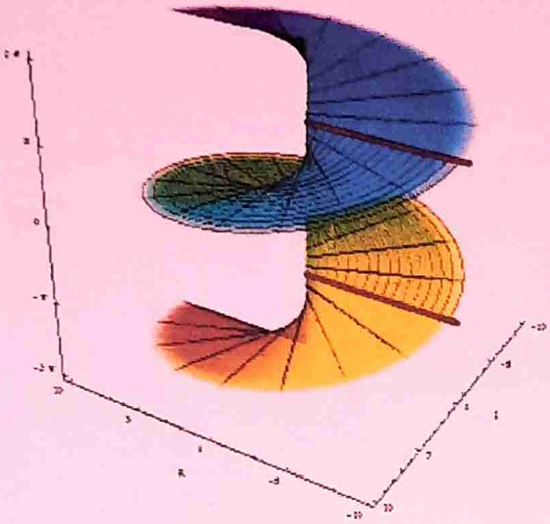
Collection Aquipat

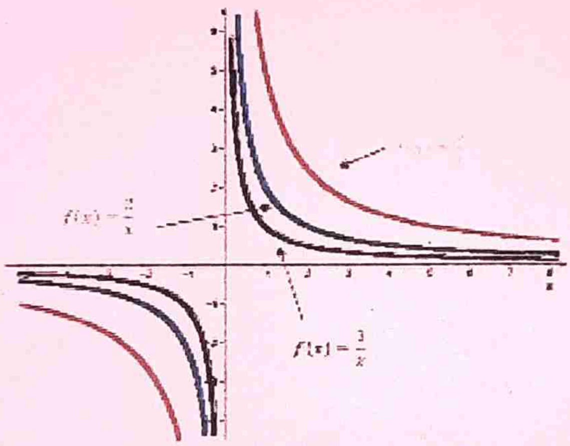
3ème édition

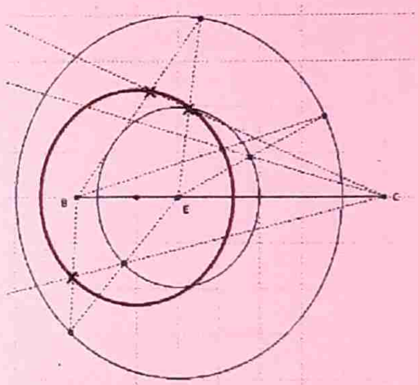
Fascicule des Mathématiques

Terminales S (C, D & E)



x	0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{m})$	$\nearrow$	$+\infty$





Collection Aquipat de Mathématiques

Exercices, problèmes et sujets corrigés

« Un élève, un fascicule »

Ndonaye Ouala (Patrice),

Professeur de Mathématiques au lycée Félix Eboué Scientifique

66 72 66 91 ou 93 38 40 99

Avant propos

La Collection « Aquipat », 3ème édition, est un ouvrage de mathématiques qui s'adresse à tous les élèves de Terminales Scientifiques (C, D et E) et tous les collègues enseignants intervenant dans ces classes. Il rassemble tout le programme en vigueur depuis 2008, excepté la statistique.

Il est conçu de telle sorte que tout élève de Terminale Scientifique peut, sans aucune difficulté, préparer et réussir son baccalauréat. Il permettra aux collègues enseignants de proposer directement des exercices par chapitre à leurs élèves.

La Collection « Aquipat » comprend deux grandes parties.

- La première partie comprend un résumé de chaque chapitre suivi des plusieurs exercices, des problèmes de synthèse et enfin des sujets de type baccalauréat ;
- La deuxième partie est le corrigé de la plupart des exercices, problèmes et sujets proposés

Par ailleurs, nous mettons en garde l'élève de toute lecture systématique du corrigé. Tout élève consultant ce document, doit d'abord lire et essayer de corriger lui-même l'exercice et enfin s'assurer de sa démarche. Nous vous signalons également que certains corrigés sont condensés dans l'objectif de pousser l'élève à découvrir la démarche et enfin de s'en approprier. Ainsi, nous assurons tout élève qui mettra en pratique nos suggestions et qui exploite correctement notre collection réussira son examen en mathématiques.

Chers collègues enseignants, vos remarques et suggestions seront les bienvenues pour l'amélioration du document, d'avance merci (nul n'est infaillible et toute œuvre humaine n'est jamais parfaite).

L'auteur

Sommaire

1ère partie : Enoncés

2ème partie : Corrigés

1ère Partie : Enoncés

I) NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

A) RÉSUMÉ DU COURS

I) Etude algébrique

Définition 1 : On dit que z est un nombre lorsqu'il s'écrit sous la forme : $z = a + ib$ où a et b sont des réels et i le nombre imaginaire tel que : $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Vocabulaire :

- $a + ib$ est la forme algébrique de z avec a la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z.
- A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point $M(a\,;\,b)$ appelé point image de z et, à tout point $M(a\,;\,b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé affixe du point M

Propriété 1 : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe

- Si $a = 0$, z est dit imaginaire pur ;
- Si $b = 0$, z est dit réel ;
- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors $z = 0$.

Définition 2 : on appelle conjugué de $z = a + ib$ le nombre complexe : $\bar{z} = a - ib$

Propriété 2 : Pour tous complexe $z = a + ib$ et $\bar{z} = a - ib$, on a :

- $z + \bar{z} = 2a$;
- $z - \bar{z} = 2ib$;
- $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$;
- z est réel si, et seulement si : $z = \bar{z}$;
- z est imaginaire pur si, et seulement si : $z = -\bar{z}$

Définition 3 : on appelle module de $z = a + ib$, le réel positif noté $|z|$ tel que : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriété 3 : Pour tous complexes z et z', pour tout relatif n, on a :

- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (l'inégalité triangulaire)

II) Etude trigonométrique

Définition 4 : On appelle argument de $z \neq 0$ toute mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ et on note : $\arg(z) = (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Si θ est un argument de z, alors : $\begin{cases} cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} \\ sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|} \end{cases}$

Propriété 4 : Pour tous complexes z et z' non nuls, pour tout relatif n non nul, on a :

- $\arg(zz') = argz + argz' + 2k\pi$;
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -argz + 2k\pi$;
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = argz - argz' + 2k\pi$
- $arg(z^n) = nargz + 2k\pi$
- $z = z' \Leftrightarrow argz \equiv argz'[2\pi]$

Définition 5 : Si $|z| = r$ et $argz = \theta + 2k\pi$, $r(cos\theta + isin\theta)$ est la forme trigonométrique de z.

Définition 6 : on appelle forme exponentielle de z, l'écriture : $re^{i\theta}$

Propriété 5 : Pour tout réel θ et pour tout relatif n, on a : $(cos\theta + isin\theta)^n = cosn\theta + isinn\theta$ (formule de Moivre)

Propriété 6 : Pour tout nombre réel θ, on a : $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (formules d'Euler)

III) Equations dans $\mathbb{C}$

Propriété 7 : Soit l'équation complexe : $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double : $z = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation admet deux solutions : $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta \in \mathbb{R}_-^*$, l'équation admet deux solutions : : $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta \in \mathbb{C}^*$, Δ admet deux racines carrées δ et $-\delta$ et l'équation admet deux solutions complexes : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

IV) Nombres complexes et géométrie

Tableau récapitulatif des nombres complexes et configurations

configurations	Caractérisation complexe	Caractérisation géométrique
ABC triangle rectangle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib$ $(b \in \mathbb{R}^*)$	$mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \mp\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
ABC triangle équilatéral	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\mp i\frac{\pi}{3}}$	$AB = AC = BC$
ABC triangle isocèle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\mp i\alpha}$ $(0 < \alpha < \pi)$	$AB = AC$ et $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$
ABC triangle rectangle et isocèle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \mp i$	$AB = AC$ et $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \mp\frac{\pi}{2}$
A, B et C sont alignés	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$	$mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi]$
A, B, C et D sont cocycliques	$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \div \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}^*$	$Mes(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv Mes(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi]$
ABCD est parallélogramme	$z_B - z_A = z_C - z_D$	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Tableau récapitulatif des nombres complexes et transformations

transformations	Ecriture complexe	Caractérisation géométrique
Translation de vecteur $\vec{u}(b)$	$z' = z + b$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
Symétrie par rapport à l'axe réel	$z' = \bar{z}$	$\begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM'}) = -(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$
Symétrie par rapport à l'axe imaginaire	$z' = -\bar{z}$	$\begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM'}) = \pi - (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$
Symétrie de centre $\Omega(\omega)$	$z' - \omega = -(z - \omega)$	$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$, d'angle α	$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha + 2k\pi \end{cases}$
Similitude de centre $\Omega(\omega)$, d'angle α, de rapport k	$z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$	$\begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha + 2k\pi \end{cases}$

B) EXERCICES

Exercice 1

Soit $Z = \frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+3i)^4}$. On pose $z_1 = (1+i)^5$ et $z_2 = (\sqrt{3}+3i)^4$.

1) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique. En déduire leur forme algébrique.
2) Donner la forme algébrique, puis la forme trigonométrique de Z.
3) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2

On considère les nombres complexes : $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $Z = \frac{(z_1)^5}{(z_2)^4}$.

1) Calculer le module et un argument de z_1, z_2 et Z.
2) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
3) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3

Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. A tout point M de P de coordonnées (x,y) on associe son affixe $z = x + iy$.

1) Montrer que l'ensemble D des points M de P dont l'affixe z vérifie : $|z-1-2i| = |z-7+2i|$ est une droite dont on donnera une équation.
2) Retrouver sans calcul que l'ensemble D est une droite en utilisant le point A d'affixe $z_A = 1 + 2i$ et le point B d'affixe $z_B = 7 - 2i$.

Exercice 4

Soit φ : $\mathbb{C} - \{-1,1\} \to \mathbb{C}$ l'application définie par : $\varphi(z) = \frac{2z}{z^2-1}$.

1) Démontrer que pour tout nombre réel θ de l'intervalle $]0;\ \pi[$, le nombre complexe $\varphi(e^{i\theta})$ est imaginaire pur ; déterminer son module et son argument.
2) On note $\overline{z}$ le nombre complexe conjugué de z.

a) Montrer que : $\varphi(z) = \frac{2z(\overline{z}^2-1)}{|z^2-1|^2}$.

b) On pose $z = x + iy$ et $2z\left(\overline{z}^2 - 1\right) = X + iY$ avec x, y, X et Y nombres réels. Calculer X et Y en fonction de x et y.

c) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$; Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $\varphi(z)$ soit un nombre imaginaire pur.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\varphi(z) = \frac{i}{2}$

Exercice 5

1) Ecrire sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe : $a = 16(1-i)$
2) Pour λ nombre réel quelconque, on pose : $z_\lambda = 1 + i + 2\sqrt{2}e^{i\lambda} = x_\lambda + iy_\lambda$.

a) Calculer les réels x_λ et y_λ en fonction de λ.

b) Déterminer l'ensemble (C) des points M_λ de coordonnées $(x_\lambda;\ y_\lambda)$ quand λ décrit $[0; 2\pi]$.

3) Montrer que les solutions de l'équation $[z-(1+i)]^3 = a$ sont les affixes des points de (C).

Exercice 6

Soit $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$; $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$ trois nombres complexes. On pose : $Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1) Ecrire z_1 ; z_2 et z_3 sous forme trigonométrique puis exponentielle.
2) En déduire une forme exponentielle de Z.
3) Calculer alors la forme algébrique de Z.

Exercice 7

On considère le nombre complexe $z = -1 + iy$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Calculer les valeurs du réel y pour que $|z| = 2$.
2) Pou chacune des valeurs de y trouvées :
- Ecrire z sous forme trigonométrique.
- Ecrire z^4 sous forme trigonométrique.
3) On pose $Z = -8 + 8i\sqrt{3}$.
a) Ecrire Z sous forme trigonométrique.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

Exercice 8

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$; les solutions seront données sous forme trigonométrique.
2) Démontrer que la somme des solutions est nulle.
3) En déduire que : $cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.
4) Exprimer $cos\frac{4\pi}{5}$ en fonction de $cos\frac{2\pi}{5}$ puis calculer $cos\frac{2\pi}{5}$ et $cos\frac{4\pi}{5}$.

Exercice 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique $2\ cm$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. Les solutions seront données sous forme trigonométrique et sous forme algébrique. En remarquant que $2^3 = 8$, déduire les solutions de l'équation $z^3 = 8$.
2) On donne les points A, B et C d'affixes respectives $-1 + i\sqrt{3};\ 2\ et - 1 - i\sqrt{3}$.
a) Placer A, B et C.
b) Calculer le module et un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.
c) En déduire la nature du triangle ABC.
3) On considère f, la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.
a) Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de f.
b) Déterminer les affixes des points A' et C' images respectives des points A et C par f.
c) En déduire l'image de la droite (AC) par f. En donner une équation.

Exercice 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$ et tout point $M(x, y)$ est repéré par son affixe $z = x + iy$. On désigne les points A, B , C et D d'affixes respectives $-1, 1, \frac{1}{2}\ et\ 2$. A tout point m du plan d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M d'affixe Z tel que : $Z = \frac{2z-1}{2-z}$.

a) Déterminer l'ensemble E des points m d'affixe z tels que $|Z| = 1$.
b) Déterminer l'ensemble F des points m d'affixe z tels que $arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
c) Tracer les ensembles $E\ et\ F$. On prendra $2\ cm$ pour unité graphique.
d) Exprimer en fonction de z le nombre complexe $U = \frac{Z-1}{Z+1}$. En déduire que les points A, B, m et M sont cocycliques ou alignés.

Exercice 11

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application F qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = u^2z + u - 1$ où u désigne un nombre complexe.

a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une homothétie de rapport -2 ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

d) Caractériser F lorsque $u = 1 - i$.

Exercice 12

Soit un plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$. Pour tout point $M(x\ ;\ y)$, on désigne par $z = x + iy$ son affixe.

On désigne par A *et* B les points d'affixes respectives i *et* $-2i$. Soit f l'application du plan privé de A dans P d'affixe $z \neq i$, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$.

A) Soit z un nombre complexe différent de i.

a) On désigne rèspectivement par r et θ le module et argument de $z - i$. Interpréter géométriquement r et θ à l'aide des points A *et* M.

b) Montrer que $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

c) On désigne respectivement par r' et θ' le module et un argument de $z' + 2i$. Exprimer r' et θ' en fonction de r et θ. Interpréter r' et θ' à l'aide des points B et M'.

B) Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

a) Montrer que si M appartient à (C), son image M' appartient à un cercle (C') de centre B dont on donnera le rayon.

b) Le cercle (C') est il l'image par f du cercle (C) ?

C) Soit T le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) i$.

a) Calculer l'affixe de $\overrightarrow{AT}$; en déduire que T appartient au cercle (C).

b) Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AT}})$. Tracer le cercle (C) et placer le point T.

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité : $2\ cm$

1) Soit le nombre complexe $z_1 = \frac{3+i}{2-i}$.

a) Ecrire z_1 sous forme algébrique, trigonométrique et exponentielle.

b) Monter que z_1 est solution de l'équation (E) : $z^3 - (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z - 10(1 + i) = 0$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) On considère les points A, B *et* K du plan d'affixes respectives $1 + i, 3 + i$ *et* $3 - i$.

a) Placer les points A, B *et* K et montrer que le triangle ABK est rectangle isocèle.

b) Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABK. Déterminer l'affixe du centre G et du rayon de Γ.

3) Soit Δ l'ensemble des points d'affixe z vérifiant la relation $|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$.

a) Justifier que le point F d'affixe $4 + 2i$ appartient à Δ.

b) Caractériser géométriquement l'ensemble Δ.

c) Démontrer que Δ a pour équation $-x + y + 2 = 0$ et déterminer l'affixe du point E de Δ situé sur l'axe des ordonnées.

Exercice 14

a est un nombre quelconque. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^3 - (ia + 2\sqrt{3})z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)z - 4ia = 0.$$

1) Déterminer le nombre a pour que $-2i$ soit solution de (E).

2) Déterminer le polynôme P de degré 2, tel que : $z^3 + (2i - 2\sqrt{3})z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = P(z)(z - \sqrt{3} - i)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) pour $a = -2$.

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points M, N et Q d'affixes respectives : $\sqrt{3} + i, -2i$ et $\sqrt{3} - i$.

a) Représenter les points M, N et Q.

b) T désigne le symétrique de M par rapport à (OJ). Démontrer que le triangle TMQ est rectangle en M.

c) Démontrer que les points M, Q, N et T sont cocycliques.

Exercice 15

On considère l'équation $(E) : z^3 - (1 - i)z^2 + 2(1 + i)z + 8i = 0$.

1) Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure. Les solutions seront notées z_0, z_1 et z_2 où z_0 est la solution imaginaire pure et $|z_1| < |z_2|$.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

a) Calculer le module et l'argument principal du nombre complexe $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$.

b) Déduire que le point C est l'image du point B par la similitude directe S de centre A dont on précisera le rapport et l'angle.

3) Soit T la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)z + \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i$$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.

b) Déterminer l'image D de C par T.

Exercice 16

A) On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$.

1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution unique imaginaire pure z_0.

2) Déterminer les nombres réels a et b tels que : $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

B) On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives : $z_A = 1 + i, z_B = 1 - i, z_J = i\sqrt{2}$ et $z_K = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

1) Placer les points A, B, J et K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure dans la suite de l'exercice.

2) Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Déterminer l'affixe du point L.

3) Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soit D le point d'affixe $z_D = -1 + i$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D.

a) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r.

b) Soit C l'image du point L par la rotation r. Déterminer l'affixe du point C.

5) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

Exercice 17

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$. On note Ω le point d'affixe 1.

1) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.

2) Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

a) Exprimer a sous forme exponentielle.

b) En déduire les affixes de deux antécédents de A par f.

3) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.

4) Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en Ω.

a) A l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si

$z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$.

b) Montrer que $z^2 - iz - 1 + i = (z-1)(z+1-i)$.

c) En déduire l'ensemble Γ_3.

5) Soit M un point d'affixe z différente de 0 et 1.

a) Exprimer $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ en fonction d'argument de z.

b) En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés.

__Exercice 18__

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Posons $z = x + iy$, x et y réels.

a) Sous quelle forme est écrit z ? Quelle est sa partie réelle ? Quelle est sa partie imaginaire ?

b) Quel est le module de z ?

c) Soit α un argument de z pour $z \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le cosinus et sinus de α en fonction de z.

d) Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ. Exprimer z' en fonction de z et θ.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z qui suit : $\frac{1}{2}z^2 + 4\sqrt{3}z + 32 = 0$

a) Résoudre l'équation (E).

b) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$. Calculer OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

c) On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D.

d) On suppose G le barycentre des points pondérés $(O, 1)$; $(D, -1)$ et $(B, -1)$.

- Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$.
- Placer les points A, B, C et G sur une figure.

e) Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$. En déduire la nature du triangle GAC.

__Exercice 19__

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$ et $z_B = 1 + \sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})$.

1) Ecrire le nombre $Z = \frac{z_B}{z_A}$ complexe sous forme algébrique.

2) Déterminer OA et AB. Vérifier que $OB = 2(1 + \sqrt{3})$.

3) Déterminer en radians, la mesure principale de $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$. En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

4) En utilisant les questions précédentes, donner les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

5) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre O et d'angle α où $\alpha = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

__Exercice 20__

1) Dans $\mathbb{C}$ on considère l'équation : $z^3 + (-4 - 6i)z^2 + (-4 + 20i)z + 16 - 16i = 0$.

a) Démontrer que cette équation admet une solution réelle z_0 que l'on précisera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation.

c) Démontrer que les trois solutions trouvées sont éléments d'une suite géométrique de premier terme z_0 dont on donnera la raison.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i|=4$.

b) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme $A(i)$ en O et le point $B(\sqrt{3})$ en $B'(4i)$. Préciser ses éléments caractéristiques.

c) Donner l'expression analytique de S.

Exercice 21

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par : $f(z)=(-1+i)z+1+i$.

1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation plane S associée à f.
2) Donner l'expression analytique de S.
3) Soit (D) la droite d'équation $y=2x-1$ et (D') l'image de (D) par S. Déterminer une équation de la droite (D').
4) Soit (C) le cercle de centre $I(1,2)$ et de rayon 2 et (C') l'image de (C)par f. Donner une équation du cercle (C').

Exercice 22

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit la transformation S du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z'=(1+i\sqrt{3})z-\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

1) Démontrer que S admet un unique point invariant J dont on précisera l'affixe.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.
3) Soit A le point d'affixe -1.

a) Tracer le cercle (C) de diamètre $[JA]$.

b) Caractériser et tracer le cercle (C') image de (C) par S.

4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\left|(1+i\sqrt{3})z+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$.

Exercice 23

F est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z'=2z+3-4i$$

1) A est le point d'affixe $-2+i$.

a) Déterminer l'affixe du point $A'=F(A)$.

b) Placer A et A' dans le repère muni du repère (O,e_1,e_2).

2) – Montrer que l'application F admet un unique point invariant Ω dont on déterminera l'affixe ω.

- Démontrer que, pour tout point $M(z)$ dont l'image par F est $M'(z')$, on a : $z'-\omega=2(z-\omega)$ (1)
- Traduire vectoriellement la relation (1).
- Reconnaitre l'application F.

3) – Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z vérifiant : $|z+2-i|=1$.

- Quelle est l'image Γ' de Γ par F ?
- Tracer sur la figure précédente les ensembles Γ et Γ'.

Exercice 24

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^2-12z+153=0$.
2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et P diaffixes respectives $z_A=\frac{3}{2}+6i$, $z_B=\frac{3}{2}-6i$, $z_C=-3-\frac{1}{4}i$ et $z_P=3+2i$ et $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $z_{\vec{w}}=-1+\frac{5}{2}i$.

a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image de B par la translation de vecteur $\vec{w}$.

b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image de P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image de P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

d) Placer les points P, Q, R et S dans le plan précédent.

e) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

f) Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$. En déduire la nature du triangle PQR.

g) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle dont on précisera l'affixe du centre et la valeur de son rayon.

Exercice 25

1) On considère les nombres complexes : $a = -\sqrt{3} + i; b = 3 + 2i$ et $c = 7 - 2i$.

a) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

b) Déterminer les entiers n pour lesquels a^n est un nombre réel.

c) Déterminer les entiers n pour lesquels a^n est un imaginaire pur.

2) Déterminer et construire les ensembles des points M d'affixe z tels que : a) $|z - b| = |z - c|$; b) $2|z - b| = |a|$.

3) Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$$

a) Démontrer que f admet un seul point invariant Ω.

b) Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre ; préciser l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie.

c) Déterminer et construire les images par f des ensembles déterminés à la question 2).

Exercice 26

Soit α, β et λ des nombres réels. On considère dans le plan complexe la transformation f_λ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (\alpha + i\beta)z + 1 - i\lambda$.

1) Déterminer α et β pour que f_λ soit une similitude directe du plan de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

2) On donne à α et β les valeurs trouvées précédemment.

a) Déterminer l'affixe du centre Ω de la similitude f_λ en fonction de λ.

b) Quel est l'ensemble décrit par le point Ω lorsque λ varie.

3) Soit A et B les points du plan d'affixes respectives 2 et $-i$.

a) Déterminer λ de façon que B soit l'image de A par f_λ.

b) Pour la valeur de λ, donner l'expression analytique de f_λ.

c) Déterminer les éléments caractéristiques puis l'écriture complexe de f_λ^{-1}.

Exercice 27

Soit P le plan complexe. On désigne par A le point d'affixe $3 - i$. On note f l'application de P dans P qui à, tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{2iz - 4 + 2i}{z - 3 + i}$

1) Interpréter géométriquement le module et un argument de z'(on posera $z_B = -1 - 2i$ et $z_A = 3 - i$).

2) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $|z'| = 1$

b) $|z'| = 2$

c) z' est réel

d) z' est imaginaire pur.

Exercice 28

On considère le plan affine euclidien P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit S_1 l'application de P dans P qui, à tout point $M(x, y)$, associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Montrer que z' est lié à z par la relation $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes que l'on précisera. En déduire la nature de S_1 et donner ses éléments caractéristiques.

2) On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et B le point d'affixe $z_B = -1$. Démontrer qu'il existe une unique similitude plane directe S_2 qui transforme A en O et B en B. Donner la nature et les éléments caractéristiques de S_2.
3) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S_1 \circ S_2$.

Exercice 29

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On considère le point A d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$, le point A_1 d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ où $\overline{z_A}$ désigne le conjugué de z_A. On note B l'image du point A_1 par la rotation r et z_B l'affixe du point B.

1) Ecrire le nombre complexe z_A sous forme exponentielle, puis placer les points A et A_1 dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.
2) Vérifier $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sous forme exponentielle, puis écrire le nombre z_B sous forme algébrique. Placer B dans le repère
3) On considère le vecteur unitaire $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{12}$ et la droite Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$.

a) Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.
b) Tracer la droite Δ, puis démontrer que Δ est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à Δ.

4) On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$ et B' l'image de B_1 par la rotation r. Démontrer que $B' = A$.

Exercice 30

On considère le polynôme complexe définie par : $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$.

1) Comparer $P(\overline{z})$ et $\overline{P(z)}$. Calculer $P(i)$. En déduire une, puis deux solutions de l'équation $(E) : P(z) = 0$.
2) Mettre $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). Calculer la somme et le produit des solutions de l'équation (E).

II) CALCULS DES PROBABILITÉS

A) RÉSUMÉ DU COURS

I) Dénombrement et vocabulaire des événements

Outils de dénombrement

modélisation	Outil de dénombrement	Nombre des tirages
Tirages simultanés de p éléments d'un ensemble à n éléments	Combinaison de p éléments	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$
Tirages successifs avec remise de p éléments d'un ensemble à n éléments	p - uplet	n^p
Tirages successifs sans remise de p éléments d'un ensemble fini à n éléments	Arrangement de p éléments	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Tableau récapitulatif des événements

Langage probabiliste	Langage ensembliste	Notation
Univers	Ensemble des possibles	Ω
Eventualité	Elément de Ω	$\omega \in \Omega$
Evénement	Partie de Ω	$A \subset \Omega$
Evénement certain	Partie pleine	Ω
Evénement impossible	Partie vide	$\emptyset$
Evénement « A et B »	Intersection de A et B	$A \cap B$
Evénement « A ou B »	Réunion de A et B	$A \cup B$
Evénement élémentaire	Singleton	$\{\omega\}$
Evénement contraire de A	Complémentaire de A	$\overline{A}$
Evénements A et B incompatibles	A et B sont disjoints	$A \cap B = \emptyset$

II) Probabilité d'un événement

Définition 1 : On appelle probabilité d'un événement A le réel $P(A)$ vérifiant les conditions suivantes :

- $P(A)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires de A ;
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ;
- La probabilité de l'événement certain est 1.

Propriété 1 : Pour toute probabilité P, pour tous événements A et B, on a :

- Si $A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Propriété 2 : Deux événements A et B sont dits indépendants si, et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Propriété 3 : Dans un cadre d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est : $P(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$

III) Probabilité conditionnelle

Définition 2 : On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé, le réel noté $P_B(A)$ ou $P(A/B)$, tel que : $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

IV) Variables aléatoires réelles

Définition 3 : on appelle variable aléatoire réelle X l'application de l'univers Ω vers $\mathbb{R}$. On note : $X(\Omega) = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n\}$

Définition 4 : On appelle loi de probabilité de X l'ensemble des probabilités des événements constituant cette variable X.

Une loi de probabilité est bien représentée par un tableau, comme ci-dessous :

x_i	x_1	x_2	…….	x_n
P_i	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	…….	$P(X = x_n)$

Remarque : $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$

Définition 5 : X est une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1;\ x_2; \ldots;\ x_n$

- On appelle espérance mathématique de X le réel, noté $E(X)$ tel que : $E(X) = \sum x_i P_i = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n$
- On appelle variance de X le réel, noté $V(X)$ tel que : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- On appelle écart type de X le réel, noté $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$

Définition 6 : On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction croissante en escalier de $\mathbb{R}$ vers $[0; 1]$ définie par : $F(x) = P(X \leq x)$

V) Epreuve et schéma de Bernoulli

Définition 7 :

- On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités : le Succès de probabilité p et l'Echec de probabilité q.$(p + q = 1)$
- On appelle schéma de Bernoulli toute répétition de n épreuves de Bernoulli de façon identique et indépendante

Propriété 4 : On répète n épreuves de Bernoulli de façon identique et indépendante

- La probabilité d'obtenir k succès lors de ces répétitions est : $P_k = C_n^k p^k q^{n-k}$
- L'espérance mathématique et la variance sont : $E(X) = np$ et $V(X) = npq$

B) EXERCICES

Exercice 1

Une urne U_1 contient 3 boules noires et 2 boules blanches. Une urne U_2 contient 2 boules noires et 2 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de U_1 et une boule de U_2.

1) Calculer le nombre des tirages possibles.
2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « toutes les boules sont de même couleur »
B : « le tirage comporte exactement une boule blanche »
C : « le tirage comporte exactement deux boules blanches »

Exercice 2

Une urne contient sept boules blanches et cinq boules noires.

1) On tire successivement et au hasard trois boules de l'urne, sans remettre la boule tirée. Calculer les probabilités :
   a) De tirer trois boules de même couleur
   b) De ne tirer que trois boules blanches
   c) De tirer au plus deux boules blanches
   d) De tirer exactement une boule blanche
   e) De tirer au moins une boule noire.
2) On tire successivement avec remise trois boules de l'urne, reprendre les questions a), b) et c).

Exercice 3

Dans une région du Tchad, 88% de la population pratique l'agriculture, 20% pratique l'élevage et 15% pratique l'agriculture et l'élevage.

Quelle est la probabilité de choisir au hasard une personne de cette région qui :

a) Pratique l'agriculture mais pas l'élevage.
b) Pratique l'élevage mais pas l'agriculture.
c) Pratique ni l'élevage, ni l'agriculture.

Exercice 4

On dispose d'un dé cubique dont deux faces sont bleues et les autres sont rouges.

1) On lance 5 fois de suite le dé. Ces lancers sont indépendants.
   a) Calculer la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une fois rouge dans cet ordre.
   b) Quel est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue ?
2) On lance n fois le dé, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre minimal des lancers pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une face bleue soit supérieure ou égal à $\frac{6}{7}$.

Exercice 5

Une urne contient 4 boules rouges, trois boules vertes et n boules jaunes, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On tire simultanément deux boules de l'urne et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1) Calculer en fonction de n la probabilité des événements suivants :

A : « obtenir deux boules de même couleur »
B : « obtenir deux boules de couleurs différentes ».

2) On suppose que la probabilité d'obtenir deux boules jaunes est de $\frac{3}{13}$. Déterminer n, puis $P(A)$ et $P(B)$.
3) On suppose que $n = 7$. On répète cinq fois l'expérience en remettant dans l'urne, après chaque tirage, les deux boules tirées. Soit X le nombre de fois où l'événement A est réalisé au cours de ces 5 répétitions. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 6

I) On considère Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux événements. Dans le cas d'équiprobabilité, rappeler les probabilités des événements suivants : A, A sachant B, $A \cap B$ et $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.

II) Une société nationale d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages. Ainsi, à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme décrit comme suit :

- Le premier jour, la ville est délestée
- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$.
- Si la ville n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$

On désigne par D_n l'événement : « la ville est délestée le $n^{ième}$ jour » et P_n la probabilité de D_n.

1) Montrer les égalités suivantes :

$P(D_1) = 1;\ P(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}\ \ et\ \ P(D_{n+1}/\overline{D}_n) = \frac{5}{6}$.

2) Exprimer P_{n+1} en fonction de $P(D_{n+1} \cap D_n)$ et $P(D_{n+1} \cap \overline{D}_n)$
3) En déduire que, pour tout n non nul, on a : $P_{n+1} = -\frac{11}{18}P_n + \frac{5}{6}$.
4) On pose $u_n = 6p_n - \frac{90}{29}$, pour tout n non nul.
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer u_n puis P_n en fonction de n.
   c) Un match de football doit se jouer le $20^{ème}$ jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage ?

Exercice 7

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté un téléviseur est de 0,2.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et magnétoscope ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
3) Le client a acheté un magnétoscope, quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?

Exercice 8

Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent un côté « Pile » et un côté « Face ». La troisième est truquée et possède deux côtés « Face ».
On prend au hasard une pièce de l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce. On considère les événements suivants :
B : « la pièce prise est normale », $\overline{B}$: « la pièce prise est truquée », P : « on obtient Pile au premier lancer » et F_n : « on obtient Face pour les n premiers lancers ».

1) Quelle est la probabilité de l'événement B ?
2) Quelle est la probabilité de l'événement P sachant que B est réalisé ?
3) Calculer la probabilité de l'événement $P \cap B$, puis de l'événement $P \cap \overline{B}$.En déduire la probabilité de l'événement P.
4) Calculer la probabilité de l'événement $F_n \cap B$, puis de l'événement $F_n \cap \overline{B}$. En déduire la probabilité de l'événement F_n.

Exercice 9

Un sondage est effectué dans un conservatoire de musique.

60% des élèves pratiquent un instrument à cordes (C), 45% des élèves pratiquent un instrument à vent (V) et 10% un instrument à cordes et vent.

1) On choisit un élève au hasard dans le conservatoire.
a) Quelle est la probabilité de l'événement « cet élève pratique au moins un des instruments considérés »
b) Quelle est la probabilité de l'événement « cet élève pratique un et un seul des instruments considérés »
2) On choisit au hasard un élève pratiquant un instrument C. Quelle est la probabilité pour que cet élève pratique un instrument V ?
3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n élèves. On suppose que le nombre d'élèves du conservatoire est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontrer un instrumentiste de type donné soit constante au cours du sondage.
a) Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un des élèves choisis pratique un instrument C ?
b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,999$.

Exercice 10

Dans une académie, les élèves candidats au baccalauréat série ES se repartissent en 2016 selon les trois enseignements de spécialité : mathématiques, sciences économiques et sociales et langue vivante. Nous savons de plus que : 37% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.

25% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité langue vivante.

21% des candidats ont choisi ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques et ont obtenu le bac.

32,5% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité SES et ont obtenu le bac. De plus, parmi les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité langue vivante, 72,5% ont obtenu le bac. On interroge un candidat pris au hasard. On note :

M L'événement : « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques »

S L'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales »

L L'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité langue vivante »

R L'événement « le candidat a obtenu le bac »

On pourra faire un arbre pour faciliter les réponses aux questions. Les résultats seront arrondis au millième.

1) Traduire en termes de probabilités les informations numériques données ci-dessus.
2) a) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de SES
b) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait réussi aux épreuves du bac.
3) Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait échoué au bac ?
4) Ce candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématique. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le bac ?
5) Montrer que le pourcentage de réussite au bac pour les candidats de ES dans cette académie est 71,6%
6) On interroge successivement au hasard et de façon indépendante trois candidats.
a) Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit reçu ?
b) Quelle est la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient reçus ?

Exercice 11

Une urne A contient 5 boules numérotées de 1 à 5 et une urne B contient 6 boules sur lesquelles sont inscrits les numéros 1, 1, 1, 1, 2 et 2.

1) On tire une boule de chaque urne et on désigne par X la somme des nombres inscrits sur ces deux boules (on suppose qu'il y a équiprobabilité des tirages des boules dans chaque urne).
a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

2) On effectue quatre fois le tirage précédent, les boules étant remises dans leurs urnes respectives après chaque tirage.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une somme paire au cours de ces quatre tirages ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une somme paire au cours de ces quatre tirages ?

Exercice 12

Dans une loterie, on distribue deux séries des billets A et B. La série A comporte 12 billets dont 4 sont gagnants et la série B comporte 15 billets dont 5 sont gagnants. Une personne achète 3 billets dont 2 de la série A et 1 de la série B. On suppose que tous les choix sont équiprobables.

1) Quelle est la probabilité qu'un seul billet soit gagnant ?
2) Quelle est la probabilité pour que 2 billets au moins soient gagnants ?
3) Tout billet gagnant de la série A rapporte 2500 frs et tout billet gagnant de la série B rapporte 5000 frs. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à achat des 3 billets le gain réalisé.

a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 13

Une loterie émet chaque semaine 20 billets dont 6 gagnants. Une partie consiste à acheter deux billets (choix simultané et au hasard de 2 billets).

1) Ali achète une semaine 2 billets. Calculer la probabilité qu'il perde.
2) On suppose qu'Ali achète chaque semaine 2 billets. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement une fois dans un mois de 4 semaines ?
3) Parmi les 6 billets, il y a : 1 billet qui gagne 1000 frs, 2 billets 500 frs et 3 billets 200 frs. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque partie associe le gain mathématique en frs.

a) Déterminer les valeurs possibles de X.

b) Déterminer la fonction de répartition de X.

c) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 14

La loi de probabilité de variable aléatoire X d'une expérience aléatoire est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	α	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

1) Déterminer la valeur de α.
2) Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.
3) Définir et représenter la fonction de répartition de X.

Exercice 15

Un lot de bulbes de tulipes a un pouvoir germinatif de 80% (chaque bulbe produit une fleur avec une probabilité de $\frac{8}{10}$ et ceci indépendamment des autres bulbes).

Chaque bulbe contient l'un de trois gènes r (rouge), b (blanc), j (jaune), qui détermine la couleur de la fleur future éventuelle. On suppose en outre que la probabilité pour qu'un bulbe donné possède le gène r, b, j est respectivement $\frac{5}{10}, \frac{1}{10}, \frac{4}{10}$ et ceci indépendamment des autres bulbes. On suppose enfin que le pouvoir germinatif est indépendant de la nature des gènes.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir cinq fleurs en plantant cinq bulbes ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur rouge ?

On plante cinq bulbes, et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fleurs rouges obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X, et calculer son espérance mathématique.

c) Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur blanche ?

Soit n un entier, $n \geq 1$. On désigne par p_n la probabilité de n'obtenir aucune tulipe blanche après avoir planté n bulbes. Calculer p_n.

Combien des bulbes faut-il planter au minimum pour obtenir au moins une tulipe blanche avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{19}{20}$?

Exercice 16

Des sondages permettent de constater que 10% de la population est constituée de gauchers. On considèrera donc, dans cet exercice, que la probabilité pour qu'un individu pris au hasard soit gaucher est égale à 0,1 et celle pour qu'il soit droitier 0,9.

a) Calculer la probabilité pour qu'un groupe de 8 personnes contienne un seul gaucher, au moins un gaucher, exactement 3 gauchers.

b) Un atelier de couture est équipé de 7 paires de ciseaux pour droitiers et de 3 pour gauchers. Quelle est la probabilité pour que les 8 membres du personnel trouvent chacun une paire de ciseaux lui convenant

NB : On donnera une valeur décimale approchée à 0 ,001 près des probabilités demandées.

Exercice 17

Dans chacune des situations décrites ci-dessous, énoncer l'événement contraire de l'événement donné.

1) Dans une classe on choisit deux élèves au hasard. A : « les deux élèves sont des filles ».
2) Dans un groupe des tchadiens et des camerounais, on discute avec une personne. B : « la personne est un homme camerounais ».
3) Au restaurant, Luc prend au hasard un plat et un dessert. C : « Luc prend une viande et une glace ».
4) A une loterie, Elise achète 3 billets. D : « l'un des billets au moins est gagnant », E : « deux billets au maximum sont gagnants ».

Exercice 18

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :

A : « tirer une boule blanche »

B : « tirer une boule ni blanche, ni rouge »

C : « tirer une boule noire ou une boule rouge »

1) A et B sont-ils incompatibles ?
2) B et C sont-ils incompatibles ?
3) Traduire par une phrase simple les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 19

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note :

A l'événement « la carte choisie est un pique »

B l'événement « la carte choisie est rouge (cœur ou carreau) »

C l'événement « la carte choisie est une figure (valet, dame, roi) »

1) Préciser un modèle mathématique décrivant l'expérience aléatoire.
2) Déterminer les probabilités des événements $A, B, C, A \cap B, B \cap C, A \cup B, A \cup C$.
3) Déterminer la probabilité de l'événement D : « la carte choisie n'est ni un pique, ni une figure »

Exercice 20

On jette une pièce de monnaie trois fois de suite.

1) Donner la liste de tous les résultats possibles en notant P pour Pile et F pour Face.
2) Donner la probabilité des événements suivants :

A : « le tirage ne comporte que des Piles »

B : « le tirage comporte au moins une fois Face ».

Exercice 21

Une caisse contient 10 cubes bleus, 22 cubes jaunes et 4 cubes rouges, tous de la même taille.

1) Quelle est la probabilité de pouvoir faire le drapeau du Tchad :

a) En prenant simultanément 3 cubes ?

b) En prenant simultanément 4 cubes ?

2) Quelle est la probabilité, en prenant successivement 3 cubes l'un près l'autre sans remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau tchadien ?

3) Quelle est la probabilité, en prenant successivement 3 cubes l'un après l'autre avec remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau tchadien ?

Exercice 22

On lance un dé à 6 faces. On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle.

a) Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.

b) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice 23

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 de façon à former un nombre de deux chiffres : le résultat du premier lancer donne le chiffre des dizaines, celui du 2^{nd} lancer celui des unités.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « le nombre obtenu est pair »

B : « les deux chiffres du nombre obtenu sont identiques »

C : « le nombre est supérieur ou égal à 55 »

D : « le nombre obtenu contient au moins un 6 ».

Exercice 24

On dispose de deux urnes u_1 et u_2. L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro d inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1. Sinon, on tire une boule dans l'urne u_2. On suppose que les boules sont indiscernables au toucher.

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

2) On a tiré une boule blanche, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1.

Exercice 25

Une population est composée de 45% d'hommes et de 55% des femmes. On suppose que 5% des hommes et 0,7% des femmes sont atteints du Sida.
On prend une personne au hasard.

1) Quelle est la probabilité pour qu'elle soit atteinte du Sida ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'elle soit un homme sachant qu'elle est atteinte du Sida ?

3) Quelle est la probabilité pour qu'elle soit une femme sachant qu'elle est atteinte du Sida ?

Exercice 26

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

1) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$

2) Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ?

3) Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 27

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule. Si elle rouge, il gagne 10 f ; si elle est jaune, il perd 5 f ; si elle est verte, il tire une deuxième de l'urne sans avoir replacé la boule tirée. Si cette deuxième boule est boule est rouge, il gagne 8 f, sinon il perd 4 f.

1) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.
2) Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).
   a) Etablir la loi de probabilité de la variable X.
   b) Calculer l'espérance de X.
3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

Exercice 28

Une famille comprend 4 enfants. La probabilité pour qu'un enfant soit un garçon est de $\frac{1}{4}$. Le nombre de garçons est ainsi une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4.

1) Déterminer la loi probabilité de X
2) Déterminer l'espérance mathématique de X.
3) Déterminer la variance et l'écart type de X.
4) Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 29

On considère la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	3	5	7	9	11
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\alpha - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$

1) Calculer la valeur de α.
2) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.
3) Définir et représenter la fonction de répartition de X.

Exercice 30

On dispose d'un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Lorsque l'on lance ce dé, on suppose que la probabilité d'apparition d'une face dont le numéro est pair est le double de celle d'apparition d'une face portant un numéro impair.

1) Calculer la probabilité d'obtenir chaque face.
2) Une personne qui lance ce dé obtient les résultats suivants :
   - Si la face est 1 ou la face est 6, elle gagne 1000 f ;
   - Si la face est 3, elle ne gagne rien ;
   - Si une autre face sort, elle perd 500 f.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque lancer fait correspondre le gain du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.
c) Donner et représenter la fonction de répartition de X.

Exercice 31

On utilise deux pièces de monnaie : l'une pipée de sorte que lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir pile soit $\frac{1}{4}$; l'autre normale dont la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{2}$ à chaque lancer.

1) On prend une pièce au hasard (chacune de deux pièces a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être prise).
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?
   b) On a obtenu pile : quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce pipée ?
   c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile en faisant trois lancers avec la pièce choisie ?

2) Trois fois on choisit l'une des pièces au hasard qu'on lance (chacune de deux pièces a donc à chaque fois une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être lancée) : déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile.
3) On lance les deux pièces ensembles : quelle est la probabilité d'obtenir le même résultat pour les deux pièces ?

Exercice 32

On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à 10 questions. Ils devront choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte. Un candidat se présente et répond à toutes les questions au hasard. On note X la variable aléatoire désignant le nombre des réponses exactes données par ces candidats à l'issue du questionnaire.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
2) Calculer la probabilité pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné ?

Exercice 33

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités :
a) De ne tirer que trois jetons verts ;
b) De ne tirer aucun jeton vert ;
c) De tirer au plus deux jetons verts ;
d) De tirer exactement un jeton vert.
2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Exercice 34

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 frs et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 frs. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes

1) Le joueur tire deux boules successivement et sans remise de la boule tirée
a) Démontrer que : $P(X=-1)=\frac{20n}{(n+10)(n+9)}$
b) Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondante aux deux autres valeurs prises par la variable X
c) Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est : $E(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$
d) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.
2) Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieur à 0,999.

III) ALGÈBRE LINÉAIRE

A) RÉSUMÉ DU COURS

I) Loi de composition interne

Pré requis : Soit E un ensemble fini non vide, $*$ et $\perp$ deux lois

- $*$ est une loi de composition interne dans E, si et seulement si : $\forall\, x \in E, y \in E, x * y \in E$ (on dit également que E est stable pour la loi $*$)
- La loi $*$ est associative dans E, si et seulement si : $\forall\, x \in E, y \in E, \forall\, z \in E, x * (y * z) = (x * y) * z$
- La loi $*$ est commutative dans E, si seulement si : $\forall\, x \in E, y \in E, x * y = y * x$
- e est un élément neutre pour la loi $*$ dans E, si seulement si : $\forall\, x \in E, x * e = e * x = x$
- x' est le symétrique de x dans E, si et seulement si : $\forall\, x \in E, x * x' = x' * x = e$
- La loi $\perp$ est distributive par rapport à $*$, si seulement si : $\forall\, x \in E, y \in E, \forall\, z \in E, x \perp (y * z) = (y * z) \perp x$

II) Structure de groupe

Définition 1 : E est un ensemble et $*$ une loi de composition interne dans E
$(E,*)$ est un groupe si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- La loi $*$ est associative dans E ;
- La loi $*$ admet un élément neutre dans E ;
- Tout élément de E a un symétrique pour la loi $*$.

Remarque : Si de plus la loi $*$ est commutative dans E alors $(E,*)$ est un groupe abélien ou groupe commutatif
Définition 2 : $(E,*)$ est un groupe et E' un sous ensemble de E.
$(E',*)$ est un sous groupe de E si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall\, x \in E', y \in E', x * y \in E'$;
- L'élément neutre de E pour la loi $*$ est un élément neutre de E' ;
- Le symétrique de tout élément de E pour la loi $*$ est un élément de E'.

III) Structure d'anneau

Définition 3 : E est un ensemble, $*$ et $\perp$ deux lois de compositions internes dans E.
$(E,*,\perp)$ est un anneau si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $(E,*)$ est un groupe commutatif ;
- La loi $\perp$ est associative dans E ;
- La loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans E.

Remarque : Si de plus la loi $\perp$ est commutative et admet un élément neutre dans E alors $(E,*,\perp)$ est un anneau commutatif unitaire.
Définition 4 : $(E,*,\perp)$ est un anneau et E' un sous ensemble de E.
$(E',*,\perp)$ est un sous anneau de E si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- E' est stable pour les lois $*$ et $\perp$;
- $(E',*,\perp)$ est un anneau.

IV) Structure de corps

Définition 5 : E est un ensemble, $*$ et $\perp$ deux lois de compositions internes dans E
$(E,*,\perp)$ est un corps si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $(E,*)$ est un groupe commutatif ;
- $(E,*)$ est un groupe ;
- La loi $\perp$ est distributive par rapport à loi $\perp$.

Remarque : Si de plus, la loi $\perp$ est commutative dans E alors $(E,*,\perp)$ est un corps commutatif.
Définition 6 : $(E,*,\perp)$ est un corps et E' un sous ensemble de E.

$(E', *, \perp)$ est un sous corps de E si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- E' est stable pour les lois $*$ et $\perp$;
- $(E', *, \perp)$ est un corps.

V) Homomorphismes

Définition 7 : E est un ensemble muni de la loi de composition interne $*$ et F est un ensemble muni de la loi de composition interne $\perp$. Soit f une application de E dans F.
f est un morphisme de $(E,*)$ dans $(F, \perp)$ si et seulement si : $\forall\, x \in E, y \in E, f(x * y) = f(x) \perp f(y)$.

Tableau récapitulatif

	$E \neq F$	$E = F$ et $*=\perp$
f est une application quelconque	f est un morphisme de $(E,*)$ dans $(F, \perp)$	f est un endomorphisme de $(E,*)$
f est une application bijective	f est un isomorphisme de $(E,*)$ dans $(F, \perp)$	f est un automorphisme de $(E,*)$

VI) Espaces vectoriels

Définition 8 : E est un ensemble muni d'une loi de composition interne + et une loi de composition externe $\cdot$
$(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif ;
- Les axiomes suivants sont vérifiés :

- $\forall\, x \in E, 1 \cdot x = x$;
- $\forall\, x \in E, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$;
- $\forall\, x \in E, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$;
- $\forall\, (x, y) \in E^2, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$.

Théorème 1 : $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel et E' un sous ensemble de E.
E' est un sous espace vectoriel de E si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- E' est non vide : $E' \neq \emptyset$;
- E' est stable pour les lois + et $\cdot$.

Théorème 2 : $(x_1;\ x_2; \dots;\ x_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E.

- On dit que cette famille est génératrice si et seulement si tout vecteur x de E est une combinaison linéaire des vecteurs : $x_1;\ x_2; \dots;\ x_n$, c'est-à-dire : $x = \sum_1^n \alpha_i x_i$ avec $\alpha_1;\ \alpha_2; \dots;\ \alpha_n$ des réels.
- On dit que cette famille est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire des vecteurs $x_1;\ x_2; \dots;\ x_n$ soit un vecteur nul de E de coefficients tous nuls, c'est-à-dire : $\sum_1^n \alpha_i x_i = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$
- Cette famille forme une base si et seulement si elle est une famille libre et génératrice.
- On appelle dimension d'un espace vectoriel E le nombre des vecteurs de E qui forment la base de E.

VII) Applications linéaires et matrices

Définition 9 : E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, f une application de E dans F.
f est une application linéaire si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall\, x \in E, \forall\, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- $\forall\, x \in E, \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha x) = \alpha f(x)$

NB : On peut simplement montrer que : $\forall\, (x, y) \in E^2, \forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

Définition 10 : f est une application linéaire dont l'expression analytique dans le repère (O, I, J) est :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

On appelle matrice de f dans la base (I, J) le carré : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Quelques opérations avec les matrices : $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $M' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$

- $M + M' = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}$;
- $\alpha M = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$
- $M \times M' = \begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix}$
- $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

B) EXERCICES

Exercice1

On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définit par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

Montrer que l'application $x \longmapsto x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},*)$ $vers$ $(\mathbb{R},+)$. En déduire que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définit par : $(x,y)*(x',y') = (xx', xy'+y)$.

1) Montrer que $(G,*)$ est un groupe non commutatif.
2) Montrer que $(]0,+\infty[\times \mathbb{R},*)$ est un sous groupe de $(G,*)$.

Exercice 3

Soit $*$ une loi de composition interne associative sur E. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que l'application $f: E \to E$ définie par : $f(x) = a*x*a$ soit surjective et on note b un antécédent de a par f.

a) Montrer que $e = a*b$ et $e' = b*a$ sont neutres respectivement à gauche et à droite puis que $e = e'$.
b) Montrer que a est symétrisable et f bijective.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par : $f(x) = x^n$. Montrer que f est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R}^*,\times)$.

Exercice 5

On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois définies par : $\begin{cases}(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \\ (x,y)*(x',y') = (xx', xy'+x'y)\end{cases}$

1) Montrer que $(A,+)$ est un groupe commutatif.
2) Montrer que :

a) La loi $*$ est commutative, associative et admet un élément neutre dans A.
b) $(A,+,*)$ est un anneau commutatif unitaire.

Exercice 6

Montrer qu'un anneau $(A,+,\times)$ n'a pas de diviseurs de zéro si et seulement si, tous ses éléments non nuls sont réguliers.

Exercice7

On définit sur $\mathbb{R}$ deux lois de composition interne par : $\begin{cases} x \perp y = x+y-1 \\ x * y = xy - x - y + 2\end{cases}$

Montrer que $(\mathbb{R},\perp,*)$ est un corps.

Exercice 8

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble des réels suivant : $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2}, m\ et\ n \in \mathbb{Z}\}$.

1) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, muni de l'addition et de la multiplication des réels, est un sous anneau de $\mathbb{R}$.
2) On considère l'application φ, de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même, qui à $m+n\sqrt{2}$ associe $\varphi(m+n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}$. Montrer φ est un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\times)$.(c'est une bijection, et un morphisme pour chacune de deux lois)
3) Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x\varphi(x)$. Montrer que N est une application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}$, qui est un morphisme pour la multiplication.

4) Démontrer que x est un élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

5) Vérifier que $3 + 2\sqrt{2}$ et $-3 + 2\sqrt{2}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Exercice 9

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels

a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 3z = 0\}$

b) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$

c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$

Exercice 10

Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

a) $E = \mathbb{R}^2, u = (1, 2), u_1 = (1, -2), u_2 = (2, 3)$;

b) $E = \mathbb{R}^3, u = (2, 5, 3), u_1 = (1, 3, 2), u_2 = (1, -1, 4)$;

c) $E = \mathbb{R}^3, u = (3, 1, m), u_1 = (1, 3, 2), u_2 = (1, -1, 4)$(discuter suivant la valeur de m).

Exercice 11

Les systèmes suivants forment ils des bases de $\mathbb{R}^3$?

a) $S_1 = \{(1, -1, 0), (2, -1, 2)\}$;

b) $S_2 = \{(1, -1, 0), (2, -1, 2), (1, 0, a)\}$ avec a réel (on discutera suivant la valeur de a) ;

c) $S_3 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.

Exercice 12

Soient F et G les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\}$

$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + 2z = 0\}$

1) Donner une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.

2) Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.

3) Les espaces F et G sont ils supplémentaires ?

Exercice 13

On considère l'application $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$

1) Montrer que h est une application linéaire.

2) Montrer que h n'est ni injective, ni surjective.

3) Donner une base de son noyau et une base de son image.

Exercice 14

Soit $\vec{P}$, le plan vectoriel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et f l'endomorphisme de $\vec{P}$ définie par : $\begin{cases} f(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} \end{cases}$

1) Déterminer $f(\vec{v})$, image du vecteur $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

2) En déduire l'expression analytique de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3) Déterminer $ker f$ et $Im f$. Déterminer une base de $ker f$ et de $Im f$

4) Déterminer la matrice de $f o f$.

Exercice 15

Soit E, l'espace vectoriel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, et f l'endomorphisme de E définie par : $\begin{cases} f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k} \\ f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k} \\ f(\vec{k}) = \vec{\jmath} + \vec{k} \end{cases}$

1) Déterminer $f(\vec{u})$, image du vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

2) En déduire l'expression analytique de f.

3) L'endomorphisme f est il un automorphisme de E ?

4) Déterminer la matrice de $f o f$. Est elle inversible ?

5) Déterminer $ker f$ et $Im f$.

Exercice 16

Soit u: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $u(x, y, z) = (-2x + 4y + 4z, -x + y, -2x + 4y + 4z)$.

1) Montrer que u est linéaire.
2) Déterminer une base de $ker(u)$ et une base de $Im(u)$.
3) A-t- on $keru \oplus Imu = \mathbb{R}^3$?

Exercice 17

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $f(e_1) = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3), f(e_2) = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3)\ et\ f(e_3) = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$.

Soient $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \setminus f(u) = -u\}$ et $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \setminus f(u) = u\}$

1) Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que $e_1 - e_2\ et\ e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1} et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1.
3) Que peut-on en dédire sur les dimensions de E_{-1} et E_1 ?
4) Déterminer $E_{-1} \cap E_1$.
5) $A - t$ - on $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$?
6) Calculer $f^2 = fof$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 18

E_3 est un espace vectoriel de dimension 3, de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et E_2 est un plan vectoriel de base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. F est l'application de E_3 dans E_2 qui, à tout vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ de E_3 associe le vecteur $\overrightarrow{u'} = f(\vec{u}) \binom{x'}{y'}$ telque :

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y + z \end{cases}$$

Déterminer le noyau et l'image de f. En donner si possible une base de chacun de ces sous espaces vectoriels.

Exercice 19

E est un plan vectoriel réel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, a est un nombre réel donné et f_a l'endomorphisme de E qui, au vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}\binom{x'}{y'}$ tel que :$\begin{cases} x' = x \\ y' = (1 - a)x + ay \end{cases}$

1) –Ecrire la matrice M_a de f_a dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   - Pour quelles valeurs de a f_a est un automorphisme ?
2) Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble des vecteurs invariants par f_a.
3) On se place dans le cas où $a = 0$.
   a) Déterminer le noyau et l'image de f_0.
   b) On pose : $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = \vec{\jmath}$. Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E. Déterminer la matrice M_0 de f_0 dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Exercice 20

E est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme : $M_{(a,b)} = \begin{bmatrix} a + b & 0 \\ a & b - a \end{bmatrix}$ où a et b sont des réels. On pose : $I = M_{(0,1)}\ et\ J = M_{(1,0)}$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel de base (I, J) de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
2) Montrer que E est un espace vectoriel de base (I,J) de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
3) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
4) Quelles sont les matrices $M_{(a,b)}$ inversibles ? Exprimer $M_{(a,b)}^{-1}$.

IV) Arithmétique

A) RÉSUMÉ DU COURS

I) Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Propriété 1 : a, b et c sont des entiers naturels

- $a \leq a$;
- $Si\ a \leq b$ et $b \leq a$ alors : $a = b$;
- $Si\ a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$

Propriété 2 : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Raisonnement par récurrence : Pour démontrer par récurrence qu'une proposition $P(n)$ est vraie, on peut procéder comme suit :

- Vérifier que $P(n_0)$ est vraie où n_0 est le premier rang ;
- Supposons que la proposition est vraie au rang k ;
- Vérifier que la proposition est aussi vraie au rang $k + 1$.

Propriété 3 : a et b sont deux entiers relatifs. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que : $a = bq + r$ (division euclidienne de a par b)

Propriété 4 : b est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Tout entier naturel x peut s'écrire de façon unique sous la forme : $x = a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0$

Dans la base b, x s'écrit : $x = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1 a_0}^{\,b}$

II) Multiples et diviseurs

Définition 1 : a et b sont deux entiers relatifs

On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier relatif k tel que : $a = bk$.

Si de plus $b \neq 0$, on dit que b est un diviseur de a.

Propriété 5 : a, b et c sont des entiers relatifs avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$

- a divise a ;
- Si a divise b, alors : $|a| \leq |b|$;
- Si a divise b et b divise a alors $a = b$ ou $a = -b$;
- $si\ a$ divise b et b divise c alors a divise c ;
- $si\ a$ divise b et c alors pour tous entiers relatifs x et y, a divise $bx + cy$.

NB : a et b sont des entiers relatifs

- L'ensemble des multiples de a se note : $a\mathbb{Z}$;
- L'ensemble des diviseurs de a se note : $D(a)$;
- L'ensemble des diviseurs communs de a et de b se note : $D(a; b)$.

Définition 2 : n est un entier naturel, a et b deux entiers relatifs. On dit que a est congru à b modulo n si $a - b$ est multiple de n et on note : $a \equiv b[n]$.

Propriété 6 : a, b, a', b' sont des entiers relatifs, k et n deux entiers naturels

- Si $a \equiv a'[n]$ et $b = b'[n]$, alors : $a + a' \equiv b + b'[n]$;
- Si $a \equiv a'[n]$ et $b = b'[n]$, alors : $aa' \equiv bb'[n]$;
- Si $a \equiv a'[n]$, alors : $a^k \equiv a'^k[n]$.

Propriété 7 : Si r et r' sont les restes respectifs des divisions euclidiennes de a et a' par n, alors : $a \equiv a'[n] \Leftrightarrow r = r'$

III) PPCM et PGCD

Définitions 3 : a et b sont des entiers relatifs

- On appelle plus grand commun diviseur de a et de b, noté $pgcd(a\ ;\ b)$, le plus grang élément positif de $D(a, b)$.

- On appelle plus petit commun multiple de a et de b, noté $ppcm(a\ ;\ b)$, le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

Remarque : Pour tous entiers relatifs a et b on a : $pgcd(a\ ;\ b) \times ppcm(a;b) = a \times b$

Propriétés 8 : a et b sont deux entiers naturels. On pose : $pgcd(a\ ;\ b) = \mu$ et $pgcd(a\ ;\ b) = \delta$

- $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$ et $D(a;b) = D(\delta)$;
- $Si\ m$ est un multiple de δ alors pour tous entiers relatifs x et y, on a : $m = ax + by$.
- l'équation $ax + by = c$ admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si c est un multiple de $pgcd(a\ ;\ b)$.

Algorithme d'Euclide : a et b sont des entiers naturels strictement positifs et r le reste de la division euclidienne de a par b.

- Si $r = 0$, alors $pgcd(a\ ;\ b) = b$;
- Si $r \neq 0$, alors $pgcd(a\ ;\ b) = pgcd(b\ ;\ r)$.

IV) Nombres premiers entre eux

Définition 4 : Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si : $pgcd(a\ ;\ b) = 1$.

Théorème de Bézout : Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si qu'il existe deux entiers x et y tels que : $ax + by = 1$

Théorème de Gauss : a, b et c sont des entiers relatifs non nuls

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c.

B) EXERCICES

Exercice 1

Démontrer par récurrence que :

a) Pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

b) Pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

c) Pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

d) Pour tout entier naturel n, $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

e) $3X5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice 2

1) Ecrire en base deux les nombres suivants : 85 ; 104 ; 3607
2) Ecrire dans le système décimal les nombres suivants, écris en base deux : $\overline{10110}^2$; $\overline{111000}^2$; $\overline{10101010}^2$; $\overline{110100011}^2$
3) Ecrire $2^6 - 1$ en base deux
4) Ecrire dans le système décimal : $\overline{BAC2016}^{16}$

Exercice 3

Soit a et b deux nombres réels.

a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

b) En déduire que pour tout entier n impair et supérieur à 2, on a :

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b - \cdots - ab^{n-2} - b^{n-1})$$

Exercice 4

Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

a) $a = -2372\ et\ b = 44$; b) $a = 735\ et\ b = -412$; c) $a = -235$ et $b = -17$; $d)\ a = 50764\ et\ b = 327$

Exercice 5

1) La division euclidienne de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r. Quelles sont les valeurs possibles de $b\ et\ r$?
2) Déterminer les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.

3) Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b. Sachant que $a + b + r = 3\,025$ et $q = 50$, rétablir la division.

Exercice 6

1) Trouver les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels $(a < b)$ dont le $PGCD$ d et le $PPCM$ m verifient : $2m + 3d = 78$
2) a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 276.
c) Déterminer les entiers naturels x et $y (x < y)$ dont le $PGCD$ d et le $PPCM$ m vérifient : $m + 3d = 276$ et $10 < d < 30$.

Exercice 7

1) a) Trouver à l'aide de l'algorithme d'Euclide, le $PGCD$ de 1683 et 969.
b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ X $\mathbb{Z}$ les équations : $969x - 1683y = 51$ et $969x - 1683y = 102$.
2) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ chacune des équations : $3x \equiv 1[5]$ et $5x \equiv 2[7]$.
b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases}$

Exercice 8

Un entier naturel n a :

-pour reste 5 dans la division euclidienne par 8 ;

-pour reste 4 dans la division euclidienne par 11

Quel est le reste de la division euclidienne de n par 88 ?

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} PGCD(x;y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$ b) $\begin{cases} PPCM(x;y) = 168 \\ xy = 1008 \end{cases}$ c) $\begin{cases} PPCM(x;y) = 228 \\ PGCD(x;y) = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} pgcd(x;y) = 12 \\ x^2 - y^2 = 7344 \end{cases}$

Exercice 10

Pour tout couple $(a;b)$ d'entiers naturels, on désigne par μ leur PPCM et par δ leur PGCD.

1) Déterminer les couples $(a;b)$ d'entiers naturels tels que : $2\mu + 3\delta = 11$.
2) Dresser la liste des diviseurs de 108. Déterminer les couples $(a;b)$ d'entiers naturels tels que $\mu - 3\delta = 108$ et $10 < \delta < 15$.

Exercice 11

1) a) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2.4^{3n+1}$ est divisible par 11.
b) Déterminer $a \in Z$, tel que : $3^{2n+1} + a.4^{3n+1}$ soit multiple de 11.
2) Un nombre s'écrit $\overline{341}^{10}$ et $\overline{2331}^{a}$. Déterminer a.
3) a) Déterminer $n \in \mathbb{N}$ $tels$ que : $5^{2n} + 5^n$ soit divisible par 13.
b) Déterminer suivant les valeurs de $n \in Z$, le reste de la division euclidienne par 3 de $a = 2n^2 - n^2 + 2$
4) Résoudre dans Z : $x^2 + 2x - 3 \equiv 0[6]$

Exercice 12

1) On donne : $1 \leq n \leq 6$

Calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

2) Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
3) En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division euclidienne par 7.
4) Calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

Exercice 13

1) Déterminer les entiers n tels que : a) $PPCM(n;6) = 96$; b) $PPCM(n;72) = 216$
2) Déterminer l'entier naturel n tel que : $600 < n < 1100$ et $PGCD(n;630) = 105$

Exercice 14

1) Démontrer que pour tout entier relatif n, $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2) On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$

a) Vérifier, à l'aide de la question 1), que 87 et 31 sont premiers entre eux.

b) En déduire un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tels que $87u + 31v = 1$ puis un couple $(x_0; y_0)$ solution

c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

3) Trouver les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 *et* 10.

Exercice 15

1) a) Démontrer que 193 est un nombre premier.

b) Soit a un entier naturel inferieur à 192. Montrer que $a^{192} \equiv 1[193]$.

2) On considère l'équation (E) : $83x - 192y = 1$, où x *et* y sont des nombres rélatifs.

a) Vérifier que 192 *et* 83 sont premiers entre eux.

b) En déduire un couple $(x_0;\ y_0)$ solution de (E).

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') : $83x - 192y = 0$.

d) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer que $n^2 \equiv 0[8]$ où $n^2 \equiv 4[8]$, si n est pair.

2) Montrer que si n est impair, $n^4 \equiv 1[8]$.

Exercice 17

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S): $\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$

1) Démontrer qu'il existe un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tels que : $19u + 12v = 1$ (on ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2) a) Soit n_0 une solution de (S). Vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$

b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$

3) Trouver un couple $(u; v)$ solution de l'équation : $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante

4) Déterminer l'ensemble des solutions de (S).

5) Un entier n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Exercice 18

1) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') : $2x - 3y = 0$.

b) Déterminer dans $\mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation (E) : $2x - 3y = 3$.

c) Résoudre (E).

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 2[7] \end{cases}$

Exercice 19

1) Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 1998 ?

2) Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ des entiers naturels, on désigne par μ leur $PPCM$ et par δ leur$PGCD$.

Déterminer les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers naturels tels que : $\mu^2 - 3\delta^2 = 1998$.

V) CALCULS VECTORIELS

A) RÉSUMÉ DU COURS

I) Fonction vectorielle de Leibniz

Définition 1 : (A_i, α_i) n points pondérés tels que $\sum_1^n \alpha_i \neq 0$.

On appelle barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ l'unique point G tel que : $\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Propriété 1 : Soit $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ n points pondérés. Pour tout point M, on a :

- Si $\sum_1^n \alpha_i \neq 0$, alors $\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = (\sum_1^n \alpha_i)\, \overrightarrow{MG}$ où $G = bar\{(A_i, \alpha_i)\}_{1\leq i\leq n}$;
- Si $\sum_1^n \alpha_i = 0$, $alors$ $\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur indépendant du point M.

Propriété 2 : L'ensemble de barycentre de deux points distincts A et B est la droite (AB).

Propriété 3 : L'ensemble de barycentre de trois A, B et C non alignés est le plan (ABC).

II) Fonction scalaire de Leibniz

Propriété 4 : Soit $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ n points pondérés tels que : $\sum_1^n \alpha_i \neq 0$

- Pour tout point M du plan, on a : $\sum_1^n \alpha_i {MA_i}^2 = (\sum_1^n \alpha_i)\, MG^2 + \sum_1^n \alpha_i {GA_i}^2$ où $G = bar\{(A_i, \alpha_i)\}_{1\leq i\leq n}$;
- La ligne de niveau k de la fonction scalaire $M \mapsto \sum_1^n \alpha_i {MA_i}^2$ est l'ensemble vide ou le point $\{G\}$ ou le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{k-\sum_1^n \alpha_i {GA_i}^2}{\sum_1^n \alpha_i}}$.

Remarque : Si M est un point de l'espace, la ligne de surface k de la fonction scalaire $M \mapsto \sum_1^n \alpha_i {MA_i}^2$ est l'ensemble vide ou le point $\{G\}$ ou la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{k-\sum_1^n \alpha_i {GA_i}^2}{\sum_1^n \alpha_i}}$.

Propriété 5 : Soit $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ n points pondérés tels que : $\sum_1^n \alpha_i = 0$ et O un point du plan

- Pour tout point M du plan, on a : $\sum_1^n \alpha_i {MA_i}^2 = \sum_1^n \alpha_i {OA_i}^2 - 2\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OM}$
- La ligne de niveau k de la fonction scalaire $M \mapsto \sum_1^n \alpha_i {MA_i}^2$ est :
  - L'ensemble vide, le plan, si $\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$;
  - Une droite de vecteur normal $\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$, si $\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \neq \vec{0}$.

Propriété 6 : A et B sont deux points distincts du plan, k un réel strictement positif différent de 1.

L'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = k$ est le cercle de diamètre $[IJ]$ où $I = bar\{(A, 1), (B, k)\}$ et $J = bar\{(A, 1), (B, -k)\}$.

III) Produit vectoriel

Définition 2 : L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u} \parallel \vec{v}$;
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$ et $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$

Propriété 7 : A, B, C et D sont quatre points de l'espace :

- La distance du point M à la droite (AB) est : $d(M, (AB)) = \frac{\|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$;
- L'aire du triangle ABC est : $A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$
- Le volume du tétraèdre $ABCD$ est : $V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}|$.

B) EXERCICES

Exercice 1

Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan P.

1) On considère les applications $f(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $g(M) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) $\|f(M)\| = 2\|g(M)\|$.

b) $f(M).g(M) = 2$.

2) Quelle est l'application qui associe au point M de P le point M' de P dans chacun des cas suivants :

a) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$?

b) $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$?

Exercice 2

Dans le plan P on considère trois points A, B et C tels que : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 4d$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = 2d$ où d est un nombre réel strictement positif. On pose $G_\lambda = bar\{(A,\lambda),(B,1),(C,1)\}$, où $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2\}$.

1) Déterminer l'ensemble Δ des barycentres G_λ de ces points lorsque $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2\}$.

2) Dans le cas où $\lambda = -1$, on appelle G le barycentre des points pondérés $(A,-1),(B,1)$ et $(C,1)$.

a) Déterminer G.

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $-\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 = 0$.

3) On pose $\vec{V} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, pour tout point M du plan.

a) Démontrer que $\vec{V}$ est un vecteur constant.

b) Déterminer l'ensemble (D) des points M tels que : $-2\|MA\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|MC\|^2 = 32d^2$.

Exercice 3

Soit, dans le plan euclidien P, un carré $ABCD$, de côté c, où $c \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'application f_a qui, à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + a\overrightarrow{MD}$.

a) Déterminer, suivant les valeurs de a, la nature et les éléments caractéristiques de f_a.

b) Déterminer, puis construire l'ensemble (E) des points M tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4c^2$.

c) Déterminer, puis construire l'ensemble (F) des points M tels que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

d) Déterminer, puis construire l'ensemble (G) des points M tels que : $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 2c^2$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit le triangle ABC, I milieu de $[BC]$ et G le barycentre du système des points pondérés $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$. O est le centre du triangle ABC.

a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$. Construire le triangle et placer les points I, O et G.

b) Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que : $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

2) On suppose maintenant que le triangle ABC est tel que : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 2a$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = a$ où a est un réel strictement positif.

a) Déterminer et construire l'ensemble F des points M tels que : $-MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 = 16a^2$. Vérifier que $A \in F$.

b) Déterminer et construire l'ensemble D des points M tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 8a^2$.

3) Dans cette question A et B sont les points d'affixes 1 et $2i$, C est le point d'affixe z.

a) Interpréter géométriquement $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|$ et $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)$. Dans la suite, on désigne par $\alpha \in]-\pi; 0[$ tel que $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Le point C est défini par $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \alpha$ et $BC = \sqrt{\frac{2}{5}}BA$.

b) Calculer la valeur exacte de $\sin\alpha$.

c) Démontrer que : $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$ et en déduire z et placer C.

d) Vérifier le triangle ABC est isocèle en A.

Exercice 5

Soit A, B, C trois points distincts et non alignés du plan. Soit a un réel. On considère l'application f_a qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

1) Déterminer a pour que f_a soit une translation, dont on déterminera le vecteur. On note a_0 la valeur obtenue.
2) a est différent de a_0 dans la suite de l'exercice.

a) Montrer que f_a admet un seul point invariant, noté Ω_a.

b) Déterminer et représenter l'ensemble des points Ω_a, lorsque a décrit $\mathbb{R} - \{a_0\}$.

c) Montrer que, si de plus $a \neq 1$, f_a est une homothétie dont on déterminera les éléments caractéristiques. Que peut-on dire de f_1.

Exercice 6

Le plan P est muni d'un repère (O, I, J). Si M et N sont deux points du plan. On note MN leur distance.

1) Soit A, B et C trois points du plan tels que : $AB = AC = 5$ et $BC = 6$.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) On désigne par G le barycentre de $(A; 2), (B; 3), (C; 3)$. Construire le point G et calculer la distance GA.
3) On considère l'application f de P dans P qui, à tout point M de P, associe le réel : $f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Démontrer que l'on a, pour tout point M de P : $f(M) = f(G) + 4MG^2$.

4) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tels que : $f(M) = f(A)$

Exercice 7

1) A, B et C sont des points du plan P dont les affixes respectives sont $-1 + 3i$, $1 + i$ et -4.

Déterminer l'affixe du barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients 4, 3 et 5.

2) On désigne par h l'application de P vers $\mathbb{R}$ qui à tout M de P associe le réel : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$.

Calculer $h(G)$. Exprimer $h(M)$ en fonction de $h(G)$ et MG^2.

Déterminer et dessiner l'ensemble des points M de P qui vérifient : $h(M) = 18$

Exercice 8

ABC est un triangle, on pose : $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. A' est le milieu du segment $[BC]$, B' celui de $[AC]$, C' celui de $[AB]$. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC.

1) Montrer que, pour tout point M du plan, on a : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.
2) En calculant de deux façons différentes $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)^2$, établir que :

$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$

3) On considère les points communs aux cercles de diamètre $[AA']$ et $[BC]$. Montrer que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c.

Exercice 9

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$, on considère les points $A(6;0;0)$ et $B(0;6;0)$

1) Déterminer le barycentre G des points O , A, B affectés respectivement des coefficients 1, 2, 3.
2) Soit $C(0,0,4)$. Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace définis par : $(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC}=0$. Donner une équation cartésienne de (S).
3) Déterminer l'intersection de (S) et du plan d'équation $x=0$.
4) Soit (P) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $MO^2+2MA^2+3MB^2=24$. Vérifier que $A\in(P)$. Déterminer (P)

Exercice 10

1) Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})$ est une base orthonormée directe de l'espace. On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par J le centre du carré $ADHE$.

a) Vérifier que : $\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BJ}$. En déduire l'aire du triangle IGA.

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABIG$ et en déduire la distance du point B au plan (IGA).

2) Soit ABC un triangle et M un point de l'espace. Dans chacun des cas suivants, déterminer le lieu des points M tels que : $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$

a) ABC n'est pas un triangle rectangle en A.

b) ABC est un triangle rectangle en A

Exercice 11

On considère l'espace muni du repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ où $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$. On considère les points $A(3;1;0)$, $B(1;2;0)$, $C(3;2;1)$ et $D(0;0;d)$ où d est un réel positif non nul. On a ainsi un tétraèdre $ABCD$.

1) On pose : $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

a) Calculer les coordonnées de $\vec{n}$.

b) En déduire l'aire du triangle ABC.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3) On note H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

a) On pose : $\overrightarrow{DH}=\lambda\vec{n}$. Calculer λ en fonction de d

b) En déduire l'expression de la distance DH. Montrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $V_d=\frac{2d+5}{6}$

4) Pour quelle valeur de d la droite (DB) est elle perpendiculaire au plan (ABC) ?

5) On suppose $d=0$. Calculer la distance de A au plan (OBC).

Exercice 12

L'espace est muni du repère orthonormé direct. $ABCDEFGH$ est un cube, son arête a pour longueur l, le centre de la face $ABCD$ est le point I

1) Déterminer $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$
2) En déduire l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA})\wedge\overrightarrow{BM}=0$
3) Déterminer l'ensemble (Γ') des point M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}).\overrightarrow{BM}=0$
4) On appelle P le barycentre du système : $\{(A;2),(C;\ -1)\}$

a) Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A

b) Déterminer l'ensemble (Γ_0) des ponts M de l'espace tels que : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\|=\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$. Vérifier que $A\in(\Gamma_0)$

c) Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points M de l'espace tels que : $\|8\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|$

Exercice 13

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : $A(1;\ -2;4)$, $B(-2;\ -6;5)$ et $C(-4;0;\ -3)$

1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1;\ -1;\ -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c) Déterminer une équation du plan (ABC)

2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).

   b) Déterminer les coordonnées du point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3) On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit t le réel tel que : $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$

   a) Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$

   b) En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

Exercice 14 :

Soient les points $A(2;\ -3;4)$, $B(-3;1;2)$ et le vecteur $\vec{u}(-1;2;3)$

D est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

P est le plan passant par B et perpendiculaire à D

1) Déterminer une représentation paramétrique de D.
2) Déterminer une équation cartésienne de P.
3) a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur D.

   b) Calculer la distance du point A au plan P.
4) a) Quel est le projeté orthogonal de B sur D ?

   b) Calculer la distance du point B à la droite D.

VI) ISOMÉTRIES, SIMILITUDES ET APPLICATIONS AFFINES

A) RÉSUMÉ DU COURS

I) ISOMÉTRIES DU PLAN

1) Définitions et propriétés

Définition 1 : On appelle isométrie toute application du plan qui conserve la distance.

Les translations, les rotations, les symétries sont des isométries.

Propriété 1 :

- Toute isométrie du plan est une transformation du plan donc la réciproque d'une isométrie est aussi une isométrie ;
- Toute isométrie plane transforme une figure géométrique en une figure qui lui est superposable.

Définition 2 : Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

On appelle symétrie orthogonale S d'axe (Δ), qui transforme M en M', la tranformation telle que : $\begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \\ I \in (\Delta) \end{cases}$

avec I milieu de $[MM']$

2) Composition et décomposition d'isométries

Propriété 3 : (Δ) et (Δ') sont deux axes de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$

- Si $(\Delta) \parallel (\Delta')$, alors $S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O'O}$ où O est un point de (Δ) et O' son projété orthogonal sur (Δ')
- Si (Δ) et (Δ') se coupent en O alors $S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{u}, \overrightarrow{u'})$.

Propriété 4 : Soit r la rotation de centre A, d'angle θ et r' la rotation de centre A', d'angle θ'

- Si $\theta + \theta' = 0, r \circ r'$ est une translation
- Si $\theta + \theta' \neq 0, , r \circ r'$ est une rotation d'angle de mesure $\theta + \theta'$.

