k\pi$

En admettant que ce sont les seules solutions, on a

Théorème :

$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$ $(k \in Z)$

Cas général :

$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + 2k\pi$ ou $f(x) = -g(x) + 2k\pi$ (

Exemple :

résoudre 2cosx-1=0

$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}\ (k \in Z}$$

$\cos^2(2x + \frac{\pi}{3}) + 2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 3 = 0$

Posons $X = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

$X^2 + 2X - 3 = 0$

$(X-1)(X+3) = 0 \Leftrightarrow X = 1; X = -3$

$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$ *ou* $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -3$

$2x + \frac{\pi}{3} = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = k\pi -$

$\cos(2k + \frac{\pi}{3}) = -3$ *n'a pas de solution*

$$\boxed{S = \left\{k\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ k \in Z\right\}}$$

Equation du type sinx = a :

- Si $|a| > 1$ pas de solution
- Si $|a| \leq 1$ on a une infinité de solution

Si α est solution

Comme $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\pi - \alpha$ est aussi solution, donc $\pi - \alpha + 2k\pi$ $(k \in Z)$ aussi

En admettant que ce sont les seules solutions on a :

Théorème :

$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Plus généralement

$\sin f(x) = \sin g(x) = f(x) = g(x) + 2k\pi$ ou $f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Exemples :

Résoudre $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4})$

(1) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$

$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

$3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi$

$x = \dfrac{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi + \pi$

$x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi + \pi$

$$\boxed{S = \left\{\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}\ ,\ \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right\}}$$

- $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

Posons $X = \sin x$

$2X^2 - 5X + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$X' = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \quad X'' = \frac{8}{4} = 2$

$\sin x = \frac{1}{2}$ *ou* $\sin x = 2$

$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ *ou* $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\sin x = 2$ *n'a pas de solution*

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\right\}}$$

2. Equation du type $a\cos x + b\sin x = c$

Posons

$S = a\cos x + b\sin x \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$

$S = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$

Le point

$M\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

appartient au cercle trigonométrique

Soit $\theta = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$

$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Théorème :

Si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe un réel φ tel que $\cos\varphi = \alpha$ et $\sin\varphi = \beta$

$S = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$

$a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta) = c$

Exemple :

Résoudre $\cos x - \sin x = 1$

$a = 1 \; b = -1$

$\cos x - \sin x = \sqrt{1^2 + (-1)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right] = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right]$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4})$

$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4} + x)$

$\sqrt{2}\sin(x - \frac{3\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad x + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x = 2k\pi$

$$\boxed{S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ 2k\pi \ , \ k \ , (k \in \mathbb{Z}) \right\}}$$

3. Equation du type tanx = a

Théorème :

Quel que soit le réel a, l'équation $\tan x = a$ admet toujours une infinité de solution.

Si α est solution, $\alpha + k\pi$ est aussi solution, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$$

Exemple :

$$\tan x - 1 = 0$$

$$\tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}}$$

4. Images des solutions d'une équation :

L'image d'une solution α d'une équation est le point M du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = \alpha$

- Si les solutions sont de la forme $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, $n \geq 3$ les images des solutions forment un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Si n = 3, on a un triangle équilatéral

Si n = 4, on a un carré,

Si n = 5 , ona un pentagone régulier

.....

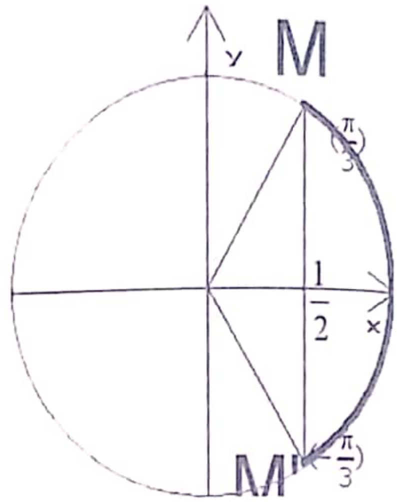
si n = 1, on un seul point

si n = 2, on a deux points symétriques par rapport à l'origine du repère

5. Exemples d'inéquation trigonométrique :

Exemples :

- résoudre $2\cos x - 1 > 0$



$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$\cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ l'image de x appartient à l'arc (orienté) MM'

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right[}$$

- *Résoudre* $2\sin x - \sqrt{3} < 0$

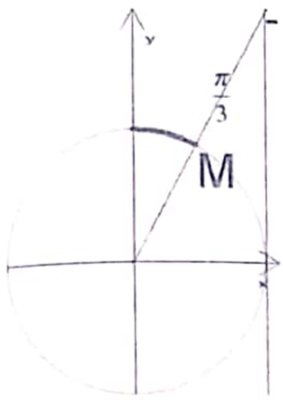
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'image de x appartient à l'arc (orienté) MM'

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ , \ \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \right[}$$

- $\tan x > \sqrt{3}$

$$\tan x > \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3}$$



$$\boxed{S = \bigcup_{k \in Z} \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[}$$

IV. ETUDE DES FONCTIONS CIRCULAIRES :

1. Définitions :

Soit $x \in R$, on considère l'angle $\hat{x}$ dont la mesure en radian est x. On pose $\cos x = \cos\hat{x}$, $\sin x = \sin\hat{x}$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ lorsqu'elle est définie.

On appelle fonction cosinus (respectivement sinus, tangente) l'application qui, à tout réel x, associe $\cos x$ (respectivement $\sin x$, tanx)

2)Périodicité :

Soit $p \in R$ et f telle que $f(x+p) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$

On a $f(x+kp) = f(x)$ quel que soit $k \in Z$

Le plus petit réel p strictement positif est la période de f.

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π, et la fonction tangente est périodique de période π

Remarque :

$f : x \mapsto f(x) = \tan x$

f(x) n'est pas définie pour $x = \frac{\pi}{2}$, donc n'est pas définie pour

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in Z)$

2. Continuité :

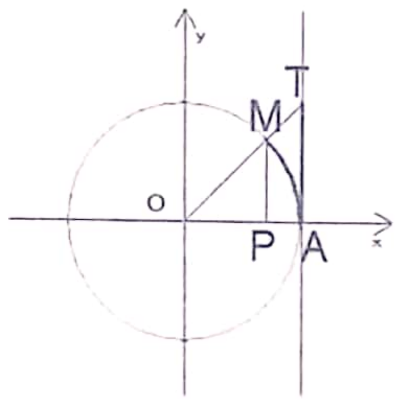
On montre et on admet que,

pour $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

$PM \leq \overline{AM} \leq AT$

$\sin x \leq R.x \leq \tan x$

$\boxed{\sin x \leq x \leq \tan x}$



Pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ on pose $x' = -x$

$\sin x' \leq x' \leq \tan x'$

$\sin(-x) \leq (-x) \leq \tan(-x)$

$-\sin x \leq -x \leq -\tan x$

donc $\boxed{|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|}$

quel que soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Comme $0 \leq |\sin x| \leq |x|$

$\lim\limits_{x\to 0} 0 \leq \lim\limits_{x\to 0}|\sin x| \leq \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$

donc $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x| = 0 = \sin 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\sin x = \sin 0 = 0$

La fonction sinus est continue en 0.

$g(x) = \cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$

$x \mapsto 1$ continue

$x \mapsto \sin\frac{x}{2}$ continue

$x \mapsto \sin^2\frac{x}{2}$ continue en 0

donc

$g: x \mapsto 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = \cos x$ est continue en 0

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque

Posons $f(x) = \sin x$

f est continue

$x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$

$f(x) - f(x_0) = \sin x - \sin x_0 = 2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}$

$|f(x) - f(x_0)| = \left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$

car $\cos\frac{x+x_0}{2} \leq 1$

$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x) - f(x_0)| \leq \lim\limits_{x\to x_0} 2\sin\frac{(x-x_0)}{2}$

or sin est continue en 0

$\lim\limits_{x\to x_0}\sin\frac{(x-x_0)}{2} = 0$

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$ donc f est continue en x_0

Exemple :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\lim\limits_{x\to 100\pi}\sin x = \sin 100\pi = 0$

La fonction sinus est donc continue sur R

Conséquence :

- $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ donc la fonction cosinus est continue sur R
- La fonction tangente est le quotient de 2 fonctions continues donc elle est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

3. Dérivabilité :

Résultats importants :
(limites usuelles)
Pour tout

$x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; $0 < \sin x < x < \tan x$

$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\lim\limits_{x\to 0} 1 \geq \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \geq \lim\limits_{x\to 0}\cos x$

$1 \geq \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \geq 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

On obtient le même résultat pour

$x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$

Calcul de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -\sin\frac{x}{2} \times$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

En appliquant ces résultats, on montre que

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Rappel :

f est dérivable en x_0 si et seulement

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie (

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est finie

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x_0 \cos h - \sin h \cos x_0 - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\left(\sin x_0 \left[\frac{\cos h - 1}{h}\right] + \frac{\sin h}{h} \cos x_0 \right) = \cos x_0$$

On sait que $-1 \le \cos x_0 \le 1$ donc la fonction sinus est dérivable en tout point x_0 de R et $(\sin x_0)' = \cos x_0$

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h} \right) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[\cos\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \frac{\sin h}{h} \sin x_0 \right] = -\sin x_0$$

La fonction cosinus est dérivable en tout point x_0 de R et $(\cos x_0)' = -\sin x_0$

Théorème :

- Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur R et quel que soit $x \in R$

$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$

La fonction tangente est dérivable sur $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $k \in Z$ car c'est le quotient de 2 fonctions dérivables et

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Théorème (admis)

Si u est dérivable sur R, alors $x \mapsto \cos u(x)$ et $x \mapsto \sin u(x)$ sont dérivables et

$$[\cos u(x)]' = -u'(x) \sin u(x)$$
$$[\sin u(x)]' = u'(x) \cos u(x)$$

4. Variation et courbes :

f(x)= cosx

- $D_f = R$
- Périodicité, f est périodique de période 2π. On va faire l'étude sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi; \pi]$
- Parité : f est paire $D_e = [0; \pi]$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$
  $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = -1$
- dérivabilité : f est dérivable sur D_e et $f'(x) = -\sin x$

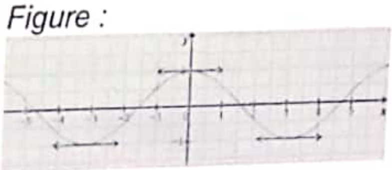
x	0	π
$-\sin x$	ϕ	ϕ
f(x)	1 ↘	-1

Tangentes horizontales en $(0,1)$ et $(\pi, -1)$

Intersection avec l'axe des abscisses :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Figure :



f(x)= sinx

- $D_f = R$
- Périodicité, f est périodique de période 2π.
- Parité : f est impaire $D_e = [0; \pi]$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
  $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = -0$
- dérivabilité : f est dérivable sur D_e et $f'(x) = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1 +	0 −	-1
$f(x)$	0 ↗	1	↘ 0

Tangentes horizontales en $(\frac{\pi}{2}, 1)$

Intersection avec l'axe des abscisses :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$ ou $x = 0$

Figure :

f(x)=tanx

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -f(x)$
- f est périodique π.

$D_e = \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

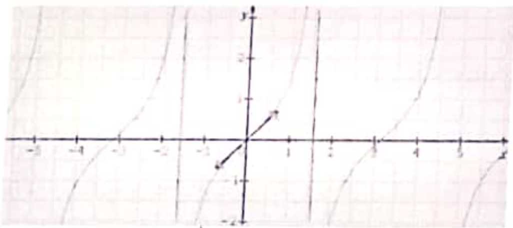
- f est impaire donc on peut encore réduire le domaine d'étude à $D_e = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote verticale
- f est dérivable sur D_f

$f'(x) = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	1 +	
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$	

f '(0)=1, donc on a une tangente de pente 1 à l'origine

Figure :



EXERCICES

Exercice 1 :

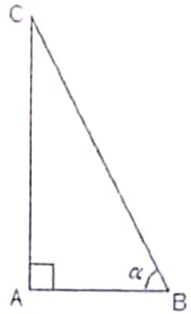
Dans le triangle ABC, rectangle en A, on note $\alpha = \widehat{ABC}$ et on définit

$\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC}$

$\sin(\alpha) = \frac{AC}{BC}$,

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\quad}{\quad}$,

$\cot an(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\quad}{\quad}$



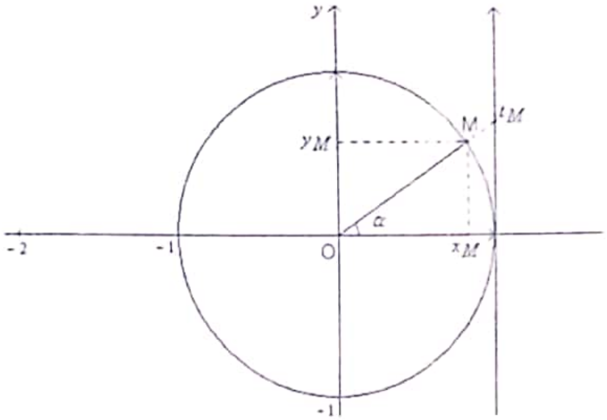
1°) Première propriété : Montrer que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

2°) Soit (C), dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1 ; et $M(x_M, y_M)$, un point de (C) (Voir figure ci-dessous)

On note $\alpha = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

a) Vérifier que $\cos(\alpha) = x_M$, $\sin(\alpha) = y_M$ et $\tan(\alpha) = t_M$

b) Redémontrer la propriété dans 1°)



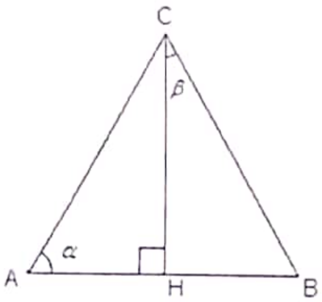
Exercice 2 :

L'unité de mesure pour les angles est le radian (rad)

$\pi\, rad$ est la mesure principale de l'angle plat

$\frac{\pi}{2}\, rad$ est la mesure principale de l'angle droit

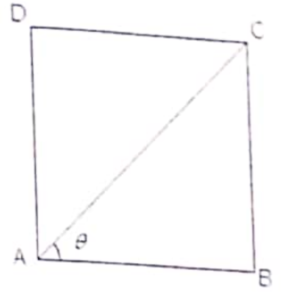
1°) ABC est un triangle équilatéral de côté 1, on note H la projeté orthogonal du point C sur le segment $[AB]$



a) Donner la mesure principale de chacun des angles $\alpha = \widehat{CAH}$ et $\beta = \widehat{BCH}$

b) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2°) $ABCD$ est un carré de côté 1

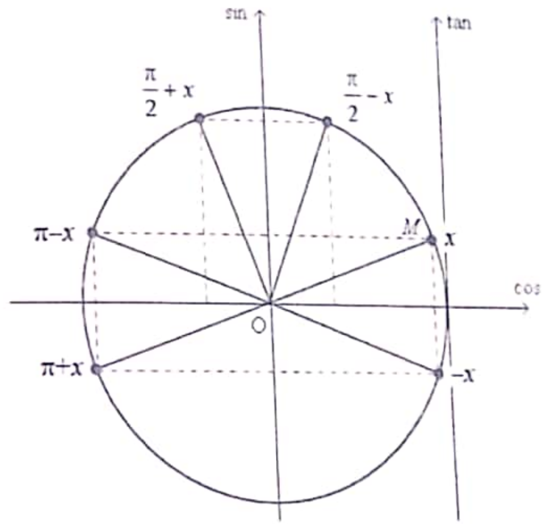


a) Donner la mesure principale de l'angle $\theta = \widehat{CAB}$

b) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 3 :

1°) Soit M un point du cercle trigonométrique (C), et notons x la mesure principale de l'angle $\alpha = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$



Exprimer en fonction de $\cos(x)$, $\sin(x)$ ou $\tan(x)$ chacune des expressions suivantes :

$\cos(-x)$	et	$\sin(-x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x)$	et	$\sin(\frac{\pi}{2} + x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x)$	et	$\sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$\cos(\pi - x)$	et	$\sin(\pi - x)$	
$\cos(x+\pi)$	et	$\sin(x+\pi)$	
$\cos(x+2\pi)$	et	$\sin(x+2\pi)$	
$\cos(x+8\pi)$	et	$\sin(x+4\pi)$	
$\cos(x+5\pi)$	et	$\sin(x+11\pi)$	
$\cos(x+2k\pi)$	et	$\sin(x+2k\pi)$	$(k \in Z)$
$\cos(x+(2k+1)\pi)$	et	$\sin(x+(2k+1)\pi)$	$(k \in Z)$
$\tan(-x)$			
$\tan(x+\pi)$			
$\tan(x+k\pi)$	$(k \in Z)$		

2°) Discuter suivant les valeurs de $k \in Z$ la valeur exacte de chacune des expressions suivantes :

$\cos(k\pi)$; $\sin(k\pi)$; $\cos(k\frac{\pi}{2})$; $\sin(k\frac{\pi}{2})$

Exercice 4 :

1°) Reproduire le cercle trigonométrique avec les principaux angles remarquables :

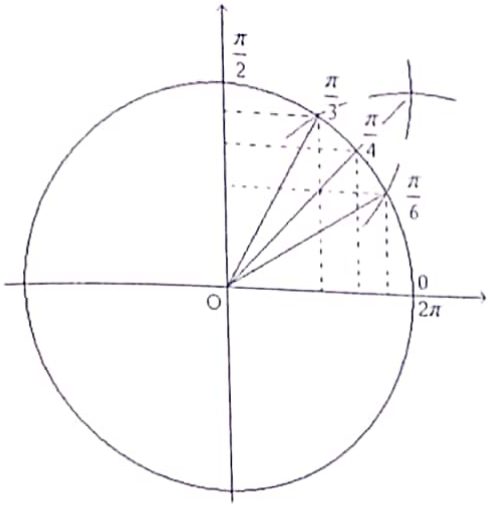
(les multiples de π dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{2}$ dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{4}$ dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{3}$ dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{6}$ dans $[0;2\pi[$ ...)



2°) Que vaut :

$\cos(\frac{\pi}{3})$	$\sin(\frac{\pi}{3})$	$\cos(\frac{\pi}{6})$	$\sin(\frac{\pi}{6})$
$\cos(\frac{\pi}{4})$	$\sin(\frac{\pi}{4})$	$\cos(0)$	$\sin(0)$
$\cos(\frac{\pi}{2})$	$\sin(\frac{\pi}{2})$	$\cos(\frac{2\pi}{3})$	$\sin(\frac{2\pi}{3})$
$\cos(\frac{5\pi}{6})$	$\sin(\frac{5\pi}{6})$	$\cos(\pi)$	$\sin(\pi)$
$\cos(\frac{5\pi}{4})$	$\sin(\frac{5\pi}{4})$	$\cos(\frac{3\pi}{2})$	$\sin(\frac{3\pi}{2})$
$\cos(\frac{5\pi}{3})$	$\sin(\frac{7\pi}{4})$	$\cos(\frac{11\pi}{6})$	$\sin(\frac{11\pi}{6})$
$\cos(-\frac{\pi}{4})$	$\sin(-\frac{\pi}{2})$	$\cos(-\frac{3\pi}{2})$	$\sin(-\frac{2\pi}{3})$
$\cos(-\frac{7\pi}{4})$	$\sin(-\frac{3\pi}{4})$	$\cos(2\pi)$	$\sin(2\pi)$
$\cos(\frac{7\pi}{2})$	$\sin(\frac{11\pi}{4})$	$\cos(\frac{11\pi}{3})$	$\sin(\frac{-9\pi}{4})$

Exercice 5 :

Le but de cet exercice est de calculer $\cos\left(\frac{869\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{869\pi}{6}\right)$

1°) Trouver les deux entiers a et k tels que $\frac{869\pi}{6} = a\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $-\pi \leq a\frac{\pi}{6} \leq \pi$

($a\frac{\pi}{6}$ est appelée valeur principale de $\frac{869\pi}{6}$)

2°) Donner alors $\cos\left(\frac{869\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{869\pi}{6}\right)$

3°) Déterminer la valeur principale de chacun des angles suivants puis préciser, dans chaque cas, $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$

$\alpha = \frac{373\pi}{4}$; $\alpha = \frac{224\pi}{3}$; $\alpha = \frac{358\pi}{6}$; $-\frac{47\pi}{3}$

$\alpha = -\frac{93\pi}{4}$; $\alpha = \frac{222\pi}{6}$; $\alpha = -\frac{358\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{3}$

Exercice 6 :

1°) Rappeler les principales formules trigonométriques :

$\cos(a+b) =$

$\cos(a-b) =$

$\sin(a+b) =$

$\sin(a-b) =$

$\tan(a+b) =$

$\tan(a-b) =$

2°) Redémontrer les propriétés donnant :

$\cos(-x)$; $\sin(-x)$

$\cos(\frac{\pi}{2}+x)$; $\sin(\frac{\pi}{2}+x)$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x)$; $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$

$\cos(\pi-x)$; $\sin(\pi-x)$

$\cos(x+\pi)$; $\sin(x+\pi)$

$\cos(x+2k\pi)$; $\sin(x+2k\pi)$ ($k \in Z$)

$\cos(x+(2k+1)\pi)$; $\sin(x+(2k+1)\pi)$ ($k \in Z$)

Exercice 7 :

1°) a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ seulement

b) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ seulement

2°) a) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ seulement

b) Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ seulement

Exercice 8 :

Démontrer les égalités suivantes :

$(\sin(x)-\cos(x))^2 = 1-\sin(2x)$

$(\sin(x)-\cos(x))(1+\sin(x)\cos(x)) = \sin^3(x)-\cos^3(x)$

$\sin^4(x)-\cos^4(x) = 1-\cos^2(x)$

$\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$

$(\cos(x)+\sin(x))^2 - (\cos(x)-\sin(x))^2 = 2\sin(2x)$

Exercice 9 :

1°) Résoudre le système d'équations d'inconnu (a,b) suivante : $\begin{cases} a\frac{\pi}{3} + b\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \\ a\frac{\pi}{3} - b\frac{\pi}{12} = 5\frac{\pi}{12} \end{cases}$

2°) Calculer alors $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$, $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$

Exercice 10 :

1°) Donner une relation entre $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$

2°) a) Exprimer $\cos^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$

b) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$

Exercice 11 :

Soit $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ tel que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

1°) a) Quel est le signe de $\sin(\theta)$?

b) Donner une relation entre $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$

c) Trouver alors la valeur de $\sin(\theta)$

2°) a) Exprimer $\sin(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$

b) Calculer alors $\sin(2\theta)$

c) Trouver la valeur exacte de θ

Exercice 12 :

Soit x un nombre réel tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $\cos(x) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Calculer $\cos(2x)$ et en déduire la valeur de x

Exercice 13 :

Soit deux nombres réels x et y éléments de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tels que :

$\sin(x) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1°) a) Vérifier que $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

b) Calculer $\cos(x)$

c) Calculer $\sin(y)$; quelle est la valeur de y ?

2°) a) Calculer $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$

b) Calculer $\cos(x-y)$ et $\sin(x-y)$, en déduire la valeur de x

Exercice 14

Démontrer que dans un triangle ABC rectangle en A, $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$.
La réciproque est-elle vraie ?

CHAPITRE 10 :SUITES NUMERIQUES REELLES

I. GENERALITES

1. Définition

On appelle suite numérique réelle, toute application u d'une partie I de N dans R. L'image d'un entier n (de I) est notée u_n

$u : I \to R$
$n \mapsto u(n) = u_n$

Le terme d'indice n qui est u_n , est appelé terme général de la suite u et on note aussi $u = (u_n)$

Si u est définie pour tout $n \in N^*$
- le 1^e terme est u_1
- le 2^e terme est u_2
- le n^e terme est u_n

Si n est définie sur N
- le 1^e terme est u_0
- le 2^e terme est u_1
- le n^e terme est u_{n-1}

Deux façons de définir une suite :

Une suite peut être définie par la donnée de l'expression de son terme général en fonction de n

Exemple :

(u_n) est la suite définie par

$u_n = \frac{n}{n+1}$ ($u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$)

$u_0 = 0$; $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_{100} = \frac{100}{101}$

- On peut aussi définir une suite par la donnée d'un premier terme (u_0 ou u_1 en général) et d'une relation entre deux termes consécutifs quelconques de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple : (u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

On a:

$u_1 = \frac{u_0}{u_0+1} = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{u_1}{u_1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}$; $u_3 = \frac{1}{4}$

La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ est dite relation de récurrence.

La relation de récurrence peut lier trois termes (ou même plus) consecutifs.

Exemple : (u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ ; \ u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - u_{n-1}}{u_n + u_{n-1}} \end{cases}$$

On a alors

$u_3 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$; $u_4 = \frac{u_3 - u_2}{u_3 + u_2}$ … ;

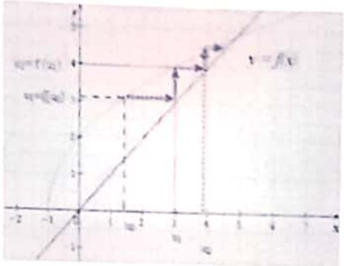
2)Représentation graphique des termes d'une suite

Si la suite est définie par $u_n = f(n)$. On trace la courbe représentative de f

$u_n = f(n)$, $u_1 = f(1)$

- Si (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On trace la courbe représentative de f et la droite d'équation y = x



3)Sens de variation d'une suite :

a. **définitions :**

- Une suite (u_n) est dite croissante si quel que soit n, $u_{n+1} \geq u_n$
- Une suite (u_n) est dite croissante si quel que soit n, $u_{n+1} \leq u_n$
- (u_n) est dite constante ou stationnaire si quel que soit n, $u_{n+1} = u_n$

Etude de variation :

1ere méthode

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$: • si

$u_{n+1} - u_n \geq 0$; (u_n) est croissante

- si $u_{n+1} - u_n \leq 0$; (u_n) est croissante
- si $u_{n+1} - u_n = 0$; (u_n) est constante

2e méthode

Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout n, (u_n) est croissante

si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout n, (u_n) est croissante

si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ pour tout n, (u_n) est stationnaire (ou constante)

3e méthode

Si (u_n) est définie par $u_n = f(u_n)$, on étudie la variation de f sur $[0 ; +\infty[$

si f est croissante, (u_n) est croissante
si f est croissante, (u_n) est croissante
si f est constante, (u_n) est constante

II.- SUITES PARTICULIERES

1. Suites arithmétiques :

a. Définition :

Un suite (u_n) est une suite arithmétique, si quel que soit n, $u_{n+1} - u_n$ est une constante r.
On a donc pour tout n, $u_{n+1} - u_n = r$ ou $u_{n+1} = u_n + r$
Le réel r est appelé raison de (u_n)

On a alors, si u_0 est le 1er terme de (u_n) :

$$u_1 = u_0 + r$$
$$u_2 = u_1 + r$$
$$u_3 = u_2 + r$$
$$\ldots$$
$$u_n = u_{n-1} + r$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + nr$$

$$u_n = u_0 + nr \quad (1)$$

et si $p \in N$ $\quad u_p = u_0 + pr \quad (2)$

(1)-(2) $u_n - u_p = (n-p)r$

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1er terme u_0 e de raison r
Posons $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$
Considerons la somme
$s_n = 1 + 2 + \ldots + n$

$$s_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$$
$$s_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$$

Par addition membre à membre ,

$$2s_n = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$
$$= u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \ldots + u_0 + nr$$
$$= (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \ldots + n)$$

$$S_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(2u_0 + nr)(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_0 + nr)(n+1)}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_2 = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

où u_0 : le 1er terme de la somme, u_n : le dernier terme de la somme et (n+1) : le nombre de termes.