Propriété 5 : r est une rotation et t une translation

$r \circ t$ est une translation

Propriété 6 : (Δ) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$

L'application $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ est une symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{u}$.

3) Déplacement et antidéplacement

Définition 3 : Soit f une isométrie du plan

- On dit f est un déplacement si elle conserve les mesures d'angles orientés.
- On dit que f est un antidéplacement lorsqu'elle transforme tout angle orienté en son opposé.

NB : les rotations et les translations sont des déplacements, les symétries orthogonales et les symétries glissées sont des antidéplacements.

Propriété 7 :

- Tout déplacement est la composée d'un nombre pair des symétries orthogonales ;
- Tout antidéplacement est la composée d'un nombre impair des symétries orthogonales.

4) Classifications d'isométries

Classification d'isométries selon les angles

	Avec point invariant	Sans point invariant
Déplacement	rotation	Translation
Antidéplacement	Symétrie orthogonale	Symétrie glissée

Classification des isoméries selon le nombre des points invariants

Nombre des points invariants de f	Nature de f
Aucun point invariant	Translation ou symétrie glissée
Un seul point invariant A	Rotation de centre A
Deux points invariants A et B	Symétrie orthogonale d'axe (AB)
Trois points invariants A, B et C non alignés	Identité

II) APPLICATIONS AFFINES

<u>Définition</u> : On appelle application affine toute application du plan dans lui-même qui conserve le barycentre. Elle conserve le coefficient de colinéarité.

Une application du plan f est affine s'il existe une application linéaire φ du plan vectoriel tel que pour tous points A et B du plan, on a : $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB})$

<u>Propriété</u> : Soit f une application affine

- f est bijective si est seulement si elle transforme un repère du plan en un repère du plan ;
- L'expression analytique de f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

B) EXERCICES

<u>Exercice 1</u>

$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre O.

Déterminer les applications suivantes :

1) $r_{(A, \frac{\pi}{4})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{4})}$; 2) $r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{2})}$; 3) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r_{(B, \frac{\pi}{4})}$

<u>Exercice 2</u>

Soit S l'application ponctuelle associée à la transformation complexe f d'écriture complexe :

$z' = (1 - i\sqrt{3})\bar{z} + \sqrt{3} + i(2 + \sqrt{3})$ où z est un nombre complexe.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

<u>Exercice 3</u>

Soit $A(1\ ;\ -1)$ un point du plan et (D) la droite d'équation : $x + y = 0$. On note S la similitude indirecte de centre A, et rapport $\frac{1}{2}$ et d'axe (D).

1) Donner un programme de construction du M', image d'un point M du plan par S.
2) Donner l'expression analytique de S.

<u>Exercice 4</u>

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère l'application F qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$ et on note f son application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée.

a) Exprimer $fof(z)$ en fonction de z.

b) Montrer que $F = RoS$; où R est une rotation et S une symétrie axiale. On déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications R et S.

c) Décomposer R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que F est une réflexion dont on déterminera l'axe D_1.

2) On considère l'application G qui, à chaque point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' telle que :

$z'' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants par G.

b) Montrer que $G = ToF$ où T une translation dont on précisera le vecteur.

c) Décomposer T à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que G est une réflexion dont on déterminera l'axe D_2

d) Quelle est l'image du point A d'affixe $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ par G.

Exercice 5

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé (O, I, J). Soit $A(1, 0)$ un point de P et (D) la droite d'équation : $x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} = 0$. Soit S la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit S' la similitude indirecte de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'axe (D).

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S \circ S'$ et de $S' \circ S$;

a) En utilisant les transformations complexes associées.

b) En décomposant canoniquement S et S', puis en recomposant les transformations apparaissant ainsi dans $S \circ S'$ et de $S' \circ S$.

Exercice 6

Soit un plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f qui associe à tout point $M(x\,;\,y)$ le point $M'(x'\,;\,y')$ défini par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$

1) Démontrer que f est une isométrie.
2) Trouver la nature de f et les éléments qui la caractérisent.

Exercice 7

Soit f est la transformation du plan définie analytiquement par : au point $M(x\,;\,y)$, on associe le point $M'(x\,;\,y)$ tels que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 2) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \end{cases}$

1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer Z' en fonction de z.
2) On pose $O' = f(O)$. Vérifier que : $O'M' = OM$.
3) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
4) Soit M'' d'affixe z'' et $M'' = f \circ f(M)$; Exprimer z'' en fonction de z et montrer que $f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.
5) Soit $g = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} \circ f$. A et B les points d'affixes $z_A = \frac{1}{2}$ et $z_B = -\frac{i}{2\sqrt{3}}$. Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives des points A et B par g. Prouver que g est une symétrie orthogonale dont précisera l'axe (Δ).
6) Montrer que $\frac{z_B - z_A}{z_{\frac{1}{2}\vec{u}}}$ est un réel.
7) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 8

Soit un plan P orienté rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f qui associe à tout point $M(x\,;\,y)$ le point $M'(x'\,;\,y')$ défini par : $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie plane.
2) Trouver la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On donne (D) la droite d'équation : $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$.

a) Exprimer en fonction de x et y les coordonnées de $S_D(M)$, où S_D désigne la symétrie orthogonale d'axe (D).

b) On appelle S la similitude directe de centre $A(0\,;\,2)$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\sqrt{3}$. Déterminer les coordonnées de $S(M)$ en fonction de x et y.

c) Soit T l'application définie par : $T = S \circ S_D$. Montrer que les coordonnées de $T(M)$ sont données en fonction de celles de M par : $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 3 \\ y' = -\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} + 2 \end{cases}$

2) Montrer que $T = S_{D'} \circ h_{(A,\sqrt{3})} = h_{(A,\sqrt{3})} \circ S_{D'}$, où $S_{D'}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (D') et h l'homothétie de centre A, de rapport $\sqrt{3}$. En déduire la nature de T et donner ses éléments caractéristiques.

3) L'application T est elle bijective ? Déterminer T^{-1}

Exercice 10

Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit les points $A(2,0), B(2,2), C(0,2)$. Soit s_1 la symétrie orthogonale de base (AC), s_2 la symétrie orthogonale de (OA), T la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

1) Préciser l'image de B par $s_2 \circ s_1$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s_2 \circ s_1$.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $T \circ s_2 \circ s_1$.

Exercice 11

Soit P un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, m un réel et f l'application de P dans lui-même qui, au point $M(x, y)$, fait correspondre $M'(x', y')$: $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + m \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$

1) Démontrer que f est isométrie plane négative.
2) Pour quelle valeur de m, f est elle une symétrie orthogonale par rapport à une droite ?
3) Lorsque $m = 0$, déterminer une droite D et un vecteur $\vec{v}$ tels que $\vec{v}$ soit élément de D, et :
   $f = S \circ T = T \circ S$,où S est la symétrie orthogonale de base D et T la translation de vecteur $\vec{v}$.

Exercice 12

Dans P, plan affine rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit f l'application qui, à $M(x, y)$ $associe$ $M'(x', y')$ tels que :
$x' = -\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{6}$ et $y' = \frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}$.

1) Démontrer que f est affine ; écrire la matrice, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de l'endomorphisme associé φ.
2) Démontrer que φ et f sont des involutions.
3) Déterminer les points invariants par f ; préciser la nature géométrique de f.

Exercice 13

Le plan complexe P est rapporté au plan orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation T qui à tout point $M(x\,;\,y)$ associe le point $M'(x'\,;\,y')$ données par : $\begin{cases} x' = ax - by + a' \\ y' = bx + ay + b' \end{cases}$; où a, b, a', b' sont des réels.

1) Montrer que les affixes des points M et M' sont liées par la relation : $z' = mz + p$, où m et p sont des nombres complexes que l'on déterminera en fonction de a, b, a' et b'.
2) Déterminer a, b, a' et b' pour que la transformation T soit la translation de vecteur $-2\vec{u} + \vec{v}$.
3) Déterminer a, b, a' et b' pour que la transformation T soit l'homothétie de centre $A(1\,;\,2)$ et de rapport 2.
4) Déterminer a, b, a' et b' pour que la transformation T soit la rotation de centre $B(0\,;\,2)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
5) Déterminer a, b, a' et b' pour que la transformation T soit une similitude directe de centre $C(-1\,;\,1)$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

Exercice 14

ABC et DEF sont deux triangles équilatéraux de sens direct. Les points G et H sont tels que $EDBG$ et $CDFH$ sont des parallélogrammes. Le but de l'exercice est de démontrer par deux méthodes que le triangle AGH est équilatéral.

1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. On désigne par a, b, c, d, e, f, g et h les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G et H.

a) Démontrer que : $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$. Exprimer $f - d$ en fonction de $c - d$.

b) Exprimer g en fonction de b, d et e.

c) Démontrer que : $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g - a)$. En déduire que le triangle AGH est équilatéral.

2) On désigne par : t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$ et r la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose $f = t_2 \circ r \circ t_1$.

a) Justifier que f est une rotation dont on précisera l'angle. Déterminer l'image de B par f ; en déduire le centre de la rotation f.

b) Déterminer l'image de G par f. En déduire que le triangle AGH est équilatéral.

Exercice 15

Soit P le plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et f l'application de P dans P qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} + \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Démontrer que f est un antidéplacement. Démontrer que $f = Sot = toS$, où S est la symétrie orthogonale de base D et t la translation de vecteur $\vec{w}$; déterminer $\vec{w}$.

b) Soit Γ le cercle de centre $\Omega(0, -\sqrt{3})$, de rayon 1. Déterminer l'image de Γ par f.

Exercice 16

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tels que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$

1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.

2) Démontrer que $fof = f$.

3) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 17

Le plan affine P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application de P dans P qui, à tout point $M(x, y)$, associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3y - 1 \end{cases}$

1) Démontrer que f est une application affine bijective.

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3) Démontrer que f est une affinité de P, dont on déterminera la direction, le rapport et l'axe.

Exercice 18

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à chaque point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tels que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$

1) Démontrer que $fof = Id$.

2) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on précisera.

3) Soit M un point du plan et M' son image par f.

a) Démontrer que le milieu de $[MM']$ appartient à (D).

b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe, orthogonale à celle (D).

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

VII) ETUDE GÉNÉRALE DES CONIQUES

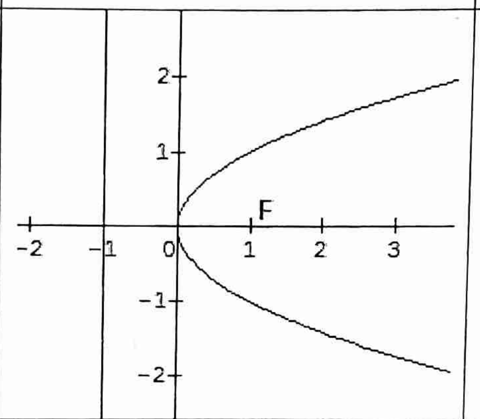
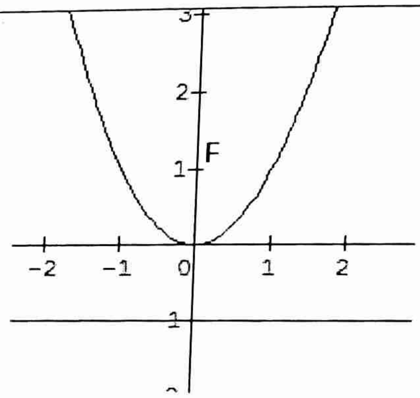
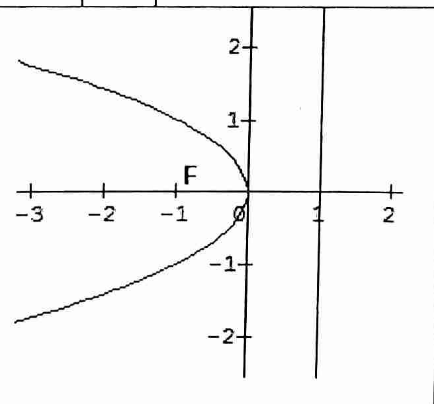
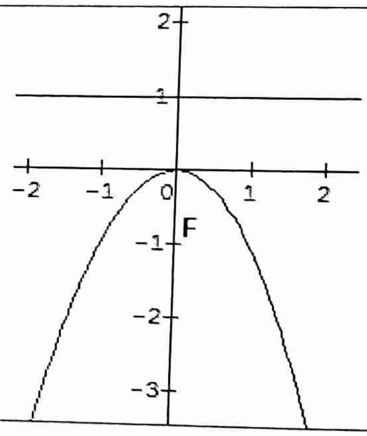
A) RÉSUMÉ DU COURS

Définition : Soit (D) une droite, F un point n'appartenant pas à (D), e un nombre réel strictement positif

On appelle conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (D).

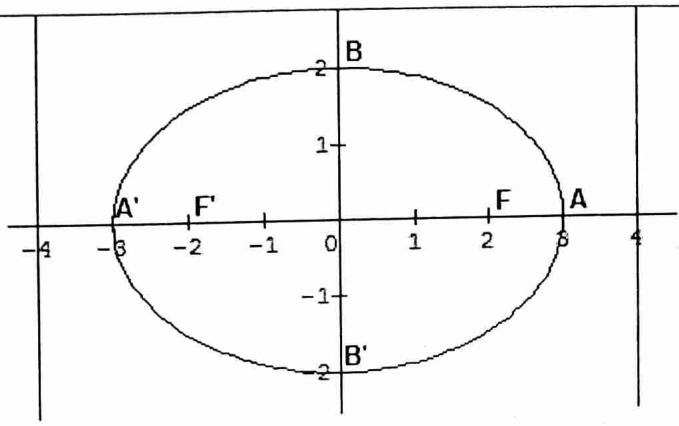
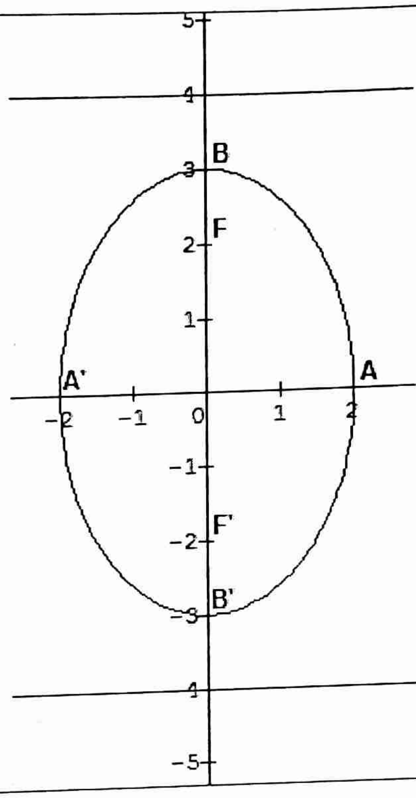
- Si $e = 1$, (Γ) est une parabole ;
- Si $0 < e < 1$, (Γ) est une ellipse ;
- Si $e > 1$, (Γ) est une hyperbole.

I) PARABOLE

Equation	$y^2 = 2ax$	$x^2 = 2ay$
paramètre	$\|a\|$	$\|a\|$
Sommet	O	O
Axe focal	La droite de repère $(O, \vec{i})$	La droite de repère $(O, \vec{j})$
Foyer	$F\left(\frac{a}{2}; 0\right)$	$F\left(0; \frac{a}{2}\right)$
Directrice	$(D) : x = -\frac{a}{2}$	$(D) : y = -\frac{a}{2}$
Equation de la tangent (T) au point $M_0(x_0; y_0)$	$yy_0 = a(x + x_0)$	$xx_0 = a(y + y_0)$
$a > 0$		
$a < 0$		

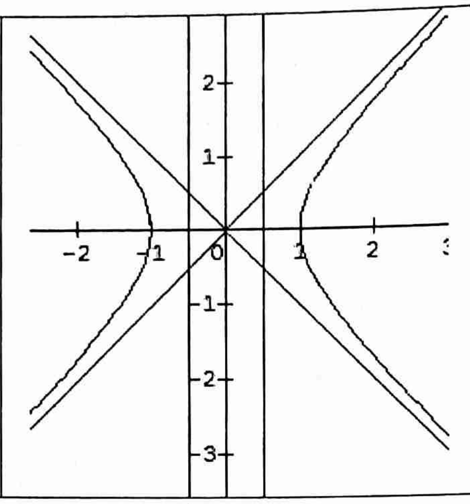
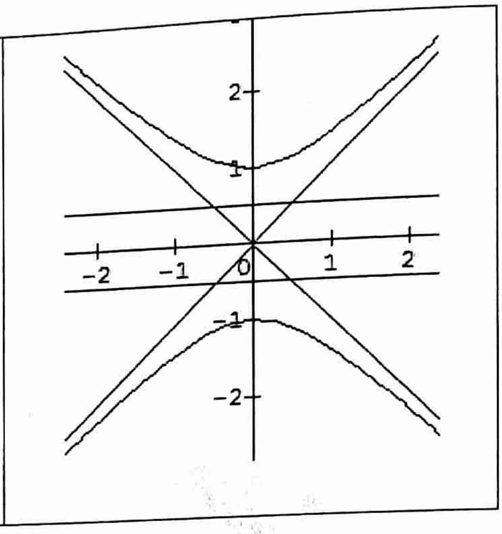
II) ELLIPSE

	1[er] cas $a > b$	2[ème] cas : $a < b$
Equation réduite	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Demi distance focale	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Foyers	$F(c; 0), F'(-c; 0)$	$F(0; c)$, $F'(0, -c)$

Sommets	$A(a;0), A'(-a;0), B(0;b), B'(0;-b)$	$A(a;0), A'(-a;0), B(0;b), B'(0;-b)$
Axe focal	(AA')	(BB')
Directrices	$(D) : x = \frac{a^2}{c}$ et $(D') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(D) : y = \frac{b^2}{c}$ et $(D') : y = -\frac{b^2}{c}$
Equation de la tangente au point $M_0(x_0;\ y_0)$	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$
Représentation paramétrique	$\begin{cases} x' = a\cos\theta \\ y' = b\sin\theta \end{cases}$	$\begin{cases} x' = a\cos\theta \\ y' = b\sin\theta \end{cases}$
Définition bifocale	$MF + MF' = 2a$ avec $FF' = 2c$	$MF + MF' = 2a$ avec $FF' = 2c$
Courbe		

III) HYPERBOLE

Equation réduite	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Centre	O	O
Demi distance focale	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = \sqrt{b^2 + a^2}$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Foyers	$F(c;0), F'(-c;0)$	$F(0;c), F'(0,-c)$
Sommets	$A(a;0), A'(-a;0)$	$B(0;b), B'(0;-b)$
Axe focal	(AA')	(BB')
Directrices	$(D) : x = \frac{a^2}{c}$ et $(D') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(D) : y = \frac{b^2}{c}$ et $(D') : y = -\frac{b^2}{c}$
Equation de la tangente au point $M_0(x_0;\ y_0)$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$	$-\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$
Asymptotes	$(\Delta) : y = \frac{b}{a}x$ et $(\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$	$(\Delta) : y = \frac{b}{a}x$ et $(\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$
Définition bifocale	$\lvert MF - MF' \rvert = 2a$ avec $FF' = 2c$	$\lvert MF - MF' \rvert = 2a$ avec $FF' = 2c$

Courbe		

B) EXERCICES

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, préciser la nature de la conique dont une équation est fixée. Préciser ses foyers, ses sommets, éventuellement ses asymptotes :

a) $5x^2+36y^2-1=0$; b) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$; c) $\frac{x^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{25}-1=0$; d) $4x^2-9y^2+8x+54y-11=0$

Exercice 2

1) A tout nombre réel m, on associe l'ensemble C_m, des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation : $mx^2-4mx-(m-1)y^2+2=0$

Etudier, suivant les valeurs de m, la nature de C_m.

2) Soit C l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient l'équation : $4x|x|+y^2-16x-20=0$.

a) Montrer que C est la réunion d'une partie de conique C_1 et d'une partie de conique C_2.

b) Déterminer pour chacune des coniques C_1 et C_2 la nature, le centre, les sommets et éventuellement les asymptotes.

c) Montrer qu'en chacun des points où les courbes C_1 et C_2 coupent la droite $(O,\vec{j})$, elles ont la même tangente.

d) Tracer la courbe C en prenant pour unité le centimètre.

Exercice 3

Si $A\ et\ B$ sont deux points de P, on notera $d(A,B)$ la distance de ces deux points.

Soit Γ l'ensemble des points M de P vérifiant la condition : $d(M,F)+d(M,F')=4$, où $F\ et\ F'$ sont les points des coordonnées respectives $(1\ ;\ 0)\ et\ (-1\ ;\ 0)$.

1) Vérifier que Γ contient les points A, B, C, D, E de coordonnées respectives : $(-2\ ;\ 0), (2\ ;\ 0), \left(-1;\ \frac{3}{2}\right), \left(1;\ \frac{3}{2}\right), \left(1;\ -\frac{3}{2}\right)$

2) Quelle est la nature de Γ ? Montrer qu'une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

3) Représenter la courbe Γ et les points A, B, C, D, E(unité : 3cm).

Soit M_0 un point de P de coordonnées $(x_0;\ y_0)$ qui n'appartient ni à la droite (BC), ni à la tangente en B à Γ. Déterminer les coordonnées du point P d'intersection des droites (DE) et (BM_0) ainsi que les coordonnées du point Q d'intersection des droites (AE) et (CM_0).

En déduire que le point M_0 appartient à Γ si et seulement si les points $P\ et\ Q$ ont la même ordonnée.

Exercice 4

1) Soit P une parabole de foyer F et de directrice D. Etant donné un point M de P et H son projeté orthogonal sur D, montrer que :
- Le milieu I de $[FH]$ appartient à la tangente au sommet ;
- La tangente en M à P est la médiatrice de $[FH]$.

2) a) Déterminer le lieu géométrique des foyers des paraboles ayant une directrice D donnée et tangentes à une droite (T) donnée.

b) Déterminer le lieu géométrique des sommets de ces paraboles.

Exercice 5

Un point $M(x\,;\,y)$ du plan est repéré par son affixe $z = x + iy$.

A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1) Calculer les coordonnées $(x'\,;\,y')$ de M'en fonction de $(x\,;\,y)$ de M
2) Déterminer l'ensemble E des points M tels que M' appartienne à l'axe réel.
3) On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2. On écrit alors z sous la forme : $z = 2e^{it}, t \in [0; 2\pi]$.

a) Exprimer x' et y' en fonction de t.

b) En déduire que M' décrit une conique Γ dont on déterminera le centre et les sommets.

Exercice 6

f est la transformation du plan qui à tout point $M(x\,;\,y)$ associe le point $M'(x'\,;\,y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y \\ y' = -\sqrt{3}x + y \end{cases}$

1) Préciser la nature de f et ses éléments caractéristiques.
2) Soit (E) l'ellipse d'équation : $4x^2 + y^2 = 4$.

a) Déterminer le centre, les foyers et les sommets de l'ellipse (E)

b) Déterminer une équation cartésienne de (E'), image de (E) par f.

3) Déterminer la nature, le centre et les sommets de (E'). Tracer (E) et (E') sur un même graphique.

Exercice 7

M est un point du plan complexe d'affixe z.

1) Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\bar{z} + z + 4 = 0$ est une droite (D).
2) Démontrer pour tout point M, la distance de M à (D) est $\frac{1}{2}|\bar{z} + z + 4|$
3) Démontrer que l'ensemble des points M tels que : $\left|\frac{z-1-i}{\bar{z}+z+4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ est une ellipse dont on précisera un foyer, une directrice et l'excentricité.

Exercice 8

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$ et f l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = z^2 + iz + 1$.

1) Déterminer l'ensemble des points M dont l'image par f est le point A d'affixe $3i$.
2) Soit $M(x\,;\,y)$ un point de (P) et $M'(x'\,;\,y') = f(M)$ l'image de M par f. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
3) Soit (γ) l'ensemble des points M du plan dont l'image est sur la droite d'équation $x = 1$. Déterminer une équation cartésienne de (γ).
4) Soit (C) l'image par f de la droite $(O;\vec{u})$. Déterminer une équation cartésienne de (C).
5) Montrer que (γ) et (C) sont des coniques dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 9

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par (γ) l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point z' tel que : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 1)$

1) Démontrer que (γ) est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

2) A tout complexe $z \neq 3$, on associe le nombre complexe : $Z = \frac{z^2}{\bar{z}-3}$. On note (H) l'ensemble des points $M(z)$, telle Z soit un nombre réel

a) Démontrer que (H) est soit une droite, soit une hyperbole (H') dont on précisera le centre Ω, les foyers, les directrices et l'excentricité.

b) Tracer (H')

3) Démontrer que l'image de (H') par (γ) est une conique. Préciser sa nature, son centre.

Exercice 10

A tout réel $m \in I =]0; 1[$, on associe dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, la conique (E_m) d'équation : $y^2 = 2x - \frac{x^2}{m}$

1) Construire la courbe $\left(E_{\frac{3}{4}}\right)$.

2) Quelle est la nature de (E_m) ? Déterminer par leurs coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ le centre et les sommets de (E_m). Déterminer et tracer la courbe (S) constituant l'ensemble des sommets du grand axe de (E_m) quand m varie dans I.

3) Déterminer par leurs coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ les foyers de (E_m). Déterminer et tracer la courbe (C) constituant l'ensemble de ces foyers quant m varie dans I.

Exercice 11

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $sin^2\alpha z^2 - 4sin\alpha z + (4 + cos^2\alpha) = 0, \alpha \in]0; \pi[$

2) Soient M et N les images des solutions de l'équation dans le plan affine.

a) Montrer que lorsque α décrit $]0; \pi[$, l'ensemble des points M et N est une partie de la conique $(C) : x^2 = 4y^2 + 4$

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (C).

c) Donner l'équation complexe de (C).

d) Dessiner (C).

Exercice 12

Un plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'axes $(x'Ox)$ et $(y'Oy)$.

1) Soit (C) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 1$. A tout point $M(x ; y)$ de ce cercle, on associe le point $N(X ; Y)$ tel que : $\begin{cases} X = x \\ Y = \frac{1}{2}y \end{cases}$

Monter que N appartient à une courbe (E) dont on donnera une équation et les éléments de symétrie.

2) A tout point $M(x ; y)$ de (C), d'ordonnée nulle, on associe maintenant le point $P(X ; Y)$ tel que :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{y} \\ Y = \sqrt{3}\frac{x}{y} \end{cases}$$

Montrer que P appartient à une courbe (H) dont on précisera les équations des asymptotes

Exercice 13

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère du plan. On appelle (E) la conique de foyer O, de directrice (Δ) d'équation : $y = 2$ et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

1) Montrer que (E) a pour équation : $12X^2 + 9Y^2 = 16$ par rapport à un repère que l'on précisera. Quelle est la nature de (E) ?

2) Soit φ l'application qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

a) Donner une équation cartésienne de l'image (E') de (E) par φ.

b) Construire (E) et (E').

Exercice 14

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (D) la droite d'équation $x = 6$ et $F\binom{8}{0}$ un point du plan. Soit θ un réel tel que : $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

On appelle (Γ_θ) l'ensemble des points du plan tels que : $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{cos\theta}$

Où H est le projeté orthogonal de M sur (D)

a) Préciser la nature de (Γ_θ) suivant les valeurs de θ

b) Préciser la nature de (Γ_0) correspondant à $\theta = 0$; Construire (Γ_0)

c) Ecrire une équation cartésienne de la courbe $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ correspondant à $\theta = \frac{\pi}{6}$.

d) Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (foyers, sommets, éléments de symétrie, asymptotes)

Construire la courbe $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$

e) Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 10. Ecrire une équation cartésienne de la courbe (E), transformée de (C) par l'affinité orthogonale d'axe la droite d'équation $y = 0$ et de rapport $\frac{3}{5}$.

f) Déterminer la nature de (E) et préciser ses foyers. Construire (E) dans le repère précédent.

Exercice 15

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A) On considère les points $A\binom{-1}{0}$ et $I\binom{4}{0}$. Soit (E) l'ellipse de centre I dont un sommet est A et un foyer est O.

a) Déterminer les trois autres sommets de (E)

b) Calculer l'excentricité de (E), et donner une équation de sa directrice associé au foyer O dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c) Former une équation de (E) dans le repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$, d'origine I le centre de l'ellipse.

d) Tracer (E).

B) Dans cette partie, à tout réel $\theta \in [0;\ \pi]$, on associe l'équation : $z^2 - 2(4 + 5cos\theta)z + (4cos\theta + 5)^2 = 0$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation.

b) Lorsque $\theta \in [0;\ \pi]$, on note z_1 la solution de l'équation dont la partie imaginaire est strictement positive, et z_2 l'autre solution.

Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2

Déterminer les coordonnées du point M_1 en fonction de θ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, puis dans le repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$.

En déduire l'ensemble des points M_1, puis celui des points M_2 lorsque θ décrit $]0;\ \pi[$.

Exercice 16

Dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (Γ_m) d'équation :

$y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1)$ où m est un réel fixé

A) a) Vérifier que le point $A\binom{3}{0}$ appartient à la courbe (Γ_m), pour réel m.

b) On suppose $m \neq 0$

Montrer que la courbe (Γ_m) est conique à centre.

Montrer que le centre de (Γ_m) est le point $I_m\left(\frac{m-1}{2m}; 0\right)$.

Préciser suivant les valeurs de m, si (Γ_m) est une ellipse ou une hyperbole

c) Construire les courbes (Γ_{-1}) et (Γ_1)

B) Soit $\binom{a}{b}$ un couple de nombres complexes. On appelle φ, la transformation du plan (P) qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = az + b$

a) Déterminer les complexes a et b pour que les points $A(3;0)$ et $B(-3;0)$ aient pour images respectives, par φ, les points $A'(3;\ -3)$ et $B'(-3;3)$.

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de φ.

b) Justifier que, l'image (Γ'_{-1}) de (Γ_{-1}), par φ, est un cercle dont on précisera le centre et la valeur du rayon.

c) Déterminer l'expression analytique de φ. En déduire x et y en fonction de x' et y'

d) En déduire une équation de (Γ'_1), image de (Γ_1) par φ. Construire la courbe (Γ'_1) dans la figure précédente.

C) On pose $m = 0$

a) Quelle est la nature de (Γ_0) ? On fera une deuxième figure.

b) On pose : $G = bar\{(A,2);(B,1);(M,1)\}$ où M décrit (Γ_0) .on appelle (γ_0) la courbe décrite par G. Démontrer que (γ_0) est l'ensemble transformé de (Γ_0) par une homothétie de centre $I_{-1}(1;0)$ dont on précisera le rapport.

On appelle M_1 et M_2 les points de (Γ_0) d'abscisses respectives 4 et 7 dont les ordonnées sont positives.
Construire les barycentres G_1 et G_2 correspondants.

Exercice 17

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit (C) la courbe dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2e^t + e^{-t} \\ y = 2e^t - e^{-t} \end{cases}$ où t est un réel

a) Soit $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un point de (C). Donner, en fonction de a et de b, les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la tangente en M à (C)

b) Soit $N\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ un point de (C) et T le point défini par : $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$. Montrer que la droite (MT) est la tangente en M à la courbe (C).

c) Montrer que la courbe (C) est contenue dans l'hyperbole (H) d'équation : $x^2 - y^2 = 8$.

d) Tracer (H) et préciser son centre, ses sommets, ses foyers et ses asymptotes.

Exercice 18

Soit E un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit Γ l'ensemble des points de E dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ vérifient :
$16x^4 + 81y^4 + 72x^2y^2 - 1296y^2 = 0$
Montrer que Γ est la réunion de deux coniques Γ_1 et Γ_2.

2) Représenter Γ après avoir précisé le centre et les sommets des coniques Γ_1 et Γ_2.

Exercice 19

Soit Γ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation : $y^2 - x^2 + 4x = 0$.

1) Montrer que Γ est la réunion de deux courbes Γ_1 et Γ_2 représentatives des fonctions f_1 et f_2 que l'on précisera.

2) Etudier les variations la fonction f_1 définie par : $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

Etudier la dérivabilité de la fonction f_1 aux points d'abscisses 0 et 4, et préciser les tangentes en ces points ; les asymptotes non parallèles aux axes : on donnera leurs équations et leur point d'intersection.
Construire la représentation graphique Γ_1 de la fonction f_1.
En déduire celle de f_2. En déduire la nature de Γ.

VIII) CALCULS DES PRIMITIVES

A) RÉSUMÉ DU COURS

Définition : f est une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I et telle que : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Propriété 1 : Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Propriété 2 : Soit f une fonction de primitive F sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto F(x) + c, c \in \mathbb{R}$, est une primitive de f sur I.

Propriété 3 : f est une fonction continue et de primitive F sur I, $x_0 \in I$ et y_0 un réel.

La primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 est l'unique fonction F vérifiant : $F(x_0) = y_0$

Primitives des fonctions élémentaires

Fonction f	Fonction primitive F	Intervalle I où f est continue
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \neq 1)$	$x \mapsto \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto cosx$	$x \mapsto sinx + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto sinx$	$x \mapsto -cosx + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + tan^2x$	$x \mapsto tanx + c$	$\left](2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^r}$ $(r \in \mathbb{Q} - \{1\})$	$x \mapsto \dfrac{-1}{(r-1)x^{r-1}} + c$	$[0; +\infty[, si\ r \geq 0$ $]0; +\infty[, r < 0$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$

Primitives des fonctions composées

Fonction f	Primitive de f	Intervalle I
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	I est un intervalle où u est dérivable
$\dfrac{u'}{u^n}$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	I est un intervalle sur lequel u est dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	I est un intervalle sur lequel u est dérivable et strictement positive
$u'cosu$	$sinu$	I est un intervalle sur lequel u est dérivable
$u'sinu$	$-cosu$	I est un intervalle sur lequel u est dérivable
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	$I = \mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$	$I = \mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{u^r}$	$\dfrac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$	I est un intervalle sur lequel u est dérivable et strictement positive
$u'\sqrt{u}$	$\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}$	I est un intervalle sur lequel u est dérivable et strictement positive

B) EXERCICES

Exercice 1

Déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^3 - 2x + 1, I = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x^2}, I =]0; +\infty[$; 3) $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}, I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = -3(-3x-2)^3, I = \mathbb{R}$; 5) $f(x) = (-2x+1)^5, I = \mathbb{R}$, 6) $f(x) = (x+1)\left(x^2+2x\right)^3, I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \frac{2}{(3x+4)^3}, I = \left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[$, 8) $f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2}, I = \mathbb{R}$; 9) $f(x) = sinxcos^3x, I = \mathbb{R}$;

10) $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right), I = \mathbb{R}$, 11) $f(x) = \frac{cosx}{sin^2x}, I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, 12) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}}, I = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

13) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-4x+3}}, I = \left]-\infty; \frac{3}{4}\right[$, 14) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}, I =]-\infty; -1[$, 15) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}, I = \mathbb{R}$

16) $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2-2x+1}, I =]1; +\infty[$, 17) $f(x) = 2cosxsin2x, I = \mathbb{R}$, 18) $f(x) = x - \frac{3}{cos^2x}, I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, 19) $f(x) = sin^2xcos^5x, I = \mathbb{R}$, 20) $f(x) = sin^2xcos^4x, I = \mathbb{R}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = sin^2xcos^2x$

1) Montrer que $f(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}cos4x$
2) En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^3}$

1) Déterminer deux réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$
2) En déduire une primitive de f sur $]-\infty; 1[$, puis celle qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = sin^3x$

1) Linéariser la fonction f
2) En déduire la primitive de f qui s'annule en $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur I

1) $f(x) = \frac{1}{2-x}, I =]2; +\infty[$; 2) $f(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x+1}$ $I = \mathbb{R}$; 3) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5}, I = \mathbb{R}$; 4) $f(x) = \frac{cos2x}{sinxcosx}, I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$; 5) $f(x) = tanx, I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, 6) $f(x) = 3x^2 - 1 + \frac{2}{3x+2}, I =]0; +\infty[$, 7) $f(x) = \frac{1}{cos^2xtanx}, I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$; 8) $f(x) = \frac{lnx}{x}, I =]0; +\infty[$; 9) $f(x) = \frac{1}{xlnx}, I =]1; +\infty[$; 10) $f(x) = \frac{sinx+cosx}{sinx-cosx}, I = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}$

1) Déterminer les réels a et b tels que, $\forall x \neq -\frac{1}{2}, f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$
2) Déterminer les primitives de f sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$
3) En déduire la primitive de f sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ vérifiant : $F(0) = 1$

Exercice 7

Déterminer sur l'intervalle I une primitive de f, dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = e^{-2x+1}, I = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = xe^{x^2}, I = \mathbb{R}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, I =]0; +\infty[$, 4) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, I =]0; +\infty[$
5) $f(x) = \frac{1}{e^x+1}, I = \mathbb{R}$, 6) $f(x) = 2^x, I =]0; +\infty[$,

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{(e^x+2)^2}$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall\, x \neq -2, \frac{1}{(X+2)^2} = a + \frac{bX}{X+2} + \frac{cX}{(X+2)^2}$
2) En déduire une autre expression de $f(x)$.
3) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

f es la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 4)e^{2x}$

1) Déterminer les réels $\alpha\, \beta, \gamma$ pour que la fonction F définie par : $F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.
2) Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

IX) SUITES NUMÉRIQUES

A) RÉSUMÉ DU COURS

I) Généralités sur les suites

Définition 1 : On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

Détermination : Soit (u_n) une suite

- (u_n) est déterminée par sa formule explicite lorsqu'elle est une fonction de n : $u_n = f(n)$
- (u_n) est déterminée par sa formule de récurrence lorsque : $u_{n+1} = g(u_n)$ et le premier terme fixé

Définitions 2 : Soit (u_n) une suite

- (u_n) est dite convergente lorsqu'elle a une limite finie.
- (u_n) est dite divergente si elle a pour limite infinie ou elle n'a pas de limite.

Propriété 1 : Soit (u_n) une suite définie sur E.

- (u_n) est une suite croissante si et seulement si : $\forall\, n \in E, u_{n+1} \geq u_n$;
- (u_n) est une suite décroissante si et seulement si : $\forall\, n \in E, u_{n+1} \leq u_n$;
- (u_n) est une suite constante si et seulement si : $\forall\, n \in E, u_{n+1} = u_n$;
- (u_n) est une suite stationnaire lorsque $u_{n+1} = u_n$ à partir d'un certain rang.

Propriété 2 : Soit (u_n) une suite

- Si (u_n) est croissante et majorée alors elle est convergente ;
- Si (u_n) est décroissante et minorée alors elle est convergente ;
- Si (u_n) est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$;
- Si (u_n) est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

II) Suites arithmétiques et suites géométriques

Suites arithmétiques et suites géométriques

Soit (u_n) une suite numérique

- (u_n) est une suite arithmétique lorsqu'il existe un réel r, appelé raison, tel que : $u_{n+1} = u_n + r$;
- (u_n) est une suite géométrique lorsqu'il existe un réel q, appelé raison, tel que : $u_{n+1} = qu_n$.

Tableau récapitulatif

	Suite arithmétique	Suite géométrique
1er terme	u_0	u_0
Raison	r	q
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ ($u_n = u_p + (n-p)r$, p est le 1er rang)	$u_n = u_0 q^n$ ($u_n = u_p \times q^{n-p}$, p est le rang)
Somme des termes consécutifs : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$	$S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$ ($S_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$, p est le 1er rang)	$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ($S_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-a}$, p est le 1er rang)
Sens de variation	• Si $r > 0$, (u_n) est croissante • Si $r < 0$, (u_n) est décroissante • Si $r = 0$, (u_n) est constante	• Si $v_0 < 0$ ou $v_0 > 0$ et $q < 0$, (u_n) n'est pas monotone • Si $v_0 < 0$ et $0 < q < 1$ ou $v_0 > 0$ et $q > 1$, (u_n) est croissante • Si $v_0 < 0$ et $q > 1$ ou $v_0 > 0$ et $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante

B) EXERCICES

Exercice 1

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2$.

1) Calculer u_1, u_2 *et* u_3.
2) Déterminer un réel a tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.
3) Dans toute la suite, on pose $v_n = u_n - 5$.
a) Calculer v_0, puis donner l'expression de u_n en fonction de n.
b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4) On pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
a) Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ? Etudier la limite de la suite (S_n).
b) Quelle est l'expression de T_n en fonction de n? Etudier la limite de la suite (T_n).

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}, \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 *et* u_4.
2) En utilisant une démonstration par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 2$.
3) On donne cette fois une suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$.
a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. On précisera la raison q et le premier terme v_0.
b) Donner l'expression de v_n en fonction de n. En déduire celle de u_n en fonction de n.
c) Etudier la convergence de (v_n). Déterminer la limite de (u_n).
4) On considère $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Calculer S_n et déterminer sa limite en $+\infty$.

Exercice 3

La suite numérique (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ *par* : $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$.

1) Montrer par récurrence que $\forall\, n \geq 1, 0 \leq u_n \leq 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) On considère la suite (v_n) définie par : pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

c) Exprimer u_n *en* fonction de v_n. En déduire le comportement à l'infini de la suite (u_n).

Exercice 4

On considère la suite numérique u définie par : $\begin{cases} u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{5} \end{cases}$

1) Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité : 5 cm), déterminer graphiquement les cinq premiers termes de la suite u. Sur le graphique, la suite semble converger vers un réel ; lequel ?

2) Soit v la suite de terme général v_n tel que : $v_n = 5u_n - \frac{5}{2}$.

a) Montrer que la suite v est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

3) On pose $S_n = v_1 + v_1 + \cdots + v_n$.

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Calculer S_{2016}.

c) En déduire $S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n. Calculer la limite de S'_n en $+\infty$.

Exercice 5

On considère la suite des nombres réels (u_n) définie par : $u_0 = 1, u_1 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ et la suite (v_n) définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Calculer le terme général v_n de la suite (v_n) en fonction de n.

3) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

a) Démontrer que $u_{n+1} = 1 + S_n$

b) En déduire le terme général u_n de la suite (u_n) en fonction de n. Quelle est alors la limite de la suite (u_n)?

4) Déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier n supérieur ou égal à p, on ait :

$$|u_n - 3| \leq 10^{-3}.$$

Exercice 6

Soit les suites (u_n) *et* (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

- $u_1 = 12$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$
- $v_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$

1) Pour tout entier$n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.

a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer w_n en fonction de n.

c) Prouver que la suite (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) Démontrer que la suite (u_n) décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

3) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \geq v_n$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_1 \geq u_n \geq v_n \geq v_1$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.

a) Prouver que (t_n) est une suite constante.

b) En déduire que les suites (u_n) *et* (v_n) convergent et calculer leurs limites.

Exercice 7

1) Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer u_1, u_2, u_3.

b) Comparer les 4 premiers termes de la suite u aux 4 premiers termes de suite w définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = \frac{n}{n+1}$

c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n$.

2) Soit v la suite définie par : $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $v_1 + v_2 + v_3 = -ln4$.

b) On pose : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n. Déterminer la limite de S_n en $+\infty$.

Exercice 8

La suite (u_n) vérifie, pour tout entier n, la relation : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1) Soit f la fonction définie sur $[-2;\ +\infty[\ par : f(x) = \sqrt{2+x}$

Tracer la courbe représentative (C) de la fonction f.

2) On suppose $u_0 = 0$.

a) Représenter graphiquement (u_n).

b) Conjecturer à partir du graphique le sens de variation et la convergence de (u_n).

3) En utilisant le sens de variation de f et un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n, $u_{n+1} > u_n$

4) En procédant de la même façon, montrer que $u_n \in [0; 2]$.

5) On se propose de montrer que la suite (u_n) converge vers 2.

a) Exprimer $u_{n+1} - 2$ en fonction de u_n.

b) Montrer que : $|u_{n+1} - 2| < \frac{1}{2}|u_n - 2|$.

c) En déduire que : $|u_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.

d) Conclure en déterminant la limite de (u_n).

Exercice 9

Partie A : On donne la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, g(x) = -x + 1 + xln|x| \\ \forall x \in [1;\ +\infty[, g(x) = x - 2 + e^{1-x} \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de g.

2) Démontrer que g est continue en 1.

3) Peut-on prolonger g par continuité en 1 ? Si oui, préciser ce prolongement.

Partie B : On considère à présent la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = g(x), \forall x \in D_g \\ f(0) = 1 \end{cases}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.

b) Exprimer $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

2) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Démontrer que (C) admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$. Donner la position de (C) par rapport à Δ pour $x \geq 1$.

c) Montrer que (C) admet une branche parabolique, préciser sa direction.

3) a) Donner les variations de f et dresser son tableau de variation.

b) Démontrer à l'aide de ce tableau que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. Donner un encadrement à 0,1 près de la solution non entière.

4) Construire (C).

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1;\ +\infty[$.

1) Monter que h est une bijection de I sur un intervalle que l'on précisera.
2) Construire sur le même graphique que (C) la courbe (Γ).
3) α étant un réel strictement supérieur à 1. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (C), Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$. Calculer la limite de $A(\alpha)$ en $+\infty$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

Partie1 : 1) a) Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe suivant les valeurs de x. En déduire le sens de variation de f.
b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et dresser le tableau de variation de f.

2) Démontrer que le point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

3) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A.

4) Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - f(x)$.

a) Démontrer que : $\forall\, x \in]-\infty; 0[, \varphi(x) > 0$ et $\forall\, x \in]0; +\infty[, \varphi(x) < 0$.

b) En déduire la position de (T) par rapport à (C).

c) Tracer (T) et (C).

Partie 2 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = x - f(x)$.

1) a) Etudier le sens de variation de g.
b) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.

2) Démontrer que : $\forall\, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], f(x) \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

3) Calculer $f''(x)$. En déduire que : $\forall\, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

4) En déduire que : $\forall\, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

5) Soit (u_n) la suite des nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = \frac{1}{4} \ et\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

b) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

e) Trouver le plus petit entier naturel p tel que : $|u_p - \alpha| \leq 10^{-2}$

X) CALCUL INTÉGRAL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

A) RÉSUMÉ DU COURS

I) CALCUL INTÉGRAL

Définition 1 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b.
On appelle intégrale de a à b de f le réel $F(b) - F(a)$, avec F primitive de f sur I, tel que : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Propriété 1 : f une fonction continue sur un intervalle I contenant a.
La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Interprétation graphique : $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a, x = b$.

Propriété 2 : Soit f et g deux fonctions continues sur intervalle I contenant a et b.

- Si $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
- Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Propriété 3 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b $(a \leq b)$

S'il existe deux réels m et M tels que : $\forall\, x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Définition 2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b $(a \neq b)$

On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le nombre réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Intégration par parties : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs fonctions dérivées respectives soient continues sur I, a et b deux éléments de I.

$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_b^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

II) EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Définition 1 : On appelle équation différentielle toute équation dont l'inconnue est une fonction dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Résoudre une équation différentielle c'est déterminer la fonction inconnue.

Définition 2 : On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants, l'équation du type : $y' - ay = 0$, y étant la fonction inconnue.

Toutes les fonctions du type $x \mapsto ke^{ax}, k \in \mathbb{R}$, sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - ay = 0$.

Définition 3 : On appelle équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, l'équation différentielle du type : $ay'' + by' + cy = 0$, y étant la fonction inconnue.

Pour résoudre une telle équation, il faut résoudre son équation caractéristique d'inconnue r : $ar^2 + br + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$	Solutions de l'équation caractéristique	Solutions de l'équation différentielle
$\Delta = 0$	Une solution double $r = -\frac{b}{2a}$	$x \mapsto (Ax+B)e^{rx}$, A et B réels
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles r_1 et r_2	$x \mapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$, A et B réels
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjugués : $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$	$x \mapsto (Acos\beta x + Bsin\beta)e^{\alpha x}$, A et B réels

B) EXERCICES

Exercice 1

Soit a et b $(a < b)$ deux réels de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Démontrer que : $\forall\, x \in [a;b], \frac{1}{cos^2a} \leq \frac{1}{cos^2x} \leq \frac{1}{cos^2b}$.
2) En déduire que : $\frac{b-a}{cos^2a} \leq tanb - tana \leq \frac{b-a}{cos^2b}$.

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 3xe^{-x^2}dx;\quad B = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x(lnx)^2}dx;\quad C = \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}dx;\quad D = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sinxsin2xdx\,;\quad E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cos^2x}dx;$$

$F = \int_0^2 (2x+1)\sqrt{2x+1}dx;\;\; G = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |sinx|dx$

Exercice 3

1) En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 (2x+1)e^{2x}dx;\;\; B = \int_1^{e^2} \sqrt{x}lnxdx\,;\;\; C = \int_1^e \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx;\;\; D = \int_e^{e^2} \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)dx\,;$

2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3+3x^2+5x+2}{x+1}$.

a) Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que : $\forall\, x \neq -1, f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$.

b) En déduire la valeur de $\int_0^3 f(x)dx$.

3) En utilisant une double intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\pi} x^2 cosx dx;\quad B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos3xe^{2x}dx;\quad C = \int_{-1}^{0} (1+x)^2 e^{-x}dx;\quad D = \int_0^{\pi} cosxe^{x}dx$$

Exercice 4

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \ et\ \forall\, n \geq 1, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1) Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

a) Calculer f' et en déduire u_0.

b) Calculer u_1.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Montre que, $\forall\, x \in [0; 1], 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$. En déduire que, pour tout $n \geq 1, \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

5) Pour tout $n \geq 3$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$

a) Vérifier que pour tout $n \geq 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$.

b) Par une intégration par parties sur I_n montrer que pour tout $n \geq 3$, on a : $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$

Exercice 5

1) Résoudre dans l'intervalle I chacune des équations différentielles suivantes :

a) $xy' - 2 = 0\ \ et\ I =]0; +\infty[$; $b)\ e^x y' - e^{-x} = 0\ \ et\ I = \mathbb{R}$; $c)\ 2y'e^{-x} = e^{x-1} + e^{x+1}\ \ et\ I = \mathbb{R}$; $d)\ 2y'' + e^{2x} - e^{-2x} = 0\ \ et\ I = \mathbb{R}$; $e)\ 2y'' = 1 + tan^2x\ \ et\ I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$; $f)\ y'' = (x-1)e^x$et $I = \mathbb{R}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y' = -\frac{y}{2}$; $b)\ y'\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$; $c)\ 9y'' - 64y = 0$; $d)\ 2y''+y = 0$; e) $y'' - 2y' - 2y = 0$; $f)\ 2y''-2\sqrt{2}y' + y = 0$; g) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Exercice 6

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 0$.

2) Déterminer la fonction f qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

3) On pose : $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$.

a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$; expliciter $F(x)$.

b) En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Exercice 7

Partie A :

1) Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$. Déterminer les solutions de (E).

2) (E') est l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

a) Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E').

b) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E'), si et seulement si, $k = g - h$ est solution de (E).

c) Déterminer toutes les solutions de (E').

d) Déterminer la solution f de (E) satisfaisant aux conditions initiales : $f(0) = 4\ \ et\ f'(0) = 0$

Partie B :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x+2)^2e^{-x}$ et désigne par (C) sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C).

2) En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle (E'), déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ (On calculera $\int_0^x (f'' + 2f' + f)(t)dt$).

3) On pose : $I_n = \int_0^n f(t)dt, \forall n \in \mathbb{N}$

a) Exprimer I_n en fonction de n et en donner une interprétation graphique.

b) Etudier la convergence de la suite (I_n), puis en déduire l'aire de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $x \geq 0 \; et \; 0 \leq y \leq f(x)$.

Exercice 8

On se propose de chercher les fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x $(E) : f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 6x^2 + 5x$.

1) On désigne par g le polynôme défini par : $g(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels. Déterminer a, b et c pour que g soit une solution de (E).

2) On pose $F = f - g$.

a) Démontrer que si f est solution de (E) alors F est solution de l'équation différentielle $(E') : y'' - 4y' + 3y = 0$.

b) Réciproquement, établir que si F est solution de (E') alors f vérifie : $f = F + g$

c) Résoudre l'équation (E').

d) En déduire les solutions de (E).

Exercice 9

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y = 0$

2) Démontrer que l'équation différentielle $(E') : y'' - 4y = 4x^2 - 8x + 2$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution, qui soit une fonction polynôme P du second dégré.

3) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - P$ est solution de (E).

4) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E'), celle qui vérifie : $f(0) = 0 \; et \; f'(0) = 1$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{|x^2-4|}\right)$. On appelle (C_f) sa courbe représentative.

Partie A :

1) Déterminer l'ensemble de définition de f, puis écrire f sans le symbole valeur absolue.

2) Montrer que f est une fonction paire et que $\forall\, x \in D_f, f$ peut se mettre sous la forme : $f(x) = lnx^2 - ln|x^2 - 4|$.

3) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles de (C_f).

4) Calculer $f'(x)$, étudier son signe suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variations de f.

5) Déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

6) Tracer (C_f).

Partie B :

1) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $]0; 2[$.

a) Montrer que h est une bijection de $]0; 2[$ sur un intervalle k que l'on précisera.

b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

c) Représenter graphiquement les courbes $(C_h) et (C_{h^{-1}})$ représentatives de h et h^{-1}.

2) Calculer $h^{-1}(0) \; et \; (h^{-1})'(0)$.

Partie C :

1) Montrer que, pour tout $x \in]2; +\infty[, f(x) = 2lnx - \ln(x-2) - \ln(x+2)$.

2) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties : $\int_1^x lntdt$.

3) Soit F la primitive de la fonction ln qui prend la valeur -1 en 1. Déterminer $F(x)$.

4) Dans cette question, on prendra : $F(x) = x\ln x - x$. Montrer que la fonction G définie par $G(x) = 2F(x) - F(x-2) - F(x+2)$ est une primitive de f sur $]2;\ +\infty[$.

5) Soit a un réel tel que : $2 < a < 4$ et $A(a)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ vérifiant :
$\begin{cases} a \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

a) Calculer $A(a)$ et déterminer la limite de $A(a)$ lorsque a tend vers 2.

b) Interpréter ce résultat.

Exercice 11

I) $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x - 1}\right|$. On note (C) la courbe.

1) Etudier les variations de f
2) Tracer la courbe (C)
3) On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $]0;\ +\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de $]0;\ +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) On désigne par φ l'application réciproque de g : $\varphi = g^{-1}$ et par (γ) sa courbe représentative. Exprimer $\varphi(x)$ en fonction de x.

4) a étant un nombre réel non nul, on considère la fonction f_a de la variable réelle x définie par :

$f_a(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x - a}\right|$ et on désigne par (C_a) sa courbe représentative dans le plan

a) Démontrer que l'image de la courbe (γ) par la symétrie de centre O est la courbe (C_{-1})

b) a et b étant deux nombres réels non nuls de meme signe, montrer qu'il existe une translation du plan qui transforme la courbe (C_a) en la courbe (C_b).

II) On désigne la fonction numérique $\varphi(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ et on désigne par (γ) sa courbe.

1) Etudier les variations de φ et tracer sa courbe (γ). Démontrer que la courbe (γ) coupe la droite d'équation $y = x$ en un point dont on précisera les coordonnées.

2) λ étant un nombre réel positif non nul, on note $A(\lambda)$ l'aire de la parti du plan limité par la courbe (γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

a) En utilisant l'encadrement suivant, pour tout $u \in [0;\ +\infty[: u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) \leq u$, déterminer un encadrement de $A(\lambda)$ et en déduire que $A(\lambda) \leq 1$.

b) Montrer que $A(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer un encadrement de cette limite.

3) On considère la suite réelle (u_n) de premier terme u_0 et telle que, pour tout entier naturel, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$

a) Montrer que si u_n tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$, alors : $l = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, $u_n \geq 0$ puis montrer pour tout x réel positif, $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on ait : $\left|u_{n+1} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right|$. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, pour tout n entier naturel.

Exercice 12

A) Soit l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x - 2$.

1) Déterminer une fonction affine h qui soit solution de (E).

2) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que g est solution de (E), si et seulement si $g - h$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y'' - 2y' + y = 0$.

3) Déterminer une fonction f solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0\ ;\ -2)$ et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

B) On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = (x-2)e^x + x$ et on désigne par (C_f) sa courbe représentative.

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x-1)e^x + 1$.

a) Calculer les limites de g en $+\infty$ $et\ en - \infty$

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

c) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Démontrer que la droite $(D) : y = x$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$. Etudier la position de (C_f) par rapport à (D).

4) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α et que :$1,68 \leq \alpha \leq 1,69$

6) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

7) Tracer (C_f).

C) t désigne un réel négatif

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_t^0 (x-2)e^x dx$.

2) Calculer, en cm^2, l'aire $A(t)$ de la partie du plan limitée par les droites d'équations : $x = t, x = 0, y = x$ et la courbe (C_f).

3) Calculer la limite de $A(t)$ en $-\infty$.

Exercice 13

I) On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = 0$; y est une fonction deux fois dérivables

1) Résoudre l'équation (E).

2) On considère les solutions de (E) dont la représentation graphique passe par le point $A(0\ ;\ -1)$.

a) Montrer que ces solutions s'écrivent sous la forme : $f_m(x) = (mx-1)e^x$, où m est un réel.

b) On suppose que $m < 0$, étudier les variations de f_m.

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^x$

1) Etudier les variations de f

2) Construire la représentation graphique de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

3) Calculer l'aire du plan délimité par la courbe de f et les droites d'équations : $x = \frac{1}{2}; x = -\frac{1}{2}$ $et\ y = 0$.

III) Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

1) Montrer que h est une bijection de $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[$ sur un intervalle que l'on précisera.

2) Déterminer le sens de variation de h^{-1}, bijection réciproque de h.

XI) Problèmes

A) RÉSUMÉ DU COURS SUR LES FONCTIONS LOGARITHME NÉPÉRIEN ET EXPONENTIELLES

I) FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Définition : On appelle fonction logarithme népérien, noté ln, la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;\ +\infty[$ qui s'annule en 1 : $ln1 = 0$

Propriétés : a et b sont deux réels strictement positifs, r est un rationnel.

- $lnab = lna + lnb$;
- $ln\frac{1}{a} = -lna$;
- $ln\frac{a}{b} = lna - lnb$;
- $lna^r = rlna$;
- $lna = lnb \Leftrightarrow a = b$;

- $lna \leq lnb \Leftrightarrow a \leq b$.

Le nombre e est appelé base du logarithme népérien , $lne^r = r$ avec $e \cong 2,718$

Limites de références : 1) $\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$; 2) $\lim_{x\to 0} lnx = -\infty$; 3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$; 4) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; 5) $\lim_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$; 6) $\lim_{x\to 0} xlnx = 0$

Dérivées :

- La fonction $x \mapsto lnx$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et : $(lnx)' = \frac{1}{x}$
- Si la fonction u est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I alors la fonction lnu est dérivable sur I et on a : $(lnu) = \frac{u'}{u}$.

Primitive : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La primitive sur I de la fonction $\frac{u'}{u}$ est la fonction $ln|u|$.

II) FONCTION EXPONENTIELLE

Définition 1 : On appelle fonction exponentielle, notée exp, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

Propriétés : a et b sont des réels et r un rationnel

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$;
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$;
- $(e^a)^r = e^{ra}$;
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$;
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

Limites de références : 1) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; 2) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; 3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; 4) $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Dérivées :

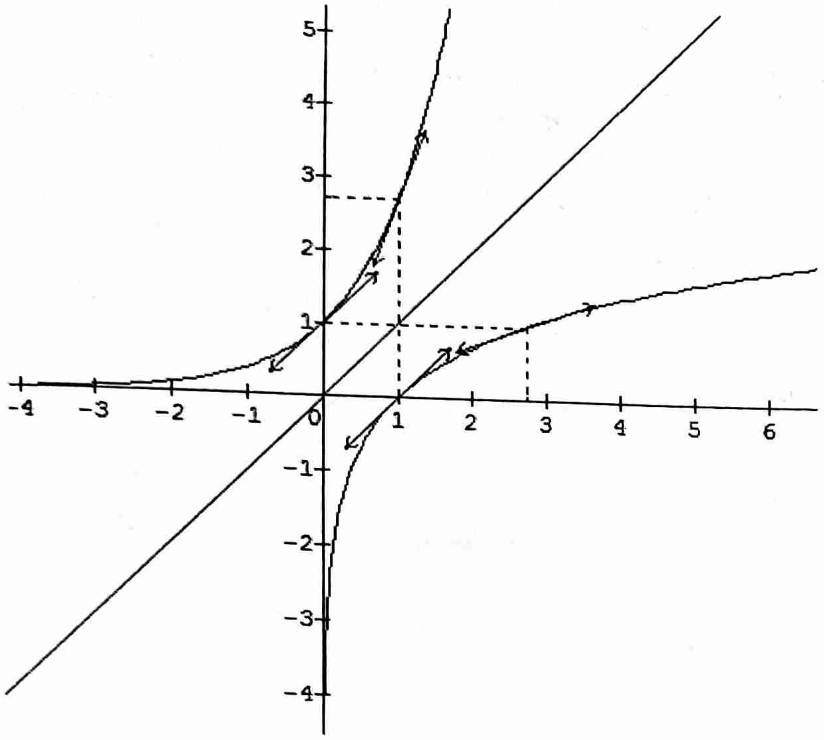
- La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(e^x)' = e^x$;
- Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable sur I et on a : $(e^u)' = u'e^u$

Primitive : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La primitive sur I de la fonction $u'e^u$ est la fonction e^u.

Remarque : les fonctions $x \mapsto lnx$ et $x \mapsto e^x$ sont continues et strictement croissantes respectivement sur $]0; +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$.

NB : $lne^x = e^{lnx} = x$

Les courbes des fonctions $x \mapsto lnx$ et $x \mapsto e^x$ sont symétriques par rapport la prémière bissectrice



B) PROBLÈMES

Problème 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3+3x^2-4x-20}{2(x+3)}$; On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère $(O; I; J)$.

1) **Déterminer l'ensemble de définition de f.**
2) **Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.**
3) **Déterminer la fonction dérivée de f et en déduire le sens de variation de f.**
4) **Dresser le tableau de variation de f.**
5) **Démontrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que : $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x+3}$.**
6) **En déduire que la courbe (C) admet une courbe asymptote (P). Etudier la position relative de (C) par rapport à (P).**
7) **Tracer (C) et (P).**

Problème 2

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1) **Préciser les ensembles de définitions de f et g.**
2) **On considère la fonction h définie par : $h(x) = gof(x)$.**
   a) **Donner l'expression de h en fonction de x.**
   b) **Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.**
   c) **Etudier la fonction h aux bornes de son ensemble de définition.**
3) **Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$. En déduire $h'(x)$.**
4) **Dresser le tableau de variation de $h(x)$.**
5) **Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 2 et en -2.**
6) **Tracer la courbe représentative (C_h) de h.**
7) **Soit u la restriction de h sur $[2 ; +\infty[$.**
   a) **Montrer que la fonction u réalise une bijection de $[2; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.**
   b) **Dresser le tableau de variation de sa bijection réciproque notée u^{-1}.**
   c) **Tracer $(C_{u^{-1}})$.**

Problème 3

On considère la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = 3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique 2 cm).

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Etablir que la courbe (C) admet pour asymptote la droite (Δ) d'équation $y = 3x - 1$. On montrera que la courbe (C) coupe la droite (Δ) en un point dont on déterminera les coordonnées. Etudier la position relative de (C) et (Δ).
3) Déterminer les points d'intersection de (C) avec les droites d'équations $y = 0$ *et* $y = 2$.
4) Démontrer que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme : $f'(x) = \frac{xP(x)}{(x+1)^3}$ où P est un polynôme du 2nd degré.
5) En déduire les variations de f.
6) Tracer (C) avec soin.
7) Déterminer deux réels a et b tels que, $\forall\ x \in D_f$, $\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

Problème 4

Soit la fonction f définie sur I = $]-1\,; +\infty[$ par : $f(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

On désigne par H sa représentation graphique dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique 1 cm).

1) Etudier le signe de l'expression $\frac{1-x}{1+x}$, puis définir la fonction par intervalles.

En déduire l'existence d'asymptotes à la courbe H.

2) Etudier la dérivabilité de f en 1. En déduire que la courbe H admet deux demi tangentes au point d'abscisse 1 dont on déterminera les équations réduites.
3) Tracer la courbe H, ses deux asymptotes et les deux demi tangentes.

Problème 5

1) On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right)$.

a) Etudier le sens de variation de g. Calculer la limite de g en $+\infty$.

b) En déduire que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $g(x) < 0$.

2) On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + x^2}$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J).

a) Calculer les limites de f en $-\infty$ *et* en $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3) Montrer que les droites (Δ) *et* (Δ') d'équations respectives $y = 1$ *et* $y = -x + 1$ sont asymptotes à (C)
4) Construire (C).
5) a)Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera. Donner les caractéristiques de la bijection réciproque f^{-1} de f.

b) Calculer $f(0)$ et en déduire $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{3}{2}\right)$.

c) Représenter graphiquement $\left(C_{f^{-1}}\right)$.

Problème 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J) ;(Unité graphique 2cm sur (xx') et 1cm sur (yy').

1) Etudier la fonction f (limites, variations).

2) a) Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que : $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}$.

b) En déduire que (C) admet une asymptote (D) dont on précisera une équation.

c) Préciser la position de la courbe (C) par rapport à (D) et coordonnées du point I commun à la courbe (C) et à la droite (D)

3) Tracer (D) et (C).

4) Déterminer l'abscisse du point J de la courbe (C) où la tangente est parallèle à (D) puis l'équation de cette tangente.

5) Tracer cette tangente.

6) En déduire graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = x + m$.

7) Montrer que les abscisses des points d'intersection de (C) et la droite d'équation $y = x + m$ sont solutions de l'équation (E) : $(m+2)x^2 + (-2m-7)x + m + 4 = 0$.

Problème 7

Partie I : Soit g la fonction polynôme définie sur par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1) Etudier les variations de g.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

3) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

Partie II : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

1) Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ et vérifier que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

2) En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

3) a) Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$

b) En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique (D).

c) Etudier la position relative de la courbe par rapport à son asymptote. Donner les coordonnées de leur point d'intersection.

d) Donner une équation à chacune des asymptotes parallèles à l'axe $(y'y)$.

5) Tracer (C_f) et toutes ses asymptotes.

Problème 8

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

Partie A : 1) Etudier les variations de la fonction f.

2) a) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

b) Démontrer que le point $I(1\ ;\ 1)$ est un centre de symétrie de (C).

c) Tracer la courbe (C) .

Partie B : Soit m un paramètre réel et (D_m) la droite d'équation $y = -3x + m$.

1) Démontrer que les abscisses des points d'intersection de (C) et de (D_m) sont les racines de l'équation $4x^2 - (4+m)x + 1 + m = 0$.

2) Discuter suivant les valeurs de m le nombre des points d'intersection de (C) et de (D_m) .

Partie C : Soit γ un réel strictement supérieur à 1, et (Δ_γ) la droite passant par I et de coefficient directeur γ.

1) Vérifier que le point $A\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma-1}} ; 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}}\right)$ est un point d'intersection de (C) et (Δ_γ).

2) On rappelle que I est le centre de symétrie de (C)

a) Quel est le deuxième point d'intersection B de (C) et (Δ_γ) ?

b) Démontrer que les tangentes en A et B à la courbe (C) sont parallèles.

Problème 9

Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$

1) Etudier les variations de g.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
3) Justifier que $0 < \alpha < 1$. Encadrer α par deux nombres réels à 10^{-2} près.
4) En déduire le signe de g.

Partie B : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$

On désigne par (C) la courbe représentative de f et par D_1 et D_2 les droites d'équations respectives $y = -3x$ et $y = x$.

1) Etudier f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.
3) En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
4) Montrer que les droites D_1 et D_2 sont asymptotes à (C).
5) Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha$.
6) Tracer les asymptotes D_1 et D_2 et la courbe (C).

Problème 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

A) On pose : $g(x) = x^3 + 3x + 8$

1) Etudier le sens de variation de g.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que : $-1,6 < \alpha < -1,5$
3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B) 1) Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f.

2) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$

b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique (Δ). Etudier la position de (C) par rapport à (Δ).

Vérifier en particulier que (C) rencontre (Δ) en un point unique A.

4) Déterminer les abscisses des points E et F de (C) admettant une tangente parallèle à (Δ)

5) a) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$; en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.

b) Tracer (Δ) et (C).

Problème 11

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle x définie par : $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 4\ cm$ et $\|\vec{j}\| = 2\ cm$.

1) Etudier la continuité de f.
2) Etudier la dérivabilité de f, en particulier en $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. Interpréter graphiquement les résultats. Calculer la dérivée de f sur chaque intervalle où elle est dérivable.
3) En supposant les équivalences suivantes :

a) $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

b) $\sqrt{1 - 4x^2} - 4x > 0 \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{5}}\right]$

En déduire le signe de $f'(x)$

4) Calculer $\lim_{x\to-\infty}[f(x) + x]$ et $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 3x]$. En déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes d'équations respectives $y = -x$ et $y = 3x$.
5) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.
6) Tracer la courbe (C).

7) Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.

b) Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$.

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty}[x + h^{-1}(x)]$ et en déduire que la courbe représentative (Γ) de $h^{-1}(x)$ et la courbe (C) ont une asymptote commune.

d) Tracer la courbe (Γ) dans le repère précédent.

e) Calculer $h^{-1}(0)$ et déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point de coordonnées $\left(0;\ h^{-1}(0)\right)$.

Problème 12

A) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

1) Etudier les variations de g.

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. Vérifier que : $1,45 < \alpha < 1,46$

3) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

B) Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par : $f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Etudier le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.

3) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4) a) Démontrer qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que : $\forall\, x \in D_f,\ f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{4x^2-1}$

b) En déduire que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{4}x$ est asymptote à (C).

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

Problème 13

Partie 1 : soit g l'application $x \mapsto g(x) = \frac{1+x^2}{3x^2-1}$ de $\mathbb{R}_+ \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Etudier g et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

2) Tracer dans le même repère la courbe de la fonction $x \mapsto \ln x$.

3) Soit h l'application $x \mapsto h(x) = \ln x - g(x)$ de $\mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Etudier les variations de h.

b) Montrer qu'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$ et $h(x_1) = h(x_2) = 0$.

c) Déterminer le signe de h suivant les valeurs de x

Partie 2 : On considère l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, f, définie par $f(x) = \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$

1) Calculer la dérivée f' de f et montrer que, pour $x \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f'(x) = \frac{(1-3x^2)h(x)}{(x^2+1)^3}$

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ ainsi que les limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ en 0^+

3) En déduire les variations de f (on ne cherchera pas à calculer avec précision les extremums de f). Donner l'allure de la courbe représentative de f.

4) Vérifier que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$ sur $]0; +\infty[$.

Problème 14

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2\ln x - \ln x}{x^2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition et déterminer sa fonction dérivée f'.

3) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 2lnx$. Etudier le sens de variation de la fonction g. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5) On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f et par Γ celle de fonction logarithme népérien dans le repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique : 2 cm.

a) Etudier la position relative de (C) et Γ. Montrer que Γ est asymptote à la courbe.

b) Tracer les courbes (C) et Γ.

6) On désigne par h la restriction de f à $[1;+\infty[$.

a) Démontrer que h est une bijection de $[1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

b) Dresser le tableau de variation deh^{-1}, la fonction réciproque de h.

c) Calculer $h(e)$ et en déduire $(h^{-1})'\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$.

d) Construire la courbe représentative de h^{-1} sur le repère précédent.

Problème 15

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x) = lnx - \frac{1}{lnx}$. On nomme (C) la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = lnx$ dans un repère orthogonal (O, I, J).

1) Etudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.

2) Déterminer $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - lnx)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Préciser la position relative de (C) par rapport à Γ.

4) On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par O.

a) Soit a un réel appartenant à $]1;+\infty[$. Démontrer que la tangente T_a à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.

Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

b) Montrer que sur $]1;+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $ln^3x - ln^2x - lnx - 1 = 0$ ont les memes solutions

c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$.

d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.

5) Tracer les courbes (C) et Γ .

Problème 16

Partie A : 1) Etudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $4e^{2x} - 5e^x + 1$.

2) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = lnx - 2\sqrt{x} + 2$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction φ et ses limites aux bornes de son domaine de définition.

b) Etudier ses variations et dresser son tableau de variations.

c) En déduire son signe.

Partie B : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x + \frac{e^x}{2e^x-1}, si\ x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x}lnx, si\ x > 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f et étudier les branches infinies de (C).

3) Etudier la position de (C) par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes dans $]-\infty;0]$

4) Etudier la continuité de f en 0. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

5) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.

6) Construire la courbe, les asymptotes et les demi tangentes.

Problème 17

Partie 1 : Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$.

1) Etudier les variations de la fonction g.
2) Dresser le tableau de variation de g.
3) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.
4) Vérifier $1<\alpha<2$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
5) En déduire le signe g suivant les valeurs de x.

Partie 2 : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$ et on note (C) sa courbe représentative.

1) Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
2) Calculer la fonction dérivée f' de f et vérifier que : $\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}g(x)$. En déduire les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
3) En utilisant $g(\alpha)=0$, montrer que $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ et donner sa valeur approchée par excès à 0, 1 près.
4) Tracer la courbe (C).

Problème 18

Partie 1 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Déterminer la dérivée de f, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution et une seule $\alpha\in\mathbb{R}$. En déduire que : $3<\alpha<4$.

Partie 2 : Soit la fonction g définie par : $g(x)=\frac{3(\ln|x|-1)^3}{3\ln^2|x|+1}$.

1) a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}^*$.
   b) Démontrer que g est la composée de la fonction f et d'une fonction h à préciser.
   c) Etudier la parité de g.
   d) On note $D_E=]0;+\infty[$. Soit k la restriction de g à D_E. Calculer les limites de k aux bornes de D_E. Etudier les branches infinies.
2) a) En utilisant les questions précédentes, calculer $k'(x)$ et étudier les variations de k sur D_E. Dresser le tableau de variations de k.
   b) Déterminer le point d'intersection de la courbe de k avec l'axe des abscisses et préciser le signe de k.
3) a) Montrer que k réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
   b) Construire les courbes C_k et $C_{k^{-1}}$, k^{-1} est la réciproque de k.

Tracer la courbe de g dans le repère précédent.

Problème 19

1) Soit la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$, par $g(x)=x^2+\ln x-2$.
   a) Calculer les limites de g en 0 et $+\infty$.
   b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
   c) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α et que $1,31<\alpha<1,32$.
   d) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.
2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}(x^2+1-\ln x)$.
   a) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
   c) En utilisant $g(\alpha)$, montrer que $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2-1}{\alpha}$. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 0,01 près.
3) Soit (C) la courbe représentative de f.
   a) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à (C).

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection P de (C) et (D).

c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).

d) Construire (C) après avoir tracé (D) et les tangentes éventuelles.

Problème 20

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -x + ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ et (C) sa courbe représentative.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. Montrer que f est une fonction impaire et interpréter graphiquement le résultat.
2) Pour tout $x \in D_f$, écrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
3) Calculer les limites de f.
4) Etudier les sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
5) On désigne par (D) la droite d'équation $y = -x$.

a) Montrer que (D) est une asymptote à (C) et étudier suivant les valeurs de x, la position de (C) par rapport à (D).

b) Préciser les autres asymptotes de (C).

6) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions dont l'une est 0.

b) Calculer $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(2)$. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]\frac{3}{2}; 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$. En déduire un encadrement de la troisième solution β de l'équation $f(x) = 0$.

7) Soit h la restriction de f à $]-1; 1[$.

a) Montrer que h est une bijection de $]-1; 1[$ sur un intervalle k à préciser.

b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. Dresser le tableau de variation de h^{-1}. Construire la courbe (C) et la courbe (C') de h^{-1}.

Problème 21

1) Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = 2\ln(x + 1)$.

a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le repère orthogonal (O, I, J), unité 2 cm.

b) Démontrer que sur $[2; +\infty[$ la fonction l, définie par $l(x) = f(x) - x$, est bijective et l'équation $l(x) = 0$ admet une solution unique λ.

2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2\ln(1 + u_n) \end{cases}$

a) Représenter les 4 premiers termes de la suite sur le graphique.

b) Démontrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

c) En déduire que, pour tout n, on a : $|u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3}|u_n - \lambda|$, que $|u_{n+1} - \lambda| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$, et que la suite u_n converge vers λ.

d) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que : $|u_p - \lambda| \leq 10^{-2}$. Que représente u_p pour λ.

Problème 22

I) Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = x + \frac{2lnx}{x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative.

1) Etude de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2 - 2lnx$.

a) Etudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

b) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

2) Etude de la fonction f.

a) Calculer les limites de f et 0 et en $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (D).

d) Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente (T) parallèle à (D).

e) Construire (D) et (C).

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

II) On désigne par h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1) Montrer que x_0 est solution de l'équation $h(x) = x$.

2) On note $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Montrer que pour tout $x \in I, h(x) \in I$.

3) Calculer h' et h''. Démontrer que h' est décroissante sur I. En déduire que, pour tout x de I, on a : $-e^{-\frac{1}{2}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

4) On considère la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_n - x_0|$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}}$.

Problème 23

Partie A : Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1) Montrer que, pour tout x positif, on a : $g'(x) > 0$. En déduire le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$. En déduire que, pour tout x positif, on a : $g(x) > 0$.

2) Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = (2 - x)e^x - 1$.

a) Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que l'on a $\alpha > 1$.

c) Vérifier que : $1,84 \leq \alpha \leq 1,85$.

d) En déduire le signe de h sur $[0; +\infty[$.

Partie B : Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

1) Montrer que l'on peut écrire, pour tout x de $[0; +\infty[, f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$. En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$..

3) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4) Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[, f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$. En déduire, suivant les valeurs du réel x postif, la position de la courbe représentative (C) de la fonction f par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.

5) Tracer la courbe (C).

Problème 24

Partie A : Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \left(x^2 + x + 1\right)e^{-x} - 1$

1) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'un dans l'intervalle $[1; +\infty[$, qui sera notée α. Déterminer un encadrement de α à 0.01 près.

3) En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$. Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal (O, I, J) sont notées C_f et C_g.

1) Démontrer que les courbes passent par le point $A(0\,; 1)$ et admettent en ce point la même tangente.

2) Démontrer que, pour tout x réel, $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$. En déduire les positions relatives de C_f et C_g.

3) Montrer que la fonction h défini sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (-2x-3)e^{-x} - \ln(x^2+x+1)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$.

Problème 25

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) d'unités : 2 cm sur (xx') et 5 cm sur (yy').

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

2) Justifier que, pour tout x, $e^x - x > 0$.

B) 1) calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) Calculer $f'(x)$.

3) Etudier le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0. Etudier la position de (C) par rapport à (T).

5) Tracer (C).

Problème 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - x - e^x$

1) Etudier les variations de f. Calculer $f(0)$ puis, en déduire le signe de f.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{-x} + 1 - x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal

a) Calculer $g'(x)$ puis, montrer que pour tout x réel, on a : $g'(x) = e^{-x}f(x)$.

b) En déduire le signe de g' puis dresser le tableau de variation de g.

3) Démontrer que la droite (D) d'équation $y =- x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$. Calculer la limite de $\frac{g(x)}{x}$ en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

4) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

5) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 dont on précisera les signes.

6) Démontrer qu'il existe un point de la courbe où la tangente est parallèle à la droite (D).

7) Tracer la courbe (C).

Problème 27

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

1) Montrer que f est une fonction impaire et étudier ses variations sur $\mathbb{R}^*$.

2) Soit C_f la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

a) Déterminer les branches infinies de courbe C_f.

b) Construire la courbe C_f.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}, g(x) = f(x-1) + 2$.

b) En déduire que le point $I(1, 2)$ et centre de symétrie de la courbe C_g représentative de la fonction g.

4) Sans étudier la fonction g, construire C_g dans le meme repère. On précisera les asymptotes de la courbe C_g.

5) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe C_g, les droites d'équations respectives : $x = 2, x = a$ et $y = x + 1$ où a est un réel supérieur à 2.

Partie B : Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{2e^x+2x-2}{e^x}$. On désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1) – Montrer que, pour tout x réel, on a : $h(x) = 2 + \varphi(x)$, où φ est une fonction que l'on déterminera.
- Déterminer la limite de $\varphi(x)$ en $+\infty$.
- Etudier les variations de h et calculer $h(0)$.

2) – Montrer que la courbe Γ coupe son asymptote en un point dont on déterminera les coordonnées.
- Ecrire une équation de la tangente (T) à Γ au point d'abscisse 0.
- Tracer Γ.

3) Soit D_m la droite d'équation $y = -m$, m est un réel.
a) Tracer D_1 et D_2.
b) Discuter suivant les valeurs de m le nombre et le signe des solutions de l'équation
$E_m : (2+m)e^x + 2x - 2 = 0$

Problème 28

1) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = -1 + (1-x)e^{-x}$.
a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
c) Dresser le tableau de variation de g. Préciser $g(0)$.
d) Démontrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g(x) \leq 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = xe^{-x} - x + 4$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.
a) Déterminer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout x positif, on a : $f(x) = g(x)$.
b) Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$. Préciser la limite de f en $+\infty$.
c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à (C). Etudier la position de (C) par rapport à (D).
d) Construire la courbe (C).

3) Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = -\frac{x}{2} + 4$.
a) Tracer sa courbe représentative (L) sur le graphique précédent.
b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C) et (L).

4) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha \in [2; 3]$. Déterminer une valeur approchée de α à 0,01 près.

Problème 29

Le but de cet exercice est de montrer que l'équation (E): $e^x = \frac{1}{x}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1) Démontrer que x est solution de (E) si, et seulement si $f(x) = 0$.
2) Etude du signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
a) Etudier le sens de variation de f.
b) En déduire que l'équation (E) admet une unique solution sur$\mathbb{R}$, notée α.
c) Démontrer que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
d) Etudier le signe de sur $[0; \alpha]$.

II) On note g la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2) En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3) Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur $[0; \alpha]$.

III) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout entier naturel n.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

3) Justifier l'égalité : $g(l) = l$. En déduire la valeur de l.

Problème 30

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + ln4 + \frac{2}{e^x+1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Calculer, pour tout x réel, $f(x) + f(-x)$. Que peut on déduire pour le point $A(0\,;1 + ln4)$?

3) Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

4) – Justifier que, pour tout réel m, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

- Déterminer un encadrement à 0,1 près de la solution α de l'équation $f(x) = 3$.
- Pour quelle valeur de m le nombre $-\alpha$ est il solution de l'équation $f(x) = m$?

5) – Montrer que, pour tout réel x, on a : $f(x) = x + 2 + ln4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$.

- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + ln4$ et la droite (D') d'équation $y = x + 2 + ln4$ sont asymptotes à (C).
- Etudier la position de (C) par rapport à (D).

6) – On considère un réel positif α. Que représente l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - x - ln4]dx$?

- Montrer que $I(\alpha) = 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1}\right)$.
- Calculer α pour que $I(\alpha) = 1$, puis donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

Problème 31

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{e^x-1}{x^2}$

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x-2)e^x + 2$.

a) Déterminer les variations de la fonction g.

b) Calculer $g\left(\frac{3}{2}\right)$ et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

c) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

2) a) Déterminer les limites de f en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

c) Déduire les variations de f ; dresser le tableau de variations de f.

d) Démontrer que : $f(\alpha) = \frac{-1}{\alpha(\alpha-2)}$.

3) Démontrer que $g(x) = 0$ équivaut à $2(1 - e^{-x}) = x$.

4) Soit h la fonction définie sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ par : $h(x) = 2(1 - e^{-x})$.

Montrer que, pour tout x de $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$: $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

5) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ et $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. En déduire que, pour tout n naturel, on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

Problème 32

L'objet de l'exercice est la détermination d'une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = x$, où f est la fonction définie sur$]0; +\infty[$ par: $f(x) = e^{\frac{1}{2x}}$.

1) a) Démontrer que la fonction f est décroissante sur$]0;+\infty[$, puis en déduire le sens de la variation de la fonction g définie sur$]0;+\infty[$ $par: g(x) = f(x) - x$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha > 0$, telle que $\frac{5}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$

2) a) Prouver que, pour tout x de l'intervalle $I = \left[\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right]$, $g(x)$ appartient à I.

b) Démontrer que, pour tout x de$I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) En déduire que, pour tout élément x de I, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

3) On considère la suite d'éléments de I définie par : $u_0 = \frac{5}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$.

c) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de α à 0,001 près.

Problème 33

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$ et Γ sa courbe représentative dans un plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

1) Etudier les variations de g. En déduire le signe de g.
2) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à Γ au voisinage de $+\infty$.
3) Tracer Γ et (D) sur le même graphique.

B) Soit f la fonction définie $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère (O, I, J)

1) En remarquant que $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$, calculer la limite de f en $-\infty$. Que peut- on en déduire pour la courbe (C) ?
2) En remarquant que $f(x) = (1 + e^{-x}).\frac{\ln(1+e^x)}{1+e^x}$, calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
3) Démontrer que, pour tout x réel, on a : $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Tracer la courbe (C).

Problème 34

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x, & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f et le tracé de sa courbe.

Partie A : On considère la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - 2\ln x$.

1) Calculer les limites de g en 0 et $+\infty$.
2) On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on note g' sa dérivée.

a) Déterminer g' et étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3) Vérifier que $g(1) = 0$.
4) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]3;4[$ et $g(\alpha) = 0$.
5) Déduire des questions précédentes, le signe de $g(x)$ sur $]0;\ +\infty[$.

Partie B : 1) Démontrer que la fonction f est continue à droite en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

3) Calculer la limite de f en $+\infty$.

4) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

5) a) Démontrer que, $\forall \in\ ]0;+\infty[, f'(x) = g(x)$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

6) Tracer la courbe (C).

Problème 35

Partie I : On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4e^x - 2xe^x - 4$.

1) Etudier les variations de g et ses limites puis dresser son tableau de variation.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions 0 et α. $Vérifier\ que$: $1,59 < \alpha < 1,60$.
3) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

Partie II : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repèreorthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$. unité graphique 2 cm.

1) Etudier les variations de la fonction h définie par : $h(x) = e^x - 2x$ (les limites ne sont pas demandées) et en déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que, pour tout $x \neq 0, f(x) = \frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2}$ et en déduire les limites de f en $+\infty$ $et\ en - \infty$.
3) Déterminer la dérivée f' de f. Montrer que f' est du signe de g. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
4) Montrer que : $f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ et en déduire son encadrement à $0,1$ près.
5) Etudier la position de (C) par rapport à ses deux asymptotes horizontales (à préciser).
6) Tracer la courbe (C).
7) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x-2}{e^x-2x} - 1$ et en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Problème 36

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-2x} + x + 1$.

a) Etudier les variations de f (on mettra $f'(x)$ sous la forme $e^{-2x}g(x)$). On désigne par C la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).

b) Montrer que la courbe C admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$, en donner une équation.

c) Etudier les positions relatives de C et (Δ).

3) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera. On désignera par f^{-1} la bijection réciproque de f et C' sa courbe représentative.

4) Construire C et C' . On donnera d'abord le tableau de variation de f^{-1}.

Problème 37

On considère la fonction numérique d'une variable réelle x définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $\mathrm{f(x) = x^2 + 6\frac{lnx}{x}}$. Soit $(C\ )$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. L'unité étant de $2\ cm$ sur l'axe des abscisses et $0,5\ cm$ sur l'axe des ordonnées.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) En étudiant le sens de variation de la fonction $g: x \mapsto x^3 + 3 - 3lnx$, montrer que pour tout x réel strictement positif, on a : $g(x) > 0$.
3) Calculer la dérivée de f. En se servant de la question précédente, étudier le sens de variation de f. Etablir le tableau de variation de f.
4) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(C\ )$ au point d'abscisse 1.
5) Etudier la position de $(C\ )$ par rapport à la demi parabole (C_1) d'équation $y = x^2, x \geq 0$. Préciser le comportement de deux courbes l'une par rapport à l'autre quant x $tend\ vers + \infty$.

6) Tracer sur le même graphique (C), (T) et (C_1).

7) Monter graphiquement que, quelle que soit la valeur du réel m, l'équation $f(x) = m$ a une seule solution.

Problème 38

Partie I : On suppose connu le résultat suivant : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que : $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

Partie II : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

1) Etudier les variations de f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variation complet.
2) Tracer la courbe (C).

Partie 3 : Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$.

On note C_k la courbe représentative de f_k.

1) a) Quelle est la nature de la fonction f_0?
   b) Déterminer les points d'intersection des courbes C_0 et C_1. Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe C_k.
2) Etudier, suivant les valeurs de du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)(e^x - 1)$. En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des C_k et C_{k+1}.
3) Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul. En déduire le sens de variation de f_k suivant les valeurs de k. (on distinguera les cas $k > 0$ et $k < 0$

Problème 39

Partie I : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2(e^x + x) - 7$.

1) Etudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que : $0,940 \leq \alpha \leq 0,941$.
4) Etudier le signe de g suivant les valeurs de x.

Partie 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$.

1) Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3) Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Dresser le tableau de variation de f.
4) a/ Montrer que $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.

   b/ Etudier le sens de variation de la fonction h définie par : $h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$, $pour$ $tout$ $x \in \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 0,001 près.
5) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à Δ.
6) Tracer (C) et Δ.

Problème 40

Partie A : on considère la fonction f et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, définie par : $f(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$

1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$.
2) Déterminer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I que l'on précisera.

5) Tracer la courbe (C).

Partie B : on considère les équations différentielles suivantes :

$(E) : 3y'' + 2y' - y = -8e^{-x} - 1$ et $(E') : 3y'' + 2y' - y = 0$

1) Vérifier que f est solution de (E)
2) Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de (E').
3) Résoudre alors l'équation (E') et en déduire les solutions de (E).

Partie C : F est une fonction numérique définie par : $F(x) = (ax + b)e^{-x} + x$

1) Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f
2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_2^n (f(x) - 1)dx$; $\forall\, n \geq 2$
a) Calculer u_2 et u_4.
b) Donner une interprétation géométrique de u_n et donner son expression en fonction de n.
c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

XII) Sujets

Sujet n° 1

Exercice1

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher dont 4 de couleur blanche et 2 de couleur noire. Une épreuve consiste à tirer successivement avec remise 3 boules de l'urne, les tirages étant supposés équiprobables.

1) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Tirer au moins une boule blanche »

B : « Tirer 3 boules de même couleur »

2) Soit X la variable aléatoire qui, à toute épreuve, associe le nombre des boules noires tirées.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Etablir la fonction de répartition et la représenter graphiquement.
3) On répète 4 fois l'épreuve précédente. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque série de 4 épreuves, associe le nombre d'épreuves, où l'événement $(X \geq 1)$ a été réalisé.
a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y.

Exercice 2

I) Soit $A(-i)$ et $B(2)$ deux points du plan complexe.
1) Déterminer les points C et D tels que $ABCD$ soit un carré de sens direct.
2) Déterminer l'affixe du centre de gravité du carré.
3) Déterminer les longueurs des côtés et de diagonales.

II) Soit $\alpha \in [0;\ \pi]$ et on considère le polynôme complexe :

$$P(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1.$$

1) Calculer $P(1)$.
2) Factoriser $P(z)$ puis, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3) Déterminer le module et un argument de chacune des solutions de l'équation $P(z) = 0$

Problème

Partie A

I) Soient les équations différentielles $(E) : y' + y = 0$ et $(E') : y' + y = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$.
1) Montrer qu'il existe une fonction h définie par : $h(x) = pe^{-\frac{x}{2}} + q$ solution de (E') p et q étant des nombres réels que l'on déterminera.
2) Montrer qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E') si, et seulement si g est solution de (E).
3) Résoudre (E) puis, en déduire les solutions de (E').

II) Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{-x} - e^{-\frac{x}{2}} - 2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.

1) Montrer que f vérifie l'équation (E').
2) Etudier les variations de f puis, dresser son tableau de variation.
3) Tracer la courbe (C).
4) a) Calculer $A(\alpha) = \int_{ln4}^{\alpha}(-2 - f(x))dx$, α étant un réel supérieur à $ln4$.

c) Calculer $\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$. Interpréter géométriquement le résultat.

Partie B

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} + u_n = -\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}} - 2$, $n \in \mathbb{N}$ (1).

1) Déterminer une suite (a_n) définie par : $a_n = be^{-\frac{n}{2}} + c$ telle que (a_n) vérifie la propriété (1).
2) On pose : $v_n = u_n - a_n$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
4) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calculer S_n en fonction de n. La suite (S_n) est elle convergente ?

Sujet n°2

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points $A(a = i)$ et $B(b = 1 + i)$. On note r_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$; r_B la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$

A) On considère le point C d'affixe $c = 3i$. On appelle D l'image de C par r_A, G l'image de D par r_B et H l'image de C par r_O. On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1) Démontrer que $d = -2 + i$.
2) Déterminer g et h.
3) Démontrer que le quadrilatère $CDGH$ est un rectangle.

B) On considère un point M distinct de O et A, d'affixe m. On appelle N l'image de M par r_A, P l'image de N par r_B et Q l'image de M par r_O. On note n, p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1) Montrer que $n = im + 1 + i$. On admettra que $p = -m + 1 + i$ et $q = -im$.
2) Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.
3) Montrer l'égalité : $\frac{m-n}{p-n} = i + \frac{1}{m}$.

Exercice 2

Une urne contient trois (3) boules portant le numéro 0, deux (2) boules portant le numéro 5 et une (1) boule portant le numéro a (est un entier naturel non nul, différent de 5 et de 10).

Toutes les boules sont indiscernables au toucher. Un joueur tire simultanément trois boules de l'urne et reçoit, en francs, la somme des numéros marqués sur les boules tirées.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

1) Calculer la loi de probabilité de X. Calculer, en fonction de a, l'espérance de X.
2) Calculer a pour que l'espérance du gain du joueur soit de 20 francs. Calculer alors l'écart type de X.

Problème

On considère la famille des foncions f_m définie par : $f_m(x) = 1 + \ln(1 + mx)$, où m est un réel non nul, ln désigne le logarithme népérien, (C_m) la courbe de f_m et (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) 1) Déterminer l'ensemble de définition de f_m.

2) On pose : $h_m(x) = f_m(x) - x$ et on suppose que $m < 0$. Etudier les variations de h_m. En déduire le nombre des points d'intersection de (C_m) et (Δ).

3) On suppose que $m > 0$.

a) Etudier les variations de h_m et dresser son tableau de variations. Etablir que la plus grande valeur prise par h_m quand x décrit l'ensemble de définition est $u(m) = \frac{1}{m} + \ln(m)$.

b) Etudier les variations de u sur $]0; +\infty[$. En déduire le signe de $u(m)$.

c) Déterminer le nombre des points communs à (C_m) et (Δ) lorsque m est positif.

B) 1) Soit (Γ) la courbe de la fonction logarithme népérien.

a) Trouver une translation $t_{\vec{u}}$ qui transforme (Γ) en (C_1).

b) Représenter graphiquement la courbe (C_1) et la droite (Δ).

2) On appelle x_1 et x_2 les abscisses des points d'intersection de (C_1) et (Δ) ; P est le point d'abscisse négative x_1 et Q est le point d'abscisse positive x_2.

a) Démontrer que $2 < x_2 < 3$.

b) Calculer, en cm^2 et en fonction de x_1 et x_2, l'aire du domaine compris entre (C_1) et (Δ), et les droites d'équations $x = x_1$ et $x = x_2$. (On pourra utiliser une intégration par parties).

C) On se propose de calculer une valeur approchée de x_2. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_1(u_n), pour\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Représenter à l'aide de la courbe (C_1) les termes u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.

2) Montrer que la suite (u_n) est majorée par x_2.

3) Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que : $|f'_1(x)| \leq \frac{1}{3}$, puis que $|u_{n+1} - x_2| \leq \frac{1}{3}|u_n - x_2|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - x_2| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - x_2|$, et que la suite (u_n) converge vers x_2.

5) Déterminer une valeur approchée u_p de x_2 à 10^{-2} près en utilisant la suite (u_n).

Sujet n°3

Exercice 1

On jette simultanément un dé noir et un dé blanc. Le dé noir a des faces numérotés 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 et le dé blanc a des faces numérotés 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 4 et 5.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe la somme de deux numéros obtenus.

1) Définir la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique de X, la variance de X et l'écart type de X.
3) Définir et représenter la fonction de répartition de X.
4) Sachant que la somme obtenue est 7, quelle est la probabilité que le dé blanc ait donné 2 ?
5) Sachant que la somme obtenue est 7, quelle est la probabilité que le dé noir ait donné 2 ?
6) Sachant que la somme obtenue est 7, quelle est la probabilité l'un de deux dés ait donné 2 ?
7) Démontrer que les événements « $S = 7$ » et « le dé blanc a donné le numéro 2 » sont indépendants.

Exercice 2

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$
3) Soit le polynôme $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$.

a) Exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z + \frac{1}{z}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 3

Dans le plan orienté, on considère un cercle de diamètre $[OB]$. Soit A un point du segment $[OB]$, distinct de O et de B, et I le milieu du segment $[AB]$. La médiatrice de $[AB]$ coupe le cercle en M et M', M étant le point tel que $(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB})$ est $\frac{\pi}{2}$. Soit N le point commun aux droites (AM') et (OM).

On appelle s la similitude directe de centre N qui transforme M en A.

1) Préciser l'angle de s.
2) Déterminer les images des droites (MI) et (NA), puis l'image par s du point M'.
3) Quelle est l'image I' par s du point I ?
4) En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$.

Problème

La fonction f est définie par : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}, & si\, x > 0 \\ f(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1), & si -1 < x \leq 0 \end{cases}$

(C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1) Démontrer que $D_f =]-1, +\infty[$.
2) a) Calculer les limites de f en -1 et en $+\infty$.
   b) Déduire des questions précédentes les droites asymptotes de (C_f).
3) a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = 0$.
   b) Etudier la continuité de f en 0.
   c) En posant $h = \frac{1}{x}$, étudier : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$
   d) Etudier $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.

$f$est-elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement les résultats.

4) Démontrer que :
   a) $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$
   b) $\forall x \in]-1, 0[, f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$
5) Dresser le tableau de variation de f.
6) Tracer (C_f).

Partie B

Soit α un réel tel que :$-1 < \alpha < 0$.

1) Montrer que, $\forall x \in]-1, 0[, \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.
2) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :
   $\int_\alpha^0 \ln(x+1)\, dx = -\alpha \ln(\alpha+1) + \alpha - \ln(\alpha+1)$.
3) En déduire l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droitesv d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.
4) Calculer la limite de $A(\alpha)$ en -1^+.

Sujet n°4

Exercice 1

Soit (a_n) et (b_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = 2$, $b_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n) \end{cases}$$

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = a_n + b_n$

1) Montrer que la suite (u_n) est constante.
2) On pose : $v_n = a_n - b_n$
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
3) En déduire a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé. Soit $z = x + iy$ l'affixe du point $M(x, y)$ de ce plan.

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $|(1+i)z - 2i| = 2$.
2) Etudier la transformation du plan qui, à chaque point Md'affixe$z$, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1+i)z - 2i$

Trouver en particulier le point qui coïncide avec son transformé.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On réalisera une figure que l'on complétera tout le long de l'exercice.

On considère les ponts A d'affixe i, B d'affixe$-2i$ et D d'affixe 1. On appelle E le point tel que ADE soit un triangle équilatéral de sens direct

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z $(z \neq i)$ associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$

1) Montrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$
2) Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f.
3) a) Démontrer que, pour tout complexe $z \neq i$, on a : $(z' + 2i)(z - i) = 1$
   b) En déduire que pour tout complexe $z \neq i$, on a : $BM' \times AM = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + 2k\pi$ où k est un entier relatif
4) a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   b) En utilisant les résultats de la question 3) b), placer le point E' associé au point E par l'application f
5) Quelle est la nature du triangle $BD'E'$?

Problème

A) On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 3y = \frac{3e}{(1+e^{-3x})^2}$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in\ \mathbb{R}$, exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.

B) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $en + \infty$, puis étudier les variations de f.
2) Tracer la courbe (C).
3) Pour α réel non nul, on pose : $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)dx$
a) Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α.
b) Exprimer I_α en fonction
c) de α.
d) Déterminer la limite de I_α en $+\infty$.

C) On définit, sur $\mathbb{N}^*$, la suite (u_n) par : $u_n = \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}\,dx$, où f est la fonction définie dans la partie B. On ne cherchera pas à calculer u_n.

1) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le signe de u_n.
2) Donner le sens de variation de (u_n).
3) La suite (u_n) est elle convergente ?

4) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_1 \leq u_n \leq e^{\frac{1}{x}} I_1$, où I_1 est l'intégrale de la partie B obtenue pour $\alpha = 1$.
5) En déduire la limite de la suite (u_n). Donner sa valeur exacte.

Sujet n°5

Exercice 1

La suite numérique (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0 \;\; et \; u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$.

1) Montrer que $\forall\, n \geq 1$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.
a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera la raison et le premier terme.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
c) En déduire u_n en fonction de n.
4) On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
a) Calculer S_n en fonction de n.
b) Calculer la limite de S_n en $+\infty$.
c) Calculer S_{10}.

Exercice 2

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique $2\ cm$, on considère les points $A, B\ et\ C$ d'affixes respectives $a = 2, b = 1 - i\ et\ c = 1 + i$.

1) Placer les points $A, B\ et\ C$ sur le repère.
2) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.
3) On appelle r la rotation de centre A qui transforme B en C.
a) Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe du point $D = r(C)$.
b) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C'), l'image par r, du cercle (C) de centre $I(1\,;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 3

1) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que : $a \times b = 12950\ \ et\ \ M(a, b) = 2590$.
2) a) Montrer que 491 et 624 sont premiers entre eux.
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $491x - 624y = 1$.
3) a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.
   b) En déduire que $2^{3n+1} - 2\ \ et\ 2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.

Problème

Partie A : Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$.

1) Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f.
2) Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une est $\alpha, \alpha \in [-0,72;\ -0,71]$.
3) Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$ et on note (C) sa représentation graphique.

1) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2) Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, les variations de la fonction g.
3) Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$.
4) Dresser le tableau de variation de g.

5) Représenter graphiquement la fonction g dans un plan rapporté à un repère orthonormé. (unité graphique : $1\ cm$).

6) Soit h la restriction de g à l'intervalle $]0, +\infty[$.

a) Monter que h est une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Donner le sens de variation de la fonction h^{-1}, la bijection réciproque de h et dresser son tableau de variation.

c) Tracer sur le même repère que (C), la courbe représentative (C') de h^{-1}.

Sujet n° 6

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$. On donnera les solutions $z_1\ et\ z_2$ sous forme algébrique avec $Im(z_1) > 0$.

2) Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A, M_1\ et\ M_2$ d'affixes respectives : $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_1 = \sqrt{2}(1+i)\ et\ z_2 = \sqrt{2}(1-i)$.

a) Déterminer l'affixe z_3 du point M_3, image de M_2 par l'homothétie de centre A et de rapport 3.

b) Déterminer l'affixe z_4 du point M_4, image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) Calculer sous forme algébrique le nombre complexe : $Z = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(6;\ 0)$ et $B(3;\ \sqrt{3})$ ainsi que la rotation R_1 de centre A, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et la rotation R_2 de centre B, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1) M est un point quelconque du plan tel que $M(x, y)$. Donner en fonction de $x\ et\ y$ les coordonnées de $R_1(M)$ et de celles de $R_2(M)$.

2) Démontrer que l'application $R_1 \circ R_2$ est une rotation dont on déterminera le centre ω et l'angle.

3) Soit S la réflexion d'axe (AB).

a) Montrer qu'il existe deux réflexions $S_1\ et\ S_2$ d'axes respectives D_1 et D_2 telles que : $R_1 = S_1 \circ S$ et $R_2 = S \circ S_2$.

b) En déduire que $R_1 \circ R_2 = S_1 \circ S_2$.

c) Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes en ω.

Exercice 3

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté un téléviseur est de 0,2.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?

3) Le client a acheté un magnétoscope, quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?

Problème

Soit f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie sur $]0;\ +\infty[\ par: f_n(x) = x - n - \frac{nlnx}{x}$. On appelle C_n la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra $2\ cm$ pour unité graphique.

Partie A :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g_n(x) = x^2 - n + nlnx$.

a) Etudier le sens de variation de g_n et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution notée α_n et que cette solution appartient à l'intervalle $[1; 3]$.

2) Etablir que, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$. Etudier le signe de $g_n(x)$ et en déduire le sens de variation de f_n.

3) Etudier les limites de f_n en 0 et en $+\infty$. Montrer que la droite D_n d'équation $y = x - n$ est asymptote à la courbe C_n et étudier la position de C_n et D_n sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Etude des cas particuliers : $n = 1$ et $n = 2$

1) α_n étant le nombre définie en A) 1), montrer que :
- Pour $n = 1, \alpha_1 = 1$
- Pour $n = 2$, $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.

2) En utilisant les règles sur les inégalités et l'encadrement de α_2 ci-dessus, montrer que : $f_2(\alpha_2) \geq -1,24$. En utilisant le sens de variation de f_2, montrer que $f_2(\alpha_2) \leq -1,10$.

3) Dresser les tableaux des variations de f_1 et f_2.

4) Représenter dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les droites D_1 et D_2, puis les courbes C_1 et C_2

Sujet n°7

Exercice 1

On considère les nombres complexes : $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $Z = \frac{(z_1)^5}{(z_2)^4}$.

1) Calculer le module et un argument de z_1; z_2 et Z.
2) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
3) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2

A) On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$

1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution unique imaginaire pure z_0.
2) Déterminer deux réels a et b tels que : $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$
3) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

B) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$; $z_B = 1 - i$; $z_J = i\sqrt{2}$ et $z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

1) Placer les points A, B, J et K sur une figure.
2) Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Déterminer l'affixe z_L du point L. Placer L
3) Montrer que les points A, B, L et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 3

Soient E et F deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\} \; et \; F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y - 2z = 0\}$$

1) Donner une base de E, une base de F. En déduire leur dimension respective.
2) Donner une base de $E \cap F$, et donner sa dimension.
3) Les espaces E et F sont ils supplémentaires ?

Exercice 4

On donne dans l'espace un triangle ABC rectangle en A tel que : $AB = 2\lambda$ et $AC = \lambda$, où λ est un nombre réel strictement positif.

1) Construire le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $3, -1$ et 2.
2) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace vérifiant : $3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 5\lambda^2$.
3) On suppose que l'espace est rapporté à un repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne $B(0, 4, 0)$ et $C(0, 0, 2)$.

a) Déterminer les coordonnées de G.
b) Ecrire des équations cartésiennes du plan (ABC) et de l'ensemble (Γ).
c) Préciser l'intersection de (ABC) et (Γ).

Problème

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x - 21|}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan d'unité graphique 1 cm.

1) Etudier le signe de la fonction $x \mapsto x^2 - 4x - 21$ puis écrire la fonction f par intervalles.
2) Etudier la dérivabilité de f en -3 et en 7 puis interpréter graphiquement les résultats.
3) Déterminer la fonction dérivée de f sur chaque intervalle où elle est dérivable.
4) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
5) Démontrer que la courbe (C) admet deux asymptotes obliques (D_1) et (D_2) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$. Déterminer les intersections de (C) avec ses asymptotes obliques (D_1) et (D_2)
6) Démontrer que la droite (D_3) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe (C).
7) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ un point de (C) pour $x \in [-3; 7]$.

a) Montrer que le point $I\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est à une distance constante du point $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$.

b) En déduire la nature de la courbe (C) sur $[-3; 7]$.

8) Tracer la courbe (C) et les droites (D_1), (D_2) et (D_3).

Sujet n°8

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; l'unité graphique est $1\ cm$.

1) En utilisant le discriminant réduit, résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$. On donnera les solutions sous formes algébrique et trigonométrique
2) On note A *et* B les points du plan d'affixes respectives : $a = -2 - 2i$ *et* $b = \bar{a}$. Placer ces points dans le plan complexe.

a) Déterminer l'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer l'affixe d du point D, image du point C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) Placer C *et* D sur la figure précédente.

3) Soit S *la* similitude directe de centre O qui transforme $E(1 + i)$ en $F(1 + i\sqrt{3})$.

a) Déterminer l'écriture complexe de S.

b) Déterminer l'angle et le rapport de S.

c) Donner l'expression analytique de S.

Exercice 2

1) On considère l'équation $(E) : 45x + 28y = 3$.

a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, démontrer que 45 et 28 sont premiers entre eux.

b) En déduire un couple $(x_0;\ y_0)$ solution de l'équation : $45x + 28y = 1$. En déduire son ensemble de solution.

c) Déterminer le couple $(x\ ;\ y)$ solution de l'équation (E).

2) Déterminer les couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers naturels dont le $PPCM\ m$ et le $PGCD\ d$ vérifient : $8m - 105d = 30$.

Exercice 3

1) Soit (E) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$. Démontrer que (E) est une ellipse dont on déterminera les éléments caractéristiques.
2) Déterminer une équation de (E'), image de (E) par la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
3) Déterminer la nature de (E'), ses axes et ses sommets. Tracer (E) *et* (E') dans le même graphique.

Problème

Partie A

1) Etudier le sens de variation de la fonction h_1 définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ $par :$ $h_1(x) = x - lnx$. Montrer que sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$, on a : $h_1(x) > 0$.

2) On définit sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ la fonction f_1 $par :$ $f_1(x) = \frac{x}{x-lnx}$.

a) Etudier le sens de variation de la fonction f_1.

b) Etudier les limites de f_1 aux bornes de l'intervalle $]0;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variations de f_1.

3) On considère la fonction φ_1 définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par : $\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_1(x) = f_1(x), pour\ x \in]0;\ +\infty[\end{cases}$

a) Montrer que φ_1 prolonge f_1 par continuité en 0.

b) Etudier la dérivabilité de φ_1 en 0. En donner une interprétation graphique.

c) Tracer la représentation graphique C_1 de φ_1.

Partie B : Dans cette partie n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Etudier le sens de variation de la fonction h_n définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par : $h_n(x) = x^n - lnx$. En déduire que pour tout nombre réel $x \in]0;\ +\infty[$, $h_n(x) > 0$.

2) On définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ la fonction f_n $par :$ $f_n(x) = \frac{x}{x^n-lnx}$.

a) On définit sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ la fonction g_n $par :$ $g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - lnx$.

i) Montrer que g_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$.

ii) Montrer l'existence d'un unique réel α_n de $]0;\ +\infty[$ tel que $g_n(\alpha_n) = 0$

iii) Comparer les réels α_n et 1. Quel est la valeur de α_2 ?

b) Démontrer que pour tout $x \in]0;\ +\infty[$, $on\ a :$ $f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{(x^n-lnx)^2}$.

c) En déduire le sens de variation de f_n.

d) Etudier les limites de f_n aux bornes de l'intervalle $]0;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f_n. (On ne cherchera pas à calculer la valeur de l'extremum).

e) Montrer que la fonction f_n admet un prolongement par continuité en 0, noté φ_n. Etudier la dérivabilité de φ_n en 0. En donner une interprétation graphique.

f) Préciser la valeur de $f_2(\alpha_2)$, puis tracer la représentation graphique C_2 de f_2 dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Sujet n°9

Exercice 1

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher dont 5 rouges et 3 noires.
On tire au hasard une boule du sac ?. On note sa couleur, on la remet dans le sac puis on tire au hasard une seconde boule et on note sa couleur.
Calculer la probabilité de chacun des événements :

1) A : « les deux boules tirées sont des couleurs différentes »
2) B : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

Exercice 2

On considère les nombres complexes : $z_1 = (\sqrt{3}+1)(1+i)$ et $z_2 = (\sqrt{3}-1)(-1+i)$

1) Calculer le module et l'argument des nombres complexes z_1 et z_2.
2) On pose $u = z_1 z_2$ et $v = \frac{z_1}{z_2}$. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes $u\ et\ v$.
3) On pose : $w = z_1 + z_2$ et $t = z_1 - z_2$. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes w et t.

En déduire le module et l'argument du nombre complexe : $x = {z_1}^2 - {z_2}^2$.

Exercice 3

1) a) Soit f l'application de $]1;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f.

b) Soit g l'application de $]1;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$. Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, $\forall\, x \in\ ]1;\ +\infty[$, on ait : $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.

Trouver une primitive G de g.

2) a) Soit α un nombre réel supérieur à 2. En utilisant les résultats précédents calculer : $I(\alpha) = \int_2^\alpha \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx$.

b) Déterminer $\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$. Calculer une valeur approchée de cette limite.

Problème

A) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}},\ si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

B) Soit $G: x \mapsto \frac{x^3}{x^2-x-2}$

1) Définir son domaine de définition, sa dérivée et son sens de variations.

2) Faire une étude aux bornes du domaine de définition.

3) Tracer sa courbe représentative.

Sujet n°10

Exercice 1

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie de P.

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) : $\frac{z-2}{z-1} = z$. On donnera le module et un argument de chaque solution.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (2) : $\frac{z-2}{z-1} = i$. On donnera la solution sous forme algébrique.

3) Soit M, A et B les points d'affixes z, 1 et 2. On suppose que M est distinct des points A et B

a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$

b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2)

4) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$: $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$ a pour partie réelle $\frac{3}{2}$, où n est un entier naturel non nul donné.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (3) : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

<u>Partie A</u> : Etude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$

1) Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$

2) a) Vérifier que la courbe (C_1) admet deux asymptotes dont on précisera des équations

b) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que pour tout réel x, on a : $0 < f_1(x) < 4$.

3) a) Démontrer que le point $I_1(ln7, 2)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_1).

b) Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) au point I_1.

c) Tracer (T_1).

4) a) Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la valeur moyenne de f_1 sur $[0; ln7]$.

Partie B : Etude de certaines propriétés de la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe (C_n).
2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe (C_n) et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse. On note I_n ce point.
   b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe (C_n) au point I_n.
   c) Tracer les droites (T_2) et (T_3).
3) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \frac{n}{ln7}\int_0^{\frac{ln7}{n}} f_n(x)$
Montrer que la suite (u_n) est constante.

Sujet n°11

Exercice 1

1) Calculer : $(2 - \sqrt{3} - i)^2$
2) On considère l'équation d'inconnue z : $2z^2 - (2 + \sqrt{3} - 3i)z - 1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3}) = 0$
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation.

On désigne par z_0 et z_1 les solutions de cette équation z_0 étant celle qui la plus petite partie réelle.

b) Ecrire sous forme algébrique ${z_0}^{2016}$

3) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1$, $z_B = 1 - i$ et $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Placer les points A, B et C

Exercice 2

Une urne contient 7 boules noires et n boules rouges toutes indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer successivement avec remise deux (2) boules de l'urne. Si les boules sont de même couleur, on gagne 25 frs sinon on perd 25 frs.

1) Dans cette partie, on prendra $n = 5$.
a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.
b) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.
2) On suppose désormais $n \geq 5$. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le gain algébrique du joueur.
a) Calculer $P(X = -25)$ et $P(X = 25)$
b) En déduire que l'espérance mathématique de X est : $E(X) = 25\frac{(n-7)^2}{(n+7)^2}$.
c) Pour quelle valeur de n a-t-on $E(X) = 0$?

Exercice 3

I) Au point M d'affixe $z = x + iy$, on fait correspondre le point M' d'affixe $z' = z^2 + 2z$
1) Calculer les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M.
2) Montrer que l'ensemble H des points M du plan, tel que z' soit imaginaire pur, est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes.

II) Soit Γ la conique d'équation : $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$
1) Montrer que Γ est une conique dont on précisera le centre, les axes de symétries, les foyers, les directrices, les asymptotes et l'excentricité.
2) Soit D la droite d'équation : $y - 3 = 0$. Soit P le point des coordonnées $(-4; 6)$. Quel est l'ensemble des points M tels que : $d(M, P) = 2d(M, D)$?

Problème

I) On considère la onction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, \; si\; x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 lnx, si\; x \geq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour $x < 0$, f est dérivable et calculer sa dérivée sur $]-\infty; 0[$. Préciser son signe.
   b) Montrer que, pour $x > 0$, f est dérivable et calculer sa dérivée sur $]0; +\infty[$. Préciser son signe.

c) Calculer : $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$ (on admettra que : $\lim_{X\to -\infty} X^3e^X = 0$). En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

d) La fonction f est elle continue sur $\mathbb{R}$?

2) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) Dresser le tableau de variation de f.

II) A) Soit g la fonction définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $g(x) = 3 + 2\ln(x-1) - \ln(x+1)$

1) Calculer les limites de g aux bornes de $]1;\ +\infty[$

2) Etudier les variations de g.

3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm, tracer la représentative (C) de g.

B) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = g(u_n),\ \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) En utilisant la courbe tracée précédemment, représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes u_0, u_1 et u_2 de la suite (u_n).

2) a) Vérifier que $g(3) = 3$. Montrer que, si $x \in [3;5]$ alors $g(x) \in [3;5]$.

b) Montrer que, $\forall\, x \in\ [3;5]$, on a : $\frac{1}{4} \le g'(x) \le \frac{5}{6}$. On pourra encadrer $\frac{1}{x+1}$ et $\frac{2}{x-1}$

c) Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [3;5]$.

d) Montrer que, $\forall\, x \in\ [3;5], |g(x) - 3| \le \frac{5}{6}|x-3|$

3) a) Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - 3| \le \left(\frac{5}{6}\right)^n |u_0 - 3|$

b) Qu'en déduit on pour la convergence de la suite (u_n) ?

c) Déterminer un entier naturel n_0 tel que : $|u_{n_0} - 3| \le 10^{-3}$

Sujet n°12

Exercice 1

On considère le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^3 - 6z^2 + (12-i)z - 9 + 3i$.

1) Démontrer qu'il existe un réel α tel que : $P(\alpha) = 0$.
2) Déterminer deux complexes a et b tels que : $P(z) = (z-\alpha)(z^2 + az + b)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
4) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = 3;\ z_B = 2 + i$ et $z_C = 1 - i$.

a) Démontrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre C, qui transforme A en B .

b) Déterminer le centre et le rapport de S.

c) Donner l'expression analytique de S.

d) Soit (D) la droite d'équation $y = x$. Donner une équation de la droite (D'), image de la droite (D) par S.

Exercice 2

1) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \ge 1$ le nombre $N = 22^{9n+2} - 31^{3n-1}$ est divisible par 9.

2) a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le $PGCD$ de 21590 et 9525.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $21590x - 9525y = 1270$.

3) Dans un système de numération de base n, on considère les nombres : $A = \overline{211}$; $B = \overline{312}$ et $C = \overline{133032}$

a) Sachant que $C = AB$, montrer que n divise 8. En déduire la valeur de n.

b) Ecrire A, B et C dans le système décimal.

Problème

Partie A : On considère la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$

1) calculer la dérivée de g' de g. Montrer que pour tout $x \in\ ]0;\ +\infty[, g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.

2) Etudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.
3) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variation de g.
4) En déduire qu'il existe un unique nombre $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$
5) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = xln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right), si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 5 cm.

1) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = g(x)$. En déduire le sens de variation de f.
2) Calculer la limite de $xf(x)$ en $+\infty$. En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$
3) a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} xln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Préciser la tangente à la courbe (C) en 0.
4) a) Prouver que, pour tout $x \in [0,5; \alpha]$, $0 \le f'(x) \le f'(0,5)$.
   b) En déduire que pour tout $x \in [0,5; \alpha]$, $0 \le f(\alpha) - f(0,5) \le (\alpha - 0,5)f'(0,5)$, puis que : $0 \le f(\alpha) - f(0,5) \le \frac{1}{10}f'(0,5)$
   c) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.
5) Dresser le tableau de variation de f.
6) Tracer la courbe (C) de f.

Sujet n°13

Exercice 1

On considère le polynôme complexe P définie par : $P(z) = z^3 + (-9 + 11i)z^2 + (2 - 63i)z + 24 + 82i$

1) Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que : $P(\alpha) = 0$
2) Déterminer deux complexes a et b tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - \alpha)(z^2 + az + b)$
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
4) On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2$, $z_B = 4 - 3i$ et $z_C = 3 - 8i$
a) Démontrer qu'il existe une unique similitude directe S qui transforme A en B et B en C.
b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
c) Donner l'expression analytique de S.

Exercice 2

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	α	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{7}$

1) Déterminer la valeur de α.
2) Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X.
3) Définir et représenter la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Exercice 3

On considère la suite des nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Exprimer v_n en fonction de n.
3) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
a) Démontrer que $u_{n+1} = 1 + S_n$
b) Exprimer S_n en fonction de n, puis en déduire u_n en fonction de n.
c) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que : $|u_p - 3| \le 10^{-4}$.

Problème

A) Soit la fonction définie par : $f(0) = 1$ et $f(x) = 1 - xlnx$ pour $x > 0$.

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 5 cm.

1) Etudier la dérivabilité de f en 0. Qu'en déduire pour la courbe (C_f)?

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique notée a. Donner un encadrement de a d'amplitude 10^{-1}.

4) Tracer la courbe (C_f).

B) 1) Soit $X_0 > \frac{1}{e}$ et M_0 le point de (C_f) d'abscisse X_0.

a) Ecrire une équation de la tangente (T_0) à (C_f) en M_0.

b) Montrer que le point M_1 intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses a pour abscisse $X_1 = \frac{1+X_0}{1+lnX_0}$.

2) Soit g la fonction définie sur $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+lnx}$.

a) Démontrer que sur $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ l'équation $g(x) = x$ équivaut à $f(x) = 0$. En déduire que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution.

b) Soit $I = \left[\frac{3}{2};2\right]$. Etudier les variations de g sur I.

c) Démontrer que pour tout x de I alors $g(x) \in I$.

d) Démontrer que : $\forall x \in I, |g'(x)| \leq 0,15$.

3) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$

a) Démontrer par recurrence que $u_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leq 0,15|u_n - a|$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq (0,15)^n \times \frac{1}{2}$ et que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

Sujet n°14

Exercice 1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation $(E) : z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0$, où d est un nombre complexe de module 3.

1) Vérifier que $2i$ est solution de l'équation (E). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Dans le plan complexe on considère les points A, B, M et N d'affixes respectives $2i, -i, -i + d$ et $-i - d$.

a) Calculer MN et déterminer le milieu du segment $[MN]$.

b) En déduire que lorsque d varie dans $\mathbb{C}$ les points M et N appartiennent à un ensemble (C) fixe que l'on précisera.

c) Dans le cas où AMN est un triangle. Montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.

d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

Exercice 2

Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'orientation positive.

Soit ξ l'ensemble des courbes (Γ_α) d'équation : $(\alpha^2 - 4)x^2 - 4y^2 - 4(\alpha^2 - 4) = 0$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Comparer (Γ_α) et $(\Gamma_{-\alpha})$.

2) Etudier suivant les valeurs de α la nature de (Γ_α) et en préciser chaque fois les éléments fondamentaux (centre, sommets, foyers et asymptotes s'il ya lieu).

3) Dessiner les courbes (Γ_0) et $(\Gamma_{2\sqrt{2}})$.

Exercice 3

1) Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1; 46]$. On considère l'équation $(E) : 23x + 47y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ solution de (E).

c) En déduire qu'il existe un unique entier $x \in A$ tel que : $23x \equiv 1[47]$.

2) Soit n un entier naturel. Démontrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, on a : $2^{3k} \equiv 1[7]$. Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2016} par 7 ?

3) Soient a et b deux entiers naturels inferieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$. On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.

a) Vérifier que $10^3 \equiv -1[7]$.

b) En déduire tous les nombres N qui sont divisibles par 7.

Problème

m étant un nombre réel, on appelle f_m l'application de $]0;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui, à x, associe :
$f_m(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}lnx$ et (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ d'unité 5 cm.

A) Etude de la fonction f_m.

1) Calculer, suivant les valeurs de m, $\lim_{x\to+\infty} f_m(x)$.

2) Calculer $f'_m(x)$ et donner, suivant les valeurs de m, les différents tableaux de variations possibles.

3) a) Montrer que, par un point $M(x_0;\ y_0)$ vérifiant $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$, il passe une et une seule courbe (C_m).

b) Montrer qu'il existe un point unique A appartenant à toutes les courbes (C_m).

B) Dans cette partie, on prend $m = 4$. On considère la fonction f_4 telle que : $f_4(x) = \frac{x^2-1}{4} - 2lnx$.

1) a) Montrer que l'équation $f_4(x) = 0$ possede deux solutions et deux seulement dont l'une est $x_0 \in [3; 4]$ (on ne demande pas de calculer x_0).

b) Montrer que $x_0 = \sqrt{1 + 8lnx_0}$

2) Soit $\varphi :\ [3;\ +\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \varphi(x) = \sqrt{1 + 8lnx}$$

Montrer que $\varphi(x) \geq 3$ et que $0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{4}{9}$

2) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n), \forall\, n \in \mathbb{N}$

a) Montrer par recurrence que $u_n \geq 3$

b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_n - x_0|$, puis que $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

c) Déterminer le plus petit entier p tel que $|u_p - x_0| \leq 10^{-2}$. Calculer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Sujet n°15

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$. (unité graphique 2 cm)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante : $4z^2 - (8 - 6i)z + 1 - 5i = 0$.

2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; $z_B = \frac{3}{2} - i$; $z_C = i$ et $z_D = 1 + \frac{1}{2}i$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère.

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe : $Z = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABD.

3) Soit f l'application du plan d'écriture complexe : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1 - i$

Donner la nature et les éléments géométriques de f.

4) On considère les suites des nombres complexes (z_n) et (a_n) définies respectivement par :

$$\begin{cases} z_0 = 2 + i \\ z_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_n + 1 - i;\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad et\ a_n = z_n - 2, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

a) Démontrer que (a_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer a_n en fonction de n. Mettre a_n sous forme exponentielle. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} + 2.$

c) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels P_n, le point image de z_n est sur l'axe réel.

Exercice 2

Une boite contient 6 boules vertes et n boules blanches toutes indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer successivement sans remise deux (2) boules de la boite. Si les deux (2) boules sont de même couleur, le joueur gagne 100 frs et si les deux (2) boules sont de couleurs différentes, le joueur perd 100 frs.

1) Dans cette question, on suppose $n = 3$.

a) Calculer la probabilité d'obtenir :

i) Deux boules de même couleur ;

ii) Deux boules de couleurs différentes.

b) Sachant que la première boule tirée est verte, quelle est la probabilité pur que la deuxième tirée soit verte ?

2) Dans cette question, l'entier n est quelconque et supérieur à 3. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage successif sans remise de deux boules, associe le gain algébrique en francs du joueur.

a) Exprimer, en fonction de n, les probabilités des événements : $(X = -100)$ et $(X = 100)$.

b) Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(X) = 100\frac{n^3-13n+30}{(n+6)(n+5)}$

c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $E(X) < 0$?

Problème

Partie I :

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(1-x) - 1$.

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

2) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x-1} + 2, & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

On admet que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) Déterminer les asymptotes de (C) et étudier la position de (C) par rapport à son asymptote oblique.

3) Tracer la courbe (C).

Partie II :

1) Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $h(x) = x + \ln(x^2 - 1)$.

a) Etudier les variations de h et déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $l \in]1; +\infty[$ et donner un encadrement de l à 0,1 près.

2) Soit $u : x \longmapsto \sqrt{1 + e^{-x}}$ définie sur $]0; +\infty[$.

Montrer que les équations $h(x) = 0$ et $u(x) = x$ sont équivalentes sur $]1; +\infty[$.

3) Soit $I = [1; 2]$.

a) Montrer que, $\forall x \in I, u(x) \in I$.

b) Montrer que, $\forall x \in I,\ 0 \leq |u'(x)| \leq \frac{1}{5}$

c) En déduire que, $\forall x \in I,\ |u(x) - l| \leq \frac{1}{5}|x - l|$.

4) On définit la suite (x_n) par : $x_0 = 1,1$ et $x_{n+1} = u(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

a) On suppose que $x_n \in I$, montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - l| \leq \frac{1}{5}|x_n - l|$, puis que $|x_n - l| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n \times 0,1$.

b) En déduire que cette suite est convergente et déterminer sa limite.

Sujet n°16

Exercice 1

Soit P, plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Soit (h) la conique d'équation : $y^2 - x^2 = 16$.

Préciser la nature de (h) et préciser ses éléments caractéristiques. On notera E le sommet de (h) d'ordonnée positive.

Dessiner (h).

2) Pour tout point $M(x,y)$, soit M' et M'' les points de coordonnées (x',y'), (x'',y'') :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \\ y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases}$$

a) Démontrer que R, application de P dans P qui, à tout point M associe M', est une rotation de P. Préciser le centre et l'angle.

b) Démontrer que S, application de P dans P qui, à tout point M associe M'', est une Symétrie orthogonale de P. En préciser la base, D, par une équation.

c) Vérifier que les images de E par R et S coïncident.

Soit E' cette image. Placer sur le repère précédent le point E' et la droite D.

d) Démontrer que (h) et D se coupent en deux points, I et J. En calculer les coordonnées ; I est le point d'abscisse strictement positive.

3) a) Vérifier que les coordonnées de M, M', M'', satisfont : $x'y' = x''y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

En déduire que les images de (h) par R et S coïncident. Soit (H) cette image. Préciser une équation de (H).

b) Expliquer pourquoi I et J sont sur (H).

c) Construire (H) sur le même graphique que (h).

Exercice 2

Soit P un plan. Si M et N sont deux points du plan P, on note MN leur distance.

1) Soit A, B, C trois points de P tels que : $AB = AC = 5$ et $BC = 6$.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) On désigne par G le barycentre de $(A,2), (B,3), (C,3)$. Construire le point G et calculer la distance GA.

3) On considère l'application f de P dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M de P associe le réel :

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}.$$

Démontrer que l'on a, pour tout point M de P : $f(M) = f(G) + 4MG^2$.

Calculer numériquement $f(A)$ et $f(G)$.

4) Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que $f(M) = f(A)$.

Exercice 3

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

$X = x_i$	3	5	7	9	11
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$a - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$

a) Calculer la valeur de α.

b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

Problème

Partie I : Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2lnx}{x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

1) Etude de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par: $g(x) = x^2 + 2 - 2lnx$.

a) Etudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

b) En déduire le sens de variation de $g(x)$, pour tout x de $]0,+\infty[$.

2) Etude de la fonction f.
a) Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.
b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
c) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à Δ.
d) Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente T parallèle à Δ.
e) Tracer (C), Δ et T.
3) Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limité par Δ, la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 et que $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Partie II : On désigne par h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.
1) Montrer que x_0 est solution de l'équation $h(x) = x$.
2) On note $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Montrer que pour tout $x \in I$, $h(x) \in I$.
3) a) Calculer la dérivée h' de h et la dérivée h'' de h.
b) Démontrer que h' est décroissante sur I.
c) En déduire que, pour tout x de I, on a : $-e^{\frac{-1}{2}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$
4) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$
a) Montrer par recurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_n - x_0|$
c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}}$.
5) a) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait : $\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}} \leq 10^{-2}$.
b) Montrer que u_{n_0} est une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près. Quelle valeur de u_{n_0} obtient on avec la calculatrice ?

Sujet n°17

Exercice 1

Une urne A contient 3 boules noires et 2 boules blanches. Une urne B contient 2 boules noires et 2 boules blanches.
On suppose que dans l'urne A les cinq boules ont la même probabilité d'être tirées ; même hypothèse pour les quatre boules de l'urne B.
1) On tire sans remise, deux boules de A et une boule de B.
a) quelle est la probabilité pour que les trois boules obtenues soient noires ?
b) Quelle est la probabilité pour que les trois boules soient de même couleur ?
2) On considère la variable aléatoire X qui à chaque épreuve constituée d'un tirage de deux boules de A et d'une boule de B, associe le nombre de boule blanche figurant dans ce tirage.
a) Déterminer la loi de probabilité de X (c'est-à-dire déterminer les probabilités d'obtenir respectivement 0, 1, 2, 3 boules blanches).
b) Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2

Dans E, plan euclidien, A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral, tels que :
$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = d$, d est un réel positif non nul.
1) Déterminer l'ensemble des réels a tels que les points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, 1, 1 admettent un barycentre G_a. Quel est l'ensemble des points G_a obtenus ?
2) On prend $a = 1$; Déterminer le point G_1 correspondant. On pose $f_1(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que : $f_1(M) = 2d^2$.

3) On prend $a=-2$. Montrer que le vecteur $\vec{V}(M)=-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant indépendant du point M que l'on précisera. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$f_1(M)=-2MA^2+MB^2+MC^2$ soit égal à zéro.

Exercice 3

On considère le polynôme P défini par : $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(z)=(z^2+3)(az^2+bz+c)$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.
3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A=i\sqrt{3}$, $z_B=-i\sqrt{3}$, $z_C=3+2i\sqrt{3}$ et $z_D=\overline{z_C}$

a) Montrer que ces 4 points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Placer les points A, B, C et D.

4) On note E le symétrique de D par rapport au point O. Déterminer la nature du triangle BEC.

Problème

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x^2e^{-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un plan P rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique 1 cm sur (Ox) et 10 cm sur (Oy).

1) a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra noter que $f(x)=2\left[\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right]^2$)

2) a . Expliciter la dérivée f' de f et étudier son signe.

b. Etudier les variations de f.

c. Construire la courbe (C) de f dans le plan.

3) On considère la fonction F définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

a. Utiliser une intégration par parties pour calculer : $I(x)=\int_0^x te^{-t}dt$.

b. Montrer en utilisant a. et une nouvelle intégration par parties que : $F(x)=1-e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$.

c. Montrer que F est une fonction strictement croissante telle que : $0\le F(x)\le 1$ pour tout x.

d. Montrer en utilisant 1) b. que F admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera. En déduire que l'équation $F(x)=c$, avec $0\le c\le 1$ admet une solution et une seule dans $[0;\ +\infty[$.

Partie B : Dans cette partie, on se propose de résoudre l'équation $F(x)=0,95$. Pour cela, on introduit la fonction auxiliaire $g(x)=\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+ln20$.

1) Montrer que l'unique réel α tel que $F(\alpha)=0,95$ est aussi l'unique solution de l'équation $g(x)=x$.
2) Montrer que g est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que l'image $g([5;10])$ est incluse dans $[5;10]$.
3) a. Justifier que $|g'(x)|\le\frac{1}{3}$ pour tout $x\in[5;10]$.

b. En déduire que : $|g(v)-g(u)|\le\frac{1}{3}|v-u|$ pour tout $x\in[5;10]$.

c. Montrer que $\alpha\in[5;10]$.

4) On considère la suite (u_n) des nombres de l'intervalle $[5;10]$ définie par : $u_0=5$ et $u_{n+1}=g(u_n)$.

a. Montrer que : $|u_n-\alpha|\le\frac{5}{3^n}$ pour tout entier n.

b. Déterminer n_0 tel que : $|u_{n_0}-\alpha|\le 10^{-2}$.

c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α

SUJET N°18

Exercice 1

On donne les deux nombres complexes : $z_1=-1-i$ et $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) Ecrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.
2) a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b) En déduire le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

3) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $cos\frac{11\pi}{12}$ et $sin\frac{11\pi}{12}$.

4) Quelle est la plus petite valeur strictement positive de l'entier n telle que $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ soit réel ?

Exercice 2

Soit la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{2}x + cosx$ définie dans $\mathbb{R}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1) Etudier les variations de la fonction f sur $[0;\ \pi]$.
2) Déterminer une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
3) Montrer que, pour tout x de $[0;\ \pi]$, on a : $f'(x) \geq -\frac{3}{2}$.
4) Montrer que, pour tout x de $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, on a : $f(x) \geq -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et, pour tout x de $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $f(x) \leq -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
5) En déduire les positions relatives de (C) et T, puis tracer T et (C) sur $[0;\ \pi]$.

Exercice 3

I) ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AC = 2AB$, on pose $AB = d\ (d > 0)$.

a) Soient G_1 et G_2 les barycentres respectifs des systèmes des points pondérés $\{(A,1); (B,2); (C,1)\}$ et $\{(A,5); (B,2); (C,-1)\}$. Construire G_1 et G_2, puis calculer G_1G_2 en fonction de d.

b) Déterminer, suivant les valeurs de k, l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + 2\mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2 = 4\mathrm{k}$. construire cet ensemble pour $k = 1,5d^2$.

II) Soit ABC un triangle quelconque et G son centre de gravité. On pose : $AB = c; AC = b$ et $BC = a$

a) Démontrer que : $GA^2 = \frac{2\mathrm{b}^2+2\mathrm{c}^2-\mathrm{a}^2}{9}$. En déduire la valeur de : $(b^2 - \mathrm{c}^2)\mathrm{GA}^2 + (\mathrm{c}^2 - \mathrm{a}^2)\mathrm{GB}^2 + (\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)\mathrm{GC}^2$.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $(b^2 - \mathrm{c}^2)\mathrm{MA}^2 + (\mathrm{c}^2 - \mathrm{a}^2)\mathrm{MB}^2 + (\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)\mathrm{MC}^2 = 0$

Problème

m étant un nombre réel non nul, on considère la famille des fonctions définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2-x+m}{x}$. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m ; par D_1la droite d'équation $y = x - 1$; $par\ D_2$ la droite d'équation $y == -1$ et par D_3 la droite d'équation $y = 2x - 1$.

1) Selon les valeurs de m, étudier les variations de f_m et dresser dans chaque cas un tableau de variation.
2) Montrer que toutes les courbes (C_m) admettent le point $I(0\ ;\ -1)$ comme centre de symétrie.
3) Montrer que toutes les courbes (C_m) admettent l'axe des ordonnées et la droite D_1 comme asymptotes.
4) On se place dans le cas $m > 0$. Soit $A_m et\ B_m$les points de (C_m) où la tangente est horizontale. Déterminer leurs coordonnées. Montrer $A_m et\ B_m$ appartiennent à la droite D_3.
5) On se place dans le cas $m < 0$. Montrer que la droite D_2 coupe (C_m) en deux points $E_m\ et\ F_m$ symétriques par rapport à I et qu' en chacun de ces points , la tangente à (C_m) est parallèle à D_3.
6) Représenter les courbes $(C_4)\ et\ (C_{-4})$ correspondant à $m = 4\ et\ m = -4$.
7) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x - 1 + \frac{4}{|x|}$. On désigne par (C') sa courbe

Comment peut on déduire la courbe (C') de $(C_4)\ et\ (C_{-4})$?

SUJET N°19

Exercice 1

On considère le nombre complexe : $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$.

1) Ecrire z^2 sous forme algébrique.

2) Déterminer le module et un argument de z^2. En déduire le module et un argument de z.

3) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=\sqrt{2}$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 2

On considère le complexe z tel que : $z=1+e^{i\theta}$, où θ désigne un réel appartenant à l'intervalle $]-\pi;\ \pi[$.

1) Déterminer le module r et un argument φ de z.

2) Calculer z^4 à partir de l'écriture : a) $z=1+e^{i\theta}$; b) $z=re^{i\varphi}$.

3) Etablir la relation : $\cos^4\frac{\theta}{2}=\frac{1}{8}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{3}{8}$.

Exercice 3

Dans le plan euclidien (P), associé au plan vectoriel $(\overrightarrow{P})$, soit le triangle rectangle ABC d'hypothénus BC de longueur $2a$. Soit f l'application :

$f:(P)\to(\overrightarrow{P})$

$M\mapsto f(M)=4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+m\overrightarrow{MC}, m\in\mathbb{R}$

1) Déterminer m pour que $f(M)$ soit un vecteur constant $\vec{v}_0$ et calculer $\vec{v}_0$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) On prend $m=-1$

Démonter que le barycentre G du système : $\{(A,4);(B,-1);(C,-1)\}$ est le symétrique par rapport à A du milieu I du segment $[BC]$.

3) Déterminer l'ensemble : $C=\{M\in(P)/4MA^2-MB^2-MC^2=-4a^2\}$ (on remarquera que $A\in C$).

Problème

On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x)=x\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) La fonction f est elle continue en 0 ? Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le resultat.

3) On note f' la fonction dérivée de f sur $]0;\ +\infty[$.

a) Déterminer $f'(x)$, puis $f''(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de f', puis la limite de f' en $+\infty$. En déduire le signe de f'.

c) Indiquer le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.

4) On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Tracer la courbe (C) en indiquant le point A de (C) d'abscisse 3.

5) On désigne par g la fonction définie sur $[1;\ +\infty[$ par : $g(x)=\frac{3x}{x+3}$ et on appelle (Γ) sa courbe représentative.

a) Dresser le tableau de variation de g sur $[1;\ +\infty[$.

b) Vérifier que, $\forall\, x\in[1;\ +\infty[$, on a : $f(x)-g(x)=xf'(x)$.

c) Déterminer le signe de $f(x)-g(x)$ et la limite de $f-g$ en $+\infty$

Interpréter graphiquement les deux résultats.

d) Tracer la courbe (Γ) dans le meme repère que (C), en indiquant le point B de (Γ) d'abscisse 3.

6) Soit λ un élément de $[1;\ +\infty[$.

a) Donner une équation de la tangente (T_λ) à (C) au point d'abscisse λ.

b) Montrer que (T_λ) rencontre l'axe (Oy) au point N d'ordonnée $g(\lambda)$.

SUJET N°20

Exercice 1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2, z_B=1-i$ et $z_C=1+i$.

1) Placer les points A, B et C sur le repère.

2) Calculer $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.
3) On appelle r la rotation de centre A qui transforme B en C.
a) Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe du point $D = r(C)$.
b) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C'), l'image par r, du cercle (C) de centre $I(1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
4) On appelle h l'homothétie de centre B et de rapport -3.
a) Donner l'écriture complexe de h.
b) Donner une équation de la droite (D'), image de la droite (D) d'équation : $x - y + 1 = 0$, par l'homothétie h.(on utilisera uniquement l'expression analytique de h)

Exercice 2

I) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = ln\frac{2n-1}{2n+1}$.
1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3) On pose : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
a) Exprimer S_n en fonction de n.
b) Déterminer la limite de (S_n) en $+\infty$.

II) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = e^{1-\frac{n}{2}}$
1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Montrer que la suite $w_n = lnv_n$ est une suite arithmétique. Quelle est sa raison ?
3) On pose : $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$.
a) Exprimer T_n et P_n en fonction de n.
b) Déterminer le comportement à l'infini de T_n et P_n.

Exercice 3

1) On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers N tels que : $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$
a) Vérifier que 239 est solution de ce système.
b) Soit N un entier relatif solution de ce système. Démontrer que N peut s'écrire sous la forme : $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation : $17x - 13y = 4$.
c) Résoudre l'équation : $17x - 13y = 4$ où x et y sont deux entiers relatifs.
d) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que : $N = 18 + 221k$.
e) Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18[221]$ et $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$

Problème

Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2 - x - 4\frac{lnx}{x}$ et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
1) Soit g la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 - 4 + 4lnx$.
a) Etudier le sens de variation de g et déterminer son maximum sur $]0;\ +\infty[$.
b) En déduire le signe de g sur $]0;\ +\infty[$.
2) Calculer les limites de f aux bornes de $]0;\ +\infty[$.
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0.Vérifier que : $1 \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$.
5) Monter que la droite Δ d'équation $y = 2 - x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à Δ.
6) Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangnete T parallèle à Δ.
7) Tracer les droites Δ et T, puis la courbe (C).
8) Soit h la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $h(x) = ln^2x$.
a) Calculer $h'(x)$.

b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par (C), Δ et les droites d'équations $x = 1, x = e$.

SUJET N°21

Exercice 1

On considère le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^3 + (1 - 5i)z^2 + (-28 - 7i)z + 18 - 84i$

1) Démontrer qu'il existe un réel β tel que : $P(i\beta) = 0$
2) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - i\beta)(az^2 + bz + c)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.
4) On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -2i, z_B = 5 + 4i$ et $z_C = -6 + 3i$.
a) Démontrer qu'il existe une unique similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C .
b) Donner les éléments caractéristiques de S.
c) Donner l'expression analytique de S.
5) Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 3$ et (C) le cercle de centre $I(-1; 3)$ et de rayon $r = 2$.

Donner les équations de la droite (D') et du cercle (C'), images respectives de la droite (D) et du cercle (C) par la similitude plane directe S.

Exercice 2

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n} \end{cases}$

1) Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J).
a) Représenter sur l'axe (Ox) les premiers termes de cette suite.
b) Conjecturer sur le comportement à l'infini de cette suite. (convergence, sens de variation, limite)
2) a) Calculer $u_{n+1} - 3$ en fonction de u_n.
   b) Montrer que, pour tout n, $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|$.
   c) En déduire que, pour tout $n \geq 1, |u_n - 3| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$.
   d) Conclure à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1) On considère l'équation notée $(E) : 3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.
a) Déterminer un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que : $3u + 7v = 1$. En déduire une solution particulière $(x_0; y_0)$ de l'équation (E).
b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solution de (E).
2) On considère l'équation notée $(G) : 3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.
a) Montrer que : $100 \equiv 2[7]$. Monter que si $(x ; y)$ est solution de (G) alors : $3x^2 \equiv 2^n[7]$.
b) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

c) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo7. En déduire que l'équation (G) n'a pas de solution.

Problème

A) On veut étudier la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2 + \frac{lnx}{1+x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

1) Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x - xlnx$.

a) Déterminer les limites de g aux bornes de l'intervalle $]0;\ +\infty[$.
b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
c) Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]0;\ +\infty[$.
d) Déterminer le signe de g sur son ensemble de définition.
e) Montrer que : $3,5 < \beta < 3,6$.

2) Etude de f

a) Etudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
b) Exprimer la fonction f' de f à l'aide de la fonction g et en déduire les variations de f.
c) Construire la courbe (C)

B) On veut la solution α de l'équation $f(x) = x$, où $x \geq 1$.

A cet effet, on introduit la fonction h définie sur $[1;\ +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$

1) Etude de h

a) Etablir que h est décroissante sur $[\beta;\ +\infty[$.
b) Etablir que, pour tout x de $[1;\ \beta]$: $0 \leq f'(x) \leq \frac{g(1)}{4}$
c) En déduire le sens de variation de h sur $[1;\ \beta]$.

2) Etude de l'équation $f(x) = x$

a) Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α et une seule dans $[1;\ +\infty[$.
b) Montrer que : $2 \leq \alpha \leq 3$.
c) Prouver que, pour tout x de $[2; 3]$, $f(x) \in [2; 3]$.
d) Etablir que, pour tout x de $[2; 3]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{g(2)}{18} \leq \frac{1}{10}$
e) Montrer que, pour tout x de $[2; 3]$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{10}|x - \alpha|$

3) Approximation de α

Soit (u_n) la suite d'éléments de $[2; 3]$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Prouver que, pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10}|u_n - \alpha|$, puis que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n$
b) En déduire la limite de la suite (u_n).

SUJET N°22

Exercice 1

1) Soit P le polynôme de la variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 3(1 - 4i)z + 9$

a) Calculer $P(3)$.
b) Montrer que, pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z - 3)(z^2 - 4iz - 3)$.
c) On pose $z = u + 2i$. Ecrire $z^2 - 4iz - 3$ sous la forme $Q(u)$, avec Q un polynôme de degré 2.
d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Q(u) = 0$
e) Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2) On note z_1, z_2 et z_3 les solutions de l'équation telles que : $Imz_1 < Imz_2 < Imz_3$ et on désigne par A, B et C les points images respectives des ses solutions.

a) Placer les points A, B et C dans le plan, ainsi que le point D d'affixe $4 + i\sqrt{3}$.
b) Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$

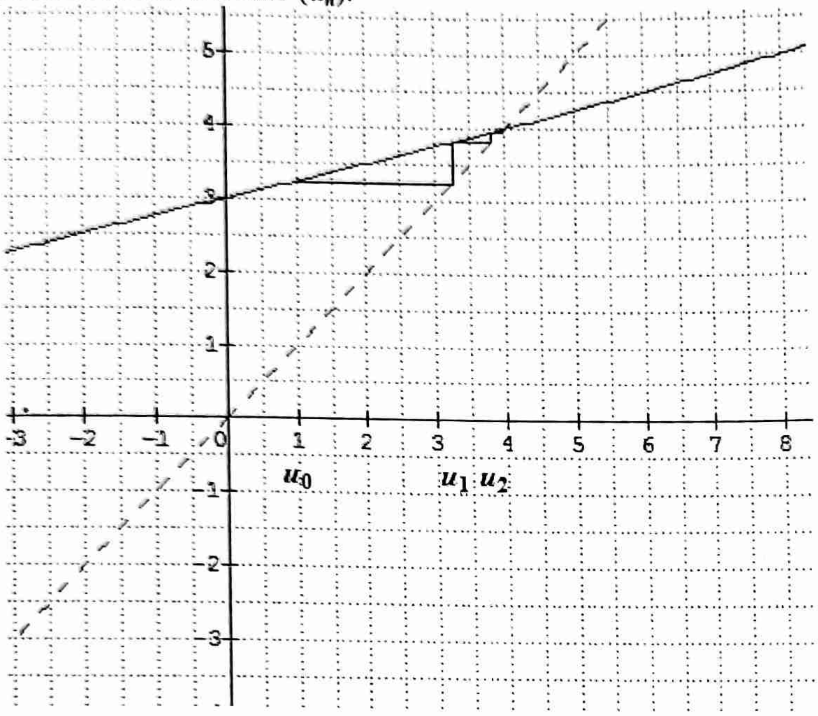
Déterminer les affixes des points B', C' images des points B et C par r.

c) Montrer que le quadrilatère $AB'C'D$ est un parallélogramme.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

Sur la figure, on a représenté les droites Δ et D d'équations respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{4}x + 3$, ainsi que les premiers termes de la suite (u_n).



1) Expliquer la construction de u_1 et u_2.
2) Que suggère le graphique, quant à la variation et la convergence de la suite (u_n) ?
3) a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   b) En déduire les variations de la suite (u_n).
4) On introduit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 4$.
a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
b) Déterminer la limite de (v_n).
c) Exprimer u_n en fonction de v_n, et en déduire le comportement à l'infini de la suite (u_n).
d) Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant : $|u_n - 4| < 10^{-4}$.
5) On pose, pour $n \geq 0, S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
a) Exprimer S_n en fonction de n.
b) La suite S_n est elle convergente ? Et la suite $\frac{S_n}{n}$?

Exercice 3

A) On considère les points $A(3;\ -2;2)$, $B(6;\ -2;\ -1)$, $C(6;1;5)$ et $D(4;0;\ -1)$.
1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC.
2) Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1;\ -2;1)$ est normal au plan (ABC). Déterminer une équation du plan (ABC).
3) Calculer la distance du point D au plan (ABC). Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.
B) Soit (Q) le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.
1) Déterminer la position relative de deux plans (Q) et (ABC).
2) (Q) coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G. Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment $[DA]$.

Problème

Partie A

1) On considère la fonction g définie sur $[1;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$.

a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1;\ +\infty[$ une unique solution notée α.

b) Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2) Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$. On désigne par Γ la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$

a) En utilisant la courbe Γ, construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1;\ +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)e^{1-x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f.

1) Etudier les variations de f et tracer la courbe (C).

2) Pour tout x de $[1;\ +\infty[$, on pose : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

a) Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1;\ +\infty[$.

b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $x \in [1;\ +\infty[$, $F(x) = -xe^{1-x} + 1$.

c) Démontrer que sur $[1;\ +\infty[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$

3) Soit un réel $a \geq 1$. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$.

Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, soit égale à $\frac{1}{2}$.

SUJET N°23

Exercice 1

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l''équation $(E) : z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$

1) a) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E).

b) Déterminer les réels a et b tels que : $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

b) En déduire les solutions de (E) sous formes algébrique et trigonométrique.

3) On considère le point A d'affixe $z_A = i$, le point B d'affixe $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et le point C d'affixe z_C, symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

a) Représenter sur un même graphique les points A, B et C.

b) Déterminer le module et un argument du quotient $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

c) En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BC})$ et la nature du triangle ABC.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 15$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 1,4u_n - 5$

1) On introduit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

b) On pose : $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$. Montrer que : $S_n = u_{n+1} - u_0$.

2) Déduire de ce qui précède une expression de u_n en fonction de n.

3) Déterminer le comportement à l'infini de la suite (u_n).

Exercice 3

I) On considère l'équation $(F) : 57x + 10y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1) Justifier qu'il existe un couple $(x_0;\ y_0)$ solution particulière de (F). en utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer ce couple.

2) En déduire que l'équation (F) est équivalente à l'équation : $57(x - 3) = -10(y + 17)$.

3) Utiliser le théorème de Gauss pour démontrer que l'ensemble des solutions de (F) est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que : $\begin{cases} x = -10k + 3 \\ y = 57k - 17 \end{cases}$ où k est un entier relatif.

4) Indiquer les couples solutions de (F) tels que : $-20 \leq x \leq 0$ et $40 \leq y \leq 100$.

II) On considère l'équation $(G) : 48x - 30y = 6$

Déterminer $d = PGCD(48; 30)$. En divisant les deux membres de l'équation (F) par d, se ramener à une équation du type (F), puis résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation ainsi obtenue.

Problème

Soit f la fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-\frac{1}{3}x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1) Calculer la dérivée f' de f.
2) Etudier le sens de variation de f' et calculer la limite de f' en $+\infty$.
3) En déduire l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha > 0$ tel que : $f(\alpha) = 0$ et montrer que : $0,4 \leq \alpha \leq 0,5$
4) En déduire le signe de f' sur $[0;\ +\infty[$.
5) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

   b) Déterminer le signe de $f(x) - (x^2 - 3)$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat ; on note P la courbe d'équation $y = x^2 - 3$.
6) a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution non nulle β et une seule sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ et montrer que $0,8 \leq \beta \leq 0,9$

   c) Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0;\ +\infty[$.
7) Tracer les courbes (C) et P.
8) a) Calculer l'intégrale : $J(\lambda) = \int_0^\lambda \left(f(x) - (x^2 - 3)\right) dx$ où λ est un réel strictement positif.

   b) Calculer la limite de $J(\lambda)$ en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

SUJET N°24

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 9z - 27$

Factoriser $P(z)$, puis résoudre l'équation $P(z) = 0$.(On pourra rechercher une racine réelle simple)

Quelle est la nature du triangle formé par les points images des solutions de cette équation ?

2) Les points qui sont introduits dans la suite de l''exercice seront placés sur une même figure.

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = 3, z_B = -3i, z_C = 3i$ et $z_D = 2 - \frac{5}{2}i$.

a) Déterminer l'affixe du point E, image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer l'affixe du point I, symétrique du point B par rapport à D puis celle du point J, symétrique du point C par rapport à E.

c) Déterminer l'affixe du point F, milieu du segment $[IJ]$.

d) Préciser, en justifiant, la nature du quadrilatère $ODFE$.

e) On pose : $Z = \frac{z_J - z_A}{z_I - z_A}$. Calculer Z

En interprétant géométriquement le module et un argument de Z, déterminer la nature du triangle AIJ.

Exercice 2

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher dont 5 rouges ; 3 noires et 4 vertes.

1) On tire successivement, avec remise, trois boules de l'urne et on note leur couleur.

a) Quel est le nombre des tirages possibles ?

b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- A : « les trois boules sont de même couleur »
- B : « les trois boules sont de couleurs différentes »
- C : « les trois boules contiennent au moins deux boules rouges »
- D : « les trois boules contiennent au plus une boule noires »
- E : « les trois boules sont composées que de deux couleurs »

2) On tire successivement, sans remise, trois boules de l'urne et on note leur couleur.

a) Quel est le nombre des tirages possibles ?

b) Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, D et E.

3) On tire simultanément trois boules de l'urne et on note leur couleur.

a) Quel est le nombre des tirages possibles ?

b) Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, D et E.

Exercice 3

Soit P un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, et f l'application affine de P dans P dont la partie linéaire est φ, de matrice $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, et qui, au point O, associe le point $A(0;2)$

$f : P \to P$ et $M(x;y) \mapsto M'(x';y')$.

1) Etablir que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \end{cases}$

Exprimer x et y en fonction de x' et de y'.

2) Soit z le nombre complexe affixe de M, et z' l'affixe de M'.

a) Ecrire z' en fonction de z

b) Démontrer que :

- f laisse globalement invariante Δ, droite d'équation : $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$.
- f est la composée de S_Δ, symétrie orthogonale de base Δ, et de $t_{\vec{v}}$, translation de vecteur $\vec{v}$, directeur de Δ.

3) Soit D et Δ les droites d'équations respectives : $x - \sqrt{3}y = 0$ et $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$.

Soit S_D et S_Δ les symétries orthogonales des bases respectives D et Δ.

a) Déterminer $\vec{v}$ et $\vec{w}$, vecteurs respectivement parallèle et orthogonal à D, tels que : $\vec{v} + \vec{w} = 2\vec{\jmath}$.

b) Soit $t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{w}}$ les translations des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Démontrer que : $f = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ S_D$

Vérifier que $t_{\vec{w}} \circ S_D = S_\Delta$ et retrouver les résultats du 2) b).

Problème

1) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier le sens de variation de f.

b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en 0.

c) Donner le tableau de variation de la fonction f et en déduire le signe de f sur $]0;\ +\infty[$.

d) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 5 cm. Tracer la courbe de f

2) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g sur $]0;\ +\infty[$. En déduire le sens de variation de g

b) Vérifier que $g = h \circ k$ avec h et k les fonctions définies sur $]0;\ +\infty[$ par : $h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $k(x) = \frac{1}{x}$

En déduire la limite de g en $+\infty$ et en 0.

c) Donner le tableau de variations de g sur $]0;\ +\infty[$.

3) Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. On note $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine « ensemble des points $M(x,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient : $1 \le x \le \lambda$ et $0 \le y \le f(x)$ »

a) Calculer $A(\lambda)$.

b) Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

SUJET N°25

Exercice 1

Partie A : On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1) Montrer que si le nombre z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de (E).

2) On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$

a) Ecrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.

b) Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).

3) Déduire des questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie B : Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = 1 + i, z_B = -1 + i, z_C = -1 - i$ et $z_D = 1 - i$.
Soit r la rotation de centre C d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$. On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1) Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.

2) a) Démontrer que l'affixe du point E, notée z_E, est égale à $-1 + \sqrt{3}$.

b) Déterminer l'affixe z_F du point F.

c) Démontrer que le quotient : $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

d) Que peut on en déduire pour les points A, E et F ?

Exercice 2

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 frs et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 frs.
On désigne par X la variable aléatoire correspondante au gain algébrique obtenu par le joueur.
Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule.

1) Démontrer que : $P(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

2) Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondantes aux deux autres valeurs prises par la variable aléatoire X.

3) Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut : $E(X) = \frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$.

4) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

Problème

1) Soit la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

a) Vérifier $P(1) = 0$

Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$;

b) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2lnx$

a) Déterminer la dérivée g' de g . Utiliser 1) pour donner le sens de variation de g.

b) Déduire de a) le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3) Soit f la fonction définie sur $f(x) = x + 1 + \frac{x+lnx}{x^2}$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 2 cm

a) Déterminer la limite de f en 0. Démontrer que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+lnx}{x^2} = 0$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Justifier que les droites D et Δ d'équations respectives : $x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à (C).

c) Démontrer que la fonction h telle que $h(x) = x + lnx$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives.

En déduire que Δ coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant : $\alpha + ln\alpha = 0$. Démontrer que : $0,56 \leq \alpha \leq 0,57$.

d) Déterminer la position de (C) par rapport à Δ.

e) Etudier le sens de variation de f. En déduire l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$. Démontrer que : $0,46 < \beta < 0,47$.

f) Construire (C) et Δ.

SUJET N°26

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a) $z^2 - 2z + 5 = 0$
b) $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$
2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i, z_B = 1 + \sqrt{3} + i, z_C = 1 + \sqrt{3} - i$ et $z_D = 1 - 2i$.
a) Placer les points A, B, C et D.
b) Vérifier que : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. Que peut on en déduire pour les droites (AB) et (DB) ?
c) Prouver les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle.
3) On considère l'équation : $z^2 - 2(1 + 2cos\theta)z + 5 + 4cos\theta = 0$
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation.
b) Montrer que les images des solutions appartiennent au cercle Γ.