On a, par exemple,

$$u_3 + u_4 + \ldots u_{25} = 23\frac{u_3 + u_{25}}{2}$$

2.- Suites géométriques :

a. Définitions :

(u_n) est une suite géométrique s'il existe $q \in R$ tel que quel que soit n,
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.
Le réel q est appelé raison de la suite géométrique (u_n) et on a
$u_{n+1} = q \cdot u_n$

b. Expression de u_n en fonction de n

Si (u_n) est une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q, on a
$u_1 = qu_0$, $u_2 = qu_1$, $u_3 = qu_2$, ……, et $u_n = qu_{n-1}$
On a alors
$u_1 u_2 u_3 \ldots u_n = q^n . u_0 u_1 u_2 \ldots u_{n-1}$
Et après simplification :
$u_n = q^n u_0$ (1)

Si $k \in N$ $\quad u_k = q^k u_0$

(2)

$\frac{(1)}{(2)}$ donne $\frac{u_n}{u_k} = \frac{q^n}{q^k} = q^{n-k}$

d'où, quels que soient n et k

$$u_n = q^{n-k} u_k$$

b. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de 1er terme u_0

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$
$$qS_n = qu_0 + qu_1 + \ldots + qu_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}$$
$$S_n - qS_n = u_0 - u_{n+1} = u_0 - q^{n+1}u_0$$

Si $q \neq 1$, $S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ où u_0 1er terme de la somme et n+1 nombre de termes de la somme

III.- LIMITE D'UNE SUITE :

1.- Définitions :

On dit que (u_n) admet l pour limite si lorsque n prend les valeurs de plus en plus grandes, les termes u_n finissent par s'accumuler autour de l.

Si on pose $\begin{array}{l} u : R \to R \\ x \mapsto u(x) \end{array}$ où u est telle que $u(n) = u_n$ pour tout entier n, on peut écrire : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = l$

On dit dans ce cas que (u_n) est convergente et qu'elle converge vers l.
Une suite non convergente est dite divergente.
(u_n) est divergente si elle a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, ou si elle n'a pas de limite

2.- Suites de référence :

a. Cas d'une suite

Soit $u_n = u_0 + nr$

- Si $r < 0$ $\lim(u_n) = -\infty$
- Si $r > 0$ $\lim(u_n) = +\infty$
- Si $r = 0$, $\lim(u_n) = u_0$

b. Suite du type $u_n = n^{\alpha}$

- Si $\alpha > 0$, $\lim(u_n) = +\infty$

Si $\alpha < 0$, $\lim(u_n) = 0$

c. Cas d'une suite géom

Théorème :

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = q^n$

- si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$
- si $q = 1$, (u_n) est stationnaire et converge vers 1
- si $0 < |q| < 1$, $\lim(u_n) = 0$
- si $q \leq -1$, (u_n) n'a pas de limite

Remarque :

Considérons la suite (S_n) définie par $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite géométrique de raison q et de 1er terme u_0

Si $q \neq 1$, $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Et si $|q| < 1$, $\lim q^{n+1} = 0$ donc, (S_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty}(S_n) = \dfrac{u_0}{1 - q}$

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 - n + 1$.
a) Calculer U_0 et U_{10}.
b) Exprimer, en fonction de n, $U_n + 1$ et U_{n+1}.

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \dfrac{1}{n+1}$.
a) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ en fonction de n.
b) En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $r = \dfrac{1}{2}$.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Calculer U_{10}.

Exercice 4 :

Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_4 = 5$ et $U_{11} = 19$.
Calculer la raison r et U_0.

Exercice 5 :

Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 7$ et de raison $q = 3$.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Calculer U_5.

Exercice 6 :

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%.
Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités.
a) On note $P_0 = 25000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $(2000 + n)$.
Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
b) Calculer la production de l'usine en 2005.

Exercice 7 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = \dfrac{3 + 2U_n}{5}$ (pour tout $n \geqslant 0$).
a) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1$ (pour tout $n \geqslant 0$).
Montrer que $V_{n+1} = \dfrac{2}{5}V_n$ (pour tout $n \geqslant 0$).
En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison b et le premier terme V_0.
b) Déduire de la question précédente que $U_n = 1 + 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ (pour tout $n \geqslant 0$).
c) Montrer que $U_{n+1} - U_n = -3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ (pour tout $n \geqslant 0$).
En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

Exercice 8

Des tuyaux sont rangés comme indiqué sur la figure

1°) Quel est le nombre total de tuyaux dans un empilement de 5 couches ? 12 couches ?

2°) On a stocké 153 tuyaux, combien y a-t-il de couches ?

3°) Pour ranger 200 tuyaux, combien faut-il de couches ? Combien reste-t-il de tuyaux ?

Exercice 9:

Dans un placement à intérêt simple, les intérêts ne sont pas pris en compte pour le calcul des intérêts des années suivantes.
Dans un placement à intérêts composés, les intérêts d'une année s'ajoutent au capital pour le calcul des intérêts de l'année suivante.
M Savadogo place un capital de 5 millions.
1 - Calculer la valeur de son capital au bout de 5 ans dans le cas où
a) il fait un placement à intérêts simples avec un taux de 5%
b) il fait un placement à intérêts composés avec un taux de 3,5%
2 - On note C_n la valeur du capital au bout de n années avec le placement à taux simple.
a) Exprimer en fonction de C_n le capital C_{n+1} au bout de (n+1) années.
b) Déterminer le nombre d'années à partir duquel la valeur de son capital est supérieure à 10 millions.
3 - On note S_n la valeur de son capital au bout de n années avec le placement à taux composés.
a) Exprimer en fonction de S_n son capital S_{n+1} au bout de (n+1) années.
b) Comparer S_{10} et C_{10}

Exercice 10 :

L' entreprise la « BOUSSOLE » prévoit d'augmenter sa production de 500 unités par an. La production en 2015 est de 2500 unités.

- Quelle sera la production en 2020 ?
- En quelle année la production atteindra-t-elle le double de la production en 2015 ?
- Quelle sera alors le nombre total d'unités produites depuis 2015 ?

Exercice 11 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} u_1 = \text{[illegible]} \\ u_{n+1} = \dfrac{n\,u_n + 3}{n+1} \end{cases}$ pour tout $n \geq 1$

(v_n) telle que $v_n = n\,u_n$ pour tout $n \geq 1$

1°) a) Calculer u_1, u_2 et u_3

b) Calculer v_1, v_2 et v_3

2°) a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n

b) Calculer $v_{n+1} - v_n$. Que dire de la suite (v_n) ?

c) Donner alors l'expression explicite de v_n

3°) a) Calculer la somme $v_1 + v_2 + \dots + v_{20}$

b) Pour quelle valeur de p, $v_p = 92$?

c) Calculer alors la somme $v_1 + v_2 + \dots + v_p$

Exercice 12:

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1°) Calculer u_1 et u_2

2°) Soit (v_n) telle que $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison r

b) Donner l'expression explicite de v_n. En déduire celle de u_n

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 13 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{n\,u_n}{n+1} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite (v_n) définie par $v_n = n(u_n - 1)$ pour tout $n > 0$

1°) Calculer u_2, u_3 et u_4

2°) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison r à déterminer

3°) Donner l'expression explicite de v_n, puis celle de u_n

4°) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Interpréter

5°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 14:

Chahed est en train de lire un livre. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.

1°) A quelle page en est Chahed ?

2°) Combien de pages comporte ce livre ?

(On suppose que le livre commence à la page n°1)

4°) a) Exprimer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

b) En déduire l'expression de $S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

Exercice 15:

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1°) Calculer u_1 et u_2

2°) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique dont on déterminera sa raison et son premier terme.

3°) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

4°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

Exercice 16:

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$ pour tout $n > 0$

1°) Calculer u_2, u_3 et u_4

2°) Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout $n > 0$ par $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme v_1

b) Donner l'expression explicite de v_n

c) En déduire l'expression explicite de u_n. Calculer u_2, u_3, u_4, u_{50}

Exercice 17 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 3u_{n+1} = u_n - 1 \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2u_n + 1$

1°) Calculer u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2

2°) a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n

b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique, préciser sa raison

c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) Déterminer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n

En déduire $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Exercice 18:

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1°) Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n)

2°) On considère la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{u_n + 3}{u_n - 4}$ pour tout $n \in IN$

a) Calculer v_0, v_1 et v_2

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?

c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

d) Calculer $v_{n+1} - v_n$. En déduire le sens de variation de la suite (v_n)

3°) Calculer les limites de (u_n) et (v_n)

4°) Calculer $S_n = v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n

Exercice 19:

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + a \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

où $a \in IR$

1°) Sachant que $u_2 = \frac{5}{4}$, calculer a

2°) Dans cette question, on prend $a = \frac{1}{2}$. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in IN$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme

b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n

c) Calculer la limite de v_n et celle de u_n

3°) Exprimer les sommes suivantes en fonction de n :

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Exercice 20 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{5}{6} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3

2°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 3u_n + 5$ pour tout $n \in IN$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser la raison q et le premier terme v_0

b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 21:

Lors d'une élection, un certain nombre de candidats sont en présence au premier tour. Chacun d'eux réunit exactement deux fois moins de voix que celui qui lui est immédiatement supérieur. Un deuxième tour sera-t-il nécessaire ?

Exercice 22 :

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3

2°) a) Montrer que si $0 \le u_n \le 1$ alors $0 \le u_{n+1} \le 1$

b) Que peut-on dire de u_n pour tout $n \in IN$?

Exercice 23 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1°) Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Ni l'un ni l'autre ?

2°) Démontrer que, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $0 \le u_n \le 3$

3°) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in IN$ par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique

b) Exprimer v_n en fonction de n

c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis de n. Que vaut u_{10} ?

Exercice 24

Une balle élastique tombe d'une tour de 63 m de haut. A chaque rebond, la balle remonte exactement d'un dixième de sa hauteur de chute.

Quelle sera la distance totale parcourue par la balle avant de s'arrêter au sol ?

Exercice 25 :

Soit la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n > 0$

b) Montrer que si $u_n \le 2$, alors $u_{n+1} \le 2$. Que dire de la suite (u_n) ?

2°) a) Remarquer que $u_{n+1} + u_n > 0$ pour tout $n \in IN$,

et que $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)$

b) Etudier alors dans $[0;2]$ le signe de $u_{n+1} - u_n$

c) Quelle est la variation de (u_n) ?

3°) En déduire qu'elle est convergente et donner sa limite

CORRIGE

Exercice 1

a) $U_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$ et $U_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 91$

b) $U_n + 1 = (n^2 - n + 1) + 1 = n^2 - n + 2$

$U_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$

Exercice 2

a) $U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$

Donc, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$

b) Pour tout n, $U_{n+1} - U_n < 0$. Donc la suite est décroissante.

Exercice 3

a) $U_n = U_0 + n \times r = 4 + \frac{1}{2}n$

b) $U_{10} = 4 + \frac{1}{2} \times 10 = 9$.

Exercice 4

$U_{11} = U_4 + (11-4) \times r \Leftrightarrow 19 = 5 + 7r \Leftrightarrow r = 2$

$U_4 = U_0 + 4 \times a \Leftrightarrow 5 = U_0 + 8 \Leftrightarrow U_0 = -3$.

Exercice 5

a) $U_n = q^n \times U_0 = 7 \times 3^n$.

b) $U_5 = 7 \times 3^5 = 1701$.

Exercice 6

a) Baisser une grandeur de 4% revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{4}{100}\right) = 0{,}96$.

Pour tout n, $P_{n+1} = 0{,}96 \times P_n$. Cela prouve que (P_n) est une suite géométrique de raison 0,96.

b) $P_5 = q^5 \times P_0 = (0{,}96)^5 \times 25000 \approx 20384$.

Exercice 7

a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{3 + 2U_n}{5} - 1 = \frac{2U_n - 2}{5} = \frac{2}{5}(U_n - 1) = \frac{2}{5}V_n$.

La suite (V_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 1 = 5$.

b) $V_n = b^n \times V_0 = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Or, $V_n = U_n - 1$. Donc, $U_n = 1 + V_n = 1 + 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

c) $U_{n+1} - U_n = 1 + 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1 - 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$= 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \left(\frac{2}{5} - 1\right) = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \left(\frac{-3}{5}\right) = -3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n < 0$.

La suite (U_n) est bien décroissante.

Chapitre 11 : DENOMBREMENT

I.- GENERALITES SUR LES ENSEMBLES

1. Ensemble-Elément

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de E telle que quel que soit l'objet a, on peut dire sans ambiguïté que a est ou n'est pas un élément de E

Si a est un élément de E, on écrit $a \in E$ si non $a \notin E$

Deux ensembles E et F sont égaux, et on écrit $E = F$, s'ils possèdent les mêmes éléments.

On dit que E est donné en compréhension s'il est défini par une propriété caractéristique de ses éléments.

Exemple :

E = {x, x est un nombre entier inférieur ou égal à 6}

On dit que E est donné en extension s'il est défini par la donnée d'une liste de ses éléments

Exemple : E = {a,b,c}

L'ensemble vide, noté ϕ, est l'ensemble qui n'a aucun élément.

Un ensemble qui n'a qu'un seul élément est un singleton.

2. Partie d'un ensemble : Inclusion

Soit A et E deux ensembles

On dit que A est une partie de E (ou un sous ensemble de E ou inclus dans E) si tous les éléments de A sont éléments de E

On écrit $A \subset E$

$(A \subset E) \Leftrightarrow$ (si $x \in A$ alors $x \in E$)

$(A \not\subset E) \Leftrightarrow (\exists x,\ x \in A$ et $x \notin E)$

A n'est pas inclus dans E s'il existe un élément de A qui n'est pas dans E.

Propriétés :

- Quel que soit l'ensemble E
  $E \subset E$
  $\phi \subset E$
- Soient A, B et C des ensembles
  Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$
  Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$

Ensemble des parties :

Les parties d'un ensemble E constituent un ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $P(E)$

P(E) = {A, A ⊂ E}

$A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$

Propriétés :

Quel que soit l'ensemble E

$E \in P(E), \phi \in P(E)$ donc $P(E) \neq \phi$

- Si $E = \phi$
  P(E) = {φ}
- Si E = {a}
  P(E) = {φ, {a}}
- E = {a, b}
  P(E) = {φ, {a}, {b}, {a, b}}

E = {a, b, c}

P(E) = {φ, {a}, {b}, {c}{a, b}, {b, c}, {a, c}, {a, b, c}

Si E a n éléments alors P(E) en a 2^n

3. Complémentaire d'une partie

a. Définition

Soient A et E deux ensembles

L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A est appelé complémentaire de A dans E et noté $C_E A$ ou $\overline{A}$

$\overline{A} = C_E A = \{x, x \in E \text{ et } x \notin A\}$

Si x est un élément de E, on a $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$

Et aussi $x \in A \Leftrightarrow x \notin \overline{A}$

b. Propriétés

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E

- $\overline{E} = \varnothing ; \overline{\varnothing} = E$
- $\overline{\overline{A}} = \overline{(\overline{A})} = A$ (On dit que A et $\overline{A}$ sont complémentaires (l'un de l'autre))
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
- $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- $A = \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} = B$

4. Réunion et intersection de deux ensembles

a. Définitions

Soient A et B deux ensembles, la réunion de A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B

$A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Et l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et B est l'intersection de A et B et noté $A \cap B$

$A \cap B = \{x, x \in A \text{ et } x \in B\}$

b. Propriétés :

Quels que soient A et B

$A \subset A \cup B$

$B \subset A \cup B$

$A \cap B \subset A$

$A \cap B \subset B$

$A \cap A = A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup A = A$

$A \cup B = B \cup A$

$A \cup \varnothing = A$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Si $A \subset E$

$A \cup \overline{A} = E \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Si $A \subset B$ alors $A \cap C \subset B \cap C$ et A

Loi de Morgan :

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

5. Partition d'un ensemble

Soient E un ensemble et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de E

$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une partition de E si les A_i sont tous non vides et si quel que soit $x \in E$ il existe un et un seul A_i tel que $x \in A_i$

On montre que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une partition de E si

- $A_i \neq \phi$, quel que soit i
- $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$

Exemple :

$E \neq \phi ; A \subset E ; A \neq \phi$ et $A \neq E$

$\{A, \overline{A}\}$ est- il une partition de E ?

- $A \neq \phi, \overline{A} \neq E$ car $A \neq E$
- $A \cap \overline{A} = \phi$
- $A \cup \overline{A} = E$

$\{A, \overline{A}\}$ est donc une partition de E

6. Ensemble produit

On appelle produit (cartésien) de A et B l'ensemble des couples (x ;y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. On le note : $A \times B$

$A \times B = \{(x; y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$

Remarque :

- $(x ; y) = (x' ; y') \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$
- $(x ; y) \neq (y ; x)$ sauf si $x = y$
- Si A = B , $A \times B = A \times A = A^2$

Généralisation :

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, \text{et } x_n \in A_n\}$

Ses éléments sont appelés des n-uplets, n-uples, n-tuples ou n-listes

$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \Leftrightarrow x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \cdots, x_n = x'_n$

Si

$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A \times A \times \cdots \times A = A^n$

II.-DENOMBREMENT

1. Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle « factorielle (de) n » le réel noté $n!$ défini par

- Si $n = 0, n! = 0! = 1$
- Si $n \neq 0$, $n! = n(n-1) \cdots 3 \times 2 \times 1$

Exemples :

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

Propriétés :

$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \times 2 \times 1$

$n! = n(n-1)!$

$n! = n(n-1)(n-2)!$

Exemple

$7! = 7 \times 6 \times 5 \cdots 1 = 7 \times 6! = 7 \times 6 \times 5!$

Cardinal d'un ensemble :

Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'éléments de E. On le note $\text{card}E$.

Propriétés

$E = \phi$, $\text{card}E = 0$

Si $A \cap B = \phi$, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B$

Dans le cas général

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$

- si $A \subset B$, alors $cardA \le cardB$

- $card(A \times B) = (cardA)(cardB)$
- $card(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = (cardA_1)(cardA_2) \cdots (cardA_n)$
- $card(A^2) = (cardA)^2$
- $card(A^n) = (cardA)^n$

2. Arrangement

a. Définition :

Soit E un ensemble ayant n éléments et $p \le n$.

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E, deux à deux distincts.

Exemples :

- $E = \{a, b, c, d\}$

$(a, b, c), (a, c, d), (d, b, a)$ sont des arrangements de 3 éléments de E

(a, b, a) n'est pas un arrangement d'éléments de E

- $E = \{1, 2, \ldots, 6\}$

Un nombre de 3 chiffres différents écrit avec les éléments de E est un arrangement de 3 éléments de E

- Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10

On tire successivement et sans remise 3 jetons de l'urne.

Le résultat peut se représenter par un triplet (x_1, x_2, x_3) ou x_1 désigne le numéro du 1er jeton, x_2 désigne le numéro de 2e jeton, x_3 désigne le numéro du 3e jeton

Comme le tirage est sans remise, x_1, x_2, x_3 sont tous différents

On peut donc assimiler le résultat des tirages à un arrangement de 3 éléments pris parmi les 10

Remarque :

Deux arrangements distincts diffèrent soit par la nature soit par l'ordre des éléments

$(a, b, c) \neq (a, c, b)$

$(a, b, c) \neq (a, c, d)$

b. Nombre d'arrangements :

Considérons un ensemble E ayant n éléments et soit $p \le n$

On veut dénombrer tous les arrangements de p éléments de E.

Pour le premier élément de l'arrangement, on a n possibilités.

Avec chacune de ces n possibilités, on peut former (n-1) arrangements en prenant un élément parmi les (n-1) éléments restants. On peut donc au total former n(n-1) arrangements de deux éléments de E

Avec chacun des ces n(n-1) possibilités on peut former (n-2) arrangements de 3 éléments en lui associant un élément pris parmi les (n-2) autres , donc au total, on peut avoir

n(n-1)(n-2) arrangements de 3elements de E

……………………

Lorsque le (p-1) élément est choisi, on n'a plus que (n-p+1) choix pour le pe élément pour former les arrangements de p éléments

On a alors
$n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$
arrangements de p éléments de E possibles

Théorème

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble ayant n éléments est :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

4. Permutation :

E étant un ensemble ayant n éléments. Une permutation des éléments de E est un arrangement de n éléments de E.

Le nombre de permutation des éléments de E est donc :

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Théorème :

Le nombre de permutation de n éléments est : $P_n = n!$

5. Combinaison :

a. Définition

Soit un ensemble ayant n éléments et $p \le n$; une combinaison de p éléments de E est une partie de E ayant p éléments

Exemple :

- $E = \{a, b, c\}$

$\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ sont des combinaisons de 3 éléments de E

- Un sac contient 10 boules

On extrait simultanément de ce sac 3 boules. On peut assimiler un résultat de cette extraction à une combinaison de 3 éléments

b. Nombre de combinaison :

Soit E un ensemble tel que $CardE = n$, $p \le n$

Posons $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et considérons
$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \subset E$

On peut former $p!$ permutations des éléments de A. Mais comme une permutation des éléments de A est un arrangement de p éléments de E. on a $p!$ arrangements des p éléments de E (formés avec les éléments de A)

On a donc $p!$ arrangements avec une combinaison de p éléments de E

Si C_n^p est le nombre de combinaisons de E, on peut obtenir au total $p!\,C_n^p$ arrangements. Et on obtient tous les arrangements de cette façon

Or le nombre d'arrangements de p éléments est A_n^p, on a l'égalité :

$p!\,C_n^p = A_n^p$

Théorème :

Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Propriétés :

- $C_n^0 = 1$
- $C_n^1 = n$
- $C_n^n = 1$
- $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$

- ***Triangle de Pascal :***

n \ p	0	1	2	3	
0	C_0^0				
1	C_1^0	C_1^1			
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2		
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
⋮					
N	C_n^0	C_n^1			$C_n^p + C_n^{p+1}$
n+1	C_{n+1}^0	C_{n+1}^1			

Ce qui donne :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

- ***Développement de Newton***

On montre que quels que soient a, b réels, et $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

ou

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Exemples :

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \cdots + C_n^n x^n$

$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

Application : Nombre des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble à n éléments

Le nombre de parties à 0 élément est C_n^0

Le nombre de parties à 1 élément est C_n^1

Le nombre de parties à 2 éléments est C_n^2

Le nombre de parties à p éléments est C_n^p

Le nombre de parties à n éléments est C_n^n

Le nombre des parties de E est égal à

$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n = \text{card}E$

III - DENOMBREMENT D'APPLICATIONS :

Soit f une application d'un ensemble $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ vers un ensemble F

f est parfaitement définie par la donnée de $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_p)$

A chaque application f de E vers F correspond donc un et un seul p-uplets $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_p))$ d'éléments de E. Et réciproquement à chaque p-uplets $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ d'éléments de F correspond une et une seule application f (qui est définie par $b_1 = f(a_1),\ b_2 = f(a_2), \ldots,\ b_p = f(a_p)$).

Le nombre d'applications de E vers F est donc égal au nombre de p-uplets d'éléments de F

Si $\text{Card}F = n$ le nombre de p-uplets éléments de F est $(\text{Card}F)^p = n^p$ D'où

Théorème :

Le nombre d'application d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est n^p

Le p-uplets correspondant à une injection est formé de p éléments 2 à 2 distincts donc c'est un arrangement de p éléments de F

Théorème :

Le nombre d'injection d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments (avec $p \le n$) est égal au nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n. A_n^p

Puisque si $\text{Card}E = \text{Card}F$ et ou $f : E \to F$ est injective alors f est bijective on a le nombre de bijection de E vers F avec $\text{Card}E = \text{Card}F$

Théorème :

Le nombre du bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments est égal au nombre d'arrangements de n éléments pris parmi n, donc au nombre de permutation de n éléments P_n

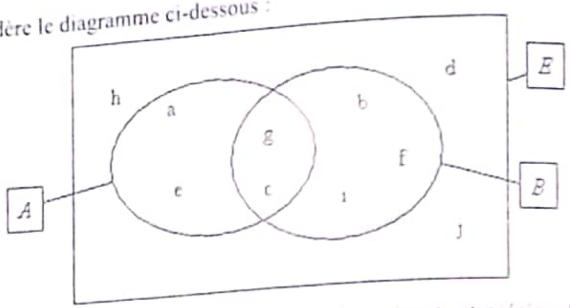
EXERCICES

DENOMBREMENT

Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Exercice 1 :

On considère le diagramme ci-dessous :



1°) Enumérer les éléments de chacun des ensembles suivants et préciser leurs cardinaux respectifs :

E ; A ; B

$A \cap B$; $A \cup B$

$\overline{A}$; $\overline{B}$

$A - B$; $B - A$

$\overline{A \cup B}$; $\overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B}$; $\overline{A} \cup \overline{B}$

2°) Rappeler les formules donnant : $Card(A \cup B)$, $Card(\overline{A})$ et $Card(A - B)$

Exercice 2 :

On désigne par E l'ensemble des nombres entiers naturels plus petits que 16, par I l'ensemble des nombres impairs de E, par P l'ensemble des nombres pairs de E et par M_3 l'ensemble des nombres multiples de 3 de E.

Représenter les ensembles E, I, P et M_3 dans un même diagramme ; y faire figurer tous les éléments de E.

Exercice 3 :

Dans une classe de 42 élèves, chaque élève pratique un ou deux sports collectifs :

- le volleyball
- le basketball

les deux sports.

Sachant que 27 élèves pratiquent le Volleyball

et que 18 élèves pratiquent les 2 sports

Combien d'élèves pratiquent le Basketball ?

Exercice 4 :

Les 50 élèves d'une classe de 1ère disposent de deux options culturelles, la musique et la peinture.

27 élèves pratiquent la musique ; 29 élèves pratiquent la peinture et 5 élèves ne pratiquent aucune des deux activités.

Chercher le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement la musique, ceux qui pratiquent uniquement la peinture et ceux qui pratiquent les deux activités.

Exercice 5 :

Dans une classe de première, sont étudiées les langues vivantes suivantes : Anglais, Allemand et Espagnol. Chaque élève étudie au moins une langue.

5 étudient les 3 langues, 7 l'anglais et l'allemand, 8 l'anglais et l'espagnol, 9 l'allemand et l'espagnol

Enfin 20 etudient seulement l'anglais, 15 l'allemand et 18 l'espagnol

1°) Quel est l'effectif de cette classe ?

2°) Représenter cette classe par un diagramme

Exercice 6 :

Sur 8224 voitures vendues par une société commerciale, 5243 sont équipées d'un lecteur MP3 tandis que 4932 sont équipées d'une climatisation et 1927 voitures ne possèdent ni lecteur MP3 ni climatisation.

Combien de voitures sont à la fois équipées d'un lecteur MP3 et d'une climatisation ?

Exercice 7 :

Dans une classe de 50 élèves ; à la question :

- Qui aiment le Basket-ball ? 20 élèves ont levé la main.
- Qui n'aiment pas le Volley-ball ? 35 élèves ont levé la main.
- Qui aiment à la fois le Basket-ball et le Volley-ball ? 10 élèves ont levé la main.

1°) Combien d'élèves n'ont jamais levé la main ?

2°) Combien d'élèves ont levé la main une seule fois ? Deux fois ? Trois fois ?

– DENOMBREMENT –

Dénombrement d'Arrangements et de Permutations

Exercice 1 :

Une permutation d'un ensemble fini E est une façon d'ordonner les éléments de E

1°) Donner deux permutations de chacun des ensembles suivants :

$\{a,b\}$

$\{1,2,3\}$

$\{a,e,i,u,o\}$

2°) Combien y a-t-il de permutations d'un ensemble à 2 éléments ?d'un ensemble à 3 éléments ?d'un ensemble à 4 éléments ?d'un ensemble à 5 éléments ?d'un ensemble à 6 éléments ?

(On note $n!$ (factorielle n) le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments)

Exercice 2 :

1°) De combien de façons différentes peut-t-on ranger 5 boules de couleurs différentes dans 5 cases alignées de tels sortes que chaque case ne contienne qu'une seule boule ?

2°) Combien de sigles de 5 lettres différents peut-t-on former avec les lettres du mot « MATHS » ?

3°) Combien y-a-t-il d'ordre d'arrivées possibles lors d'une course d'endurance à 8 partants, si on suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo ?

4°) De combien de façon différentes peut-t-on numéroter de 1 à 9 les 9 chaines télévisées accessibles à Antananarivo ?

Exercice 3 :

Un arrangement 3 à 3 des éléments d'un ensemble fini E est une façon d'ordonner 3 éléments distincts de E

1°) On pose $E=\{a,b,c,d,e\}$

Donner trois arrangements 2 à 2 des éléments de E

Donner trois arrangements 3 à 3 des éléments de E

Donner trois arrangements 4 à 4 des éléments de E

Donner trois arrangements 5 à 5 des éléments de E. Que remarque-t-on ?

2°) a) Combien y a-t-il d'arrangements 2 à 2 dans un ensemble à 3 éléments ?

b) Combien y a-t-il d'arrangements 2 à 2 dans un ensemble à 4 éléments ?

c) Combien y a-t-il d'arrangements 3 à 3 dans un ensemble à 4 éléments ?

d) Combien y a-t-il d'arrangements 4 à 4 dans un ensemble à 9 éléments ?

e) Combien y a-t-il d'arrangements p à p dans un ensemble à n éléments ?