Exercice 2

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5, toutes indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 2 boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire correspondant à la valeur absolue de la différence des deux numéros tirés.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer $E(X)$ et $\delta(X)$.
2) On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

Soit Y la variable aléatoire correspondant à la valeur absolue de la différence des deux numéros tirés.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
b) Calculer $E(Y)$ et $\delta(Y)$.

Exercice 3

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J). Soit f l'application du plan dans lui-même qui, au point $M(x\ ;\ y)$,associe le point $M'(x'\ ;\ y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$

1) Comparer les distances OM et $O'M'$. En déduire que f est une isométrie. Est elle positive ? Négative ?
2) Déterminer l'ensemble des points invariants (D) de f.
3) Déterminer la nature et les éléments caractéristique de l'isométrie f.

Problème

On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = lnx - \frac{lnx}{x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé direct d'unité 2 cm.

1) Etude d'une fonction auxiliaire
a) Etudier les variations de la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + lnx$
b) Vérifier que l'on a : $g(1) = 0$
c) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.
2) Etude de f
a) Montrer que, pour tout x de $]0;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
b) En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
c) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
d) Dresser le tableau de variation de f.
3) Représentations graphiques
a) Etudier suivant les valeurs de x le signe de la différence $f(x) - lnx$. En déduire la position de (C) par rapport la courbe Γ d'équation $y = lnx$.

b) Déterminer la limite de $f(x) - \ln x$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Tracer les courbes Γ et (C).

4) Calculer l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par les courbes Γ et (C), les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

SUJET N°27

Exercice 1

On désigne par A et B les points d'affixes $z_A = -2$ et $z_B = -1 + i$.

A tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{iz+i+1}{z+2}$

1) Interpréter géométriquement le module et un argument de z'.
2) Déterminer, puis tracer l'ensemble E des points M tels que : $|z'| = 1$.
3) Déterminer, puis tracer l'ensemble F des points M tels que : $|z'| = \frac{1}{2}$.
4) Déterminer, puis tracer l'ensemble G des points M tels que z' soit réel.
5) Déterminer, puis tracer l'ensemble H des points M tels que z' soit imaginaire pur.

Exercice 2

On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{12}$	α	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

1) Déterminer la valeur de α.
2) Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X.
3) Déterminer et représenter la fonction de répartition de X.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

1) Soit (D_1) et (D_2) les droites d'équations respectives : $x + y - 1 = 0$ et $x - y - 1 = 0$. On désigne par S_1 et S_2 les symétries orthogonales d'axes respectifs (D_1) et (D_2).

a) Déterminer l'expression analytique de S_1 et S_2.

b) On pose : $f = S_1 \circ S_2$. Donner l'expression analytique de f puis son écriture complexe. Déterminer la nature et puis le ou les éléments caractéristiques de f. Peut on prévoir le résultat ?

2) On considère l'application g du plan dans lui-même qui, à tout point $M(x\,;\ y)$ associe le point $M'(x'\,;\ y')$ tel que : $\begin{cases} x' = y - 4 \\ y' = x + 4 \end{cases}$

a) Exprimer $z' = x' + iy'$ en fonction de $z = x + iy$

b) L'application g est elle un déplacement ou un antidéplacement ?

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x$. on note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Justifier l'existence d'une droite (D) asymptote à (C).
2) Calculer la dérivée de la fonction f.
3) On pose $\varphi(x) = (1 - x)e^{-x} - \frac{1}{2}$

a) Etudier les variations de la fonction φ.

b) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α. Vérifier que $0 \leq \alpha \leq 0,5$.

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par : $h(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{x}$.

a) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

b) On note I l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Démontrer que, pout tout x de I, $h(x) \in I$.

c) Démonter que, pour tout $x \in I, |h'(x)| \leq 0,83$.

d) Déduire des résultats précédents que, pour tout x de I : $|h(x) - \alpha| \leq 0,83|x - \alpha|$

5) Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,83|u_n - \alpha|$, puis que pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0,83)^n$

b) Déterminer la limite de (u_n).

c) Déterminer un entier p tel que : $|u_p - \alpha| < 10^{-4}$

6) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe (C).

SUJET N°28

Exercice 1

Soit le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^3 - z^2 - 6(-1 + i)z - 10$.

1) Vérifier que $1 + 2i$ est une racine de P.
2) Vérifier que $P(z) = [z^2 + 2iz + 2(1 - 2i)](z - 1 - 2i)$
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
4) Soit les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 - 3i$ et $z_B = 1 + i$.

a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre $\Omega(1,2)$ transformant A en B.

b) Donner l'expression analytique de S.

c) Soit (D) la droite d'équation $y = x + 1$. Déterminer une équation de la droite (D'), image de (D) par S.

Exercice 2

Un lot de vaccin contre le cholera est efficace à 55%, c'est-à-dire que sur 100 personnes vaccinées, 55 seulement sont protégées contre la maladie. On vaccine 10 personnes avec ce produit. Quelle est la probabilité pour que :

a) Aucune des personnes ne soit protégée ?

b) La moitié des personnes soit protégée ?

c) Les 10 personnes soient protégées ?

Exercice 3

1) On considère la conique (E) d'équation : $4x^2 + 9y^2 - 8x - 18y - 23 = 0$.

a) Ecrire une équation réduite de (E).

b) Donner la nature de (E) et ses éléments caractéristiques (sommets, foyers, directrices, excentricité).

c) Représenter graphiquement (E).

2) On considère l'application h définie par : $\begin{cases} x' = -1 + 2x \\ y' = -1 + 2y \end{cases}$

a) Quelle est la nature de h ? Déterminer ses éléments caractéristiques.

b) Quelle est l'image par h de (E) ?

c) Construire la courbe représentative de $h(E)$ dans le même repère que (E).

Problème

On considère la famille des foncions f_m définie par : $f_m(x) = 1 + \ln(1 + mx)$, où m est un réel non nul, ln désigne le logarithme népérien, (C_m) la courbe de f_m et (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) 1) Déterminer l'ensemble de définition de f_m.

2) On pose : $h_m(x) = f_m(x) - x$ et on suppose que $m < 0$. Etudier les variations de h_m. En déduire le nombre des points d'intersection de (C_m) et (Δ).

3) On suppose que $m > 0$.

a) Etudier les variations de h_m et dresser son tableau de variations. Etablir que la plus grande valeur prise par h_m quand x décrit l'ensemble de définition est $u(m) = \frac{1}{m} + \ln(m)$.

b) Etudier les variations de u sur $]0; +\infty[$. En déduire le signe de $u(m)$.

c) Déterminer le nombre des points communs à (C_m) et (Δ) lorsque m est positif.

B) 1) Soit (Γ) la courbe de la fonction logarithme népérien.

c) Trouver une translation $t_{\vec{u}}$ qui transforme (Γ) en (C_1).

d) Représenter graphiquement la courbe (C_1) et la droite (Δ).

2) On appelle x_1 et x_2 les abscisses des points d'intersection de (C_1) et (Δ) ; P est le point d'abscisse négative x_1 et Q est le point d'abscisse positive x_2.

a) Démontrer que $2 < x_2 < 3$.

b) Calculer, en cm^2 et en fonction de x_1 et x_2, l'aire du domaine compris entre (C_1) et (Δ), et les droites d'équations $x = x_1$ et $x = x_2$. (On pourra utiliser une intégration par parties).

C) On se propose de calculer une valeur approchée de x_2. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_1(u_n), pour\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Représenter à l'aide de la courbe (C_1) les termes u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.

2) Montrer que la suite (u_n) est majorée par x_2.

3) Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que : $|f'_1(x)| \leq \frac{1}{3}$, puis que $|u_{n+1} - x_2| \leq \frac{1}{3}|u_n - x_2|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - x_2| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - x_2|$, et que la suite (u_n) converge vers x_2.

5) Déterminer une valeur approchée u_p de x_2 à 10^{-2} près en utilisant la suite (u_n).

SUJET N°29

Exercice 1

Soit l'équation $(E) : z^4 + 2z^3 + z^2 - 2z + 1 = 0$ $(z \in \mathbb{C})$

1) Démontrer que si z_0 est solution de (E), alors $\overline{z_0}$ est solution de (E).

2) a) Déterminer les nombres réels a et b tels que : $(E) \Leftrightarrow z^2\left[\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + a\left(z - \frac{1}{z}\right) + b\right] = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + aZ + b = 0$, puis l''équation (E).

3) Démontrer que les images des solutions de (E) appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires, indiscernables au toucher.
On tire successivement 3 boules en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.
Calculer les probabilités des événements suivants :

a) « obtenir une boule blanche pour la première fois au troisième tirage »

b) « ne pas obtenir consécutivement 2 boules de la même couleur »

c) « ne pas obtenir 3 boules de même couleur ».

Exercice 3

Soit P un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit E l'ensemble des points $M(x, y)$ de P tels que : $x^2 + 4y^2 = 4$.
Identifier E. Préciser les éléments caractéristiques.

2) Soit s l'application de P dans P qui, à $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}y \\ y' = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y \end{cases}$

a) Démontrer que s est bijective. Déterminer s^{-1}. En déduire la nature de s et ses éléments caractéristiques.

b) Démontrer que $s(E) = E$.

3) Soit g l'application de P dans P définie par : $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{8}{5}y \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$

a) Soit μ la symétrie orthogonale de base $(O, \vec{\imath})$. Démontrer que : $g = s \circ \mu$.

b) Etablir que $g(E) = E$.

Problème

Partie A :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + xe^{-\frac{x}{2}}, si\ x \leq 0 \\ xlnx - x + 1, si\ x > 0 \end{cases}$

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et C_f la courbe représentative de f dans ce repère.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Ecrire les équations des demi tangentes à C_f au point d'abscisse 0.
3) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Etudier les branches infinies de la courbe C_f.
4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
5) Tracer les demi tangentes à C_f au point d'abscisse 0 et tracer C_f.
6) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_f et les droites d'équations respectives $y = 1, x = -1$ et $x = 0$
7) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]-\infty; 0[$ est une bijection de l'intervalle $]-\infty; 0[$ dans un intervalle que l'on précisera.

Partie B :

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(I) : y' - y = xe^{\frac{x}{2}}$

1) Résoudre l'équation différentielle $(I') :\ y' - y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Soit a et b deux réels, u la fonction définie par : $u(x) = (ax + b)e^{\frac{x}{2}}$. Déterminer a et b pour que u soit solution de (I).
3) a) Montrer que v est solution de (I) si et seulement si $v - u$ est solution de (I').
   b) En déduire les solutions de (I).
   c) Déterminer la solution de (I) qui s'annule en 0

SUJET N°30

Exercice 1

Soit le polynôme complexe P définie par : $P(z) = \frac{z^4}{1+cos\theta} - 2z^2cos\theta + 4izsin\theta cos\theta + 4sin^2\theta$ où $\theta \in]-\pi; \pi[$

1) a) Etablir que si z_0 est racine de P il en est de même de $-\overline{z_0}$.
   b) Démontrer que P a une racine de la forme $k(1 + i)$ où k est un réel à déterminer.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On donnera toutes les solutions sous la forme trigonométrique.
3) Soit les points $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ et $M_4(z_4)$ où $z_1,\ z_2, z_3$ et z_4 sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Déterminer les ensembles décrits par chacun des points M_1, M_2, M_3 et M_4 lorsque θ varie dans $]-\pi; \pi[$.

Exercice 2

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 2$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$

1) Monter que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$
2) On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

3) a) Exprimer u_n en fonction de v_n.
   b) En déduire u_n en fonction de n.
   c) Calculer la limite de (u_n).

Exercice 3

Soit P un plan affine euclidien, associé à $\vec{P}$, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit f l'application de P dans P telle que : $z' = i\sqrt{3}z + 2\bar{z} - (1 + i\sqrt{3})$ et $M(z) \longmapsto M'(z')$

a) Démontrer que f est involutive. Déterminer f avec précision

b) Démonter que C, courbe d'équation cartésienne : $x^2 - y^2 - 2x = 0$, est globalement invariante par f : $f(C) = C$.

2) Soit g l'application de P dans P telle que : $z'' = \frac{3}{4}z + \frac{1}{4}i\bar{z}$ et $M(z) \longmapsto M''(z'')$.

a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par g est une droite D que l'on précisera.

b) Démontrer que la direction de la droite (MM') est fixe.

Problème

A) La fonction f est définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}lnx$

1) a) Calculer la limite de f aux bornes de l'intervalle $]0;\ +\infty[$.

b) Etudier le sens de variation de f.

2) a) Monter que l''équation $f(x) = 0$ admet dans $]0;\ +\infty[$ un solution unique l et que $l \in [1;2]$.

b) Etudier le signe de $f(x)$ lorsque x décrit $]0;\ +\infty[$.

B) On se propose, dans cette partie, de calculer une valeur approchée de l à 10^{-2} près.

1) Soit φ la fonction définie sur $[1;2]$ par : $\varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}lnx$

a) Etudier les variations de φ. Prouver que l'image par φ de $[1;2]$ est un intervalle contenu dans $[1;2]$.

b) Montrer que l est l'unique solution de l'équation : $\varphi(x) = x$

2) On considère la suite u définie sur ℕ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_n \leq 2$

b) Montrons que, pour tout x de $[1;2]$, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout entier n, $|u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2}|u_n - l|$,

puis en déduire que : $|u_n - l| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - l|$.

d) Prouver que la suite u est convergente

e) Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-2} de l.

SUJET N°31

Exercice 1

1) Déterminer sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

2) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.

3) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $cos\frac{11\pi}{12}$ et de $sin\frac{11\pi}{12}$.

Exercice 2

Une usine fabrique des stylos à bille. Une étude statistique a montré que 90% de la production ne présente aucun défaut.

Chaque stylo est soumis à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 94% des stylos avec défaut et accepte 92% des stylos sans défaut.

On choisit au hasard un stylo avant son passage au contrôle.

1) Calculer les probabilités des événements suivants :

a) « le stylo est accepté et n'a pas de défaut »

b) « le stylo est accepté et a un défaut »

c) « le stylo est accepté »

2) Sachant que le stylo ne présente aucun défaut calculer la probabilité qu'il soit accepté.

3) L'usine a fabriqué 100 stylos. Calculer la probabilité que 80 stylos soient exactement acceptés.

Exercice 3

Dans P, plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit $\mathcal{B}$ la transformation définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{12}{5} \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par $\mathcal{B}$
2) Démontrer que $\mathcal{B}$ est une isométrie.
3) Déterminer l'image par $\mathcal{B}$ de la droite d'équation $x = 1$.
4) Préciser la nature de $\mathcal{B}$.

Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^x - nx$

On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

A) Soit la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = (1 + x)e^x - n$

1) Déterminer la dérivée de g_n. Dresser le tableau de variation de g_n et déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.
2) Montrer que g_n s'annule pour une unique valeur α_n, et que α_n est positif non nul.
3) Montrer que : $\alpha_n = ln\frac{n}{1+\alpha_n}$, avec $0 \leq \alpha_n \leq \ln(n)$.
4) a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $lnx \leq x - 1$ (1)
   b) Déduire de (1) le signe de $g_n(ln\sqrt{n})$.
   c) Justifier que : $\frac{1}{2}\ln n \leq \alpha_n$

Quelles sont les limites des suites de terme général α_n et $\frac{\alpha_n}{n}$?

B)

1) Déterminer la dérivée de f_n. Dresser le tableau de variation de f_n. Monter que : $f_n(\alpha_n) = \frac{-n\alpha_n^2}{1+\alpha_n}$
2) Montrer que C_n admet une asymptote oblique D_n que l'on déterminera.
3) Déterminer les points d'intersection de C_n et l'axe des abscisses et préciser la position de C_n par rapport à cet axe.
4) Etudier les positions relatives de C_n et C_{n+1}.
5) a) Montrer que : $0,35 \leq \alpha_2 \leq 0,40$. Déterminer les valeurs décimales approchées de α_2 à 10^{-2} près, par défaut et par excès. En déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.
   b) Tracer C_1 et C_2 dans le même graphique.

SUJET N°32

Exercice 1

Pour tout nombre complexe z, on définit : $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$.

1) Calculer $P(2)$. Déterminer une factorisation de $P(z)$ par $(z - 2)$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, avec $Im(z_1) > 0$. Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.

3) a) Placer dans le plan, muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité 2 cm, les points $A(2)$, $B(z_1)$ et $C(z_2)$. I est le milieu du segment $[AB]$
   c) Démontrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.
   d) Calculer l'affixe z_I du point I et le module.
   e) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $cos\frac{3\pi}{8}$ et $sin\frac{3\pi}{8}$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5}$

1) En utilisant les termes consécutifs de la suite, conjecturer le comportement de la suite (u_n) (variations et limite)
2) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut on en déduire ?
4) On introduit la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{5}{u_n}$
a) Prouver que la suite (v_n) est arithmétique. En déduire v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
b) Déterminer le comportement à l'infini de la suite (u_n).

Exercice 3

Soit P un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$ et f l'application de P dans lui-même qui, au point $M(x, y)$ fait correspondre le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 3) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 14) \end{cases}$

1) Démontrons que f est un antidéplacement.
2) Démontrer qu'il existe une droite Δ et un vecteur $\vec{u}$ de la direction de Δ, tels que : $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie orthogonale de base Δ et t la translation de vecteur $\vec{u}$. Déterminer une équation de Δ et les coordonnées de $\vec{u}$.

Problème

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A : Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie, pour tout x, par : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$.

1) Montrer que : $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$.
2) Etudier le sens de variation de g. Calculer $g(0)$ et déduire le signe de g suivant les valeurs de x.
3) a) Calculer $\int_0^x te^{2t}dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
c) En déduire la primitive de la fonction g qui prend la valeur 3 en 0.

Partie B : Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

On appelle C sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de f et déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est asymptote à C au voisinage de $-\infty$. Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de C par rapport à (D)..
3) Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on appellera I et J avec $x_I < x_J$. Justifier et donner un encadrement d'amplitude 0,1 près de l'abscisse de J.
4) Tracer la courbe C et la droite (D).
5) t est un réel négatif. $A(t)$ est l'aire de l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant : $\begin{cases} t \le x \le 0 \\ x + 3 \le y \le f(x) \end{cases}$
a) Calculer $A(t)$.
b) Calculer $\lim_{t \to -\infty} A(t)$.

SUJET N°33

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - 4iz^3 + (3 - 12i)z^2 - (24 + 14i)z + 12 - 36i = 0$ sachant qu'elle admet deux solution imaginaires pures. Soit z_1 et z_3 ces solutions, on notera z_2 et z_4 les deux autres solutions.

(On remarquera que $(2 + 3i)^2 = -5 + 12i$)

2) Montrer que les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4 sont les sommets d'un parallélogramme.
3) Déterminer un polynôme de degré 4, $P(z) = z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \lambda$ dont les racines soient les affixes des points A', B', C' et D' images des points A, B, C et D par la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 2

On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes.

1) La seconde carte est tirée après remise de la première dans le jeu (tirages indépendants)

a) Quelle est la probabilité de tirer deux as ?

b) Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?

c) Quelle la probabilité que la seconde carte tirée soit un as ?

2) La seconde carte est tirée sans qu'on ait préalablement remis la première carte dans le jeu.

a) Quelle est la probabilité de tirer deux as ?

b) Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?

c) Quelle est la probabilité que la seconde carte tirée soit un as ?

Exercice 3

1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^3 - 1 = 0$

c) En déduire un polynôme du second degré de la forme $z^2 + bz + c$ (b et c sont des nombres réels) ayant pour zéros les racines cubiques de l'unité non réelles.

2) Etant donné un nombre z, on pose $\varphi(z) = z^2 + z + 1$. Soit P le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'unité de longueur étant 3 cm.

a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $\varphi(z)$ soit réel.

b) Démontrer que l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur est une conique dont on précisera une équation réduite.

c) Représenter sur une même figure les ensembles E_1 et E_2.

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 3 cm.

Partie I :

1) Justifier que, pour tout réel x, $x^2 - 2x + 2 > 0$.

2) Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4) Représenter C et la droite Δ d'équation $y = x$; on montrera que la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de C et on placera les points d'abscisses 0 et 2 ainsi que les tangentes en ces points.

Partie II :

On pose $\varphi(x) = f(x) - x$, pour tout réel x.

1) Déterminer la fonction dérivée φ' de φ. En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer la limite de φ en $-\infty$.

3) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $\varphi(x) = x\left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right)$. En déduire la limite de φ en $+\infty$.

4) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. En déduire que la droite Δ coupe la courbe C en un point et un seul.

On désigne par α l'abscisse de ce point. Monter que : $0,3 < \alpha < 0,4$.

Partie III :

On pose $J = [0,3; 0,4]$

1) Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2 - 2x + 2$ est décroissante sur J. En déduire que, $\forall\, x \in J, f(x) \in J$.

2) Prouver que, $\forall\, x \in J, |f'(x)| \leq 0,95$ (on pourra démontrer que f' est décroissante sur J). En déduire que, $\forall\, x \in J, |f(x) - \alpha| \leq 0,95|x - \alpha|$.

3) On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 0,3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

- $u_n \in J$;
- $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,95|u_n - \alpha|$;

- $|u_n - \alpha| \leq 0,1(0,95)^n$

En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

b) Déterminer un entier n_0 tel que, $\forall\, n \geq n_0, |u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

SUJET N°34

Exercice 1

1) Déterminer les couples d'entiers naturels a et b tels que :

a) $\begin{cases} a+b=182 \\ \Delta(a;b)=13 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a^2-b^2=7344 \\ \Delta(a;b)=12 \end{cases}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $151x - 77y = 5$

3) a) Déterminer les restes de la division euclidienne de 2^n par 9.

b) Montrer que le nombre $E = 2^{3n}\left(2^{3n+1} - 1\right) - 1$ est divisible par 9.

c) Montrer que $2^n - 1$ et $2^{n+1} - 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. T est l'application ponctuelle qui, au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -i\bar{z} + 1$.

1) Montrer que $T \circ T$ est une translation dont on précisera le vecteur.

2) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{W}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Montrer que : $T \circ t^{-1} = t^{-1} \circ T = s$ où s est une réflexion d'axe (D) que l'on précisera. En déduire que : $T = t \circ s = s \circ t$.

3) Soit K la translation de vecteur des coordonnées $(1; 0)$, R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, b la réflexion d'axe $(O, \vec{u})$. Démontrer que : $T = k \circ R \circ b$. En déduire que $T = k \circ S$ où S est la reflirxion d'axe Δ que l'on précisera.

Exercice 3

A la suite de plusieurs campagnes de vaccination réalisées dans une ville du Tchad, les études ont révélé que la probabilité pour qu'un enfant de moins de 5 ans soit atteint de poliomyélite est de 0,05. On choisit au hasard un enfant de moins de 5 ans de cette ville.

1) Quelle est la probabilité pour que cet enfant ne soit pas atteint de la poliomyélite ?

2) On a effectué un contrôle sur 8 enfants âgés de moins de 5 ans dans cette ville. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « aucun enfant est atteint de poliomyélite »

B : « trois enfants sont atteints de poliomyélite »

C : « au moins quatre enfants sont atteints de poliomyélite »

Problème

Partie A : On note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par :

$f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ où n est un entier naturel non nul.

(C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité graphique étant égal à 2 cm.

1) Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$. (Pour la limite en $+\infty$, on pourra poser : $X = x + 2$).

2) Etudier suivant la parité de n, la limite de la fonction f_n en -2.

3) Calculer $f'_n(x)$, puis étudier son signe suivant la parité de n. Dresser le tableau de variation de f_n.

4) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point fixe A. Déterminer une équation de la tangente (T_n) à (C_n) au point A.

5) a) Calculer la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ en $+\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

b) Démontrer que, pour tout entier n non nul et pour tout nombre réel $x \neq -2$, on a :

$f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$.

c) En déduire les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2). Représenter graphiquement (C_1) et (C_2).

Partie B : Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)dx$, pour tout entier naturel non nul n.

1) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout n non nul, on a : $u_n \geq 0$. Que peut-on en déduire ?

2) Démonter que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $\frac{1-2^{-n+1}}{n-1} \leq u_n \leq \left(\frac{1-2^{-n+1}}{n-1}\right)e$. En déduire la limite de la suite (u_n).

3) a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $nu_{n+1} = 1 + u_n - \frac{e}{2^n}$

b) Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 5) b) de la partie A

c) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{0} \frac{ne^{1+x}}{(x+2)^{n+1}} = 1$

Partie C : On considère la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = f_1(x-1)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Construire la courbe (Γ) à partir de la courbe (C_1). Justifier la construction.

2) On note φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = 1 + \ln(1+x)$.

a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $I = [2; 3]$.

b) Démontrer que, pour tout x positif, l'équation $\varphi(x) = x$ est équivalente à l'équation $g(x) = e$.

c) Démontrer que, pour tout x de I, $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3}$

3) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \varphi(v_n)$

a) Démontrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par α. Conclure.

b) Démontrer que $\varphi(I) \subset I$.

c) Démontrer par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n \in I$

d) Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|v_n - \alpha|$, puis que : $|v_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |v_0 - \alpha|$

e) En déduire que la suite (v_n) converge vers α.

f) Déterminer un entier naturel p pour lequel v_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

g) Calculer cette valeur approchée.

SUJET 35

Exercice 1

On considère le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^3 - 2z^2 - 2iz + 4i$

1) Vérifier que 2 est racine de P.
2) Déterminer les complexes a et b tels que : $\forall\, z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
4) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2, z_B = 1 + i$ et $z_C = -1 - i$.

a) Démontrer qu'il existe une unique similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

c) Donner l'expression analytique de S.

d) Soit (C) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 1$. Donner l'équation du cercle (C'), image de (C) par S.

Exercice 2

Une urne contient 8 boules vertes et n boules jaunes (n entier naturel supérieur ou égal à 2), toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux (2) boules de l'urne et on note leur couleur.

1) Un jeu consiste : si les deux boules sont de même couleur, on gagne 10 frs, si elles sont de couleurs différentes, on perd 10 frs (un gain est noté positivement et une perte est notée négativement).

a) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable notée X qui, a chaque tirage de deux (2) boules, associe le gain algébrique du joueur.

c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles, on a : $E(X) > 0$

2) On suppose $n = 6$. On répète cinq (5) fois de suite le tirage précédent en remettant à chaque fois les deux (2) boules tirées dans l'urne.

a) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 fois deux (2) boules de même couleurs au cours de ces tirages.

b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois deux (2) boules de même couleur au cours de ces triages.

Problème

Partie A : Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x}lnx$

1) Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ a meme signe que la fonction $g(x) = -lnx + \frac{1}{x}$

2) Etudier les variations de la fonction g et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée α, et que : $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2$. En déduire le signe de la fonction g sur $]0;\ +\infty[$.

3) Vérifier que : $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie B : recherche d'une valeur approchée de α

1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$

2) Déterminer $h'(x)$ puis montrer que, $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, $|h'(x)| \leq \frac{8}{9}$

3) Monter que, $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, $h(x) \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

4) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$

a) Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis à la fonction h, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{8}{9}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

d) Déterminer le plus petit entier p tel que : $|u_p - \alpha| \leq 10^{-2}$.

e) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C : On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, solutions de l'équation différentielles $(E) : y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$

1) Vérifier que la fonction f définie en A) est solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y'' + 3y' + 2y = 0$

3) Soit g une fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que g est solution de (E) si, et seulement si, $g - f$ est solution de (E').

4) En déduire toutes les solutions de (E).

SUJET 36

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Etudier les variations de f.

2) Etudier la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique (Δ).

3) Montrer que $\forall\, x \in [1; 2]$, on a : $f'(x) \leq \frac{3}{4}$.

4) En déduire qu'en appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur $[x; 2]$, on a : $1 + \frac{3}{4}x \leq f(x)$.

5) Montrer que la restriction g de f à $[1;\ +\infty[$ réalise une bijection de $[1;\ +\infty[$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. Dresser le tableau de variation de la bijection réciproque de g.

6) Déterminer la bijection réciproque de g, notée g^{-1}.

Exercice 2

On définit dans $\mathbb{R}$ une loi de composition interne, notée $*$, par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = xy - 2(x + y) + 6$.

1) La loi $*$ est elle commutative ? associative ?
2) Montrer qu'il existe un élément $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, x * \alpha = \alpha * x = \alpha$.
3) Montrer qu'il existe un élément neutre e pour la loi $*$.
4) Quels sont les réels qui ont un symétrique pour la loi $*$?

Exercice 3

I) Dans un triangle ABC, on considère les points I et J définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AC}$. Les droites (BC) et (IJ) se coupent en un point K.

1) Déterminer x et y tels que : $\overrightarrow{IK} = x\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BK} = y\overrightarrow{BC}$.
2) En déduire que K est le barycentre des systèmes : $\{(I, \alpha); (J, \beta)\}$ et $\{(B, a); (C, b)\}$ où α, β, a et b sont des réels à déterminer.

II) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. On considère les plans (P), (Q) et (R) de l'espace d'équations respectives : $2x - 3y + z - 1 = 0$, $3x - 4y + 2z - 1 = 0$ et $x - y + z - 1 = 0$.

1) Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants.
2) Ecrire une représentation paramétrique de la droite $(\Delta) = (P) \cap (Q)$.
3) Démontrer que (Δ) et (R) sont parallèles.

Problème

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2-5}{3-x}$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudier les variations de la fonction f.
2) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{3-x}$
3) En déduire une équation de l'asymptote oblique à (C_f), notée (D). Etudier les positions relatives de (C_f) par rapport à (D).
4) Montrer que le point A intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (C_f).
5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2.
6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1]$.
a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty; 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Calculer $g(-2), g(-3)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{2}{3}\right)$.
7) Tracer la courbe (C_f).
8) m est un paramètre réel.
a) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des points d'intersection de la courbe (C_f) et la droite $(D_m) : y = m$.
b) Démontrer que les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (D_m) sont solutions de l'équation (E) : $x^2 + mx - 5 - 3m = 0$.
c) Suivant les valeurs de m, résoudre l'équation (E).

SUJET 37

Exercice 1

I) Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1 + cos\theta + isin\theta$
b) $z_2 = 1 - cos\theta - isin\theta$
c) $z_3 = \frac{1+cos\theta+isin\theta}{1-cos\theta-isin\theta}$
d) $z_4 = 1 + icotan\frac{\theta}{2}$
e) $z_5 = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}$

II) On considère les nombres complexes z_1 ; z_2 et Z définis par : $z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{(z_1)^3}{(z_2)^3}$

1) Calculer le module et un argument des nombres complexes z_1 et z_2. En déduire le module et un argument du nombre complexe Z.
2) Mettre sous forme trigonométrique et sous exponentielle les nombres complexes z_1 ; z_2 et Z.
3) Ecrire Z sous la forme algébrique.
4) De ce qui précède, en déduire les valeurs exactes de $cos\,\frac{19\pi}{12}$ et de $sin\,\frac{19\pi}{12}$.
5) Résoudre dans l'intervalle $\mathbb{R}$ l'équation : $4(\sqrt{3}-1)cosx - 4(\sqrt{3}+1)sinx = 8$.
6) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que Z^n soit réel ;

Exercice 2

On considère le nombre complexe : $z = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$

1) Ecrire z^2 sous forme algébrique .
2) Calculer le module et un argument de z^2.
3) En déduire le module et un argument du nombre complexe z.
4) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{7\pi}{12}$ et de $sin\frac{7\pi}{12}$.

Problème

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2-4}$

On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
a) Etudier la dérivabilité de f aux points d'abscisses -2 et 2.
b) Que peut on dire de la courbe (C) aux points d'abscisses -2 et 2 ?
c) Calculer la fonction dérivée f' de f.
2) En déduire le sens de variation de f.
3) Calculer les limites de f aux bornes de D_f et dresser le tableau de variation de f.
4) Calculer la limite de $\left[f(x) + \frac{1}{5}x\right]$ en $-\infty$ et la limite de $\left[f(x) - \frac{7}{5}x\right]$ en $+\infty$. Que peut on conclure pour la courbe (C) ?
5) Tracer la courbe (C).
6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -2]$.
a) Démontrer que h est une bijection de $]-\infty; -2]$ vers un intervalle J que l'on précisera.
b) Préciser l'ensemble de définition de la bijection réciproque h^{-1} de h et dresser son tableau de variation.
c) Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère.
7) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{|x^2-4|}$. Montrer que la courbe (C_g) est la réunion de la courbe (C) et d'une courbe (C_1) dont on précisera l' équation.

SUJET 38

Exercice 1

1) $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$
a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les solutions non réelles telles que : $Im(z_1) > 0$.
c) Déterminer le module et l'argument des nombres complexes z_1 et z_2.
2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
a) Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \left(\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.
- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.
- Déterminer l'affixe a' du point A' image du point $A(\sqrt{3}+i)$ par f.

b) Soit l'homothétie de centre A' et de rapport $\frac{3}{2}$. Déterminer l'affixe ω du point Ω image de O par h.

- Soit $B\left(-2+i(\sqrt{3}-1)\right)$.Montrer que : $(\Omega B) \perp (\Omega A)$.
- En déduire que Ω, A, B sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2

Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. un jeu consiste à tirer au hasard et simultanément quatre boules de l'urne.

1) Quel est le nombre d'éventualités ?
2) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « on obtient un seul multiple de 3 »
B : « on n'obtient aucun multiple de 3 »
C : « on obtient deux multiples de 3 et deux seulement »
D : « on obtient au moins un multiple de 3 ».

Problème

A) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$.
1) Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
2) Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x-2)e^{1-x}$. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α. Justifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.
4) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

B) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Démontrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3) Démontrer que la droite $(D) : y = -x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$. Etudier la position de (C) et (D).
4) Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
6) Démontrer que : $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$
7) Justifier que, pour tout réel x, $f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$.
8) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions. On appelle β l'une des solutions. Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution.
9) Tracer (D), (T) et (C). On prendra $\alpha = 0,4$ et $\beta = 2,5$.

SUJET 39

Exercice 1

Une urne contient 5 jetons portant les réels : $-\sqrt{2}$; -1; 0; 1 et $\sqrt{2}$.

On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. On appelle x le numéro du premier jeton et y celui du deuxieme et on construit le nombre complexe $z = x + iy$.

1) Combien de nombres complexes peut on ainsi construire ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) Un nombre complexe de module $\sqrt{3}$?

b) Un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2}$?

3) On effectue trois de suite le tirage successif avec remise de deux jetons de l'urne et on désigne par X la variable aléatoire qui, à l'issue de ces trois tirages associe le nombre de nombres complexes de module $\sqrt{3}$.

déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

Exercice 2

Le plan est orienté. ABC est un triangle équilatéral tel que : $AB = BC = CA = 1$ et $Mes(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

A' est le milieu du segment $[BC]$ et on désigne par G l'isobarycentre des points A, B et C.

1) Construire G et calculer GA'.
2) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 1,25$.
3) Tracer (E) sur la figure précédente.
4) On désigne par r la rotation de centre G qui transforme C et A et h l'homothétie qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et on pose : $S = h \circ r$.

a) Démontrer que h est une homothétie dont déterminera le centre et le rapport.

b) Déterminer et construire l'ensemble (E') image de l'ensemble (E) par l'homothétie h.

c) Donner la nature et les éléments géométriques de l'application S.

Exercice 3

Le plan affine euclidien E_2 étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation en z

$(E) : z^3 - 2(1-i)z^2 - 3iz + 1 + i = 0$

2) Montrer que les points ayant pour affixes les racines de (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

3) On considère l'application d de E_2 dans E_2 définie :

$d : \begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x + 1 \end{cases}$

a) Montrer que d est un antidéplacement.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de d.

4) Soit la conique (H) d'équation : $x^2 - y^2 - 6x + 2y + 24 = 0$

a) Donner une équation réduite de (H).

b) Donner la nature et ses éléments caractéristiques (sommets, foyers, directrices, excentricité).

c) Représenter graphiquement (H).

d) Quelle est l'image par d de la conique (H) ?

Problème

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 3 cm.

Partie A

1) a) Calculer pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) En déduire les variations de f'.

c) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.

2) a) En déduire de la question précédente, les variations de f et dresser son tableau de variations.

b) démontrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C). Etudier les postions relatives de Δ et de (C).

c) Construire la courbe (C).

Partie B

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1) En utilisant la représentation graphique, que peut on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite (u_n)
2) a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1, -1 \leq u_n \leq 0$

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que la suite (u_n) a une limite l (on ne cherchera pas calculer cette limite).

3) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} + 1 < \frac{3}{4}(u_n + 1)$.

b) En déduire que, pour tout entier n, on a : $0 < u_n + 1 < \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Quelle est alors la limite de la suite (u_n) ?

SUJET 40

Exercice 1

Soient les nombres complexes a e b définis par : $a = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $b = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

1) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe : $q = \frac{a}{b}$.
2) Calculer le module et un argument des nombres complexes a et b. En déduire le module et un argument du nombre complexe q.
3) Mettre sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les nombres complexes a, b et q.
4) En déduire des questions suivantes les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.
5) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que q^n soit réel.

Exercice 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = ax^3 + bx - x + 3$

1) Déterminer les réels a et b sachant que la courbe (C_f) de f admet un extremum égal à 2 au point d'abscisse $x = 1$.
2) Dans la suite de l'exercice on prendra $a = 1$ et $b = -1$.

a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 7$ admet une solution et une seule notée α dans $[1; +\infty[$. Encadrer α par deux entiers consécutifs.

c) Calculer $f(0)$ et $(f^{-1})'(3)$.

Exercice 3

Soit un triangle ABC rectangle en A tel que : $AC = 2AB$. On pose : $AB = d, d > 0$

a) Soient G_1 et G_2 les barycentres respectifs des systèmes de points pondérés : $\{(A,1); (B,2); (C,1)\}$ et $\{(A,5); (B,2); (C,-3)\}$. Construire les points G_1 et G_2 et calculer G_1G_2 en fonction de d.

b) Déterminer, suivant les valeurs du réel k, l'ensemble des points M du plan définis par l'égalité : $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4k$.

Construire cet ensemble pour $k = 1,5d^2$.

c) Trouver l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).(5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = \lambda$, où λ est un réel donné. Discuter suivant les valeurs du paramètre λ.

Problème

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ et (C_f) s courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Trouver trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
2) Montrer que la droite (Δ) déquation $y = x - 1$ est asymptote à (C_f). Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ).
3) Montrer que le point A intersection des asymptotes de (C_f) est un centre de symétrie de (C_f).
4) Etudier les variations de f. En déduire le signe de f suivant les valeurs de x.
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -3]$.

a) Montrer que g est une bijection de $]-\infty; -3]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Dresser le tableau de variation de sa bijection réciproque de g, notée g^{-1}.

c) Calculer $g(-5)$; $g(-4)$ et $(g^{-1})'(-7)$.

d) Expliciter $g^{-1}(x)$.

6) Démontrer que, $\forall x \in [1;3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$. En déduire que pour tout x de $[1;3]$, on a :

$\left|x - 4 + \frac{4}{x+1}\right| \leq \frac{3}{4}|x-3|$

7) Tracer la courbe (C_f) de f ainsi que la courbe (C') de la fonction g^{-1} dans le même graphique.

8) Soit m un paramètre réel.

a) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des points d'intersection de (C_f) et la droite (D_m) d'équation $y = m$.

b) Montrer que les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (D_m) sont les racines de l'équation (E) : $x^2 - mx + 3 - m = 0$.

SUJET 41

Exercice 1

I) On donne les nombres complexes : $a = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$; $b = \frac{5i-1}{3-2i}$ et $z_3 = \sqrt{3} + i$.

1) Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.

2) Calculer z_3^{12}.

II) f est le polynôme complexe définie par : $f(z) = z^3 - (4+3i)z^2 + (5+8i)z + 4 - 7i$

1) Montrer que l''équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2) Trouver les nombres complexes a, b et c tels que : $f(z) = (z - z_0)(az^2 + bz+)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives : $2 - i, i$ et $2 + 3i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Calculer les distances : AB, AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que : $AM^2 + BM^2 = 12$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x+1}$

1) Etudier la continuité de f au point d'abscisse 1.

2) f est elle dérivable au point d'abscisse 1 ?

3) Etudier représenter la fonction f.

4) Discuter suivant les valeurs du paramètre m, l'existence du nombre de solutions de l'équation : $\sqrt{(x-1)^2}(x+1) = mx + m - 2$.

Exercice 3

Le plan est orienté. ABC est un triangle équilatéral tel que : $AB = BC = CA = 1$ et $Mes(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

I est le milieu du segment $[BC]$ et on désigne par G l'isobarycentre des points A, B et C.

5) Construire G et calculer GI.

6) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5}{4}$.

7) On désigne par r la rotation de centre G qui transforme C et A et h l'homothétie qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et on pose : $S = h \circ r$.

d) Démontrer que h est une homothétie dont déterminera le centre et le rapport.

e) Déterminer et construire l'ensemble (E') image de l'ensemble (E) par l'homothétie h.

f) Donner la nature et les éléments géométriques de l'application S.

Problème

A) Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + x - 3xlnx$.

1) Peut on prolonger f par continuité en en 0 ? Si oui déterminer on prolongement g.

2) Déterminer l'intervalle I de définition de g.

3) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

4) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

5) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α et que : $1 < \alpha < 2$.
6) Etudier la limite de $\frac{g(x)}{x}$ en $+\infty$ et en déduire le comportement asymptotique de la courbe (C_g) de g.
7) Tracer la courbe (C_g) de g dans le plan muni d'un repère orthonormé.

B) Soit la fonction h définie par : $\begin{cases} h(x) = x(\ln x)^2 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier le signe de $h'(x)$.
2) Montrer que h n'est pas dérivable en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
3) Donner l'équation de la tangente en $x_0 = e$.
4) Tracer la courbe (C_h) de h.

SUJET 42

Exercice 1

Soit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et (P) le plan complexe.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + i = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométriques et ssous forme algébrique.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) : $[(1-i)z]^3 + i = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.
c) Représenter dans le plan complexe les points M_0, M_1 et M_2 dont les affixes sont solutions de l'équation (E_1).

Exercice 2

On considère la suite des nombres réels (u_n) pour tout n entier naturel, définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{6} + \frac{1}{3} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Soit la suite (v_n) pour tout entier naturel définie par : $v_n = 2u_n - \frac{2n}{3}$.
a) Calculer v_0 , v_1 et v_2.
b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3) Calculer en fonction de n v_n puis u_n.
4) Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3

A) On considère l'équation $(E) : 4x - 5y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs inconnus.
1) Justifier l'existence de deux entiers relatifs x_0 et y_0 solutions de (E).

Vérifier que $x_0 = -1$ et $y_0 = -1$ conviennent.

2) En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation $4(x+1) = 5(y+1)$.
3) Utiliser le théorème de Gauss pour démontrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples $(x\,;\ y)$ tels que : $\begin{cases} x = 5k - 1 \\ y = 4k - 1 \end{cases}$
4) Indiquer les couples solutions de (E) tels que : $10 \leq x \leq 30$ et $10 \leq y \leq 30$.

B) On considère l'équation (G) : $48x - 30y = 6$
1) Déterminer $d = pgcd(48; 30)$.
2) En divisant les membres de l'équation (G) par d, se ramener au cas A). reprendre alors les questions 1) 2) et 3) puis déterminer tous les couples solutions de (G) tels que : $-10 \leq x \leq 0$ et $-10 \leq y \leq 0$.

Problème

Partie A : Etude d'une fonction f et construction de sa courbe représentative.

On appelle f la fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1) f' et f'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de f.
a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Etudier le sens de variation de la dérivée f'.
c) Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.
d) Calculer la limite de f en $+\infty$
e) Dresser le tableau de variation de f.
2) (D) est la droite d'équation $y = x + 1$.
a) Démontrer que (D) est asymptote oblique à (C) et préciser la position relative de (C) et (D).
b) La courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D). Déterminer les coordonnées de A.
3) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur $[0;\ +\infty[$ une unique solution α, puis vérifier que : $0 < \alpha < 1$.
4) Construire la droite (D), le point A défini au 2) b),la courbe (C) et la tangente en A.
5) Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

Partie B : Recherche d'une approximation décimale de α.

1) Démontrer que, sur $[0;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ équivaut à l'équation : $\frac{e^x}{e^x+1} = x$
2) On appelle h la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$
a) Calculer $h'(x)$ et réaliser son tableau de variation sur $[0; 1]$.
b) En déduire que, pour tout x de $[0; 1]$, $h(x) \in [0; 1]$.
c) Calculer $h''(x)$ et étudier le sens de variation de h' sur $[0; 1]$.
d) En déduire que, pour tout x de $[0; 1]$, on a : $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$
e) Pour tous réels x de l'intervalle $[0; 1]$, démontrer que : $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$
3) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n), \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
a) Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [\![0; 1]\!]$.
b) Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$, puis en déduire que : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$.

SUJET 43

Exercice 1

On considère l'application f définie par : $f(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$.

1) a) Démontrer que l'équation f(z)=0 admet une solution réelle z_1.
c) Déterminer un polynôme du 2nd degré P à coefficients complexes tel que : $z \in \mathbb{C}, f(z) = (z - z_1)P(z)$
2) a) Démontrer que l'équation f(z)=0 admet une solution imaginaire pure z_2.
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l''équation f(z)=0 . on notera z_3 la troisième solution.
3) Dans le plan complexe P on considère les points A, B et C d'affixes respective z_1, z_2 et z_3. Montrer que ces points sont alignés.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = 3$ et $\forall\, n \geq 1, 3u_{n+1} = u_n + 12$

1) Monter que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6.
2) On pose : $v_n = u_n - 6, \forall\, n \geq 1$.
a) Monter que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme v_1.
b) Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire u_n en fonction de n.
c) En déduire le sens de variation et la convergence de la suite (v_n).
3) On pose : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ et $T_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
a) Exprimer S_n puis T_n en fonction de n.
b) Calculer les limites de S_n et T_n en $+\infty$.
c) Calculer S_{2018} et T_{2018}.

Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$, $AC = 6$ et I le milieu de $[AB]$.

1) a) Construire le barycentre G des points pondérés $(A, 5)$; $(B, -3)$; $(C, 2)$ et le point I.

b) Calculer GA^2 , GB^2 et GC^2.

2) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan vérifiant : $\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$

3) Déterminer et construire les ensembles E_2 et E_3 des points M du plan tels que :

a) $E_2 = \{M \in P / 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24\}$

b) $E_3 = \{M \in P / 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = -72\}$.

Problème

Partie A : Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = e^x - 2x - 1$

1) Etudier le sens de variation de φ et dresser son tableau de variation.

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions 0 et α. Vérifier que : $1 < \alpha < 2$ et donner un encadrement de α à 10^{-1}.

3) En déduire le signe de la fonction φ suivant les valeurs de x.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+3)e^{-x} + x - 1$

On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique : 2 cm

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}\varphi(x)$.

3) Dresser le tableau de variation de .

4) (Δ) est la droite d'équation $y = x - 1$.

a) Montrer que la droite (Δ) est symptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ).

c) Déterminer les coordonnées du point A commun à (C) et (Δ).

5) Tracer la courbe (C), (Δ) et la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

6) Soit D la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$ où λ est un réel strictement positif.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer : $\int_0^\lambda (2x+3)e^{-x}dx$.

b) En déduire, en cm^2, l'aire $A(\lambda)$ et calculer la limite de cette aire lorsque λ tend vers 2.

SUJET 44

Exercice 1

On considère le polynôme complexe f défini par : $\forall \in \mathbb{C}, f(z) = z^3 - (9+4i)z^2 + (19+29i)z + 22 - 46i$.

1) Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une unique solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2) Déterminer un polynôme Q, du 2nd degré, tel que : $\forall \in \mathbb{C}, f(z) = (z - z_0)Q(z)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

4) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2i, z_B = 4 + 3i$ et $z_C = 5 - i$.

a) Démontrer qu'il existe une et une seule similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C dont on précisera l'écriture complexe sous la forme : $z' = az + b$ où a et b sont des nombres complexes à préciser.

b) Préciser les éléments caractéristiques de S.

c) Donner l'expression analytique de S en posant : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

5) Déterminer une équation de la droite (D'), image par S, de la droite (D) : $x + y - 1 = 0$.

Exercice 2

(u_n) est la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $-\frac{1}{2} \leq u_n$

2) Démontrer que la suite est décroissante sur $\mathbb{N}$.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) On introduit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{2u_n+1}{u_n+1}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de (u_n) en $+\infty$ et en déduire la convergence de (u_n).

d) Exprimer $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.

Problème

Partie A : On considère la fonction numérique g définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = -x^3 + 1 - 2\ln x$.

1) Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
2) Vérifier que $g(1) = 0$.
3) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

Partie B : on considère la fonction numérique f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = -x + \frac{\ln x}{x^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

1) Etudier la continuité de f sur $]0;\ +\infty[$.
2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3) Démontrer que la fonction f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$, puis vérifier que : $\forall\, x \in\ ]0;\ +\infty[,\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
4) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
5) Soit (D) la droite d'équation $y = -x$

a) Démontrer que la droite (D) est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D). On précisera, en particulier, les coordonnées du point A commun à (C) et (D).

c) Déterminer les coordonnées du point B de (C) sachant que la courbe (C) admet en ce point une tangente parallèle à (D).

6) Construire la courbe (C).

SUJET 45

Exercice 1

Soit P le polynôme complexe définie par : $P(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 - (14 - 39i)z + 50$.

1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On note z_1 la solution non imaginaire pure ayant la plus petite partie réelle et z_2 la troisième solution.
3) Soit A, B et C les points du plan euclidien d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe S qui transforme A en B et B en C.

b) Donner l'expression analytique de S.

Exercice 2

On définit sur $\mathbb{N}$ la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+8}{2u_n+1} \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Montrer que (u_n) est une suite à termes positifs.
3) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
4) (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2}$

a) Calculer v_0, v_1 et v_2.

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) Exprimer v_n en fonction de n puis déterminer sa limite.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On définit l'application f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}\bar{z} + 2$

1) Démontrer que f est un antidéplacement.
2) a) Déterminer l'écriture complexe de $f \circ f$.

b) En déduire la nature de $f \circ f$.

3) Soit t la translation de vecteur d'affixe $1 + e^{-i\frac{\pi}{6}}$, A et B les points d'affixes respectives 1 et $-e^{-i\frac{\pi}{6}}$

a) Vérifier que le vecteur de la translation est $\overrightarrow{BA}$.

b) En déduire que $f(B) = t(B)$.

d) Vérifier que $f \circ f = t \circ t$.

e) En déduire que $f(A) = t(A)$.

f) Démontrer que $t^{-1} \circ f$ est la symétrie orthogonale d'axe (AB), notée s.

g) Quelle est la nature de $f^{-1} \circ s \circ t$?

h) Montrer que $t(A) \in (AB)$.

i) Déterminer les images des points A et B par $f^{-1} \circ s \circ t$.

j) En déduire la nature de $f = s \circ t$.

Problème

Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2} \ln x$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x) = -8\ln x + x^2 + 4$

1) Etudier le sens de variation de g.
2) Montrer que g passe par un minimum dont on calculera la valeur. En déduire le signe de g.
3) Etudier le sens de variation de f.
4) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Existe-t-il une asymptote la courbe (C_f) parallèle un axe des coordonnées ?

Partie B : Soit (Γ) la courbe de la fonction $\ln$ dans le repère (O, I, J) précédent.

Soit h la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - \ln x$.

1) Expliciter $h(x)$ et étudier son signe. Qu'en déduire pour les courbes (C_f) et (Γ) ?
2) Quelle est la limite de h en $+\infty$? Qu'en déduire pour les courbes (C_f) et (Γ) ?
3) Construire les courbes (C_f) et (Γ).

Partie C : Soit α un réel strictement supérieur 1

1) Calculer, l'aide d'une intégration par parties : $\int_0^{\alpha} h(x)dx$.
2) Caluler l'aire $A(\alpha)$ en cm^2 de la portion du plan limitée par les courbes (C_f) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$. Calculer la limite de $A(\alpha)$ en $+\infty$.

SUJET 46

Exercice 1

On considère le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^3 - (6 + 2i)z^2 + 14z - 24 - 28i$

1) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une unique solution imaginaire pure z_0.
2) Déterminer un polynôme Q du second degré tel que : $\forall\ z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - z_0)Q(z)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
4) Dans la suite de l'exercice on notera z_0 la solution imaginaire pure, z_1 celle qui a la partie imaginaire négative et z_2 l'autre solution.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 dans le plan complexe euclidien rapporté au repère orthonormé (O, I, J).

a) Démontrer qu'il existe une unique similitude directe S qui transforme A en B et B en C.
b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
c) Donner l'expression analytique de S.
d) Donner une équation de la droite (D'), image de la droite (D) d'équation $y = x$ par S.

Exercice 2

Une maladie atteint 3% d'une population. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95% de tests sont positifs et 5% négatifs ;

- Chez les individus non malades, 1% de tests sont positifs et 99% négatifs.

On note : M l'événement « être malade » et T l'événement « avoir un test positif ».

1) Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience.
2) Donner la probabilité des événements « M et T », puis celle de « $\bar{M}$ et$T$ ».
3) Déterminer $P(T)$ et $P(\bar{T})$.
4) Calculer la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est positif.
5) Calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est négatif.

Exercice 3

Le plan étant rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère la transformation f qui au point $M(x\,;\,y)$ associe le point $M'(x'\,;\,y')$ défini par : $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

1) O' est l'image du point O par f.

a) Calculer les distances OM^2 et $O'M'^2$.

b) En déduire que f est une isométrie.

2) a et b sont deux nombres complexes.

a) Déterminer a et b tels que : $x' + iy' = a\overline{(x + iy)} + b$

b) En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.

3) Utiliser une autre méthode pour donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

Problème

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = 2 + \frac{3}{x^3} - 6\frac{\ln x}{x^3}$

1) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation et en déduire que, $\forall\, x \in\,]0;\ +\infty[,\ g(x) > 0$.

Partie B : Soit f la fonction de la variable réelle définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2x + \frac{3\ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative.

1) a) Calculer la dérivée de f et préciser son sens de variation (on remarquera que la dérivée première de f donne g).

c) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

d) En déduire le tableau de variation de f.

2) Soit (D) la droite d'équation $y = 2x$.

a) Démontrer que (D) est asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport (D).

b) Préciser les ordonnées des points d'abscisses $0,5$; 1; 2; 3.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

3) Tracer (C).

4) Calculer l'aire du domaine plan compris entre la droite (D) et la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

SUJET 47

Exercice 1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme complexe : $f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

1) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que l'on précisera.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres solutions, où z_1 est la solution dont la partie imaginaire est positive.
3) Représenter dans le plan complexe les points M_0 ; M_1 et M_2 d'affixes z_0; z_1 et z_2. Montrer que le triangle formé par ces points est rectangle.
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ léquation $z^2 = z_1$. On donnera les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.
5) Calculer $(z_1)^{20}$.

Exercice 2

On considère un sac contenant trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard et simultanément trois boules du sac.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « on obtient au moins une boule blanche » ;

B : « on obtient au moins deux boules noires » ;

C : « on obtient au moins une boule de chaque couleur ».

2) Définir par une phrase simple l'événement $A \cap B$, puis calculer sa probabilité.

Problème

Soit la fonction numérique g définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(0) = 1$ et $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$; si $x > 0$.

1) Justifier la dérivabilité de g sur $]0;\ +\infty[$ et démontrer que pour tout x strictement positif : $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ où $h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.
2) Déterminer les variations de h sur $]0;\ +\infty[$ et en déduire celles de g.
3) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4) a) Démontrer que g est continue sur $[0;\ +\infty[$.

c) Démontrer que pour tout x de $[0;\ +\infty[$: $x - \frac{x^2}{2} \leq l(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

d) En déduire un encadrement de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

e) Utiliser cet encadrement pour démontrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.

5) Dresser le tableau de variation de g et construire la courbe représentative de g dans un plan rapporté un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

SUJET 48

Exercice 1

A) On considère l''équation (E) : $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$.

1) Démontrer que le nombre complexe i est solution de (E).
2) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$$

3) En déduire les solutions de l'équation (E).

B) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$, on désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives i ; $2+3i$ et $2-3i$.

1) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A' image du point A par r.
2) Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

Exercice 2

Un sujet commun de mathématiques peut être créé par trois professeurs X, Y et Z avec les probabilités suivantes : $p(X) = 0,35, p(Y) = 0,,40$ et $p(Z) = 0,25$.

Les élèves craignent un sujet portant sur la probabilité (événement P), et, connaissant leurs professeurs pronostiquent : $p(P/X) = 0,2, p(P/Y) = 0,5$ et $p(P/Z) = 0,8$.

1) Traduire l'hypothèse $p(P/X) = 0,2$ par une phrase simple liée aux probabilités conditionnelles.

Traduire à l'aide d'un arbre de probabilités les données de l'énoncé.

2) Calculer la probabilité pour que le sujet posé porte sur la probabilité.
3) Le sujet porte sur la probabilité à l'examen, quelle est la probabilité pour que X ait créé le sujet ?

Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par . $f(x) = x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A : soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1) Etudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Calculer la dérivée de g, déterminer son signe et donner le sens de variation de la fonction g.
3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que : $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$.
4) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de f

1) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
3) Etudier les variations de f et donner son tableau de variation.
4) Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$. Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.
5) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (Δ).
6) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
7) Tracer (C), (T) puis (Δ).
8) a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction P définie par : $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction de $x \mapsto (x^2 + 2)e^{-x}$

b) Calculer en fonction de α, l'aire A en cm^2 de la partie limitée par (C), (Δ) et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$.

SUJET 49

Exercice 1

On considère l'équation (E) : $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$.

1) Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle unique.
2) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
3) Dans le plan complexe $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $-1, 2 + i$ et $1 - i$.

a) Placer les points A, B et C.
b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
c) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S transformant A en B et B en C.

Exercice 2

On lance trois fois de suite une pièce parfaite. A chaque lancer, on note P si on obtient « Pile » et F si on obtient « Face ».

1) Déterminer l'ensemble de tous les résultats possibles.
2) Calculer la probabilité d'obtenir le même résultat lors de ces trois lancers.
3) Calculer la probabilité de ne pas obtenir successivement un même résultat.
4) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois « Pile ».
5) Calculer la probabilité d'obtenir « Face » pour la première fois que lors du troisième lancer.

NB : tous les résultats doivent être obtenus sous forme des fractions irréductibles.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$. A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

On note : $z = x + iy$ et $z' = x' + y'$; x, y, x' et y' sont des réels.

1) Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2) R étant un réel strictement positif différent de 1. On suppose que le point M d'affixe $z = x + iy$ est un point du cercle (C) de centre O et de rayon R, θ est un réel de $[0; 2\pi]$.

a) Vérifier que $x = R\cos\theta$ et $y = R\sin\theta$ puis que $z = Re^{i\theta}$.
b) Déduire de la question 1) les expressions de x' et y' en fonction de R et θ.

3) a) Ecrire entre x' et y', une relation indépendante de θ.
b) En déduire que, lorsque M décrit (C), l'ensemble des points M' d'affixe z' est une conique dont on précisera la nature.

c) Pour $R = 2$, tracer la conique obtenue tout en précisant ses éléments caractéristiques.

Problème

Partie I : Soit g la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = xlnx - x + 1$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Etudier les limites de g en 0 et $+\infty$.
2) Etudier les variations de g. En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.
3) On note (C') la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto lnx$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On ne demande pas de construire (C) et (C').

a) Montrer que (C) et (C') ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e.

b) En déduire que, $\forall\, x \in [1; e], xlnx - x + 1 \leq lnx$.

Partie II : Soit f la fonction définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x$

1) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Tracer la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie III : Etude de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$

1) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution, notée α, et que : $3,5 \leq \alpha \leq 3,6$.
2) Soit h la fonction définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $h(x) = lnx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

a) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

b) Etudier le sens de variation de h.

3) On pose : $J = [3; 4]$

a) Montrer que, $\forall\, x \in J, h(x) \in J$.

b) Montrer que, $\forall\, x \in J, |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

4) On définit la suite des termes de l'intervalle J par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = h(u_n), \forall\, n \geq 0 \end{cases}$

a) Montrer que, $\forall\, n\ \in \mathbb{N}, u_n \in J$.

b) Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|u_n - \alpha|$

c) En déduire que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

d) Etudier la convergence de la suite (u_n).

e) Donner un entier naturel p tel que des majorations précédentes on puisse déduire que u_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Indiquer une valeur décimale approchée à 10^{-3} de α.

SUJET 50

Exercice 1

Soit l'équation (E) : $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$

1) Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle z_1.
2) On désigne par z_2 et z_3 les deux autres solutions de l'équation.

a) Mettre z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.

b) Soient A, B et C les points images des solutions z_1, z_2 et z_3. Représenter ces points et donner la nature du triangle ABC.

3) Montrer qu'il une et une seule similitude directe plane S transformant A et B et B en C.

Exercice 2

On dispose de deux dés tétraédriques, l'un bleu et l'autre rouge dont les faces sont respectivement notées 1, 1, 1, 2 et -1, 0, 2, 2. On lance simultanément les deux dés et l''on relève les nombres inscrits sur les faces cachées des dés.

1) On considère la variable aléatoire X prenant pour valeur la somme des nombres ainsi relevés.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

2) On effectue ces jets n fois de suite.

a) Donner la probabilité p de relever une fois et une seule fois le nombre 2 pour le dé bleu au cours de ces n jets.

b) Donner la probabilité q de relever une fois et une seule fois le nombre 2 pour le dé rouge au cours de ces n jets.

c) A partir de quelle valeur de n a-t-on $p > q$.

Exercice 3

Soit P un plan orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O;\ \overrightarrow{e_1};\ \vec{e}_2)$. On considère l'application f du plan P dans muni même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} + \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Justifier que f est un antidéplacement.

b) prouver que $f = s \circ t$ où s est une symétrie axiale d'axe (D) et t la translation de vecteur $\vec{v}$, vecteur directeur de (D). on déterminera le vecteur $\vec{v}$ et une équation de la droite (D).

Problème

A) on considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x + x - 5$.

1) Etudier le sens de variation de g.

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et une seule sur $\mathbb{R}$.

3) Justifier l'encadrement : $1,30 < \alpha < 1,31$.

B) Soit la fonction numérique f définie sur $]-\infty; 5[$ par : $f(x) = \ln(5 - x)$.

1) Etudier le sens de variation de f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et en 5.

2) Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.

3) Montrer que pour tout x de $[0; 3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. En déduire que pour tout x de $[0; 3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

4) Montrer que $\forall\ x \in [0; 3], f(x) \in [0; 3]$.

5) On construit une suite (u_n) d'éléments de $[0; 3]$ en posant : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n), \forall\ n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

b) En déduire que, $\forall\ n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$, puis que : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

SUJET 51

Exercice 1

on considère le nombre complexe $z = (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3})$.

1) Ecrire sous forme algébrique z^2.

2) Trouer le module et un argument du nombre complexe z^2. En déduire le module et un argument du nombre complexe z.

3) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{17\pi}{12}$ et $sin\frac{17\pi}{12}$.

4) En utilisant ce résultat, résoudre dans $\mathbb{R}$ l''équation : $(1 - \sqrt{3})cosx - (1 + \sqrt{3})sinx = 2$.

Exercice 2

Une urne contient 5 boules rouges et 4 boules noires toutes indiscernables au toucher.

1) On tire successivement deux boules sans remettre la boule tirée. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A : ≪ les deux boules sont de même couleur≫

b) B : ≪ les dux boules sont de couleurs différentes ≫.

2) On tire successivement deux boules en remettant la boule tirée. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) C : ≪ on obtient au moins une boule rouge≫

b) D : ≪ la prémiere boule tirée est noire≫.

3) On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements A, B, C et D.

Exercice 3

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). On considère l'application f qui, tout point M des coordonnées (x, y), associe le point M' des coordonnées (x', y') telles que : $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$

1) Exprimer $z' = x' + iy'$ en fonction de $z = x + iy$.
2) L'application f est elle un déplacement ou un antidéplacement ?
3) Quelle est l'ensemble des points invariants par f ?
4) En utilisant l'écriture complexe de f, démontrer que $f \circ f$ est une translation. On désignera par $2\vec{v}$ le vecteur de la translation.
5) Déterminer la droite (D) de vecteur directeur $\vec{v}$ telle que $f = t \circ s$, t est la translation de vecteur $\vec{v}$ et s la symétrie axiale d'axe (D).

Problème

Etant donné un réel m, on considère l'application $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui tout x associe $f_m(x) = (1 - mx)e^{x+1}$.

1) Suivant les valeurs de m, dresser le tableau de variation de f_m.
2) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x) = (1 - x)e^{x+1}$. On désigne par (C_g) la courbe de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
   a) Dresser le tableau de variation de g.
   b) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse -1.
   c) Déterminer la fonction dérivée seconde g'' de g et étudier son signe.
3) En utilisant une intégration parties, déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive de g qui s'annule pour $x = -1$.
4) Calculer en cm^2 l''aire du domaine plan limité par (C_g), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.
5) Soit h la restriction de g sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.
   a) Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) On note h^{-1} l'application réciproque de h. Calculer le nombre dérivé de h^{-1} au point d'abscisse 0.
6) Les coordonnées d'un point M sont, à la date t et dans repère orthonormé (O, I, J), $x = -1 + lnt$ et $y = (2 - lnt)t$, avec $t \in [2, +\infty[$.
   a) Déterminer la trajectoire de M.
   b) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de M la date t.

SUJET 52

Exercice 1

On donne les nombres complexes z et u définis par : $z = -8\sqrt{3} + 8i$ et $u = \sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

1) Ecrire le nombre complexe z sous forme trigonométrique.

Déterminer les racines carrées de z sous trigonométrique.

2) Calculer u^2.

Utiliser ce résultat pour exprimer les racines carrées de z sous leur forme algébrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 2

On lance simultanément deux dés non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l''on note les deux numéros obtenus sur les faces supérieures.

Calculer les probabilités des événements suivants :

a) La somme des numéros obtenus est égale à 6 ;
b) La somme des numéros obtenus est impaire ;
c) La somme des numéros obtenus est paire ;
d) La somme des numéros obtenus est supérieure ou égale à 8 ;
e) La somme des numéros obtenus est strictement inférieure à 4.

Problème

A) On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 + \ln x - 1$;

1) Etudier les variations de g.

2) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

B) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3-4x-2\ln x}{2x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

3) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique : 2 cm.

a) Etudier la position de (C) par rapport à la courbe (P) d'équation $y = \frac{x^2}{2} - 2$.

b) Calculer la limite de $f(x) - (\frac{x^2}{2} - 2)$ en $+\infty$. Que peut on conclure ?

4) Tracer les courbes (C) et (P) dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

5) On désigne par (C_1) l'ensemble des points de (C) d'abscisses supérieur à 2.

a) Démontrer qu'il existe un unique point d'intersection de (C_1) avec l'axe des abscisses. On désigne par x_0 l'abscisse de ce point.

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2. et calculer l'abscisse x_1 du point d'intersection de (T) et (OI).

6) α est un réel supérieur à 1.

a) Calculer en fonction de α l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre (C), (P) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

b) Calculer la limite de $A(\alpha)$ en $+\infty$.

SUJET 53

Exercice 1

A tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-3+i}{z+2-i}$. On pose $z_A = 3 - i$ et $z_B = -2 + i$

1) Interpréter géométriquement le module et un argument de z'.
2) Exprimer x' et y' en fonction de x et de y sachant que : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.
3) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) Z' est réel ;

b) Z' est imaginaire pur ;

c) $|z'| = 1$;

d) $|z'| = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$ et $I = \mathbb{R}$;
2) $f(x) = \frac{3}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2}$ et $I = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$;
3) $f(x) = \frac{2}{x\ln^2 x}$ et $I =]0; 1[$;
4) $f(x) = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$ et $I =]0; +\infty[$;
5) $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ et $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3

I) Sachant que V est une suite géométrique

1) Sachant que $v_9 = \frac{1}{625}$ et $q = \frac{1}{5}$, calculer v_0 et S_9.
2) On donne $q = -3$ et $v_4 = 81$. Calculer v_0.
3) Sachant que U est une suite arithmétique, on donne : $u_0 = 7$ et $u_{94} = -181$. Calculer r et S_{95}.

II) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+2} \end{cases}$

1) Démontrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n. Quelle est la limite de (u_n) ?

Problème

Partie A

1) Soit g la fonction définie $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) Déterminer les limites e g en $-\infty$ en et $+\infty$.

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α. Vérifier que $3,10 < \alpha < 3{,}11$.

3) Déterminer le signe de suivant les valeurs de x.

Partie B : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}(1 - x^3)$.

1) Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que f' est du signe de g.

2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ en et $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

3) Démontre que : $f(\alpha) = -3\alpha^2 e^{-\alpha}$. Donner un encadrement de $f(\alpha)$

4) On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté au repère orthonormé d'unité graphique 2 cm et (Δ) la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

a) Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $[0; 1]$ par : $h(x) = e^{-x}(x^2 + x + 1)$.

b) En déduire que $h(x) \geq 1$ pour tout $x \in [0; 1]$.

c) Démontrer que (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $[0; 1]$.

5) a) Montrer qu'il existe des nombres réels a, b et c, que l'on déterminera, tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = e^{-x}(x^3 + ax^2 + bx +)$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre (C), l'axe des abscisses et les droites d''équations $x = 0$ et $x = 1$.

SUJET 54

Exercice 1

1) Soit le polynôme $P(x) = -x^3 - 6x + 20$. Calculer $P(2)$.

2) On considère le polynôme complexe : $f(z) = z^3 - 6z + 20i$. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

3) Trouver les nombres complexes a et b tels que : $f(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$. En déduire la résolution de $f(z) = 0$. On désignera z_1 la solution non imaginaire pure dont la partie réelle est négative et z_2 la troisième solution.

4) Soient A, B et C les images respectives de z_0, z_1 et z_2. Placer les points A, B et C dans le plan complexe et en déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 2

1) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n-4}{u_n-1} \end{cases}$

a) Démontrer, en raisonnant par recurrence, que cette suite est minorée par 2.

b) Prouver que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-2)^2}{u_n-1}$. En déduire le sens de variation de cette suite.

c) Justifier que cette suite est convergente.

d) Justifier qu'elle converge vers 2.

2) On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{u_n-2}$

a) Démontrer que cette suite est arithmétique.

b) Donner l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.

3) On considère la suite $w_n = lnu_n$.

a) Justifier qu'elle converge vers $ln2$.

b) Prouver la suite w est décroissante.

c) Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation : $|w_n - ln2| \leq 10^{-2}$.

Problème

A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2}$. On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Les interpréter graphiquement.

2) Etudier les variations de f.

3) Démontrer que cette fonction est impaire. Qu'en déduit on de (C) ?

4) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

B) On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{1}{2}x$. On note (C_g) sa courbe représentative.

1) Prouver que, pour tout x, $g(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{2}x = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$. Dans la suite il fut mieux choisir a forme la plus commode de $g(x)$ parmi les trois formes pour parvenir aux réponses demandées.

2) Vérifier que $g' = f$. En déduire les variations de g.

3) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

4) Prouver qu'en $+\infty$ la droite (Δ) : $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à (C_g). Etudier la position de (C_g) par rapport à (Δ).

5) Démontrer que la fonction g est paire. Qu'en déduit on pour (C_g)? En déduire l'équation de l'asymptote oblique à (C_g) en $-\infty$.

6) Tracer (C_g).

SUJET 55

Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie, $\forall\, n \geq 1$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5 \end{cases}$

1) Déterminer graphiquement les 5 premiers termes de la suite (u_n).
2) Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 15 et est décroissante
3) Déterminer un réel α tel que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \alpha$ soit une suite géométrique.
4) Dans la suite on considérera la valeur de α trouvée.
a) Calculer v_0, puis donner l'expression de v_n en fonction de n. Déterminer la limite de (v_n).
b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n. Déterminer la limite de (u_n).
5) On pose : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
a) Calculer S_n en fonction de n et étudier son comportement à l'infini.
b) Calculer S'_n en fonction de n et étudier son comportement à l'infini.

Exercice 2

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^3 + (4 + 8i)z^2 - (26 - 32i)z - 60 + 32i$.

1) Démontrer qu'il existe un réel α tel que : $f(\alpha) = 0$. En déduire qu'il existe un polynôme Q, du second degré, tel que : $\forall\, z \in \mathbb{C}, f(z) = (z - \alpha)Q(z)$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
3) On désigne par z_0 la solution réelle, par z_1 la solution dont la partie réelle est positive et par z_2 la solution dont la partie réelle est négative.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_0; z_1 et z_2.

a) En interprétant géométriquement le module et l'argument principal du quotient $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ en déduire la nature du triangle ABC.

b) Démontrer qu'il existe une et une seule similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C. Donner l'expression analytique de S et en déduire une équation de la droite (D'), image par S de la droite (D) d'équation : $y = -x$.

c) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de rapport $-\frac{1}{3}$ qui transforme A en C.

d) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

e) Donner l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 3

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le $PGCD$ des nombres 45 et 28.

2) a) Démontrer qu'il existe un unique couple $(x_0; y_0)$ d'entiers relatifs vérifiant : $45x - 28y = 1$.

b) En déduire toutes les solutions entières de l'équation précédente.

3) Déduire alors toutes les solutions entières de l'équation : $45x - 28y = 6$.

Problème

A) Le plan est rapporté un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + e^x$ et $g(x) = f(x) - x$

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Etudier les variations de f.

3) Démontrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4) On désigne par (C) la courbe représentative de f et par (C') celle de f^{-1} dans le repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

a) Etudier les branches infinies de (C).

b) Construire les courbes (C) et (C'). (On pourra calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f(0)$)

c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -2$.

5) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique x_0 vérifiant : $-1 < x_0 < 0$.

6) Dans tout ce qui suit, on pose $h = f^{-1}$.

a) Justifier que $h(x_0) = x_0$.

b) Démontrer que, pour tout $x \in]-\infty;\ x_0]$, $h(x) \in]-\infty;\ x_0]$.

7) Démontrer que, $\forall\, x]-\infty;\ x_0]$, on a : $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{2}$. Démontrer que, $\forall\, x \in]-\infty;\ x_0]$, on a : $|h(x) - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$.

B) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

1) Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in]-\infty;\ x_0]$.

2) Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$, puis en déduire que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - x_0|$

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

4) Déterminer un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de x_0 à 10^{-3} près.

2ème Partie : Corrigés

Nombres complexes et transformations du plan

Exercice 1

$Z = \frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+3i)^4}$; $z_1 = (1+i)^5$ et $z_2 = (\sqrt{3}+3i)^4$

1) Formes trigonométriques de z_1 et z_2 et déduction de leurs formes algébriques respectives

$|z_1| = |1+i|^5 = 4\sqrt{2}$ et $|z_2| = |\sqrt{3}+3i|^5 = 144$

$\arg(z_1) = 5\arg(1+i) + k2\pi = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$ et $\arg(z_2) = 4\arg(\sqrt{3}+3i) + k2\pi = \frac{4\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Alors : $z_1 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

et $z_2 = 144(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$

Par suite, on a : $z_1 = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4-4i$ et

$z_2 = 144\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -72-72i\sqrt{3}$

2) Forme algébrique et forme trigonométrique de Z.

$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-4-4i}{-72-72i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{72} + i\frac{1-\sqrt{3}}{72}$

$|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4\sqrt{2}}{144} = \frac{\sqrt{2}}{36}$ et $\arg(Z) = agr(z_1) - \arg(z_2) + k2\pi = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$

On en déduit alors :

$Z = \frac{\sqrt{2}}{36}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

3) Déduction des valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

$Z_{TF} = Z_{FA} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{36}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{72} + i\frac{1-\sqrt{3}}{72}$

Par identification et après expression conjuguée,

on obtient : $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Exercice 2

$z_1 = 1-i, z_2 = 1-i\sqrt{3}$ et $Z = \frac{z_1^5}{z_2^4}$

1) Module et un argument de z_1, z_2 et Z

$|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = 2$ et $|Z| = \frac{|z_1|^5}{|z_2|^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\arg(z_1) = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$,

$\arg(z_2) = \arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ et

$\arg(Z) = 5\arg(z_1) - 4\arg(z_2) + 2k\pi$

D'où $\arg(Z) = -\frac{5\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) Parties réelle et imaginaire de Z

$z_1^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -4+4i$ et

$z_2^4 = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -8+8i\sqrt{3}$

$\Rightarrow Z = \frac{-4+4i}{-8+8i\sqrt{3}}$ et après expression conjuguée, on obtient :

$Z = \frac{\sqrt{3}+1}{8} + i\frac{\sqrt{3}-1}{8}$ et enfin, on a :

$Re(Z) = \frac{\sqrt{3}+1}{8}$ et $Im(Z) = \frac{\sqrt{3}-1}{8}$

3) Valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

$Z_{TF} = Z_{FA} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{8} + i\frac{\sqrt{3}-1}{8}$

Par identification et après expression conjuguée, on

obtient : $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Exercice3

$M(x,y) \mapsto z = x+iy$

1) Montrons que l'ensemble (D) des points M tels que :

$|z-1-2i| = |z-7+2i|$ est une droite dont on donnera une équation

En posant $z = x+iy$, on obtient :

$|x-1+i(y-2)| = |x-7+i(y+2)|$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2$

Par développement, réduction

on obtient : $(D): 3x-2y-12 = 0$

2) Retrouvons le résultat en utilisant les points $A(z_A = 1+2i)$ et $B(z_B = 7-2i)$

$|z-1-2i| = |z-7+2i| \Leftrightarrow MA = MB$, alors l'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[AB]$, d'où la droite (D).

Exercice 4

$\varphi(z) = \frac{2z}{z^2-1}$

1) Montrons que $\varphi(e^{i\theta})$ est imaginaire pur, puis calculons son module et son argument.