3°) On note A_n^p le nombre d'arrangements p à p dans un ensemble à n éléments

Vérifier que $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$ ($p<n\in IN$)

Exercice 4 :

1°) M.Savadogo dispose de 8 boules de couleurs différentes

De combien de façons différentes peut-t-il remplir 5 cases alignées avec ses boules ? Chaque case ne peut contenir qu'une seule boule

2°) Combien de sigles de 5 lettres distincts peut-t-il former avec les lettres du mot « COMBIEN » ?

3°) Combien y a-t-il de résultats possibles en quinté, lors d'une course de chevaux à 10 partants, si on suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo ?

4°) De combien de façons différentes peut-t-on choisir un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier dans une classe de 40 élèves ?

Exercice 5 :

Une combinaison 3 à 3 des éléments d'un ensemble fini E est une façon de grouper 3 éléments distincts de E

1°) On considère l'ensemble $E=\{a,b,c,d\}$

a) Enumérer tous les arrangements 3 à 3 des éléments de E. Combien y en a-t-il ?

b) Enumérer toutes les combinaisons 3 à 3 des éléments de E. Combien y en a-t-il ?

2°) Soit la combinaison (a,c,d)

a) Combien d'arrangements 3 à 3 peut-on former avec cette unique combinaison ?

b) Quelle relation lie le nombre d'arrangements 3 à 3 et le nombre de combinaisons 3 à 3 des éléments de E ?

3°) Soit E un ensemble fini à n éléments, et soit $p<n$

a) Combien d'arrangements p à p peut-t-on former avec une seule combinaison p à p des éléments de E ?

b) Quelle relation lie le nombre A_n^p et le nombre C_n^p, nombres de combinaisons p à p des éléments de E ?

c) Montrer que $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Exercice 6 :

1°) On dispose de 8 boules identiques

De combien de façons différentes peut-t-on remplir 5 cases alignées avec des boules ? Chaque case ne peut contenir qu'une seule boule.

2°) De combien de façons différentes peut-t-on choisir 4 représentants de la classe dans une classe de 40 élèves ?

3°) Combien de mains de 13 cartes peut-on avoir dans un jeu de 32 cartes ?

Exercice 7 :

A l'arrivée d'une course de chevaux, le quinté gagnant dans l'ordre est le :

2 ; 7 ; 5 ; 9 ; 3

1°) Combien y-a-t-il de quintés gagnants ?

2°) Combien y-a-t-il de quintés gagnants dans le désordre ?

Exercice 8 :

1°) Calculer :

A_8^3 ; C_7^3 ; $2!\times 3!$

$6!$; A_{13}^3 ; C_{15}^{12}

C_{13}^8 ; $\dfrac{A_{12}^3}{4!}$; $\dfrac{4!\times A_{10}^4}{8!}$

$\dfrac{5!\times 4!}{6!\times 3!}$; $\dfrac{A_9^4}{A_9^3}$; $\dfrac{19!}{17!}$

$\dfrac{(n+1)!}{n!}$; $\dfrac{(n+2)!}{n!}$; C_{10}^1

C_{15}^0 ; $\dfrac{78!\times 204!}{80!\times 202!}$; $\dfrac{C_{15}^{13}\times C_{15}^{11}}{C_{15}^{10}}$

$\dfrac{C_{n+1}^p}{C_n^p}$; $\dfrac{100!\times 203!}{201!\times 101!}$; $4!\times\dfrac{A_{11}^3}{C_{12}^5}$

$\dfrac{59!\times 121!}{119!\times 60!}$; $\dfrac{A_{12}^4}{4!\times C_{11}^3}$

2°) Résoudre dans

$C_n^2 = 7n$; $C_n^2 = 21$

$C_x^5 = C_x^7$; $C_x^3 = 56$

$\dfrac{C_n^3}{C_n^2} = 18$; $\dfrac{C_n^5}{C_n^4} = 17$

$\dfrac{C_n^4}{C_n^2} = 13$; $C_x^5 = C_x^7$

$C_n^2 + C_n^1 = C_n^0$; $C_{x-1}^{x-5} = 3\times C_{x-3}^{x-7}$

$2\cdot C_n^1 + 2\cdot C_n^2 + 2\cdot C_n^3 = 7n$

Exercice 9 :

Montrer que :

$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$; $C_n^p = C_n^{n-p}$

$C_{13}^{11} = C_{10}^{10} + C_{11}^{10} + C_{12}^{10}$

$C_{10}^5 = C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 + C_7^4 + C_8^4 + C_9^4$

$C_{n+1}^{n-1} = C_{n-2}^{n-2} + C_{n-1}^{n-2} + C_n^{n-2}$

$C_{n+1}^p = C_n^{n-p+1} + C_n^p$

$1 + C_{n+2}^{n-2} = n + C_{n-1}^2 + C_n^3 + C_{n+1}^4$

Exercice 10 :

Ecrire le plus simplement possible :

$C_x^5 + C_{x-1}^4 + C_{x-1}^3$; $C_{15}^x + C_{14}^{x-1} + C_{14}^{x-2}$

$C_n^x + C_{n+1}^{x-1} + C_n^{x-1}$; $C_{x-1}^{y-1} + C_{x-1}^y + C_x^{y+1}$

$C_{x-1}^3 + C_{x-1}^4 + C_x^{x-3}$; $C_{2n-1}^3 + C_{2n}^{2n-3} + C_{2n-1}^4$

Exercice 11 :

Soit $T(N,N)$ un tableau carré comportant $(N+1)$ lignes et $(N+1)$ colonnes, les lignes et colonnes sont numérotées de 0 à N.

On remplit ce tableau de tel sorte que la case se trouvant à la n-ème ligne et p-ème colonne contienne le nombre C_n^p pou tout n, $p < N$:

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	...	$C_{(p-1)}$	C_p	...	C_N
L_0	C_0^0									
L_1	C_1^0	C_1^1								
L_2	C_2^0	C_2^1	C_2^2							
L_3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3						
L_4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$				
$L_{(n-1)}$							C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p		
L_n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	...		C_n^p		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\ddots$	
L_N	C_N^0	C_N^1	C_N^2	C_N^3	C_N^4		...	C_N^p	...	C_N^N

1°) Montrer les égalités suivantes :

$C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$ et $C_n^{n-p} = C_n^p$

2°) A partir de ces deux égalités, remplir le tableau $T(9,9)$ comportant 10 lignes et 10 colonnes

3°) Trouver sans faire de calcul les valeurs exactes de :

C_6^4 , C_8^5 , C_9^3 et C_9^6

Exercice 12 :

1°) Développer suivant les puissances décroissantes de a les expressions suivantes :

$(a+b)^0$

$(a+b)^1$

$(a+b)^2$

$(a+b)^3$

$(a+b)^4$

2°) Donner le développement de $(a+b)^n$, $n \in IN$ (Formule du binôme de Newton)

2°) Donner le développement de $(a-b)^n$ pour $n \in IN$

3°) Développer $(x+1)^3$, $(x-1)^3$, $(a+b)^5$, $(a-b)^6$

$(x+1)^n$, $(x-1)^n$, $(2x+1)^7$, $(x-2)^5$

Exercice 13 :

1°) Démontrer que $(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2+3b^2)$

2°) En déduire une simplification de l'expression :

$f(x) = (x+\sqrt{1+x^2})^3 + (x-\sqrt{1+x^2})^3$

Exercice 14:

1°) Quel est le coefficient de x^7 dans le développement de $(1+x)^{15}$?

2°) Quel est le coefficient de x^7 dans le développement de $(2-x)^{10}$?

Exercice 15 :

1°) Ecrire le développement de $(a+b)^5$

2°) Ecrire le développement de $(1+x)^5$

3°) Ecrire le développement de $(1-\sqrt{2})^5$ sous la forme $p+q\sqrt{2}$, ($p, q \in Z$)

Exercice 16 :

Une expérience consiste à lancer 5 fois de suite une pièce de pile ou face

1°) Combien y a-t-il de résultats possibles dans cette expérience ?

2°) Parmi ces résultats, combien font apparaître :

a) 0 fois pile b) 1 fois pile

c) 2 fois pile d) 3 fois pile

e) 4 fois pile f) 5 fois pile

3°) Montrer que $\forall n \in IN$ $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ puis vérifier les résultats trouvés dans 2°)

Exercice 17 :

Une expérience consiste à lancer 3 fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6

1°) Combien y a-t-il de résultats possibles dans cette expérience ?

2°) Dans combien de cas peut-on faire apparaître :

a) 0 fois la face n°1 b) 1 fois la face n°1

c) 2 fois la face n°1 d) 3 fois la face n°1

3°) Montrer que $\forall n \in IN \; 6^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 5^k$ puis vérifier les résultats trouvés dans 2°)

Chapitre 12 : RAPPELS SUR LES VECTEURS

1. Bipoints équipollents

Deux bipoints (A, B) et (A', B') sont équipollents si le quadrilatère ABB'A' est un parallélogramme.

Caractérisation : (A, B) et (A', B') sont équipollents si (A, B') et A', B) ont même milieu.

2. Vecteurs

a) Définitions :

- On appelle vecteur $\overrightarrow{AB}$ du plan l'ensemble des bipoints équipollents à (A, B). Tout bipoint équipollent à (A,B) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La direction de $\overrightarrow{AB}$ est la droite (AB), son sens de A vers B, et sa norme $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A,B) = AB$.

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.
- Si $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A,B) = 0$, $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul et on écrit $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
- Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à 1.
- Si A, B, C et D ne sont pas alignés, ABCD est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

b) Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Théorème :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Théorème

Soit $\vec{u}$ un vecteur donné.

Pour tout point A, il existe un point unique M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

3. Produit scalaire

a) définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel $\vec{u}.\vec{v}$ défini par $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})$. (forme géométrique)

Et si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, alors $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$ (Forme analytique)

Remarque :

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

donc $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

On a donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

b) Propriétés :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (On dit que le produit scalaire est commutatif)
- $\vec{0}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{0} = 0$.
- $(k.\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

c) Applications :

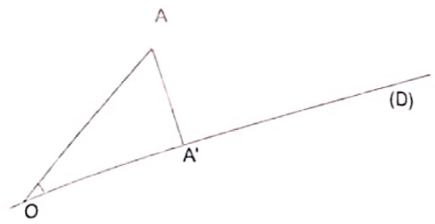
- Projection orthogonale

Soit A un point du plan, et (D) une droite.

La projection de A sur (D) est le point A' de (D) tel que (AA') soit orthogonale à (D).

C'est le point de D le plus proche de A.

La distance de A à (D) est d(A,A').



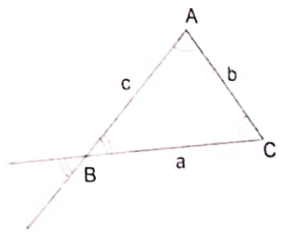
Si on considère le triangle OA'A qui est triangle en A', on a :

$\cos(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA}) = \frac{OA'}{OA}$.

D'où $OA' = OA\cos(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA})$

- Relation entre les côtés 'un triangle quelconque

ABC est un triangle quelconque, AB = c, BC = a et AC = b



D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC.AB.\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$

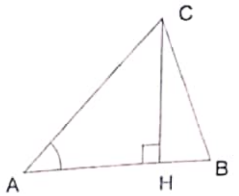
Comme $\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA}) = \cos\hat{A}$,on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$.

__Remarque :__
Lorsque le triangle est rectangle en A : cos A = 0, on retrouve le théorème de Pythagore

De même, on a, pour les deux autres côtés, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\hat{C}$

L'aire d'un triangle ABC est égale à $S = \frac{1}{2}AB.HC$ où H est la projection de C sur la droite (AB). Donc $S = \frac{1}{2}bc.\sin\hat{A}$



De même , $S = \frac{1}{2}ac.\sin\hat{B}$ et $S = \frac{1}{2}ab.\sin\hat{C}$.

D'où $2S = ac.\sin\hat{B} = ab.\sin\hat{C} = bc.\sin\hat{A}$.

En divisant par abc, on a $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$,

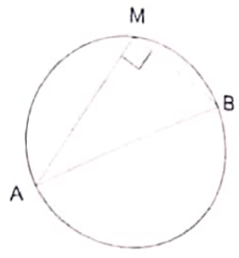
et en passant à l'inverse, $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$

- __Equation d'une droite__

Etant donné un point $A(x_0, y_0)$.
Un point M(x,y) appartient à la droite D passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{u}(a,b)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$.
Cette égalité donne l'équation cartésienne de la droite D.

- __Equation d'un cercle :__

- Un point M(x;y) appartient au cercle de centre A(a,b) et de rayon R si AM = R



Comme $AM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, on a l'équation cartésienne du cercle de centre A(a,b) et de rayon R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

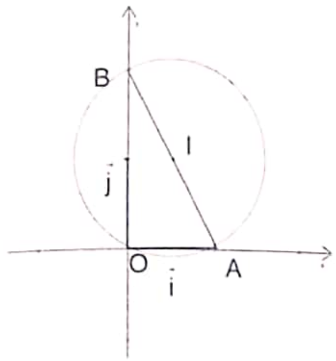
- Considérons un cercle de diamètre [AB].
Si M est un point de ce cercle distinct de A et de B, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux. Donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

Cette égalité donne une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB].

Exemple :
Donner une équation du cercle de diamètre [AB] où A (1 ; 0) et B(0 ; 2).

- Un point M(x ; y) appartient à ce cercle si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$
Comme les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont respectivement (x-1 ; y) et (x ; y-2), cette égalité s'écrit (x-1).x+y.(y-2)=0.

Ce qui donne en développant : $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$: c'est l'équation du cercle.



- Le centre de ce cercle est le point $I(\frac{1}{2};1)$ et son rayon est

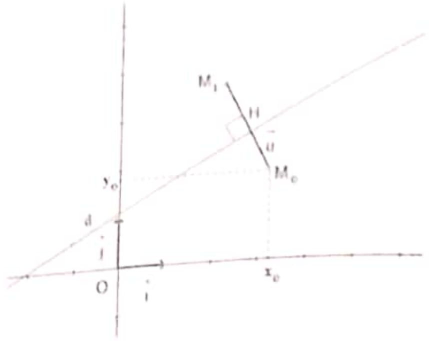
$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

On peut retrouver l'équation en utilisant la première méthode
Un point $M(x ; y)$ appartient à ce cercle si $AM = r$, donc si

$$\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } (x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$$

- Distance d'un point à une droite d'équation donnée

On considère une droite d d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $M_0(x_0 ; y_0)$ n'appartenant pas à d
Notons H le projeté orthogonal de M_0 sur d
La distance de M_0 à d est la distance de M_0 à H



Le vecteur $\vec{u}(a;b)$ est normal à d.

Le point M_1 défini par $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{u}$ est tel que $M_0M_1 = \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$

Si x_H et y_H sont les coordonnées de H, on a, puisque H appartient à d, $ax_H + by_H = c$

D'une part, $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0H}$ ont respectivement comme coordonnées $(a;b)$ et $(x_H - x_0 ; y_H - y_0)$

Donc $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H} = a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0)$.

Ou $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -(ax_0 + by_0 + c)$

D'autre part $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H} = M_0M_1 \cdot M_0H \cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H})$

D'où $M_0M_1 \cdot M_0H \cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H}) = -(ax_0 + by_0 + c)$

$$M_0H = \frac{-(ax_0+by_0+c)}{M_0M_1 \cdot \cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H})}$$

Ainsi $$M_0H = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H})}$$

Chapitre 13 : TRANSFORMATIONS DU PLAN

I. GENERALITES :

Une application f de E vers F est bijective si quel que soit y de F, il existe un et un seul élément x de E tel que $f(x) = y$

Une transformation est une bijection du plan dans lui-même

Les symétries, les homothéties de rapports non nuls, les rotations, et les translations sont des transformations du plan

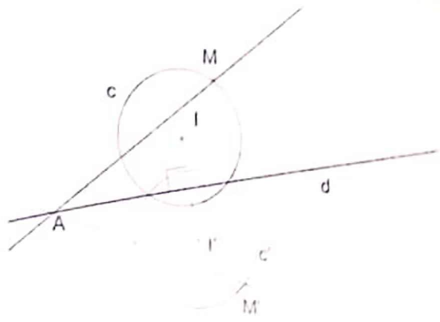
II. LES TRANSFORMATIONS USUELLES

1. Réflexions (ou symétries orthogonales)

La réflexion par rapport à une droite d associe :
- à chaque point M n'appartenant pas à d, le point M' tel que d soit la médiatrice du segment [MM']
- à chaque point M de d, le point M lui-même

Par une réflexion :
- l'image d'une droite est une droite,
- l'image d'un segment est un segment de même longueur,
- l'image d'un cercle C est un cercle de même rayon (et dont le centre est l'image du centre de C)

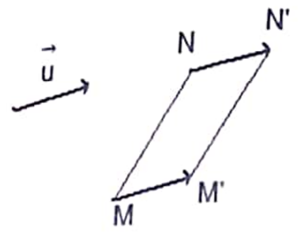
Les réflexions conservent le distance : si M' est l'image de M et N' l'image de N, alors M'N' = MN



I' est l'image de I, M' celle de M, la droite (AM') celle de la droite (AM). L'image du cercle c (de centre I) est le cercle c'(de centre I')

2. Translation

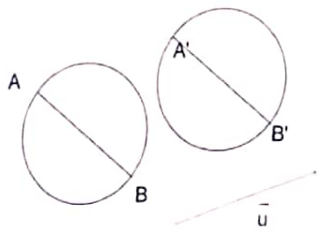
Une translation de vecteur $\vec{u}$ associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$



Pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.
MNN'M' est donc un parallélogramme.

Les translations conservent donc la distance.

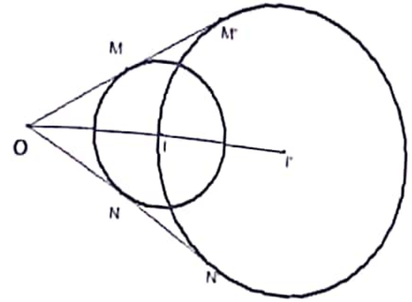
Par une translation,
- l'image d'une droite (AB) est une droite parallèle à (AB)
- l'image d'un segment est un segment de même longueur
- l'image d'un cercle de centre O est un cercle de même rayon et de centre O', image de O par la translation
- l'image d'un triangle ABC est un triangle semblable à ABC



3. Homothétie

Une homothétie de centre O et de rapport k (où $k \in IR^*$) associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Pour tous points M et N d'image respective M' et N', on a $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$
On en déduite que M'N' = |k|MN.



Par une hon
- l'image d'une droite (AB) est une droite parallèle à (AB)
- l'image d'un segment de longueur l est un segment de longueur |k|.
- l'image d'un cercle de centre I et de rayon R est un cercle de rayon |k|R et de centre I', image de I par l'homothétie
- l'image d'un triangle ABC est un triangle semblable à ABC

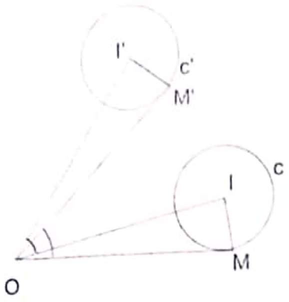
Homothéties particulières :
- Une homothétie de rapport 1 est l'identité du plan
- Une homothétie de centre O et de rapport -1 est une symétrie centrale, de centre O

Une homothétie de rapport différent de 1 ne conserve pas les distances

4. Rotation

Une rotation de centre O et d'angle θ associe à tout point M le point M' tel que OM' = OM et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$.

Par une rotation d'angle θ
- l'image d'une droite (AB) est une droite faisant un angle θ avec (AB)
- l'image d'un segment de longueur l est un segment de même longueur
- l'image d'un cercle de centre I de même rayon et de centre I', image de I par l'homothétie
- l'image d'un triangle ABC est un triangle semblable à ABC .



Rotations particulières :

- Une rotation d'angle 0 (ou 2π) est l'identité.
- Une rotation de centre O d'angle π est une homothétie de centre O et de rapport -1. C'est aussi une symétrie centrale de centre O.

Quelques propriétés :

- Si ABC est un triangle isocèle en A, alors C est l'image de B par une rotation.
- Si ABC est un triangle isocèle et rectangle en A, alors C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Si ABC est un triangle équilatéral, alors C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

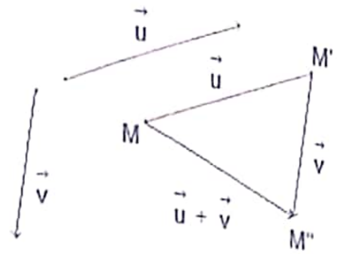
Les rotations conservent le distance : si M' est l'image de M et N' celle de N, alors M'N' = MN

II. Composées de transformations usuelles.

1. Rappels

Si f est une application de E vers F et g une application de F vers G, alors gof est l'application de E dans G qui, à tout élément x de E, associe l'élément z de G tel que $gof(x) = g[f(x)]$

On associe d'abord à x son image y par f, puis à y son image z par g.



2. Composée de deux translations

Si $t_{\vec{u_1}}$ la translation de vecteur $\vec{u_1}$ et $t_{\vec{u_2}}$ la translation de vecteur $\vec{u_2}$.

Alors la composée de $t_{\vec{u_2}}$ et $t_{\vec{u_1}}$ est la translation de vecteur $\vec{u_2} + \vec{u_1}$

Donc $t_{\vec{u_1}} \circ t_{\vec{u_2}} = t_{\vec{u_2}+\vec{u_1}}$

3. Composée de deux homothéties de même centre

Une homothétie de centre O et rapport k se note en général h (O , k)

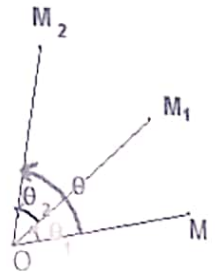
La composée d'une homothétie de centre O et rapport k_1 et d'une homothétie de centre O et de rapport k_2 est l'homothétie de centre O et de rapport $k=k_1.k_2$.

Ce qui s'écrit $h(O,k_1)oh(O,k_2) = h(O,k_1.k_2)$

4. Composée de deux rotations de même centre

Soit M_1 l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ_1 et M_2 l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle θ_2

On a $\begin{cases} OM_1 = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = \theta_1 \end{cases}$ et $\begin{cases} OM_2 = OM_1 \\ (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \theta_2 \end{cases}$



On a donc $\begin{cases} OM_2 = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$

Théorème :

La composée de deux rotations r_1 et r_2 de même centre O et d'angle respectifs θ_1 et θ_2 est la rotation de centre O et d'angle $\theta_1 + \theta_2$

5. Composée de deux réflexions d'axes d et d'

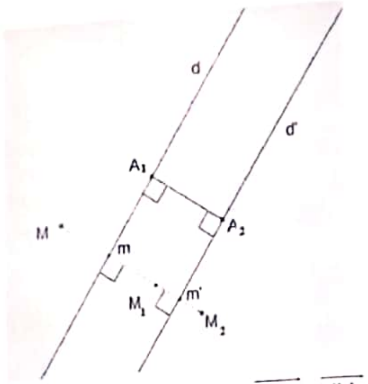
Soit d une droite. On va noter s_d la réflexion d'axe d

a) Si d et d' sont parallèles.

Notons M_1 l'image de M par S_d, et M_2 l'image de M_1 par $S_{d'}$. M_2 est donc l'image de M par lacomposée $S_{d'} o S_d$ de $S_{d'}$ et S_d Le point M_1, image de M par

la réflexion d'axe d est tel que $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{mM_1}$ et M_2, image de M_1 par la réflexion

d'axe d' est tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1m'}$.



En utilisant la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$

m étant le milieu de $[MM_1]$ et m' le milieu de $[M_1M_2]$, on a

$\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{mM_1} + \overrightarrow{M_1m'}$

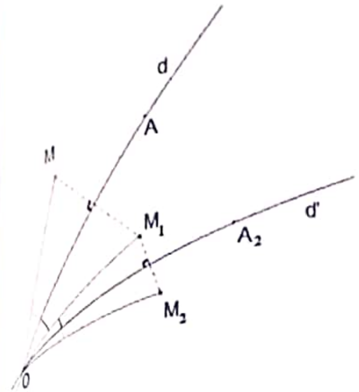
Or $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{A_1A_2}$,

D'où $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$.

Théorème :

La composée de deux réflexion d'axes d et d' parallèles est la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ où A_1 et A_2 sont respectivement des points de d et d' avec (A_1, A_2) perpendiculaire à d.

b) Si d et d' sont sécantes d'intersection O



Soient A_1 un point de d et A_2 un point de d'. On reprend les notations précédentes .

- Si M est en O, il en est de même de M_1 et de M_2.
- Supposons M distinct de O.

On a $OM = OM_1 = OM_2$, et puisque (OA) est la médiatrice de $[MM_1]$, on a

$(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA_1})$

De même, puisque (OA_2) est la médiatrice de $[M_1 M_2]$,

$(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OA_2})$

Par la relation de Chasles pour les angles, on a :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) &= (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OA_2}) + (\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OM_2}) \\ &= 2(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OM_1}) + 2(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OA_2}) \\ &= 2(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})\end{aligned}$$

On a donc $\begin{cases} OM = OM_2 \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = 2(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) \end{cases}$

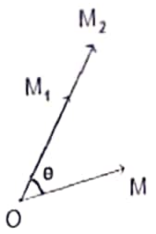
Théorème :

La composée de deux réflexion d'axes d et d' sécants en O est la rotation de centre O et d'angle $2(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$ où A_1 et A_2 sont respectivement des points de d et d'.

6. Composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre

Soit r la rotation de centre O et d'angle θ et h l'homothétie de centre O et de rapport k. Si M_1 est l'image d'un point M par r et M_2 l'image de M_1 par h, on a

$$\begin{cases} OM = OM_1 \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_2} = k\overrightarrow{OM_1}$$



Donc $OM_2 = k.OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM}, k\overrightarrow{OM_1}) = \theta$

La composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre est appelée similitude plane directe. Le rapport de l'homothétie est le rapport de la similitude, l'angle de la rotation est l'angle de la similitude et le centre commun est le centre de la similitude.

Donc si on note S la similitude de centre O, de rapport k et d'angle θ, et M' l'image de M par S, on a : $\begin{cases} OM' = K.OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \end{cases}$

Plus généralement une similitude plane est la composée d'une homothétie de rapport positif et d'une isométrie. Cette composition est commutative.

C'est une transformation qui multiplie les distances par un réel positif k, : il existe un réel k > 0, appelé rapport de la similitude, tel que si M et N sont deux points d'images respectives M' et N', alors M'N' = k.MN.

- Si la similitude conserve la mesure des angles orientés, on dit que c'est une similitude plane directe,
- Si la similitude transforme les angles orientés en leurs opposés, on dit que c'est une similitude plane indirecte.

III. APPLICATION RECIPROQUE

1. Rappel

Si f est une application de E vers F bijective, alors elle admet une réciproque, notée f^{-1}, de F vers E, bijective, définie ainsi : si $y = f(x)$, alors $x = f^{-1}(y)$.

$f\circ f^{-1}(y) = y$ pour tout y de F et $f^{-1}\circ f(x) = x$ pour tout x de E

2. Réciproque d'une translation

Une translation de vecteur $\vec{u}$ associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Donc $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$. Ainsi :

Théorème :

La réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$

3. Réciproque d'une réflexion :

M' est l'image de M par la symétrie d'axe d si d est la médiatrice de [MM'].
Donc :

Théorème :

La réciproque d'une réflexion d'axe d est cette réflexion même

4. Réciproque d'une homothétie

Une homothétie de centre O et de rapport k non nul associe à tout point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. Donc $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$. Ainsi :

Théorème :

La réciproque d'une homothétie de centre O et de rapport k non nul est l'homothétie de même centre O, et de rapport $\frac{1}{k}$

5. Réciproque d'une rotation

Une rotation de centre O et d'angle θ associe à tout point M le point M' tel que $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$, donc $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) = -\theta$

Théorème :

La réciproque d'une rotation de centre O et d'angle θ est la rotation de centre O et d'angle $-\theta$.

IV- ISOMETRIES

Lorsqu'une transformation conserve les distances, on dit que c'est une isométrie.
Une transformation f est donc une isométrie si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, on a M'N' = MN.

Les translations, les symétries, les rotations et les homothéties de rapports 1 sont des isométries.
Une homothétie de rapport différent de 1 n'est pas une isométrie.

La composée de deux isométries est une isométrie.

Chapitre 14 :STATISTIQUE

I- GENERALITES :

1.- Vocabulaires :

a.- Population - Variable

Effectuer une étude statistique consiste à collecter, organiser et exploiter des informations sur un ensemble appelé **population**, délimité par une propriété commune

Cette population est constituée d'**individus** ou **unités statistiques**, qui peuvent être des objets, des idées, des êtres vivants…

La propriété étudiée est appelée variable ou caractère.

Le caractère est **qualitatif** lorsque les valeurs prises ne sont pas des nombres, et **quantitatif**, lorsque les valeurs prises sont des nombres.

Un caractère quantitatif peut être discret si les valeurs prises sont isolées, ou continu s'il peut prendre toutes les valeurs possibles d'un intervalle.

b.- Effectifs – Fréquence- Classes

L'effectif total est le nombre d'individus de la population.

On note en général $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs prises par la variable étudiée et n_i le nombre d'individus sur lesquels on a observé la valeur x_i. n_i est appelé **effectif de la valeur** x_i de la variable.

La série statistique ainsi définie se note (x_i, n_i).

L'effectif total est alors $N = \sum_{i=1}^{n} n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_n$.

Le rapport $\frac{n_i}{N} = f_i$ est appelé fréquence de xi.

On a :

- $0 \le f_i \le 1$ quel que soit i
- $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{N} = 1$
- $100.f_i$ donne le pourcentage des individus ayant le caractère x_i.

Lorsque le caractère est continu, on ne peut pas considérer chaque valeur séparément, on regroupe alors ces valeurs par classe.

De même lorsque l'effectif est assez important, il est plus commode de regrouper les valeurs par classe.

Exemple :

La population étudiée est l'ensemble des élèves d'une classe. Le caractère étudié est la note obtenue lors d'un certain examen.

Les notes obtenues sont :

12 12 14 5 8 8 9 16 15 7 6 10 10 12 9 9 10 7 6 10 11 9 7 9 11

Ecrivons cette série de notes dans l'ordre croissant :

5 6 6 7 7 7 8 8 9 9 9 9 9 10 10 10 10 11 11 12 12 12 14 15 16

On voit que 1 élève a eu 5, deux ont eu 6, … On peut réécrire cette série sous forme de tableau :

Notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs	1	2	3	2	5	4	2	3	0	1	1	1

Effectifs cumulés – Fréquences cumulées

Considérons une série à caractère quantitatif x_i. On ordonne les valeurs dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$

Si n_i est l'effectif de la valeur x_i, on appelle effectif cumulé croissant jusqu'à la i[e] valeur le nombre : c'est le nombre des individus présentant une modalité inférieure à x_i.

Notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs	1	2	3	2	5	4	2	3	0	1	1	1
Effectif cumulé	1	3	6	8	13	17	19	22	22	23	24	25

Ce tableau nous donne le nombre d'élèves qui ont eu une note inférieure à une note donnée. Par exemple, 6 élèves ont eu une note inférieure ou égale à 7, 13 n'ont pas eu la moyenne…

On définit de même

- la **fréquence cumulée** croissante : $\sum_{j=1}^{i} f_j = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$ où N est l'effectif total de la population

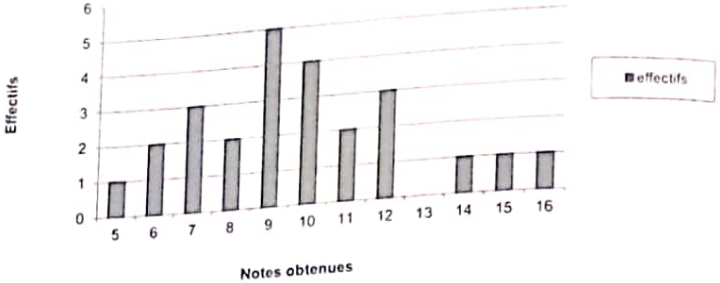
Notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
effectifs	1	2	3	2	5	4	2	3	0	1	1	1
Fréquences	0,04	0,08	0,12	0,08	0,2	0,16	0,08	0,12	0	0,04	0,04	0,0
Fréquences cumulées	0,04	0,12	0,24	0,32	0,52	0,68	0,76	0,88	0,88	0,92	0,96	1

2.- Diagrammes

Un diagramme est une représentation graphique de la série. Il permet de visualiser ensemble les données statistiques.

a) Diagramme à bandes. Diagramme à bâtons

On porte en abscisses les valeurs de la variable x et en ordonnées les effectifs. Les effectifs sont représentés par des rectangles (bandes) verticales de longueurs proportionnelles aux effectifs. On peut remplacer les bandes par des segments : on obtient un diagramme en bâtons.



b) Diagramme à une seule bande.

La longueur d'une bande est partagée proportionnellement aux effectifs ou aux fréquences.

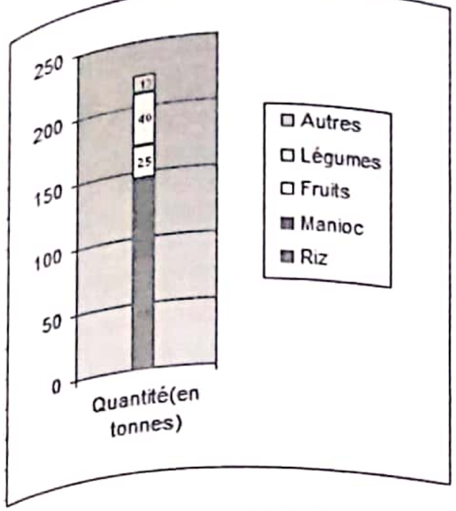
Exemple : Voici la production agricole annuelle d'une certaine commune rurale :

Produit	Riz	Manioc	Fruits	Légumes	Autres
Quantité (en tonne)	85	60	25	40	13

c) Diagramme à secteur

C'est un diagramme de même type que le diagramme à une seule bande.

Le disque est partagé en secteurs dont les angles sont proportionnels aux effectifs.



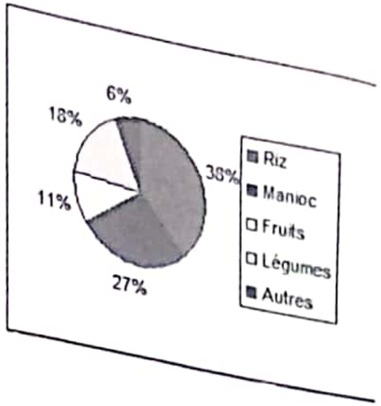


Diagramme à une seule bande Diagramme à secteur

d) Histogrammes : Cas d'une série continue ou série classée.

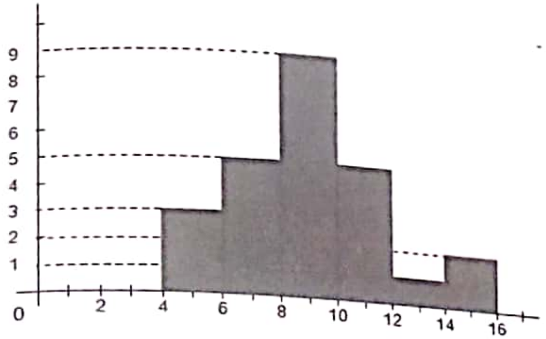
On porte en abscisses les valeurs de la variable x et en ordonnées les effectifs. L'effectif est représenté par un rectangle dont la base est égale à l'étendue de la classe et la hauteur proportionnelle à l'effectif.

Exemple

Dans l'exemple précédent, regroupons les notes en classes d'amplitude 2

On obtient le tableau suivant :

Notes	[4 ; 6]	]6 ; 8]	]8 ; 10]	]10 ; 12]	]12 ; 14]	]14 ; 16]
Effectifs	3	5	9	5	1	2



Polygones des effectifs
En reliant les extrémités des bâtons, on obtient le polygone des effectifs.
Dans le cas des histogrammes, on prend les centres des classes.

II- CARACTÉRISTIQUES D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

Un caractéristique est une grandeur qu'on utilise pour résumer une série statistique.
On distingue deux sortes de caractéristique : caractéristiques de position et caractéristiques de dispersion.

1.- Caractéristique de position

a) le mode :
Le mode (ou dominante) est la valeur la plus fréquente de la variable. C'est la variable qui a le plus grand effectif.
Le mode est défini même si la variable est qualitative.
Pour une série classée, dont les classes sont d'égal effectif, la classe modale est la classe qui correspond au plus grand effectif.
Si une série peut posséder un seul mode on dit qu'elle est unimodale. Si elle en possède plusieurs, on dit qu'elle est plurimodale.

b) la moyenne :
- Définition :

La moyenne arithmétique d'une série statistique est égale à la somme des valeurs du caractère divisées par leur nombre.

i- Cas des données énumérées : $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{N} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i$

ii- si la série est donnée par sa distribution d'effectifs, les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ayant respectivement pour effectifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$, alors :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

iii- Cas où les valeurs sont regroupées en classes : les n_i valeurs de la i-ème classe sont supposées groupées au centre x_i de la classe. On revient ainsi au cas précédent.

Remarque :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{N} = \frac{n_1}{N} x_1 + \frac{n_2}{N} x_2 + \ldots + \frac{n_k}{N} x_k$$

Donc si f_i est la fréquence de la variable x_i alors :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

- propriétés (à établir en exercice)

Soit une série statistique sur une population et une partition de cette population en deux sous-populations d'effectifs respectifs n_1 et n_2. Si m_1 et m_2 sont les moyennes respectifs des deux sous-populations, alors la moyenne de la population est $\bar{x} = \dfrac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{n_1 + n_2}$

Si $\bar{x}$ est la moyenne de la série (x_i, n_i),
- alors la moyenne de la série $(x_i - a, n_i)$ est $\bar{x} - a$
- la moyenne de la série (hx_i, n_i) est $h\bar{x}$

Donc , si on pose $y_i = ax_i + b$ alors la moyenne de la série (y_i, n_i) est $\bar{y} = a\bar{x} + b$

c) la médiane :
- définition :

C'est la valeur de la variable qui partage la population en deux parties de même effectif : c'est donc la valeur M de x_i telle que la moitié au plus des valeurs des x_i soient inférieures à M et la moitié au plus des valeurs de x_i supérieure à M

- Détermination de la médiane :
  - Cas d'une série discrète

On range dans l'ordre croissant les valeurs de la variable, chaque valeur étant écrite autant de fois qu'elle est prise :
- si le nombre de valeurs est impair, la médiane est la valeur du milieu
- si le nombre de valeurs est pair, on peut prendre comme médiane tout valeur comprise entre les deux valeurs au centre. Par convention, on prend la demi somme de ces deux valeurs : $M = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ si x_i et x_{i+1} sont les valeurs au centre.

Exemple :

5 6 6 7 7 7 8 8 9 9 9 9 9 10 10 10 10 11 11 12 12 12 14 15 16
↑
M

- Cas d'une série classée :

On trace le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants. La médiane M est le l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes.
Un autre manière de la déterminer est de tracer le polygone des effectifs cumulés (ou fréquence cumulées) et la droite d'équation $y = \frac{N}{2}$ ou N est l'effectif total de la population. La médiane est l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec le polygone.

2.- Caractéristique de dispersion.

Une caractéristique de dispersion est utilisée pour évaluer la dispersion d'une série. On utilise le plus souvent la variance et l'écart type.

Variance. Ecart type

- Définition

La variance d'une série est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne

$$V = n_1(x - x_1)^2 + n_2(x - x_2)^2 + \dots + n_k(x - x_k)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x - x_i)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

L'écart type d'une série est la moyenne quadratique des écarts à la moyenne. C'est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

- Remarques.

Plus la variance est grande, plus la série est dispersée.
Plus la variance est petite (voisin de 0), pus la série est resserrée autour de la moyenne.
La variance est une quantité positive ou nulle.

- Methode de calcul

Même avec des valeurs observées x_i très simples, il arrive souvent que la moyenne $\bar{x}$ soit un nombre décimal. Dans ce cas, le calcul de la variance V nécessite des calculs fastidieux.

La formule de Koenig : $V = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{N} - (\bar{x})^2$ (que vous allez démontrer en exercice) permet de simplifier les calculs.

- Propriétés (à établir en exercice)

La variance et l'écart-type de la série $(x_i - a, n_i)$ sont indépendants de a ce sont respectivement la variance et l'écart-type de (x_i, n_i).
Si la variance et l'écart-type de la série (x_i, n_i) sont respectivement V et σ, alors la série $(h x_i, n_i)$ a pour variance $V' = h^2 V$ et pour écart-type $\sigma' = |h|\sigma$

RECUEIL DE DEVOIRS SURVEILLES

Devoir n°1 de Mathématiques

Exercice 1

1. Résoudre les équations suivantes :
   a $x^2 = 7x$
   b $x^4 - x^2 = 0$
   c $-x^2 + 7x - 3 = 5 - 2x$
   d $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{6}x + 3\sqrt{2} = 0$
2. On cherche à résoudre l'équation (E) : $x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = 0$.
   a Montrer que $x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = (x+2)(x^2 + 4x + 5)$
   b Résoudre alors l'équation (E).

Exercice 2

1) Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.
Montrer que le polynôme P peut se factoriser sous la forme $P(x) = (x+1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un trinôme du second degré que l'on déterminera.
Déterminer alors les solutions de l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.

2) On considère la fraction rationnelle : $f(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 12x + 12}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 3 Soit $f(x) = x^2 + mx + m$, où m désigne un nombre réel.

1. Pour quelle valeur de m le nombre 1 est-il racine de f ?
   Déterminer alors l'autre racine.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f admet deux racines distinctes.
3. Existe-t'il des valeurs de m telles que, pour tout réel x, $f(x) > 1$?

Exercice 4 On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 20$.
On note C_f sa courbe représentative.

1. Vérifier que 1 est une racine de f, puis déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)Q(x)$.
   En déduire les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses, ainsi que le signe de $f(x)$.
2. a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x-2)^3 + 9(x-2)^2 - 8$.
   b) On note u la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $u(x) = (x-2)^3$.
   Ecrire u comme la composée de deux fonctions de référence, et en déduire le sens de variation de u.
   c) Déterminer le sens de variation de f sur $[2; +\infty[$.
   d) On appelle g la fonction définie sur $[3; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   Montrer que g est minorée sur $[3; +\infty[$, c'est-à-dire qu'il existe un réel a tel que, pour tout réel $x \in [3; +\infty[$, $g(x) \leqslant a$.

Devoir n°2 de Mathématiques

Exercice 1

1 Soit v et w deux fonctions définies et croissantes sur un intervalle I.
Montrer que la fonction $u = v + w$ est aussi croissante sur I

2 a) On considère la fonction f définie sur $]2, +\infty[$ par l'expression $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$.
Montrer que pour tout $x > 2$, $f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x-2}$

b) Dresser alors le tableau de variations de f

Exercice 2

1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et M le point de coordonnées $M(a; b)$.
On suppose que pour tout x tel que $(a + x) \in I$, on a aussi $(a - x) \in I$
Montrer que M est un centre de symétrie pour la courbe C_f si et seulement si, pour tout x tel que $(a + x) \in I$, on a $\dfrac{f(a+x) + f(a-x)}{2} = b$.

(*Indication : Soit A et A' deux points de C_f, symétriques par rapport à M.
Quelles sont les coordonnées de A et A' ? Que représente M pour le segment $[AA']$?*)

2 On considère la fonction g définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, par l'expression $g(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$, et on note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Montrer que C_g admet le point $M(-1, 3)$ comme centre de symétrie.

b) Montrer que pour tout $x > -1$, $g(x) = 3 - \dfrac{1}{x+1}$.
En déduire le sens de variation de g sur $]-1; +\infty[$.

c) Dresser alors le tableau de variation de g sur I.

Devoir n°3 de Mathématiques

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+5}{x^2 - 9}$.

Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 2 Soit $g : x \mapsto \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{(x+2)^2}$, et $h : x \mapsto 2x + 1$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

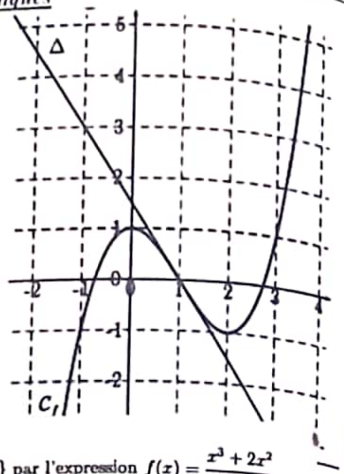
b) Quelle est la position relative des courbes C_g et C_h représentatives des fonctions g et h ?

c) Tracer C_h et l'allure de C_g.

Exercice 3 Montrer l'inégalité, pour tout x réel, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$.

Devoir n°4 de Mathématiques

Exercice 1
On donne ci-contre une partie de la courbe C_f représentant une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite Δ est tangente à C_f au point d'abscisse 1.
La tangente à C_f au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Par lecture graphique, donner sans justifier :
   a. $f(0)$, $f(1)$, $f'(1)$, $f'(2)$
   b. Le tableau de variation de f.
2. Soit h la fonction définie par $h(x) = [f(x)]^2$.
   a. Exprimer $h'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f'(x)$.
   b. Etudier le signe de $h'(x)$ sur $[0; 2]$ et en déduire

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A. *Etude d'une fonction auxiliaire.*
On pose $g(x) = x^3 - 3x - 4$.
1. Etudier le sens de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α, dans l'intervalle $[1; 3]$.
3. Donner un encadrement de α à 0,1 près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

B. *Etude des variations de f.*
Calculer $f'(x)$, et montrer que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

C. *Tangente.*
Déterminer l'équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse 2.

Exercice 3 Montrer que pour tout réel x,
$$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2.$$

Exercice 4 Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :
1. $A(x) = \sin(-x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
2. $B(x) = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(3\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Devoir n°5 de Mathématiques

Exercice 1 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x - 5 \text{ et, } g(x) = 2x^2 + 2x + 5$$
On note respectivement C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g.
1) Montrer que le point $A(2, 17)$ est un point de C_f et de C_g
2) Déterminer les coordonnées de tous les points d'intersection de C_f et de C_g

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 3x + 1$. On note $\mathcal{P}$ la parabole représentant graphiquement f dans un repère.
Pour m un nombre réel, on note (Δ_m) la droite d'équation $y = mx$.
Pour quelles valeurs de m la droite (Δ_m) coupe-t-elle la parabole en un unique point ?

Exercice 3 Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé, et $A(5\,;2)$, $B(3\,;4)$ et $C(0\,;1)$.
1) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) Calculer les longueurs AB et AC
c) En déduire une valeur de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2) Déterminer l'équation du cercle de diamètre [AB]
3) Déterminer l'équation de la hauteur issue de A du triangle ABC

Exercice 4 Soit $ABCD$ un carré de côté 2 et de centre O. On note I le milieu de $[AB]$.
1) a) Trouver un point $H \in (AB)$ tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 2$.
b) Déterminer alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$.
2) a) Démontrer que pour tout point M, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 1$
b) En déduire que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$ est le cercle de centre I passant par C.

Exercice 5 Soit A et B deux points tels que $AB = 5$.
1) Soit G le point défini par la relation : $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, puis en déduire les longueurs GA et GB.
2) Déterminer l'ensemble C des points M du plan tels que $2MA^2 + 2MB^2 = 30$.

Exercice 6 Soit les points $A(2; 3)$ et $B(-4; 1)$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation :
$$(x - 2)(x + 4) + (y - 3)(y - 1) = 6.$$

Devoir n°6 de Mathématiques

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Montrer que si a et c sont de signes contraires, alors la courbe représentative de la fonction f coupe exactement deux fois l'axe des abscisses.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 3x + 1$. On note $\mathcal{P}$ la parabole représentant graphiquement f dans un repère.

1) Pour p un nombre réel, on note $(\mathcal{D}_p)$ la droite d'équation $y = x + p$.
   Pour quelles valeurs de p la droite $(\mathcal{D}_p)$ coupe-t-elle la parabole en un seul point ? en deux points disctincts ?
2) Pour m un nombre réel, on note (Δ_m) la droite d'équation $y = mx$.
   Pour quelles valeurs de m la droite (Δ_p) coupe-t-elle la parabole en un unique point ?

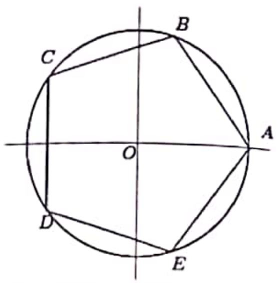
Exercice 3 Dans le plan orienté, ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}$.

M est un point de (AB), N est le symétrique de M par rapport à (AC) et P celui de N par rapport à (BC).

On souhaite démontrer que le triangle CMP est rectangle isocèle.

1) Justifier les égalités $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CN})$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CP}) = (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB})$.
2) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP})$. Conclure.

Exercice 4
$ABCDE$ est un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.



1) Indiquer les mesures des angles :
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}),\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}),\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}),\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}).$$
2) Quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D et E ?
3) Montrer la relation $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\overrightarrow{OA}$.
   On admettra de même la relation $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\overrightarrow{OA}$.
4) $ABCDE$ étant un pentagone régulier, on a (cette relation vectorielle n'est pas à démontrer) :
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{0}.$$
   En déduire alors une relation reliant $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
5) On admet la formule de duplication : pour tout nombre réel a, $\cos(2a) = 2(\cos(2a))^2 - 1$.
   a) Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
   b) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 5
On considère la fonction f définie sur $I =]1; +\infty[$ par l'expression : $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x - 1}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère.

1) Déterminer les réels α et β tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{2}{x - 1}$
2) Donner le sens de variation de la fonction f.
3) On considère la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$. Pour $x \in I$, on note P le point de C_f d'abscisse x, et Q le point de (Δ) d'abscisse x.
   a) Déterminer, en fonction de x, la distance algébrique PQ.
   b) Quelle est la position relative de C_f et de la droite (Δ) ?
   c) Que peut-on dire de la distance PQ lorsque x devient (très) grand ?
4) Représenter l'allure de C_f.

CORRIGE DES DEVOIRS SURVEILLES

Devoir n°1 de Mathématiques

Exercice 1

1. a $x^2 = 7x \iff x^2 - 7x = 0 \iff x(x - 7) = 0$ soit $x = 0$ ou $x = 7$.

b $x^4 - x^2 = 0 \iff x^2(x^2 - 1) = 0 \iff x^2(x - 1)(x + 1) = 0$ soit $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$.

c $-x^2 + 7x - 3 = 5 - 2x \iff x^2 - 9x + 8 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 32 = 49$: $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux racines réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + \sqrt{49}}{2} = 8 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - \sqrt{49}}{2} = 1.$$

d $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{6}x + 3\sqrt{2} = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sqrt{6}\right)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 4 \times 6 - 24 = 0$ donc l'équation admet une racine réelle double :
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$$

2. $(E) : x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = 0$.

a Pour tout réel x, $(x + 2)(x^2 + 4x + 5) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2x^2 + 8x + 10 = x^3 + 6x^2 + 13x + 10$

b $x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = 0 \iff (x + 2)(x^2 + 4x + 5) = 0$
$x + 2 = 0$ soit $x = -2$ ou $x^2 + 4x + 5 = 0$: $\Delta = 16 - 20 = -4$: $\Delta < 0$ donc l'équation du second degré n'admet pas de racine réelle. Finalement, l'équation (E) admet pour unique solution $x = -2$.

Exercice 2

1) Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$, alors on a : $P(x) = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$,

d'où on déduit que $\begin{cases} a = 3 \\ a + b = -7 \\ b + c = -7 \\ c = 3 \end{cases}$, soit donc, $a = 3$, $b = -10$ et $c = 3$.

Ainsi, $P(x) = (x+1)(3x^2 - 10x + 3)$. Le discriminant de $Q(x)$ est $\Delta = 64$ et ses racines sont $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = 3$. Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont donc : $S = \left\{-1; \frac{1}{3}; 3\right\}$

2) a) f est définie pour les valeurs de x telles que $3x^2 - 12x + 12 \neq 0 \iff 3(x-2)^2 \neq 0 \iff x \neq 2$.
f est donc définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) A l'aide de la factorisation obtenue au 1), on a

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3x^2 - 10x + 3$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x^2 - 12x + 12$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

On a alors,
$f(x) \geq 0 \iff x \in \left[-1; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty[$

Exercice 3 Soit $f(x) = x^2 + mx + m$, où m désigne un nombre réel.

1. $f(1) = 1^2 + m + 1 = 1 + 2m = 0 \iff m = -\frac{1}{2}$.
   Le produit des racines valant $\frac{c}{a} = m = -\frac{1}{2}$, on en déduit que la deuxième racine est $-\frac{1}{2}$.
2. f admet deux racines distinctes si et seulement si $\Delta > 0$, soit $\Delta = m^2 - 4m = m(m-4) > 0$.
   Δ est un trinôme du second degré qui a pour racines évidentes 0 et 4, et qui est positif à l'extérieur de ses racines. Ainsi, f admet 2 racines $\iff \Delta > 0 \iff m \in]\ \ \infty; 0[\cup]4; +\infty[$.
3. $f(x) > 1 \iff x^2 + mx + (m-1) > 0$
   Ce trinôme est toujours positif (ne change jamais de signe, et en particulier ne s'annule jamais) si $\Delta = m^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 < 0$, ce qui est impossible, un carré étant toujours positif ou nul. Ainsi, il n'existe pas de valeur de m telle que $f(x) > 1$ pour tout réel x.

Exercice 4 On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 20$.

1. $f(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 24 \times +20 = 0$, donc 1 est bien une racine de f.
   On cherche $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3x^2 - 24x + 20 \\ &= (x-1)Q(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 3 \\ c - b = -24 \\ -c = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -20 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)(x^2 + 4x - 20)$.

Les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses, sont les points qui ont comme abscisse telle que

$f(x) = 0 \iff (x-1)Q(x) = 0 \iff \big(x = 1 \text{ ou } Q(x) = 0\big)$.

$Q(x) = x^2 + 4x - 20$ est un trinôme du second degré qui a pour discriminant $\Delta = 96 > 0$, et adme donc deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-4 - \sqrt{96}}{2} = \frac{-4 - 4\sqrt{6}}{2} = -2 - 2\sqrt{6}$ et $x_2 = -2 + 2\sqrt{}$

Les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses ont donc pour coordonnées

$$(1; 0) \quad ; \quad (-2 - 2\sqrt{6}; 0) \quad \text{et} \quad (-2 + 2\sqrt{6}; 0).$$

2. a) Pour tout réel x, $(x-2)^3 + 9(x-2)^2 - 8 = (x^2 - 4x + 4)(x-2) + 9(x^2 - 4x + 4) - 8$
$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 9x^2 - 36x + 36 - 8$
$= x^3 + 3x^2 - 24x + 20 = f(x)$

b) On note u la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par $u(x) = (x-2)^3$.
Soit v la fonction cube : $v(x) = x^3$ et w la fonction affine $w(x) = x - 2$, alors $u(x) = v(w(x))$, ou $u = v \circ w$.
Comme la fonction cube v est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et la fonction affine w est croissante sur $[2; +\infty[$.

x	2 $\qquad$ $+\infty$
$w(x) = x - 2$	0 ↗
$v(x) = x^3$	0 ↗
$u(x) = v(w(x))$	0 ↗

c) On a $f(x) = u(x) + h(x) - 8$, où $h(x) = (x-2)^2 = (w(x))^2$.
Comme w est croissante et positive sur $[2; +\infty[$, $h(x) = (x-2)^2 = (w(x))^2$ est croissante sur $[2; +\infty[$.
Ainsi, la somme de deux fonctions croissantes $u + h$ est aussi croissante, et donc $f = u + h - 8$ est aussi croissante sur $[2; +\infty[$.

d)

x	3 $\qquad$ $+\infty$
f	2 ↗
$g = \frac{1}{f}$	$\frac{1}{2}$ ↘

$f(3) = (3-2)^3 + 9(3-2)^2 - 8 = 2$.