$\varphi(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta}-1} = \frac{2}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}$

Or $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, alors $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

on obtient : $\varphi(e^{i\theta}) = \frac{1}{i\sin\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}i$

$|\varphi(e^{i\theta})| = \frac{1}{\sin\theta}$ car $\forall\, \theta \in]0,\pi[, \sin\theta > 0$

$\arg\left(\varphi(e^{i\theta})\right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, car $\theta \in]0,\pi[, \sin\theta > 0$

2) $\bar{z}$ est le conjugué de z.

a) Montrons que : $\varphi(z) = \frac{2z(\bar{z}^2-1)}{|z^2-1|^2}$

$\varphi(z) = \frac{2z}{z^2-1} = \frac{2z(\overline{z^2-1})}{(z^2-1)(\overline{z^2-1})}$

Or $\overline{z^2-1)} = \bar{z}^2 - 1$ et $(z^2-1)(\overline{z^2-1)} = |z^2-1|^2$

Alors : $\varphi(z) = \frac{2z(\bar{z}^2-1)}{|z^2-1|^2}$

b) On pose $z = x+iy$ et $2z(\bar{z}^2-1) = X+iY$

Calculons X et Y en fonction de x et y

$X+iY = 2z(\bar{z}^2-1) = 2(x+iy)((x-iy)^2-1)$

$\Rightarrow X+iy = 2x^3 + 2xy^2 - 2x + i(-2x^2y - 2y^3 - 2y)$

Par identification, on a : $\begin{cases} X = 2x^3 + 2xy^2 - 2x \\ Y = -2x^2y - 2y^3 - 2y \end{cases}$

c) $(O, \vec{u}, \vec{v})$ repère du plan. Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur .

$$\varphi(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(\varphi(z)) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 + 2xy^2 - 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des points $M(z)$ est donc la réunion de la droite d'équation $x = 0$ et du cercle de centre O et de rayon 1

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\varphi(z) = \frac{i}{2}$

$$\varphi(z) = \frac{i}{2} \Leftrightarrow \frac{2z}{z^2 - 1} = \frac{i}{2} \Leftrightarrow 4z = i(z^2 - 1)$$

On obtient : $iz^2 - 4z - i = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4i(-i) = 12 = (2\sqrt{3})^2$

$z_1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2i} = -i(2 + \sqrt{3})$ et $z_2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2i} = -i(2 - \sqrt{3})$

D'où $S = \{-i(2 + \sqrt{3}); -i(2 - \sqrt{3})\}$

Exercice 5

1) Ecrivons sous forme trigonométrique les racines cubiques du complexe : $a = 16(1 - i)$

Posons $z^3 = a = 16(1 - i) \Rightarrow |z^3| = 16|1 - i| = 16\sqrt{2}$ et $\arg(z^3) = arrg(16(1 - i) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

Alors $z^3 = 16\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

D'autre part, posons : $z = r(cos\alpha + isin\alpha)$

Alors $z^3 = r^3(cos3\alpha + isin3\alpha)$

$16\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = r^3(cos3\alpha + isin3\alpha)$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} 3\alpha = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ r^3 = 16\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ r = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$z_k = 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}\right)}$ avec $k = \{0; 1; 2\}$

Pour $k = 0$, on, a :

$$z_0 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

Pour $k = 1$, on a : $z_1 = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12}\right)$

Pour $k = 2$, on a : $z_2 = 2\sqrt{2}(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4})$

2) λ réel et $z_\lambda = 1 + i + 2\sqrt{2}e^{i\lambda} = x_\lambda + y_\lambda$

a) Calculer les réels x_λ et y_λ en fonction de λ

$$z_\lambda = 1 + i + 2\sqrt{2}(cos\lambda + isin\lambda)$$
$$= 1 + 2\sqrt{2}cos\lambda + i(1 + 2\sqrt{2}sin\lambda)$$

(Car : $e^{i\lambda} = cos\lambda + isin\lambda$)

Par identification, on a : $\begin{cases} x_\lambda = 1 + 2\sqrt{2}cos\lambda \\ y_\lambda = 1 + 2\sqrt{2}sin\lambda \end{cases}$

b) Déterminons l'ensemble (C) des points M_λ lorsque λ décrit $[0; 2\pi]$

$\begin{cases} x_\lambda = 1 + 2\sqrt{2}cos\lambda \\ y_\lambda = 1 + 2\sqrt{2}sin\lambda \end{cases}$ est la représentation paramétrique du cercle de centre $I(1 ; 1)$ et de rayon r=$2\sqrt{2}$

Alors $M_\lambda \in (C)$: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$

3) Montrons que les solutions de l'équation $[z - (1 + i)]^2 = a$ sont les affixes des points (C)

Posons $z - (1 + i) = Z \Rightarrow Z^3 = a$

$Z_0 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$Z_0 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$

Or $Z_0 = z_0 - (1 + i) \Rightarrow z_0 = 1 + i + Z_0$

On obtient alors : $z_0 = 2 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}$

Soit $M_0(2 + \sqrt{3}; \sqrt{3})$

$$M_0 \in (C) \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 = 8$$
$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 = 8,$$ on obtient alors $8 = 8$ alors $M_0 \in (C)$

$Z_1 = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$

Or $Z_1 = z_1 - (1 + i)$

$\Rightarrow z_1 = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) - 1 - i$

On obtient alors : $z_1 = 2 - \sqrt{3} + i(2 + \sqrt{3})$

Soit $M_1(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$

$$M_1 \in (C) \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 1)^2 = 8$$
$$\Leftrightarrow (2 - \sqrt{3} + 1)^2 + (2 + \sqrt{3} - 1)^2 = 8,$$ on obtient alors $8 = 8$ alors $M_1 \in (C)$

$$Z_2 = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right) = -2 - 2i$$

Or $Z_2 = z_2 - (1 + i) \Rightarrow z_2 = -2 - 2i + 1 + i = -1 - i$

Soit $M_2(-1; -1)$

$$M_2 \in (C) \Leftrightarrow (x_2 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = 8$$
$$\Leftrightarrow (-1 - 1)^2 + (-1 - i)^2 = 8,$$ on obtient alors $8 = 8$ alors $M_2 \in (C)$

Ccl : toutes les solutions de l'équation sont les affixes des points de (C)

Exercice 6

$z_1 = -3 + i\sqrt{3}, z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$ et $Z = \frac{z_1{}^3 z_3{}^4}{z_2{}^6}$

1) Ecrivons z_1, z_2 et z_3 sous formes trigonométrique et exponentielle

$|z_1| = |-3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ et $\arg(z_1) = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$\Rightarrow z_1 = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$|z_2| = |\sqrt{2} + i\sqrt{6}| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$\Rightarrow z_2 = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

$|z_3| = |\sqrt{8} - i\sqrt{8}| = 4$ et $\arg(z_3) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

$\Rightarrow z_3 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) Déduisons en la forme exponentielle de Z

$$|Z| = \left|\frac{z_1{}^3 z_3{}^4}{z_2{}^6}\right| = \frac{|z_1|^3|z_3|^4}{|z_2|^6} = \frac{(2\sqrt{3})^3(4)^4}{(2\sqrt{2})^6} = 12\sqrt{3}$$

$et\ \arg(Z) = 3\arg(z_1) + 4\arg(z_3) - 6\arg(z_2) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Rightarrow Z = 12\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

3) Calculons alors la forme algébrique de Z

$$Z = 12\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 12\sqrt{3}(0 - i)$$

$\Rightarrow Z = -12i\sqrt{3}$

<u>Exercice 7</u>

$z = -1 + iy$

1) Calculons les valeurs de y pour que $|z| = 2$

$|z| = |-1 + iy| = \sqrt{1 + y^2}$

$|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1 + y^2} = 2 \Leftrightarrow 1 + y^2 = 4$

On obtient alors : $y = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

2) Pour chacune des valeurs de y trouvées, écrivons $z\ et\ z^4$ sous forme trigonométrique

<u>1er cas</u> : $y = \sqrt{3}$

$z = -1 + i\sqrt{3}$

$|z| = 2\ et\ \arg(z) = \arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$|z^4| = 16\ et\ \arg(z^4) = \frac{8\pi}{3} + k2\pi$

Alors : $z = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$ et

$z^4 = 16\left(cos\frac{8\pi}{3} + isin\frac{8\pi}{3}\right)$

<u>2ème cas</u> : $y = -\sqrt{3}$

$z = -1 - i\sqrt{3}$

Les deux nombres complexes étant conjugués, on déduit :

$|z| = 2, \arg(z) = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, |z^4| = 16$ et

$\arg(z^4) = -\frac{8\pi}{3} + k2\pi$

Alors : $z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

et $z^4 = 16\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\right)$

3) Posons $Z = -8 + 8i\sqrt{3}$

a) Ecrivons Z sous forme trigonométrique

$|Z| = |-8 + i\sqrt{3}| = 16\ et\ \arg(Z) = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

Alors : $Z = 16\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$

Posons : $Z = z^4 \Rightarrow z^4 = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Posons, d'autre part : $z = re^{i\alpha} \Rightarrow z^4 = r^4e^{4i\alpha}$

$z^4 = z^4 \Leftrightarrow r^4e^{4i\alpha} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\alpha = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\ avec\ k = \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Alors : $z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)}$

Pour $k = 0$, on a : $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$

Pour $k = 1$, on a : $z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$

Pour $k = 2$, on a : $z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$

Pour $k = 3$, on a : $z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$

D'où $S = \{\sqrt{3} + i; -1 + i\sqrt{3}; -\sqrt{3} - i; 1 - i\sqrt{3}\}$

<u>Exercice 8</u>

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^5 = 1$

Les racines n ièmes de 1 sont toutes de la forme : $z_k = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$

Pour $n = 5$, on a : $z_k = e^{i\frac{k2\pi}{5}}$ avec $k = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Pour $k = 0$, on a : $z_0 = 1 = cos2\pi + isin2\pi$

Pour $k = 1$, on a : $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}} = cos\frac{2\pi}{5} + isin\frac{2\pi}{5}$

Pour $k = 2$, on a : $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}} = cos\frac{4\pi}{5} + isin\frac{4\pi}{5}$

Pour $k = 3$, on a : $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = cos\frac{6\pi}{5} + isin\frac{6\pi}{5}$

Pour $k = 4$, on a : $z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = cos\frac{8\pi}{5} + isin\frac{8\pi}{5}$

2) Démontrons que la somme des solutions est nulle

Posons : $\omega_0 = cos\frac{2\pi}{5} + isin\frac{2\pi}{5}$; $\omega_1 = cos\frac{4\pi}{5} + isin\frac{4\pi}{5}$;

$\omega_2 = cos\frac{6\pi}{5} + isin\frac{6\pi}{5}$; $\omega_3 = cos\frac{8\pi}{5} + isin\frac{8\pi}{5}$ et

$\omega_4 = cos2\pi + isin2\pi$

$\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = \omega_0 + {\omega_0}^2 + {\omega_0}^3 + {\omega_0}^4 + {\omega_0}^5$

Alors : $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = \frac{1-{w_0}^5}{1-\omega_0}$

Or $1 - {\omega_0}^5 = 0 \Rightarrow z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = \frac{0}{1-\omega_0} = 0$

3) Déduisons en que : $cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$

$1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = 0$

$$\text{Alors : }\begin{cases} 1 + cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} + cos\frac{6\pi}{5} + cos\frac{8\pi}{5} = 0 \\ sin\frac{2\pi}{5} + sin\frac{4\pi}{5} + sin\frac{6\pi}{5} + sin\frac{8\pi}{5} = 0 \end{cases}$$

Soit $1 + cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} + cos\frac{6\pi}{5} + cos\frac{8\pi}{5} = 0$

Or : $cos\frac{6\pi}{5} = cos\frac{4\pi}{5}$ et $cos\frac{8\pi}{5} = cos\frac{2\pi}{5}$

(car $\frac{6\pi}{5} = 2\pi - \frac{4\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5}$)

Alors : $1 + cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} + cos\frac{6\pi}{5} + cos\frac{8\pi}{5} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2cos\frac{2\pi}{5} + 2cos\frac{4\pi}{5} = 0$

Alors : $cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$

4) Exprimons $cos\frac{4\pi}{5}$ en fonction de $cos\frac{2\pi}{5}$, puis calculer $cos\frac{2\pi}{5}$ et $cos\frac{4\pi}{5}$

$cos2x = cos^2x - sin^2x$

En posant $x = \frac{2\pi}{5}$, on aura : $cos\frac{4\pi}{5} = cos2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Alors : $cos\frac{4\pi}{5} = cos^2\frac{2\pi}{5} - sin^2\frac{2\pi}{5}$

$\Rightarrow cos\frac{4\pi}{5} = cos^2\frac{2\pi}{5} - 1 + cos^2\frac{2\pi}{5}$

En en déduit alors : $cos\frac{4\pi}{5} = 2cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$

$cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2} \Rightarrow cos\frac{4\pi}{5} = -cos\frac{2\pi}{5} - \frac{1}{2}$

On aura : $-cos\frac{2\pi}{5} - \frac{1}{2} = 2cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$, alors :

$2cos^2\frac{2\pi}{5} + cos\frac{2\pi}{5} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 4cos^2\frac{2\pi}{5} + 2cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0$

En posant : $X = cos\frac{2\pi}{5}$, on aura : $4X^2 + 2X - 1 = 0$

$\Delta = 4 + 16 = 20 = (2\sqrt{5})^2$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

X_2 étant négative, on en déduit : $cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$cos\frac{4\pi}{5} = 2cos^2\frac{2\pi}{5} - 1 = 2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1$

Alors : $cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

Exercice 9

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 1$

$z_k = e^{i\frac{k1\pi}{3}}$ avec $k = \{0; 1; 2\}$

Pour $k = 0$, on a : $z_0 = 1$

Pour $k = 1$, on a : $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pour $k = 2$, on a : $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{4}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors : $S = \left\{1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Déduisons en les solutions de $z^3 = 8$

$z^3 = 8 \Leftrightarrow z^3 = 2^3$, on déduit : $z_k = 2e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ avec $k = \{0; 1; 2\}$

Pour $k = 0$, on a : $z_0 = 2$

Pour $k = 1$, on a : $z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

Pour $k = 2$, on a : $z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$

D'où $S = \{2; -1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}$

2) Soit $A(-1 + i\sqrt{3}); B(2); C(-1 - i\sqrt{3})$

a) Construction (voir fin exercice)

b) Calculons le module et un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}$, alors $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1$ et

$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

c) Déduisons en la nature du triangle ABC

$$\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = BC \\ Mes(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

On conclue que ABC est un triangle équilatéral.

3) $f : z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$

a) Nature et éléments caractéristiques de f.

f est une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

b) Déterminons $z_{A'}$ et $z_{C'}$

$f(A) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = e^{i\frac{2\pi}{3}}(-1 + i\sqrt{3})$

$Alors$: $z_{A'} = -1 - i\sqrt{3}$ $(A' = C)$

$f(C) = C' \Leftrightarrow z_{C'} = e^{i\frac{2\pi}{3}}(-1 + i\sqrt{3})$

Alors : $z_{C'} = 2$ $(C' = B)$

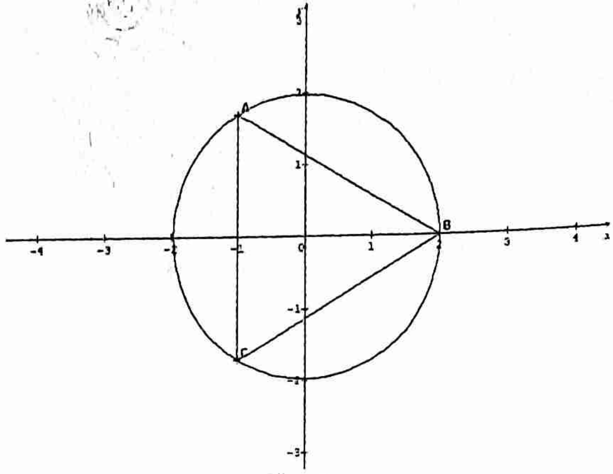
c) Déduisons en l'image de la droite (AC) par f, puis en donnons nue équation

$f(A) = C$ et $f(C) = B$ alors : $f((AC)) = (CB)$

Soit $M(x\,;\,y)$ un point de (CB), alors :

$\det\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y+\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}(x+1) - 3(y+\sqrt{3}) = 0$

D'où : (CB): $x\sqrt{3} - 3y - 3\sqrt{3} = 0$



Exercice 10

$M(z = x + iy), M(Z = X + iY), A(-1), B(1), C\left(\frac{1}{2}\right), D(2)$ et $Z = \frac{2z-1}{2-z}$

a) Déterminons l'ensemble (E) des points $m(z)$ tels que : $|Z| = 1$

$Z = \frac{2z-1}{2-z} = \frac{2\left(z-\frac{1}{2}\right)}{2-z} = \frac{2(z_m - z_C)}{z_D - z_m}$

$|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{2mC}{mD} = 1 \Leftrightarrow 2mC = mD \Leftrightarrow 4mC^2 = mD^2$

$4mC^2 - mD^2 = 0 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{mC} + \overrightarrow{mD})(2\overrightarrow{mC} - \overrightarrow{mD}) = 0$

Alors $(E) : \overrightarrow{mI}.\overrightarrow{mJ} = 0$ avec $I = bar\{(C,2); (D,1)\}$ et $J = bar\{(C,2); (D,-1)\}$

Ccl : L'ensemble (E) est le cercle de diamètre $[IJ]$

b) Déterminons l'ensemble (F) des points $m(z)$ tels que : $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$Z = \frac{2(z_m - z_C)}{z_D - z_m} = \frac{2z_{\overrightarrow{mC}}}{z_{\overrightarrow{mD}}}$

$\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow mes(\overrightarrow{mD}, \overrightarrow{mC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow$

$mes(\overrightarrow{mC}, \overrightarrow{mD}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Ccl : l'ensemble (F) des points $m(z)$ est le demi cercle, privé du point D, situé en dessous du diamètre $[DC]$

c) Traçons (E) et (F) (voir fin exercice)

d) Exprimons en fonction de z : $U = \frac{Z-1}{Z+1}$

$U = \frac{Z-1}{Z+1} = \frac{\frac{2z-1}{2-z}-1}{\frac{2z-1}{2-z}+1} = \frac{2z-1-2+z}{2z-1+2-z}$

Alors : $U = \frac{3z-3}{z+1} = \frac{3(z-1)}{z+1}$

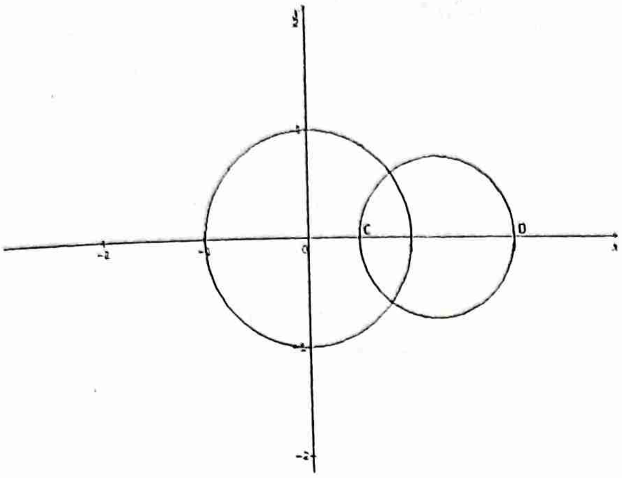
Déduisons en que les points A, B, m et M sont cocycliques ou alignés.

$U = \frac{3z-3}{z+1} = \frac{3(z_m - z_B)}{z_m - z_A} \Leftrightarrow argU \equiv mes(\overrightarrow{Am}, \overrightarrow{Bm})(2\pi)$

D'autre part, $U = \frac{Z-1}{Z+1} \Leftrightarrow argU \equiv mes(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})(2\pi)$

On a alors : $mes(\overrightarrow{Am}, \overrightarrow{Bm}) \equiv mes(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})(2\pi)$

On conclue alors que les points A, B, m et M sont soit cocycliques, soit alignés.



Exercice 11

$F: z' = u^2z + u - 1$

a) Déterminons l'ensemble des valeurs de u pour lesquelles F est une translation, puis caractérisons F pour chacune des valeurs trouvées.

De manière générale, F a pour écriture complexe de la forme : $z' = az + b$

F est une translation si et seulement si, $a = 1$ alors $u^2 = 1$

$u^2 = 1 \Leftrightarrow u = \{-1; 1\}$

- Pour $u = -1$, on a : $z' = z - 2$, alors F est la translation de vecteur d'affixe -2.
- Pour $u = 1$, on a : $z' = z$, alors F est l'application identique du plan.

b) Déterminons l'ensemble des valeurs de u pour lesquelles F est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis caractérisons F pour chacune des valeurs trouvées.

F est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} |u^2| = 1 \\ \arg(u^2) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow u^2 = i$

Posons $u = x + iy \Rightarrow u^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et

$|u^2| = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ 2y^2 = 1 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ou \; x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ou \; x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ xy > 0 \end{cases}$$

On obtient : $u = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

- Pour $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a : $z' = iz + \frac{\sqrt{2}-2}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

F est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A d'affixe

$z_A = \frac{\sqrt{2}-2+i\sqrt{2}}{2(1-i)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

- Pour $u = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a : $z' = iz - \frac{\sqrt{2}+2}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

F est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre B d'affixe :

$z_B = \frac{-\sqrt{2}-2-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = -\frac{1}{2} + i\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$

c) Valeurs de u pour lesquelles F est une homothétie de rapport -2.

$K = -2 \Leftrightarrow u^2 = -2 \Leftrightarrow u^2 = (i\sqrt{2})^2$

On obtient : $u = \{-i\sqrt{2}; i\sqrt{2}\}$

- Pour $u = i\sqrt{2}$, on a : $z' = -2z - 1 + i\sqrt{2}$

F est l'homothétie de rapport $k = -2$ et de centre C d'affixe $z_C = \frac{-1+i\sqrt{2}}{3}$

- Pour $u = i\sqrt{2}$, on a : $z' = -2z - 1 - i\sqrt{2}$

F est l'homothétie de rapport $k = -2$ et de centre D d'affixe $z_D = \frac{-1-i\sqrt{2}}{3}$

d) Caractérisons F pour $u = 1 - i$

$u^2 = (1-i)^2 = -2i, alors \; F: z' = -2iz - i$

- Le centre E

$z_E = \frac{-i}{1+2i} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$, alors $E\left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$

- Le rapport

$k = |-2i| = 2$

- L'angle

$\theta = Arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 12

$M(x; y) \mapsto z = x + iy$, $A(i), B(-2i)$ et $f: z' = \frac{2z-i}{iz+1}$

A) $z \in \mathbb{C} \setminus z \neq i$

a) $\theta = \arg(z - i) \; et \; r = |z - i|$

Interprétons géométriquement $r \; et \; \theta$ à l'aide de A et M.

$r = |z - i| = |z_M - z_A|$, alors : $r = MA$

$\theta = \arg(z - i) = \arg(z_M - z_A)$, alors :

$\theta = mes(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Montrons que $(z' + 2i)(z - i) = 1$

$z' = \frac{2z-i}{iz+1} \Rightarrow z' + 2i = \frac{2z-i}{iz+1} + 2i = \frac{2z-i-2z+2i}{iz+1}$

$z' + 2i = \frac{i}{iz+1} = \frac{i}{i(z-i)} = \frac{1}{z-i}$

$z' + 2i = \frac{1}{z-i} \Leftrightarrow (z' + 2i)(z - i) = 1$

c) $r' = |z' + 2i| \; et \; \theta' = \arg(z' + 2i)$

Exprimons r' et θ' en fonction de r et θ

$r' = |z' + 2i|$ et $r = |z - i|$

$(z' + 2i)(z - i) = 1 \Leftrightarrow |(z' + 2i)(z - i)| = 1$

$\Leftrightarrow |z' + 2i||z - i| = 1$

$\Leftrightarrow r'r = 1$

Alors, on obtient : $r' = \frac{1}{r}$

$z' + 2i = \frac{1}{z-i} \Leftrightarrow \arg(z' + 2i) = -\arg(z - i) + k2\pi$

Or $\arg(z' + 2i) = \theta' \; et \; \arg(z - i) = \theta$

alors : $\theta' = -\theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Interprétons r' et θ' à l'aide des points B et M'

$r' = |z' + 2i| = |z' - z_B|$, alors : $r' = M'B$

$\theta' = \arg(z' + 2i) = \arg(z' - z_B) = \arg(z_{\overrightarrow{BM'}})$,

alors : $\theta' = mes\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

B) $C(A, 1)$

a) Montrons que si $M \in (C)$, son image $M' \in (C)$, cercle de centre B dont on déterminera le rayon.

$M \in (C) \Leftrightarrow AM = 1 \Leftrightarrow r = 1$

$M' \in (C') \Leftrightarrow BM' = r'$, or $r' = \frac{1}{r}$, et r = 1 $\Rightarrow$ r' = 1, on a alors : $BM' = 1$

D'où M' appartient au cercle de centre B et de rayon 1.

b) Vérifions que (C') est l'image de (C) par f

$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{2z-i}{iz+1} \Leftrightarrow z = \frac{i+z'}{2-iz'}$, pour tout $z \neq -2i$

Tout point de (C') a son affixe différent de $z_B = -2i$ et a un antécédent M par f et on a : alors $AM = 1$ et $M \in (C)$

Ccl : (C') est l'image de (C) par f

C) $T(z_T = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

a) Calculons l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AT}$

$z_{\overrightarrow{AT}} = z_T - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i - i = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)i$

Alors : $z_{\overrightarrow{AT}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Déduisons en que $T \in (C)$

$T \in (C) \Leftrightarrow AT = 1$

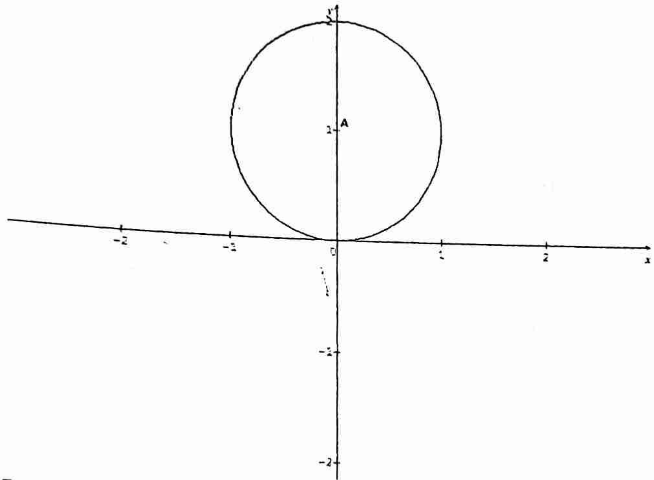
$AT = |z_{\overrightarrow{AT}}| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

Alors $T \in (C)$

b) Déterminons une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AT})$

$mes(\vec{u}, \overrightarrow{AT}) = \arg(z_{\overrightarrow{AT}}) = \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Alors : $mes(\vec{u}, \overrightarrow{AT}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$



Exercice 13

1) $z_1 = \frac{3+i}{2-i}$

a) Ecrivons z_1 sous formes algébrique, trigonométrique et exponentielle

$z_1 = \frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$ alors : $z_1 = 1 + i$

$|z_1| = |1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_1) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} + k\pi 2$

Alors : $z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) Montrons que z_1 est solution de l'équation $(E) : z^3 - (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z - 10(1 + i) = 0$

Posons : $P(z) = z^3 - (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z - 10(1 + i)$

z_1 est solution de (E) si, et seulement si : $P(1 + i) = 0$

$P(1 + i) = (1 + i)^3 - (7 + i)(1 + i)^2 + 2(8 + 3i)(1 + i) = 2i - 2 - 14i + 2 + 10 + 22i - 10 - 10i = 0$

$P(1 + i) = 0$ alors $z_0 = 1 + i$ est solution de l'équation (E)

c) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

$P(z) = \left(z - (1 + i)\right)(z^2 + az + b)$

En utilisant une division euclidienne, une factorisation on obtient : $P(z) = \left(z - (1 + i)\right)(z^2 - 6z + 10)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - (1 + i) = \ (1) \\ z^2 - 6z + 10 = 0\ (2) \end{cases}$

(1) Donne : $z_1 = 1 + i$

(2) $z^2 - 6z + 10 = 0$

$\Delta = 36 - 40 = -4 = (2i)^2$

$z_2 = \frac{6+2i}{2} = 3 + i; z_3 = \frac{6-2i}{2} = 3 - i$

D'où $S = \{1 + i; 3 + i; 3 - i\}$

2) $A(1 + i), B(3 + i)$ et $K(3 - i)$

a) Plaçons les points A, B et K (voir fin de l'exercice) et montrons que ABK est un triangle rectangle et isocèle.

$\frac{z_A - z_B}{z_K - z_B} = \frac{1+i-3-i}{3-i-3-i} = \frac{-1}{-i} = -i$

$\left|\frac{z_A - z_B}{z_K - z_B}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_K - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

Alors : $\begin{cases} AB = BK \\ mes(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$

Ccl : ABK est un triangle rectangle et isocèle en B

b) Γ est le cercle circonscrit au triangle ABK. Déterminons l'affixe du centre G et la valeur du rayon de Γ

ABK est inscrit dans le cercle Γ alors $[AK]$ est le diamètre de Γ

Alors : $z_G = \frac{z_A + z_K}{2} = \frac{1+i+3-i}{2} = 2$ et $r = \frac{AK}{2} = \frac{|z_A - z_K|}{2} = \sqrt{2}$

D'où $\Gamma\left(G(z_G = 2); r = \sqrt{2}\right)$

3) $(D) : |z - 1 - i| = |z - 3 + i|$

a) Justifions que $F(4 + 2i)$ appartient à Γ

$F \in \Gamma \Leftrightarrow |z_F - 1 - i| = |z_F - 3 + i| \Leftrightarrow |3 + i| = |1 + 3i|$, alors : $\sqrt{10} = \sqrt{10}$

D'où $F \in \Gamma$

b) Caractérisons géométriquement l'ensemble (D)

$|z - 1 - i| = |z - 3 + i| \Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_K|$

On obtient alors $(D): MA = MK$, on dit que (D) est la médiatrice du segment $[AK]$, donc une droite

c) Démontrons que (D) a pour équation : $-x + y + 2 = 0$

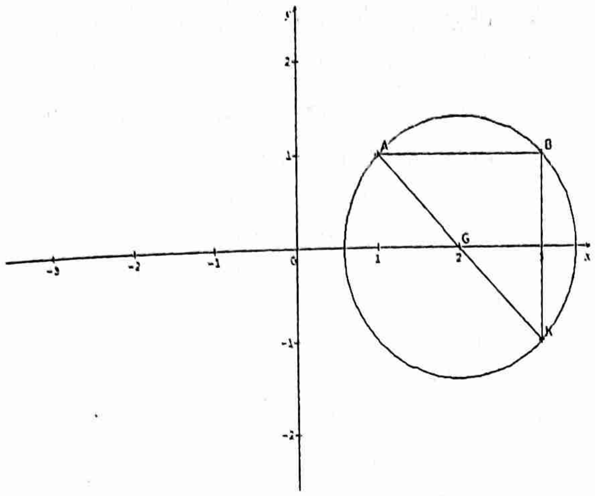
$MA = Mk \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$

Après développement et réduction, on obtient : $(D): -x + y + 2 = 0$

Déterminons les coordonnées du point E de (D) situé sur l'axe (yy').

$E \in (yy') \Leftrightarrow x_E = 0$, on obtient alors : $y = -2$

D'où $z_E = -2i$



Exercice 14

Soit (E) : $z^3-(i\alpha+2\sqrt{3})z^2+(2i\alpha\sqrt{3}+4)z-4i\alpha=0$

1) Déterminons le nombre α pour que$-2i$ soit solution de (E)

$(-2i)^3-(i\alpha+2\sqrt{3})(-2i)^2-2i(2i\alpha\sqrt{3}+4)-4i\alpha=0$

Après développement et réduction, on a :

$8\sqrt{3}+4\alpha\sqrt{3}=0$, alors : $\alpha=-2$

D'où (E) : $z^3-(2\sqrt{3}-2i)z^2+(4-4i\sqrt{3})z+8i=0$

2) Déterminons le polynôme P du 2^{nd} degré tel que : $f(z)=P(z)(z-\sqrt{3}-i)$

Avec $f(z)=z^3-(2\sqrt{3}-2i)z^2+(4-4i\sqrt{3})z+8i$

Posons $P(z)=z^2+az+b$

$f(z)=(z-\sqrt{3}-i)(z^2+az+b)$

Par développement et identification, on a

$f(z)=(z-\sqrt{3}-i)(z^2+(-\sqrt{3}+3i)z-2-2i\sqrt{3})$ avec

$P(z)=z^2+(-\sqrt{3}+3i)z-2-2i\sqrt{3}$

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) pour $\alpha=-2$

$(E)\Leftrightarrow f(z)=0$

$(z-\sqrt{3}-i)(z^2+(-\sqrt{3}+3i)z-2-2i\sqrt{3})=0$

$$\begin{cases} z-\sqrt{3}-i=0 & (1) \\ z^2+(-\sqrt{3}+3i)z-2-2i\sqrt{3}=0 & (2) \end{cases}$$

(1) Donne : $z_0=\sqrt{3}+i$

(2) : $z^2+(-\sqrt{3}+3i)z-2-2i\sqrt{3}=0$

$\Delta=(-\sqrt{3}+3i)^2-4(-2-2i\sqrt{3})=2+2i\sqrt{3}$

Soit $\delta^2=\Delta=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$ et $x^2+y^2=|\delta^2|=4$

$$\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ x^2+y^2=4 \\ 2xy=2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=6 \\ 2y^2=2 \\ xy>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}\ ou\ x=-\sqrt{3} \\ y=1\ ou\ y=-1 \\ xy>0 \end{cases}$$

On obtient : $\delta=\sqrt{3}+i\ ou\ \delta=-\sqrt{3}-i$

$$\begin{cases} z_1=\frac{\sqrt{3}-3i-\sqrt{3}-i}{2}=-2i \\ z_2=\frac{\sqrt{3}-3i+\sqrt{3}+i}{2}=\sqrt{3}-i \end{cases}$$

D'où $S=\{\sqrt{3}+i;\ -2i;\ \sqrt{3}-i\}$

4) $M(\sqrt{3}+i), N(-2i), Q(\sqrt{3}-i)$

a) Représentons M, N et Q (voir fin exercice)

b) $T=S_{(OJ)}(M)$. Démontrons que le triangle TMQ est rectangle en M

$T=S_{(OJ)}(M)\Leftrightarrow z_T=-\sqrt{3}+i$

$\frac{z_T-z_M}{z_Q-z_M}=-i\sqrt{3}\Leftrightarrow mes(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MT})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

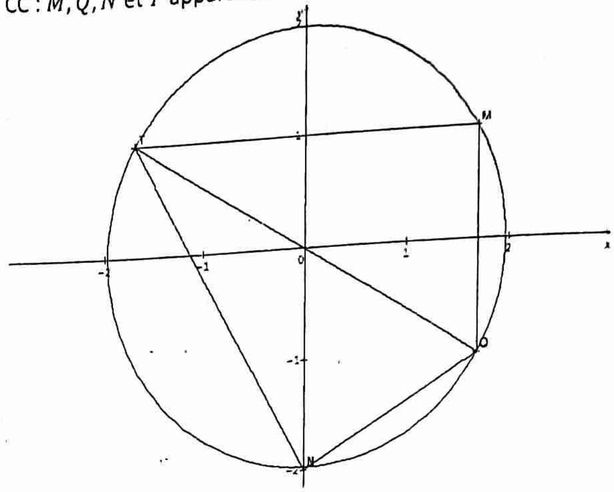
CC : TMQ est un triangle rectangle en M

c) Démontrons que les points M, Q, N et T sont cocycliques

$\frac{z_T-z_M}{z_Q-z_M}=-i\sqrt{3}$ et $\frac{z_T-z_N}{z_Q-z_N}=i\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{z_T-z_M}{z_Q-z_M}\div\frac{z_T-z_N}{z_Q-z_N}=-1$

CC : M, Q, N et T appartiennent au cercle de diamètre $[TQ]$



Exercice 15

Soit (E) : $z^3-(1-i)z^2+2(1+i)z+8i=0$

1) Résolvons (E) sachant qu'elle admet nue solution imaginaire pure $i\alpha$

Posons $P(z)=z^3-(1-i)z^2+2(1+i)z+8i$

$i\alpha$ est solution de (E) si et seulement si $P(i\alpha)=0$

$P(i\alpha)=(i\alpha)^3-(i\alpha)^2(1-i)+2i\alpha(1+i)+8i$

$=\alpha^2-2\alpha+i(-\alpha^3-\alpha^2+2\alpha+8)$

$$P(i\alpha)=0\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha^2-2\alpha=0 \\ -\alpha^3-\alpha^2+2\alpha+8=0 \end{cases}$$

Solution imaginaire pur alors : $\alpha^2-2\alpha=0$

$\alpha=0\ ou\ \alpha=2$

0 ne vérifie pas l'équation (2), alors $z_0=2i$ est la solution imaginaire pure.

$P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$

$P(z)=(z-2i)(z^2+(-1+3i)z-4)$

$$P(z)=0\Leftrightarrow\begin{cases} z_0=2i \\ z^2+(-1+3i)z-4=0 \end{cases}$$

$z^2+(-1+3i)z-4=0$

$\Delta=(-1+3i)^2-4(-4)=8-6i=x^2-y^2+2ixy$ et

$|\Delta|=|\delta^2|=x^2+y^2=10$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2-y^2=8 \\ 2xy=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=18 \\ 2y^2=2 \\ xy<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\ ou\ x=-3 \\ y=1\ ou\ y=-1 \\ xy<0 \end{cases}$$

On obtient : $\delta=3-i\ ou\ \delta=-3+i$

Alors : $z_1=-1-i\ et\ z_2=2-2i$

D'où $S=\{2i; -1-i\ ;\ 2-2i\}$

2) $A(z_0), B(z_1)\ et\ C(z_2)$

a) Déterminons le module et l'argument principal de $\frac{z_1-z_0}{z_1-z_0}$

$\frac{z_1-z_0}{z_1-z_0}=\frac{2-4i}{-1-3i}=1+i$ et $|1+i|=\sqrt{2}, Arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

Alors : $\left|\frac{z_1-z_0}{z_1-z_0}\right|=\sqrt{2}$ et $Arg\left(\frac{z_1-z_0}{z_1-z_0}\right)=\frac{\pi}{4}$

b) Déduisons en que C est l'image du point B par la similitude directe de centre A dont on précisera l'angle et le rapport

$\left|\frac{z_1-z_0}{z_1-z_0}\right|=\sqrt{2} \Leftrightarrow AC=\sqrt{2}AB$ (1)

$Arg\left(\frac{z_1-z_0}{z_1-z_0}\right)=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow Mes(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$ (2)

(1) et (2) donnent $S:\begin{cases}AC=\sqrt{2}AB\\ Mes(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}\end{cases}$

Alors S est la similitude directe de centre A, qui transforme B en C et d'angle $\frac{\pi}{4}$

3) T: $z'=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)z+\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})i$

a) Nature et éléments caractéristiques de T

$T: z'=az+b$ avec $a=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ et $b=\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})i$

alors T est une similitude directe du plan

De plus $|a|=1$ alors T est une rotation

- Centre

$\omega=\frac{\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})i}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}=2i$ alors : $\Omega(0;2)$

- L'angle

$\theta=Arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)=\frac{\pi}{4}$

b) Déterminons l'image D de C par T

T(C)=D $\Leftrightarrow z_D=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(2-2i)+\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})i$

Alors $z_D=3\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})i$ donc $D(3\sqrt{2};2-\sqrt{2})$

Exercice 16

A) $P(z)=z^2-(2+i\sqrt{2})z^2+2(1+i\sqrt{2})z-2i\sqrt{2}$

1) Montrons que $P(z)=0$ admet une solution imaginaire pur z_0

$z_0=i\alpha, P(i\alpha)=(i\alpha)^3-(2+i\sqrt{2})(i\alpha)^2+2i\alpha(1+i\sqrt{2})-2i\sqrt{2}$

$P(i\alpha)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha^2-2\alpha\sqrt{2}=0\\ -\alpha^3+\alpha^2\sqrt{2}+2\alpha-2\sqrt{2}=0\end{cases}$

z_0 imaginaire pure, $2\alpha^2-2\alpha\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow \alpha=0$ ou $\alpha=\sqrt{2}$

$\alpha=0$ ne vérifie pas, alors $z_0=i\sqrt{2}$

2) Déterminons les réels a et b tels que : $P(z)=(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b)$

Après développement, factorisation et identification, on a :

$a=-2$ et $b=2$

D'où $P(z)=(z-i\sqrt{2})(z^2-2z+2)$

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

$P(z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}z_0=i\sqrt{2}\\ z^2-2z+2=0\end{cases}$

$z^2-2z+2=0$

$\Delta=(-2)^2-4(2)=-4=(2i)^2$

On obtient : $z_1=1+i$ et $z_2=1-i$

D'où $S=\{i\sqrt{2};1+i;1-i\}$

B) $z_A=1+i, z_B=1-i, z_J=i\sqrt{2}$ et $z_K=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

1) Plaçons A, B, J et K (voir fin exercice)

2) L symétrique de J par rapport à K. Déterminons z_L

$\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{KL} \Leftrightarrow z_k-z_J=z_L-z_K \Leftrightarrow z_L=2z_K-z_J$

D'où $z_L=-\sqrt{2}$

3) Montrons que les points A, B, J et L appartiennent à un meme cercle dont on précisera le centre et le rayon.

$OA=|z_A|=\sqrt{2}; OB=|z_B|=\sqrt{2}; OL=|z_L|=\sqrt{2};$

$OJ=|z_J|=\sqrt{2}$ alors A, B, J et L appartiennent au cercle de centre O et de rayon $r=\sqrt{2}$

4) $D(-1+i), r:\begin{cases}r(O)=0\\ r(J)=D\end{cases}$

a) Déterminons une mesure de l'angle de la rotation r

$\begin{cases}r(O)=0\\ r(J)=D\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\ az_J=z_D\end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{z_D}{z_J}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arg(a)=\frac{\pi}{4}$, alors l'angle de la rotation est $\alpha=\frac{\pi}{4}$

b) Soit $C=r(L)$. Déterminons z_C

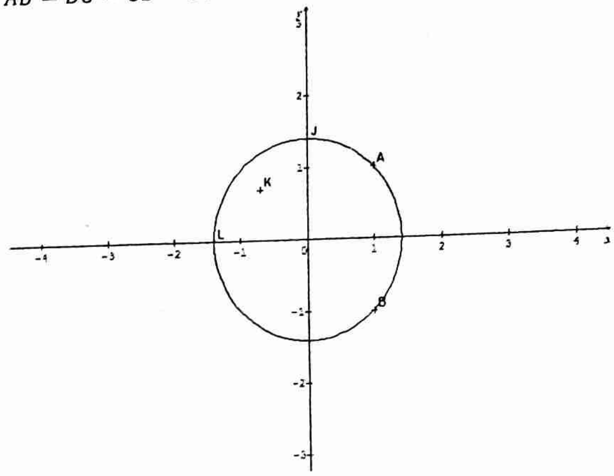
$r: z'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ et

$r(L)=C \Leftrightarrow z_C=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-\sqrt{2})$

Alors $z_C=-1-i$

5) Nature du quadrilatère $ABCD$

$AB=BC=CD=DA=2$ alors $ABCD$ est un carré.



Exercice 17

$f: z'=z^2; M(z)et\ M'(z')$

1) Déterminons l'ensemble Γ_1 des point M tels que : $f(M)=M$

$f(M)=f(M) \Leftrightarrow z^2=z \Leftrightarrow z=0$ ou $z=1$

Alors : $\Gamma_1=\{O;\Omega(1,0)\}$

2) $A(a=\sqrt{2}-i\sqrt{2})$

a) Exprimons a sous forme exponentielle

$|a|=2$ et $\arg(a)=-\frac{\pi}{4}+k2\pi$ alors : $a=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) Déduisons en les affixes de deux antécédents de A par f.

$f(M) = A \Leftrightarrow z^2 = a \Leftrightarrow z^2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Posons $z = re^{i\theta} \Rightarrow z^2 = r^2e^{2i\theta}$

$z^2 = z^2 \Leftrightarrow r^2e^{2i\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Par identification, on a :

$\begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\theta = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi \end{cases}$

$z_k = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)}$ avec $k = \{0; 1\}$

Pour $k = 0$, on a : $z_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$

Pour $k = 1$, on a : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$

3) Déterminons l'ensemble Γ_2 des points M tels que z' soit imaginaire pur

$z^2 = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$

z' est imaginaire pure $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$

Alors : Γ_2 est la réunion des droites d'équations respectives : $y = x$ et $y = -x$

4) $\Omega MM'$ un triangle rectangle et isocèle direct en Ω

a) A l'aide de la rotation $r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$. Montrons que $M \in \Gamma_3$ si et seulement si :

$z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$

$z' - 1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1) \Leftrightarrow z' = iz + 1 - i$

$r(M) = M'$ et $f(M) = M'$ alors $z^2 = iz + 1 - i$

Ω étant différent de M, alors :

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$

b) Montrons que $z^2 - iz - 1 + i = (z - 1)(z + 1 - i)$

$(z - 1)(z + 1 - i) = z^2 + z - iz - z - 1 + i$

Alors : $z^2 - iz - 1 + i = (z - 1)(z + 1 - i)$

c) Déduisons-en Γ_3

$\Gamma_3 :\ z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$

$z^2 - iz - 1 + i = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1 + i$

Or $z \neq 1$, alors $z = -1 + i$

D'où $\Gamma_3 = B(-1; 1)$

5) $M(z)$ tel que $z \neq \{0; 1\}$

a) Exprimons $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ en fonction de z

$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\left(\frac{z^2}{z}\right) = \arg(z)$

Alors $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg(z)\ (2\pi)$

b) Déduisons en l'ensemble Γ_4 des points $M \neq \{O, \Omega\}$ tels que O, M, M' soient alignés

O, M, M' sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$

alors z est réel, on déduit :

Γ_4 est la droite (xx'), privée des points O et Ω

Exercice 18

1) $z = x + iy$

a) Z est sous forme algébrique avec $Re(z) = x$ et $Im(z) = y$

b) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $\alpha = \arg(z), \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{x}{|z|} \\ \sin\alpha = \frac{y}{|z|} \end{cases}$

d) $r(O, \theta)$ telle que : $r(M) = M'$. Exprimons z' en fonction de z et θ

$r : z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$

$z_0 = 0$ alors : $z' = e^{i\theta}z$

2) $(E) : \frac{1}{2}z^2 + 4\sqrt{3}z + 32 = 0$

a) Résolvons (E)

$\Delta = (4\sqrt{3})^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(32) = -16 = (4i)^2$

$z_1 = -4\sqrt{3} + 4i;\ z_2 = -4\sqrt{3} - 4i$

$S = \{-4\sqrt{3} + 4i; -4\sqrt{3} - 4i\}$

b) $A(a = -4\sqrt{3} - 4i); B(b = -4\sqrt{3} + 4i)$. Calculons OA ; OB et AB

$OA = |z_A| = 8$, $OB = |z_B| = 8$ et $AB = |z_B - z_A| = 8$

Nature du triangle OAB : OAB est un triangle équilatéral car $OA = OB = AB = 8$

c) $C(c = \sqrt{3} + i)$ et D son image par la rotation $r\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$

$r(C) = D \Leftrightarrow z_D = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} + i)$, alors $z_D = 2i$

d) $G = bar\{(O,1); (D,-1); (B,-1)\}$

- Montrons que G a pour affixe : $g = -4\sqrt{3} + 6i$

$z_G = g = \frac{0-2i+4\sqrt{3}-4i}{1-1-1} = -4\sqrt{3} + 6i$, alors

$g = -4\sqrt{3} + 6i$

- Plaçons les points A, B, C et G (voir fin exercice)

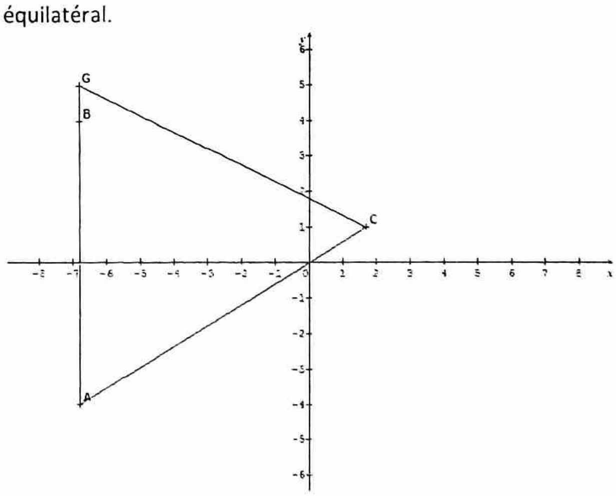
3) Mesure en radians de $(\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GC})$

$mes(\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GC}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{GC}}}{z_{\overrightarrow{GA}}}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_G}{z_A - z_G}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Alors $mes(\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GC}) = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nature du triangle GAC

$GA = GC$ et $mes(\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GC}) = \frac{\pi}{3}$ alors GAC est un triangle équilatéral.



Exercice 19

$A(z_A = 2 + 2i), B(z_B = 1 + \sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})$

1) Ecrivons $Z = \frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique

$Z = \frac{z_B}{z_A} = \frac{1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2+2i} = \frac{(1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3}))(2-2i)}{8}$

Alors : $Z = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2) Déterminons OA et AB

$OA = |z_A| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$ alors $OA = 2\sqrt{2}$

$AB = |z_B - z_A| = |-1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})| = 2\sqrt{2}$ alors : $AB = 2\sqrt{2}$

Vérifions que : $OB = 2(1+\sqrt{3})$

$OB = |1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})| = \sqrt{4(4+2\sqrt{3})}$ $OB = \sqrt{(2(1+\sqrt{3})^2} = 2(1+\sqrt{3})$

Alors : $OB = 2(1+\sqrt{3})$

3) Déterminons en radians la mesure principale des angles $(\vec{u}; \overrightarrow{OA})$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{OB})$

$Mes(\vec{u}; \overrightarrow{OA}) = Arg(z_{\overrightarrow{OA}}) = Arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}$

Alors $Mes(\vec{u}; \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}$

$Mes(\vec{u}; \overrightarrow{OB}) = Arg(z_{\overrightarrow{OB}}) = Arg(1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})$

$$Soit\ \theta \in \mathbb{R}\ tel\ que : \begin{cases} cos\theta = \frac{1+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{3+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Alors : $Mes(\vec{u}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$

Déduisons en une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OB})$$
$$= -(\vec{u}; \overrightarrow{OA}) + (\vec{u}; \overrightarrow{OB})$$

$mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + k2\pi$

Alors : $mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4) Déduisons-en $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

$Z_{FA} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et

$Z_{FT} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}\left(cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}\right)$

$Z_{FT} = Z_{FA} \Leftrightarrow \frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}\left(cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Par identification, on :

$$\begin{cases} \frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} cos\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

5) Déterminons l'affixe du point D image de A par la rotation de centre O et d'angle

$\alpha = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{6}$

$r : z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$

$r(A) = D \Leftrightarrow z_D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2+2i)$

Alors : $z_D = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

Exercice 20

1) $(E) : z^3 + (-4-6i)z^2 + (-4+20i)z + 16 - 16i = 0$

a) Montrons que cette équation admet une solution réelle z_0

$z_0 = \alpha$, alors : $\alpha^3 + z^2(-4-6i) + \alpha(-4+20i) + 16 - 16i = 0$

On obtient : $\begin{cases} \alpha^3 - 4\alpha^2 - 4\alpha + 16 = 0 \\ -6\alpha^2 + 20\alpha - 16 = 0 \end{cases}$

z_0 alors : $-6\alpha^2 + 20\alpha - 16 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha^2 - 10\alpha + 8 = 0$

$\Delta' = 25 - 24 = 1$

$\alpha_1 = 2$ ou $\alpha_2 = \frac{4}{3}$

$\alpha_2 = \frac{4}{3}$ ne vérifie pas alors : $z_0 = 2$ est la solution réelle

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)(az^2 + bz + c) = 0$

En utilisant un développement, le tableau de Orner ou une division euclidienne, on obtient :

$(z-2)(z^2 - (2+6i)z - 8 + 8i) = 0$

$\begin{cases} z - 2 = 0 & (1) \\ z^2 - (2+6i)z - 8 + 8i = 0 & (2) \end{cases}$

$z^2 - (2+6i)z - 8 + 8i$

$\Delta = (2+6i)^2 - 4(-8+8i) = -8i = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $x^2 + y^2 = 8$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\ ou\ x = -2 \\ y = 2\ ou\ y = -2 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Alors $\delta = 2 - 2i$ ou $\delta = -2 + 2i$

$z_1 = \frac{2+6i+2-2i}{2} = 2 + 2i;\ z_2 = \frac{2+6i-2+2i}{2} = 4i$

$S = \{2; 2+2i; 4i\}$

c) Démontrons que les 3 solutions de cette équation sont éléments d'une suite géométrique de 1[er] terme z_0 et de raison q que l'on précisera

z_0, z_1 et z_2 sont éléments d'une suite géométrique de 1[er] terme $z_0 \Leftrightarrow z_0 z_2 = {z_1}^2$

$z_0 z_2 = 2(4i) = 8i$ et ${z_1}^2 = (2+2i)^2 = 8i$,

alors $z_0 z_2 = {z_1}^2$

Ccl : z_0, z_1 et z_2 sont éléments d'une suite géométrique de 1[er] terme z_0 et de raison $q = \frac{z_1}{z_0} = 1 + i$

2) $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère du plan P

a) Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4$

Posons $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$

$|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4 \Leftrightarrow |z'| = 4 \Leftrightarrow OM' = 4$

$(M' = S(M))$

$OM' = 4 \Leftrightarrow M' \in C'(O, 4)$, or $\begin{cases} S(A) = 0 \\ r' = kr \end{cases}$ avec $r' = 4$ et $k = 2$

$z_0 = (1 - i\sqrt{3})z_A - \sqrt{3} - i \Leftrightarrow z_A = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}} = i$

$r' = kr \Leftrightarrow r = \frac{r'}{k} = \frac{4}{2} = 2$

L'ensemble des points $M(z)$ est le cercle de centre A et de rayon 2

b) Déterminons l'écriture complexe de la similitude directe qui transforme $A(i)$ en O et $B(\sqrt{3})$ en $B'(4i)$

Soit $S : z' = az + b$

$\begin{cases} S(A) = 0 \\ S(B) = B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = 0 \ (1) \\ az_B + b = z_{B'} \ (2) \end{cases}$

(1)-(2) donne: $a = \frac{-4i}{-\sqrt{3}+i} = -1 + i\sqrt{3}$

$az_A + b = 0 \Leftrightarrow b = -az_A = -i(-1 + i\sqrt{3}) = \sqrt{3} + i$

Alors $S : z' = (-1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} + i$

Eléments caractéristiques de S

- Centre

$\omega = \frac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{5i}{7}$, alors $\Omega\left(\frac{\sqrt{3}}{7}, \frac{5}{7}\right)$

- Rapport

$k = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$, alors $k = 2$

- Angle

$\alpha = Arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$, alors $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

c) Expression analytique de S

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$S : x' + iy' = (-1 + i\sqrt{3})(x + iy) + \sqrt{3} + i = -x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} + i(x\sqrt{3} - y + 1)$

Par identification, on a :

$S : \begin{cases} x' = -x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} - y + 1 \end{cases}$

<u>Exercice 21</u>

$f(z) = (-1 + i)z + 1 + i$

1) Donnons la nature et les éléments caractéristiques de la transformation plane S associée à f

$S : z' = (-1 + i)z + 1 + i$ avec $a = -1 + i$ et $b = 1 + i$ alors S est une similitude directe du plan.

- Centre

$\omega = \frac{1+i}{1+1-i} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ alors $\Omega\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$

- Rapport

$k = |-1 + i| = \sqrt{2}$

- Angle

$\alpha = Arg(-1 + i)$ alors $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

2) Expression analytique de S

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$x' + iy' = (-1 + i)(x + iy) + 1 + i$
$= -x - y + 1 + i(x - y + 1)$

Par identification, on :

$S : \begin{cases} x' = -x - y + 1 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$

3) $(D) : y = 2x - 1$

Déterminons une équation de la droite (D'), image de la droite (D) par S

$\begin{cases} x' = -x - y + 1 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$

En exprimant x et y en fonction de x' et y', le système devient : $\begin{cases} x = \frac{-x'+y'}{2} \\ y = \frac{-x'-y'+2}{2} \end{cases}$

$S((D)) = (D')$, alors $(D') : \frac{-x'-y'+2}{2} = 2\left(\frac{-x'+y'}{2}\right) - 1$

D'où $(D') : x - 3y + 4 = 0$

4) $C(I(1; 2), r = 2)$ et (C') son image par S

Donnons une équation du cerce (C')

$C(I(1; 2), r = 2)$ alors $C'(I', r')$ avec $I' = S(I)$ et $r' = kr$

$z_{I'} = (-1 + i)(1 + 2i) + 1 + i = -2$ alors I'(-2, 0)

$r' = kr = 2\sqrt{2}$

D'où $C' : (x + 2)^2 + y^2 = 8$

<u>Exercice 22</u>

Soit $S : z' = (1 + i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

1) Démontrons que S admet un unique point invariant J dont déterminera l'affixe

$S(M) = M \Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2} = z \Leftrightarrow i\sqrt{3}z = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

On obtient $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où S admet un unique point invariant J d'affixe $z_J = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de S

$S : z' = az + b$ avec $a = 1 + i\sqrt{3}$; $b = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $|a| = 2$

alors S est une similitude plane directe

- Centre : $J\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- Rapport : $k = |1 + i\sqrt{3}| = 2$
- Angle : $\alpha = Arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

3) $A(-1)$

a) Traçons le cercle de diamètre $[JA]$(voir fin de l'exercice)

Soit $\Omega(\omega)$ le centre du cercle (C)

$\omega = \frac{z_A+z_J}{2} = -\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) Caractérisons et traçons le cercle (C'), image de (C) par S

Soit $C(\Omega, r)$ avec $r = \frac{AJ}{2} = \frac{1}{2}$ et $C'(\Omega', r')$

$z_{\Omega'} = (1 + i\sqrt{3})\left(-\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ alors $\Omega' = O$

$r' = kr = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

D'où $C'(O, r' = 1)$

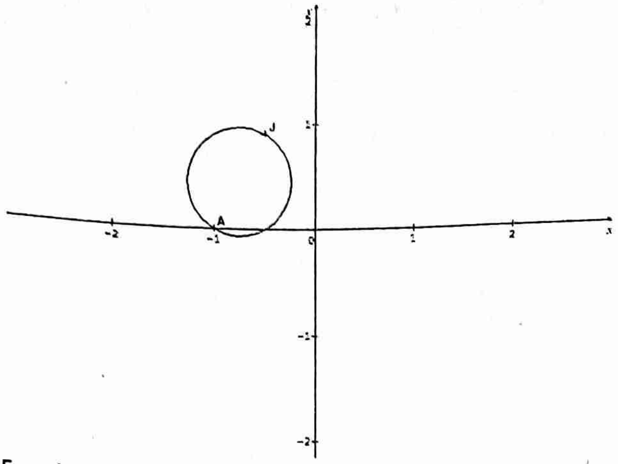
4) Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

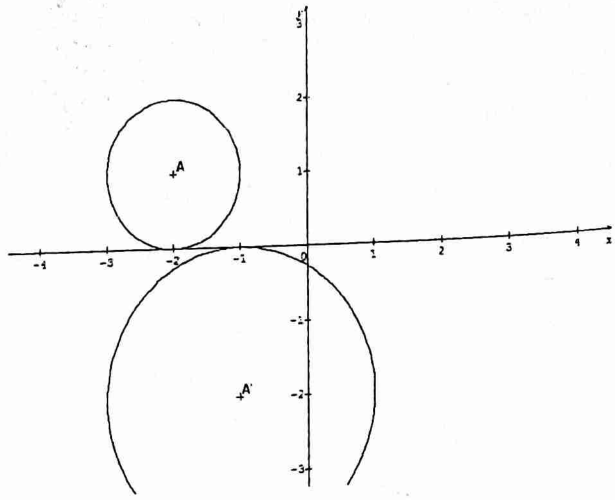
$$\left|(1 + i\sqrt{3})z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$$

$\left|(1 + i\sqrt{3})z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow OM' = 1$

$OM' = 1 \Leftrightarrow M' \in C'(O, 1)$

Alors l'ensemble des points $M(z)$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$





Exercice 23

$F : z' = 2z + 3 - 4i$

1) $A(-2+i)$

a) Déterminons l'affixe du point $A' = F(A)$

$A' = F(A) \Leftrightarrow z_{A'} = 2(-2+i) + 3 - 4i = -1 - 2i$

Alors : $z_{A'} = -1 - 2i$

b) Plaçons A et A' (voir fin exercice)

2) Montrons que F admet un unique point invariant Ω

F(M=M $\Leftrightarrow 2z + 3 - 4i = z \Leftrightarrow z = -3 + 4i$

Alors $\omega = -3 + 4i$ et $\Omega(-3, 4)$

- Démontrons que pour tout point $M(z)$ dont l'image par F est $M'(z')$, on a :

$z' - \omega = 2(z - \omega)$ (1)

$z' - \omega = 2z + 3 - 4i + 3 - 4i = 2z + 6 - 8i$

On obtient : $z' - \omega = 2(z - (-3+4i)) = 2(z - \omega)$

D'où la relation (1)

- Traduisons vectoriellement la relation (1)

$z' - \omega = 2(z - \omega) \Leftrightarrow z_{M'} - z_{\Omega} = 2(z_M - z_{\Omega})$

$z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = 2z_{\overrightarrow{\Omega M}}$

D'où $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$

- Nature de F

F est l'homothétie de centre Ω et de rapport 2

3) Déterminons l'ensemble Γ de points $M(z)$ tels que : $|z + 2 - i| = 1$

Posons $z = x + iy$, alors : $|z + 2 - i| = 1 \Leftrightarrow$

$|x + 2 + i(y-1)| = 1$

On obtient Γ: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$

Γ est le cercle de centre $A(-2, 1)$ et de rayon $r = 1$

- Déterminons Γ', image de Γ par F

$\Gamma(A, 1)$ alors $\Gamma'(A', 2)$ car $k = 2$ et $F(A) = A'$

D'où Γ': $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$

Exercice 24

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

$\Delta' = 36 - 612 = -576 = (24i)^2$

$z_1 = \frac{6+24i}{4} = \frac{3}{2} + 6i$; $z_2 = \frac{6-24i}{4} = \frac{3}{2} - 6i$

$S = \left\{\frac{3}{2} + 6i; \frac{3}{2} - 6i\right\}$

2) $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$, $z_P = 3 + 2i$ et $\vec{w}(z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i)$

a) Déterminons l'affixe z_Q du point Q, image de B par la translation de vecteur $\vec{w}$

On a $t : z' = z - 1 + \frac{5}{2}i$

$t(B) = Q \Leftrightarrow z_Q = \frac{3}{2} - 6i - 1 + \frac{5}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$

Alors $z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$

b) Déterminons l'affixe z_R du point R, image du point P par $h\left(C, -\frac{1}{3}\right)$

On a : $h : z' - z_C = -\frac{1}{3}(z - z_C)$

$h(P) = R \Leftrightarrow z_R - z_C = -\frac{1}{3}(z_P - z_C)$

$\Leftrightarrow z_R = -\frac{1}{3}(z_P - z_C) + z_C$

Alors $z_R = -5 - i$

c) Déterminons l'affixe du point S, image de P par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

On a : $r : z' - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$

$r(P) = S \Leftrightarrow z_S - z_A = -i(z_P - z_A)$

$\Leftrightarrow z_S = -(z_P - z_A) + z_A$

Alors : $z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$

d) Plaçons P, Q, R et S dans le plan précédent (voir figure)

e) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

$PQRS$ est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR} \Leftrightarrow z_S - z_P = z_R - z_Q$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i - 3 - 2i = -5 - i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$

$$\Leftrightarrow -\frac{11}{2}+\frac{5}{2}i = -\frac{11}{2}+\frac{5}{2}i$$

Alors $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ et par conséquent $PQRS$ est un parallélogramme

f) Calculons $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$

$$\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{-5-i-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i}{3+2i-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i} = \frac{-11+5i}{5+11i} = \frac{i(5+11i)}{5+11i} = i$$

Alors $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = i$

Déduisons en la nature du triangle PQR

$RQ = PQ$ et $Mes\left(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}\right) = \frac{\pi}{2}$ alors PQR est un triangle rectangle et isocèle en Q.

g) Justifions que les points P, Q, R et S sont cocycliques .

$\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = i$ et $\frac{z_R - z_S}{z_P - z_S} = -i$ et $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} \div \frac{z_R - z_S}{z_P - z_S} = -1$

Alors P, Q, R et S appartiennent à un même cercle de diamètre $[PR]$

Exercice 26

$f_\lambda : z' = (\alpha + i\beta)z + 1 - i\lambda$

1) Déterminons α et β pour que f_λ soit une similitude directe du plan de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

$|\alpha + i\beta| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2$ et $\arg(\alpha + i\beta) = -\frac{\pi}{2}$ donne :

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\beta}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\alpha}{2} = 0 \\ \frac{\beta}{2} = -i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 0 \\ \beta = -2i\end{cases}$$

D'où : $f_\lambda : z' = -2iz + 1 - i\lambda$

2) $\alpha = 0$ et $\beta = -2i$

a) Déterminons l'affixe du centre Ω en fonction de λ

$$\omega = \frac{1-i\lambda}{1+2i} = \frac{(1-i\lambda)(1-2i)}{5} = \frac{1-2\lambda}{5} + i\frac{-2-\lambda}{5}$$

Alors : $\omega = \frac{1-2\lambda}{5} + i\frac{-2-\lambda}{5}$

b) Déterminons l'ensemble décrit par Ω lorsque λ varie

Posons $\omega = x + iy$ alors : $\begin{cases}x = \frac{1-2\lambda}{5} \\ y = \frac{-2-\lambda}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x = 1-2\lambda \\ \lambda = -5y-2\end{cases}$

Alors on obtient : $x - 2y - 1 = 0$

Lorsque λ varie Ω décrit la droite d'équation $x - 2y - 1 = 0$

3) $A(2)$ et $B(-i)$

a) Déterminons λ de façon que B soit l'image de A par f_λ

$f_\lambda(A) = B \Leftrightarrow -i = -4i + 1 - i\lambda \Leftrightarrow \lambda = -3 - i$

D'où $i\lambda = -1 + 3i$ et $f : z' = -2iz + 3i$

b) Expression analytique de f

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$x' + iy' = -2i(x+iy) + 3i = -2y + i(-2x+3)$

Par identification, on a

$$f : \begin{cases}x' = -2y \\ y' = -2x + 3\end{cases}$$

c) Eléments caractéristiques et écriture complexe de f^{-1}

$f(\Omega, k, \alpha)$ alors $f^{-1}(\Omega, \frac{1}{k}, -\alpha)$

$\Omega\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$; $k' = \frac{1}{2}$; $\alpha' = \frac{\pi}{2}$

$f^{-1} : z' - \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i\right) = \frac{1}{2}i\left(z - \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i\right)\right)$

Alors $f_{-1} : z' = \frac{1}{2}iz + \frac{3}{2}$

Exercice 27

$f : z' = \frac{2iz-4+2i}{z-3+i}$; $z_A = 3 - i$ et $z_B = -1 - 2i$

1) Interprétons géométriquement $|z'|$ et $\arg(z')$

$z' = \frac{2i(z-(-1-2i))}{z-(3-i)} = \frac{2i(z_M - z_B)}{z_M - z_A}$ alors :

$|z'| = \frac{2|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|} = \frac{2MB}{MA}$

$\arg(z') = \arg(2i) + \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) + k2\pi$

Alors $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + mes\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

Exprimons x' et y'en fonction de x et y

$x' + iy' = \frac{-2y-4+i(2x+2)}{x-3+i(y+1)}$

Alors $\begin{cases}x' = \frac{8y-2x+14}{(x-3)^2+(y+1)^2} \\ y' = \frac{2x^2+2y^2+6y-4x-2}{(x-3)^2+(y+1)^2}\end{cases}$

3) Déterminons et construisons l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

a) $|z'| = 1$

$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{2MB}{MA} = 1 \Leftrightarrow 2MB = MA$

$\Leftrightarrow 4MB^2 = MA^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$

En posant :

$I = bar\{(A,1);(B,2)\}$ et $J = bar\{(A,1);(B,-2)\}$

On obtient alors : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$

Ccl : L'ensemble des points $M(z)$ est le cercle de diamètre $[IJ]$

b) $|z'| = 2$

$|z'| = 2 \Leftrightarrow \frac{2MB}{MA} = 2 \Leftrightarrow 2MB = 2MA$

On obtient : $MA = MB$

Ccl : L'ensemble des points $M(z)$ est la médiatrice du segment $[AB]$, privée du point A.

c) Z' est réel

$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 6y - 4x - 2 = 0$

Alors : $x^2 - 2x + y^2 + 3y - 1 = 0$

Alors : $(x-1)^2 - 1 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 1 = 0$

On obtient : $(x-1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{17}{4}$

Ccl : L'ensemble des points $M(z)$ est le cercle de centre $K\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{17}}{2}$

d) Z' est imaginaire pur

$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow 8y - 2x + 14 = 0$

On obtient : $4y - x + 7 = 0$

Ccl : L'ensemble des points $M(z)$ est la droite d'équation $-x + 4y + 7 = 0$

Exercice 28

1) $S_1 : \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Montrons que $z' = az + b$

$x' + iy' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)y + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + iy\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x + iy) + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

En posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on aura :

$Z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nature et éléments caractéristiques de S_1

$S_1 : z' = az + b$ avec $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. De plus $|a| = 1$

Alors S_1 est une rotation

- Centre

$\omega = \dfrac{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = 1$, alors $\Omega(1, 0)$

- Angle

$\alpha = Arg\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

2) $A(z_A = 1)$ et $B(z_B = -1)$

Démontrons qu'il existe une similitude directe qui transforme A en O et B en B

Posons $S_2 : z' = az + b$

$\begin{cases} az_A + b = 0 \ (1) \\ az_B + b = z_B \ (2) \end{cases}$

(1)-(2) : donne $a = \frac{z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}$ dans (1) donne : $b = -\frac{1}{2}$

D'où $S_2 : z' = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$

Nature et éléments caractéristiques de S_2

$S_2 : z' = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$ avec $a = -\frac{1}{2}$ alors S_2 est une homothétie de rapport $k = -\frac{1}{2}$ et de centre $B(-1, 0)$

3) Nature et éléments caractéristiques de $S_1 \circ S_2$

$S_1 \circ S_2(M) = M_1$ alors : $z_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z'' + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

On obtient $S_1 \circ S_2 :\ z_1 = \left(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{7}{4} - \frac{3i\sqrt{3}}{4}$

$S_1 \circ S_2$ est une similitude plane directe de centre $\Omega\left(\frac{11}{7}, -\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)$, de rapport $k = \frac{1}{2}$ et d'angle $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 30

$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$

1) Comparons $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$

$P(\bar{z}) = \bar{z}^4 - 4\bar{z}^3 + 9\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 8$ et

$\overline{P(z)} = \overline{z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8} = \bar{z}^4 - 4\bar{z}^3 + 9\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 8$

Alors $P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = \bar{z}^4 - 4\bar{z}^3 + 9\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 8$

Calculer $P(i)$, déduisons en une, puis deux solutions de l'équation $P(z) = 0$

$P(i) = i^4 - 4i^3 + 9i^2 - 4i + 8 = 1 + 4i - 9 - 4i + 8$

Alors $P(i) = 0$

$P(i) = 0 \Leftrightarrow P(-i) = 0$

Alors i et $-i$ sont solutions de $P(z) = 0$

2) Mettons $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du 2nd degré

$P(z) = (z^2 + 1)(z^2 + az + b)$

En développant et en en identifiant, on : $a = -4$ et $b = 8$

D'où $P(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 4z + 8)$

3) Résolvons l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1)(z^2 - 4z + 8)$

Alors : $\begin{cases} z^2 + 1 = 0 \ \ (1) \\ z^2 - 4z + 8 = 0 \ (2) \end{cases}$

(1): $z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_1 = i\,;\ z_2 = -i$

$z^2 - 4z + 8 = 0$

$\Delta = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$

$z_3 = 2 + 2i;\ z_4 = 2 - 2i$

D'où $S = \{-i; i; 2 + 2i; 2 - 2i\}$

Calculons la somme des racines et le produit de racines

$s = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 4 \ \ et \ p = z_1.z_2.z_3.z_4 = 9$

Calculs des Probabilités

Exercice 1

L'urne U_1 : 3 boules noires et 2 boules blanches soit 5 boules

L'urne U_1 : 2 boules noires et 2 boules blanches soit 4 boules

On tire simultanément deux boules de U_1 et une boule de U_2

1) Déterminons le nombre de tirages possibles

Ω l'univers des possibles

$card\Omega = C_5^2 \times C_4^1 = 40$

2) Calculons la probabilité de chacun des événements suivants

A : « toues les boules sont de même couleur »

$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega}$ avec $cardA = C_3^2.C_2^1 + C_2^2.C_2^1 = 6 + 2 = 8$

Alors : $P(A) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

B : « le tirage comporte exactement une boule blanche »

$Card\ B = C_2^1.C_3^1.C_2^1 + C_3^2.C_2^1 = 18$

Alors $P(B) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

C : « le tirage comporte exactement deux boules blanches »

$card\ C = C_2^2.C_2^1 + C_2^1.C_3^1.C_2^1 = 14$

Alors : $P(C) = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$

Exercice 2

L'urne contient : 7 boules blanches et 5 boules noires soit 12 boules

1) Tirage successif sans remise de 3 boules

Calculons la probabilité

a) De tirer 3 boules de même couleur

Soit A cet événement, alors $P(A) = \frac{A_7^3+A_5^3}{A_{12}^3} = \frac{270}{1320}$

Alors : $P(A) = \frac{9}{44} = 0{,}204$

b) De ne tirer que 3 boules blanches

Soit B cet événement, alors : $P(B) = \frac{A_7^3}{1320} = \frac{21}{132}$

D'où $P(B) = \frac{7}{44} = 0{,}159$

c) De tirer au plus deux boules blanches

Tirer au plus deux blanches signifie : tirer 2, 1 ou 0 boule blanches, alors $card\ C = 3A_7^2.A_5^1 + 3A_7^1.A_5^2 + A_5^3 = 107$

D'où $P(C) = \frac{107}{132} = 0.811$

d) De tirer exactement une boule blanche.

Soit D cet événement, alors : $card\ D = 3A_7^1.A_5^2 = 420$

Alors : $P(D) = \frac{42}{132}$

D'où : $P(D) = \frac{7}{22} = 0{,}318$

e) De tirer au moins une boule noire

E soit cet événement et $\bar{E}$: « tire 3 boules blanches »

$P(\bar{E}) = \frac{7}{44}$ alors $P(E) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$

D'où $P(E) = \frac{37}{44} = 0{,}841$

2) On tire successivement avec remise 3 boules de l'urne

Reprenons les questions a) b) et e)

$Card\ A = 7^3 + 5^3 = 343 + 125 = 468$ et

$card\ \Omega = 12^3 = 1728$

Alors $P(A) = \frac{468}{1728} = 0{,}271$

$card\ B = 7^3 = 343$

Alors $P(B) = \frac{343}{1728} = 0{,}199$

$P(E) = 1 - \frac{343}{1728} = \frac{1728-343}{1728}$

Alors : $P(E) = \frac{1385}{1728} = 0{,}802$

Exercice 4

Dé cubique : 2 faces bleues et 4 faces rouges

1) On lance 5 fois de suite le dé

Soit B : « obtenir une face bleue » et R : « obtenir une face rouge »

Alors : $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(R) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

a) Calculons la probabilité d'obtenir 4 fois face bleue et une fois face rouge dans cet ordre

Soit P_1 cette probabilité, alors : $P_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)$

D'où $P_1 = 0{,}00823$

b) Calculons la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une fois face rouge

Il s'agit d'une loi binomiale avec $n = 5, p = \frac{1}{3}$ et $q = \frac{2}{3}$

Soit P_2 cette probabilité, alors $= C_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)$

D'où $P_2 = 0{,}04115$

2) On lance n fois le dé. Déterminons le nombre minimal des lancers pour que la probabilité d'obtenir au moins une face bleue soit supérieur ou égal à $\frac{6}{7}$

Soit C cet événement et $\bar{C}$ son événement contraire : « obtenir n fois face rouge »

$P(\bar{C}) = C_n^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Alors $P(C) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$P(C) \geq \frac{6}{7} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq \frac{6}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{7}$

On obtient $n \geq \frac{-ln7}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \geq 4{,}79$

D'où $n = 5$

Exercice 5

4 boules rouges, 3 boules vertes et n boules jaunes soit $n + 7$ boules dans l'urne

On tire simultanément deux de l'urne

Soit A : « obtenir deux boules de même couleur » et

B : « obtenir deux boules de couleur différentes »

Soit Ω l'univers des possibles

1) Calculons $P(A)$ et $P(B)$

$P(A) = \frac{card\ A}{card\Omega} = \frac{C_4^2+C_3^2+C_n^2}{C_{n+7}^2}$

Alors $P(A) = \frac{n^2-n+18}{(n+7)(n+6)}$

$P(B) = \frac{C_4^1C_3^1+C_3^1C_n^1+C_4^1C_n^1}{C_{n+7}^2}$

Alors $P(B) = \frac{14n+24}{(n+7)(n+6)}$

2) On suppose que la probabilité 2 boules jaunes est $\frac{3}{13}$

Déterminons $n, P(A)$ et $P(B)$

Soit J : « obtenir deux boules jaunes »

$P(J) = \frac{card\ J}{crd\ \Omega} = \frac{C_n^2}{C_{n+7}^2} = \frac{n^2-n}{(n+7)(n+6)}$

$P(J) = \frac{3}{13} \Leftrightarrow \frac{n^2-n}{(n+7)(n+6)} = \frac{3}{13} \Leftrightarrow 5n^2 - 26n - 126 = 0$

On obtient : $n = 7$ ou $n = -\frac{9}{5}$

D'où $n = 7, P(A) = \frac{30}{91}$ et $P(B) = \frac{61}{91}$

3) On suppose $n = 7$. On répète 5 fois l'expérience précédente

Soit X = nombre de fois où l'événement A est réalisé.

Il s'agit de la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et

$p = P(A) = \frac{30}{91}$

Déterminons la loi de probabilité de X

Les valeurs possibles de X sont : $\{0; 1; 3; 3; 4; 5\}$

$P(X = 0) = C_5^0\left(\frac{30}{91}\right)^0\left(\frac{61}{91}\right)^5$

$P(X = 1) = C_5^1\left(\frac{30}{91}\right)^1\left(\frac{61}{91}\right)^4$

$P(X = 2) = C_5^2\left(\frac{30}{91}\right)^2\left(\frac{61}{91}\right)^3$

$P(X = 3) = C_5^3\left(\frac{30}{91}\right)^3\left(\frac{61}{91}\right)^2$

$P(X=4)=C_5^4\left(\frac{30}{91}\right)^4\left(\frac{61}{91}\right)^1$

$P(X=5)=C_5^5\left(\frac{30}{91}\right)^5\left(\frac{61}{91}\right)^0$

Exercice 6

I) Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux événements.