Ainsi, pour tout réel $x \in [3; +\infty[$, $g(x) \leqslant \frac{1}{2}$;

g est minorée par $\frac{1}{2}$ sur $[3; +\infty[$

Devoir n°2 de Mathématiques

Exercice 1

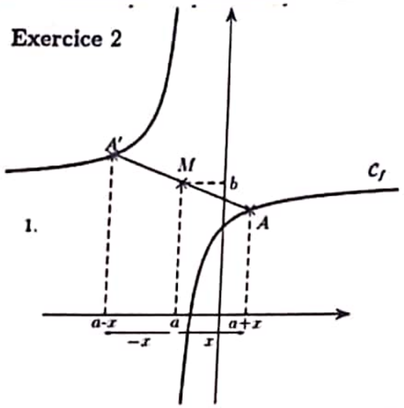
1. Soit v et w deux fonctions définies et croissantes sur un intervalle I.
   Alors, pour tous x et y de I, tels que $x < y$, on a $v(x) < v(y)$, car u est croissante sur I, et même $w(x) < w(y)$ car v est croissante sur I.
   En additionnant ces deux inégalités, on obtient $u(x) = v(x) + w(x) < v(y) + w(y) = u(y)$.
   La fonction u est donc croissante sur I.
2. a) Pour tout $x > 2$, $\quad x - 1 - \frac{2}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} - \frac{2}{x-2} = \frac{x^2 - 3x}{x-2} = f(x)$
   Ainsi, pour tout réel $x > 2$, $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x-2}$

   b) On peut écrire f sous la forme $f = v + w$, avec $v(x) = x - 1$ et $w(x) = \frac{-2}{x-2}$.
   - v, définie par $v(x) = x - 1$, est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$.
   - On peut écrire w sous la forme : $w = -2 \times \frac{1}{x-2} = -2 \times \frac{1}{g(x)}$.

   g définie par $g(x) = x - 2$ est une fonction affine croissante sur $]2; +\infty[$, donc $\frac{1}{g}$ décroissante sur $]2; +\infty[$, et alors $w = -2 \times \frac{1}{g}$ est croissante sur $]2; +\infty[$.

Exercice 2

1\.



Soit x tel que $(a+x) \in I$, et $A \in C_f$ de coordonnées $M(a+x, f(a+x))$.

Soit A' le symétrique de A par rapport à $M(a;b)$. L'abscisse de A' est donc $a-x$, et $A' \in C_f$ si et seulement si l'ordonnée de A' est $y' = f(a-x)$.

Comme A et A' sont symétriques par rapport à M, M est le milieu du segment $[AA']$, et donc, $b = \dfrac{f(a+x)+f(a-x)}{2}$

2\. On considère la fonction g définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, par l'expression $g(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$.

a) On applique le résultat précédent avec le point $M(-1;3)$ (soit $a=-1$ et $b=3$).
L'intervalle I est symétrique par rapport à -1 : pour $x \neq 0$, $-1+x \in I$ et $-1-x \in I$.
De plus, pour tout $x \neq 0$, $g(a+x)+g(a-x) = g(-1+x)+g(-1-x) = \dfrac{3(-1+x)+2}{(-1+x)+1} + \dfrac{3(-1-x)+2}{} = \dfrac{-1+3x}{} + \dfrac{-1-3x}{} = \dfrac{6x}{} = 6$.

Ainsi, $\dfrac{g(a+x)+g(a-x)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$, ce qui montre que $M(-1;3)$ est bien centre de symétrie pour C_g.

b) Pour tout $x > -1$, $3 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{3(x+1)}{x+1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{3x+2}{x+1} = g(x)$.

Ainsi, on peut écrire $g = 3 - \dfrac{1}{u}$, où u, définie par $u(x) = x+1$ est une fonction affine croissante, donc $\dfrac{1}{u}$ est décroissante, et alors $-\dfrac{1}{u} = -1 \times \dfrac{1}{u}$ est croissante, et finalement $g = -\dfrac{1}{u} + 3$ est croissante sur $]-1;+\infty[$.

c) On peut alors dresser le tableau de variation de g sur $]-1;+\infty[$, et compléter sur $]-\infty;-1[$ par symétrie :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	↗	‖	↗

(C_g est la courbe représentée en début d'exercice dots)

Devoir n°3 de Mathématiques

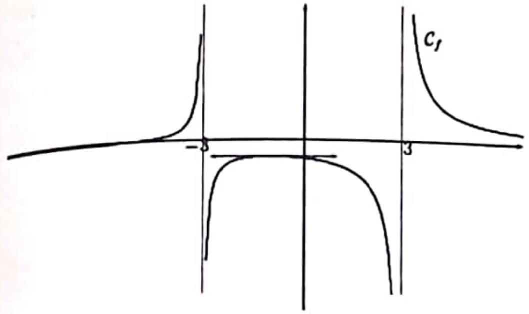
Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+5}{x^2-9}$.

Les fonctions $u : x \mapsto x+5$ et $v : x \mapsto x^2-9$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus $v(x) = x^2-9 = 0$ pour $x=3$ et $x=-3$. La fonction f, quotient des fonctions u et v est donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{-3;3\},\ f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{x^2+10x+9}{(x^2-9)^2}$$

Soit $P(x) = x^2+10x+9$. -1 est une racine évidente de P, et comme le produit des racines est 9, on en déduit que la deuxième racine est 9.

x	$-\infty$		-9		-3		-1		3		$+\infty$
$x^2+10x+9$		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
$(x^2-9)^2$		+	|	+	0	+	|	+	0	+	
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	‖	−	
$f(x)$		↘	$\frac{-1}{18}$	↗	‖	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	‖	↗	



Exercice 2 Soit $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+5x+4}{(x+2)^2}$, et $h : x \mapsto 2x+1$.

a) Les fonctions $u : x \mapsto 2x^2+5x+4$ et $v : x \mapsto (x+2)^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus $v(x) = 0$ pour $x=-2$. La fonction g, quotient des fonctions u et v est donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'x) = 4x+5$, et $v'(x) = 2(x+2) = 2x+4$, et,

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\},\ g'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{3x^2+8x+4}{(x+2)^4}$$

Soit $P(x) = 3x^2+8x+4$. $\Delta = 64-48 = 16 = 4^2$: le trinôme admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = -2$ et $x_2 = -\frac{2}{3}$.

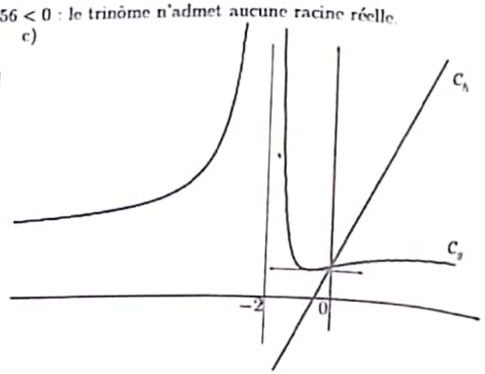
x	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x^2+8x+4$		+	0	−	0	+	
$(x+2)^4$		+	0	+	|	+	
$g'(x)$		+	|	−	0	+	
g		↗	|	↘		↗	

b) Soit $d(x) = g(x) - h(x)$, alors, pour tout $x \neq -2$,

$$d(x) = \frac{2x^2+5x+4-(2x+1)(x+2)^2}{(x+2)^2} = \frac{-2x^3-7x^2-7x}{(x+2)^2} = -x\frac{2x^2+7x+7}{(x+2)^2}$$

Soit $Q(x) = 2x^2+7x+7$. $\Delta = 49-56<0$: le trinôme n'admet aucune racine réelle.

c)



x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$Q(x)$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$d(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	

On en déduit que C_g est au dessus de C_h sur $]-\infty;-2[\cup]-2;0[$, et est au dessous sur $]0;+\infty[$. Les deux courbes se coupent une unique fois en $x=0$.

Exercice 3 Soit $d(x) = 1-\frac{x^2}{2}-\cos x$. d est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme des fonctions $u : x \mapsto 1-\frac{x^2}{2}$ et $v : x \mapsto -\cos x$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d'(x) = -x+\sin x$.

Afin d'étudier le signe de $d'(x)$ on peut la dériver :
$(d')'(x) = d''(x) = -1+\cos x$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leq 1$, et donc, $d''(x) \leq 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$d''(x)$			$-$		
$d'(x)$		↘	0	↘	
$d'(x)$		$+$	0	$-$	
$d(x)$		↗	0	↘	

On en déduit que $d(x) \leq 0$ pour tout réel x, et donc que $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x$.

Devoir n°4 de Mathématiques

Exercice 1

1. a. $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f'(1) = -\frac{3}{2}$, $f'(2) = 0$

b.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	1	↘	-1	↗	

2. Soit h la fonction définie par $h(x) = [f(x)]^2$.

a. Pour tout x réel, $h'(x) = 2f'(x)f(x)$.

b.

x	0		1		2
$f'(x)$	0	$-$	|	$-$	0
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$h'(x) = 2f'(x)f(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	1	↘	0	↗	1

C. *Tangente.*
La tangente (T) à C au point d'abscisse 2 a pour équation : $y = f'(2)(x-2)+f(2)$
avec $f'(2) = \frac{2g(2)}{(2^2-1)^2} = -\frac{4}{9}$, et $f(2) = \frac{16}{3}$, soit $y = -\frac{4}{9}(x-2)+\frac{16}{3} = -\frac{4}{9}x+\frac{56}{9}$

Exercice 3 Il suffit de développer :

$$\begin{aligned}(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2 &= \cos^2 x+2\cos x\times\sin x+\sin^2 x \\ &\quad +\cos^2 x-2\cos x\times\sin x+\sin^2 x \\ &= 2(\cos^2 x+\sin^2 x) \\ &= 2 \quad \text{car} \quad \cos^2 x+\sin^2 x = 1 \quad \text{pour tout réel } x\end{aligned}$$

Exercice 2

A. *Etude d'une fonction auxiliaire.*
On pose $g(x) = x^3-3x-4$.

1. Pour tout x réel, $g'(x) = 3x^2-3 = 3(x^2-1)3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	-2	↘	-6	↗	

2. La fonction g est dérivable, strictement croissante sur l'intervalle $[1;3]$, avec $g(1) = -6<0$ et $g(3) = 14>0$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une unique solution α à l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $[1;3]$.
De plus, sur $]-\infty;\alpha[$, on a $g(x)<0$ et sur $\alpha;+\infty[$, on a $g(x)>0$. Ainsi, il ne peut pas y avoir d'autre solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation $g(x) = 0$ sur $]-\infty;1]$
3. On a de plus, $g(2,1) \simeq -1,03<0$ et $g(2,2) \simeq 0,05>0$, d'où on en déduit l'encadrement $2,1<\alpha<2,2$.
4. On en déduit le tableau de signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

B. *Etude des variations de f.* Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$,

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-(x^3+2x^2)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$g(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	||	↗	0	↘	||	↘	$f(\alpha)$	↗	

Exercice 4

1. $A(x) = \sin(-x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$= -\sin(x) - \sin(x) + \cos(x) + \cos(x)$
$= -2\sin(x) + 2\cos(x)$

2. $B(x) = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos(3\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
$= \sin(x) - \sin(x) - \cos(x) + \cos(x)$
$= 0$

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}$, $\cos(3x) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \iff \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ 3x = -\frac{\pi}{3} + k'2\pi, \ k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{9} + k'\frac{2\pi}{3}, \ k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Il y a donc 6 solutions dans $]-\pi; \pi[$: $\left\{-\frac{7\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; -\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9};\right\}$

Devoir n°5 de Mathématiques

Exercice 1 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x - 5 \quad \text{et}, \quad g(x) = 2x^2 + 2x + 5$$

On note respectivement C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g.

1) On a $f(2) = 8 + 24 - 10 - 5 = 17$, et $g(2) = 8 + 4 + 5 = 17$.
Ainsi, $f(2) = g(2) = 17$, et $A(2; 17) \in C_f \cup C_g$.

2) Soit $M(x; y)$ un point de $C_f \cup C_g$.
Alors, $y = f(x) = g(x)$, soit aussi, $x^3 + 6x^2 - 5x - 5 = 2x^2 + 2x + 5$, ou encore $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0$.
D'après la question précédente, on sait que $x = 2$ est une solution de cette équation, et donc que ce polynôme du troisième degré se factorise par $(x - 2)$:
$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x - 2)(x^2 + 6x + 5)$.
Le discriminant du trinôme du second degré est $\Delta = 36 - 20 = 16 = 4^2$. Celui-ci admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1 = -1$ et $x_2 = -5$.
On a de plus, $f(-1) = g(-1) = 5$ et $f(-5) = g(-5) = 45$.
Les deux courbes ont donc trois points d'intersection : $A(2; 17)$, $B(-1; 5)$ et $C(-5; 45)$.

Exercice 2 La parabole coupe la droite (Δ_m) aux éventuels points d'abscisse x tel que $f(x) = mx$, soit $9x^2 + 3x + 1 = mx$, ou encore $9x^2 + (3 - m)x + 1 = 0$.

La parabole coupe cette droite en un unique point si et seulement si le discriminant de cette équation est nul : $\Delta = (3 - m)^2 - 4 \times 9 = 0$, soit $m^2 - 6m + 9 - 36 = m^2 - 6m - 27 = 0$.

Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta' = 36 + 4 \times 27 = 144 = 12^2$. Elle admet donc deux solutions réelles distinctes $m = \frac{6-12}{2} = -3$ et $m = \frac{6+12}{2} = 9$.

Finalement, la parabole coupe (Δ_m) en un seul point pour $m = -3$ et $m = 9$.

Exercice 3

1) 1) $\overrightarrow{AB}(-2; 2)$, $\overrightarrow{AC}(-5; -1)$, donc, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10 - 2 = 8$, et,

b) $AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$.

c) On en déduit que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{26} \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, d'où, $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{8}{4\sqrt{13}}$, et donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \simeq 56,3°$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \simeq -56,3°$

2) Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour rayon $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$, et a pour centre le point I milieu de $[AB]$, qui a pour coordonnées : $I(4; 3)$. Ce cercle est donc l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $IM^2 = R^2$, soit l'équation $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = R^2 = 2$.

3) La hauteur issue de A du triangle ABC est la droite qui passe par A et normale au vecteur $\overrightarrow{CB}$, avec $\overrightarrow{CB}(3; 3)$.
Ainsi, cette hauteur est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, soit l'équation : $3(x - 5) + 3(y - 2) = 0$, ou encore, $x + y = 7$.

Exercice 4

1) a) Soit $H \in (AB)$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, et comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 2$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens, d'où, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 2$.
On a alors $AH = \frac{2}{AB} = 1$, d'où, $H = I$.

b) Pour tout point M on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$,
et donc, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$: l'ensemble des points M recherché est la droite (OH), perpendicaulaire à (AB) passant par $H = I$.

2) a) Pour tout point M, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$.

b) D'après ce qui précède, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 1 = 4$, d'où, $MI^2 = 5$, soit $MI = \sqrt{5}$: l'ensemble des points M recherchés est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.
Or, $IC = \sqrt{IB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, donc le point C est sur ce cercle, et donc l'ensemble des points M est le cercle de centre I et passant par C.

Exercice 5

1) D'après la relation de Chasles, $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GA} + 3\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = 5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB}$, et donc $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.
On en déduit que $G \in [AB]$, et donc que $AG = \frac{3}{5}AB = 3$ et que $BG = \frac{2}{5}AB = 2$.

2) On peut faire intervenir le point G dans cette relation :

$$\begin{aligned} 2MA^2 + 3MB^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 = 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 \\ &= 5MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \underbrace{\left(2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}\right)}_{=\overrightarrow{0}} + 2GA^2 + 3GB^2 = 5MG^2 + 30 \end{aligned}$$

D'où, $2MA^2 + 3MB^2 = 50 \iff MG = 2$. L'ensemble C est le cercle de centre G et de rayon 2.

Exercice 6 Deux méthodes (au moins) sont possibles :

1ère méthode.

$$\begin{aligned} & (x-2)(x+4)+(y-3)(y-1)=6 \\ \iff & x^2+2x+y^2-4y-8+3=6 \\ \iff & (x+1)^2+(y-2)^2=16 \\ \iff & \Omega M^2 = 16 = 4^2 \\ \iff & \Omega M = 4 \end{aligned}$$

avec le point $\Omega(-1;2)$. L'ensemble recherché est donc le cercle de centre $\Omega(-1;2)$ est de rayon 4.

2ème méthode.

$$(x-2)(x+4)+(y-3)(y-1)=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$$

L'ensemble recherché est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=16$.
Soit Ω le milieu de $[AB]$, alors

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=\left(\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}\right)\cdot\left(\overrightarrow{B\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}\right)=\overrightarrow{A\Omega}\cdot\overrightarrow{B\Omega}+2\overrightarrow{\Omega M}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{B\Omega}\right)}_{=\vec{0}}+\overrightarrow{\Omega M}^2$$

$$=-A\Omega^2+\Omega M^2$$

Or, $AB^2=(-4-2)^2+(1-3)^2=40$, et donc, $A\Omega^2=10$, et donc,
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=16 \iff \Omega M^2=16 \iff \Omega M=4$,
L'ensemble des points recherchés est le cercle de centre Ω, milieu de $[AB]$ et de rayon 4.

Devoir n°6 de Mathématiques

Exercice 1 La courbe représentative C_f de la fonction f coupe l'axe des abscisses aux points (s'ils existent) d'abscisse x tels que $f(x)=0$.

f est une fonction trinôme du second degré, de discriminant $\Delta=b^2-4ac$. Si a et c sont de signes contraires, alors, $ac<0$, et donc $-4ac>0$, d'où, $\Delta=b^2-4ac>b^2>0$ et le trinôme f admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. En d'autres termes $f(x_1)=f(x_2)=0$, et ainsi C_f coupe l'axe des abscisses en deux points distincts.

Exercice 2

1) La parabole coupe la droite $(\mathcal{D}_p)$ aux éventuels points d'abscisse x tel que $f(x)=x+p$, soit $9x^2+3x+1=x+p$, ou encore $9x^2+2x+1-p=0$.
Le discriminant de cette équation du second degré est : $\Delta=4-4\times 9\times(1-p)=4(-8+9p)$.
La parabole coupe cette droite en un seul point si et seulement si $\Delta=0$, soit $-8+9p=0$, et donc si et seulement si $p=\frac{8}{9}$.
La parabole coupe cette droite en deux points distincts si et seulement si $\Delta>0$, c'est-à-dire si et seulement si $p>\frac{8}{9}$.

2) La parabole coupe la droite (Δ_m) aux éventuels points d'abscisse x tel que $f(x)=mx$, soit $9x^2+3x+1=mx$, ou encore $9x^2+(3-m)x+1=0$.
La parabole coupe cette droite en un unique point si et seulement si le discriminant de cette équation est nul : $\Delta=(3-m)^2-4\times 9=0$, soit $m^2-6m+9-36=m^2-6m-27=0$.
Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta'=36+4\times 27=144=12^2$. Elle admet donc deux solutions réelles distinctes $m=\frac{6-12}{2}=-3$ et $m=\frac{6+12}{2}=9$.
Finalement, la parabole coupe (Δ_m) en un seul point pour $m=-3$ et $m=9$.

Exercice 3

1) Comme N est le symétrique de M par rapport à (AC), $(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CN})$ et de même, $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP})=(\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CB})$.

2) D'après la relation de Chasles (on essaie de faire intervenir les angles de la question précédente),

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP}) &= (\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP}) \\ &= (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CN}) + \frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CB})\end{aligned}$$

soit, en utilisant à nouveau la relation de Chasles : $(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$
On en conclut donc que le triangle CMP est rectangle en C.

Exercice 4

1) Comme le pentagone est régulier :

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{2\pi}{5},\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\frac{4\pi}{5},\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)=\frac{6\pi}{5},\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}\right)=\frac{8\pi}{5}.$$

2) Les coordonnées de chaque point sont les cosinus et sinus des angles correspondants : $A(1,0)$, $B\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$, $C\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right),\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$, $D\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right),\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)$, $E\left(\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right),\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right)$.

3) D'après ce qui précède, le vecteur $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}$ a pour abscisse $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ et pour ordonnée $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.

Or, $\frac{8\pi}{5}=2\pi-\frac{2\pi}{5}$, ainsi les points B et E sont symétriques par la symétrie d'axe (OA), et donc $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
On a donc bien, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\overrightarrow{OA}$.

4) En utilisant les relations de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA}+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\overrightarrow{OA}+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\overrightarrow{OA} \\ &= \left[1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right]\overrightarrow{OA}=\vec{0}\end{aligned}$$

Ainsi, $1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$.

5) En utilisant la formule de duplication, la relation précédente devient :
$1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-2=0$.
soit, $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=0$.

a) Ainsi, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2+2x-1=0$.

b) Le discriminant de cette équation du seconde degré est $\Delta=4+16=20$, et donc les racines sont $x_1=\frac{-2-\sqrt{20}}{8}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $x_2=\frac{-2+\sqrt{20}}{8}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ (c'est l'abscisse du point B), on en déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Exercice 5

1) Pour $x \in I$, $\alpha x + \beta + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{\alpha x^2 + (-\alpha + \beta)x + 2 - \beta}{x-1}$

et donc, on doit avoir

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ -\alpha + \beta = 2 \\ 2 - \beta = 1 \end{cases} \quad \text{soit,} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad \text{et donc, pour tout } x \in I\text{ , } \underline{f(x) = -x + 1 + \frac{2}{x-1}}$$

2) On peut écrire f comme la somme $f = u + (-2v)$ ou $u(x) = -x + 1$ est une fonction affine décroissante, et $v(x) = \frac{1}{x-1}$ est la composée de la fonction inverse qui est décroissante et de la fonction affine $x \mapsto x - 1$ qui est croissante. Ainsi, v est croissante, donc $-2v$ est décroissante, et donc, la fonction f est décroissante.

3) a) Pour $x \in I$, le point $P \in C_f$ a pour coordonnées $(x; f(x))$, tandis que le point $Q \in (\Delta)$ a pour coordonnées $(x; -x+1)$.

La distance PQ est donc : $PQ = f(x) - (-x+1) = \dfrac{2}{x-1}$.

b) Pour $x \in I$, c'est-à-dire $x > 1$, $x - 1 > 0$, et donc le point P est au dessus du point Q. On en déduit que C_f est au dessus de Δ.

c) Lorsque x devient (très) grand, $x - 1$ devient aussi grand, et donc $PQ = \dfrac{2}{x-1}$ devient (très) petit.

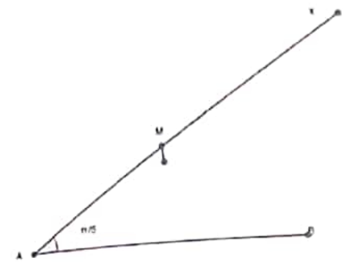
Cela signifie, géométriquement, que lorsque x devient grand, "à la limite lorsque $x \to \infty$", la courbe C_f se confond avec la droite Δ.

CORRIGE DES EXERCICES DE CIAM

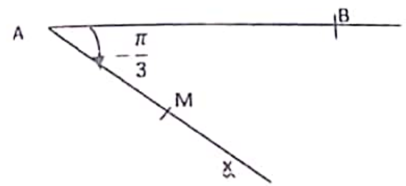
Angles orientés-Trigonométrie

Exercice 1

a) $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}})$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{6}$. L'ensemble des points M est la demi-droite $[Ax)$ privée du point A.



b) $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}})$ a pour mesure principale $-\frac{\pi}{3}$. L'ensemble des points M est la demi-droite $[Ax)$ privée du point A.



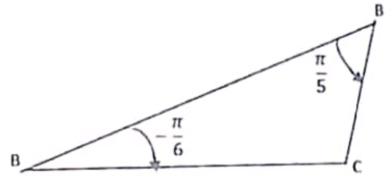
c) L'ensemble des points M est la demi-droite $[Ax)$ privée du point A et contenant B.

c) L'ensemble des points M est le segment $[AB]$ privée des points A et B.

Exercice 2

$(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}})$ ont respectivement pour mesure principale $\frac{\pi}{5}$ et $-\frac{\pi}{6}$.

$(\widehat{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}})$ a pour mesure $\frac{6\pi}{5}$ ou $-\frac{4\pi}{5}$



Exercice 8

1) $sinx = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $cosx = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $tanx = -\frac{1}{2}$

2) $cosx = -\frac{4}{5}$; $sinx = \frac{3}{5}$ et $tanx = -\frac{3}{4}$

3) $sinx = -\frac{2}{\sqrt{13}}$; $cosx = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $tanx = -\frac{2}{3}$

Exercice 14

$$cos3x = 4cos^3x - 3cosx\ ;$$

$$sin3x = 3sinx - 4sin^3x$$

Pour $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ avec k entier relatif,

$$tan3x = \frac{3sinx - 4sin^3x}{4cos^3x - 3cosx}$$

$$= tanx\left(\frac{3 - 4\frac{tan^2x}{1+tan^2x}}{\frac{4}{1+tan^2x} - 3}\right)$$

$$= tanx\frac{3 - tan^2x}{1 - 3tan^2x}$$

Exercice 29

a) $S = \left]-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$

b) $S = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$

c) $S = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

d) $S = \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$

Exercice 30

a) $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

b) $\begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

GEOMETRIE ANALYTIQUE

Exercice 1

Dans chacun des cas,on écrit que le point $M(x; y)$ appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

On obtient donc

a) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0$

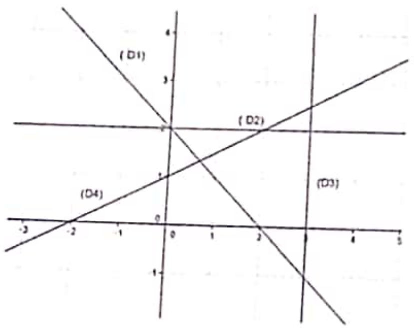
b) $x - 4 = 0$

c) $y - 2 = 0$

Exercice 3

On peut choisir pour chacune des droites (D_1) ,(D_2) ; (D_3) et (D_4) les vecteurs normaux respectifs : $\vec{n}_1 = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{n}_2 = \vec{j}$,$\vec{n}_3 = \vec{i}$ et

$\vec{n}_4 = \vec{i} - 2\vec{j}$



Exercice 12

$\overrightarrow{AB}\binom{1}{-4}$ et $\overrightarrow{CB}\binom{6}{2}$ sont non colinéaires donc A ; B et C ne sont pas alignés.

La hauteur issue de A dans le triangle ABC a pour équation $6(x - 3) + 2(y - 5) = 0$

Donc $3x + y - 14 = 0$.

La hauteur issue de B dans le triangle ABC a pour équation $5(x - 4) + 6(y - 1) = 0$ donc $5x + 6y - 26 = 0$.

Les coordonnées de l'orthocentre H sont solutions du système $\begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ 5x + 6y - 26 = 0 \end{cases}$

Donc $H\left(\frac{58}{13}; \frac{8}{13}\right)$

Exercice 18

Un représentation paramétrique du cercle de diamètre $[AB]$ est

$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{34}}{2}cos\theta \\ y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{34}}{2}sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}$

La tangente en A au cercle est la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Une équation de cette tangente

est $5x - 3y + 21 = 0$

La tangente en B passe en B et a pour vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$ .Une équation de cette tangente est $5x - 3y - 13 = 0$.

Exercice 20

1) (C) a pour rayon :$d(A, D) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

Une équation cartésienne de (C) est donc

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{36}{5}$$

2)Soit M$(x; y)$ le point de contact entre (C) et (D).M appartient à (D) donc $y = 2x + 3$.

En remplaçant y par $2x + 3$ dans l'équation cartésienne de (C) on obtient$(5x + 2)^2 = 0$

On en déduit que le point de contact entre

(C) et (D) admet pour coordonnées $\left(-\frac{2}{5}; \frac{11}{5}\right)$

ENTRAINEZ VOUS

Calcul de limites

Exercice 1

Calculer :

a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}$; b) $\lim_{x\to+\infty} |x+2|$; c) $\lim_{x\to+\infty}(x - 3 + \frac{1}{x-3})$; d)

Exercice 2

Etudier les limites de chacune des fonctions numériques suivantes aux bornes de son ensemble de définition :

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$;b) $f(x) = \frac{x^2-1}{-x^2+2}$;c) $f(x) = x - 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$;d) $f(x) = \sqrt{-3x + 4}$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f .Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition et en déduire les asymptotes à (C).