Dans le cas d'équiprobabilité, calculons la probabilité des événements : A, A/B, $A\cap B$, $(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)$

$P(A)=\frac{cardA}{card\,\Omega}$, $P_B(A)=\frac{card(A\cap B)}{card\,B}$,

$P(A\cap B)=\frac{card(A\cap B)}{card\,\Omega}$,

$P((A\cap\bar{B})\cup(A\cap B))=\frac{card(A\cap\bar{B})+card(A\cap B)-cardA}{card\,\Omega}$

II) – Le 1[er] jour, la ville est délestée

- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$
- Si la ville n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$

D_n : « la ville est délestée le n-ième jour » et $P_n=P(D_n)$

1) Démonstration des égalités

$P(D_1)=1$ (car le 1[er] jour la ville est délestée, donc un événement certain)

D_{n+1}/D_n : « le jour suivant sachant que la ville est délestée le n-ième jour »

Alors : $P_{D_n}(D_{n+1})=\frac{2}{9}$

$D_{n+1}/\bar{D}_n$: « le jour suivant sachant que la ville n'est pas délestée »

Alors : $P_{\bar{D}}(D_{n+1})=\frac{5}{6}$

2) Exprimons P_{n+1} en fonction de $P(D_{n+1}\cap D_n)$ et $P(D_{n+1}\cap\bar{D}_n)$

$P_n=P(D_n)$ alors : $P_{n+1}=P(D_{n+1})$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P_{n+1}=P(D_{n+1})=P(D_{n+1}\cap D_n)+P(D_{n+1}\cap\bar{D}_n)$

3) Déduisons en que, $\forall n\neq 0$, $P_{n+1}=-\frac{11}{18}P_n+\frac{5}{6}$

$P_{n+1}=P(D_{n+1}\cap D_n)+P(D_{n+1}\cap\bar{D}_n)$

Or $P(D_{n+1}\cap D_n)=P(D_n)\times P_{D_n}(D_{n+1})=\frac{2}{9}P_n$ et

$P(D_{n+1}\cap\bar{D}_n)=P(D_n)\times P_{\bar{D}_n}(D_{n+1})$

$=\frac{5}{6}p(\bar{D}_n)=\frac{5}{6}(1-P(D_n))$

$=\frac{5}{6}-\frac{5}{6}P_n$

$P_{n+1}=\frac{2}{9}P_n+\frac{5}{6}-\frac{5}{6}P_n$

D'où $P_{n+1}=-\frac{11}{18}P_n+\frac{5}{6}$

4) On pose $u_n=6P_n-\frac{90}{29}$

a) Montrons que (u_n) est une suite géométrique

$u_{n+1}=6P_{n+1}-\frac{90}{29}=-\frac{11}{18}\left(6P_n-\frac{90}{29}\right)$

D'où $u_{n+1}=-\frac{11}{18}P_n$

Ccl : (u_n) est une suite géométrique de raison $q=-\frac{11}{18}$ et de 1[e] terme $u_1=6P_1-\frac{90}{29}=6-\frac{90}{29}=\frac{84}{29}$

b) Exprimons u_n en fonction de n

$u_n=u_1q^{n-1}=\frac{84}{29}\left(-\frac{11}{18}\right)^{n-1}$

Exprimons P_n en fonction de n

$u_n=6P_n-\frac{90}{29}\Leftrightarrow P_n=\frac{1}{6}P_n+\frac{15}{29}$

D'où $P_n=\frac{14}{29}\left(-\frac{11}{18}\right)^{n-1}+\frac{15}{29}$

Calculons la probabilité pour que l'on puisse suivre le match sans délestage

$P_{20}=\frac{14}{29}\left(-\frac{11}{18}\right)^{19}+\frac{15}{29}$

q_{20} la probabilité de l'événement le match serait suivi le 20[ème] jour donc l'événement contraire de D_{20}

Alors $q_{20}=1-P_{20}=1-\frac{14}{29}\left(-\frac{11}{18}\right)^{19}+\frac{15}{29}$

D'où $q_{20}=0{,}48$

Exercice 7

T : « le client a acheté un téléviseur »

M : « le client a acheté un magnétoscope »

$P(T)=0{,}6$; $P_T(M)=0{,}4$; $P_{\bar{T}}(M)=0{,}2$ et $P(\bar{T})=0{,}4$

1) Calculons la probabilité qu'il achète un magnétoscope et un téléviseur

$P(M\cap T)=P(T)\times P_T(M)=0{,}6\times 0{,}4=0{,}24$

Alors : $P(M\cap T)=0{,}24$

2) Calculons la probabilité qu'il achète un magnétoscope

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(M)=P(T)\times P_T(M)+P(\bar{T})\times P_{\bar{T}}(M)=0{,}24+0{,}08$

Alors : $P(M)=0{,}32$

3) Calculons la probabilité qu'il achète un téléviseur sachant qu'il a acheté un magnétoscope

$P_M(T)=\frac{P(M\cap T)}{P(M)}=\frac{0{,}24}{0{,}32}$

Alors : $P_M(T)=0{,}75$

Exercice 8

2 pièces normales : $\{P;F\}$ et une pièce truquée : $\{F;F\}$

On prend une pièce au hasard et on effectue des lancers successifs

B : « la pièce est normale » ; $\bar{B}$: « la pièce est truquée »

P : « on obtient pile au premier lancer » ; F_n : « on obtient face pour les n premiers lancers »

1) Calculons la probabilité de l'événement B

$P(B)=\frac{2}{3}$

2) Calculons la probabilité de P sachant que B est réalisé.

$P_B(P)=\frac{1}{2}$

3) Calculons la probabilité de $P\cap B$; $P\cap\bar{B}$

$P(P\cap B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$P(P\cap\bar{B})=0$ (car $P\cap\bar{B}$ est un événement impossible : la pièce truquée n'a pas de pile)

Déduisons $P(P)$

$P(P)=P(P\cap B)+P(P\cap\bar{B})=\frac{1}{3}+0$

Alors : $P(P) = \frac{1}{3}$

4) Calculons $P(F_n \cap B)$

$P(F_n \cap B) = P(B) \times P_B(F_n)$

$P(F_n \cap B) = \frac{2}{3} \times C_n^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Calculons $P(F_n \cap \bar{B})$

$P(F_n \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(F_n)$

$P(F_n \cap \bar{B}) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Déduisons-en $P(F_n)$

$P(F_n) = P(F_n \cap B) + P(F_n \cap \bar{B})$

$P(F_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)$

Exercice 9

60% pratiquent un instrument à cordes (C)

45% pratiquent un instrument à vent (V)

10% pratiquent un instrument à cordes et à vent ($C \cap V$)

1) On choisi un élève au hasard

a) Calculons la probabilité de l'événement «cet élève pratique au moins un des instruments »

$P(C \cup V) = P(C) + P(V) - P(C \cap V)$

$P(C \cup V) = 0{,}50 + 0{,}35 - 0{,}10 = 0{,}75 = 75\%$

b) Calculons la probabilité de l'événement « cet élève pratique un et un seul des instruments »

Soit A cet événement

$P(A) = P(C) + P(V)$

$P(A) = 0{,}50 + 0{,}35 = 0{,}85 = 85\%$

2) On choisit un élève pratiquant un instrument C.

Calculons la probabilité pour qu'il pratique l'instrument V

$P_C(V) = \frac{P(C \cap V)}{P(C)} = \frac{10}{60}$

D'où $P_C(V) = \frac{1}{6}$

3) On choisit au hasard n élèves

a) Calculer la probabilité P_n pour qu'au moins un des élèves pratiquent un instrument C

Soit $\bar{C}$: « aucun des élèves ne pratiquent l'instrument C »

$P(\bar{C}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Alors : $P_n = 1 - (0{,}4)^n$

b) Déterminons n tels que $P_n \geq 0{,}999$

$P_n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow 1 - (0{,}4)^n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow (0{,}4)^n \leq 0{,}001$

$n\ln(0{,}4) \leq \ln(0{,}001)$ alors : $n \geq \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}4)} \geq 7{,}53$

On obtient : $n = 8$

Exercice 10

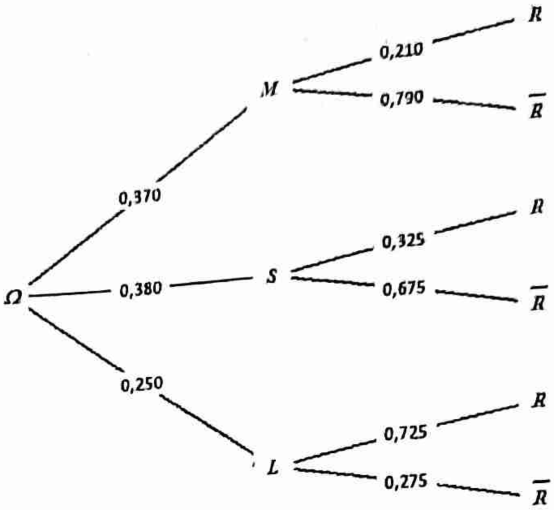
37% ont choisi l'enseignement de spécialité mathématique

25% ont choisi l'enseignement de spécialité langue vivante

21% ont choisi l'enseignement de spécialité mathématique et ont obtenu le bac

32,5% ont choisi l'enseignement de spécialité Science et économique et sociale et ont obtenu le bac

72,5% ont choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ont obtenu le bac



1) Traduisons en termes de probabilité ces informations

$P(M) = 0{,}37; P(L) = 0{,}25; P_M(R) = 0{,}21; P_S(R)0 = 0{,}325; P_L(R) = 0{,}725$

2) a) Déterminons la probabilité pour que le candidat ait choisi l'enseignement de SES

$P(S) + P(M) + P(L) = 1$ alors $P(S) = 1 - p(M) - P(L)$

$P(S) = 1 - 0{,}37 — 0{,}25 = 0{,}380$

Alors $P(S) = 0{,}380$

b) Déterminons la probabilité pour que le candidat ait choisi l'enseignement de spécialité LV et ait obtenu le bac

$P(L \cap R) = P(L) \times P(R) = 0{,}25 \times 0{,}725$

Alors $P(L \cap R) = 0{,}181$

3) Calculons la probabilité pour que le candidat ait choisi l'enseignement de spécialité LV et ai échoué au bac

$P(L \cap \bar{R}) = P(L) \times P_L(\bar{R}) = P(L)(1 - P_L(R))$

Alors $P(L \cap \bar{R}) = 0{,}25(1 - 0{,}725) = 0{,}069$

4) Le candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématique, calculons la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le bac

$P_M(\bar{R}) = \frac{P(M \cap \bar{R})}{P(M)}$

$P(M) = P(M \cap R) + P(M \cap \bar{R}) \Leftrightarrow P(M \cap \bar{R}) = P(M) - P(M \cap R)$

$P_M(\bar{R}) = \frac{P(M) - P(M \cap R)}{P(M)} = \frac{0{,}37 - 0{,}21}{0{,}37} = 0{,}432$

Alors $P_M(\bar{R}) = 0{,}432$

5) Montrons que : $P(R) = 38{,}24\%$

$P(R) = P(M \cap R) + P(S \cap R) + p(L \cap R)$

Alors $P(R) = 0{,}37 \times 0{,}210 + 0{,}38 \times 0{,}325 + 0{,}25 \times 0725 = 0{,}3824 = 38{,}24\%$

6) a) calculons la probabilité pour qu'au moins l'un de 3 soit reçu

Soit P_1 cette probabilité

Alors $P_1 = 1 - (0{,}284)^3 = 0{,}977$

NB : On a considéré l'événement contraire avant d'en déduire P_1

b) Calculons la probabilité que 2 sur 3 soient reçu

Soit P_2 cette probabilité

$P_2 = C_3^2(0,716)^2(0,284) = 3(0,716)^2(0,284)$

Alors $P_2 = 0,437$

Exercice 11

A : 5 boules numérotées de 1 à 5

B : 6 boules 1, 1, 1, 1, 2, 2

1) Soit X =somme des nombres inscrits su les deux boules

a) Déterminons la loi de probabilité de X

$B \setminus A$	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7

$X(\Omega) = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

On déduit alors

x_i	2	3	4	5	6	7
P_i	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$

b) Calculons $E(X)$ et $V(X)$

$E(X) = \frac{4}{15} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5} + \frac{6}{5} + \frac{7}{5}$ alors : $E(X) = \frac{13}{3}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = \frac{8}{15} + \frac{9}{5} + \frac{16}{5} + \frac{25}{5} + \frac{36}{5} + \frac{49}{15} = \frac{63}{3}$

Alors $V(X) = \frac{63}{3} - \frac{169}{9} = \frac{20}{9}$

2) On effectue 4 fois le tirage précédent, les boules étant remise dans leurs respectives après chaque tirage

a) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 fois une somme paire

Il s'agit de la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{8}{15}$(c'est la probabilité d'obtenir une somme paire)

$p = \frac{8}{15}$ alors $q = \frac{7}{15}$

Soit P_1 cette probabilité

$P_1 = C_4^2\left(\frac{8}{15}\right)^2\left(\frac{7}{15}\right)^2 = 0,372$

b) Calculons la probabilité d'obtenir au moins une somme paire

Soit P_2 cette probabilité

$P_2 = C_4^1\left(\frac{8}{15}\right)^1\left(\frac{7}{15}\right)^3 + C_4^2\left(\frac{8}{15}\right)^2\left(\frac{7}{15}\right)^2 + C_4^3\left(\frac{8}{15}\right)^3\left(\frac{7}{15}\right) + C_4^4\left(\frac{8}{15}\right)^4 = 1 - \left(\frac{7}{15}\right)^4$

Alors $P_2 = 0,953$

Exercice 12

A : $\begin{cases} 4 \text{ billets gagnants} \\ 8 \text{ billetss non gagnants} \end{cases}$

B : $\begin{cases} 5 \text{ billts gagnats} \\ 10 \text{ billets non gagnats} \end{cases}$

Une personne achète 3 billets dont 2 dabs la série A et 1 dan la série B

1) Calculons la probabilité qu'un seul billet soit gagnant

Soit Ω l'univers des possibles et A cet événement

$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{C_4^1C_8^1C_{10}^1 + C_5^1C_8^2}{C_{12}^2C_{15}^1} = \frac{460}{990}$

$P(A) = \frac{46}{99} = 0,46$

2) Calculons la probabilité pour que 2 billets au moins soient gagnants

Soit B cet événement

$card\ B = C_4^2C_5^1 + C_4^1C_5^1C_8^1 + C_4^2C_5^1 = 250$

Alors $\boxed{P(B) = \frac{25}{99} = 0,25}$

3) Soit X = gain réalisé

a) Déterminons les valeurs possibles de X

$X(\Omega) = \{0; 2500; 5000; 7500; 10000\}$

b) Déterminons la loi de probabilité de X

$p(X = 0) = \frac{C_8^2C_{10}^1}{990} = \frac{28}{99}$; $P(X = 2500) = \frac{C_4^1C_8^1C_{10}^1}{990} = \frac{32}{99}$; $P(X = 5000) = \frac{C_4^2C_{10}^1 + C_5^1C_8^2}{990} = \frac{20}{99}$; $P(X = 7500) = \frac{C_5^1C_4^1C_8^1}{990} = \frac{16}{99}$; $P(X = 10000) = \frac{C_4^2C_5^1}{990} = \frac{1}{33}$

x_i	0	2500	5000	7500	10000
P_i	$\frac{28}{99}$	$\frac{32}{99}$	$\frac{20}{99}$	$\frac{16}{99}$	$\frac{1}{33}$

c) Calculons l'espérance mathématique

$E(X) = \frac{80000+100000+120000+30000}{99}$

Alors $E(X) = \frac{110.000}{33}$

Exercice 13

20 billets : 6 gagnants et 14 non gagnants

Djim achète 2 billets

1) Calculons la probabilité qu'il perde

Soit A cet événement

$P(A) = \frac{C_{14}^2}{C_{20}^2} = \frac{91}{190}$

2) Calculons la probabilité qu'il gagne exactement une fois dans un mois de 4 semaines

Il s'agit de la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 1 - \frac{91}{190} = \frac{99}{190}$

Soit B cet événement

$P(B) = C_4^1\left(\frac{99}{190}\right)\left(\frac{91}{190}\right)^3 = 0,228$

3) X = gain mathématique

a) Déterminons les valeurs possibles de X

Les valeurs possibles de X sont : $\{0; 200; 400; 500; 700; 1000; 1200; 1500\}$

b) Déterminons la fonction de répartition de X

La loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	0	200	400	500	700	1000	1200	1500
P_i	$\frac{91}{190}$	$\frac{21}{95}$	$\frac{3}{190}$	$\frac{14}{95}$	$\frac{3}{95}$	$\frac{3}{38}$	$\frac{3}{190}$	$\frac{1}{95}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, si\ x \in]-\infty, 0[\\ \frac{91}{190}, si\ x \in [0, 200[\\ \frac{133}{190}, si\ x \in [200, 400[\\ \frac{136}{190}, si\ x \in [400, 500[\\ \frac{164}{190}, si\ x \in [500,\ 700[\\ \frac{170}{190}, si\ x \in [700, 1000[\\ \frac{185}{190}, si\ x \in [1000, 1200[\\ \frac{188}{190}, si\ x \in [1200, 1500[\\ 1, si\ \in [1500, +\infty[\end{cases}$$

Exercice 14

La loi de probabilité de X est

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	α	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

1) Déterminons la valeur de α

$\sum P_i = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\alpha+\frac{1}{12}+\frac{1}{3} = 1$

On obtient : $\alpha = \frac{1}{12}$

2) Déterminons $E(X), V(X)$ et $\delta(X)$

$E(X) = \sum x_i P_i = \frac{1}{12}+\frac{2}{6}+\frac{3}{4}+\frac{4}{12}+\frac{5}{12}+\frac{6}{3}$

On obtient : $E(X) = \frac{47}{12}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

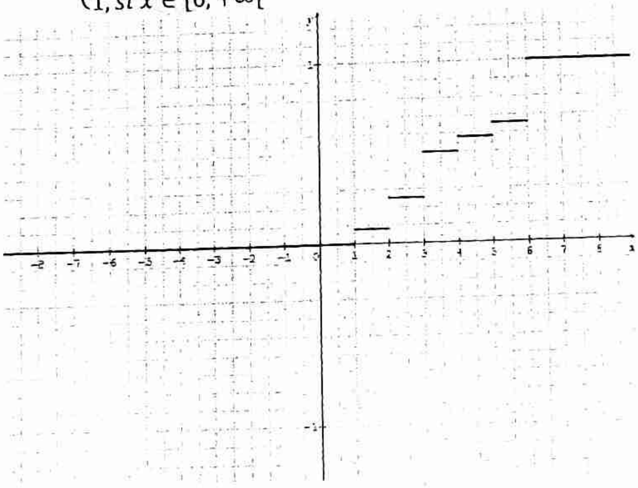
Avec $E(X^2) = \frac{1}{12}+\frac{4}{6}+\frac{9}{4}+\frac{16}{12}+\frac{25}{12}+\frac{36}{3} = \frac{221}{12}$

$V(X) = \frac{221}{12} - \frac{2209}{144} = 3{,}07$

$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = 1{,}75$

3) Définissons et représentons la fonction de répartition de X

$$F(x) = \begin{cases} 0, si\ x \in]-\infty, 1[\\ \frac{1}{12}, si\ x \in [1, 2[\\ \frac{1}{4}, si\ x \in [2, 3[\\ \frac{1}{2}, si\ x \in [3, 4[\\ \frac{7}{12}, si\ x \in [4, 5[\\ \frac{2}{3}, si\ x \in [5, 6[\\ 1, si\ x \in [6, +\infty[\end{cases}$$



Exercice 15

Pouvoir germinatif : 80%

Chaque bulbe produit une fleur avec une probabilité de $\frac{8}{10}$

Trois gènes : r(rouge), b(blanc), j(jaune)

$P(r) = \frac{5}{10}, P(b) = \frac{1}{10}, P(J) = \frac{4}{10}$

a) Calculons la probabilité d'obtenir cinq fleurs en plantant cinq bulbes

Soit P_1 cette probabilité

$P_1 = C_5^5 \left(\frac{8}{10}\right)^5 \left(1 - \frac{8}{10}\right)^0$

Alors : $P_1 = 0{,}328$

b) Calculons la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur rouge

Soit P_2 soit cette probabilité

$P_2 = \left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{5}{10}\right) = \frac{2}{5} = 0{,}4$

On plante cinq bulbes et X =nombre des fleurs rouges obtenues

$X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

Il s'agit de la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Déterminons la loi de probabilité de X

En appliquant la formule : $P(X = k) = C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}$

Avec $k = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, on obtient :

x_i	0	1	2	3	4	5
P_i	0,031	0,156	0,313	0,313	0,156	0,031

Calculons l'espérance mathématique de X

$E(X) = np = \frac{5}{2}$

c) Calculons la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur blanche

Soit P_3 cette probabilité

$P_3 = \left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{2}{25} = 0{,}08$

d) Soit $n \geq 1$ et P_n la probabilité de n'obtenir aucune tulipe blanche après avoir planté n bulbes

Déterminons le nombre de bulbes qu'il faut planter pour obtenir au moins une tulipe blanche

Soit $P_4 = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$ alors $P_n = 1 - (0{,}92)^n$

$P_n \geq \frac{19}{20} \Leftrightarrow 1 - (0{,}92)^n \geq \frac{19}{20}$

Alors : $nln(0{,}92) \leq -ln20 \Leftrightarrow n \geq \frac{-ln20}{\ln(0{,}92)} \geq 35{,}92$

On obtient : $n = 36$

Exercice 16

10% des gauchers, $P(G) = 0{,}1$

Soit D l'événement l'individu est droitier, $P(D) = 0{,}9$

1) Calculons la probabilité pour qu'un groupe de 8 personnes contienne un seul gaucher, au moins un gaucher, exactement 3 gauchers

Il s'agit de la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}1$

$P(G = 1) = C_8^1 (0{,}1)(0{,}9)^7$

Alors $P(G = 1) = 0{,}383$

$P(G \geq 1) = 1 - P(G = 0) = 1 - (0{,}9)^8$

Alors $P(G \geq 1) = 0{,}570$

$P(G = 3) = C_8^3(0{,}1)^3(0{,}9)^5$

Alors $P(G = 3) = 0{,}033$

2) 7 paires de ciseaux pour droitiers et 3 paires pour gauchers

Calculons la probabilité pour que les 8 membres du personnel trouvent chacun une paire de ciseaux lui convenant

Soit P cette probabilité

$P = P(G = 1) + P(G = 2) + P(G = 3)$

Avec $P(G = 2) = C_8^2(0{,}1)^2(0{,}9)^2 = 0{,}149$

$P = 0{,}383 + +0{,}149 + 0{,}033$

Alors $P = 0{,}565$

Exercice 17

Dans chacun des cas suivants, énonçons l'événement contraire de l'événement donné

1) $\bar{A}$: « au moins un de deux élèves est un garçon »
2) $\bar{B}$: « la personne est soit une femme, soit un tchadien »
3) $\bar{C}$: « Luc ne prend pas de viande ou ne prend pas de glace »
4) $\bar{D}$: « aucun billet n'est gagnant »
5) $\bar{E}$: « les trois billets sont gagnants »

Exercice 18

1) Les événements A et B sont incompatibles
2) Les événements ne sont pas incompatibles
3) $\bar{A}$: « tirer une boule noire ou rouge » et $\bar{B}$: « tirer une boule blanche ou rouge »

Exercice 19

On choisit au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes

A : « la carte choisie est un pique » ; B : « la carte choisie est rouge » ; C : « la carte choisie est une figure »

1) Présentons un modèle mathématique décrivant l'expérience

Le choix étant au hasard, il s'agit d'une situation d'équiprobabilité

2) Calculons la probabilité des événements A, B, C, A∩B, B∩C, A∪B, A∪C

$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{3\times4}{32} = \frac{3}{8}$;

$P(A \cap B) = 0$ (car une carte pique est noire et non rouge) ;

$P(B \cap C) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$; $P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; $P(A \cup C) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{32} = \frac{17}{32}$

3) Déterminons la probabilité de l'événement D

D est l'événement contraire de $A \cup C$

Alors : $P(D) = 1 - \frac{17}{32} = \frac{15}{32}$

Exercice 20

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite

1) Donnons la liste de tous les résultats possibles en notant P pou Pile et F pou Face

En utilisant un arbre de choix, on obtient :

$\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$

2) Calculons la probabilité des événements proposés

$P(A) = \frac{1}{8}$

$P(B) = \frac{7}{8}$

Exercice 21

10 cubes bleus, 22 cubes jaunes et 4 cubes rouges, tous de même taille donc équiprobabilité

1) Calculons la probabilité de pouvoir faire le drapeau du Tchad en prenant :

a) Simultanément 3 cubes

Nombre des cas possibles : $C_{36}^3 = 7140$

Nombre des cas favorables : $C_{10}^1 \times C_{22}^1 \times C_4^1 = 880$

$P_1 = \frac{880}{7140} \cong 0{,}1232$

b) Simultanément 4 cubes

Nombre des cas possibles : $C_{36}^4 = 58905$

Nombre des cas favorables : $C_{10}^2 \times C_{22}^1 \times C_4^1 + C_{10}^1 \times C_{22}^2 \times C_4^1 + C_{10}^1 \times C_{22}^1 \times C_4^2 = 14520$

$P_2 = \frac{14520}{58905} \cong 0{,}2465$

2) Calculons la probabilité de pouvoir faire le drapeau du Tchad en prenant successivement sans remise 3 cubes

Nombre des cas possibles : $A_{36}^3 = 42840$

Nombre des cas favorables : $A_{10}^1 \times A_{22}^1 \times A_4^1 = 880$

$P_3 = \frac{880}{42840} \cong 0{,}0205$

3) Calculons la probabilité de pouvoir faire le drapeau du Tchad en prenant successivement avec remise 3 cubes

Nombre des cas possibles : $36^3 = 46656$

Nombre des cas favorables : $10 \times 22 \times 4 = 880$

$P_4 = \frac{880}{46656} \cong 0{,}0188$

Exercice 22

On lance un dé à 6 faces

a) Calculons la probabilité d'apparition de chaque face

Soit p la probabilité d'obtenir la face n°1. La probabilité d'apparition de chaque face étant proportionnelle au numéro inscrit sur elle, on a :

$p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1 \Leftrightarrow 21p = 1$

On obtient : $p = \frac{1}{21}$

On peut en déduire :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

b) Calculons la probabilité d'obtenir un nombre pair

Soit A cet événement, alors $A = \{2; 4; 6\}$

D'où $P(A) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

Exercice 23

On lance simultanément 2 dés non pipés

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Calculons la probabilité des événements suivants

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; $P(C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$P(D) = \frac{11}{36}$

Exercice 24

u_1 : 3 boules blanches et 1 boule noire

u_2 : 1 boule blanche et 2 boules noires

On lance un dé non truqué, s'il donne un numéro $d \leq 2$, on tire une boule de u_1, sinon on tire une boule de u_2.

On déduit : $P(u_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(u_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $P_{u_1}(B) = \frac{3}{4}$; $P_{u_1}(N) = \frac{1}{4}$; $P_{u_2}(B) = \frac{1}{3}$; $P_{u_2}(N) = \frac{2}{3}$

1) Calculons la probabilité de tirer une boule blanche

En appliquant la formule de probabilités totales :

$P(B) = P(u_1 \cap B) + P(u_2 \cap B) = P(u_1) \times P_{u_1}(B) + P(u_2) \times P_{u_2}(B)$

Alors $P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$

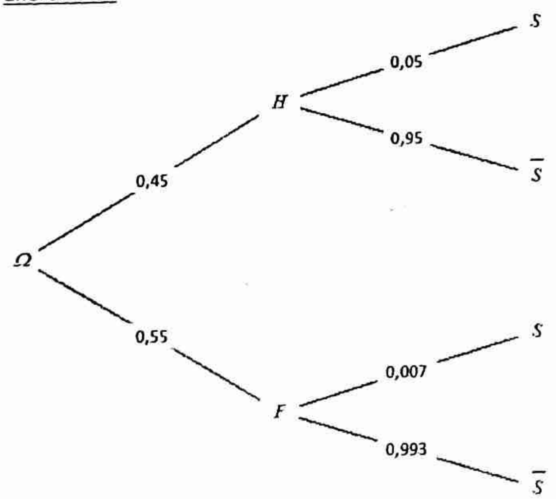
D'où $P(B) = \frac{17}{36}$

2) On a tiré une boule blanche, calculons la probabilité qu'elle provienne de $P(B)$

$P_B(u_1) = \frac{P(u_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}{\frac{17}{36}}$

Alors : $P_B(u_1) = \frac{9}{17}$

Exercice 25



On prend une personne au hasard

1) Calculons la probabilité qu'elle soit atteinte du sida

Soit P_1 cette probabilité, alors :

$P_1 = P(H \cap S) + P(F \cap S) = 0,45 \times 0,05 + 0,55 \times 0,007$

$P_1 = 0,02635$

2) Calculons la probabilité pour qu'elle soit un homme sachant qu'elle est atteinte du sida

Soit P_2 cette probabilité, alors :

$P_2 = \frac{P(H \cap S)}{P_1} = \frac{0,45\times0,05}{0,02635}$

$P_2 = 0,85389$

3) Calculons la probabilité pour qu'elle soit une femme sachant qu'elle est atteinte du sida

Soit P_3 cette probabilité, alors :

$P_3 = \frac{P(F \cap S)}{P_1} = \frac{0,55\times0,007}{0,02635}$

$P_3 = 0,14611$

Exercice 26

Soit V : « la personne est vacciné » ;M « la personne est malade » ; $\overline{V}$: « la personne n'a pas été vaccinée » et $\overline{M}$: « la personne n'est pas malade »

D'après l'énoncé, on déduit :

$P(V) = \frac{1}{4}$; $P(\overline{V}) = \frac{3}{4}$; $P_M(\overline{V}) = 4P_M(V) = \frac{4}{5}$; $P_v(M) = \frac{1}{12}$; $P_V(\overline{M}) = \frac{11}{12}$

a) Démontrons que $P(M) = \frac{5}{48}$

D'après la formule de probabilités totales, on a :

$P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \overline{V}) = P_V(M) \times P(V) + P_{\overline{V}}(M) \times P(\overline{V})$

Or $P_{\overline{V}}(M) = \frac{P(M\cap\overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{\frac{4}{5}P(M)}{\frac{3}{4}}$ alors $P_{\overline{V}}(M) = \frac{16}{15}P(M)$

$P(M) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times \frac{16}{15}P(M) = \frac{1}{48} + \frac{4}{5}P(M)$

$P(M) - \frac{4}{5}P(M) = \frac{1}{48} \Leftrightarrow \frac{1}{5}P(M) = \frac{1}{48}$

D'où $P(M) = \frac{5}{48}$

b) Déterminons la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné

$P_{\overline{V}}(M) = \frac{16}{15}P(M) = \frac{16}{15} \times \frac{5}{48}$

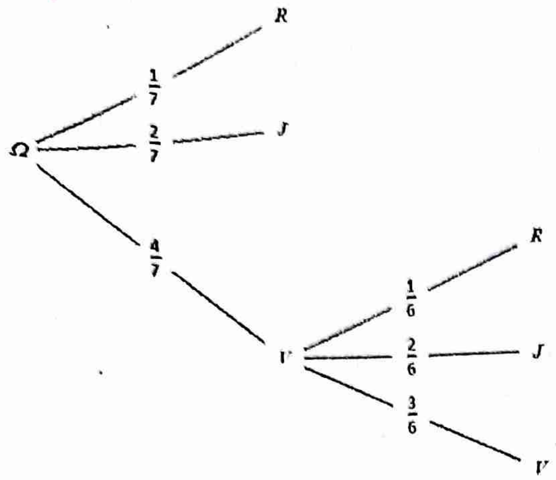
D'où $P_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{9}$

Exercice 27

7 boules : 1 boule rouge, 2 boules jaunes et 4 boules vertes

On tire une boule, si est rouge on gagne 10 frs, si elle est jaune, on perd 5 frs, si elle est verte, on tire une 2[e] boule sans remettre la boule déjà tirée. Si cette 2[e] boule est rouge, on gagne 8 frs, sinon on perd 4 frs

1) Construisons un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu



2) Soit X =le gain algébrique du joueur

a) Etablissons la loi de probabilité de X

$X(\Omega) = \{-5;\ -4; 8; 10\}$

$P(X = -5) = \frac{2}{7}$; $P(X = -4) = \frac{10}{21}$; $P(X = 8) = \frac{2}{21}$

$P(X = 10) = \frac{1}{7}$

x_i	-5	-4	8	10
P_i	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$

b) Calculons l'espérance mathématique de X

$E(X) = \sum x_i P_i = \frac{-10}{7} + \frac{-40}{21} + \frac{16}{21} + \frac{10}{7} = \frac{-30-40+16+30}{21}$

D'où $E(X) = -\frac{8}{7}$

3) Les conditions restent identiques. Indiquant le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer au joueur lorsque la boule tirée au 2e tirage est rouge, pour que pour que l'espérance de X soit nulle

Soit ce gain, alors : $E(X) = \frac{-10}{7} + \frac{-40}{21} + \frac{2a}{21} + \frac{10}{7} = \frac{2a-40}{21}$

$E(X) = 0 \Leftrightarrow 2a - 40 = 0$

D'où $a = 20frs$

Exercice 28

Une famille a 4 enfants. La probabilité que l'enfant soit un garçon est de $\frac{1}{4}$

Soit X la variable aléatoire associant le nombre des garçons dans la famille

Alors $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

1) Déterminons la loi de probabilité de X

Il s'agit de la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{4}$

$p = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{3}{4}$

$P(X = 0) = C_4^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0{,}3164$

$P(X = 1) = C_4^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0{,}4219$

$P(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0{,}2109$

$P(X = 3) = C_4^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 0{,}0469$

$P(X = 4) = C_4^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0{,}0039$

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,3164	0,4219	0,2109	0,0469	0,0039

2) Déterminons l'espérance mathématique de X

$E(X) = np = 4 \times \frac{1}{4}$

$E(X) = 1$

3) Déterminons la variance et l'écart type de X

$V(X) = npq = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

$V(X) = \frac{3}{4}$

$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) Déterminons la fonction de répartition de X

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, si\ x < 0 \\ 0{,}3164, si\ 0 \leq x < 1 \\ 0{,}7383, si\ 1 \leq x < 2 \\ 0{,}9492, si\ 2 \leq x < 3 \\ 0{,}9961, si\ 3 \leq x < 4 \\ 1, si\ x \geq 4 \end{cases}$$

Exercice 29

x_i	3	5	7	9	11
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\alpha - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$

1) Calculons la valeur de α

$\sum P_i = 1$

$\frac{1}{6} + \frac{5}{18} + \frac{1}{3} + \alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{18} = 1$

$\frac{3+5+6-9+1}{18} + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

x_i	3	5	7	9	11
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$

2) Calculons $E(X), V(X)$ et $\delta(X)$

$E(X = \sum x_i P_i = \frac{9+25+42+27+11}{18} = \frac{114}{18}$

$E(X) = \frac{57}{9}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Avec $E(X^2) = \frac{27+125+294+243+121}{18} = \frac{810}{18} = 45$

$V(X) = 45 - \frac{3249}{81} = \frac{396}{81} = 22$

$\alpha(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{22} \cong 4{,}69$

3) Définissons la fonction de répartition de X

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, si\ x < 3 \\ \frac{1}{6}, si\ 3 \leq x < 5 \\ \frac{4}{9}, si\ 5 \leq x < 7 \\ \frac{7}{9}, si\ 7 \leq x < 9 \\ \frac{17}{18}, si\ 9 \leq x < 1 \\ 1, si\ x \geq 11 \end{cases}$$

Exercice 31

Soit A : « lancer la pièce truquée », B « lancer la pièce équilibrée », alors : $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

1) On prend une pièce au hasard

a) Calculons la probabilité d'obtenir Pile

Soit P : « obtenir Pile »

$P(P) = P(A \cap P) + P(B \cap P) = P(A) \times P_A(P) + P(B) \times P_B(P)$

Or $P_A(P) = \frac{1}{4}$ et $P_B(P) = \frac{1}{2}$

Alors $P(P) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

D'où $P(P) = \frac{3}{8}$

b) On a obtenu Pile, calculons la probabilité d'avoir utilisé la pièce pipée

$P_P(A) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}$

Alors : $P_P(A) = \frac{1}{3}$

c) Calculons la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile

Soit C cet événement et $\bar{C}$ son événement contraire :

« obtenir 3 fois Face lors de 3 lancers »

$P(\bar{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{35}{128}$

$P(C) = 1 - \frac{35}{128}$

D'où $P(C) = \frac{93}{128}$

2) Trois fois on choisit l'une des pièces au hasard, déterminons la probabilité d'obtenir au moins une fois pile

Soit D cet événement

Il s'agit d'une loi binomiale de paramètre $n = 3$ et $p = \frac{3}{8}$

La probabilité d'obtenir 3 fois face est $\left(\frac{5}{8}\right)^3$

Alors $P(D) = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{387}{512} = 0{,}756$

3) On lance les deux pièces ensemble, calculons la probabilité d'obtenir le même résultat

$P(E) = P(P_A \cap P_B) + P(F_A \cap F_B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

D'où $P(E) = \frac{1}{2}$

Exercice 33

5 jetons verts et 4 jetons rouges

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac. Calculons la probabilité :

a) De ne tirer que 3 jetons verts

Soit A cet événement

$P(A) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}$

b) De ne tirer aucun jeton vert

Soit B cet événement

$P(B) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21} = 0{,}048$

c) De tirer au plus 2 jetons verts

Soit C cet événement et $\bar{C} = A$ son événement contraire

Alors $P(C) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42} = 0{,}881$

d) De tirer exactement 1 jeton vert

Soit D cet événement

$P(D) = \frac{3 \times A_5^2 \times A_4^1}{504} = \frac{180}{504} = \frac{5}{14} = 0{,}357$

2) On tire simultanément 3 jetons, reprenons les questions

$P(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42} = 0{,}119$

$P(B) = \frac{C_4^3}{84} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21} = 0{,}048$

$P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42} = 0{,}881$

$P(D) = \frac{C_4^2 \times C_5^1}{84} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14} = 0{,}357$

Algèbre linéaire

Exercice 1

$(x;y) \in \mathbb{R}^2, x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

Montrons que l'application $x \longmapsto x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},*)$ vers $(\mathbb{R},+)$

Posons $f : (\mathbb{R},*) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$

$x \longmapsto x^3$

f est un isomorphisme si et seulement si $f(x * y) = f(x) + f(y)$ et de plus f est bijectif

- $f(x * y) = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3 = x^3 + y^3 = f(x) + f(y)$

Alors est un morphisme de $(\mathbb{R},*) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$

- $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

CC : f est un isomorphisme de $(\mathbb{R},*) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$

Déduisons en que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif

f étant isomorphisme de $(\mathbb{R},*) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$ alors f^{-1} est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R},*)$ et de plus l'image d'un groupe commutatif par un morphisme est un groupe commutatif alors : $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif

Exercice 2

$G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ une loi de composition interne définie par : $(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$

1) Montrons que $(G,*)$ est un groupe non commutatif

- $*$ LCI alors G est stable pour la loi $*$
- $(x,y) * ((x',y') * (x'',y'')) = ((x,y) * (x',y')) * (x'',y'')$

$(x,y) * (x'x'', x'y''+y') = (xx', xy' + y) * (x'', y'')$

$(xx'x, xx'y + xy' + y) = (xx'x, xx'y + xy' + y)$

Alors la loi $*$ est associative dans G

- Elément neutre

$(x,y) * (e_1,e_2) = (e_1,e_2) * (x,y) = (x,y)$

$(x,y) * (e_1,e_2) = (xe_1, xe_2 + y) = (x,y)$

Par identification, on a :

$\begin{cases} xe_1 = x \\ xe_2 + y = y \end{cases} \Leftrightarrow (e_1,e_2) = (1,0)$

$(e_1,e_2) * (x,y) = (e_1x, e_1y + e_2) = (x,y)$

Par identification, on a :

$\begin{cases} e_1x = x \\ e_1y + e_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow (e_1,e_2) = (1{,}0)$

Alors $(1, 0)$ est l'élément neutre

- Elément symétrique

$(x,y) * (X,Y) = (X,Y) * (x,y) = (1,0)$

$(x,y) * (X,Y) = (xX, xY + y) = (1,0)$

Par identification, on a :

$\begin{cases} xX = 1 \\ xY + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{x} \\ Y = -\frac{y}{x} \end{cases}$

$(X,Y) * (x,y) = (Xx, Xy + Y) = (1,0)$

Par identification, on a :

$\begin{cases} Xx = 1 \\ Xy + Y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{x} \\ Y = -\frac{y}{x} \end{cases}$

Alors $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$ est l'élément symétrique de (x,y)

- Commutativité

$(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$ et

$(x',y') * (x,y) = (x'x, x'y + y')$

$(x,y) * (x',y') \neq (x',y') * (x,y)$

Alors la loi n'est pas commutative

CC : $(G,*)$ est un groupe non commutatif

2) Montrons que $(]0; +\infty[\times \mathbb{R}, *)$ est un sous groupe de G

- $\forall (x,y) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}, (x',y') \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}$,

$(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}$

D'où la stabilité

- $(1,0) * (x,y) = (x,y) * (1,0) = (x,y)$

Alors $(1, 0)$ est un élément neutre de $*$ dans $]0; +\infty[\times \mathbb{R}$

- $(x,y) * \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) * (x,y) = (1,0)$

Alors $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ est le symétrique de (x,y)

CC : $(]0; +\infty[\times \mathbb{R}, *)$ est un sous groupe de G

Exercice 4

$n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \setminus f(x) = x^n$

Montrons que f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$

f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ si et seulement si :

$f(x \times y) = f(x) \times f(x)$

$f(x \times y) = (x \times y)^n = x^n \times y^n = f(x) \times f(y)$

Alors f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$

Exercice7

$\begin{cases} x \perp y = x + y - 1 \\ x * y = xy - x - y + 2 \end{cases}$

Montrons que $(\mathbb{R}, \perp, *)$ est un corps

a) Vérifions que $(\mathbb{R}, \perp)$ est un groupe commutatif

- Associativité

x, y et z trois réels

$x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z \Leftrightarrow x \perp (y + z - 1) = (x + y - 1) \perp z \Leftrightarrow x + y + z - 2 = x + y + z - 2$

$x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z = x + y + z - 2$

Alors $\perp$ est associative

- Elément neutre

$x \perp e = e \perp x = x + e - 1 = x$ alors $e = 1$ est l'élément neutre pour la loi $\perp$

- Elément symétrique

$x \perp X = X \perp x = x + X - 1 = 1$ alors $2 - x$ est le symétrique de x

- Commutativité

$x \perp y = y \perp x = x + y - 1$ alors la loi $\perp$ est commutative

Alors $(\mathbb{R}, \perp)$ est un groupe commutatif

b) Vérifions que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe

- Associativité

x, y et z trois réels

$x * (y * z) = (x * y) * z \Leftrightarrow x * (yz - y - z + 2) = (xy - x - y + 2) * z \Leftrightarrow xyz - xy - xz + 2x - x - yz + y + z - 2 = xyz - xz - yz + 2z - xy + x + y - 2 - z + 2$

On aura : $xyz - xy - xz - yz + x + y + z = xyz - xz - yz - xy + z + x + y$

Alors la loi est associative

- Elément neutre

$x * e' = e' * x = xe' - x - e' + 2 = x \Leftrightarrow e = 2$

Alors $e = 2$ est l'élément neutre

- Elément symétrique

$x * X' = X' * x = xX' - x - X' + 2 = 2 \Leftrightarrow X' = \frac{x}{x-1}$

Alors $\frac{x}{x-1}$ est le symétrique de x

Alors $(\mathbb{R}, *)$ est groupe

c) Vérifions que $*$ est distributive par rapport à $\perp$

$x * (y \perp z) = (y \perp z) * x$

$x * (y + z - 1) = (y + z - 1) * x \Leftrightarrow xy + xz - x - x - y - z + 1 + 2 = yx + zx - x - y - z + 1 - x + 2 \Leftrightarrow xy + xy - 2x - y - z + 3 = yx + zx - 2x - y - z + 3$

Alors $x * (y \perp z) = (y \perp z) * x = xy + xy - 2x - y - z + 3$

Alors la loi $*$ est distributive par rapport à $\perp$

CC : $(\mathbb{R}, \perp, *)$ est un corps

Exercice 8

Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2}; m \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$

1) Montrons que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, muni de l'addition et de la multiplication des réels, est un sous anneau de $\mathbb{R}$

Soient $m + n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $m' + n'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

- $m + n\sqrt{2} + (m' + n'\sqrt{2}) = (m + m') + (n + n')\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$
- $0 + 0 \times \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$
- $m + n\sqrt{2} - (m + n\sqrt{2}) = (m - m) + (n - n)\sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

Cela montre que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ est un sous groupe de $\mathbb{R}$

Soient $m + n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $m' + n'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

- $(m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2}) = mm' + 2nn' + (mn' + m'n)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$
- $1 + 0 \times \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

D'où $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$

2) Soit φ l'application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même telle que : $\varphi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}$

Montrons que φ est un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$, c'est-à-dire une bijection et un morphisme de chacune de deux lois

- $\forall a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \exists! a - b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que : $\varphi(a - b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$

Alors φ est une application bijective

Soient $m + n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $m' + n'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

- $\varphi(m + n\sqrt{2} + m' + \sqrt{2}n') = \varphi\left((m + m') + (n + n')\sqrt{2}\right) = m + m' - (n + n')\sqrt{2} = m - n\sqrt{2} + m' - n'\sqrt{2}$

$\varphi(m + n\sqrt{2} + m' + \sqrt{2}n') = \varphi(m + n\sqrt{2}) + \varphi(m' + \sqrt{2}n')$

Alors φ est un morphisme pour la loi +

- $\varphi\left((m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2})\right) = \varphi(mm' + 2nn' + (mn' + m'n)\sqrt{2}) = mm' + 2nn' - (mn' + m'n)\sqrt{2}$

$\varphi\left((m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2})\right) = \varphi(m + n\sqrt{2})\varphi(m' + n'\sqrt{2})$

Alors φ est un morphisme pour la loi $\times$

D'où φ est un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$

3) On pose : $N(x) = x\varphi(x)$

Montrons que N une application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}$, qui est un morphisme pour la multiplication

Posons $x = a + b\sqrt{2}$

- $N(a + b\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})\varphi(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Z}$
- $N\left((a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2})\right) = N(a + b\sqrt{2})N(a' + b'\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2)(a'^2 - 2b'^2) \in \mathbb{Z}$

D'où N est un morphisme

4) Démontrons que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un inversible si et seulement si : $N(x) = \pm 1$

Soit $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

$N(x)N\left(\frac{1}{x}\right) = N\left(x \times \frac{1}{x}\right) = N(1) = 1$

Alors $N(x)N\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} N(x) = N\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \\ N(x) = N\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \end{cases}$

x est inversible si et seulement si : $N(x) = \pm 1$

5) Vérifions que $3 + 2\sqrt{2}$ et $-3 + 2\sqrt{2}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

$N(3 + 2\sqrt{2}) = 3^2 - 2 \times 2^2 = 1$

$N(-3 + 2\sqrt{2} = (-3)^2 - 2 \times 2^2 = 1$

D'où $3 + 2\sqrt{2}$ et $-3 + 2\sqrt{2}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

<u>Exercice 9</u>

Démontrons que les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels

a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 3z = 0\}$

$x + y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = -y - 3z$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posons $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors $E_1 = < e_1, e_2 > = Vect(e_1, e_2)$

D'où E_1 est un sous espace vectoriel engendré par e_1 et e_2

b) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$

Posons $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 3y - 5z = 0\}$ et $E' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$

$2x + 3y - 5z = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posons $e_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors $E = < e_3, e_4 >$ alors E est un sous vectoriel engendré par e_3 et e_4

$x - y + z = 0 \Leftrightarrow x = y - z$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posons $e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors $E' = < e_5, e_6 >$ alors E' est sous espace vectoriel engendré par e_5 et e_6

D'où $E_2 = E \cap E'$ est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

<u>Exercice 11</u>

Vérifions si les systèmes suivants forment des bases dans $\mathbb{R}^3$

a) $S_1 = \{(1; -1; 0), (2; -1; 2)\}$

S_1 est un système à 2 éléments dans $\mathbb{R}^3$ alors il ne forme pas une base dans $\mathbb{R}^3$

b) $S_2 = \{(1; -1; 0), (2; -1; 2), (1; 0; a)\}$ on discutera suivant les valeurs de a

Soit α, β, γ trois réels tels que :

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \\ 2\beta + a\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\gamma \\ \alpha = -\beta \\ (a - 2)\gamma = 0 \end{cases}$

- Si $a - 2 \neq 0$, alors $\gamma = 0$ et on obtient : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

D'où S_2 forme une base de $\mathbb{R}^3$

- Si $a - 2 = 0$ alors (1 ; -1 ; 1) est solution du système

D'où S_2 ne forme pas un système de $\mathbb{R}^3$

c) $S_3 = \{(0; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 0)\}$

Soit α, β, γ trois réels tels que :

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Alors : $\begin{cases}\beta+\gamma=0\\\alpha+\gamma=0\\\alpha+\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$

D'où S_3 forme une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 12

$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x-2y+z=0\}$ et

$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 2x-y+2z=0\}$

1) Donnons une base de F et G et déduisons en leurs dimensions

$x-2y+z=0 \Leftrightarrow x=2y-z$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y-z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Posons $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Alors : $F=<\vec{a},\vec{b}>$ donc F est sous espace vectoriel engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Soit α,β deux réels tels que : $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0$

$\begin{cases}2\alpha-\beta=0\\\alpha=0\\\beta=0\end{cases}$ alors $\alpha=\beta=0$

D'où $(\vec{a},\vec{b})$ est une famille libre donc une base de F et $dim(F)=2$

$2x-y+2z=0 \Leftrightarrow y=2x+2z$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x+2z\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Posons $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Alors : $G=<\vec{c},\vec{d}>$ donc G est un sous espace vectoriel engendré par $\vec{c}$ et $\vec{d}$

Soit α,β deux réels tels que : $\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}\alpha=0\\2\alpha+2\beta=0\\\beta=0\end{cases}$ alors $\alpha=\beta=0$

D'où $(\vec{c},\vec{d})$ est une famille libre donc une base de G et $\dim(G)=2$

2) Déterminons une base de $F\cap G$ et donnons sa dimension

$\begin{cases}x-2y+z=0\ (1)\\2x-y+2z=0\ (2)\end{cases}$

2(1)-(2) donne : $\begin{cases}x=-z\\y=0\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Posons : $\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Alors : $F\cap G=<\vec{e}>$

D'où $(\vec{e})$ est une base de $F\cap G$ et $\dim(F\cap G)=1$

3) Vérifions si F et G sont supplémentaires

F et G son supplémentaires si et seulement si : $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Or $F\cap G=<\vec{e}>$ donc $F\cap G\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

D'où F et G ne sont pas supplémentaires

Exercice 13

$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$h(x,y)=(x-y;\ -3x+3y)$

1) Montrons que h est une application linéaire

h est une application linéaire si et seulement si :

$(\vec{u};\vec{u'})\in\mathbb{R}^2$, $(\alpha;\ \beta)$ réels, on a : $h(\alpha\vec{u};\ \beta\vec{u'})=\alpha h(\vec{u})+\beta h(\vec{u'})$

Posons : $\vec{u}=(x;y)$ et $\vec{u'}=(x';y')$

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{u'}=(\alpha x+\beta x';\ \alpha y+\beta y')$

Alors $h(\alpha\vec{u}+\beta\vec{u'})=(\ \alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y';\ -3(\alpha x+\beta x')+3(\alpha y+\beta y'))$

$h(\alpha\vec{u}+\beta\vec{u'})=\alpha(x-y;\ -3x+3y)+\beta(x'-y';\ -3x'+3y')$

Or $(x-y;\ -3x+3y)=h(\vec{u})$ et

$(x'-y';\ -3x'+3y')=h(\vec{u'})$

D'où $h(\alpha\vec{u};\ \beta\vec{u'})=\alpha h(\vec{u})+\beta h(\vec{u'})$ alors h est une application linéaire

2) Montrons que h n'est ni injective ni surjective

- Soit (1, 1) et (0, 0) deux couples

$h(1,1)=(1-1;\ -3+3)=(0;0)$ et $h(0,0)=(0;0)$

Alors $h(1,1)=\ h(0,0)$ pourtant $(1,1)\neq(0,0)$

D'où h n'est pas injective

- Soit (1, 0) un couple de $\mathbb{R}^2$

$h(x,y)=(1,0)\Leftrightarrow(x-y;\ -3x+3y)=(1,0)$

$\begin{cases}x-y=1\\-3x+3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+y\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=0\\x=y\end{cases}$ impossible

Alors $(1,0)$ n'a pas d'antécédent par h

D'où h n'est pas surjective

3) Donnons une base de son noyau et une base de son image

- Soit $\vec{u}=(x,y)\in\ker(h)$ tel que : $h(\vec{u})=0$

$(x-y;\ -3x+3y)=(0;0)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\-3x+3y=0\end{cases}$

$(x;y)=x(1;1)$

Posons $\vec{a}=(1;1)$ alors : $\ker(h)=<\vec{a}>$

D'où $(\vec{a})$ est une base de $\ker(h)$

- Soit $\vec{u}'=(x';y')\in Im(h)$ tel que : $h(\vec{u})=\vec{u}'$

$(x-y;\ -3x+3y)=(x';y')\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x-y\\y'=-3x+3y\end{cases}$

En multipliant la $1^{ère}$ ligne par 3 et après addition on obtient :

$3x'+y'=0$

Soit $\vec{b}=(-1;3)$ alors $Im(h)=<\vec{b}>$

Posons $\vec{b} = (-2; 4; 4)$ et $\vec{c} = (-1; 1; 0)$

Alors $Im(u) = < \vec{b}, \vec{c} >$

$\vec{b}$ et $\vec{c}$ étant deux vecteurs non proportionnels donc forment une base de $Im(u)$

D'où $(\vec{b}; \vec{c})$ est une base de $Im(u)$

3) Vérifions si $\ker(u) + Im(u) = \mathbb{R}^3$

$\ker(u) + Im(u) = \mathbb{R}^3$ si et seulement si $\vec{a}$; $\vec{b}$ et $\vec{c}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$

$$\begin{cases} -2\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ -2\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha = -4\beta \end{cases}$$

Alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ est une libre alors forme une base de $\mathbb{R}^3$

D'où $\ker(u) + Im(u) = \mathbb{R}^3$

Exercice 17

$(e_1; e_2; e_3)$ une base canonique et

$$f : \begin{cases} f(e_1) = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3) \\ f(e_2) = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) \\ f(e_3) = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3) \end{cases}$$

Soit $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \setminus f(u) = -u\}$ et $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \setminus f(u) = u\}$

1) Montrons que E_{-1} et E_1 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

- $f(0_{\mathbb{R}^3}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ alors $E_{-1} \neq \emptyset$
- *Soit* α un réel et $u \in \mathbb{R}^3$

$f(\alpha u) = \alpha f(u) = -\alpha u \in u_{-1}$

D'où E_{-1} est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

- $f(0_{\mathbb{R}^3}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ alors $E_1 \neq \emptyset$
- Soit γ un réel et $u \in \mathbb{R}^3$

$f(\gamma u) = \gamma f(u) = \gamma u \in E_1$

Alors E_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2) Montrons que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1} et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1

- $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à $E_{-1} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(e_1 - e_2) = -(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) \\ f(e_1 - e_3) = -(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(e_1 - e_2) = \dfrac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3) - \dfrac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) \\ f(e_1 - e_3) = \dfrac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3) - \dfrac{1}{3}(2e_1 + 2e_1 - e_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(e_1 - e_2) = -e_1 + e_2 = -(e_1 - e_2) \\ f(e_1 - e_3) = -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_3) \end{cases}$$

D'où $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1}

- $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à $E_1 \Leftrightarrow f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

$f(e_1 + e_2 + e_3) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3) + \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) + \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_1 - e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

D'où $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1

3) Concluons sur les dimensions de E_{-1} et E_1

On a : $e_1 - e_2 \in E_{-1}$ et $e_1 - e_3 \in E_{-1}$ alors $dimE_{-1} = 2$

On a : $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$ alors $dimE_1 = 1$

4) Déterminons $E_{-1} \cap E_1$

$E_{-1} = f(u) = -u$ *et* $E_1 = f(u) = u$ et d'autre part on a :

$0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$ *et* $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$

D'où $E_{-1} \cap E_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

5) $E_{-1} \cap E_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Leftrightarrow E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$

6) Calculons $f^2 = f \circ f$ et déduisons en que f est bijective et déterminons f^{-1}

$$f^2 : \begin{cases} f^2(e_1) = \frac{1}{3}\big(-f(e_1) + 2f(e_2) + 2f(e_3)\big) = e_1 \\ f^2(e_2) = \frac{1}{3}\big(2f(e_1) - f(e_2) + 2f(e_3)\big) = e_2 \\ f^2(e_3) = \frac{1}{3}\big(2f(e_1) + 2f(e_2) - f(e_3)\big) = e_3 \end{cases}$$

Alors $f^2 = f \circ f = Id_{\mathbb{R}^3}$

$f \circ f = Id_{\mathbb{R}^3}$ alors f est bijective et $f^{-1} = f$

Exercice 18

$$f : \begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y + z \end{cases}$$

Déterminons $\ker(f)$ *et* $Im(f)$. Donnons en une base de chacun d'eux si possible

- Soit $u = (x, y, z) \in \ker(f)$ *tel que*: $f(u) = 0$

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}z \\ x = \frac{1}{3}z \end{cases}$$

$(x, y, z) = \frac{1}{3}z(1, 1, 3)$

Alors $\ker(f) = < (1, 1, 3) >$ (droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (1, 1, 3)$)

- Soit $u' = (x', y', z') \in Im(f)$ tel que $f(u) = u'$

$$f(u) = u' \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = x' \\ -x + 2y + z = y' \end{cases}$$

Exercice 19

$$f_a : \begin{cases} x' = x \\ y' = (1 - a)x + ay \end{cases}$$

1) - Ecrivons la matrice M de f_a dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a & a \end{bmatrix}$$

- Valeurs de a pour lesquelles f_a est un automorphisme de E

f_a est un automorphisme de E si seulement si $det f_a \neq 0$

$$\det f_a = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a & a \end{vmatrix} = a$$

D'où $a \in \mathbb{R}^*$

2) Déterminons suivant les valeurs de a l'ensemble des vecteurs invariants par f_a

$$f_a(u) = u \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = (1 - a)x + ay \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x \\ (1 - a)y = (1 - a)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ (1 - a)(y - x) = 0 \end{cases}$$

- Si $a = 1$ alors l'ensemble des vecteurs invariants est E lui-même

- Si $a \neq 1$, on obtient $y = x$ alors l'ensemble des vecteurs invariants est la droite d'équation $y = x$

3) On donne $a = 0$

$$f_0 : \begin{cases} x' = x \\ y' = x \end{cases}$$

a) Déterminons $\ker(f_0)$ et $Im(f_0)$

Soit $u = (x, y) \in \ker(f_0)$ tel que $f_0(u) = 0$

$$f_0(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Alors $\ker(f_0) = < \vec{j} >$ c'est la droite vectorielle engendrée par $\vec{j}$

- Soit $u' = (x', y') \in Im(f_0)$ tel que $f_0(u) = u'$

$$f_0(u) = u' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ x = y' \end{cases} \Leftrightarrow x' - y' = 0$$

Alors $Im(f_0) = \{u(x,y) \setminus x - y = 0\} = < (1,1) >$ c'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{a}(1,1)$

b) $\vec{e}_1 = \vec{\imath} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{j}$

Montrons que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E si et seulement si $det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \neq 0$

$$det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E

Déterminons la matrice M_0 de f_0 dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On sait que $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice de passage à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ sa matrice inverse

$$M_0 = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où $M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exercice 20

$M_{(a,b)} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ a & b-a \end{bmatrix}$; $I = M_{(0,1)}$ et $J = M_{(1,0)}$

1) Montrer que E est un espace vectoriel de base (I, J)

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in E$ alors E est non vide
- Soit $M_{(a,b)} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ a & b-a \end{bmatrix} \in E$ et $M_{(a',b')} = \begin{bmatrix} a'+b' & 0 \\ a' & b'-a' \end{bmatrix} \in E$

$M_{(a,b)} + M_{(a',b')} =$

$$\begin{bmatrix} (a+a') + (b+b') & 0 \\ a + a' & (b+b') - (a+a') \end{bmatrix}$$

Alors $M_{(a,b)} + M_{(a',b')} \in E$, d'où la stabilité

- Soit α réel $\alpha M_{(a,b)} = \begin{bmatrix} \alpha a + \alpha b & 0 \\ \alpha a & \alpha b - \alpha a \end{bmatrix}$

Alors $\alpha M_{(a,b)} \in E$, d'où la stabilité

- De plus $M_{(a,b)} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = aJ + bI$

(I, J) étant libre alors une base de E

CC : E est un espace vectoriel de base (I, J)

2) Calculons J^2

$$J^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Déduisons en que si M et M'sont deux matrices de E alors $M \times M'$ est une matrice de E

$M = aJ + bI$ et $M' = a'J + b'I$

$M \times M' = (aJ + bI)(a'J + b'I) = (aa' + bb')I + (ba' + ab')J \in E$

Alors $M \times M' \in E$

Montrons que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire

- On a montré que E est un sous espace vectoriel de matrices carrées d'ordre 2, alors E est sous groupe par rapport à l'addition
- De plus, on a montré que $\alpha M_{(a,b)} \in E$ alors la multiplication est interne dans E
- $M \times M' = (aa' + bb')I + (ba' + ab')J \in E$

CC : $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire

NB : Un sous anneau est un anneau

3) Déterminons les matrices inversibles et exprimons $M^{-1}_{(a,b)}$dans la base (I, J)

$M_{(a,b)}$ est inversible si et seulement si $\det M_{(a,b)} \neq 0$

- $detM_{(a,b)} = \begin{vmatrix} a+b & 0 \\ a & b-a \end{vmatrix} = (a+b)(b-a)$

$\det M_{(a,b)} \neq 0$ pour $a \neq b$ et $a \neq -b$

$$M^{-1}_{(a,b)} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}\begin{bmatrix} b-a & 0 \\ -a & b+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{a+b} & 0 \\ \frac{-a}{(a+b)(a-b)} & \frac{1}{a-b} \end{bmatrix}$$

- $M^{-1}_{(a,b)} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}\begin{bmatrix} b-a & 0 \\ -a & b+a \end{bmatrix} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}\left(b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$

Alors $M^{-1}_{(a,b)} = \frac{b}{(a+b)(a-b)}I - \frac{a}{(a+b)(a-b)}J$

Arithmétique

Exercice 1

Démontrons par recurrence que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Soit $P(n)$ cette proposition

$P(n) = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)(n+n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

- $P(1) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{24}{4} = 1 \times 2 \times 3 = 6$
- Supposons que $P(n)$ est vraie
- Vérifions que $P(n+1)$ est aussi vraie

$P(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)$

$P(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$P(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$

$P(n+1)$ est aussi vraie

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum k(n-k) = \frac{(n-1)n(n01)}{6}$

Soit $S_n = \sum k(n-k) = 1(n-1) + 2(n-2) + \cdots + n(n-n)$

$S_n = n(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$

Or $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Alors $S_n = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum k(n-k) = \frac{(n-1)n(n01)}{6}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

- Pour $n = 0$, on a : $3 + 4 = 7$ alors 7 est divisible par 7
- Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$
- Vérifions au rang $n+1$

$3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 3^{2n+1} \times 9 + 2^{n+2} \times 2$

$3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 3^{2n+1}(7+2) + 2^{n+2} \times 2$

$3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$

$3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 7 \times 3^{2n+1} + 2(3^{2n+1} + 2^{n+2})$

Or $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$ avec k entier relatif

Alors $3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 7(3^{2n+1} + 2k)$

Posons $3^{2n+1} + 2k = k'$

Alors $3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 7k'$ donc propriété vraie au rang $n+1$

D'où$\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

NB : on peut utiliser une méthode analogue pour démontrer les d) et e)

Exercice 2

1) Ecrivons en base deux les nombres suivants :

$85 = \overline{1010101}^2$

$104 = \overline{1101000}^2$

$3607 = \overline{111000010111}^2$

2) Ecrivons dans le système décimal

$\overline{10110}^2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 = 22$

$\overline{111000}^2 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2 = 170$

$\overline{110100011}^2 = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2 + 1 = 419$

3) Ecrivons $2^6 - 1$ en base deux

$2^6 - 1 = \overline{111111}^2$

4) Ecrivons $\overline{BAC2016}^7$ dans la base décimale

$\overline{BAC2016}^7 = 11 \times 7^6 + 10 \times 7^5 + 12 \times 7^4 + 2 \times 7^3 + 1 \times 7 + 6 = 1491720$

Exercice 4

Déterminons le reste de la division euclidienne de a par b

a) $a = -2372;\ b = 44$

On sait que : $2732 = 53 \times 44 + 44$

$-2732 = (-53) \times 44 - 40 = (-53) \times 44 - 44 + 4$

$-2732 = (-54) \times 44 + 4$

D'où $(q; r) = (-54; 4)$

b) $a = 735;\ b = -472$

On sait que : $735 = 472 \times 1 + 323$

$735 = (-472) \times (-1) + 323$

D'où $(q; r) = (-1; 323)$

c) $a = -235; b = -17$

On sait que : $235 = 17 \times 13 + 14$

$-235 = 13(-17) - 14 = 13(-17) - 17 + 3$

$-235 = 14 \times (-17) + 3$

D'où $(q; r) = (14; 3)$

d) $a = 50967; b = 457$

$50967 = 457 \times 111 + +240$

D'où $(q; r) = (111; 240)$

Exercice 5

1) $a = 900;\ q = 14$ avec $a = bq + r$

Déterminons les valeurs de b et r

$a = bq + r \Leftrightarrow 900 = 14b + r$ avec $0 \le r < b$

$900 = 14b + r$ alors $r = 900 - 14b$

$0 \le 900 - 14b < b$

$14b \le 900 < 15b$

$\begin{cases} b \le 64 \\ b > 60 \end{cases}$ alors $b = \{61; 62; 63; 64\}$

En remplaçons b par ses valeurs dans l'égalité $r = 900 - 14b$, on obtient :

$(b; r) = \{(61; 46), (62; 32), (63; 18), (64; 4)\}$

2) $b = 16\,; r = q^2$ et $n = bq + r$

Déterminons les valeurs de n

$n = bq + r = 16q + q^2$

Or $0 \le r < b$ alors $0 \le q < 4$

Alors $q = \{1; 2; 3\}$

Si $q = 1$ alors $n = 17$

Si $q = 2$ alors $n = 36$

Si $q = 3$ alors $n = 57$

$n = \{17; 36; 57\}$

3) $a + b + r = 3025$ et $q = 50$

Déterminons les valeurs de a, b et r

$a = bq + r$ alors $a = 50b + r$

$51b + 2r = 3025$ alors $2r = 3025 - 51b$

Or $0 \le r < b$ alors $51b \le 3025 < 53b$

$\begin{cases} 51b \le 3025 \\ 53b > 3025 \end{cases}$ alors $\begin{cases} b \le 59 \\ b > 57 \end{cases}$ alors $b = \{58; 59\}$

En remplaçons b dans $2r = 3025 - 51b$, on obtient : $r = 8$

$a = 50b + r = 50 \times 59 + 8 = 2958$

D'où $(a; b; r) = (2958; 59; 8)$

Exercice 6

1) $m = ppcm(a; b);\ d = pgcd(a; b)$

Trouvons les couples $(a\,;\ b)$, avec $a < b$, d'entiers naturels tels que : $2m + 3d = 78$

d divise $2m$ et $3d$ donc d divise 78

$d \in D_{78}$

$d \in \{1; 2; 3; 6; 13; 26; 39; 78\}$

$2m + 3d = 78$ alors $2m = 78 - 3d$

Seules les valeurs 2 et 6 donnent m

Si $d = 2$ alors $m = 36$

$\begin{cases} m = 36 \\ d = 2 \end{cases}$ alors $\begin{cases} a \times b = 72 \\ pgcd(a; b) = 2 \end{cases}$

Posons $a = 2a'$ et $b = 2b'$

$\begin{cases} 4(a' \times b') = 72 \\ 2 \times pgcd(a'; b') = 2 \end{cases}$ alors $\begin{cases} a' \times b' = 18 \\ pgcd(a'; b') = 1 \end{cases}$ avec a' et b' deux nombres premiers entre eux

Alors $(a'; b') = \{(1; 18), (2; 9)\}$

Si $d = 6$ alors $m = 30$

$\begin{cases} m = 30 \\ d = 6 \end{cases}$ alors $\begin{cases} a \times b = 180 \\ pgcd(a; b) = 6 \end{cases}$

Posons $a = 6a'$ et $b = 6b'$

$\begin{cases} a' \times b' = 5 \\ pgcd(a';b') = 1 \end{cases}$ avec a' et b' premiers entre eux

Alors $(a';b') = (1;5)$

D'où $(a;b) = \{(2;36),(4;18),(6;30)\}$

2) a) Déterminons l'ensemble des diviseurs de 276

on a : $276 = 2^2 \times 3 \times 23$

d'où $D_{276} = \{1;2;3;4;6;12;23;46;69;92;135;276\}$

b) $pgcd(x;y) = d$, $ppcm(x;y) = m$ avec $x < y$

Déterminons les couples d'entiers $(x;y)$ tels que :

$m + 3d = 276$ avec $10 < d < 30$

d divise $m + 3d$ donc $d \in D_{276}$

$d = \{12;23\}$

Si $d = 12$ alors $m = 240$

$\begin{cases} ppcm(x;y) = 240 \\ pgcd(x;y) = 12 \end{cases}$ alors $\begin{cases} xy = 2880 \\ pgcd(x;y) = 12 \end{cases}$

Posons $x = 12x'$ et $y = 12y'$

$\begin{cases} x' \times y' = 20 \\ pgcd(x';y') = 1 \end{cases}$ avec x' et y' premiers entre eux

$(x';y') = \{(1;20),(4;5)\}$

Si $d = 23$ alors $m = 207$

$\begin{cases} ppcm(x;y) = 207 \\ pgcd(x;y) = 23 \end{cases}$

Posons $x = 23x'$ et $y = 23y'$

$\begin{cases} x' \times y' = 9 \\ pgcd(x';y') = 1 \end{cases}$ avec x' et y' premiers entre eux

$(x';y') = (1;9)$

D'où $(x';y') = \{(12;240),(48;60),(23;207)\}$

Exercice 7

1) a)Trouvons à l'aide de l'algorithme d'Euclide, $pgcd(1683;969)$

D	1683	969	714	255	204
D	969	714	255	204	51
R	714	255	204	51	0

Alors $pgcd(1683;969) = 51$

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$: $969x - 1683y = 51$

$969x - 1683y = 51 \Leftrightarrow 19x - 33y = 1$(car $pgcd(1683;969) = 51$)

19 et 33 sont premiers entre eux

$\begin{cases} 33 = 19 + 14 \\ 19 = 14 + 5 \\ 14 = 5 \times 2 + 4 \\ 5 = 4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14 = 33 - 19 \\ 5 = 19 - 14 \\ 4 = 14 - 5 \times 2 \\ 1 = 5 - 4 \end{cases}$

$1 = 5 - 4 = 5 - (14 - 5 \times 2) = 5 \times 3 - 14$

$1 = 3(19 - 14) - 14 = 19 \times 3 - 14 \times 4$

$1 = 19 \times 3 - (33 - 19) \times 4 = 19 \times 7 - 33 \times 4$

Alors $(7;4)$ est une solution particulière de $19x - 33y = 1$

$19x - 33y = 19 \times 7 - 33 \times 4$

$19x - 19 \times 7 = 33y - 33 \times 4$

$19(x - 7) = 33(y - 4)$

19 et 33 étant premiers entre eux alors 19 divise $y - 4$ et 33 divise $x - 7$

Alors $\exists!$ $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} x - 7 = 33k \\ y - 4 = 19k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 33k + 7 \\ y = 19k + 4 \end{cases}$

D'où $S = \{(33k + 7; 19k + 4),\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) Déduisons l'ensemble des solutions de l'équation : $969x - 1683y = 102$

$969x - 1683y = 102 \Leftrightarrow 19x - 33y = 2$

De ce qui précède, on déduit :

$S = \{(33k + 14; 19k + 8), k \in \mathbb{Z}\}$

2) a) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 1[5]$

$3x \equiv 1[5] \Leftrightarrow 3x = 5k + 1$

$3x - 5k = 1$

$(2;1)$ est une solution particulière, alors :

$3x - 5k = 3 \times 2 - 5 \times 1$

$3x - 3 \times 2 = 5k - 5 \times 1$

$3(x - 2) = 5(k - 1)$

3 et 5 étant premiers entre eux, 5 divise $x - 2$ alors

$\exists$ $p \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - 2 = 5p$ alors $x = 5p + 2$

D'où $S = \{5p + 2; p \in \mathbb{Z}\}$

Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $5x \equiv 2[7]$

$5x \equiv 2[7] \Leftrightarrow 5x = 7k' + 2$

$5x - 7k' = 2$

$(6;4)$ est solution particulière, alors :

$5x - 7k' = 5 \times 6 - 7 \times 4$

$5x - 5 \times 6 = 7k' - 7 \times 4$

$5(x - 6) = 7(k' - 4)$

5 et 7 étant premiers entre eux, 7 divise $x - 6$ alors

$\exists!$ $p' \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - 6 = 7p'$ alors $x = 7p' + 6$

D'où $S = \{7p' + 6, p' \in \mathbb{Z}\}$

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases}$

$\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5p + 2 \\ x = 7p' + 6 \end{cases}$

$x = x \Leftrightarrow 5p - 7p' = 4$

$(12;8)$ est une solution particulière, alors :

$5p - 7p' = 5 \times 12 - 7 \times 8$

$5p - 5 \times 12 = 7p' - 7 \times 8$

$5(p - 12) = 7(p' - 8)$

5 et 7 étant premiers entre, 5 divise $p' - 8$ et 7 divise $p - 12$ alors $\exists$ $m \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} p - 12 = 7m \\ p' - 8 = 5m \end{cases}$ alors

$\begin{cases} p = 7m + 12 \\ p' = 5m + 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 5p + 2 \\ x = 7p' + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35m + 62 \\ x = 35m + 62 \end{cases}$

D'où $S = \{35m + 62; m \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 8

$\begin{cases} n \equiv 5[8] \\ n \equiv 4[11] \end{cases}$

Déterminons le reste de la division euclidienne de n par 88.

$\begin{cases} n \equiv 5[8] \\ n \equiv 4[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8a + 5 \\ n = 11b + 4 \end{cases}$

$n = n \Leftrightarrow -8a + 11b = 1$

$(4;3)$ est une solution particulière de cette équation

$-8a + 11b = -8 \times 4 + 11 \times 3$

$8(-a + 4) = 11(-b + 3)$

8 et 11 étant premiers entre eux, 8 divise $-b+3$ et 11 divise $-a+4$, alors $\exists!\ k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} a = 4-11k \\ b = 3-8k \end{cases}$

$\begin{cases} n = 8a+5 \\ n = 11b+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8(4-11k)+5 \\ n = 11(3-8k)+4 \end{cases}$

On obtient : $n = 37-88k = 37+88(-k)$

D'où 37 est le reste de la division euclidienne de n par 88

Exercice 9

Résolvons dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} pgcd(x;y) = 354 \\ x+y = 5664 \end{cases}$

Posons $x = 354x'$ et $y = 354y'$

$\begin{cases} pgcd(x';y') = 1 \\ x'+y' = 16 \end{cases}$ avec x' et y' premiers entre eux

$(x';y') = \left\{\begin{matrix} (1;15),(15;1),(7;8),(8;7),(11;5),(5;11), \\ (13;3),(3;13) \end{matrix}\right\}$

D' où $S = \left\{\begin{matrix} (354;5310),(5310;354),(2478;2832) \\ (2832;2478),(3894;1770),(1770;3894) \\ (4602;1062),(1062;4602) \end{matrix}\right\}$

b) $\begin{cases} ppcm(x;y) = 168 \\ xy = 1008 \end{cases}$

On sait que : $ppcm(x;y) \times pgcd(x;y) = xy$

Alors $pgcd(x;y) = \frac{1008}{168} = 6$

$\begin{cases} ppcm(x;y) = 168 \\ xy = 1008 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pgcd(x;y) = 6 \\ xy = 1008 \end{cases}$

Posons $x = 6x'; y = 6y'$

On a : $\begin{cases} pgcd(x';y') = 1 \\ x'y' = 28 \end{cases}$ avec x' et y' premiers entre eux

Alors : $(x';y') = \{(1;28),(28;1),(7;4),(4;7)\}$

D'où $S = \{(6;168),(168;6),(42;24),(24;42)\}$

$d)$ $\begin{cases} pgcd(x;y) = 12 \\ x^2-y^2 = 7344 \end{cases}$

Posons $x = 12x'; y = 12y'$

$\begin{cases} pgcd(x';y') = 1 \\ x'^2-y'^2 = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pgcd(x';y') = 1 \\ (x'-y')(x'+y') = 51 \end{cases}$

$\begin{cases} x'-y' = 1 \\ x'+y' = 51 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x'-y' = 3 \\ x'+y' = 17 \end{cases}$

$(x';y') = \{(10;7),(26;25)\}$

D'où $(x;y) = \{(120;84),(312;300)\}$

Exercice 10

1) $\mu = ppcm(a;b), \delta = pgcd(a;b)$

Déterminons l'ensemble des couples $(a\ ;\ b)$ tels que :

$2\mu + 3\delta = 11$

δ divise $2\mu+3\delta$ donc $\delta \in D_{11} = \{1;11\}$

Si $\delta = 1$ alors $\mu = 4$

On a : $\begin{cases} ppcm(a;b) = 4 \\ pgcd(a;b) = 1 \end{cases}$ avec a et b premiers entre eux

D'où $(a;b) = \{(1;4),(4;1)\}$

2) Dressons la liste des diviseurs de 108

On a : $108 = 2^2 \times 3^3$

D'où $D_{108} = \{1;2;3;4;6;9;12;18;27;36;54;108\}$

Déterminons l'ensemble des couples $(a\ ;\ b)$ tels que :

$\mu - 3\delta = 108$ avec $10 < \delta < 15$

$\delta \in D_{108}$ alors $\delta = 12$

Si $\delta = 12$ alors $\mu = 144$

On a : $\begin{cases} ppcm(a;b) = 144 \\ pgcd(a;b) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1728 \\ pgcd(a;b) = 12 \end{cases}$

Posons $a = 12a'; b = 12b'$

$\begin{cases} a'b' = 12 \\ pgcd(a';b') = 1 \end{cases}$ avec a' et b' premiers entre eux

Alors $(a';b') = \{(1;12),(12;1),(3;4),(4;3)\}$

D'où $(a;b) = \{(12;144),(144;12),(36;48),(48;36)\}$

Exercice 11

1) a) Démontrons que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2.4^{3n+1}$ est divisible par 11

$3^{2n+1} + 2.4^{3n+1}$ est divisible par 11 si et seulement si :

$\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que : $3^{2n+1} + 2.4^{3n+1} = 11k$

- $n = 0,\ 3 + 2 \times 4 = 11 \times 1$, propriété vraie
- Supposons que, $3^{2n+1} + 2.4^{3n+1} = 11k$
- Vérifions au rang $n+1$

$3^{2(n+1)+1} + 2.4^{3(n+1)+1} = 3^{2n+1} \times 9 + 2.4^{3n+1} \times 64$

$3^{2(n+1)+1} + 2.4^{3(n+1)+1} = 3^{2n+1} \times 9 + 2.4^{3n+1}(55+9)$

$3^{2(n+1)+1} + 2.4^{3(n+1)+1} = 9(3^{2n+1} + 2.4^{3n+1}) + 2.4^{3n+1} \times 55$

$3^{2(n+1)+1} + 2.4^{3(n+1)+1} = 9 \times 11k + 11 \times 2.4^{3n+1} \times 5$

$3^{2(n+1)+1} + 2.4^{3(n+1)+1} = 11(9k + 2.4^{3n+1} \times 5)$

Posons : $k' = 9k + 2.4^{3n+1} \times 5$

Alors $3^{2(n+1)+1} + 2.4^{3(n+1)+1} = 11k'$, propriéié vraie au rang $n+1$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2.4^{3n+1}$ est divisible par 11

b) Déterminons a pour que $3^{2n+1} + a.4^{3n+1}$ soit divisible par 11

$3^{2n+1} + a.4^{3n+1}$ est divisible par 11 si et seulement si :

$a \equiv 2[11]$

D'où $a = 11p + 2$ avec $p \in \mathbb{Z}$

2) Un nombre s'écrit : $\overline{341}^{10}$ et $\overline{2331}^{a}$. Déterminons a

$\overline{341}^{10} = 341 = 340 + 1$ et $\overline{2331}^{a} = 2 \times a^3 + 3 \times a^2 + 3 \times a + 1$ avec $a > 3$

$\overline{341}^{10} = \overline{2331}^{a} \Leftrightarrow 2a^3 + 3a^2 + 3a = 340$

$a(2a^2 + 3a + 3) = 340$ alors $a \in D_{340}$

Or $340 = 2^2 \times 5 \times 17$

Alors $D_{340} = \{4;5;10;17;20;34;68;85;170;340\}$

Seule 5 vérifie

D'où $a = 5$

3) a) Déterminons $n \in \mathbb{N}$ tel que $5^{2n} + 5^n \equiv 0[13]$

$5^4 \equiv 1[13]$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors $5^{4p} = 1[13]$

- si $n = 4p, 5^{2(4p)} + 5^{4p} \equiv 2[13]$
- si $n = 4p+1, 5^{2(4p+1)} + 5^{4p+1} \equiv 17[13]$
- si $n = 4p+2, 5^{2(4p+2)} + 5^{4p+2} \equiv 0[13]$

D'où $n = 4p+2,\ p \in \mathbb{N}^*$

b) Déterminons le reste de la division euclidienne

$a \equiv r^3 - r^2 + 2[3]$ avec $0 \leq r < 3$

R	0	1	2
$r^3 - r^2 + 2$	2	0	2

On a : $a \equiv 2[3]$ et $a \equiv 0[3]$

D'où $r = \{0; 2\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{Z}$: $x^2 + 2x - 3 \equiv 0[6]$

$x^2 + 2x - 3 \equiv r^2 + 2r - 3[6]$ avec $0 \leq r < 6$

r	0	1	2	3	4	5
$r^2 + 2r - 3$	3	0	5	0	3	2

On a : $x \equiv 1[6], x \equiv 3[6]$

D'où $S = \{6p + 1; 6p + 3; p \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 12

1) $1 \leq n \leq 6$. Calculons les restes de la division euclidienne de 3^n par 7

n	1	2	3	4	5	6
3^n	3	2	6	4	5	1

Les restes possibles sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6

2) Montrons que $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$3^{n+6} - 3^n = 3^n(3^6 - 1)$

Or $3^6 \equiv 1[7] \Rightarrow 3^6 - 1 \equiv 0[7]$

$3^n(3^6 - 1) \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+6} - 3^n \equiv 0[7]$

D'où $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3) Déduisons en que 3^{n+6} et 3^n ont le même reste de la division euclidienne par 7

$3^{n+6} - 3^n \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+6} \equiv 3^n[7]$

D'où 3^{n+6} et 3^n ont le même reste de la division euclidienne par 7

4) Calculons le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7

$3^6 \equiv 1[7]$ et $1000 = 166 \times 6 + 4$

$\Rightarrow 3^{1000} = (3^6)^{166} \times 3^4 \equiv 1 \times 3^4[7]$

Or $3^4 \equiv 4[7] \Rightarrow 3^{1000} \equiv 4[7]$

D'où 4 est le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

Exercice 14

1) Démontrons que, $\forall\ n \in \mathbb{Z}, 14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux

D	14n+3	5n+1	4n+1	n
d	5n+1	4n+1	n	1
r	4n+1	n	1	0

$pgcd(14n + 3; 5n + 1) = 1$

D'où , $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux

2) $87x + 31y = 2$

a) Vérifions, à l'aide de 1), que 87 et 31 sont premiers entre eux

$14n + 3 = 87 \Rightarrow n = 6$

$pgcd(14 \times 6 + 3; 5 \times 6 + 1) = pgcd(87; 31) = 1$

D'où 87 et 31 sont premiers entre eux

b) Déduisons un couple $(u; v)$ tel que : $87u + 31v = 1$

$\begin{cases} 87 = 31 \times 2 + 25 \\ 31 = 25 \times +6 \\ 25 = 6 \times 4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 = 87 - 31 \times 2 \\ 6 = 31 - 25 \\ 1 = 25 - 6 \times 4 \end{cases}$

$1 = 25 - 6 \times 4 = 25 - (31 - 25) \times 4 = 25 \times 5 - 31 \times 4$

$1 = (87 - 31 \times 2) \times 5 - 31 \times 4 = 87 \times 5 + 31 \times (-14)$

D'où $(u; v) = (5; -14)$

Déduisons un coupe $(x_0; y_0)$ solution de (E) : $87x + 31y = 2$

$87 \times 5 + 31 \times (-14) = 1 \Rightarrow 87 \times 10 + 31 \times (-28) = 2$

D'où $(x_0; y_0) = (10; -28)$

c) Déterminons l'ensemble des solutions de (E)

De ce qui précède, on a :

$87x + 31y = 87 \times 10 + 31(-28)$

$87(x - 10) = 31(-y - 28)$

Or 87 et 31 sont premiers entre eux alors 87 divise $-y - 28$ et 31 divise $x - 10$

$\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} x - 10 = 31k \\ -y - 28 = 87k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 31k + 10 \\ y = -87k - 28 \end{cases}$

D'où $S = \{(31k + 10; -87k - 28), k \in \mathbb{Z}\}$

3) Trouvons les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 10

$87x - 31y = 2$

D'après ce qui précède, on a : $(x; y) = (31k + 10; 87k + 28)$

$0 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq 31k + 10 \leq 10$

$\Rightarrow -0{,}3 \leq k \leq 0$ soit $k = 0$

D'où $(x; y) = (10; 28)$

Exercice 15

1) a) Démontrons que 193 est un nombre premier

on a : $13^2 = 169$ et $17^2 = 289 > 193$

193 n'est pas divisible par 1 ; 3 ; 5 ;7 ; 11 et 17 alors 193 est un nombre premier

b) Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a < 192$. Montrons que $a^{192} \equiv 1[193]$

$pgcd(192; 193) = 1$ donc 192 et 193 sont premiers entre eux alors $\exists\ a \in \mathbb{N}$ tel que : $a^{192} \equiv 1[193]$ (théorème de Fermat)

2) $(E) : 83x - 192y = 1$

a) Vérifions que 192 et 87 premiers entre eux

D	192	83	26	5
D	83	26	5	1
R	26	5	1	0

Alors : $pgcd(192; 83) = 1$

D'où 192 et 83 sont premiers entre eux

b) Déduisons un couple $(x_0; y_0)$ solution de (E)

$\begin{cases} 192 = 83 \times 2 + 26 \\ 83 = 26 \times 3 + 5 \\ 26 = 5 \times 5 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26 = 192 - 83 \times 2 \\ 5 = 83 - 26 \times 3 \\ 1 = 26 - 5 \times 5 \end{cases}$

$1 = 26 - 5 \times 5 = 26 - 5(83 - 26 \times 3) = 26 \times 16 - 5 \times 83$

$1 = 16 \times (192 - 83 \times 2) - 5 \times 83 = 192 \times 16 - 83 \times 37 = 83 \times (-37) - 192 \times (-16)$

D'où $(x_0; y_0) = (-37; -16)$

R	0	1	2
$r^3 - r^2 + 2$	2	0	2

On a : $a \equiv 2[3]$ et $a \equiv 0[3]$

D'où $r = \{0; 2\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{Z}$: $x^2 + 2x - 3 \equiv 0[6]$

$x^2 + 2x - 3 \equiv r^2 + 2r - 3[6]$ avec $0 \leq r < 6$

r	0	1	2	3	4	5
$r^2 + 2r - 3$	3	0	5	0	3	2

On a : $x \equiv 1[6], x \equiv 3[6]$

D'où $S = \{6p + 1; 6p + 3; p \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 12

1) $1 \leq n \leq 6$. Calculons les restes de la division euclidienne de 3^n par 7

n	1	2	3	4	5	6
3^n	3	2	6	4	5	1

Les restes possibles sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6

2) Montrons que $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$3^{n+6} - 3^n = 3^n(3^6 - 1)$

Or $3^6 \equiv 1[7] \Rightarrow 3^6 - 1 \equiv 0[7]$

$3^n(3^6 - 1) \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+6} - 3^n \equiv 0[7]$

D'où $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3) Déduisons en que 3^{n+6} et 3^n ont le même reste de la division euclidienne par 7

$3^{n+6} - 3^n \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+6} \equiv 3^n[7]$

D'où 3^{n+6} et 3^n ont le même reste de la division euclidienne par 7

4) Calculons le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7

$3^6 \equiv 1[7]$ et $1000 = 166 \times 6 + 4$

$\Rightarrow 3^{1000} = (3^6)^{166} \times 3^4 \equiv 1 \times 3^4[7]$

Or $3^4 \equiv 4[7] \Rightarrow 3^{1000} \equiv 4[7]$

D'où 4 est le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

Exercice 14

1) Démontrons que, $\forall\ n \in \mathbb{Z}, 14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux

D	14n+3	5n+1	4n+1	n
d	5n+1	4n+1	n	1
r	4n+1	n	1	0

$pgcd(14n + 3; 5n + 1) = 1$

D'où , $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux

2) $87x + 31y = 2$

a) Vérifions, à l'aide de 1), que 87 et 31 sont premiers entre eux

$14n + 3 = 87 \Rightarrow n = 6$

$pgcd(14 \times 6 + 3; 5 \times 6 + 1) = pgcd(87; 31) = 1$

D'où 87 et 31 sont premiers entre eux

b) Déduisons un couple $(u; v)$ tel que : $87u + 31v = 1$

$\begin{cases} 87 = 31 \times 2 + 25 \\ 31 = 25 \times +6 \\ 25 = 6 \times 4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 = 87 - 31 \times 2 \\ 6 = 31 - 25 \\ 1 = 25 - 6 \times 4 \end{cases}$

$1 = 25 - 6 \times 4 = 25 - (31 - 25) \times 4 = 25 \times 5 - 31 \times 4$

$1 = (87 - 31 \times 2) \times 5 - 31 \times 4 = 87 \times 5 + 31 \times (-14)$

D'où $(u; v) = (5; -14)$

Déduisons un coupe $(x_0; y_0)$ solution de (E) : $87x + 31y = 2$

$87 \times 5 + 31 \times (-14) = 1 \Rightarrow 87 \times 10 + 31 \times (-28) = 2$

D'où $(x_0; y_0) = (10; -28)$

c) Déterminons l'ensemble des solutions de (E)

De ce qui précède, on a :

$87x + 31y = 87 \times 10 + 31(-28)$

$87(x - 10) = 31(-y - 28)$

Or 87 et 31 sont premiers entre eux alors 87 divise $-y - 28$ et 31 divise $x - 10$

$\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} x - 10 = 31k \\ -y - 28 = 87k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 31k + 10 \\ y = -87k - 28 \end{cases}$

D'où $S = \{(31k + 10; -87k - 28), k \in \mathbb{Z}\}$

3) Trouvons les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 10

$87x - 31y = 2$

D'après ce qui précède, on a : $(x; y) = (31k + 10;\ 87k + 28)$

$0 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq 31k + 10 \leq 10$

$\Rightarrow -0{,}3 \leq k \leq 0$ soit $k = 0$

D'où $(x; y) = (10; 28)$

Exercice 15

1) a) Démontrons que 193 est un nombre premier

on a : $13^2 = 169$ et $17^2 = 289 > 193$

193 n'est pas divisible par 1 ; 3 ; 5 ;7 ; 11 et 17 alors 193 est un nombre premier

b) Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a < 192$. Montrons que $a^{192} \equiv 1[193]$

$pgcd(192; 193) = 1$ donc 192 et 193 sont premiers entre eux alors $\exists\ a \in \mathbb{N}$ tel que : $a^{192} \equiv 1[193]$ (théorème de Fermat)

2) $(E) : 83x - 192y = 1$

a) Vérifions que 192 et 87 premiers entre eux

D	192	83	26	5
D	83	26	5	1
R	26	5	1	0

Alors : $pgcd(192; 83) = 1$

D'où 192 et 83 sont premiers entre eux

b) Déduisons un couple $(x_0; y_0)$ solution de (E)

$\begin{cases} 192 = 83 \times 2 + 26 \\ 83 = 26 \times 3 + 5 \\ 26 = 5 \times 5 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26 = 192 - 83 \times 2 \\ 5 = 83 - 26 \times 3 \\ 1 = 26 - 5 \times 5 \end{cases}$

$1 = 26 - 5 \times 5 = 26 - 5(83 - 26 \times 3) = 26 \times 16 - 5 \times 83$

$1 = 16 \times (192 - 83 \times 2) - 5 \times 83 = 192 \times 16 - 83 \times 37 = 83 \times (-37) - 192 \times (-16)$

D'où $(x_0; y_0) = (-37; -16)$

c) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') : $83x - 192y = 0$

$83x - 192y = 0 \Leftrightarrow 83x = 192y$

83 divise $192y$ donc divise y de meme 192 divise $83x$ donc divise x alors $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x = 192k$ et $y = 83k$

D'où $S' = \{(192k; 83k), k \in \mathbb{Z}\}$

d) Déduisons les solutions de (E)

$S = \{(192k - 37; 83k - 15), k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 16

1) Montrons que, $n \in \mathbb{Z}, n^2 \equiv 0[5]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$

Si n est pair alors : $n = 2k$

- Si k est pair, posons $k = 2p$

$n^2 = 4(2p)^2 = 16p^2$

Or $16 \equiv 0[8]$

D'où $n^2 \equiv 0[5]$

- Si k est impair, posons $k = 2p + 1$

$n^2 = 4(2p+1)^2 = 16(p^2 + p) + 4$

Or $16 \equiv 0[8]$ alors $16(p^2 + p) + 4 \equiv 4[8]$

D'où $n^2 \equiv 4[8]$

2) Montrons que $n^2 \equiv 1[8]$, si n est impair

Posons $n = 2k + 1$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$

Si k est pair, $k = 2p$

$n^2 = 8(2p^2 + p) + 1$

Or $8 \equiv 0[8]$ alors $8(2p^2 + p) + 1 \equiv 1[8]$

D'où $n^2 \equiv 1[8]$

Exercice 17

$(S) : \begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$

1) Démontrons qu'il existe $(u; v)$ tel que : $19u + 12v = 1$

D	19	12	7	5	2
D	12	7	5	2	1
r	7	5	2	1	0

Alors $pgcd(19; 12) = 1$

19 et 12 sont premiers entre eux alors $\exists\, (u; v)$ tel que :$19u + 12v = 1$

Vérifions que pour tel couple le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est solution de (S)

N est solution de $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} N - 13 \equiv 0[19] \\ N - 6 \equiv [12] \end{cases}$

- $N - 13 = 13 \times 12v + 6 \times 19u - 13$

$N - 13 = 13 \times (12v - 1) + 6 \times 19u$

Or $12v - 1 = -19u$

Alors $N - 13 = 13 \times (-19u) + 6 \times 19u = 19(-7u)$

Or $19 \equiv 0[19]$

D'où $N - 13 \equiv 0[19]$

$N - 6 = 13 \times 12v + 6 \times 19u - 6$

$N - 6 = 13 \times 12v + 6(19u - 1)$

Or $19u - 1 = -12v$

$N - 6 = 13 \times 12v + 6 \times (-12v) = 12(7v)$

Or $12 \equiv 0[12]$

D'où $N - 6 \equiv 0[12]$

Ccl : N est solution de (S)

2) n_0 solution de (S)

a) Vérifions que (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$

n_0 solution de $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} n_0 \equiv 13[19] \\ n_0 \equiv 6[12] \end{cases}$

$\begin{cases} n_0 \equiv 13[19] \\ n_0 \equiv 6[12] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_0 - 13 \equiv 0[19] \\ n_0 - 6 \equiv 0[12] \end{cases}$

D'autre part : $\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - 13 \equiv 0[19] \\ n - 6 \equiv 0[12] \end{cases}$

De ce qui précède, on déduit :

$\begin{cases} n - n_0 \equiv 0[19] \\ n - n_0 \equiv 0[12] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$

b) Démontrons que $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases} \Leftrightarrow n \equiv n_0[12 \times 19]$

n et n_0 ont même reste de division euclidienne par 12 et 19 ; et, comme 12 et 19 sont premiers entre eux alors n et n_0 ont même reste de division par 12×19

D'où $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases} \Leftrightarrow n \equiv n_0[12 \times 19]$

3) Trouvons le couple $(u; v)$ solution de $19u + 12v = 1$ et calculons la valeur de N correspondante

$\begin{cases} 19 = 12 \times 1 + 7 \\ 12 = 7 \times 1 + 5 \\ 7 = 5 \times 1 + 2 \\ 5 = 2 \times 2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 19 - 12 \times 1 \\ 5 = 12 - 7 \times 1 \\ 2 = 7 - 5 \times 1 \\ 1 = 5 - 2 \times 2 \end{cases}$

$1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times (7 - 5 \times 1) = 5 \times 3 - 7 \times 2$
$= (12 - 7) \times 3 - 7 \times 2 = 12 \times 3 - 7 \times 5$ $1 = 12 \times 3 - (19 - 12) \times 5 = 19 \times (-5) + 12 \times 8$ $(u; v) = (-5; 8)$

Alors $N = 13 \times 12 \times 8 + 6 \times 19 \times (-5) = 678$

4) Déterminons l'ensemble des solutions de (S)

$\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 19k + 13 \\ n = 13k' + 6 \end{cases}$

$n = n \Leftrightarrow 19k + 12k' = 7$

$(k; k') = (35; 56)$

$-19k + 12k' = -19(35) + 12(56)$

$19(-k + 35) = 12(-k' + 56)$

19 et 12 étant premiers entre eux, alors 19 divise $-k' + 56$ et 12 divise $-k + 35$

$\exists\, p \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} -k + 35 = 12p \\ -k' + 56 = 19p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 35 - 12p \\ k' = 56 - 19p \end{cases}$

$\begin{cases} n = 19(35 - 12p) + 13 \\ n = 12(56 - 19p) + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 678 - 228p \\ n = 678 - 228p \end{cases}$

D'où $S = \{678 - 228p; p \in \mathbb{Z}\}$

5) Déterminons le reste de la division euclidienne de n par 228

$678 = 228 \times 2 + 222$ alors $r = 222$

Exercice 20

1) Déterminons les entiers naturels dont le carré est diviseur de 1998

$1998 = 2 \times 3^3 \times 37$

$D_{1998} =$
$\begin{Bmatrix} 1; 2; 3; 6; 9; 18; 27; 37; 54; 74; 111; 222; 333; 666; \\ 999; 1998 \end{Bmatrix}$

Soit d diviseur de 1998 tel que d^2 divise 1998

Alors $d^2 = 1$ et $d^2 = 9$

D'où $d = \{1; 3\}$

2) $\mu = ppcm(x; y)$ et $\delta = pgcd(x; y)$

Déterminons $(x ; y)$ tels que : $\mu^2 - 3\delta^2 = 1998$

$\delta^2 \in D_{1998}$ alors $\delta^2 = \{1; 9\} \Rightarrow \delta = \{1; 3\}$

$\mu^2 = 1998 + 3\delta^2$

Si $\delta = 1$ alors μ n'existe pas

Si $\delta = 3$ alors $\mu = 45$

$\begin{cases} pgcd(x; y) = 3 \\ ppcm(x; y) = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pgcd(x; y) = 3 \\ xy = 135 \end{cases}$

Posons $x = 3x'$ et $y = 3y'$

$\begin{cases} pgcd(x'; y') = 1 \\ x'y' = 15 \end{cases}$

$(x'; y') = \{(1; 15), (15; 1), (3; 5), (5; 3)\}$

D'où $(x; y) = \{(3; 45), (45; 3), (9; 15), (15; 9)\}$

Calculs vectoriels

Exercice 1

1) $f(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $g(M) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

Déterminons l'ensemble des points M tels que :

a) $\|f(M)\| = 2\|g(M)\|$

On sait que : $f(M) = 3\overrightarrow{MG}$ avec G le centre de gravité du triangle ABC et $g(M) = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AI}$ avec I milieu du segment $[BC]$

$\|f(M)\| = 2\|g(M)\|$ alors : $3MG = 4AI \Leftrightarrow MG = \frac{4}{3}AI$

L'ensemble est le cercle de centre G et de rayon $\frac{4}{3}AI$

b) $f(M).g(M) = 2$

$f(M).g(M) = 2 \Leftrightarrow -6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AI} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}$

Alors $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}$

Soi H le projeté orthogonal de M sur (AI), alors

$\overline{GH} = \frac{1}{3\overline{AI}}$ donc l'ensemble la perpendiculaire passant par H tel que : $\overline{GH} = \frac{1}{3\overline{AI}}$

2) Dans chacun des cas suivants, déterminons les applications

a) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Fixons G, centre de gravité du triangle ABC

$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'G} + \overrightarrow{GM} = 3\overrightarrow{MG}$ alors $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$

L'application est l'homothétie de centre G, de rapport -2

b) $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

En fixant I, milieu du segment $[BC]$, on obtient :

$\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{AI}$

L'application est la translation de vecteur $-2\overrightarrow{AI}$

Exercice 2

$AB = AC = 4d, BC = 2d$, $G_\lambda = bar\{(A; \lambda), (B; 1), (C; 1)\}$

1) Déterminons l'ensemble Δ des barycentres G_λ pour $\lambda \neq -2$

$\overrightarrow{AG_\lambda} = \frac{1}{\lambda+2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\lambda+2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{\lambda+2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

En fixant I, milieu du segment $[BC]$, on obtient :

$\overrightarrow{AG_\lambda} = \frac{2}{\lambda+2}\overrightarrow{AI}$ alors $G_\lambda \in (AI)$

D'où Δ est la droite (AI)

2) $\lambda = -1, G = bar\{(A; -1), (B; 1), (C; 1)\}$

a) Déterminons G

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{-1+2}\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI}$

b) Déterminons l'ensemble (E) des points M tels que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$

Soit $f(M) = -MA^2 + MB^2 + MC^2$

En fixant le barycentre G, on obtient :

$f(M) = MG^2 + f(G)$ avec $f(G) = -AB^2 + BC^2 - AC^2 = -28d^2$

$f(M) = 0 \Leftrightarrow MG^2 - 28d^2 = 0 \Leftrightarrow MG^2 = 28d^2$

Alors : $MG = 2d\sqrt{7}$

(E) est le cercle de centre G, de rayon $2d\sqrt{7}$

3) $\vec{v} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

a) Démontrons que $\vec{v}$ est un vecteur constant

$-2 + 1 + 1 = 0$ alors $\vec{v}$ est constant

Fixons A

$\vec{v} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$ alors :

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ avec I, milieu de $[BC]$

b) Déterminons l'ensemble (D) des points M tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 32d^2$

Soit $g(M) = -2MA^2 + MB^2 + MC^2$

En fixant A, on obtient :

$g(M) = 2\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + AB^2 + AC^2 = 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AI} + 32d^2$

$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 32d^2 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AI} + 32d^2 = 32d^2$

Alors : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AI} = 0$

L'ensemble (D) est la perpendiculaire à (AI) passant par I

Exercice 3

$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}$

a) Déterminons, suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques

- $\alpha + 1 + 1 + \alpha = 2\alpha + 2 = 0$ alors $\alpha = -1$

$\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$

Alors : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$

Alors l'application est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$

- $\alpha + 1 + 1 + \alpha = 2\alpha + 2 \neq 0$ alors $\alpha \neq -1$

$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}$

Fixant G le centre de $ABCD$

$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD} = (2\alpha + 2)\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = (2\alpha + 2)\overrightarrow{MG}$ alors $\overrightarrow{GM'} = -(2\alpha + 1)\overrightarrow{GM}$

L'application est l'homothétie de centre G, de rapport $-(2\alpha + 1)$

b) Déterminons et construisons l'ensemble (E) des points M tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4c^2$

En fixant G, on obtient :

$4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 4c^2$

$4MG^2 + 4GA^2 = 4c^2$ car : $GA = GB = GC = GD$

$2GA = AC$ alors $GA^2 = \frac{1}{4}AC^2$

Or $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2c^2$ alors $GA^2 = \frac{1}{2}c^2$

$4MG^2 + 2c^2 = 4c^2$ alors $MG^2 = \frac{1}{2}c^2$

D'où $MG = \frac{\sqrt{2}}{2}c$

L'ensemble (E) est le cercle circonscrit de centre G, de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Déterminons et construisons l'ensemble (F) des points M tels que :

$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

$4MG = 2AB$ alors $MG = \frac{1}{2}AB$

L'ensemble (F) est le cercle inscrit de centre G, de rayon $\frac{1}{2}AB$

d) Déterminons et construisons l'ensemble (G) des points M tels :

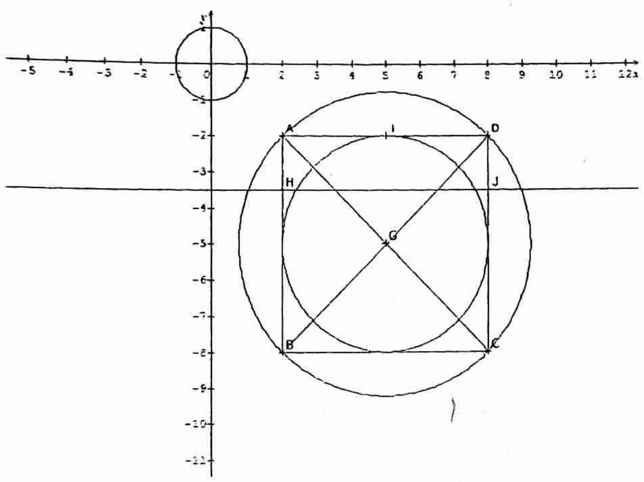
$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 2c^2$

$8\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MG} = 2c^2$ alors $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}c^2$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB)

$\overline{GH}.\overline{AB} = \frac{1}{4}c^2$ alors $\overline{GH} = \frac{1}{4}\overline{AB}$

L'ensemble (G) est la perpendiculaire de (AB) passant par H



Exercice 4

1) ABC un triangle, I milieu de $[BC]$, $G = bar\{(A; -1), (B; 2), (C; 2)\}$

a) Exprimons $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$

b) Déterminons et construisons l'ensemble des points M tels que :

$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

$3MG = 3MO$ avec O le centre de gravité du triangle ABC

D'où $MG = MO$

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[GO]$

2) $AB = AC = 2a$ et $BC = a$

a) Déterminons et construisons l'ensemble des points M tels que :

$-MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 = 16a^2$

Soit $f(M) = -MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2$

En fixant le point G, on obtient on :

$f(M) = 3MG^2 + f(G)$ avec $f(G) = \frac{-2AB^2 + 4BC^2 - 2AC^2}{3} = -4a^2$

Alors : $3MG^2 - 4a^2 = 16a^2$

D'où $MG = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$

L'ensemble est le cercle de centre G, de rayon $\frac{2a\sqrt{5}}{3} = AG$

b) Déterminons et construisons l'ensemble des points tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 8a^2$

Soit $g(M) = -2MA^2 + MB^2 + MC^2$

En fixant A, on obtient : $g(M) = 2\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + 8a^2$

$g(M) = 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AI} + 8a^2$

$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 8a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AI} = 0$

L'ensemble des points M est la perpendiculaire à (AI) passant par I

3) $A(1; 0)$, $B(0; 2)$ et C le point d'affixe z

a) Interprétons géométriquement $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|$ et $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)$

$\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right| = \left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = \frac{BC}{BA}$ et

$\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = mes(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})(2\pi)$

b) $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \alpha$, $BC = \sqrt{\frac{2}{5}}BA$ et $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Calculons $\sin\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ alors $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ alors $\sin\alpha = \mp\frac{3}{\sqrt{10}}$

D'où $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

c) Démontrons que $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$ et déduisons z_C

$$\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{BC}{BA}(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3i}{\sqrt{10}}\right)$$

$\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{\sqrt{25}} = \frac{1-3i}{5}$

$\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5} \Leftrightarrow 5z - 10i = (1-3i)(1-2i)$

$5z = 5(-1+i)$ alors : $z_C = -1 + i$

d) Vérifions que ABC est un triangle isocèle en A

$AB = |z_B - z_A| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$

$AC = |z_C - z_A| = |-2 + i| = \sqrt{5}$

Alors ABC est un triangle isocèle en A

Exercice 5

$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

1) Déterminer a tel que f_a soit une translation dont on déterminera le vecteur

$a + a - 1 = 0$ alors $a_0 = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{CI}$ avec I milieu de $[AB]$

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{CI}$ alors $f_{\frac{1}{2}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{CI}$

2) $a \neq \frac{1}{2}$

a) Montrons que f_a admet un seul point invariant Ω_a

$a \neq \frac{1}{2}$ il existe un point Ω_a tel que :

$\Omega_a = bar\{(A; a), (B; a), (C; -1)\}$

b) Déterminons Ω_a

Posons $I = bar\{(A; a), (B; a)\}$ alors

$\Omega_a = bar\{(I; 2a), (C; -1)\}$

$\overrightarrow{I\Omega_a} = \frac{-1}{2a-1}\overrightarrow{IC}$ donc $\Omega_a \in (IC)$

Ω_a décrit la droite (IC)

c) Montrons que si de plus $a \neq 1$, montrons que f_a est une homothétie dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Fixons le point Ω_a

$\overrightarrow{M\Omega_a} + \overrightarrow{\Omega_a M'} = (2a-1)\overrightarrow{M\Omega_a}$

$\overrightarrow{\Omega_a M'} = (2a-2)\overrightarrow{M\Omega_a}$ alors : $\overrightarrow{\Omega_a M'} = -(2a-2)\overrightarrow{\Omega_a M}$

f_a est l'homothétie de centre Ω_a et de rapport $-(2a-2)$

f_1 est l'application identique.

Exercice 6

$AB = AC = 5$, $BC = 6$

1) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(25 + 25 - 36)$

Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7$

2) Construisons $G = bar\{(A; 2), (B; 3), (C; 3)\}$

$G = bar\{(A; 2), (I; 6)\}$ alors $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$

3) $f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Démontrons que : $f(M) = f(G) + 4MG^2$

Fixons G

$f(M) = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}).(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}).(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$

$f(M) = 4MG^2 + \overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC}) + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$

Avec $\overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC}) = 0$ et $2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = f(G)$

Alors : $f(M) = f(G) + 4MG^2$

4) Calculons $f(A)$ et $f(G)$

$f(A) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7 \times 2 = 14$

$f(G) = 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$

- $2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = GB^2 + GC^2 - BC^2$ or $GB^2 = GC^2 = IG^2 + IC^2$

Avec $IG^2 = \frac{1}{16}AI^2$ et $AI^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right) = 16$

Alors : $IG^2 = 1$ et $IC^2 = 9$

$2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = 10 + 10 - 36 = -16$

- $\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = \frac{1}{2}(GC^2 + GA^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(10 + 9 - 25) = -3$
- $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(9 + 10 - 25) = -3$

Alors : $f(G) = -16 - 3 - 3 = -22$

5) Trouvons l'ensemble des points M tels que : $f(M) = f(A)$

$f(M) = f(A) \Leftrightarrow f(G) + 4MG^2 = 14$

$4MG^2 = 14 + 22 = 36$

Alors : $MG = 3$

L'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon 3

Exercice 7

1) $A(-1 + 3i), B(1 + i)$ et $C(-4)$

Déterminons l'affixe du point G barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 4, 3 et 5

$z_G = \frac{4(-1+3i)+3(1+i)+5(-4)}{4+3+5}$

Alors : $z_G = -\frac{7}{4} + \frac{5}{4}i$

2) $h(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

Calculons $h(G)$

$h(G) = \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

- $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 - AB^2)$

$GA = |z_A - z_G| = \sqrt{\frac{58}{16}}$; $GB = |z_B - z_G| = \sqrt{\frac{122}{16}}$ et

$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{8}$

Alors : $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}\left(\frac{58}{16} + \frac{122}{16} - 8\right) = \frac{13}{8}$

- $2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = GB^2 + GC^2 - BC^2$

$GC = |z_C - z_G| = \sqrt{\frac{106}{16}}$ et $BC = |z_C - z_B| = \sqrt{26}$

$2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = \frac{106}{16} + \frac{122}{16} - 26 = -\frac{47}{4}$

- $3\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}(GC^2 + GA^2 - AC^2)$

$AC = |z_C - z_A| = \sqrt{18}$

$3\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\left(\frac{106}{16} + \frac{58}{16} - 18\right) = -\frac{93}{8}$

D'où $h(G) = \frac{13}{8} - \frac{47}{4} - \frac{93}{8} = -\frac{87}{4}$

Exprimons $h(M)$ en fonction de MG^2 et $h(G)$

$h(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

En fixant le point G et après développement, on obtient :

$$h(M) = 6MG^2 + \overrightarrow{MG}(4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 5\overrightarrow{GC}) + h(G)$$

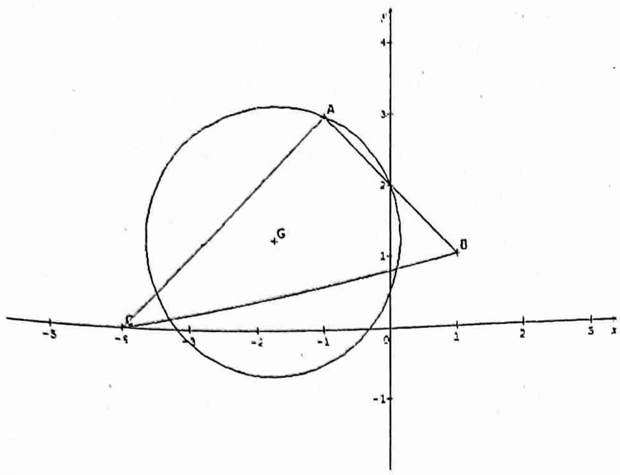
D'où $h(M) = 6MG^2 + h(G)$

Déterminons et dessinons l'ensemble des points M tels que : $h(M) = 18$

$h(M) = 18 \Leftrightarrow 6MG^2 - \frac{87}{4} = 18$

$6MG^2 = 18 + \frac{87}{4} = \frac{159}{4}$ alors $MG^2 = \frac{159}{24} = \frac{53}{8}$

L'ensemble des points M est le cercle de centre G, de rayon $\frac{\sqrt{106}}{4}$



Exercice 8

$BC = a, AC = b, AB = c$ et G l'isobarycentre du triangle ABC

1) Montrons que pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

Soit $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$

Fixons le point G

$f(M) = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$

Après développement, on obtient :

$f(M) = 3MG^2 + \overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Avec $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{AB^2+BC^2+AC^2}{3} = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

Alors : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

2) En calculant de deux façons différentes $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$, établissons que :

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$

- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Alors : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 9MG^2$

- $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) =$

$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}$

$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$

$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA}(2\overrightarrow{MA'}) + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ (car A' est le milieu de $[BC]$)

$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA}(2\overrightarrow{MA'}) + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 9MG^2$

Or $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ alors

$9MG^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$

$4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 9MG^2 - 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

D'où : $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$

3) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = 0$ et $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$ alors :

$3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6} = 0$

On obtient : $MG^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{18}$

Les points appartiennent au cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{18}}$

Exercice 9

$A(6,0,0); B(0,6,0)$ et $C(0,0,4)$

1) Déterminons le barycentre G des points O, A et B affectés respectivement des coefficients 1, 2 et 3

$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{6}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ alors $G(2,3,0)$

2) Déterminons l'ensemble S des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC} = 0$

$\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{MG}$

Alors $S : \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MC} = 0$

L'ensemble des points M est la sphère de centre G, milieu de $[CG]$

Donnons une équation de S

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-4 \end{pmatrix} = 0$

$x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 4z = 0$

$(x-1)^2 - 1 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (z-2)^2 - 4 = 0$

Alors $S : (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}$

3) Déterminons l'intersection de S et du plan d'équation $x = 0$

$S \cap P \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{25}{4}$

Alors leur intersection est le cercle de centre $I(\frac{3}{2}; 2)$ et de rayon $\frac{5}{2}$

Soit $P' : MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24$

Vérifions que $G \in P'$

$GO^2 + 2GA^2 - 3GB^2 = 24$ (on calculera les distances)

Déterminons P'

$MO^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $MA^2 = (x-6)^2 + y^2 + z^2$ et $MB^2 = x^2 + (y-6)^2 + z^2$

Alors $x^2 + y^2 + z^2 + 2(x-6)^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3x^2 - 3(y-6)^2 - 3z^2 = 24$

$-24x + 72 + 36y - 108 = 24$

$-24x + 36y - 60 = 0$

D'où $P' : -2x + 3y - 5 = 0$

Exercice 10

I) $ABCDEFGH$ est un cube tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base orthonormée directe, I milieu de $[EF]$ et J le centre du carré $ADHE$

a) Vérifions que $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BJ}$.

$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{EI} - \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \wedge \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}\right)$

$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AE}) - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BJ}$

Déduisons en l'aire du triangle IGA

$A_{IGA} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BJ}\| = \frac{BJ}{2}$

Or $BJ^2 = BA^2 + AJ^2$ et $AJ^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ et $BA^2 = 1$

$BJ^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ alors $BJ = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Alors : $A_{IGA} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

b) Calculons le volume du tétraèdre $ABIG$ et déduisons en la distance du point B au plan (IGA)

$V_{ABIG} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}).\overrightarrow{IB}| = \frac{1}{6}|\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{IB}|$

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$ alors $\overrightarrow{IB}(\frac{1}{2}; 0; 1)$

$\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

D'où $V_{ABIG} = \frac{1}{6}$

$V_{ABIG} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3}A_{IGA} \times d(B, (IGB))$

Alors $d(B, (IGB)) = \frac{1}{2A_{IGA}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

II) Soit ABC un triangle et M un point de l'espace. Dans chacun des cas suivants, déterminer le lieu des points M tels que : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

a) ABC n'est pas un triangle rectangle en A.

$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Or ABC n'est pas rectangle en A

D'où le lieu des points M est l'ensemble vide

b) ABC est rectangle en A

Soit (L) ce lieu

- $M \in (L) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ alors M appartient au plan passant par le point A et orthogonal à (AC)
- $M \in (L)$ alors $\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$

Or $d(M, (AB)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{AB}$ alors $d(M, (AB)) = \frac{AC}{AB}$

Alors M appartient au cylindre d'axe (AB), de rayon $\frac{AC}{AB}$

Cc : (L) est la réunion de deux droites parallèles contenues dans le plan normal à (AC)

Exercice 11

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$A(3; 1; 0)$, $B(1; 2; 0)$, $C(3; 2; 1)$ et $D(0; 0; d)$

1) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

a) Calculons les coordonnées de $\vec{n}$

$\overrightarrow{AB}(-2; 1; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(0; 1; 1)$

Alors $\vec{n}(1; 2; -2)$

b) Déduisons en l'aire du triangle ABC

$A_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|\vec{n}\| = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+4} = \frac{3}{2}$

2) Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC)

$M(x; y; z) \in (ABC)$ tel que : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$ alors : $\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

$x - 3 + 2y - 2 - 2z = 0$

$(ABC) : x + 2y - 2z - 5 = 0$

3) H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC)

a) On pose $\overrightarrow{DH} = \lambda\vec{n}$

Calculons λ en fonction de d

$\overrightarrow{DH} = \lambda\vec{n}$ alors : $\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H - d \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ alors : $H\begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ -2\lambda + d \end{pmatrix}$

$H \in (ABC)$ alors : $\lambda + 4\lambda + 4\lambda - 2d - 5 = 0$

D'où $\lambda = \frac{2d+5}{9}$

b) Déduisons en l'expression de la distance DH

$\overrightarrow{DH} = \lambda\vec{n}$ alors $DH = |\lambda|\|\vec{n}\| = \frac{2d+5}{9}\sqrt{1+4+4}$

D'où $DH = \frac{2d+5}{3}$

Montrons que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $V_d = \frac{2d+5}{6}$

$V_d = \frac{1}{3}A_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2d+5}{3} = \frac{2d+5}{6}$

4) Déterminons la valeur de d pour la quelle (DB) est perpendiculaire au plan (ABC)

(DB) est perpendiculaire à (ABC) si et seulement si : $\overrightarrow{DB} = t\vec{n}$

$\overrightarrow{DB} = t\vec{n}$ alors : $\begin{cases} 1 = t \\ 2 = 2t \\ -d = -2t \end{cases}$ alors $d = 2$

5) $d = 0$. Calculons la distance de A au plan (OBC)

Si $d = 0$, le point D est confondu au point O. Le tétraèdre $ABCD$ devient alors $ABCO$

$V_{ABCO} = \frac{5}{6}$

On sait que : $V_{ABCO} = \frac{1}{3}A_{BCO} \times d(A, (BCO))$

Avec $A_{BCO} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Alors : $V_{ABCO} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{2} \times d(A, (BCO))$

$d(A, (OBC)) = \frac{6V_{ABCO}}{\sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{21}} = \frac{5\sqrt{21}}{21}$

Exercice 13

1) $A(1; -2; 4)$, $B(-2; -6; 5)$ et $C(-4; 0; -3)$

a) Démontrons que les points A, B et C ne sont pas alignés

$\overrightarrow{AB}(-3; -4; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-5; 2; -7)$

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ c' est à dire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$ alors : $\begin{cases} -3 = -5t \\ -4 = 2t \\ 1 = -7t \end{cases}$ ce système n'a pas de solution alors $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires par conséquent A, B et C ne sont pas alignés.

b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1;\ -1;\ -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 1 \times (-3) + (-1) \times (-4) + 1 \times (-1) = -3 + 4 - 1 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-5) + (-1) \times 2 + (-1) \times (-7) = -5 - 2 + 7 = 0$

Alors $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ par conséquent $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c) Déterminer une équation du plan (ABC)

$1 \times x - 1 \times y - 1 \times z + d = 0$

$A \in (ABC)$ alors : $d = 1$

D'où $(ABC) : x - y - z + 1 = 0$

2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonal au plan (ABC)

$M(x, y, z)$ appartient à la droite passant par O alors : $\overrightarrow{OM} = t\vec{n}$

D'où $\begin{cases} x = t \\ y = -t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$

b) Déterminons les coordonnées du point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC)

O' est donc le point d'intersection de (ABC) et de la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ABC)

$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$ On obtient $O'\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$

3) Soit H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit t le réel tel que : $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$

a) Démontrons que $t = \frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$

H est donc le point d'intersection de la droite (BC) avec le plan perpendiculaire à la droite (BC)

$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} = 0$ donc : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = t\|\overrightarrow{BC}\|^2$

D'où $t = \frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$

b) Déduisons le réel t et les coordonnées du point H

$\overrightarrow{BO}(2;\ 6;\ -5), \overrightarrow{BC}(-2; 6;\ -8)$ et $BC^2 = 104$

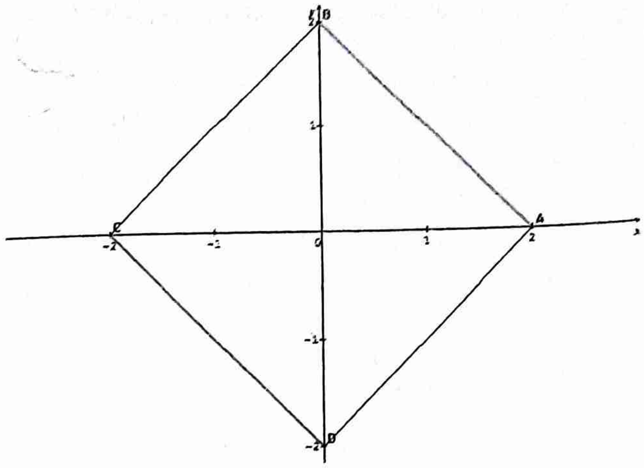
Alors $t = \frac{72}{104} = \frac{9}{13}$

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OH}$ alors $H\left(-\frac{44}{13};\ -\frac{24}{13};\ -\frac{7}{13}\right)$

Isométries, Similitudes et applications affines

Exercice 1

$ABCD$ est carré de sens direct



Déterminons :

1) $r_{(A,\frac{\pi}{4})} \circ r_{(B,\frac{\pi}{4})}$

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \neq 0$ alors $r_{(A,\frac{\pi}{4})} \circ r_{(B,\frac{\pi}{4})}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

$r_{(A,\frac{\pi}{4})} = s_D \circ S_{(AB)}$ où (D) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$

$r_{(B,\frac{\pi}{4})} = S_{(BA)} \circ S_{D'}$ où (D') est la bissectrice de l'angle $\widehat{DBA}$

Alors $r_{(A,\frac{\pi}{4})} \circ r_{(B,\frac{\pi}{4})} = s_D \circ S_{(AB)} \circ S_{(BA)} \circ S_{D'} = S_D \circ S_{D'}$

D'où $r_{(A,\frac{\pi}{4})} \circ r_{(B,\frac{\pi}{4})} = S_D \circ S_{D'} = r_{(\Omega,\frac{\pi}{2})}$ avec $\Omega = D \cap D'$

Remarque : on peut dire aussi que $r_{(A,\frac{\pi}{4})} \circ r_{(B,\frac{\pi}{4})}$ est un demi tour de sens direct

2) $r_{(A,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(B,\frac{\pi}{2})}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ alors $r_{(A,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(B,\frac{\pi}{2})}$ est une symétrie centrale

$r_{(A,\frac{\pi}{2})} = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et $r_{(B,\frac{\pi}{2})} = S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$

Alors : $r_{(A,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(B,\frac{\pi}{2})} = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)} = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$

D'où $r_{(A,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(B,\frac{\pi}{2})} = S_O$ car $(AC) \cap (BD) = O$

3) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r_{(B,\frac{\pi}{4})}$

$t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(BC)} \circ S_{(L)}$ avec (L) la droite passant par O et parallèle à (BC)

$r_{(B,\frac{\pi}{4})} = S_{(L')} \circ S_{(BC)}$ avec (L') la bissectrice de l'angle $\widehat{CBD}$

Alors : $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r_{(B,\frac{\pi}{4})} = S_{(L)} \circ S_{(L')} = r_{(K,\frac{\pi}{4})}$ avec $K = (L) \cap (L')$

Exercice 2

Exercice 3

$A(1;\ -1), (D): x + y = 0$

S la similitude indirecte de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'axe (D)

1) Donnons un programme de construction de l'image d'un point M par S

On sait que : $S = h \circ s_D$ avec s_D la symétrie orthogonale d'axe (D)

$S(M) = h \circ s_D(M) = M'$

Posons $s_D(M) = M_1$ alors : $h(M_1) = M'$

On construit un point M_1, image de M par s_D et ensuite le point M', image de M_1 par h

2) Donnons l'expression de S

- $h(M) = M_1$ alors : $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

$\begin{cases} x_1 - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y_1 + 1 = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases}$ alors h : $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$

- $s_D(M) = M_2$

Soit $\vec{u}(-1; 1)$ un vecteur directeur de (D) et I milieu de $[MM_2]$

Alors : $\begin{cases} \overrightarrow{MM_2}.\vec{u} = 0 & (1) \\ I\left(\frac{x+x_2}{2}; \frac{y+y_2}{2}\right) \in (D) & (2) \end{cases}$

(1) Donne : $-x_2 + y_2 = -x + y$

(2) Donne : $x_2 + y_2 = -x - y$

On obtient : $\begin{cases} -x_2 + y_2 = -x + y \ (1) \\ x_2 + y_2 = -x - y \ (2) \end{cases}$

(1)+(2) donne : $y_2 = -x$ et (1)-(2) donne $x_2 = -y$

Alors s_D : $\begin{cases} x_2 = -y \\ y_2 = -x \end{cases}$

$S(M) = h \circ s_D(M) = h[s_D(M)] = M'$

$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2} \end{cases}$ alors S : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 4

1) $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$

a) Exprimons $f \circ f(z)$

$f \circ f(z) = f[f(z)] = f(z') = z''$

$z'' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = z$

Alors $f \circ f(z) = z$

b) Montrons que $F = R \circ S$

F : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$ alors F : $\begin{cases} z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \\ z_1 = \bar{z} \end{cases}$

Alors : $F = R \circ S$ avec R : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ (rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$) et S : $z_1 = \bar{z}$ (symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{u})$)

c) Décomposons R à l'aide de 2 symétries axiales

$R = s_{(D)} \circ s_{(D')}$ avec $(D) = (O, \vec{u})$ et $(D') = (O, \overrightarrow{u'})$ avec $(\vec{u}, \overrightarrow{u'}) = \frac{\pi}{6}$ (car $(D') = R_{(O, \frac{\pi}{6})}(D)$)

Déduisons en que F est une réflexion dont on déterminera l'axe

$F = R \circ S = s_{(D)} \circ s_{(D')} \circ S$ or $s_{(D')} \circ S = Id$

D'où : $F = s_{(D)}$ avec $(D) = (o, \vec{u})$

2) G : $z'' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Déterminons l'ensemble des points invariants par G

En posant $z'' = x'' + iy''$ et $\bar{z} = x - iy$, on obtient :

G : $\begin{cases} x'' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$G(M) = M$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \sqrt{3}y - 1 = 0 \\ \sqrt{3}x - 3y + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$

Alors l'ensemble des points invariants est la droite (D): $\sqrt{3}x - 3y + \sqrt{3} = 0$

b) Montrons que $G = T \circ F$ où T est une translation dont on précisera le vecteur

G : $z'' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et F : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$

Alor G : $\begin{cases} F : z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} \\ T = G \circ F \end{cases}$

Alors $T = G \circ F = G[F(M)] = M_1$: $z_1 = z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est le vecteur de translation

c) Décomposons T à l'aide de 2 symétries axiales

T : $z_1 = z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors $T = t_{\vec{v}} = s_{(D_2)} \circ s_{(D_1)}$ avec $(D_1) = (O, \overrightarrow{u'})$ et $(D_2) = t_{\frac{1}{2}\vec{v}}(D_1)$

NB : $\overrightarrow{u'}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Déduisons en G est une réflexion d'axe (D_2)

$G = T \circ F = s_{(D_2)} \circ s_{(D_1)} \circ D_{D'}$

Or $s_{(D_1)} \circ D_{D'} = Id$ car $(D_1) = (D')$

D'où $G = s_{(D_2)}$ avec $(D_2) = t_{\frac{1}{2}\vec{v}}(D_1)$

d) Déterminons l'image du point $A\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ par G

$z_{A'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors $z_{A'} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_A$ donc $A = A'$ (il est invariant par G)

Exercice 6

f : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$

1) Montrons que f est une isométrie

$O(0; 0)$ et $O'(1; -\sqrt{3}) = f(O)$

$OM^2 = x^2 + y^2$ et $O'M'^2 = (x' - 1)^2 + (y' + \sqrt{3})^2 = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \sqrt{3}xy + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{4}x^2 - \sqrt{3}xy + \frac{1}{4}y^2$ alors $O'M'^2 = x^2 + y^2$

D'où $OM^2 = O'M'^2 = x^2 + y^2$ alors f est une isométrie

2) Nature et élément caractéristique de f

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3}y - 2 = 0 \\ -\sqrt{3}x + 3y + 2\sqrt{3} = 0 \end{cases}$ alors :

$\begin{cases} -\sqrt{3}x + 3y + 2\sqrt{3} = 0 \\ -\sqrt{3}x + 3y + 2\sqrt{3} = 0 \end{cases}$

L'ensemble des points invariants par f est une droite

D'où f est une symétrie orthogonale d'axe (D) : $-\sqrt{3}x + 3y + 2\sqrt{3} = 0$

Exercice 7

$$f : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 2) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \end{cases}$$

1) $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

Exprimons z' en fonction de z

$x' + iy' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 2) + i\frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y)$

$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)y + 1$

$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - iy\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - iy) + 1$

D'où $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} + 1$

2) On pose $O' = f(O)$

Vérifions que $OM = O'M'$

$O(0;0), O'(1;0), M(x;y)$ et $M'(x';y')$

$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

$O'M' = \sqrt{(x'-1)^2 + y'^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

D'où $OM = O'M' = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) Déterminons l'ensemble des points invariants par f

$f(M) = M \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 2) \\ y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \sqrt{3}y + 2 = 0 \\ \sqrt{3}x + 3y = 0 \end{cases}$$ le système n'a pas de solution

D'où f n'a pas de points invariants

4) $M"$ d'affixe $z"$ et $M" = f \circ f(M)$

Exprimons $z"$ en fonction de z et montrons que $f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{u}$

$M" = f \circ f(M) = f(M')$ alors : $z" = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z'} + 1$

$z" = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

D'où $z" = z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f \circ f :\ z" = z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ c'est l'écriture complexe d'une translation de vecteur $\vec{u}\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Alors $f \circ f$ est la translation de vecteur $\vec{u}\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5) $g = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} \circ f$, $z_A = \frac{1}{2}$, $z_B = \frac{-i}{2\sqrt{3}}$

$g = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} \circ f = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(M') = M_1$ avec $t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} :\ Z = z - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

$g :\ z_1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} + \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

Calculons $z_{A'}$ et $z_{B'}$

$g(A) = A'$ alors $z_{A'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

D'où $z_{A'} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = A'$

$g(B) = B'$ alors $z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{i}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

D'où $z_{B'} = \frac{-i}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow B = B'$

Prouvons que g est une symétrie orthogonale

$g(A) = A$ et $g(B) = B$ alors g est la symétrie orthogonale d'axe (AB)

6) Montrons que $\frac{z_B - z_A}{z_{\frac{1}{2}\vec{u}}}$ est un réel

$\frac{z_B - z_A}{z_{\frac{1}{2}\vec{u}}} = \frac{\frac{-3-i\sqrt{3}}{6}}{\frac{3+i\sqrt{3}}{4}} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

7) Déterminons les éléments caractéristiques de f

$f \circ f = t_{\vec{u}}$, $g = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} \circ f$ avec g symétrie orthogonale d'axe (AB)

D'où f est la symétrie d'axe (AB) et de vecteur $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}\left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ donc une symétrie glissée

Exercice 8

$$f : \begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$$

1) Montrons que f est une isométrie plane

$O(0;0), O'(-1;2) = f(O)$

$OM^2 = x^2 + y^2$ et $O'M'^2 = (x'+1)^2 + (y'-2)^2$

$O'M'^2 = (y - 1 + 1)^2 + (-x + 2 - 2)^2 = y^2 + x^2$

Alors $OM^2 = O'M'^2 = x^2 + y^2$ par conséquent f est une isométrie plane

2) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

On obtient $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{3}{2}$

Alors l'ensemble des points invariants est le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

D'où f est la rotation de centre $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 9

1) $(D) : \sqrt{3}x + y - 2 = 0$

a) Exprimons x' et y' en fonction de x et y sachant que : $M' = s_{(D)}(M)$

$\vec{u}(-1; \sqrt{3})$ vecteur directeur de (D), $I\left(\frac{x'+x}{2}; \frac{y'+y}{2}\right)$ milieu de $[MM']$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \\ I \in (D) \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} \binom{x'-x}{y'-y} \cdot \binom{-1}{\sqrt{3}} = 0 & (1) \\ \sqrt{3}\left(\frac{x'+x}{2}\right) + \frac{y'+y}{2} - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + \sqrt{3}y' = -x + y\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x' + y' = -x\sqrt{3} - y - 4 \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par $\sqrt{3}$ et après addition,

on obtient : $y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1$

En multipliant la deuxième ligne par $-\sqrt{3}$ et après addition,

on obtient : $x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3}$

D'où $s_{(D)}$: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$

b) $S\left(A(0;2), \frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$

Déterminons les coordonnées de $S(M)$ en fonction de x et y

$s(M) = M"$ alors $z" - z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$

$z" = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i)z + 3 + i(-\sqrt{3} + 2)$

Posons $z = x + iy$ et $z"=x" + iy"$

$x" + iy" = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i)(x + iy) + 3 + i(-\sqrt{3} + 2)$

$x+iy = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 3 + i\left(\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \sqrt{3} + 2\right)$

D'où s : $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 3 \\ y' = \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \sqrt{3} + 2 \end{cases}$

c) $T = s \circ s_{(D)}$

Montrons que T a pour expression analytique

$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 3 \\ y' = -\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} + 2 \end{cases}$

$T = s \circ s_{(D)} = s[s_{(D)}(M)]$

Alors

$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3}\right) - \frac{3}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1\right) + 3 \\ y' = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1\right) - \sqrt{3} + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4}y - \frac{3}{2} + 3 \\ y' = -\frac{3}{4}x - \frac{3\sqrt{3}}{4}y + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + 2 \end{cases}$

D'où T : $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 3 \\ y' = -\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} + 2 \end{cases}$

2) Montrons que $T = s_{(D')} \circ h$

$s_{(D')} = T \circ h^{-1}$ avec h^{-1} : $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}} + 2 \end{cases}$

$s_{(D')}(M) = T(M_1) = M_2$ alors :

$\begin{cases} x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{3}{2}y_1 + 3 \\ y_2 = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + \sqrt{3} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 3 \end{cases}$

$s_{(D')}(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 3 \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} -x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0 \\ -\sqrt{3}x - 3y + 6 = 0 \end{cases}$

Donc $s_{(D')}$ est une symétrie orthogonale d'axe (D') : $-\sqrt{3}x - 3y + 3 = 0$

D'où $T = s_{(D')} \circ h$

Nature et éléments caractéristiques de T

T est la composée d'un antidéplacement et d'une homothétie alors T est une similitude indirecte de centre $A(0;2)$, de rapport $k = \sqrt{3}$ et d'axe $(D') = (A, \vec{u})$ avec $\vec{u}(3; -\sqrt{3})$

3) Montons que T est bijective

$M_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ avec φ l'endomorphisme associé à T

$\det(M_\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} - \frac{9}{4} = -3 \neq 0$ alors T est bijective

Déterminons T^{-1}

$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 3 \\ y' = -\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x' = \sqrt{3}x - 3y + 6 \\ 2y' = -3x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} + 4 \end{cases}$

En multipliant la première ligne par 3 , la deuxième ligne par $\sqrt{3}$ et après addition, on obtient : $y = -\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{6}y' + 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

En multipliant la première ligne par $\sqrt{3}$, la deuxième ligne par -3, on obtient : $x = \frac{\sqrt{3}}{6}x' - \frac{1}{2}y' + 1$

D'où T^{-1}: $\begin{cases} x" = \frac{\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ y" = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Exercice 10

$A(2;0), B(2;2), C(0;2)$, s_1 la symétrie d'axe (AC) et s_2 la symétrie d'axe (OA)

1) Précisons l'image de B par $s_2 \circ s_1$

On utilisera une méthode analytique

- Expression analytique de s_1

$(AC) : x + y - 4 = 0$

$\vec{u}(-1; 1)$ un vecteur directeur de (AC), $I\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}\right)$ milieu de $[MM']$

$\begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \\ I \in (AC) \end{cases}$ alors $\begin{cases} \binom{x'-x}{y'-y}.\binom{-1}{1} = 0 \\ \frac{x+x'}{2} + \frac{y+y'}{2} - 2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -x' + y' = -x + y \quad (1) \\ x' + y' = -x - y + 4 \; (2) \end{cases}$

(1) + (2) donne : $y' = -x + 2$

(2) − (1) donne : $x' = -y + 2$

Alors S_1: $\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$

- Expression analytique de s_2

$A \in (O, \vec{\imath})$ alors $(OA) = (O, \vec{\imath})$

Alors : s_2 : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

- Expression analytique de $s_2 \circ s_1$

$s_2 \circ s_1(M) = s_2[s_1(M)] = M'$

$s_2 \circ s_1 : \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

$s_2 \circ s_1(B) = B' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 + 2 = 0 \\ y' = 2 - 2 = 0 \end{cases}$ alors $B' = O$

Nature et élément caractéristique de $s_2 \circ s_1$

$s_2 \circ s_1(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ le système a pour solution : $(0; 2)$

Donc $C(2; 0)$ est invariant par $s_2 \circ s_1$

Alors $s_2 \circ s_1$ est une rotation

L'écriture complexe de $s_2 \circ s_1$ est : $z' = iz + 2 + 2i$

D'où $s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre C, d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) T est la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OC}(0; 2)$

Alors $T : z' = z + 2i$

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $T \circ s_2 \circ s_1$

$T : z' = z + 2i$ et $s_2 \circ s_1 : z' = iz + 2 - 2i$

Alors : $T \circ s_2 \circ s_1 : z' = iz + 2 - 2i + 2i = iz + 2$

$T \circ s_2 \circ s_1$ est une rotation

$Arg(i) = \frac{\pi}{2}$ et $\omega = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1 + i$

D'où $T \circ s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre $\Omega(1; 1)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$

Exercice 11

$f : \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + m \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$

1) Démontrons que f est une isométrie négative

$O(0; 0)$; $O'(m; 2) = f(O)$

$OM^2 = x^2 + y^2$

$O'M'^2 = (x' - m)^2 + y' - 2)^2 = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\right)^2 + \left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)^2 = \frac{9}{25}x^2 + \frac{24}{25}xy + \frac{16}{25}y^2 + \frac{16}{25}x^2 - \frac{24}{25}xy + \frac{9}{25}y^2$

Alors $O'M'^2 = x^2 + y^2$

D'où $OM^2 = O'M'^2 = x^2 + y^2$

De plus, $\det f = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1$

Cl : f est une isométrie négative

2) Valeur de m pour lesquelles f est une symétrie orthogonale

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3x + 4y + m \\ 5y = 4x - 3y + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x + 4y + m = 0 \\ 4x - 8y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y - m = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$

D'où f est une symétrie orthogonale si et seulement si : $m = -2$

3) Pour $m = 0$, déterminons un vecteur $\vec{w}$ et une droite (D) tels que : $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie d'axe (D) et t la translation de vecteur $\vec{w}$

$f \circ f = t_{2\vec{w}}$

$f \circ f(M) = f(M') = M'' : \begin{cases} x'' = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \\ y'' = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' + 2 \end{cases}$

En fixant x' et y' dans le système, on obtient :

$\begin{cases} x'' = x + \frac{8}{5} \\ y'' = y + \frac{4}{5} \end{cases}$ alors $f \circ f = t_{2\vec{w}}$ avec $\vec{w}\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$

$t_{-\vec{w}} : \begin{cases} x_1 = x - \frac{4}{5} \\ y_1 = y - \frac{2}{5} \end{cases}$

$f = s \circ t$ alors $s(M) = f \circ t_{-\vec{w}}(M) = f(M_1) = M_2$

$s : \begin{cases} x_2 = \frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1 \\ y_2 = \frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}y_1 + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = \frac{3}{5}\left(x - \frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5}\left(y - \frac{2}{5}\right) \\ y_2 = \frac{4}{5}\left(x - \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5}\left(y - \frac{2}{5}\right) + 2 \end{cases}$

Alors : $s : \begin{cases} x_2 = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5} \\ y_2 = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{8}{5} \end{cases}$

$s(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3x + 4y - 4 \\ 5y = 4x - 3y + 8 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x + 4y - 4 = 0 \\ 4x - 8y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$

Alors : $(D) : x - 2y + 2 = 0$

Exercice 13

$T : \begin{cases} x' = ax - by + a' \\ y' = bx + ay + b' \end{cases}$

1) Montrons que les affixes de points M et M' sont liées par la relation : $z' = mz + p$ où m et p sont des nombres déterminés en fonctions de a, b, a' et b'

$x' + iy' = ax - by + a' + i(bx + ay + b')$

$x' + iy' = (a + ib)x + (-b + ia)y + a' + ib'$

$x' + iy' = (a + ib)x + iy(a + ib) + a' + ib'$

$x' + iy' = (a + ib)(x + iy) + a' + ib'$

En posont $x + iy = z$ et $z' = x' + iy'$, on obtient :

$z' = (a + ib)z + a' + ib' = mz + p$ avec $m = a + ib$ et $p = a' + ib'$

2) Déterminons a, b, a' et b' tels que T soit une translation de vecteur $-2\vec{u} + \vec{v}(-2 + i)$

T est une translation de vecteur $-2\vec{u} + \vec{v}(-2 + i)$ si et seulement si :

$a + ib = 1 \Leftrightarrow a = 1$ et $b = 0$

Et $a' + ib' = -2 + i \Leftrightarrow a' = -2$ et $b' = 1$

3) Déterminons a, b, a' et b' tels que T soit une homothétie de centre $A(1; 2)$, de rapport 2

T est une homothétie de centre $A(1; 2)$, de rapport 2 si et seulement si :

$a + ib = 2 \Leftrightarrow a = 2$ et $b = 0$

Et $\frac{a' + ib'}{1 - 2} = 1 + 2i$ alors $a' + ib' = -1 - 2i \Leftrightarrow a' = -1$ et $b' = -2$

4) Déterminons a, b, a' et b' tels que T soit une rotation de centre $B(0,2)$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$

T est une rotation de centre $B(0,2)$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$ si et seulement si :

$a + ib = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Et $\frac{a'+ib'}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2i$ alors $a' + ib' = 2i\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i(2+\sqrt{2}) \Leftrightarrow a' = \sqrt{2}$ et $b' = 2 + \sqrt{2}$

5) Déterminons a, b, a' et b' tels que T soit une similitude directe de centre $C(-1;1)$, d'angle $\frac{\pi}{3}$, de rapport 2

$T : z' - (-1+i) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 1 + i) = (1 + i\sqrt{3})(z - 1 + i)$

T est similitude directe de centre C, d'angle $\frac{\pi}{3}$, de rapport 2 si et seulement si :

$a + ib = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow a = 1$ et $b = \sqrt{3}$

Et $\frac{a'+ib'}{1-1-i\sqrt{3}} = -1 + i$ alors $a' + ib' = -i\sqrt{3}(-1+i) = \sqrt{3} + i\sqrt{3} \Leftrightarrow a' = \sqrt{3}$ et $b' = \sqrt{3}$

Exercice 14

1) ABC et DEF sont des triangles équilatéraux

a) Démontrons que $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

ABC un triangle équilatéral, alors : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) \Leftrightarrow c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

Exprimons $f - d$ en fonction de $e - d$

DEF est un triangle équilatéral, alors : $\frac{z_F - z_D}{z_E - z_D} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_F - z_D = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_D) \Leftrightarrow f - d = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$

b) Exprimons g en fonction de b, d et e

On a : $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{DB}$

$z_G - z_E = z_B - z_D \Leftrightarrow g - e = b - d$ alors : $g = b - d + e$

c) Démontrons que $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$

$h - c = f - d$ alors $h = f - d + c$

$h - a = f - d + c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d) + e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

$h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(e - d + b - a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - d + e - a)$

or $g = b - d + e$

D'où $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$

Déduisons que AGH est un triangle équilatéral

$h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a) \Leftrightarrow \frac{z_H - z_A}{z_G - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors AGH est un triangle équilatéral

2) t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$ et t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$, r la rotation de centre D, d'angle $\frac{\pi}{3}$

On pose : $f = t_2 \circ r \circ t_1$

a) Justifions que f est une rotation dont on précisera l'angle

f étant la composé des translations et d'une rotation alors f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminons l'image de B par f, puis déduisons en le centre de f

$f(B) = t_2 \circ r \circ t_1(B) = t_2 \circ r(D)$ car $t_1 = t_{\overrightarrow{BD}}$

$f(B) = t_2(D) = C$ car $t_2 = t_{\overrightarrow{DC}}$

L'image de B par f est le point C

f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme B en C alors A est le centre de f

b) Déterminons l'image de G par f, puis déduisons en le triangle AGH est équilatéral

$f(G) = t_2 \circ r \circ t_1(G) = t_2 \circ r(E)$ car $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{DB}$

$f(G) = t_2(F)$ or $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FG}$

D'où $f(G) = H$

$\begin{cases} f(A) = A \\ f(G) = H \end{cases}$ alors $\begin{cases} (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH}) = \frac{\pi}{3} \\ AG = AH \end{cases}$

D'où AGH est un triangle équilatéral

Exercice 15

1) $f : z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Démontrons que f est un antidéplacement

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$x' + iy' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x + iy) + \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x' + iy' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{5}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$f : \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{5}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\det(f) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$$

Alors f est un antidéplacement

Démontrons que $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie orthogonale d'axe (D) et t la translation de vecteur $\vec{w}$

$f \circ f : z" = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z'} + \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z + 2 + 2i\sqrt{3}$

$f \circ f = t_{2\vec{w}}$ avec $\vec{w}(1; \sqrt{3})$

$s = f \circ t_{-\vec{w}}$ avec $t_{-\vec{w}} : \begin{cases} x_1 = x - 1 \\ y_1 = y - \sqrt{3} \end{cases}$

$s(M) = f \circ t_{-\vec{w}}(M) = f(M_1) = M_2$

$\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + \frac{5}{2} \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ alors s : $\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$s(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - \sqrt{3}y - 3 = 0 \\ -\sqrt{3}x + y + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$ alors S est la symétrie orthogonale d'axe $(D) : 3x - \sqrt{3}y - 3 = 0$

Exercice 16

$$f : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

1) Démontrons que f a une direction fixe que l'on précisera

$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})(x - 2y - 6)$ alors f a une direction fixe celle de la droite dirigé par le vecteur $\vec{u}(1; 2)$

2) Démontrons que $f \circ f = f$

$f \circ f(M) = f(M') = M"$

$$f \circ f : \begin{cases} x" = \frac{1}{3}(4x' - 2y' - 6) \\ y" = \frac{1}{3}(2x' - y' - 12) \end{cases}$$

En fixant x' et y', on obtient $f \circ f : \begin{cases} x" = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y" = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$

alors $f \circ f = f$

3) Déterminons l'ensemble des points invariants par f

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 4x - 2y - 6 \\ 3y = 2x - y - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ 2x - 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des points invariants par f est la droite d'équation $x - 2y - 6 = 0$

b) Déduisons en la nature de f

f est une projection vectorielle dirigé par le vecteur $\vec{u}\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Exercice 17

$$f : \begin{cases} x' = x \\ y' = 3y - 1 \end{cases}$$

1) Démontrons que f est une application affine bijective

$O(0; 0)$, $I(1; 0)$, $I'(1; -1)$ et $O'(0; -1)$

Soit φ l'endomorphisme associé à f

$\varphi(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{O'I'}$

$M_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{Of(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'}$

Alors f est affine

De plus $\det M_\varphi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ alors φ est bijectif et par suite f est aussi bijective

D'où f est une application affine bijective

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par f

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 3y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants est la droite $(D) : y = \frac{1}{2}$

3) Démontrons que f est une affinité de P

- Démontrons que f a une direction fixe

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$ alors : $\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{\imath} + (y' - y)\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{MM'} = (x - x)\vec{\imath} + (3y - 1 - y)\vec{\jmath} = (2y - 1)\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe celle de $\vec{\jmath}(0; 1)$

- Expression analytique de la projection vectorielle du plan sur la droite (D)

Soit q la projection vectorielle telle que : $q(M) = M_1$ et $\overrightarrow{MM_1} = \vec{D}$ où $\vec{D}$ est la direction de la droite (D): $x = 0$

Soit t un réel tel que : $\overrightarrow{MM_1} = t\vec{\jmath}$, alors : $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y + t \end{cases}$

Pour que q soit une projection, il faut que $y_1 = \frac{1}{2}$

$y_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} - y$, alors : $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y + \frac{1}{2} - y \end{cases}$

D'où l'expression analytique : $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

- Comparons $\overrightarrow{M'q(M)}$ et $\overrightarrow{Mq(M)}$

$\overrightarrow{M'q(M)} = \overrightarrow{M'M_1} = (x_1 - x')\vec{\imath} + (y_1 - y')\vec{\jmath} = 3\left(\frac{1}{2} - y\right)\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{Mq(M)} = \overrightarrow{MM_1} = (x_1 - x)\vec{\imath} + (y_1 - y)\vec{\jmath} = \left(\frac{1}{2} - y\right)\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{M'q(M)} = 3\overrightarrow{Mq(M)}$

Cl : f est une affinité de rapport 3, de direction $\vec{D}$ et d'axe (D): $y = \frac{1}{2}$

Exercice 18

$$f : \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1) Démontrons que $f \circ f = Id$

$f \circ f(M) = f(M') = M"$

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(5x' - 12y' + 24) \\ y'' = \frac{1}{13}(-12x' - 5y' + 36) \end{cases}$$

En fixant x' et y' dans le système, on obtient :

$$\begin{cases} x" = x \\ y" = y \end{cases}$$

D'où $f \circ f = Id$

2) Démontrons que l'ensemble des points invariants par est une droite (D)

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x = 5x - 12y + 24 \\ 13y = -12x - 5y + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 12y + 24 = 0 \\ -12x - 18y + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

D'où (D) : $2x + 3y - 6 = 0$

3) Soit $f(M) = M'$

a) Démontrons que le milieu I de $[MM']$

$I\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}\right)$

$I \in (D) \Leftrightarrow 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) + 3\left(\frac{y+y'}{2}\right) - 6 = 0$

$2x + 2x' + 3y + 3y' - 12 = 0$

$2x + \frac{2}{13}(5x - 12y + 24) + 3y + \frac{3}{12}(-12x - 5y + 36) - 12 = 0$

$2x + \frac{10x}{13} - \frac{24y}{13} + \frac{48}{13} + 3y - \frac{36x}{13} - \frac{15y}{13} + \frac{108}{13} - 12 = 0$

$\frac{36x}{13} - \frac{36x}{13} + \frac{15y}{13} - \frac{15y}{13} + \frac{48}{13} - \frac{48}{13} = 0$

$0 = 0$

Alors $I \in (D)$

b) Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe, orthogonale à (D)

$\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = \frac{1}{13}(4\vec{i} + 6\vec{j})(-2x - 3y + 6)$

Alors $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe celle de $\vec{u}(4; 6)$

$\vec{v}(-3; 2)$ un vecteur directeur de (D)

$\vec{u}.\vec{v} = \binom{4}{6}.\binom{-3}{2} = -12 + 12 = 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$

Alors la direction de $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonale à celle de (D)

c) Déduisons en la nature et les éléments caractéristiques de f

L'ensemble des points invariants est une droite de vecteur directeur orthogonale à $\overrightarrow{MM'}$ alors f est une symétrie orthogonale d'axe (D): $2x + 3y - 6 = 0$

Etude générale des coniques

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, précisons la nature, les foyers, les sommets et éventuellement les asymptotes de la conique proposée

a) $25x^2 + 36y^2 - 1 = 0$

$25x^2 + 36y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 1$

Alors c'est une ellipse de centre O

$a = \frac{1}{5}; b = \frac{1}{6} \Rightarrow a > b$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{11}}{30}$

- Les foyers

$F\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{11}}{30}\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{11}}{30}\\0\end{pmatrix}$

- Les sommets

$A\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\0\end{pmatrix}, A'\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}, B'\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

b) $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$

$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$ avec $\begin{cases} x - 2 = X \\ y = Y \end{cases}$

Alors c'est une ellipse de centre $\Omega(2; 0)$

$a = 3; b = 2 \Rightarrow a > b$

$c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

- Les foyers

$F\binom{\sqrt{5}}{0}$ et $F'\binom{-\sqrt{5}}{0}$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

- Les sommets

$A\binom{3}{0}$ et $A'\binom{-3}{0}$, $B\binom{0}{2}$ et $B'\binom{0}{-2}$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

c) $\frac{x^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{25} - 1 = 0$

$\frac{x^2}{4^2} - \frac{(y+1)^2}{5^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{4^2} - \frac{Y^2}{3^2} = 1$ avec $\begin{cases} X = x \\ Y = y + 1 \end{cases}$

Alors c'est une hyperbole de centre $\Omega(0; -1)$

$c = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

- Les foyers

$F(\sqrt{41}; 0)$ et $F'(-\sqrt{41}; 0)$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

- Les sommets

$A(4; 0)$ et $A'(-4; 0)$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

- Les asymptotes

$(\Delta) : Y = \frac{5}{4}X$ et $(\Delta') : Y = -\frac{5}{4}X$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

d) $4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 11 = 0$

$4(x^2 + 2x) - 9(y^2 - 6y) - 11 = 0$

$4[(x + 1)^2 - 1] - 9[(y - 3)^2 - 9] - 11 = 0$

$4(x + 1)^2 - 9(y - 3)^2 = -66$

$-\frac{(x+1)^2}{\frac{33}{2}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{22}{3}} = 1 \Leftrightarrow -\frac{X^2}{\frac{33}{2}} + \frac{Y^2}{\frac{22}{3}} = 1$ avec $\begin{cases} x + 1 = X \\ y - 3 = Y \end{cases}$

Alors c'est une hyperbole de centre $\Omega(-1; 3)$

$c = \sqrt{\frac{33}{2} + \frac{22}{3}} = \frac{\sqrt{858}}{6}$

- Les foyers

$F\left(0; \frac{\sqrt{858}}{6}\right)$ et $F'\left(0; -\frac{\sqrt{858}}{6}\right)$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

- Les sommets

$B\left(0; \frac{\sqrt{66}}{3}\right)$ et $B'\left(0; -\frac{\sqrt{66}}{3}\right)$

- Les asymptotes

$(\Delta) : Y = \frac{2}{3}X$ et $(\Delta') : Y = -\frac{2}{3}X$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 2

$(C_m) : mx^2 - 4mx - (m - 1)y^2 + 2 = 0$

1) Etudions suivant les valeurs de m, la nature de (C_m)

- Pour $m = 0$

$y^2 + 2 = 0$ alors $(C_m) = \emptyset$

- Pour $m = 1$

$x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Delta = 16 - 8 = 8$ alors $x = 2 + \sqrt{2}$ ou $x = 2 - \sqrt{2}$

Alors (C_m) est la réunion des droites d'équations respectives $x = 2 + \sqrt{2}$ et $x = 2 - \sqrt{2}$

- Pour $m \neq \{0; 1\}$

$m(x^2 - 4x) - (m - 1)y^2 + 2 = 0$

$m((x - 2)^2 - 4) - (m - 1)y^2 + 2 = 0$

$m(x - 2)^2 - (m - 1)y^2 = 4m - 2$

$\frac{(x-2)^2}{\frac{4m-2}{m}} - \frac{y^2}{\frac{4m-2}{n-1}} = 1$ avec $a^2 = \frac{4m-2}{m}$ et $b^2 = \frac{4m-2}{m-1}$

Si $m \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, (C_m) est une hyperbole de centre $\Omega(2; 0)$

Si $m \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$, (C_m) est une ellipse de centre $\Omega(2; 0)$

Si $m \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$, $(C_m) = \emptyset$

2) $(C) : 4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$

a) Montrons que (C) est la réunion de deux coniques (C_1) et (C_2)

$(C) : \begin{cases} 4x^2 - 16x + y^2 - 20 = 0, si\ x \geq 0 \\ -4x^2 - 16x + y^2 - 20 = 0, si\ x \leq 0 \end{cases}$

Soit $(C_1) : 4x^2 - 16x + y^2 - 20 = 0$ et

$(C_2) : -4x^2 - 16x + y^2 - 20 = 0$

Alors $(C) = (C_1) \cup (C_2)$

b) Déterminons les éléments caractéristiques de (C_1) et (C_2)

$(C_1) : 4x^2 - 16x + y^2 - 20 = 0$

$4(x^2 - 4x) + y^2 - 20 = 0$

$4((x-2)^2 - 4) + y^2 - 20 = 0$

$(C_1) : \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1, \forall x \geq 0$

Alors (C_1) est l'ellipse de centre $\Omega(2;0)$

$a = 3; b = 6\ (a < b)$

- Axe focal : $(\Omega; \vec{j})$
- Demi-distance focale : $c = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$
- Foyers : $F_1(0; 3\sqrt{3})$ et $F'_1(0; -3\sqrt{3})$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ alors $F_1(2; 3\sqrt{3})$ et $F'_1(2; -3\sqrt{3})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- Les sommets : $B_1(0;6)$ et $B'_1(0; -6)$; $A(3;0)$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ alors $B_1(2;6)$ et $B'_1(2; -6)$; $A(5;0)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$(C_2) : -4x^2 - 16x + y^2 - 20 = 0$

$-4(x^2 + 4x) + y^2 - 20 = 0$

$-4((x+2)^2 - 4) + y^2 - 20 = 0$

$(C_2) : -(x+2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \forall x \leq 0$

(C_2) est l'hyperbole de centre $\Omega'(-2;0)$

- Axe focal : $(\Omega'; \vec{j})$
- Demi-distance focale : $c = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- Les foyers : $F_2(0; \sqrt{5})$ et $F'_2(0; -\sqrt{5})$ dans $(\Omega', \vec{i}, \vec{j})$ alors $F_2(-2; \sqrt{5})$ et $F'_2(-2; -\sqrt{5})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- Les sommets : $B_2(0;2)$ et $B'_2(0; -2)$ dans $(\Omega', \vec{i}, \vec{j})$ alors $B_2(-2;2)$ et $B'_2(-2;-2)$
- Les asymptotes : $(\Delta) : y = 2(x+2)$ et $(\Delta') : y = -2(x+2)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

c) Montrons qu'en chacun des points où les courbes (C_1) et (C_2) coupent $(\Omega; \vec{j})$, elles ont même tangente

$(C_1) \cap (O; \vec{j}) \Leftrightarrow x = 0$ alors $y = -2\sqrt{5}$ ou $y = 2\sqrt{5}$