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$;b) $f(x) = 8 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$;c) $f(x) = \frac{4x+9}{(2x+3)^2}$;d) $f(x) = \frac{4x^2-8x}{x^2-2x-3}$

Exercice 4

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par $f(x) = \frac{2x^2 + x - 4}{x}$.

a)Déterminer les réels a ;b et c tels que

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$

b)Montrer que la droite $(D): y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe de f.

CORRIGE

Exercice1

Calculons

a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = \sqrt{+\infty - 1} = +\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} |x+2| = |+\infty + 2| = +\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} (x - 3 + \frac{1}{x-3}) = +\infty - 3 + \frac{1}{+\infty - 3} = +\infty + 0 = +\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x-4} = \sqrt{3(+\infty) - 4} = +\infty$

Exercice2

Etudions les limites de chacune des fonctions numériques suivantes aux bornes de son ensemble de définition.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

f(x) existe si et seulement si x+2≠0 c'est-à-dire si x≠-2

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\} =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$

$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{2(-2)-1}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{2(-2)-1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{-x^2+2}$

f(x) existe si et seulement si $-x^2+2 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -\sqrt{2}$ et $x \neq \sqrt{2}$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\} =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{-x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$

$\lim_{x\to(-\sqrt{2})^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to(-\sqrt{2})^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to(\sqrt{2})^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to(\sqrt{2})^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

c) $f(x) = x - 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

f(x) existe si et seulement si x +1 >0 c'est-à-dire si x >-1

$D_f =]-1 ; +\infty[$

$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -1 - 1 - \frac{2}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 1 - \frac{2}{\sqrt{+\infty + 1}} = +\infty - 0 = +\infty$

d) $f(x) = \sqrt{-3x + 4}$

f(x) existe si et seulement si $-3x+4 \geq 0$ c'est-à-dire si $x \leq \frac{4}{3}$

$$D_f = \left]-\infty\,;\,\frac{4}{3}\right]$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt{-3(-\infty)+4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{4}{3}} f(x) = \sqrt{-3\left(\frac{4}{3}\right)+4} = 0$$

Exercice3

Calculons dans chacun des cas les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduisons les asymptotes à (C)

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

f(x) existe si et seulement si $x-1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$.

$$D_f =]-\infty\,;1[\,\cup\,]1;\,+\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Donc la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Donc la droite d'équation x =1 est asymptote verticale à la courbe (C) en $-\infty$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc la droite d'équation x=1 est asymptote verticale en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc la droite d'équation y =0 est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) $f(x) = 8 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$

f(x) existe si et seulement si $x \neq 0$ et $x^2 \neq 0$

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 8 - \frac{6}{-\infty} + \frac{1}{+\infty} = 8$$

$$et\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 8 - \frac{6}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = 8$$

Donc la droite d'équation y = 8 est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ *et en* $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 8 - \frac{6}{0^-} + \frac{1}{0^+} = 8 + \infty + \infty = +\infty$$

$$et\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 8 - \frac{6}{0^+} + \frac{1}{0} = 8 - \infty - \infty = -\infty$$

Donc la droite d'équation x=0 est asymptote verticale à la courbe (C) en $-\infty$ *et en* $+\infty$

c) $f(x) = \frac{4x+9}{(2x+3)^2}$

f(x) existe si et seulement si $2x+3 \neq 0$ et c'est-à-dire si $x \neq \frac{-3}{2}$

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-3}{2}\right\} = \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right[\,\cup\,\left]-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x+9}{(2x+3)^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{4x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$$

et de même, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Donc la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ *et en* $+\infty$

$$\lim_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = \frac{4\left(-\frac{3}{2}\right)+9}{0^+} = +\infty$$

et de même

$$\lim_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^+} f(x) = \frac{4\left(-\frac{3}{2}\right)+9}{0^+} = +\infty$$

Donc la droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est asymptote verticale à (C) en $-\infty$ *et en* $+\infty$

d) $f(x) = \frac{4x^2-8x}{x^2-2x-3}$

f(x) existe si et seulement si $x^2-2x-3 \neq 0$

$$\Delta = 4 - 4(1)(-3) = 16$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1\ et\ x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\,;3\} =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2-8x}{x^2-2x-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

de même $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$

Donc la droite d'équation y =4 est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ *et en* $+\infty$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{4(-1)^2-8(-1)}{0^+} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{12}{0^-} = -\infty$$

On conclut aussi que la droite d'équation x = -1 est asymptote verticale à (C) au voisinage de $-\infty$ *et de* $+\infty$.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \frac{4(3)^2-8(3)}{0^-} = \frac{12}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

On conclut aussi que la droite d'équation x =3 est asymptote verticale à (C) au voisinage de $-\infty$ *et de* $+\infty$.

Exercice4

$$f(x) = \frac{2x^2+x-4}{x}$$

Soit

a) Déterminons les réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} = \frac{x(ax+b)+c}{x} = \frac{ax^2+bx+c}{x}$$

Par identification ; a = 2 ; b = 1 et c = -4 d'où $f(x) = 2x+1-\frac{4}{x}$

b) Montrons que (D) : y = 2x+1 est asymptote à la courbe de f.

$$\lim_{x \to -\infty}[f(x)-(2x+1)] = \lim_{x \to -\infty} -\frac{4}{x} = 0 = \lim_{x \to +\infty}[f(x)-(2x+1)]$$

Donc la droite d'équation (D) : y = 2x+1 est asymptote oblique à la courbe de f.

EXERCICES

Exercice 1

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de définition de la fonction.

$a)\ f(x) = -5x^3+3x^2+x-4$; $b)\ f(x) = (2x^2+5x+1)^2$; $c)\ f(x) = (x-4)^3$

$d)\ f(x) = 2x(x-1)^2$; $e)\ f(x) = \frac{1}{x}+3$; $f)\ f(x) = 3x-\frac{1}{x^3}$; $g)\ f(x) = \frac{x+2}{3x}$

$h)\ f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$; $i)\ f(x) = \frac{2}{(x+1)(x+3)}$; $j)\ f(x) = \sqrt{4-x}$, $k)\ f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$

Exercice 2

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de chacune des fonctions ci-dessous au point d'abscisse x_0 indiqué.

$a)\ f(x) = 2x^2+1, x_0 = -1$; $b)\ f(x) = \frac{x^2+1}{3}, x_0 = 0$; $c)\ f(x) = \frac{1}{x-1}, x_0 = \frac{1}{2}$

Exercice 3

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2+bx-1$ passe par le point A(1 ;4) et admet un extremum en ce point.

Exercice 4

Etudier le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur son domaine de définition.

CORRIGE

Exercice 1

Calcul de dérivées

a) $f(x)=-5x^3+3x^2+x-4$

$D_f=\mathbb{R}$

Pour tout $x\in D_f$ f est dérivable et f '$(x)=-15x^2+6x+1$

b) $f(x)=(2x^2+5x+1)^2$

$D_f=\mathbb{R}$

Pour tout $x\in D_f$;f est dérivable et

f '$(x)=2(4x+5)(2x^2+5x+1)$

c) $f(x)=(x-4)^5$

$D_f=\mathbb{R}$

Pour tout $x\in D_f$;f est dérivable et

f '$(x)=5\times 1\times(x-4)^4=5(x-1)^4$

d) $f(x)=2x(x-1)^2$

$D_f=\mathbb{R}$

Pour tout $x\in D_f$; f est dérivable et

f '$(x)=2(x-1)^2+2\times1\times(x-1)\times2x=6x^2-8x+2$

e) $f(x)=\frac{1}{x}+3$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Pour tout $x\in Df$;f est dérivable et f '$(x)=\frac{-1}{x^2}$

f) $f(x)=3x-\frac{1}{x^3}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Pour tout $x\in D_f$ *f est dérivable et*

$$f'(x)=3-\left(\frac{-3x^2}{x^6}\right)=3+\frac{3x^2}{x^6}$$
$$=3+\frac{3}{x^4}$$

g) $f(x)=\frac{x+2}{3x}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Pour tout $x\in D_f$ f est dérivable et

$$f'(x)=\frac{3x-3(x+2)}{9x^2}=-\frac{2}{9x^2}$$

h) $f(x)=\frac{1}{(2x-1)^2}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$

Pour tout $x\in D_f$ f est dérivable et $f'(x)=\frac{-2(2)(2x-1)}{(2x-1)^4}=\frac{-4}{(2x-1)^3}$

i) $f(x)=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3,-1\}$

Pour tout $x\in D_f$ f est dérivable et

$$f'(x)=\frac{-[(x+3)+(x+1)]}{[(x+1)(x+3)]^2}$$
$$=-\frac{2x+4}{[(x+1)(x+3)]^2}$$

j) $f(x)=\sqrt{4-x}$

$D_f=]-\infty;4]$

Pour tout $x\in D_f$,

f est dérivable et $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$

k) $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x}}$

$D_f=]0;+\infty[$

Pour tout $x\in D_f$,

f est dérivable et $f'(x)$

$$=\frac{2\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1)}{x}$$
$$=\frac{2x+1}{2x\sqrt{x}}$$

Exercice 2

Détermination d'équation de la tangente (D)

a) $f(x)=2x^2+1$; $x_0=-1$

$D_f=\mathbb{R}$

Pour tout $x\in D_f$, $f'(x)=4x$

$f'(-1)=-4$ et $f(1)=3$ d'où

(D) : $y=-4(x+1)+3=-4x-1$

b) $f(x)=\frac{x^2+1}{3}$; $x_0=0$

$D_f=\mathbb{R}$

Pour tout $x\in D_f$ $f'(x)=\frac{2}{3}x$

$f'(0)=0$ et $f(0)=\frac{1}{3}$ d'où

(D) : $y=0(x-0)+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

c) $f(x)=\frac{1}{x-1}$; $x_0=\frac{1}{2}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Pour tout $x\in D_f$, f est dérivable et

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{-1}{\frac{1}{4}}=-4$ et

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)}=-2$ d'où

(D) : $y=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)-2$

(D) : $y=-4x$

Exercice 3

Déterminons les réels a et b pour que la courbe représentative de f passe par le point A (1 ; 4) et admet un extremum en ce point.

$f(x)=ax^2+bx-1$

La courbe de f passe par A donc

$f(1)=4$

De plus comme f admet un extremum en ce point, donc sa dérivée f' s'annule en ce point.

Ainsi, $f(1)=4$ *et* $f'(1)=0$ *avec* $f'(1)=2a+b$ *et* $f(1)=a+b-1$

On obtient $\begin{cases}2a+b=0\\ a+b-1=4\end{cases}$

On trouve après résolution $a=-5$ *et* $b=10$ d'où $f(x)=-5x^2+10x-1$

Exercice 4

Etude de sens de variation

a) $f(x)=2x^2-4$

$Df=\mathbb{R}$

Pour tout $x\in D_f$,

f est dérivable et $f'(x)=4x$

Signe de f '(x)

f '$(x)\geq0 \Leftrightarrow 4x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq0$

Ainsi ;pour $x\in]-\infty;0]$;f '$(x)\leq 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty;0]$

pour $x\in[0;+\infty[$;f '$(x)\geq 0$ donc f est croissante sur $[0;+\infty[$

b) $f(x)=(2x+1)(x-1)$

$Df=\mathbb{R}$

Pour tout $x\in D_f$

,f est dérivable et $f'(x)=2(x-1)+(2x+1)=4x-1$

Signe de f '(x)

f '$(x)\geq0 \Leftrightarrow 4x-1\geq0 \Leftrightarrow x\geq\frac{1}{4}$

Ainsi ;pour $x\in]-\infty;\frac{1}{4}]$;f '$(x)\leq 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty;\frac{1}{4}]$

pour $x\in[\frac{1}{4};+\infty[$;f '$(x)\geq 0$ donc f est croissante sur $[\frac{1}{4};+\infty[$

c) $f(x)=\frac{6x+1}{x+3}$

$Df=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

Pour tout $x\in D_f$ *,f est dérivable et*

$f'(x)=\frac{6(x+3)-(6x+1)}{(x+3)^2}=\frac{17}{(x+3)^2}$

Signe de f '(x)

f '$(x)\geq0 \Leftrightarrow \frac{17}{(x+3)^2}\geq0$; or $\forall x\in D_f$;

$(x+3)^2\geq0$ *et* $17>0$ donc $\frac{17}{(x+3)^2}\geq0$

Ainsi ;pour $x\in]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$;f '$(x)>0$ donc f est croissante sur D_f

d) $f(x)=x\sqrt{x+1}$

$Df=[-1;+\infty[$

Pour tout $x\in D_f$ *,est dérivable et*

$$f'(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

Signe de f '(x)

f '$(x)\geq0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}\geq0$; or

$\forall x\in D_f$;$2\sqrt{x+1}\geq0$ donc le signe de f '(x) est celui de 3x+2

$3x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{-2}{3}$

Ainsi ;pour $x\in[-1;\frac{-2}{3}]$;f '$(x)\leq 0$ donc f est décroissante sur $[-1;\frac{-2}{3}]$

pour $x\in[\frac{-2}{3};+\infty[$;f '$(x)\geq 0$ donc f est croissante sur $[\frac{-2}{3};+\infty[$

e) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$

$D_f=[0;+\infty[$

Pour tout $x\in D_f$,

f est dérivable et $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$

Signe de f '(x)

f '$(x)\geq0 \Leftrightarrow \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}\geq0$; or $\forall x\in D_f$;$2\sqrt{x}\geq0$

donc le signe de f '(x) est celui de 3x-3

$3x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$

Ainsi ;pour $x\in[0;1]$;f '$(x)\leq 0$ donc f est décroissante sur $[0;1]$

pour $x\in[1\ ;+\infty[\ ;f'(x)\geq 0$ donc f est croissante sur $[1\ ;+\infty[$

Etude de fonctions

EXERCICES

Exercice 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

1)Quelle est la nature de cette fonction ?Quel est son ensemble de définition ?

2)Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

3)a-Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b-Etudier le sens de variation de f sur son ensemble de définition puis dresser son tableau de variation.Que représente l'ordonnée du point d'abscisse -1 pour f ?

4)Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) de f au point d'abscisse 3.

5)Tracer (C) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6)Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)<0$ puis les équations f(x)=-6 ;f(x)=2 et $f(x)=\frac{5}{2}$.

7)a-Tracer la droite (D) d'équation $y=-x-6$

b-Résoudre graphiquement $f(x)=-x-6$ et $f(x)\succ -x-6$.

c-Vérifier algébriquement les résultats précédents.

Exercice 2

On désigne par f la fonction numérique définie de IR vers IR par $f(x)=x^3+3x$.

Soit (C) la courbe de f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)Montrer que f est impaire.Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire pour la courbe de f ?

2)Déterminer la fonction dérivée f' de f et en déduire le sens de variation de f.

3)Calculer les limites de f(x) lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$

4)Donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse nulle.

5)Construire soigneusement la courbe (C) et la tangente au point d'abscisse nulle.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)Déterminer l'ensemble de définition E de f(on écrira E sous forme d'une réunion de deux intervalles).

2) a-Montrer que pour tout élément x de E, $f(x)=2-\frac{3}{x+1}$.

b-Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de E. En déduire que (C) admet deux asymptotes dont on précisera la nature et l'équation. Quel est le point d'intersection O' de ces asymptotes ?

3) Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes de coordonnées.

5) Donner une équation de la tangente (Δ) à (C) au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$

6)Construire soigneusement la courbe (C),les deux asymptotes ainsi que les tangentes (Δ).

CORRIGE

Exercice 1

Soit $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

1) f est une fonction polynôme, Df $=\mathbb{R}=]-\infty\ ;\ +\infty[$.

2) Calcul des limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x^2=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}x^2=-\infty$$

3) a- Détermination de la dérivée

Pour tout $x\in Df$,

f *est dérivable et* $f'(x)=-x+1$

b- Sens de variations – tableau de variations

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow -x+1\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$

Pour $x\in]-\infty;1]\ ;f'(x)\geq 0$ *donc* f *est croissante* sur $]-\infty;1]$

Pour $x\in[1;+\infty[\ ;f'(x)\leq 0$ *donc* f *est décroissante* sur $[1;+\infty[$

c-Tableau de variation

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

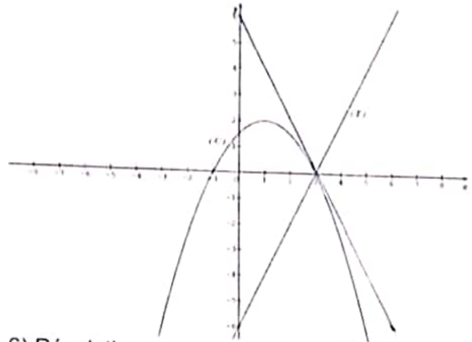
L'ordonnée du point d'abscisse 1 qui est 2 est le maximum de f sur Df

4) Equation de la tangente (Δ)

(Δ) : $y=f'(3)(x-3)+f(3)$ *avec* $f'(3)=2$ *et* $f(3)=0$ D'où

(Δ) : $y=2x-6$

5) Construction de (C) et (Δ)



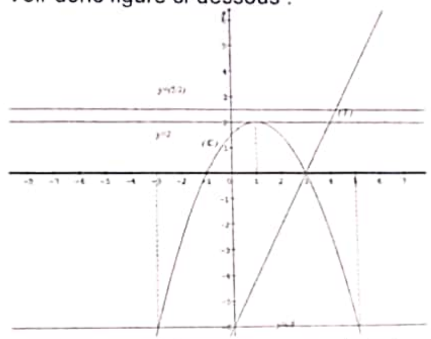
6) Résolution graphique d'inéquation et d'équation

On trace les droites d'équation $y=0\ ;y=-6\ ;y=2$ *et* $y=\frac{5}{2}$ *dans le repère*$(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$ *contenant la courbe* (C)

La solution de l'inéquation $f(x)<0$ est l'intervalle ou la réunion d'intervalles contenant l'ensemble des points de la courbe (C) situé en dessous de la droite d'équation $y=0$

Les solutions d'équations sont les abscisses des points d'intersection des droites d'équation $y=-6; y=2$ *et* $y=\frac{5}{2}$ avec la courbe (C).

Voir donc figure ci-dessous :



Graphiquement,f(x)< 0 a pour solution S=]-∞ ;-1[∪]3 ;+∞[;f(x)=-6 a pour solution S={−3; 5} ;f(x)=2 a pour solution S={1} et f(x)=$\frac{5}{2}$ a pour solution S=∅ car aucun point d'intersection de

Soit une suite (U_n) définie par : $U_1=2$ et pour tout entier $n \geq 1$; $2nU_{n+1}=(n+1)U_n$

1)Calculer U_2 ; U_3

2)On définit la suite (V_n) pour tout entier n non nul par $V_n = \frac{U_n}{n}$.

a-Calculer V_1 ; V_2 ; V_3

b-Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c-Ecrire l'expression de V_n et de U_n en fonction de n

Etudier le sens de variation et la convergence des suites V_n et U_n

Exercice6

En 1994, Monsieur Kouao avait une production de cacao égale à celle de Monsieur Yapi. Sa production augmente de 10% tous les ans.

1.a. Quelle a été la production de Monsieur Kouao en 1995 ?

b. Quelle sera sa production en l'an 2003 ?

2. En 1995, Monsieur Yapi produisait plus que Monsieur Kouao. En l'an 2003, Monsieur Kouao produira plus que Monsieur Yapi.

A partir de quelle année la production de Monsieur Kouao a -t-elle dépassé celle de Monsieur Yapi ?

On donne les arrondis suivants de $1,1^n$ pour n appartenant à $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$:

N	3	4	5	6	7	8	9	10
Arrondi de $(1,1)^n$	1,3	1,5	1,6	1,8	2	2,1	2,4	2,6

CORRIGE

Exercice 1

Calculons U_1 *et* S_{30}

On a : $U_n = U_p + (n-p)r = U_1 + (n-1)r = U_1 + 2n - 2$

$U_{30} = U_1 + 2 \times 30 - 2 = 62$

$\Leftrightarrow U_1 + 58 = 64$

$\Leftrightarrow U_1 = 64 - 58 = 4$

$$S_n = \frac{(n-p+1)(U_p+U_n)}{2} = \frac{(n-1+1)(U_1+U_n)}{2} = \frac{n(4+U_n)}{2}$$

$$S_{30} = \frac{30(4+U_{30})}{2} = \frac{30(4+62)}{2} = 990$$

Exercice 2

Calcul du 10ème terme et de S_{10}

Soit (V_n) cette suite et $V_1 = 5$ son premier terme

On a : $V_n = V_p \times q^{n-p}$ *et* $S_n = V_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

$$V_n = V_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ donc } V_{10} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{9}$$

$$S_{10} = 5 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 5 \times \left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}}\right] = 10\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]$$

Exercice 3

Déterminons la raison q et la somme S_{15}

$U_n = U_0 \times q^n = 3q^n$

$U_4 = 3q^4 = 48$

$\Leftrightarrow q^4 = 16$

$\Leftrightarrow q = 2$ *ou* $q = -2$

Comme $U_4 > U_1$, (U_n) *croît et donc* $q > 0$

d'où q=2

$$S_n = 3 \times \frac{1-(2)^{n+1}}{1-2} = -3[1-(2)^{n+1}]$$

Donc $S_{15} = -3[1-(2)^{16}] = 196\,605$

$S_{15} = 196\,605$

Exercice 4

1) Calculons U_2 *et* U_3

On a $2nU_{n+1} = (n+1)U_n \Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{n+1}{2n}U_n$

Ainsi : $U_2 = \frac{1+1}{2\times1}U_1 = \frac{2}{2}U_1 = U_1 = 2$

$$U_3 = \frac{2+1}{2\times2}U_2 = \frac{3}{4}U_2 = \frac{3}{4}\times 2 = \frac{3}{2}$$

2) Soit $V_n = \frac{U_n}{n}$

a) Calculons V_1; V_2; *et* V_3

$$V_1 = \frac{U_1}{1} = U_1 = 2$$

$$V_2 = \frac{U_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$V_3 = \frac{U_3}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

b) Montrons que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{U_{n+1}}{n+1}}{\frac{U_n}{n}} = \frac{U_{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{U_n}$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)}{2n}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2}}{n+1}$$

$$= \frac{n+1}{2}\times\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}$$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_1 = 2$

c) Ecrivons V_n et U_n en fonction de n

$$V_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

et $U_n = nV_n = 2n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

d) Etude de sens de variation et de convergence

On a $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc (V_n) est décroissante.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{2n}U_n - U_n$$

$$= \frac{1-n}{2n}U_n = \frac{1-n}{2n}\times 2n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (1-n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

or $\forall\, n \geq 1$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \geq 0$ *et* $1-n \leq 0$

donc $U_{n+1} - U_n \leq 0$ et par conséquent (U_n) est décroissante.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n) = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = 0$ donc (V_n) *et* (U_n) convergent vers 0.

Exercice 6(BAC 1997)

1.a. La production de M. Kouao a été de :

$$2{,}8 + \frac{2{,}8\times 10}{100} = 3{,}08$$

La Production de M. Kouao en 1995 était de 3,08 tonnes.

b. Si on note V_0 la production de cacao de M. Kouao en 1994 et V_n sa production après n années on a :

$$V_1 = V_0 + \frac{10\times V_0}{100} = 1{,}1V_0$$

De même on généralise en écrivant :

$$V_{n+1} = V_n + \frac{10\times V_n}{100} = 1{,}1V_n$$

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1,1.
On a la relation $V_n = (1,1)^n V_0 = 2,8(1,1)^n$
V_9 correspond à la production de 2003
$V_9 = 2,8(1,1)^9$
$V_9 = 6,7$
En 2003 M. Kouao a une production d'environ 6,7 tonnes

2. On doit chercher le plus petit entier n pour lequel $V_n > U_n$.
Pour n = 3 (en 1997)
$V_3 = (1,1)^3 \times 2,8 = 3,64$ or $U_3 = 3,7$
Pour n=4 (en 1998)
$V_4 = (1,1)^4 \times 2,8 = 1,5 \times 2,8 = 4,2$
$U_4 = U_3 + 0,3 = 4$

Entrainez vous

Exercice 1

Déterminer les ensembles de définition de f notés Df puis calculer les limites de f aux bornes de Df et déduire en les équations d'asymptotes éventuelles.

1. $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ 2. $f(x) = \sqrt{2x+1}$ 3. $f(x) = \frac{2x^2+5x+3}{2x-3}$ 4. $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+3x-2}$

Exercice 2 (5 pts)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3-x}{x^2+4x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2-x}{x^2+2x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-x}{x^2+2x-3}$; 4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}$

5. $\lim\limits_{x\to-2} \sqrt{-3x+1}$; 6. $\lim\limits_{x\to-1} -2x+1$

7. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-2x+5}{x-2}$; 8. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x-2x+5}{x-2}$

Exercice 3 (5 pts)

Déterminer les réels a, b et c tels que f(x) s'écrive sous la forme proposée.

1. $f(x) = \frac{-x+8}{3(x-2)}$ $\quad f(x) = a + \frac{b}{3(x-2)}$

2. $f(x) = \frac{x^3-3x+3x-3}{(x-2)^2}$ $\quad f(x) = x + a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$

Exercice 4 (3 pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax+1}{bx-3}$

La représentation graphique de f(x) admet les droites d'équations y = 2 et x = 3 Comme asymptotes. Trouver les réels a et b.

Exercice 5

1) Calculer les limites des fonctions suivantes en a :

a) $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x+2}$; a = - 2 $\quad$ b) $f(x) = x-3+\frac{1}{x-3}$; $a = +\infty$

2) Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes puis calculer les limites aux bornes du domaine de définition.

a) $f(x) = \frac{4x^2-8x}{x-2x-3}$

b) $f(x) = \sqrt{4-3x}$

c) $f(x) = \frac{2x+5x-3}{2x-4}$

d) $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)(x+3)}$

Exercice 6

Soit $f(x) = \frac{2x^2+5x-3}{(2x-1)(9-x^2)}$

1) Déterminer le domaine de définition de f;

2) Calculer les limites de f(x) aux bornes de ce domaine.

3) Calculer les images par f de 0 ; $\frac{1}{2}$; 1 et 3 si possible.

Exercice 7

Soit f une fonction de R par :

$f(x) = ax + b + \frac{1}{x+1}$ où a et b sont des réels.

1) Déterminer a et b sachant que f(0) = 0 et $f(1) = \frac{1}{2}$.

2) On suppose que $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de ce domaine.

c) Prouver que $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

3) Soit $g(x) = \frac{3x^2-27}{x^2(x+1)}$

a) Calculer les limites de g(x) en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Calculer les limites de g(x) en 0.

c) Résoudre dans R l'équation g(x) = 0

Exercice 8

Dans chaque cas déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, déterminer la fonction dérivée f et son ensemble de dérivabilité.

a) $f(x) = \frac{-x^2+5x+1}{4}$

b) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = \sqrt{2-3x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1}$

Exercice 9

f est la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3+2x^2+2x+2}{x^2+1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative.

1. Déterminer Df.
2. Calculer les limites aux bornes de Df.
3. Déterminer les réels a, b, c tel que $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2+2}$
4. Montrer que la droite (D) d'équation y = ax + b est une asymptote à (C).
5. Etudier la position de (C) par rapport à (D)

Exercice 10

f est la fonction définie par

$f(x) = \frac{x^2-x-6}{x+2}$

1. Déterminer Df
2. Calculer les limites de f aux bornes de Df en déduire une asymptote à (Cf).
3. Calculer f '(x)
4. Etudier le signe de f '(x) puis dressez le tableau de variation.

Exercice 1 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{2-x}$

1. Etudier les variations de f.
2. Soit (D) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'axes ox, oy l'unité de longueur est le cm.

a) Soit (D) la droite d'équation y = x – 1 montrer que (D) est asymptote à (C) et préciser la position de (C) par rapport à (D).

b) Montrer que le point I, intersection des deux asymptotes est centre de symétrie pour (C)

c) Déterminer les points d'intersection de (C) avec la droite (D') d'équation

$y = -\frac{1}{2}$

Tracer la courbe (C) et ses asymptotes ainsi que la droite (D')

Exercice 12

A) Soit la fonction numérique définie par

$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2}}{1-x}$.

1. a) Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.

b) Donner les différentes expressions de la fonction par intervalles.

2. Etudier les variations de f.

B) Soit g l'application de R*-{1} dans R définie par g(x) = f(x).

1. Montrer que pour $x \in R^* \setminus\{1\}$ il existe 3 réels a, b et c tels que $g(x) = ax + b + \frac{c}{1-x}$.

En déduire qu'il existe une asymptote à la courbe représentative (C) de g.

2. Construire (C) est ses asymptotes.

Exercice 13

Soit une suite (U_n) définie par $U_1 = 2$ et pout tout $N \geq 1$ $2n\,U_{n+1} = (n+1)\,U_n$

1. Calculer U_2 et U_3

2. On définit la suite (V_n) pour tout n $\in N^*$ par $V_n = \frac{U_n}{n}$

a) Calculer V_1 , V_2 , V_3

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Ecrire l'expression de V_n et de U_n en fonction de n.

d) Etudier la croissance et la convergence des suites (V_n) et (U_n).

Exercice 14

Pour creuser un puits de 20 m de profondeur, 2 organismes A et B proposent les conditions suivantes :

Organisme A : le premier mètre creusé vaut 20.000 F, le prix de n ième mètre creusé dépasse celui du mètre creusé précédemment de 1000 F.

Organisme B : le premier mètre creusé vaut 100F, le double du n ième mètre creusé vaut le triple du mètre creusé précédemment. On désigne par U_n et V_n les prix du n ième mètre creusé respectivement par les organismes A et B. (On a donc U_1 = 20.000 et V_1 = 100)

1. Calculer U_2 et V_2.

2. a) Exprimer U_n en fonction de U_{n-1} et V_n en fonction de V_{n-1} pour n > 1 et en déduire que (U_n) est une suite arithmétique et (V_n) une suite géométrique.

b) Exprimer U_n en fonction de n et V_n en fonction de n.

c) Déterminer le prix du 20 ième mètre creusé par chaque organisme.

3. On pose S_n le prix des n mètre creusés par l'organisme A et Sn celui de l'organisme B.

Exprimer S_n' et S_n en fonction de n en déduire l'organisme le plus économique.

On donne $\left(\frac{3}{2}\right)^{19} = 2217$; $\left(\frac{2}{2}\right)^{20} = 3325$

Exercice 15

1. On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D : f

b) Montrer que pour tout x de D on a $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

c) Donner le tableau de variation de f.

d) Montrer que la droite y = x – 1 est asymptote à la courbe représentative (C) de f.

e) Tracer la courbe dans un repère orthonormé (o, i, j)

2. Soit la fonction g définie par g(x) = /x/ - $1 + \frac{1}{|x|+1}$. Soit (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer son ensemble de définition D'.

b) Etudier la parité de g et conclure.

c) Comparer g(x) et f(x) pour x ϵ [o, + ∞ [et sans étudier g montrer comment on peut construire C. La construire.

Exercice 16

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2+4x+7}{2(x+1)}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité = 2cm

1. a) Déterminer l'ensemble de définition E.

b) Calculer les limites aux bornes de E et en déduire le ou les asymptotes éventuelles.

c) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout x de E $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

d) En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.

e) Etudier la position relative de (C) et (D).

2. Calculer f'(x)

3. Dresser le tableau de variation

4. Déterminer une équation (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$.

5. a) Tracer les droites asymptotes, la tangente (T) et la courbe (C)

b) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation f(x) = m $m \in R$

6. Soit g la fonction telle que g(x) = /f(x)/. Sans étudier g montrer comment on peut déduire la courbe représentative C_g à partir de C_f.

Exercice 17

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_{n+2} \end{cases}$

1. Calculer U_1 et U_2

2. Soit $V_n = U_n - 3$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n

c) Etudier la convergence des suites (V_n) et (U_n)

3. On pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 \cdot V_n$ et $T_n = U_0 + U_1 + U_2 + ...U_n$

Exprimer S_n en fonction de n, puis T_n en fonction n.

4. On désigne par (W_n) la suite définie par W_n = ln (V_n) est la fonction logarithme népérien.

a) Montrer que la suite W_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer W_n en fonction de n

c) On pose $P_n = W_0 + W_1 + W_2 \ldots W_{n-1}$

Exprimer P_n en fonction de n.

Exercice 18

1) Calculer les limites aux bornes de chacune des fonctions suivantes en $-\infty$ et en $+\infty$

a) $f(x) = \sqrt{x^2} + 1 + x$ b) $g(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$ c) $h(x) = \frac{x^2+2}{x^2+3x+2}$ d) $j(x) = \left(\frac{2}{x} - 1\right)\left(\frac{2}{x^2} - 5\right)$

2) On considère la fonction k définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $k(x) = \frac{x^2}{x-1}$

a) Déterminer son ensemble de définition puis calculer les limites en ses bornes et interpréter.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que $k(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ pour tout $x \neq 1$.

c) Montrer que (D) : y = ax + b est une asymptote oblique en ∞ et en $+\infty$

Exercice 19

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes après avoir déterminer leurs ensembles de définition.

a) $f(x) = x^3(x^2+3)$ b) $g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

c) $h(x) = (x^2+1)^3$ $j(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

e) $k(x) = (1+\sqrt{x})x^2$

Exercice 20

Soit la fonction f défini par $f(x) = \frac{2x^2-7x+5}{x-3}$ et soit (Cf) sa courbe représentative.

1. développer les expressions : $A(x) = (x-1)(2x-5)$ et $B(x) = (2x-4)(x-4)$

2. Déterminer l'ensemble définition de f et calculer les limites en ses bornes en précisant les asymptotes.

3. Montrer que pour tout x de Df, f(x) peut s'écrire sous la forme $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-3}$

4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

5. Montrer que (Δ) : y = 2x -1est une asymptote à (Cf)

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Cf) avec les axes de coordonnées.

7. Montrer que le point I (3,5) est un centre de symétrie pour (Cf).

8. Tracer (Cf) et les asymptotes.

Exercice 20

On donne P(x)) $-2x^3 + 5x^2 + 4x - 3$

a)Déterminer 3 réels a, b et c tels que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$

b)Résoudre dans R p(x) = 0 et $P(x) \geq 0$.

Exercice 21

1) Factoriser P(x)

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

2) On considère le polynôme $Q(x)$ définie par : $Q(x) = x^3 - 7x + 6$

a) Montrer que 1 est une solution de l'équation :

$Q(x) = 0$

b) En déduire que $Q(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$Q(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b)$ ou a et b sont des nombres réels à préciser.

c) Résoudre dans R l'équation : $Q(x) = 0$

d) Résoudre dans R l'équation : $Q(x) < 0$.

Exercice 2 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x-4}$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2. a) Déterminer la fonction dérivée f' et de f.

En déduire le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

Problème (10 pts)

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm sur chaque axe. On désigne par f la fonction numérique de la variable réel x définie sur $D = R / \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 5x - 15}{x - 2}$ et (C) sa représentation graphique.

1. a) Vérifier que : pour tout x de D, $f(x) = x - 3 + \frac{9}{x-2}$

b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (C).

c) Préciser la position relative de (C) et (Δ).

2. Déterminer $\lim f(x)$ et $\lim f(x)$

x → 2 x → 2

<>

3. Démontrer que (C) admet le point A(2 : -1) comme centre de symétrie.

4. a) Vérifier que : pour tout x de D, $f'(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f et construire (C).

c) Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

5. Tracer la droite d'équation y = -7.

En déduire la résolution graphique de l'inéquation : $\frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2} < 7$.

6. Construire (C) l'asymptote et la tangente.

Exercice 23

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_0 = 6$

$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2$

1. Calculer U_1 et U_2.

2. Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n - 3$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Calculer V_n puis Un en fonction de n.

c) La suite (Un) est-elle convergente ? Justifier.

3. On désigne par (W_n) la suite définie par $W_n = \ln(V_n)$.

a) Calculer $W_{n+1} - W_n$ puis en déduire la nature de la suite (W_n)

b) Calculer Wn en fonction de n.

c) On donne $S_n = W_0 + W_1 + W_2 + \ldots\ldots W_n - 1$.

Calculer S_n en fonction de n.

Exercice 24

On considère la suite numérique définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 1$

Soit (V_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $V_n = 4U_n - 6n + 15$

1. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
2. a) Calculer V_0 puis exprimer V_n en fonction de n.

b) En déduire que pour tout entier naturel $U_n = \frac{19}{4} X \frac{1}{3n} + \frac{6n-15}{4}$

3. On pose $T_n = \frac{19}{4} X \frac{1}{3^n}$ et $W_n = \frac{6n-15}{4}$ pour tout entier naturel n.

a) Déterminer la nature des suites (T_n) et (W_n)

b) Calculer $S = T_0 + T_1 + ... T_n$ et $\sum = W_0 + W_1 + ... W_n$

c) En déduire $S' = U_0 + U_1 + ...U_n$

Exercice 25

On considère la suite U définie par :

$U_n + 1 = \frac{n}{3(n+1)} U_n \quad \forall n \geq 1$

1) Calculer U_2 et U_3
2) Etudier la monotonie (Sens de variation) de U_n (on vérifiera d'abord que U_n est à termes positifs).
3) On pose $V_n = \frac{1}{4}(nUn)^2$ montrer que $V_{n+1} = \frac{1}{9}Vn$

1) Exprimer V_n et U_n en fonction de n
2) La suite (Un) est celle convergente ou divergente ?
3) Soit $S_n = V_1 + ...+ V_n$; exprimer S_n en fonction de n et calculer $\lim S_n$.

Exercice 26

Au 1er Janvier 2008, une ville comptait 250 000 habitants.

Chaque année, la population augmente de 2% , de plus, durant la même période, 50 000 personnes viennent s'établir définitivement dans cette ville.

1) Quelle sera la population de cette ville au 1er Janvier 2009 ?

On note U_n la population de la ville au 1er janvier de l'année 2008 + n.

2) Exprimer U_{n+1} en fonction de Un.
3) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n + 250\,000$ pour tout entier n.

Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.

4) En déduire la population de la ville au 1er Janvier 2020.

On donne : $(1{,}02)^{12} = 1{,}27$

Exercice 27

On considère la suite numérique définie sur

N par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n - 1}{4U_n + 1} \end{cases}$ pour tout $n \in N$

1. Calculer U_1 , U_2, U_3
2. En déduire que la suite (U_n) n'est pas arithmétique.
3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{2}{2U_n - 1}$
   a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique
   b) Exprimer V_n en fonction de n.
   c) Etudier le sens de variation de (V_n)
   d) Exprimer $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ en fonction de n.
4. a) Exprimer U_n en fonction de n.

b) Calculer U_{10}

Exercice 28

Soit (Un) et (Vn) deux suites numériques par

$\begin{cases} U_0 = 10.000 \\ U_{n+1} = 1{,}05U_n + 5.000 \end{cases}$; V_n = Un + 100.000

1. Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; V_0 ; V_1
2. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

Exercice 29

Dans une classe de T.A4, tous les élèves étudient au moins l'anglais ou l'allemand, 15 élèves étudient l'anglais et l'allemand, 25 étudient l'anglais, 20 étudient l'allemand.

Quel est le nombre d'élèves de la classe, expliquer votre procédé.

Exercice 30

Le code confidentiel d'une valise est un nombre à 4 distincts ou non chiffre 0, 1, 2........ 9. Un code de valise est composé au hasard.

1. Que représente chaque code de valise ?
2. Dénombrer tous les codes possibles.
3. Le code confidentiel est un nombre à 4 chiffres distincts pris parmi les mêmes chiffres.
   a) Que représente chaque code de valise ?
   b) Dénombrer tous les codes possibles.

Exercice 31

Mr. SANFO décide de placer dans une banque de la place une somme de 200. 000FCA à un taux d'intérêt de 10% annuel au premier janvier 2015, soit u_0 le montant au 1er janvier 2015, u_1 celui du 1er janvier 2015 + 1 et $u_n$celui du 1er janvier 2015 + n.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique en précisant sa raison et son 1er terme.
3) Exprimer u_n en fonction de n.
4) Calculer le montant total que Mr SANFO disposera au premier janvier 2020.

On donne $(1{,}1)^5 = 1{,}61$

Exercice 32

On considère les suites U et V définies par :

$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{5} \\ U_n = \frac{U_{n-1} - 3}{6} \end{cases}$ et $V_n = 3 + 5U_n$

1)

a) Montrer que V est une suite géométrique ; On précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire l'expression de Vn puis celle de Un en fonction de n.

2) Etudier la convergence de (Un)

3)

a) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ en fonction de n.

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 33

Soit la fonction f définie sur R par : f(x)= $\frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2}$

1) Démontrer qu'il existe des réels a, b, c tel que pour $x \in R$,

f(x)=ax+b+$\frac{cx}{x^2+1}$

2) a) Calculer

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Démontrer que la droite (d) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f.

c) Etudier la position relative de (C) et (d)

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) a) Déterminer les coordonnées des points de (C) où la tangente est parallèle à la droite (d).

b) Déterminer une équation de ces tangentes.

c) Démonter que le point $I(0 ; \frac{5}{2})$ est centre de symétrie de (C).

5) Le plan est muni d'un repère orthonormal (o, i, j) d'unité 1 cm. Tracer les tangentes, la droite (d) et la courbe (C).

Exercice 34

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $U_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n par $3U_{n+1} = U_n + 9$

1. Calculer U_2 , U_3
2. Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $V_n = U_n - \frac{9}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. (0,5 pt)

   b) Déterminer V_n ; puis U_n en fonction de n (1 pt)

   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite (1 pt)

d) Calculer la somme S_n des n premiers termes de (V_n) et la somme S_n' des n premiers termes de (U_n) (1 pt)

Exercice 35

Soit les suites U et V définies par $U_0 = \frac{5}{4}$;

$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - n - \frac{4}{3}$; $V_n = U_n + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4}$

1) Calculer V_0, V_1, V_2.

2) Montrer que V_n est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

3) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 \ldots\ldots V_n$.

4) Soit $t_n = \frac{-3}{2}n + \frac{1}{4}$

   a) Montrer que t_n est arithmétique, préciser le 1er terme et la raison.

   b) Calculer en fonction de n la somme $T_n = t_0 + t_1 + t_2 \ldots\ldots t_n$

5) Montrer que $U_n = V_n + t_n$.

6) Soit $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots.. U_n$

Montrer que $S'_n = S_n + T_n$ et en déduire l'expression de S'_n en fonction de n.

Exercice 36

Soit f et g deux fonctions définie par $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ et $g(x) = \frac{-x^2 + 5x + 2}{2(x+1)}$

1. Déterminer les domaines de définition de f et g.

2. Calculer les limites de f et g aux bornes des domaines de définition de f et g.
3. a) Déterminer les réels a ; b et c tels que $g(x) = ax + b + \frac{c}{2(x+1)}$

b) Montrer que la courbe de g admet une asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$

Exercice 37

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + 2x + 5}$

1) Déterminer le domaine de définition de f puis calculer les limites de f aux bornes de ce domaine.

2) Trouver les asymptotes à la courbe (Cf) parallèle à l'axe des abscisses puis celles parallèles à l'axe des ordonnées.

Exercice 38

Soit $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{-2x+8}}{3x-9}$

1. a) Déterminer a et b tels que $f(x) = ax + b + \frac{1}{x+1}$

b) Déterminer le domaine de définition de f.

c) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

d) Prouver que la courbe de f admet une asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$.

e) La courbe de f admet-elle des asymptotes horizontales et verticales ?

2. a) Déterminer le domaine de définition de g puis calculer si possible g(0) ; g(1) ; g(3).

b) Calculer les limites de g en 3 par valeur négative puis par valeur positive.

Exercice 39

Soit $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{(9 - x^2)(2x - 1)}$

1) Factoriser $2x^2 + 5x - 3$ et $9 - x^2$.

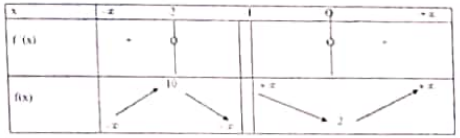
2) Donner le domaine de définition de f puis simplifier f(x) sur ce domaine.

3) Calculer alors les limites de f à ces bornes

Exercice 40

Soit f une fonction définie par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a ; b et c sont des réels. On note (C) la courbe de dans (o, i, j) orthonormé.

On donne le tableau de variations de f sur R.



1. Calculer f '(x) en fonction de a ; b et c.
2. Déterminer alors a ; b et c à l'aide du tableau de variations.
3. On suppose que $f(x) = 3x - 1 + \frac{3}{x+1}$

a) Montrer que (Δ) : y = 3x – 1 est asymptote oblique à (C)

b) Montrer que A(1 ; 2) est centre de symétrie pour (C)

c) Donner une autre asymptote à (C).

4. Tracer (Δ) et (C) dans (o ; i ; j)

Exercice 41

Etudier le signe de f(x) sur l'intervalle K et dresser le tableau de variation

1) $f(x) = x^2 - 4x$ K =] - ∞ ; +∞ [

2) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ K = [-1,4[

3) $f(x) = -x - 1 + \frac{4}{x}$ K =] - ∞ 0 [

Exercice 42

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, i, j)

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est asymptote à (C)

3) a. Calculer f'(x)

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c. Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 et au point d'abscisse 3.

Exercice 43

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1 + x - x^2}{3 - x}$.

1) Déterminer le domaine de définition de g.

2) Etudier le comportement de g aux bornes de Dg.

3) On pose $g(x) = ax + b + \frac{c}{3 - x}$, a, b, c ∈ R.

a) Trouver les 3 réels a, b, c.

b) Montrer que la courbe représentative de g admet une asymptote oblique en + ∞ et en - ∞.

Exercice 44

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de f définie par $f(x) = ax^2 + bx - 1$ passe par le point A(1,4) et admet un extremum en ce point

Exercice 45

(Un) et (Vn) sont deux suites numériques définies respectivement par :

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ 4U_n = U_{n-1} + 24 \; pour tout n \in N^* \end{cases}$$

Et pour tout n ∈ N , Vn = Un – 8

1) Calculer U_1, U_2 et U_3

2) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

4) Soit $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{n-1}$ et $S_n' = U_0 + U_1 + U_2 + ... U_{n-1}$

Exprimer S_n et S'_n en fonction de n.
La suite (S'_n) est-elle convergente ?

Exercice 46

Une voiture achetée à 5.000.000 de francs en 1980 perd chaque année 20 % de sa valeur. On désigne par (Un) la valeur de cette voiture en 1980 + n.

1) Exprimer Un+1 en fonction de Un. En déduire que (Un) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2) Ecrire Un en fonction de n.

3) Combien cette voiture valait-elle en 1990, 1993, 1995.

On donne

[illegible]	10	11	12	13	14	15
[illegible]	0,11	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03

Exercice 47

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unité graphique 1 cm sur chaque axe. On désigne par f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur Df par $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}$

et (C) sa représentation graphique.

1) a. Vérifier que pour tout x de Df $f(x) = x - 3 + \frac{9}{x - 2}$

b. En déduire que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (C).

c. Précisez la position relative de (C) et (D)

2) Déterminer les limites de f(x) aux bornes de son domaine de définition.

3) Démontrer que le point A(2-1) est centre de symétrie.

4) a) Vérifier que : $f'(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation et construire C.

c) Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1.

5) Résoudre graphiquement

$\frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2} < -7$.

EXERCICE 48

1) Déterminer la limite en + ∞ de chacune des fonctions suivantes : $f(x) = \frac{2}{x^3}$; $g(x) = \frac{2x^3 - 5x - 3}{x^3}$; $h(x) = -3 + \frac{5}{x^2}$; $k(x) = -x^4$

2) Déterminer la limite en - ∞ de chacune des fonctions suivantes : $f(x) = -x^3$; $g(x) = 5 + \frac{1}{x}$; $h(x) = \sqrt{-x + 3}$

3) Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \to 0^+} \left(x^2 - 4 + \frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \to -\infty} (-x^2 - x + 3)$;

$\lim_{x \to -\infty} \left(2x + 1 - \frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{4 - 3x}{x}\right)$

EXERCICE 49

1. a) Déterminer suivant les valeurs de x le signe de

$x^2 - 3x + 2$.

b) Déterminer : $\lim_{x \to 1^+} \frac{2x+1}{x^2 - 3x+2}$ et $\lim_{x \to 1^-} \frac{2x+1}{x^2 - 3x+2}$.

2. Soit la fonction f définie sur]1 ; +∞[par

$f(x) = \frac{3x + \cos x}{x - 1}$.

a) Montrer que si $x > 1$, $\frac{3x - 1}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{3x + 1}{x - 1}$

b) En déduire alors $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4x - 5}{x - 1}}$.

EXERCICE 50

On sait que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$. Montrer que $f(x) = \frac{2\sin^2 x}{x^2}$ et déterminer $\lim_{x \to 0} f(x)$.

2) En déduire que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = 2$.

EXERCICE 51

1) Etudier la continuité en 0 de :

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x} \; si \; x < 0 \\ \frac{x - 6}{2x - 3} \; si \; x \geq 0 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} \frac{2x - 1}{x + 1} \; si \; x \leq 0 \\ \sqrt{x + 9} \; si \; x > 0 \end{cases}$

2)) Etudier la continuité en 1 de :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{6x}{x+2} \; si \; x \in \,]-\infty\,;1[\\ \sqrt{3x+1} \; si \; \in [1\,;+\infty[\end{cases}$$

3) Etudier la continuité en π de :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\cos 2x}{1-\cos x} \; si \; x \in \,]-\infty\,;\pi[\\ \sin(\frac{1}{6}x) \; si \; \in [\pi\,;+\infty[\end{cases}$$

EXERCICE 52

1) Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $]0\,;1]$. dire si on peut prolonger f par continuité en 0 . $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$;

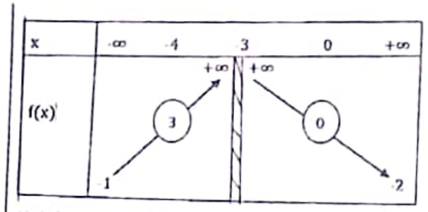
$f(x) = \frac{\tan x}{x}$; $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$.

2) Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $[0\,;1[$ Dire si on peut prolonger f par continuité en 1.

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$; $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $f(x) = \frac{|x|-1}{x-1}$; $f(x) = \frac{x(1-x)}{x-1}$.

EXERCICE 53

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :



1) Déterminer Df .

2) Quelle est l'image par f de chacun des intervalle suivants : $]-4; -3[$; $]-3\,;0]$; $]-3\,;+\infty[$; $]-\infty;\ -4]$.

3) Déterminer les différentes asymptotes à la courbe représentatives de f.

4) Donner les variations de f.

5) Tracer la courbe (C) de f.

EXERCICE 54

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - |x+1|}$.

1) Ecrire f sans le sans le symbole de la valeur absolue.

2) Etudier la continuité de f en -1.

EXERCICE 55

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition et calculer la dérivé :

$f(x) = -x^2 - x + 3$; $g(x) = 5 + \frac{1}{x} - \sqrt{3x}$;

$h(x) = -3 + \frac{5}{x^2}$; $k(x) = \frac{2x^3 - 5x - 3}{x^3}$;

$A(x) = \sqrt{-x+3}$;

$B(x) = 1 - \frac{4-3x}{x}$; $C(x) = = \frac{x^2-1}{x-1}$;

$p(x) = \frac{\sin x}{x}$, $q(x) = \frac{3x-1}{x-1}$, $m(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

; $n(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{4x^2}$;

$s(x) = \frac{\tan x}{x}$; $v(x) = \frac{1-\cos x}{x}$;

$D(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{3x} + 1$;

$H(x) = |2x+4|$, $F(x) = \left|\frac{x^2-1}{x^2+2}\right|$; $L(x) = \left|\frac{x^2-3x-1}{x^2-4}\right|$.

EXERCICE 56

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Etudier la parité de f.

3) Etudier les variations de f puis dresser le tableau

de variation.

4) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1.

Interpréter géométriquement les résultats.

5) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 1cm. Construire l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE 57

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x+3}{|x|+2}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Etablir les équations de la tangente à gauche et de la tangente à droite à la courbe (C) au point $A(0\,;\frac{3}{2})$

EXERCICE 58

1- Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2(3-x)$ et (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer les extrémums éventuels de f.

b) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe (C).

2- Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x-x^2}{x^2+1}$ et (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer les extrémums éventuels de f.

b) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe (C).

EXERCICE 59

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x|x-1|$

1) Etudier la dérivabilité de f en 1.

2) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Justifier.

EXERCICE 60

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x(x+1)}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0.

3) Etudier les variations de f puis dresser le tableau

de variation.

4) Vérifier que la droite (D) : $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$.

5) Vérifier que la droite (D') : $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$.

6) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en précisant la tangente à gauche et de la tangente à droite à la courbe (C) en -1 et 0.

EXERCICE 61

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = (1-\sqrt{x})^2$ et (C) sa courbe représentative

1) Etudier les variations de f puis dresser son tableau

de variation.

2) En déduire que f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$

Vers un intervalle J que l'on déterminera. En déduire le

tableau de variation de f^{-1}

3) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f.

4) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En déduire celle de la bijection réciproque puis justifier.

EXERCICE 62

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Déterminer les limites de f aux bornes de Df.

3) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1. Donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

4) Etudier le sens de variations de f .

5) Démontrer que la courbe représentative de f admet deux asymptotes ; donner les équations de ces asymptotes.

6) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

Exercice 63

On considère $f(x) = \frac{(x-4)^2}{2(2-x)}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère (O,I,J) du plan

1) a- Déterminer D_f et

b- Préciser les limites aux bornes de D_f

c- En déduire la ou les asymptote(s) à C_f

2) a- Déterminer a, b , c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$

b- Montrer que (D) : $y = \frac{-x}{2} + 3$ est une asymptote à la courbe C_f

3) a- Montrer que $f'(x) = \frac{x(4-x)}{2(x-2)^2}$

b- Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser son tableau de variation.

c- Construire la courbe C_f

EXERCICE 64

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} - 1 \ si\ x \geq 2 \\ f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+3} \ si\ x < 2 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère ortho normal (O,I,J) d'unité 1 cm.

1) Déterminer le domaine de définition Df de f.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de Df.

En déduire une conséquence graphique

3) Montrer que la droite (L) d'équation : $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
4) Etudier la continuité de f en 2.
5) Etudier la dérivabilité de f en 2.
6) a- Calculer la dérivée $f'(x)$.

b- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

c- Dresser le tableau de variation de f.

d- Tracer les asymptotes, la tangente (T) et la courbe (C).

7) Soit g la restriction de f à l'intervalle I = $]-\infty; 1[$

a- Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à préciser. En déduire le tableau de variation de g^{-1} sans expliciter $g^{-1}(x)$

b- Construire en justifiant la courbe (C^{-1}) de la bijection réciproque g^{-1} dans le même repère

EXERCICE 65

PARTIE A :

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1) Etudier les variations de g.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
3) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm. On considère la fonction f de courbe représentative (C) dans le plan par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de f à ses bornes. Interpréter si possible.
2) Etudier les variations de f.
3) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter ces limites.
4) En déduire l'équation de l'asymptote oblique (Δ) en $-\infty$ et en $+\infty$.
5) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ) d'équation $y = x + 2$.
6) Tracer (C) et (Δ). On donne $\alpha = 2{,}25$ et $f(\alpha) = 5{,}3$.

UN BONUS

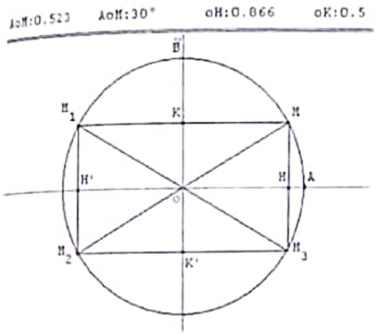
- **Angles - Trigonométrie en 1S**

Exercices liés aux angles remarquables : 15°, 22,5°, 54°, 72°. Rectangle d'or, triangle d'or

Sommaire 1. Configuration du rectangle Angle $\frac{\pi}{8}$ 2. Angle $\frac{\pi}{12}$ a. Calculatrice TI-92 b. Triangle équilatéral dans un carré c. Triangle d'angles $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$ d. Exercice : calcul de coordonnées	3. Angles $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$ a. sin $\frac{3\pi}{10}$ c. Rectangle d'or d. Triangle d'or Document n° 35, réalisé le 17/3/2003, modifié le 11/4/2008

Faire des maths … avec GéoPlan : http://debart.pagesperso-orange.fr/index.html
Document Word : http://www.debart.fr/doc/angle_trigo.doc
Document PDF : http://www.debart.fr/pdf/angle_trigo.pdf
Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/1s/angle_trigo.html

1. Configuration du rectangle



Placer un M libre sur le cercle trigonométrique de centre o et de rayon 1. Avec les symétries (menu : *point > point image par > symétrie axiale* par rapport à *ox* puis *oy* ou *centrale* par rapport à o) créer M_1 M_2 M_3.

Puis trouver les points H, K, H', K'.

Si $(\vec{i}, \overrightarrow{oM}) = x$, calculer en fonction de x les angles $(\vec{i}, \overrightarrow{oM_1})$, $(\vec{i}, \overrightarrow{oM_2})$, $(\vec{i}, \overrightarrow{oM_3})$.

$\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{oH} + \overrightarrow{oK} = \cos x\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j}$.

En déduire cos(-x), sin(-x) ; cos(π-x), sin(π-x) ; cos(π+x), sin(π+x).

Avec GéoPlan déplacer le point M pour obtenir les angles remarquables $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

Angle $\frac{\pi}{8}$: les formules de linéarisation $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ permettent d'écrire :

$\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ d'où $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (le cosinus est positif) et de même on trouve $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2. Angle $\frac{\pi}{12}$

a. La calculatrice TI-92 donne les valeurs exactes des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$:

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ et $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

On peut vérifier ces formules en décomposant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Par exemple :

$\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

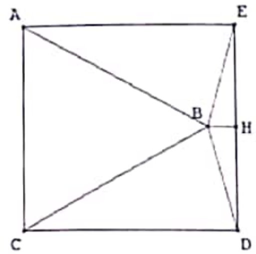
Pour retrouver la tangente utiliser : $1+\tan^2 x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

b. Triangle équilatéral dans un carré

ACDE est un carré de côté $a = 2$ et ABC est un triangle équilatéral.

- Montrer que ABE est un triangle isocèle et calculer ses angles.

En déduire que $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}) = \frac{\pi}{12}$.



- Calculer BH et en déduire le calcul exact de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Solution :

- AB est égal au côté du carré, donc ABE est un triangle isocèle en A, ayant pour angle en A : $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Les deux angles sont égaux à $\frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2}$ soit $\frac{5\pi}{12}$, donc

$$(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}) = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}.$$

- La hauteur du triangle équilatéral est égale à $a\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, donc $BH = 2 - \sqrt{3}$.

Dans le triangle rectangle EBH $\tan\frac{\pi}{12} = \frac{BH}{HC} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3}$, et la propriété de Pythagore donne $EB^2 = (2 - \sqrt{3})^2 + 1 = 8 - 4\sqrt{3}$.

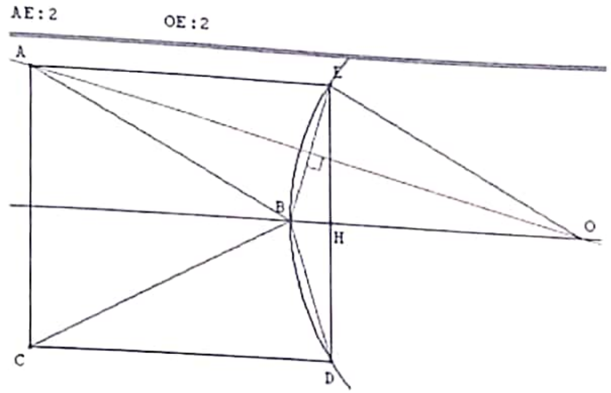
$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\left[\frac{EH}{EB}\right]^2=\frac{1}{EB^2}=\frac{1}{8-4\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

On trouve donc deux nouvelles formules : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Cercle circonscrit

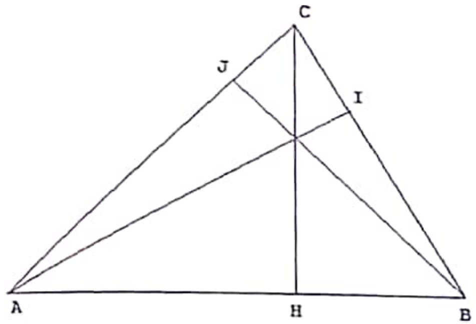
La médiatrice de [BE] coupe la médiatrice de [DE] en O.

Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle BDE,
le rayon de ce cercle est égal à la longueur du côté du carré.



c. Triangle d'angles $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$

Construire un segment AB de 5 cm. À partir du point A tracer une demi-droite formant un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec (AB) et une autre à partir de B formant un angle de $\frac{\pi}{3}$.



Les deux demi-droites se coupent en C.
Soient AI, BJ et GH les trois hauteurs du triangle.

- Calculer AI, puis exprimer AC en fonction de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Solution

AIB est un triangle rectangle en I. L'angle en B est par hypothèse $\frac{\pi}{3}$, le complémentaire

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6}$.

On a AI = AB $\cos\frac{\pi}{6} = 5\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Étudions le triangle ACI rectangle en I :

$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

$AI = AC\, cos\frac{\pi}{12}$ donc $AC = \dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\cos\frac{\pi}{12}}$.

- Calculer BJ, puis exprimer BC en fonction de $cos\frac{\pi}{12}$.

Dans le triangle ABJ rectangle en J, on a $BJ = AB\, cos\frac{\pi}{4} = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$.

De même le triangle rectangle BCJ l'angle aigu B est égal à $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

$BJ = BC\, cos\frac{\pi}{12}$ donc $BC = \dfrac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\cos\frac{\pi}{12}}$.

- Calcul de $AC\, cos\frac{\pi}{4} + BC\, cos\frac{\pi}{3}$

Dans le triangle ACH rectangle en H, d'angle $A = \frac{\pi}{4}$, on a : $AH = AC\, cos\frac{\pi}{4}$

Dans le triangle BCH rectangle en H, d'angle $B = \frac{\pi}{3}$, on a : $HB = BC\, cos\frac{\pi}{3}$.

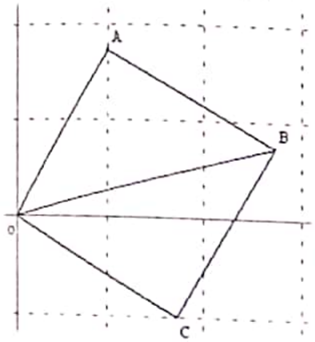
$AC\, cos\frac{\pi}{4} + BC\, cos\frac{\pi}{3} = AH + HB = AB = 5$.

- Calcul de $cos\frac{\pi}{12}$

$$AC\, cos\frac{\pi}{4} + BC\, cos\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\cos\frac{\pi}{12}}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\cos\frac{\pi}{12}}\frac{1}{2} = \frac{5\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})}{\cos\frac{\pi}{12}} = 5.$$

On retrouve la formule $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.

d. Exercice *: calcul de coordonnées*



1) Le point A a pour coordonnées polaires $(2, \frac{\pi}{3})$.
Quelles sont ses coordonnées cartésiennes ?

2) On place C image de A par la rotation $r(O, -\frac{\pi}{2})$.
Quelles sont les coordonnées polaires de C ?
Ses coordonnées cartésiennes ?

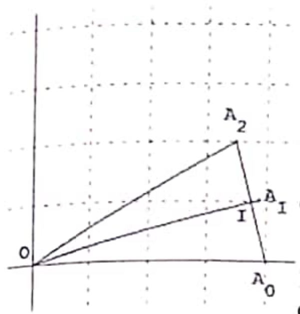
3) On place le point B tel que OABC soit carré : ($\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$). Quelle est la nature du triangle

OAB ? Quel est l'angle ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) ? Calculer OB. Quel est l'angle ($\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}$) ? Quelles sont les coordonnées polaires de B ?

4) Calculer les coordonnées cartésiennes de B. En déduire les valeurs exactes de cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$.

e. Complexes

Bac S Amérique du Nord 1999 - *EXERCICE 2 : candidats n'ayant que l'enseignement obligatoire*



Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), l'unité graphique étant 4 cm. On considère les points A_0, A_1, d'affixes respectives : $a_0 = 1$; $a_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

1. *a*) Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

b) Soit I le milieu du segment $[A_0A_2]$. Calculer l'affixe du point I.

c) Faire une figure.

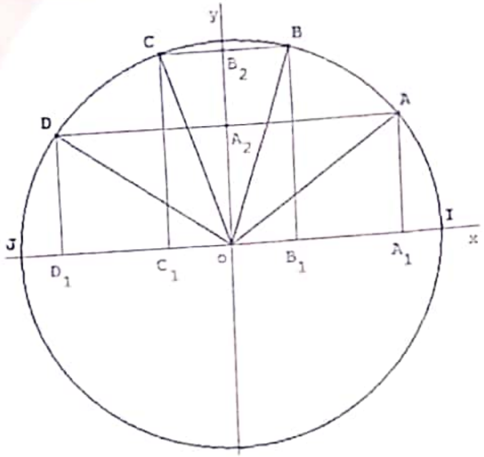
2 . *a*) Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.

b) Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I.

c) Déterminer cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que : $\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

3. Angles $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$

a. cos $\frac{\pi}{5}$: Pour ce calcul nous plaçons le point A sur le cercle trigonométrique tel que ($\vec{i}$, $\overrightarrow{OA}$) = $\frac{\pi}{5}$. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$ transforme A en B ; B en C et C en D.



Les points B et C correspondent aux angles supplémentaires $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{5}$. B et C sont symétriques par rapport à l'axe vertical (Oy). Le point D correspond à l'angle supplémentaire $\frac{4\pi}{5}$. A et D sont symétriques par rapport à (Oy).
Les coordonnées de A sont :

$\cos\frac{\pi}{5} = x,$

$\sin\frac{\pi}{5} = y.$

Les formules de duplication pour l'arc double donnent :
$\sin 2a = 2\sin a \cos a = 2\,x\,y$
$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - \sin^2 a = x^2 - 1 = y^2 - 1$

La TI-92 calcule les fonctions trigonométriques associées au triple de l'arc (fonction dévTrig)
$\sin 3a = 4\sin a \cos^2 a - \sin a = 4\,x^2\,y - y$
$\cos 3a = \cos a - 4\sin^2 a \cos a = x - 4\,x\,y^2$

B et C ont même ordonnée : $\sin\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{3\pi}{5}$ sont égaux, donc $4\,x^2\,y - y = 2\,x\,y$.

En simplifiant par y on obtient $4\,x^2 - 2\,x - 1 = 0$.

$x = \cos\frac{\pi}{5}$ est la solution positive de cette équation donc $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calcul que la TI-92 fait directement.

Remarque : $\cos\frac{\pi}{5}$ est égal à la moitié du nombre d'or $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

En appliquant les formules de duplication $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ on trouve :

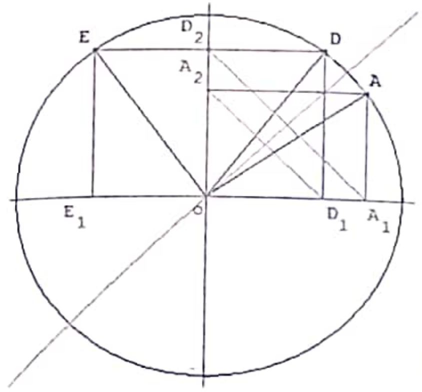
$\cos\frac{2\pi}{5} = -\cos\frac{3\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{10} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\Phi - 1}{\Phi} = \frac{1}{2\Phi}.$

x	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

L'inverse du nombre d'or est donc $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\sin\frac{\pi}{10}$.

I, B, D et les symétriques de D et B par rapport à (Ox) sont les sommets d'un pentagone régulier.

I, A, B, C, D, J et les symétriques de D, C, B et A par rapport à (Ox) sont les sommets d'un décagone régulier.



b. sin $\frac{3\pi}{10}$

Soit D le symétrique du A par rapport à la droite d'équation $y = x$.

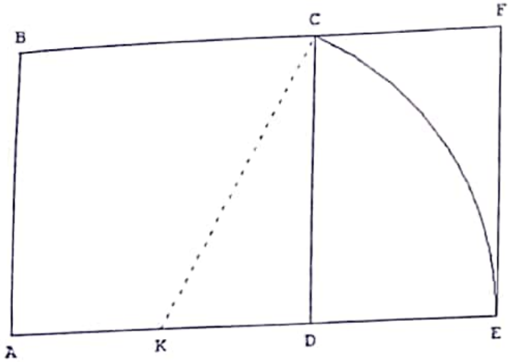
Le complémentaire de l'angle ($\vec{i}$, $\overrightarrow{OA}$) est ($\vec{i}$, $\overrightarrow{OD}$) $= \frac{3\pi}{10}$. $OD_2 = OA_1$ d'où :

$$\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Le supplémentaire de l'angle ($\vec{i}$, $\overrightarrow{OD}$) est ($\vec{i}$, $\overrightarrow{OE}$) $= \frac{7\pi}{10}$.

$\sin\frac{7\pi}{10} = \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$

c. Rectangle d'or



Un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport de la longueur sur la largeur est égal au nombre d'or $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Depuis l'antiquité grecque, on sait construire un rectangle d'or d'une largeur donnée de la façon suivante :

tracer un carré ABCD ayant comme côté la largeur souhaitée.

Prendre le milieu K de [AD].

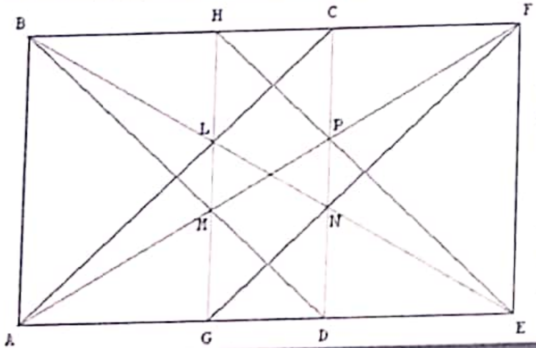
Rabattre le point C sur (AD) en traçant le cercle de centre K, passant par C. Ce cercle coupe [AD) en E.

Terminer la construction du rectangle d'or ABFE.

En effet en choisissant AB = AD comme unité on a $KE = KC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ d'après la propriété de Pythagore dans le triangle DKC rectangle en D, donc $AE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Tracé régulateur

En architecture, comme en dessin, le tracé régulateur permet de schématiser les lignes de force d'une figure.



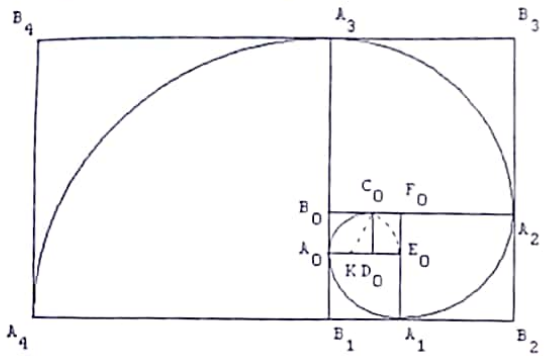
Dans un rectangle d'or, les diagonales du rectangle rencontrent les diagonales des carrés selon des sections d'or.

Les diagonales des carrés ABCD et EFHG coupent en L, M, N, P les diagonales du rectangle d'or ABFE.

Section d'or sur une diagonale :
AF/AP = AP/AM = Φ.

Section d'or sur une côté des carrés :
CD/CN = CN/CP = Φ.

Pavage non périodique du plan



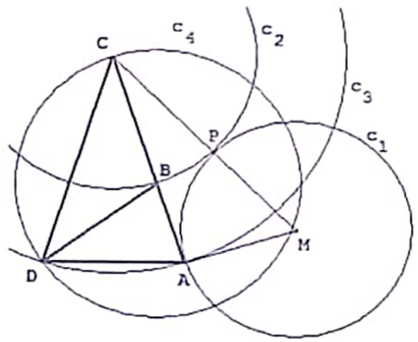
Il est possible de paver le plan à partir de rectangles d'or. Ce pavage non régulier est formé de rectangles de plus en plus grands.

Une bonne occasion d'utiliser la fonction de création itérative de GéoPlan :

Tracer un rectangle d'or initial $A_0B_0F_0E_0$ à partir du carré $A_0B_0C_0D_0$. Tracer $A_0E_0A_1B_1$. $B_0F_0A_1B_1$ est un rectangle d'or. Remplacer A_0, B_0, F_0, E_0 respectivement par C_1, F_1, E_1, D_1 pour obtenir le rectangle d'or $A_1B_1F_1E_1$ contenant le carré $A_1B_1C_1D_1$ de niveau 1. Avec la commande d'itération (touche S) on tracera les carrés suivants.

En traçant dans chaque nouveau carré le quart de cercle de centre D_n, reliant A_nA_{n+1}, on obtient la spirale d'or $C_0A_0A_1A_2$...

d. Triangle d'or



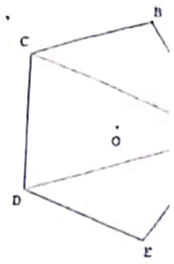
Le triangle d'or ACD est un triangle isocèle en C d'angle $\frac{\pi}{5}$, les deux autres angles en A et D étant égaux à $\frac{2\pi}{5}$.

Le rapport entre le grand côté et la base est égal au nombre d'or : $\frac{AC}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Soit B le point qui partage [AC] en une section d'or :

$\frac{BC}{AB} = \frac{AC}{BC} = \Phi$, on a DA = DB = BC, (DB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$. Le triangle isocèle ABD est semblable au triangle ADC avec un rapport de similitude égal à Φ. Ce triangle ABD est aussi un triangle d'or.

Le triangle BCD est un triangle d'argent : il est isocèle en B d'angle $\frac{3\pi}{5}$, les deux autres angles en C et D étant égaux à $\frac{\pi}{5}$. Le rapport des côtés est aussi égal au nombre d'or : $\frac{CD}{CB} = \Phi$.



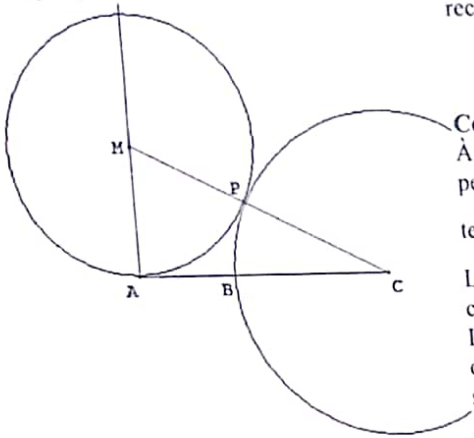
Un pentagone régulier est formé par un triangle d'or et deux triangles d'argent.

Triangle bisocèle

Un triangle bisocèle est un triangle isocèle qui est partagé, par l'une de ses bissectrices, en deux triangles eux-mêmes isocèles.

La droite (DB), bissectrice de l'angle D du triangle ACD, partage le triangle en deux triangles isocèles. Le triangle ACD est bisocèle.

Il n'y a que deux types de triangles bisocèles: le triangle d'or et le triangle isocèle rectangle.



Construction d'une section d'or

À partir du segment [AC], sur la perpendiculaire en A, placer le point M tel que $AM = \frac{1}{2}AC$.

Le cercle c_1 de centre M, passant par A, coupe le segment [CM] en P.
Le cercle c_2 de centre C, passant par P, coupe le segment [AC] en B qui est la section d'or cherchée.
En effet d'après la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle AMC, on a :
$MC^2 = AC^2 + AM^2 = (2AM)^2 + AM^2 = 5AM^2$
d'où $MC = \sqrt{5}\,AM$.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{2AM}{PC} = \frac{2AM}{MC - MP} = \frac{2AM}{MC - AM} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Construction du triangle d'or à partir du grand côté

Si A et C sont deux sommets du triangle, soit B le point qui partage [AC] en une section d'or. Le troisième sommet D est un des points d'intersection du cercle c_3 de centre C, passant par A et du cercle c_4 de centre B, passant par C.

Soit $\alpha = \widehat{ACD}$ l'angle au sommet du triangle d'or. α est aussi égal à l'angle $\widehat{ADB}$ du triangle d'or isométrique. $\widehat{ADC} = 2\alpha$ car (DB) en est la bissectrice. La somme des trois angles du triangle d'or est

$\widehat{ACD} + \widehat{ADC} + \widehat{CAD} = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha = \pi$.

Le triangle d'or a donc un angle au sommet de $\frac{\pi}{5}$, les deux autres angles étant égaux à $\frac{2\pi}{5}$.

Construction du triangle d'or à partir de la longueur de la base

À partir du segment [AB] trouver le point C et tracer le triangle d'or ayant une base [DC] égale à AB.

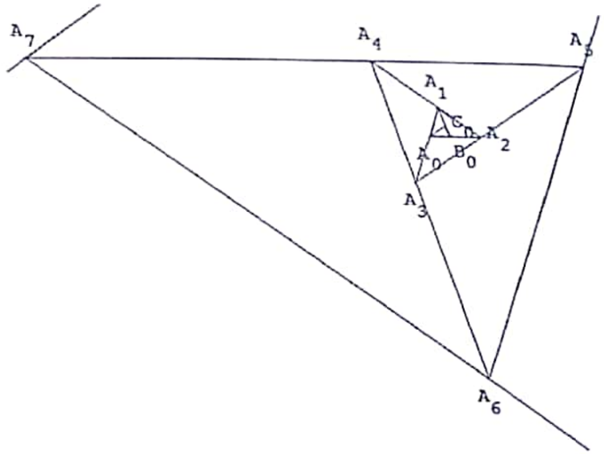
Soit K le milieu de [AB] et B' le point de la perpendiculaire en B situé sue le cercle de centre B passant par A (ABB' triangle rectangle isocèle).
Le cercle de centre K passant par B' coupe la demi-droite [AB) en C.
B est la section dorée de [AC].

En effet si la longueur AB représente l'unité, la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle KBB' permet de vérifier que :

$$AC = AK + KC = AK + KB' = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Une des intersections du cercle de centre A passant par C avec le premier cercle de centre B est D.
ACD est un triangle d'or.

Pavage non périodique du plan

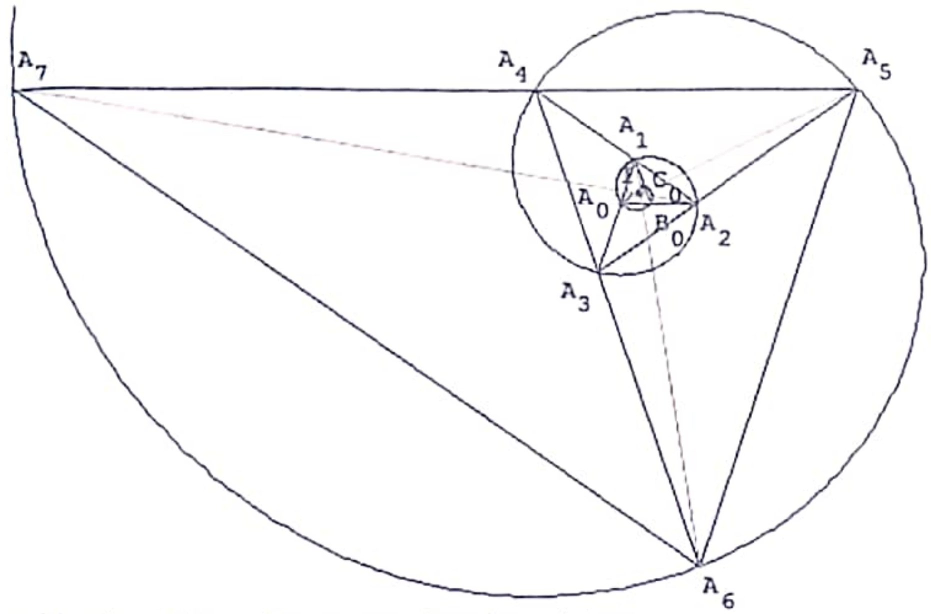


Il est possible de paver le plan à partir de triangles d'or. Ce pavage non régulier est formé de triangles de plus en plus grands.

A partir du triangle d'or $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ créer le point A_{n+3} tel que $A_{n+1}A_nA_{n+3}$ soit une section d'or et recommencer.

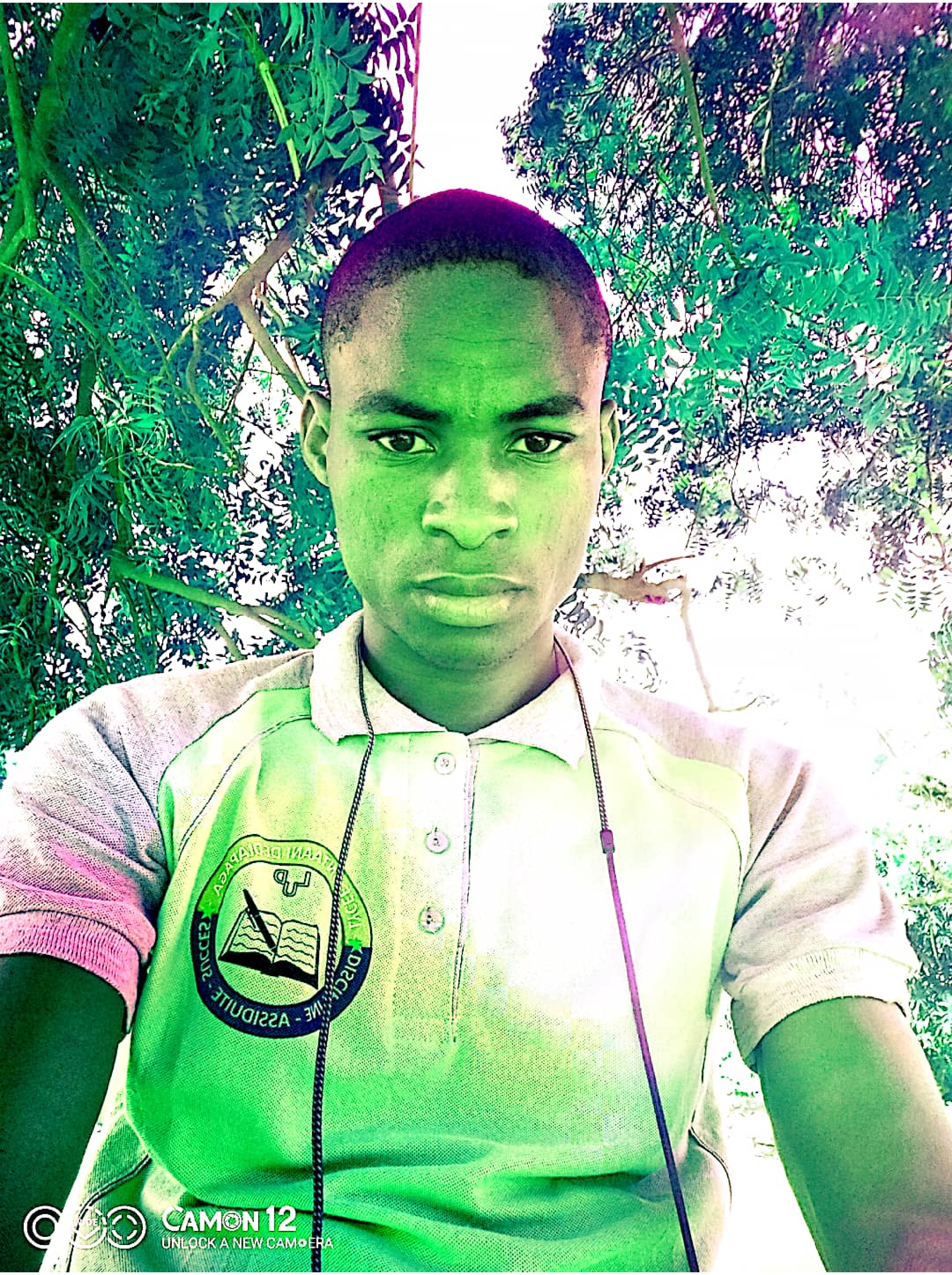
Encore une occasion d'utiliser la fonction de création itérative de GéoPlan :
tracer un triangle d'or initial $A_0B_0C_0$. Trouver le point A1 tel que $B_0C_0A_1$ forme une section d'or. Remplacer A_0 et B_0 respectivement par B_1, C_1 pour obtenir le triangle d'or $A_1B_1C_1$ de niveau 1. Avec la commande d'itération (touche S), tracer les triangles suivants.

Spirale d'or



Une spirale logarithmique d'équation, en coordonnées polaires,

$\rho = a\Phi^{\frac{5\theta}{3\pi}}$ dans un repère d'origine I, intersection des droites A_0A_5 et A_1A_6 (*voir figure*), passe par les sommets des triangles d'or.


CAMON 12
UNLOCK A NEW CAMERA