$(C_2) \cap (O; \vec{j}) \Leftrightarrow x = 0$ alors $y = -2\sqrt{5}$ ou $y = 2\sqrt{5}$

Alors (C_1) et (C_2) coupent $(\Omega; \vec{j})$ aux points $I_1(0; 2\sqrt{5})$ et $I_2(0; -2\sqrt{5})$

$(C_1) : \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{36} = 1$ avec $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y \end{cases}$

$I_1(2; 2\sqrt{5})$ et $I_2(2; -2\sqrt{5})$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

- Les tangentes à (C_1) aux points I_1 et I_2 ont pour équations respectives : $-4x + y\sqrt{5} - 10 = 0$ et $4x + y\sqrt{5} + 10 = 0$

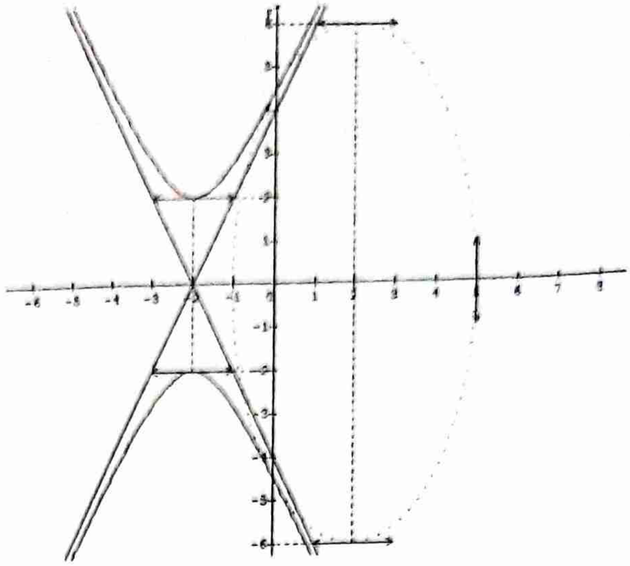
$(C_2) : -(x+2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow -X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1$ avec

$\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y \end{cases}$

$I_1(-2; 2\sqrt{5})$ et $I_2(-2; -2\sqrt{5})$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

- Les tangentes à (C_2) aux points I_1 et I_2 ont pour équations respectives : $-4x + y\sqrt{5} - 10 = 0$ et $4x + y\sqrt{5} + 10 = 0$

D'où (C_1) et (C_2) ont même tangente aux points I_1 et I_2



Exercice 3

$MF + MF' = 4$ avec $F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

1) Vérifions que Γ contient les points $A(-2;0), B(2;0), C\left(-1; \frac{3}{2}\right), D\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ et $E\left(1; \frac{3}{2}\right)$

$\begin{cases} AF = |z_F - z_A| = |1+2| = 3 \\ AF' = |z_{F'} - z_A| = |-1+0| = 1 \end{cases} \Rightarrow AF + AF' = 4$

Alors $A \in \Gamma$

$\begin{cases} BF = |z_F - z_B| = |1-2| = 1 \\ BF' = |z_{F'} - z_B| = |-1-2| = 3 \end{cases} \Rightarrow BF + BF' = 4$

Alors $B \in \Gamma$

$\begin{cases} CF = |z_F - z_C| = \left|1 + 1 - \frac{3}{2}i\right| = \left|2 - \frac{3}{2}i\right| = \frac{5}{2} \\ CF' = |z_{F'} - z_C| = \left|-1 + 1 - \frac{3}{2}i\right| = \left|-\frac{3}{2}i\right| = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow CF + CF' = 4$

Alors $C \in \Gamma$

$\begin{cases} DF = |z_F - z_D| = \left|1 - 1 + \frac{3}{2}i\right| = \left|-\frac{3}{2}i\right| = \frac{3}{2} \\ DF' = |z_{F'} - z_D| = \left|-1 - 1 + \frac{3}{2}i\right| = \left|-2 + \frac{3}{2}i\right| = \frac{5}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow DF + DF' = 4$

Alors $D \in \Gamma$

$\begin{cases} EF = |z_F - z_E| = \left|1 - 1 - \frac{3}{2}i\right| = \left|-\frac{3}{2}i\right| = \frac{3}{2} \\ DF' = |z_{F'} - z_E| = \left|-1 - 1 - \frac{3}{2}i\right| = \left|-2 - \frac{3}{2}i\right| = \frac{5}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow EF + EF' = 4$

Alors $E \in \Gamma$

2) Donnons la nature de Γ

$MF + MF' = 4$ c'est la définition bifocale d'une ellipse

D'où Γ est une ellipse

- Montrons qu'une équation de Γ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

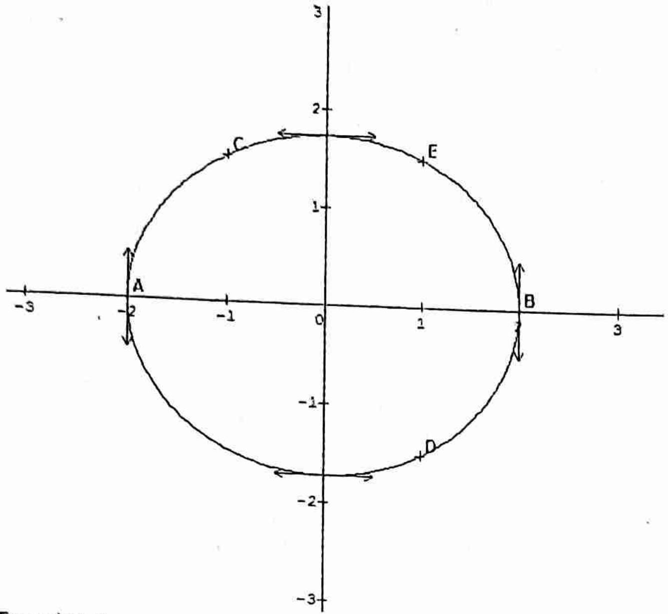
$\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ FF' = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ 2c = 2 \end{cases}$ avec $FF' = 2$

$\Rightarrow a = 2$ et $c = 1$

$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$

Une équation de Γ, dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, est : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

3) Représentons graphiquement les points A, B, C, D, E et Γ



Exercice 5

$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ avec $M(z = x + iy)$ et $M'(z' = x' + iy')$

1) Calculons x' et y' en fonction de x et y

$x' + iy' = \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{1}{x+iy}\right) = \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)$

$x' + iy' = \frac{1}{2}\left(\frac{(x+iy)(x^2+y^2)+x-iy}{x^2+y^2}\right)$

$x' + iy' = \frac{x^3+xy+x}{2(x^2+y^2)} + i\frac{x^2y+y^3-y}{2(x^2+y^2)}$

$\begin{cases} x' = \frac{x^3+xy+x}{2(x^2+y^2)} \\ y' = \frac{x^2y+y^3-y}{2(x^2+y^2)} \end{cases}$

2) Déterminons l'ensemble (E) des points M tels que : $M \in (O, \overrightarrow{e_1})$

$M \in (O, \overrightarrow{e_1}) \Leftrightarrow \frac{x^2y+y^3-y}{2(x^2+y^2)} = 0$

$y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$

Alors l'ensemble (E) des points M est la réunion de la droite d'équation $y = 0$ et le cercle de centre O et de rayon 1

3) On suppose $M \in C(O, 2)$. On pose $z = 2e^{it}$ avec $t \in [0; 2\pi]$

a) Exprimons x' et y' en fonction de t

$z' = \frac{1}{2}\left(2e^{it} + \frac{1}{2e^{it}}\right) = \frac{1}{4}(4e^{it} + e^{-it})$

$x' + iy' = \frac{1}{4}(5cost + 3isint)$

$\begin{cases} x' = \frac{5}{4}cost \\ y' = \frac{3}{4}sint \end{cases}$

b) Déduisons en que M' décrit une conique dont on déterminera le centre et les sommets

$\begin{cases} x' = \frac{5}{4}cost \\ y' = \frac{3}{4}sint \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{5}x' = cost \\ \frac{4}{3}y' = sint \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{16}{25}x'^2 = cos^2t \\ \frac{16}{9}y'^2 = sin^2t \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{16}{25}x'^2 + \frac{16}{9}y'^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{x'^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$

Alors M' décrit la conique de centre O

Les sommets de la coniques sont :

$A\left(\frac{5}{4}; 0\right), A'\left(-\frac{5}{4}; 0\right), B\left(0; \frac{3}{4}\right)$ et $B'\left(0; -\frac{3}{4}\right)$

Exercice 6

$f : \begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y \end{cases}$

1) Précisons la nature et les éléments caractéristiques de f

$x' + iy' = x + y\sqrt{3} - ix\sqrt{3} + iy$

$x' + iy' = x(1 - i\sqrt{3}) + y(\sqrt{3} + i)$

$x' + iy' = x(1 - i\sqrt{3}) + iy(1 - i\sqrt{3})$

$x' + iy' = (1 - i\sqrt{3})(x + iy)$

$f : z' = (1 - i\sqrt{3})z$

$a = 1 - i\sqrt{3}; b = 0$ et $|a| = 2 \neq 1$

Alors f est une similitude directe du plan

- Le centre : O
- Le rapport : $k = 2$
- L'angle : $\alpha = \arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

2) Soit la conique $(E) : 4x^2 + y^2 = 4$

a) Déterminons le centre, les sommets et les foyers de (E)

$(E) :\ x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$c = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$

- Le centre : O
- Les sommets : $B_1(0; 2), B_2(0; -2), A_1(1; 0)$ et $A_2(-1; 0)$
- Les foyers : $F(0; \sqrt{3})$ et $F'(0; -\sqrt{3})$

b) Déterminons une équation cartésienne de (E'), image de (E) par f

$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3}\ (L_1) \\ y' = -x\sqrt{3} + y\ \ (L_2) \end{cases}$

$\sqrt{3}L_1 + L_2 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}x'+y'}{4}$

$L_1 - \sqrt{3}L_2 \Rightarrow x = \frac{x'-\sqrt{3}y'}{4}$

$f((E)) = (E') \Rightarrow 4\left(\frac{x-\sqrt{3}y}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x+y}{4}\right)^2 = 4$

Alors $(E') : 7x^2 + 13y^2 - 6xy\sqrt{3} - 64 = 0$

3) Nature, le centre et le sommet de (E')

- Nature : (E') est une ellipse
- Centre : $O' = f(O) = O$
- Les sommets :

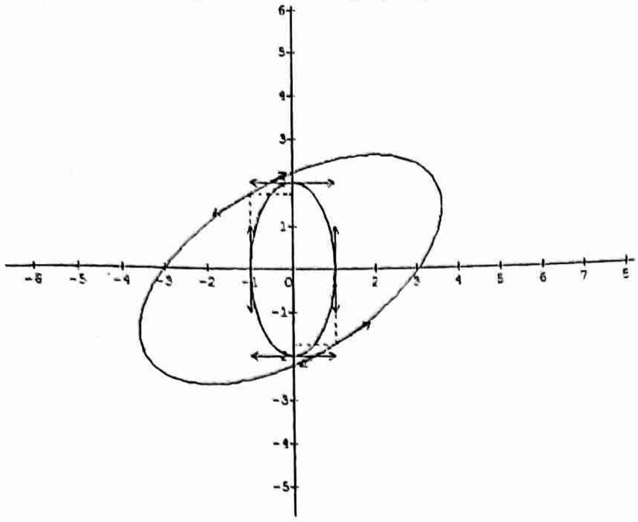
$B'_1 = f(B_1) \Rightarrow B'_1(2\sqrt{3}; 2)$

$B'_2 = f(B_2) \Rightarrow B'_2(-2\sqrt{3}; -2)$

$A'_1 = f(A_1) \Rightarrow A'_1(1; -\sqrt{3})$

$A'_2 = f(A_2) \Rightarrow A'_2(-1; \sqrt{3})$

Traçons (E) et (E') sur un même graphique



Exercice7

Soit M est le point d'affixe z

1) Démontrons que l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que : $\bar{z} + z + 4 = 0$ est une droite

Posons $z = x + iy$

$x - iy + x + iy = 4 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0$

$(D) : x + 2 = 0$

2) Démontrons que, pour tout point M, la distance de M à (D) est $\frac{1}{2}|\bar{z} + z + 4|$

$d(M,(D)) = \frac{|x+2|}{1} = |x + 2|$

Or $x + 2 = \frac{2x+4}{2} \Rightarrow |x + 2| = \left|\frac{\bar{z}+z+4}{2}\right|$

Alors $d(M,(D)) = \frac{1}{2}|\bar{z} + z + 4|$

3) Démontrons que l'ensemble des points $\left|\frac{z-1-i}{\bar{z}+z+4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ est une conique dont on déterminera un foyer, une directrice et l'excentricité

$\left|\frac{z-1-i}{\bar{z}+z+4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{|z-(1+i)|}{|\bar{z}+z+4|} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Posons $z_F = 1 + i$

$\Rightarrow \frac{MF}{|\bar{z}+z+4|} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Or $d(M,(D)) = \frac{1}{2}|\bar{z} + z + 4| \Rightarrow |\bar{z} + z + 4| = 2d(M,(D))$

$\Rightarrow \frac{d(M,F)}{2d(M,(D))} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \frac{d(M,F)}{d(M,(D))} = \frac{\sqrt{2}}{2} = e$

L'ensemble cherché est l'ellipse d'excentricité $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dont une directrice est la droite $(D) : x + 2 = 0$ et un foyer est $F(1;1)$

Exercice 8

$f : z' = z^2 + iz + 1$

a) Déterminons l'ensemble des points M d'affixes z dont l'image par f est le point A d'affixe $3i$

$f(M) = A \Leftrightarrow z^2 + iz + 1 = 3i$

$\Rightarrow z^2 + iz + 1 - 3i = 0$

$\Delta = -1 - 4 + 12i = -5 + 12i$

Soit $\delta = x + iy$ tel que : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -5 + 12i$

et $|\delta^2| = x^2 + y^2 = 13$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \delta_1 = 2 + 3i$ et $\delta_2 = -2 - 3i$

$z_1 = \frac{-i+2+3i}{2} = 1 + i$

$z_2 = \frac{-i-2-3i}{2} = -1 - 2i$

L'ensemble cherché est $\left\{M_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; M_2\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$

b) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = f(M)$ avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

Exprimons x' et y' en fonction de x et y

$x' + iy' = (x + iy)^2 + i(x + iy) + 1$

$x' + iy' = x^2 - y^2 - y + 1 + i(2xy + x)$

$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - y + 1 \\ y' = 2xy + x \end{cases}$

c) Soit (γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(M) \in (x = 1)$

Déterminons une équation de (γ)

$f(M) \in (x = 1) \Leftrightarrow x' = 1$

$\Rightarrow x^2 - y^2 - y + 1 = 1$

$\Rightarrow (\gamma) : x^2 - y^2 - y = 0$

d) Soit (C) l'ensemble des $M(z)$ tels que $(C) = f((O,\vec{u}))$

$M(x;y) \in (O,\vec{u}) \Leftrightarrow y = 0$

$\Rightarrow f(M) : \begin{cases} x' = x^2 + 1 \ (1) \\ y' = x \ (2) \end{cases}$

(1) dans $(2) \Rightarrow (C) : x - y^2 - 1 = 0$

e) donnons la nature et les éléments caractéristiques

$(\gamma) : x^2 - y^2 - y = 0$

$x^2 - (y^2 + y) = 0$

$x^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$

$-\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow -\frac{X^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ avec $\begin{cases} X = x \\ Y = y + \frac{1}{2} \end{cases}$

Alors (γ) est l'hyperbole équilatère de centre $O'\left(0; -\frac{1}{2}\right)$

Eléments caractéristiques de (γ)

- Axe focal : $(O',\vec{v})$
- Demi-distance focale : $c = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Foyers : $F\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ dans $(O',\vec{u},\vec{v})$
- Sommets : $B\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $B'\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ dans $(O',\vec{u},\vec{v})$
- Directrices : $(D) : Y = \frac{\sqrt{2}}{4}X$ et $(D) : Y = -\frac{\sqrt{2}}{4}X$ dans $(O',\vec{u},\vec{v})$
- Asymptotes : $(\Delta) : Y = X$ et $(\Delta') : Y = -X$ dans $(O',\vec{u},\vec{v})$

- Excentricité : $e = \frac{c}{b} = \sqrt{2}$

$(C) : x - y^2 - 1 = 0$

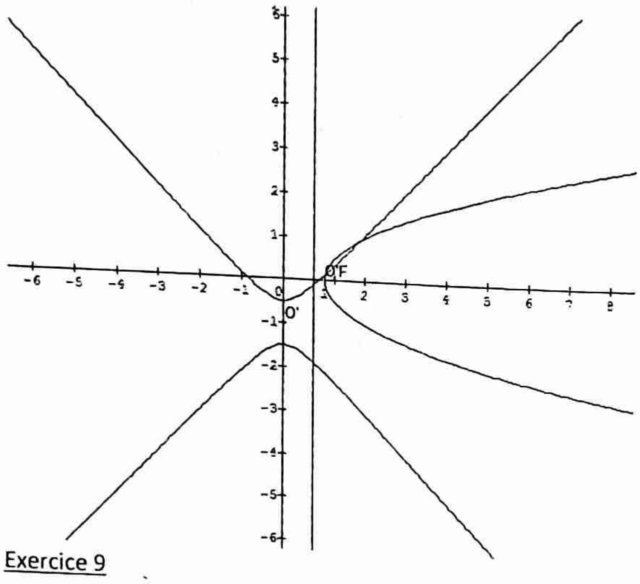
$\Rightarrow y^2 = x - 1 \Leftrightarrow Y^2 = X$ avec $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases}$

Alors (C) est la parabole

Eléments caractéristiques de (C)

- Paramètre : $p = \frac{1}{2}$
- Sommet : $O''(1;\ 0)$
- Axe focal : $(O'', \vec{u})$
- Foyer : $F''\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ dans $(O'', \vec{u}, \vec{v})$
- Directrice : $(D) : X = -\frac{1}{4}$ dans $(O'', \vec{u}, \vec{v})$

f) Constructions



Exercice 9

$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 1)$

1) Démontrons que (γ) est une rotation dont on précisera l'angle et le centre

$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; b = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $|a| = 1$

alors (γ) est une rotation

- L'angle : $\alpha = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ alors $\alpha = \frac{\pi}{3}$
- Le centre $\Omega(\omega)$: $\omega = \frac{-1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $\Omega\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2) $Z = \frac{z^2}{\bar{z}-3}$ et (H) l'ensemble des points m tels que Z soit réel

a) Démontrons que (H) est soit une droite, soit une hyperbole (H') dont on précisera le centre, les foyers, les directrices et l'excentricité

Posons $z = x + iy$ et $Z = X + iY$

$X + iY = \frac{x^2-y^2+2ixy}{x-3-iy}$

$X + iY = \frac{(x^2-y^2+2ixy)(x-3+iy)}{(x-3)^2+y^2}$

$\begin{cases} X = \frac{x^3-3x^2-3xy^2+3y^2}{(x-3)^2+y^2} \\ Y = \frac{3x^2y-6xy-y^3}{(x-3)^2+y^2} \end{cases}$

$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Y = 0$

$\frac{3x^2y-6xy-y^3}{(x-3)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow 3x^2y - 6xy - y^3 = 0$

$\Rightarrow y(3x^2 - 6x - y^2) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ où $3x^2 - 6x - y^2 = 0$

Alors (H) est soit la droite d'équation $y = 0$, soit (H') d'équation $3x^2 - 6x - y^2 = 0$

$3x^2 - 6x - y^2 = 0 \Leftrightarrow 3((x-1)^2 - 1) - y^2 = 0$

$\Rightarrow 3(x-1)^2 - y^2 = 3$

$\Rightarrow (H') : (x-1)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

Alors (H') est une hyperbole de centre $O'(1; 0)$

$c = \sqrt{1+3} = 2$

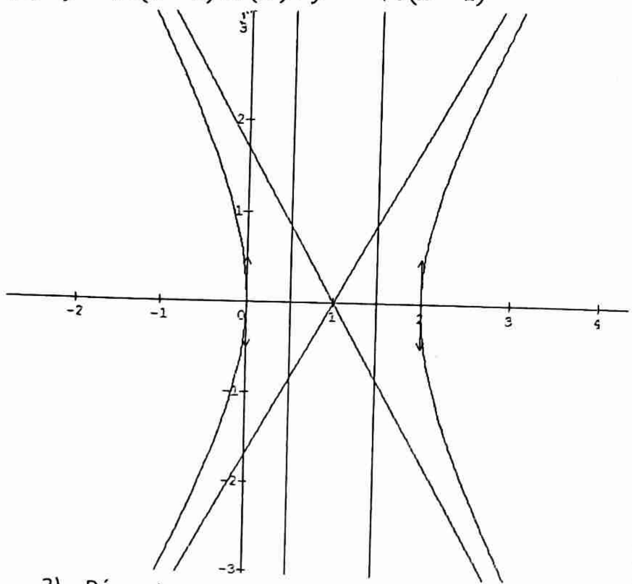
- Foyers : $F(2; 0)$ et $F'(-2; 0)$ dans $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ alors $F(3; 0)$ et $F'(-1; 0)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
- Directrices : $(D) : X = \frac{1}{2}$ et $(D') : X = -\frac{1}{2}$ dans $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ alors $(D) : x = \frac{3}{2}$ et $(D') : x = \frac{1}{2}$ dans $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
- Excentricité : $e = \frac{c}{a} = 2$

b) Traçons (H')

Les asymptotes de (H')

$(\Delta) : Y = \sqrt{3}X$ et $(\Delta') : Y = -\sqrt{3}X$ dans $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ alors

$(\Delta) : y = \sqrt{3}(x-1)$ et $(\Delta') : y = -\sqrt{3}(x-1)$



3) Démontrons que l'image de (H') par (γ) est une conique

$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x' + iy' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x + iy) - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x' + iy' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} & (E) \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} & (E') \end{cases}$

$(E)+\sqrt{3}(E') \Rightarrow x=\frac{x'+\sqrt{3}y'+2}{2}$

$-\sqrt{3}(E)+(E') \Rightarrow y=\frac{-\sqrt{3}x'+y'}{2}$

$(H'): 3(x-1)^2-y^2-3=0$

$\Rightarrow (H''): 3\left(\frac{x+y\sqrt{3}+2}{2}-1\right)^2-x\sqrt{3}+y22-3=0$

$\Rightarrow 3\left(\frac{x+y\sqrt{3}}{2}\right)^2-x\sqrt{3}+y22-3=0$

$\Rightarrow 3\left(\frac{x^2+3y^2+2\sqrt{3}xy}{4}\right)-\left(\frac{3x^2+y^2-2\sqrt{3}xy}{4}\right)-3=0$

$\Rightarrow 8y^2+8\sqrt{3}xy-12=0$

Alors (H'') est une conique

(H'') est une hyperbole de centre $(O'')=\gamma(O')$

Alors $O''=O$

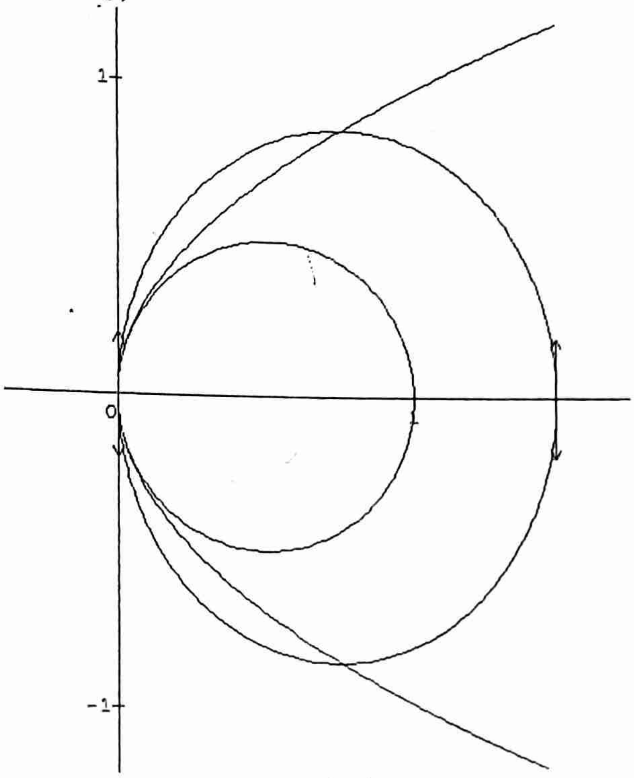
Exercice 10

$m \in I=]0;1[$ et $(E_m): \ y^2=2x-\frac{x^2}{m}$

1) Construisons la courbe $\left(E_{\frac{3}{4}}\right)$

$\left(E_{\frac{3}{4}}\right): 4x^2+3y^2-6x=0 \Rightarrow \frac{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{9}{16}}+\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$

Les sommets de $\left(E_{\frac{3}{4}}\right)$ sont : $O, A\left(\frac{3}{2};0\right), B\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $B'\left(\frac{3}{4};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



2) Donnons la nature de (E_m)

$y^2=2x-\frac{x^2}{m} \Leftrightarrow (x-m)^2+my^2=m^2$

Alors $(E_m): \frac{(x-m)^2}{m^2}+\frac{y^2}{m}=1$

D'où (E_m) est l'ellipse de centre $O'(m;0)$

Déterminons les sommets de (E_m)

$a=m$ et $b=\sqrt{m}$

$B(0;\sqrt{m}), B'(0;-\sqrt{m}), A(m;0)$ et $A'(-m;0)$ dans $(O',\vec{\imath},\vec{\jmath})$ alors $B(m;\sqrt{m}), B'(m;-\sqrt{m}), A(2m;0)$ et O dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Déterminons et construisons l'ensemble des sommets du grand axe lorsque m décrit I

Le grand axe est (BB')

$B\binom{m}{\sqrt{m}} \Rightarrow {y_B}^2=x_B$

$B'\binom{m}{-\sqrt{m}} \Rightarrow {y_{B'}}^2=x_{B'}$

Alors les point B et B' décrivent la parabole d'équation $y^2=x$

3) Déterminons les coordonnée des foyers de (E_m)

$c=\sqrt{m-m^2}$

$F\binom{0}{\sqrt{m-m^2}}$ et $F'\binom{0}{-\sqrt{m-m^2}}$ dans $(O',\vec{\imath},\vec{\jmath})$ alors

$F\binom{m}{\sqrt{m-m^2}}$ et $F'\binom{m}{-\sqrt{m-m^2}}$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Déterminons et traçons l'ensemble des foyers lorsque m décrit I

$F\binom{m}{\sqrt{m-m^2}} \Rightarrow {y_F}^2=x_F-{x_F}^2$

$F'\binom{m}{-\sqrt{m-m^2}} \Rightarrow {y_{F'}}^2=x_{F'}-{x_{F'}}^2$

Alors les points F et F' décrivent la conique d'équation :

$y^2=x-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-x=0$

Exercice 11

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $sin^2\alpha z^2-4sin\alpha z+(4+cos^2\alpha)=0$

$\Delta'=4sin^2\alpha-sin^2\alpha(4+cos^2\alpha)$

$\Delta'=-sin^2\alpha cos^2\alpha=(isin\alpha cos\alpha)^2$

$\begin{cases} z_1=\frac{2sin\alpha+icos\alpha sin\alpha}{sin^2\alpha} \\ z_2=\frac{2sin\alpha-icos\alpha sin\alpha}{sin^2\alpha} \end{cases}$

$\begin{cases} z_1=\frac{2}{sin\alpha}+i\frac{cos\alpha}{sin\alpha} \\ z_2=\frac{2}{sin\alpha}-i\frac{cos\alpha}{sin\alpha} \end{cases}$

D'où $S=\left\{\frac{2}{sin\alpha}+i\frac{cos\alpha}{sin\alpha};\frac{2}{sin\alpha}-i\frac{cos\alpha}{sin\alpha}\right\}$

2) Soit $M\begin{pmatrix}\frac{2}{sin\alpha}\\ \frac{cos\alpha}{sin\alpha}\end{pmatrix}; N\begin{pmatrix}\frac{2}{sin\alpha}\\ -\frac{cos\alpha}{sin\alpha}\end{pmatrix}$

a) Montrons que lorsque $\alpha \in]0;\pi[$, M et N sont des points de la conique $(C): \ x^2-4y^2=4$

$\left(\frac{2}{sin\alpha}\right)^2-4\left(\frac{cos\alpha}{sin\alpha}\right)^2=\frac{4(1-cos^2\alpha)}{sin^2\alpha}$

Or $1-cos^2\alpha=sin^2\alpha$

Alors $\left(\frac{2}{sin\alpha}\right)^2-4\left(\frac{cos\alpha}{sin\alpha}\right)^2=4$

D'où $M \in (C)$

$\left(\frac{2}{sin\alpha}\right)^2-4\left(-\frac{cos\alpha}{sin\alpha}\right)^2=\frac{4(1-cos^2\alpha)}{sin^2\alpha}=4$

D'où $N \in (C)$

b) Donnons la nature et les éléments caractéristiques de (C)

$x^2-4y^2=4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2}-y^2=1$

Alors (C) est l'hyperbole de centre O

Eléments caractéristiques de (C)

- Axe focal : $(O,\vec{\imath})$
- Demi-distance focale : $c = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
- Foyers : $F\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$
- Sommets : $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $A'\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$
- Asymptotes : $(\Delta) : y = \frac{1}{2}x$ et $(\Delta') : y = -\frac{1}{2}x$
- Directrices : $(D) : x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ et $(D) : x = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$
- Excentricité : $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

c) Donnons l'écriture complexe de (C)

$(C) : \frac{d(M,F)}{d(M,(D))} = e$

$\Rightarrow \frac{d(M,F)}{d(M,(D))} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ où $F(\sqrt{5};0)$ et $(D) : x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

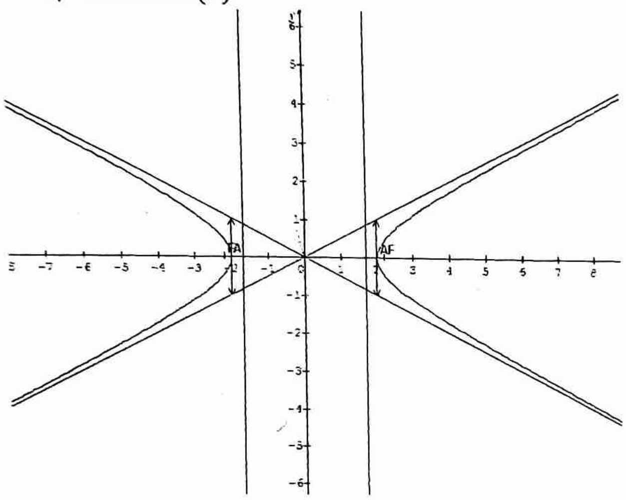
$\Rightarrow \frac{|z-\sqrt{5}|}{\left|x-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right|} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |z-\sqrt{5}| = \frac{\sqrt{5}}{2}\left|x - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right|$

Or $x = \frac{z+\bar{z}}{2} \Rightarrow |z-\sqrt{5}| = \frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{z+\bar{z}}{2} - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right|$

$|z-\sqrt{5}| = \frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{5(z+\bar{z})-8\sqrt{5}}{10}\right| \Leftrightarrow |z-\sqrt{5}| = \frac{|\sqrt{5}(z+\bar{z})-8|}{4}$

D'où $4|z-\sqrt{5}| = |\sqrt{5}(z+\bar{z})-8|$

d) Dessinons (C)



Exercice 12

1) $(C) : x^2+y^2 = 1$, $M(x;y) \in (C)$ et $N(X;Y)$ tel que : $\begin{cases} X = x \\ Y = \frac{1}{2}y \end{cases}$

Montrons que N appartient à une courbe dont on donnera une équation et les éléments de symétrie

$x^2+y^2 = 1 \Rightarrow X^2 + (2y)^2 = 1$

$\Rightarrow X^2 + 4Y^2 = 1$

$\Rightarrow X^2 + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

Alors N appartient à l'ellipse (E) d'équation $X^2 + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

Les éléments de symétries de (E) sont les axes $(O,\vec{\imath})$ et $(O,\vec{\jmath})$

2) $M(x;y) \in (C)$ et $P(X;Y)$ tel que : $\begin{cases} X = \frac{1}{y} \\ Y = \sqrt{3}\frac{x}{y} \end{cases}$

Montrons que P appartient à une courbe (H) dont on précisera les équations des asymptotes

$\begin{cases} X = \frac{1}{y} \\ Y = \sqrt{3}\frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{Y}{X\sqrt{3}} \\ y = \frac{1}{X} \end{cases}$

$x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{Y}{X\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{X}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{Y^2}{3X^2} + \frac{1}{X^2} = 1$

$\Rightarrow Y^2 + 3 = 3X^2$

$\Rightarrow X^2 - \frac{Y^2}{3} = 1$

Alors P appartient à l'hyperbole (H) d'équation $X^2 - \frac{Y^2}{3} = 1$

Les asymptotes de (H) :

$(\Delta) : Y = \sqrt{3}X$ et $(\Delta') : Y = -\sqrt{3}X$

Exercice 13

(E) est la conique de foyer O, de directrice $(\Delta) : y = 2$ et d'excentricité $\frac{1}{2}$

1) Montrons que (E) pour équation $12X^2 + 9Y^2 = 16$ par rapport à un repère à préciser

$\frac{MO}{d(M,(\Delta))} = \frac{1}{2}$ avec $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (E)$

Soit $H\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$ le projeté orthogonal de M sur (Δ)

$\frac{MO}{MH} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow MO^2 = \frac{1}{4}MH^2$

$\Rightarrow 4MO^2 = MH^2 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2 = (y-2)^2$

$\Rightarrow 4x^2+4y^2 = y^2-4y+4$

$\Rightarrow 4x^2+3y^2+4y-4 = 0$

$\Rightarrow 4x^2+3\left(y^2+\frac{4}{3}y\right)-4 = 0$

$\Rightarrow 4x^2+3\left(\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right)-4 = 0$

$\Rightarrow 4x^2+3\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}-4 = 0$

$\Rightarrow 4x^2+3\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{16}{3} = 0$

$\Rightarrow 12x^2+9\left(y+\frac{2}{3}\right)^2 = 16$

Posons $\begin{cases} X = x \\ Y = y + \frac{2}{3} \end{cases}$

D'où (E) pour équation $12X^2+9Y^2 = 16$ dans le repère $(O',\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $O'\begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

(E) est une ellipse de centre $O'\begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

2) Soit φ : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

a) Donnons une équation cartésienne de l'image (E') de (E) par φ

$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{2}{\sqrt{3}}y' + \frac{4-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{2\sqrt{3}}{3}y' + \frac{4\sqrt{3}}{9} - \frac{2}{3} \end{cases}$

$(E) : \ 12x^2 + 9\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = 16$

$\varphi((E)) = (E')$

$\Rightarrow 12x'^2 + 9\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}y' + \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^2 = 16$

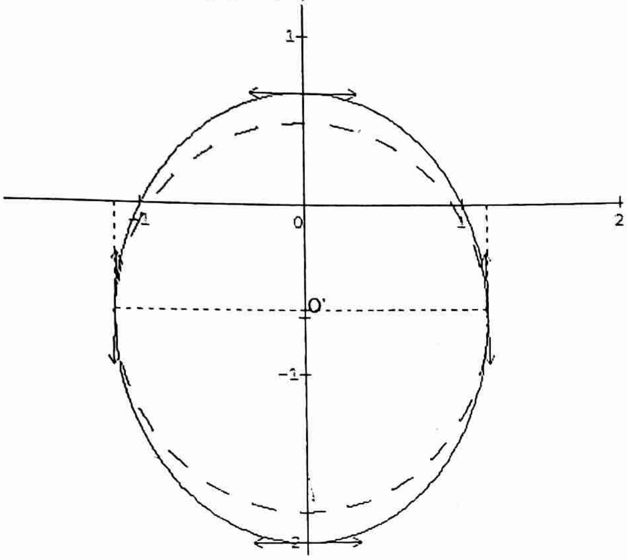
$\Rightarrow 12x^2 + 9\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}(y' + \frac{2}{3})\right]^2 = 16$

$\Rightarrow 12x'^2 + 9 \times \frac{12}{9}\left(y' + \frac{2}{3}\right)^2 = 16$

$\Rightarrow 12x'^2 + 12(y' + \frac{2}{3})^2 = 16$

D'où $(E') : \ x^2 + y^2 = \frac{4}{3}$

b) Dessinons (E) et (E')



Exercice 14

$(D) : x = 6$, $F\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ et $(\Gamma_\theta) : \ \frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos\theta}$ avec $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

a) Précisons la nature de (Γ_θ) suivant les valeurs de θ

- Si $\theta = 0$, $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos 0} = 1$ alors (Γ_0) est la parabole de foyer F et de directrice (D)
- Si $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{\cos\theta} > 1$ alors (Γ_θ) est une hyperbole

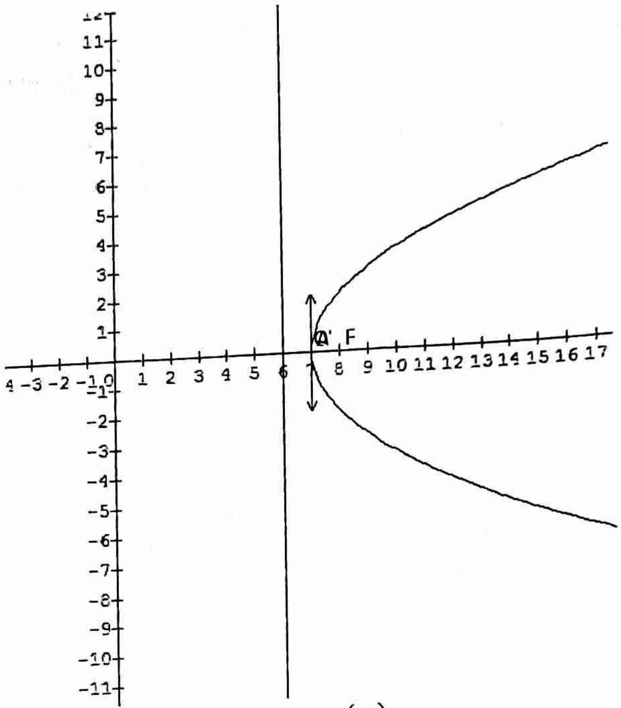
b) Précisons la nature de (Γ_0) et construisons (Γ_0)

$\frac{MF}{MH} = 1 \Leftrightarrow MF = MH$ avec $H(6; y)$

$(x-8)^2 + y^2 = (x-6)^2$

Alors $(\Gamma_0) : \ y^2 = 4(x-7)$

(Γ_0) est donc une parabole de sommet $O'\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$



c) Ecrivons une équation de $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$

$\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}MF = 2MH$

$\Rightarrow 3MF^2 = 4MH^2$

$\Rightarrow 3((x-8)^2 + y^2) = 4(x-6)^2$

D'où $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right) : x^2 - 3y^2 - 48 = 0$

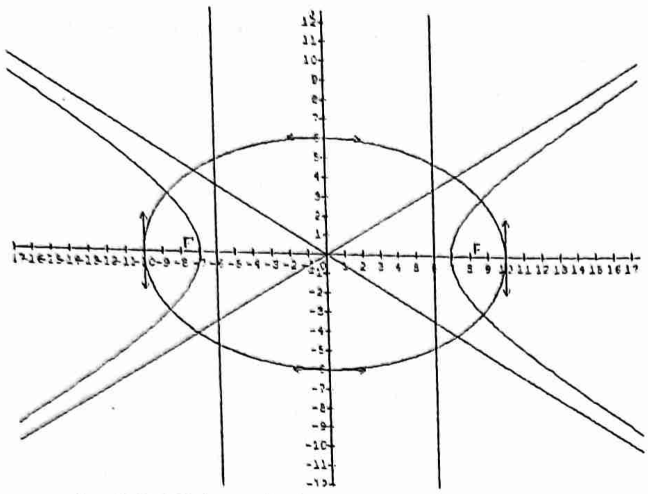
d) Précisons les éléments caractéristiques de $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ (foyers, sommets, éléments de symétrie, asymptotes)

$x^2 - 3y^2 = 48$ alors $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right) : \ \frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{16} = 1$

$\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ est l'hyperbole de centre O

$a = 4\sqrt{3}$, $b = 4 \Rightarrow c = \sqrt{48+16} = 8$

- Foyers : $F\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$
- Sommets : $A\begin{pmatrix}4\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}-4\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$
- Eléments de symétrie : (Ox) et (Oy)
- Asymptotes : $(\Delta) : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ et $(\Delta') : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$



e) Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 10

$(C) : x^2 + y^2 = 100$

Ecrivons une équation cartésienne de la courbe (E), transformée de (C) par l'affinité d'axe la droite d'équation $y = 0$ et de rapport $\frac{3}{5}$

L'expression analytique de l'affinité est : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{3}{5}y \end{cases}$

$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{3}{5}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{5}{3}y' \end{cases}$

$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow x'^2 + \left(\frac{5}{3}y\right)^2 = 100$

$9x'^2 + 25y'^2 = 900$

D'où $(E) : 9x^2 + 25y^2 - 900 = 0$

f) Déterminons la nature et les foyers de (E)

$(E) : \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

$a^2 = 100$ et $b^2 = 36 \Rightarrow c = \sqrt{100 - 36} = 8$

(E) est l'ellipse de centre O et de foyers $F\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$

Constructions (voir figure ci-dessus)

<u>Exercice 15</u>

A) $A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $I\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ deux points. (E) est l'ellipse de centre I dont un sommet est A et un foyer est O

a) Déterminons les trois autres sommets de (E)

Soient A', B et B' les trois autres sommets

I étant le centre de (E) alors : $\overrightarrow{IA'} = -\overrightarrow{IA}$

$x_{A'} = -x_A + 2x_I = 9$ et $y_{A'} = 0$

D'où $A'\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix}$

O est un foyer de (E) alors : $c = OI = 4$

$AI = a = 5 \Rightarrow b = \sqrt{25 - 16} = 3$

Dans $(I, \vec{u}, \vec{v})$, on a : $B\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et $B'\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

D'où $B\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $B'\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$

b) Calculons l'excentricité de (E) et donnons une équation de sa directrice associée au foyer O

$a = 5$ et $b = 3 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

La directrice (D) associée à O pour équation dans $(I, \vec{u}, \vec{v})$:

$X = -\frac{a^2}{c} = -\frac{25}{4}$

D'où $(D) : x = -\frac{9}{4}$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$

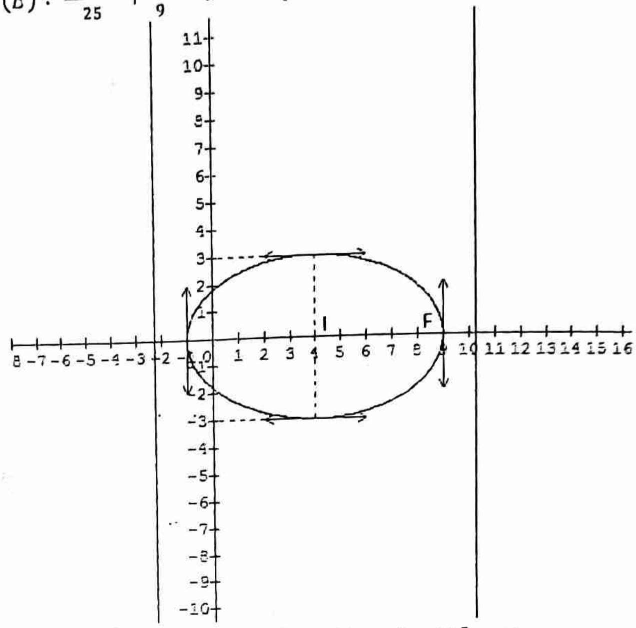
c) Donnons une équation de (E) dans $(I, \vec{u}, \vec{v})$

$a = 5$, $b = 3$ et $I(X; Y)$ alors :

$(E) : \frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1$

d) Traçons (E)

$(E) : \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$



B) $z^2 - 2(4 + 5cos\theta)z + (4cos\theta + 5)^2 = 0$ avec $\theta \in [0; \pi]$

a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ cette équation

$\Delta' = (4 + 5cos\theta)^2 - (4cos\theta + 5)^2$

$\Delta' = (4 + 5cos\theta + 4cos\theta + 5)(4 + 5cos\theta - 4cos\theta - 5) = -9(-1 + cos^2\theta) = (3isin\theta)^2$

$z_1 = 4 + 5cos\theta + 3isin\theta$ et $z_2 = 4 + 5cos\theta - 3isin\theta$

D'où $S = \{4 + 5cos\theta + 3isin\theta; 4 + 5cos\theta - 3isin\theta\}$

b) Soient $z_1 = 4 + 5cos\theta + 3isin\theta$ et $z_2 = 4 + 5cos\theta - 3isin\theta$ avec $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$

Déterminons les coordonnées des points M_1 et M_2 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, puis dans le repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$.

$M_1\begin{pmatrix}4 + 5cos\theta\\3sin\theta\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}4 + 5cos\theta\\-3sin\theta\end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$

$M_1\begin{pmatrix}5cos\theta\\3sin\theta\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}5cos\theta\\-3sin\theta\end{pmatrix}$ dans $(I, \vec{u}, \vec{v})$.

Déduisons en l'ensemble des points M_1, puis l'ensemble des points M_2 lorsque θ décrit $]0; \pi[$

$M_1 : \begin{cases} X_1 = 5cos\theta \\ Y_1 = 3sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{X_1}{5} = cos\theta \\ \frac{Y_1}{3} = sin\theta \end{cases}$

Alors $\frac{X_1^2}{25} + \frac{Y_1^2}{9} = 1$ donc $M_1 \in (E)$

Or $M_1\begin{pmatrix}5cos\theta\\3sin\theta\end{pmatrix}$ alors M_1 décrit la partie de (E) située au dessus de l'axe focal

$M_2 : \begin{cases} X_2 = 5\cos\theta \\ Y_2 = 3\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{X_2}{5} = \cos\theta \\ \frac{Y_2}{3} = \sin\theta \end{cases}$

Alors $\frac{X_2^2}{25} + \frac{Y_2^2}{9} = 1$ donc $M_2 \in (E)$

Or $M_2\begin{pmatrix} 5\cos\theta \\ -3\sin\theta \end{pmatrix}$ alors M_2 décrit la partie de (E) située en dessous de l'axe focal.

<u>Exercice 16</u>

$(\Gamma_m) : y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1), \forall m \in \mathbb{R}$

A) a) Vérifions que $A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in (\Gamma_m)$

$y^2 = 9m - 3m + 3 - 6m - 3 = 0 \Rightarrow A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in (\Gamma_m)$

b) On suppose $m \neq 0$

Montrons que (Γ_m) est une conique à centre. Précions son centre I_m

$y^2 = m\left(x^2 - \frac{m-1}{m}x\right) - 3(2m+1)$

$y^2 = m\left(\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)^2 - \frac{(m-1)^2}{4m^2}\right) - 3(2m+1)$

$y^2 = m\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)^2 - \frac{m^2-2m+1}{4m} - 3(2m+1)$

$y^2 = m\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)^2 + \frac{-m^2+2m-1--24m^2-12m}{4m}$

$y^2 = m\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)^2 - \frac{25m^2+10m+1}{4m}$

$m\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)^2 - y^2 = \frac{(5m+1)^2}{4m}$

$(\Gamma_m) : \frac{\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)^2}{\frac{(5m+1)^2}{4m^2}} - \frac{y^2}{\frac{(5m+1)^2}{4m}} = 1$

Alors (Γ_m) est la conique de centre $I_m\begin{pmatrix} \frac{m-1}{2m} \\ 0 \end{pmatrix}$

Précisons suivant les valeurs de m la nature de (Γ_m)

La nature de (Γ_m) dépend du signe de $\frac{(5m+1)^2}{4m}$

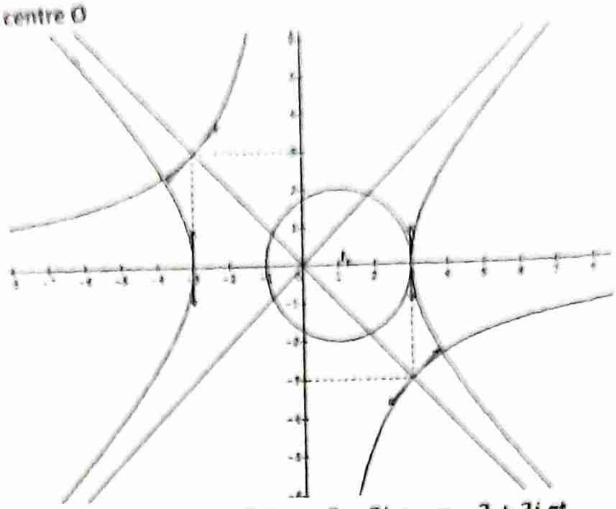
Si $m < 0$, (Γ_m) est une ellipse

Si $m > 0$, (Γ_m) est une hyperbole

c) Construisons les courbes (Γ_{-1}) et (Γ_1)

$(\Gamma_{-1}) : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ alors (Γ_{-1}) est le cercle de centre $I_1(1; 0)$ et de rayon 2

$(\Gamma_1) : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ alors (Γ_1) est l'hyperbole équilatère de centre O



B) $z_A = 3, z_B = -3, z_{A'} = 3 - 3i, z_{B'} = -3 + 3i$ et $\varphi : z' = az + b$ telle que : $\varphi(A) = A'$ et $\varphi(B) = B'$

a) Déterminons les complexes a et b

$\begin{cases} \varphi(A) = A' \\ \varphi(B) = B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases}$

$\Rightarrow a(z_A - z_B) = z_{A'} - z_{B'}$

$\Rightarrow a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} = 1 - i$ et $b = z_{A'} - az_A = 0$

D'où $\varphi : z' = (1-i)z$

Précisons la nature et les éléments caractéristiques de φ

$\varphi : z' = (1-i)z \Leftrightarrow \varphi : z' = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z$

Alors φ est la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

b) Justifions que l'image (Γ'_{-1}) de (Γ_{-1}) par φ est dont on précisera le centre et le rayon

$\varphi(I_{-1}) = I'_{-1}$ alors $z_{I'_{-1}} = (1-i) \times 1 = 1 - i$

$k = \sqrt{2}$ et $r = 2$ alors $r' = kr = 2\sqrt{2}$

Alors (Γ'_{-1}) est le cercle de centre $I'_{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rayon $r' = 2\sqrt{2}$

c) Donnons l'expression analytique de φ, puis déduisons en x et y en fonction de x' et y'

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$x' + iy' = (1-i)(x+iy) = x + y + i(-x+y)$

$\varphi : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$

$\begin{cases} x' = x + y \ (1) \\ y' = -x + y \ (2) \end{cases}$

(1)+(2) $\Rightarrow y = \frac{1}{2}(x' + y')$

(1)-(2) $\Rightarrow x = \frac{1}{2}(x' - y')$

d) Déduisons en une équation de (Γ'_1), image de (Γ_1) par φ

$(\Gamma_1) : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow (\Gamma'_1) : \frac{1}{4}(x' - y')^2 - \frac{1}{4}(x' + y')^2 = 9$

$\Rightarrow -x'y' = 9 \Leftrightarrow y' = -\frac{9}{x'}$

D'où $(\Gamma'_1) : y = -\frac{9}{x}$

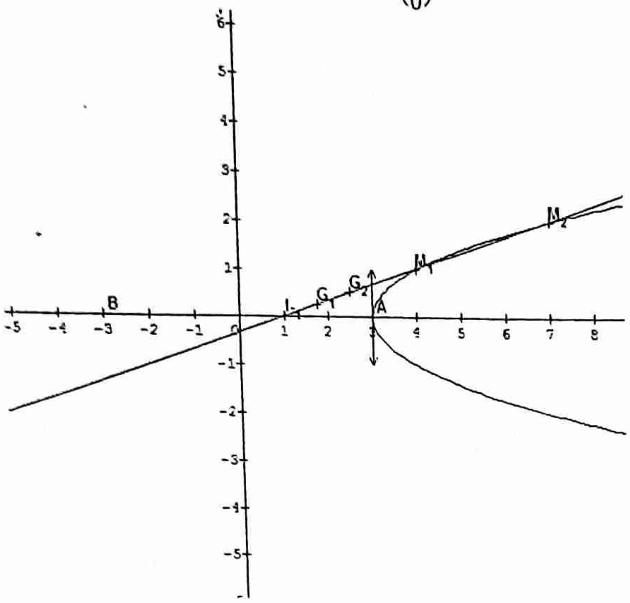
Alors (Γ'_1) est l'hyperbole rapportée à ses asymptotes

C) On pose $m = 0$

a) Donnons la nature de (Γ_0) et construisons (Γ_0)

$(\Gamma_0) : y^2 = x - 3$

Alors (Γ_0) est la parabole de sommet $A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$



b) $G = bar\{(A, 2); (B, 1); (M, 1)\}$ où M décrit la courbe (Γ_0).

Soit (γ_0) la courbe décrite par le point G

Démontrons que (γ_0) est l'ensemble transformé de (Γ_0) par une homothétie de centre $I_{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dont on précisera le rapport

$G = bar\{(A, 2); (B, 1); (M, 1)\}$

$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$

En fixant le point I_{-1}, on obtient : $4\overrightarrow{GI_{-1}} + \overrightarrow{I_{-1}M} = \vec{0}$

Car $2\overrightarrow{I_{-1}A} + \overrightarrow{\iota_{-1}B} = \vec{0}$

D'où $\overrightarrow{I_{-1}G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{I_{-1}M} \Rightarrow G = h_{\left(I_{-1},\frac{1}{4}\right)}(M)$

Par conséquent, (γ_0) est l'ensemble transformé de (Γ_0) par une homothétie de centre $I_{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et de rapport $\frac{1}{4}$

Construisons G_1 et G_2(voir figure)

$M_1\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AM_2}$

Exercice 17

$(C) : \begin{cases} x = 2e^t + e^{-t} \\ y = 2e^t - e^{-t} \end{cases}$ t réel quelconque

a) Soit $M\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in (C)$. Donnons en fonction de a et b les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la tangente en M à (C)

$(C) : \begin{cases} x = 2e^t + e^{-t} \\ y = 2e^t - e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}2e^t - e^{-t}\\2e^t + e^{-t}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente à (C) au point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in (C) \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente en M à (C)

b) Soit $N\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix} \in (C)$ et T le point tel que : $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$

Montrons que la droite (MT) est la tangente en M à la courbe (C)

(MT) est la droite passant par les points M et T dont un vecteur est $\overrightarrow{MT}$

Or $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \Rightarrow \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{ON}$

De plus $N\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{ON} = \vec{u}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$

Par conséquent, (MT) est bien la tangente à (C) au point M

c) Montrons que la courbe (C) est contenue dans l'hyperbole (H) d'équation : $x^2 - y^2 = 8$

$(C) : \begin{cases} x(t) = 2e^t + e^{-t} \\ y(t) = 2e^t - e^{-t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(t) = 4e^{2t} + 4 + e^{-2t} \\ y^2(t) = 4e^{2t} - 4 + e^{-2t} \end{cases}$

$x^2(t) - y^2(t) = 8 \Rightarrow (C)$ est contenue dans l'hyperbole (H) d'équation $x^2 - y^2 = 8$

d) Traçons la courbe (H)

$x^2 - y^2 = 8 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} 1$

(H) est une hyperbole équilatère de centre O

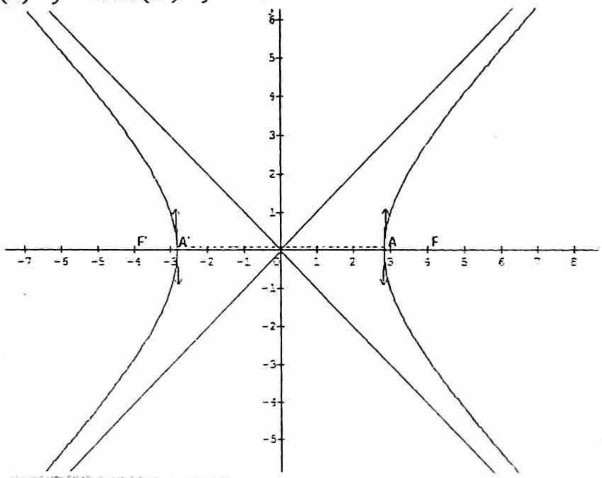
$a = b = 2\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{8+8} = 4$

Les sommets de (H) sont : $A\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ et $A'\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$

Les foyers de (H) sont : $F\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$

Les asymptotes de (H) sont :

$(\Delta) : y = x$ et $(\Delta') : y = -x$



Calculs des primitives

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminons une primitive de f sur l'intervalle I donné

Toutes les proposées sont continues sur I alors elles admettent chacune une primitive sur I

1) $f(x) = 3x^3 - 2x + 1 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^2 + x + c$
2) $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{x} + c$
3) $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 6\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + c$
4) $f(x) = -3(-3x-2)^3 = u'u^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}(-3x-2)^4 + c$
5) $f(x) = (-2x+1)^5 = -\frac{1}{2}u'u^5 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{12}(-2x+1)^6 + c$
6) $f(x) = (x+1)(x^2+2x)^3 = \frac{1}{2}u'u^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{8}(x^2+2x)^4 + c$
7) $f(x) = \frac{2}{(3x+4)^3} = \frac{2}{3}\frac{u'}{u^3} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3(3x+4)^2} + c$
8) $f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{2}\frac{u'}{u^2} \Rightarrow F(x) = -\frac{3}{2(x^2+1)} + c$
9) $f(x) = sinxcos^3x = -u'u^3 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{4}cos^4x + c$
10) $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}u'cosu \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + c$
11) $f(x) = \frac{cosx}{sin^2x} = \frac{u'}{u^2} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{sinx} + c$
12) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} = \frac{3}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}} \Rightarrow F(x) = 3\sqrt{2x-1} + c$
13) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-4x+3}} = -\frac{1}{4}\frac{u'}{\sqrt{u}} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{-4x+1} + c$
14) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{3}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}} \Rightarrow F(x) = 3\sqrt{x^2-1} + c$
15) $f(x) = x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}u'\sqrt{u} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + c$
16) $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2-2x+1} = \frac{1}{2}u'\sqrt{u} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}(x^2-2x+1)\sqrt{x^2-2x+1} + c$
17) $f(x) = 2cosxsin2x = 4cos^2xsinx = -4u'u^2 \Rightarrow F(x) = -\frac{4}{3}cos^3x + c$
18) $f(x) = x - \frac{3}{cos^2x} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3tanx + c$
19) $f(x) = sin^2xcos^5x = cosxsin^2x - 2cosxsin^4x + cosxsin^6x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}sin^3x - \frac{2}{5}sin^5x + \frac{1}{7}sin^7x + c$
20) $f(x) = sin^2xcos^4x$

En linéaisant f, on obtient : $f(x) = -\frac{1}{32}(cos6x + 2cos4x - cos2x - 2) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}sin6x + \frac{1}{2}sin4x - \frac{1}{2}sin2x - 2x\right) + c$

NB : dans chacun des cas, c est nombre réel

Exercice 2

$f(x) = sin^2xcos^2x$

1) Montrons que : $f(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}cos4x$

$f(x) = (sinxcosx)^2 = \left(\frac{1}{2}sin2x\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1-cos4x}{2}$

D'où $f(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}cos4x$

2) Déduisons en la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$

La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ alors elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$

$F(x) = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}sin4x + c$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow c = 1 - \frac{\pi}{32}$

D'où $F(x) = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}sin4x + 1 - \frac{\pi}{32}$

Exercice 3

$f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^3}$

1) Déterminons les réels a et b tels que : $\forall x \neq 1, f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$

$f(x) = \frac{ax-a+b}{(x-1)^3}$

Par identification, on obtient : $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3}$

2) Déduisons une primitive de f sur $]-\infty; 1[$, puis celle qui prend la valeur 1 en 0

La fonction f est continue sur $]-\infty; 1[$ alors elle admet une primitive sur $]-\infty; 1[$

$F(x) = -\frac{2}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2} + c$

$F(0) = 1$ alors $c = \frac{3}{2}$

D'où $F(x) = -\frac{2}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2} + \frac{3}{2}$

Exercice 4

$f(x) = \sin^3 x$

1) Linéarisons $f(x)$

Posons $sinx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$f(x) = \left(\frac{1}{2i}\right)^3(e^{ix} - e^{-ix})^3 = -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} - 3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\right]$

D'où $f(x) = -\frac{1}{4}(sin3x - 3sinx)$

2) Déduisons en la primitive de f qui s'annule en $\frac{\pi}{3}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f admet une primitive sur $\mathbb{R}$

$F(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}cos3x + 3cosx\right) + c$

$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow c = \frac{11}{24}$

D'où $F(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}cos3x + 3cosx\right) + \frac{11}{24}$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, déterminons une primitive de f sur I

Les fonctions proposées sont toutes continues sur chacun des intervalles I correspondant alors elles admettent chacune une primitive sur I

1) $f(x) = \frac{1}{2-x} = -\frac{u'}{u} \Rightarrow F(x) = -ln|2-x| + c$

$\forall \in I, F(x) = -\ln(x-2) + c$

2) $f(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x+1} = \frac{u'}{u} \Rightarrow F(x) = ln|2x^2 - x + 1| + c$

$\forall \in I, F(x) = \ln(2x^2 - x + 1) + c$

3) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\frac{u'}{u} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}ln|x^2 + 2x + 5| + c$

$\forall \in I, F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 5) + c$

4) $f(x) = \frac{cos2x}{sinxcosx} = \frac{2cos2x}{sin2x} = \frac{u'}{u} \Rightarrow F(x) = ln|sin2x| + c$

$\forall \in I, F(x) = \ln(sin2x) + c$

5) $f(x) = tanx = \frac{sinx}{cosx} = -\frac{u'}{u} \Rightarrow F(x) = -ln|cosx| + c$

$\forall \in I, F(x) = -\ln(cosx) + c$

6) $f(x) = 3x^2 - 1 + \frac{2}{3x+2} \Rightarrow F(x) = x^3 - x + \frac{2}{3}\ln(3x+2) + c$

7) $f(x) = \frac{1}{cos^2x tanx} = \frac{\frac{1}{cos^2x}}{tanx} = \frac{u'}{u} \Rightarrow F(x) = \ln(tanx) + c$

8) $f(x) = \frac{lnx}{x} = \frac{1}{x}lnx = u'u \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}ln^2x + c$

9) $f(x) = \frac{1}{xlnx} = \frac{\frac{1}{x}}{lnx} = \frac{u'}{u} \Rightarrow F(x) = \ln(lnx) + c$

10) $f(x) = \frac{sinx+cosx}{sinx-cosx} = \frac{u'}{u} \Rightarrow F(x) = \ln(sinx - cosx) + c$

Exercice 6

$f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}$

1) Déterminons les réels a et b tels que : $\forall x \neq -\frac{1}{2}, f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$

$f(x) = \frac{2ax+a+b}{(2x+1)^2}$

Par identification, on a : $f(x) = \frac{3}{2(2x+1)} - \frac{1}{(2x+1)^2}$

2) Déduisons en les primitives de f sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

La fonction f est continue sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ alors elle admet une primitive sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$f(x) = \frac{3}{2(2x+1)} - \frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{3}{4}\frac{u'}{u} - \frac{1}{4}\frac{u'}{u} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{4}\ln(2x+1) + \frac{1}{4(2x+1)} + c$

3) Déduisons en F tel que : $F(0) = 1$

$F(0) = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$

D'où $F(x) = \frac{3}{4}\ln(2x+1) + \frac{1}{4(2x+1)} + \frac{3}{4}$

Exercice 7

Déterminons une primitive de f sur I

Chacune des fonctions proposées est continue sur l'intervalle I où elle est définie donc elle admet une primitive sur I

1) $f(x) = e^{-2x+1} = -\frac{1}{2}u'e^u \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+1} + c$

2) $f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2}ue^u \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

3) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = -u'e^u \Rightarrow F(x) = -e^{\frac{1}{x}} + c$

4) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2u'e^u \Rightarrow F(x) = 2e^{\sqrt{x}} + c$

5) $f(x) = \frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow F(x) = x - \ln(e^x+1) + c = ln\frac{e^x}{e^x+1} + c$

6) $f(x) = 2^x = e^{xln2} = \frac{1}{ln2}u'e^u \Rightarrow F(x) = \frac{1}{ln2} \times 2^x + c$

Exercice 8

$f(x) = \frac{1}{(e^x+2)^2}$

1) Déterminons les réels a, b et c tels que $\forall X \neq -2, \frac{1}{(X+2)^2} = a + \frac{bX}{X+2} + \frac{cX}{(X+2)^2}$

$\frac{1}{(X+2)^2} = a + \frac{bX}{X+2} + \frac{cX}{(X+2)^2} = \frac{(a+b)X^2+(4a+2b+c)X+4a}{(X+2)^2}$

Par identification, on obtient : $\frac{1}{(X+2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{X}{4(X+2)} - \frac{X}{2(X+2)^2}$

2) Déduisons en une autre expression de $f(x)$

En posant $X = e^x$, on a : $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{e^x}{4(e^x+2)} - \frac{e^x}{2(e^x+2)^2}$

3) Déduisons en les primitives de f sur $\mathbb{R}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ alors elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$

$F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln(e^x+2) + \frac{1}{2(e^x+2)} + c$

Exercice 9

$f(x) = (x^2 - 4)e^{2x}$

1) Déterminons less réels α, β, γ pour que la fonction $F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de f

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$F'(x) = (2\alpha x^2 + (2\alpha + 2\beta)x + \beta + 2\gamma)e^{2x}$

$F'(x) = f(x)$

Par identification, on obtient :

$F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\right)e^{2x}$

Suites numériques

Exercice 1

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2$

1) Calculons u_1, u_2, u_3

$u_1 = \frac{3}{5}u_0 + 2 = \frac{13}{5}$; $u_2 = \frac{3}{5}u_1 + 2 = \frac{89}{25}$ et $u_3 = \frac{3}{5}u_2 + 2 = \frac{339}{125}$

2) Déterminons un réel a tel que : $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.

$v_{n+1} = u_{n+1} + a = \frac{3}{5}u_n + 2 + a = \frac{3}{5}(v_n - a) + 2 + a$

$v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n - \frac{3}{5}a + 2 + a$

(v_n) est une suite géométrique si et seulement si :

$\frac{2}{5}a + 2 = 0$ alors : $a = -5$

3) $v_n = u_n - 5$

a) Calculons v_0, puis donnons l'expression de u_n en fonction de n.

$v_0 = u_0 - 5 = 1 - 5 = -4$

$u_n = v_n + 5$ or $v_n = -4\left(\frac{3}{5}\right)^n$

Alors : $u_n = -4\left(\frac{3}{5}\right)^n + 5, \forall n \in \mathbb{N}$

4) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

a) Calculons S_n et déterminons sa limite en $+\infty$

$S_n = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -4 \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}}$ alors

$S_n = -10\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$

$lim\, S_n = \lim\left(-10\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)\right) = -10$

b) Calculons T_n en fonction de n et calculons sa limite en $+\infty$

$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + (5 + 5 + \cdots + 5)$

$T_n = S_n + 5(n+1) = -10\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) + 5n + 5$

Alors $T_n = 5n - 5 + 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

$\lim T_n = \lim\left(5n - 5 + 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) = +\infty$

<u>Exercice 2</u>

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculons u_1, u_2, u_3 et u_4

$u_1 = \frac{1}{2};\ u_2 = \frac{4}{5};\ u_3 = \frac{13}{14}\ et\ u_4 =$

2) Démontrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le u_n \le 2$

On a : $u_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_n+2}$

- $u_0 = 0$ alors $0 \le u_0 \le 2$
- Supposons que, $\forall k > 0, 0 \le u_k \le 2$
- Vérifions que $0 \le u_{k+1} \le 2$

$0 \le u_k \le 2$, alors : $\frac{3}{4} \le \frac{3}{u_k+2} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le \frac{3}{u_k+2} \le -\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} \le 2 - \frac{3}{u_k+2} \le \frac{5}{4}$ alors : $0 \le \frac{1}{2} \le 2 - \frac{3}{u_k+2} \le \frac{5}{4} \le 2$

D'où $0 \le u_{k+1} \le 2$

Cc : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le u_n \le 2$

3) $v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$

Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1} = \frac{1+u_{n+1}}{2-2u_{n+1}} = \frac{3u_n+3}{2-2u_n}$

Alors ; $v_{n+1} = 3.\frac{1+u_n}{2-2u_n} = 3v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$

a) Donnons l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n

$v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2} \times 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n} \Leftrightarrow 2v_n - 2v_n u_n = 1 + u_n$ alors : $u_n = \frac{2v_n-1}{2v_n+1}$

D'où $u_n = \frac{3^n-1}{3^n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

b) Etudions la convergence de (v_n). Déterminons la limite de (u_n)

$v_n = \frac{1}{2} \times 3^n$ alors (v_n) diverge vers $+\infty$ (car $q > 1$)

$u_n = \frac{3^n-1}{3^n+1}$ alors $\lim u_n = 1$

4) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

Calculons S_n et déterminons sa limite en $+\infty$

$S_n = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{2} \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3}$

Alors : $S_n = -\frac{1}{4}(1 - 3^{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim S_n = \lim\left(-\frac{1}{4}(1 - 3^{n+1})\right) = +\infty$

<u>Exercice 3</u>

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$

1) Montrons que, $\forall n \ge 1, 0 \le u_n \le 1$

On a : $u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n+4}$

- $u_1 = \frac{3}{4}$ alors $0 \le u_1 \le 1$
- Supposons que, $0 \le u_k \le 1, \forall k > 1$
- Vérifions que $0 \le u_{k+1} \le 1$

$0 \le u_k \le 1$ alors $-\frac{5}{4} \le -\frac{5}{u_k+4} \le -1$

Donc $\frac{3}{4} \le u_{k+1} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{3}{4} \le u_{k+1} \le 1$

D'où $0 \le u_{k+1} \le 1, \forall k \ge 1$

Cc : $\forall n \ge 1, 0 \le u_n \le 1$

2) Montrons que (u_n) est croissante

$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+3}{u_n+4} - u_n = \frac{-u_n{}^2-2u_n+3}{u_n+4}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+3)}{u_n+4}$

$0 \le u_n \le 1$ alors $1 - u_n \ge 0$, $u_n + 3 > 0$ et $u_n + 4 > 0$

D'où $\forall n \ge 1, u_{n+1} - u_n \ge 0$ par conséquent (u_n) est une suite croissante.

3) $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \frac{u_n-1}{5u_n+15}$

Alors $v_{n+1} = \frac{1}{5}.\frac{u_n-1}{u_n+3} = \frac{1}{5}v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{3}$

b) Déduisons en que la limite de (v_n)

$q = \frac{1}{5}\ (0 < q < 1)$ alors $\lim v_n = 0$

c) Exprimons u_n en fonction de v_n, et déduisons en sa limite

$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3} \Leftrightarrow v_n u_n + 3v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3 - 3v_n$

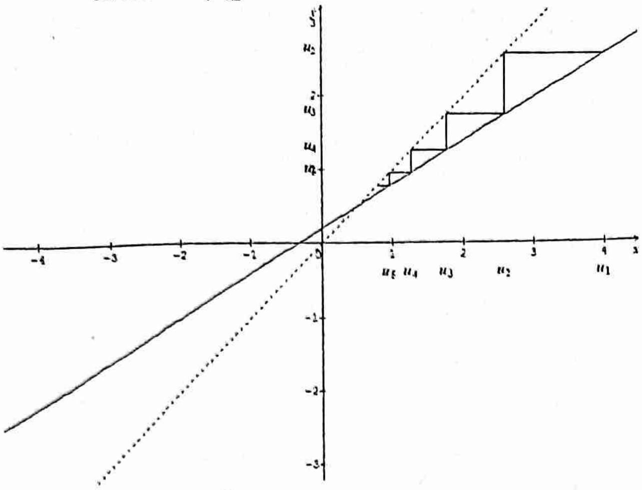
Alors $u_n = \frac{3v_n+1}{1-v_n}$

$\lim u_n = 1$ (car $\lim v_n = 0$)

<u>Exercice 4</u>

$u_1 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{5}$

1) Déterminons graphiquement les cinq premiers termes de (u_n)



2) $v_n = 5u_n - \frac{5}{2}$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1} = 5u_{n+1} - \frac{5}{2} = 1 + 3u_n - \frac{5}{2} = 3u_n - \frac{3}{2} = \frac{3}{5}(5u_n - \frac{5}{2})$

Alors : $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme $v_1 = \frac{35}{2}$

b) Exprimons v_n en fonction de n et déduisons en u_n en fonction de n

$v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{35}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$v_n = 5u_n - \frac{5}{2}$ alors $u_n = \frac{1}{5}v_n + \frac{1}{2}$

$u_n = \frac{1}{5} \times \frac{35}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$

D'où $u_n = \frac{7}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$

3) $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

a) Calculons S_n en fonction de n.

$S_n = v_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{35}{2} \times \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}$

Alors $S_n = \frac{175}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$

b) Calculons S_{2016}

$S_{2016} = \frac{175}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{2016}\right) = 43.75$

c) Déduisons en $S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

$S'_n = \frac{1}{5}(v_1 + v_2 \ldots + v_n) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = \frac{1}{5}S_n + \frac{n}{2}$

Alors $S'_n = \frac{35}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) + \frac{n}{2}$

Calculons la limite de S'_n en $+\infty$

$\lim S'_n = +\infty$

Exercice 5

$u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1}$

Alors $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$

2) Exprimons v_n en fonction de n

$v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

a) Démontrons que $u_{n+1} = 1 + S_n$

$v_0 = u_1 - u_0$

$v_1 = u_2 - u_1$

....

....

....

$v_n = u_{n+1} - u_n$

En additionnant membre à membre et après simplification, on obtient :

$S_n = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1} - 1$ (car $u_0 = 1$)

D'où $u_{n+1} = 1 + S_n$

b) Déduisons en u_n en fonction de n et calculons sa limite

$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$u_{n+1} = 1 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors : $u_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et

$\lim(u_n) = 3$

4) Calculons le plus petit $p \leq n$ tel que : $|u_n - 3| \leq 10^{-3}$

$u_n - 3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ alors $|u_n - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$|u_n - 3| \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-3}$

$(n-1)ln\frac{1}{2} \leq -3ln10$ alors : $n \geq \frac{3ln10}{ln2} + 1$

D'où $p \approx 11$

Exercice 6

$u_1 = 12, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

$v_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$

1) $w_n = v_n - u_n$

a) Démontrons que (w_n) est une suite géométrique

$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{-u_n + v_n}{12}$

Alors : $w_{n+1} = -\frac{1}{12}(v_n - u_n) = -\frac{1}{12}w_n$

(w_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_1 = -11$

b) Exprimons w_n en fonction de n

$w_n = w_1 q^{n-1} = -11\left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1}$

c) Prouvons que (w_n) est convergente et déterminons sa limite

$q = -\frac{1}{12}$ $(-1 < q < 1)$ alors (w_n) converge vers 0.

$\lim w_n = 0$

2) Prouvons que (u_n) est décroissante et que (v_n) est croissante

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{-2u_n + 2v_n}{3} = \frac{2}{3}(v_n - u_n)$

Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}w_n = -\frac{22}{3}\left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \leq 0$ par conséquent (u_n) décroissante

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4}$

Alors $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{4}(v_n - u_n) = -\frac{1}{4}w_n = \frac{11}{4}\left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n \geq 0$ par conséquent (v_n) est croissante

3) Démontrons que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \geq v_n$

$u_1 = 12$ et $v_1 = 1$ alors $u_1 \geq v_1$(vraie)

$v_n - u_n = w_n = -11\left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1}$ alors $v_n - u_n \leq 0 \Leftrightarrow$ $v_n \leq u_n$ (vraie)

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \geq v_n$

Déduisons en que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_1 \geq u_n \geq v_n \geq v_1$

(u_n) décroissante, alors : $u_1 \geq u_n$ (1)

(v_n) croissante, alors : $v_1 \leq u_n$ (2)

De plus $u_n \geq v_n$

(1) et (2) donnent : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_1 \geq u_n \geq v_n \geq v_1$

4) $t_n = 3u_n + 8v_n$

a) Prouvons que (t_n) est une suite constante

$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$

Alors : $t_{n+1} = 3u_n + 8v_n = t_n$

(t_n) est une suite constante

b) Déduisons en les suites (u_n) et (v_n) convergent et calculons leurs limites

(u_n) est décroissante et minorée par v_1 alors elle converge

(v_n) est croissante et majorée par u_1 alors elle est convergente.

Exercice 7

1) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$

a) Calculons u_1, u_2 et u_3

$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{3}{4}$

b) Comparons les 4 premiers termes de la suite (u_n) aux 4 premiers termes de la suite : $w_n = \frac{n}{n+1}$

- $w_0 = 0$ alors $u_0 = w_0$
- $w_1 = \frac{1}{2}$ alors $u_1 = w_1$
- $w_2 = \frac{2}{3}$ alors $u_2 = w_2$
- $w_3 = \frac{3}{4}$ alors $u_3 = w_3$

c) Démontrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_n$

- D'après a) les 4 premiers termes de deux suites sont égaux
- D' autre part : $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ et $w_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

Alors : $u_1 = \frac{1}{2}$ et $w_1 = \frac{1}{2}$ donc $u_{n+1} = w_{n+1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_n$

2) $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

a) Montrons que : $v_1 + v_2 + v_3 = -ln4$

$v_1 = ln\frac{1}{2}$, $v_2 = ln\frac{2}{3}$ et $v_3 = ln\frac{3}{4}$

$v_1 + v_2 + v_3 = ln\frac{1}{2} + ln\frac{2}{3} + ln\frac{3}{4} = \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right) = ln\frac{1}{4}$

Alors : $v_1 + v_2 + v_3 = -ln4$

b) $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

Exprimons S_n en fonction de n et calculons sa limite

$S_n = ln\frac{1}{2} + ln\frac{2}{3} + \cdots + ln\frac{n}{n+1} = ln\frac{1\times2\times\ldots\times n}{2\times3\times\ldots\times n\times(n+1)}$

Alors : $S_n = ln\frac{1}{n+1}$

$\lim S_n = \lim\left(ln\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = ln0^+ = -\infty$

Exercice 8

$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

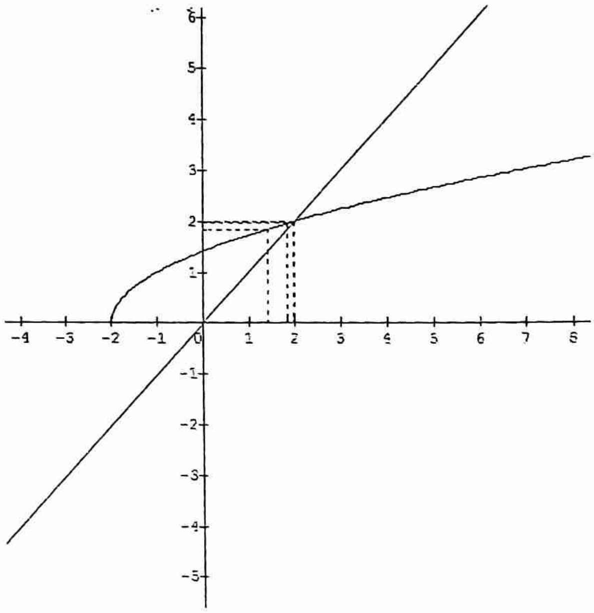
1) Soit $f(x) = \sqrt{2+x}, \forall x \in [-2; +\infty[$

Traçons la courbe représentative (C) de f

f est dérivable sur $]-2; +\infty[$ et on a : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$

Tableau de variation de f

x	-2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$



2) On suppose $u_0 = 0$

a) Représentons graphiquement (u_n) (voir figure)

b) Conjecturons le sens de variation et la convergence de la suite (u_n)

La suite est strictement croissante et semble converger vers 2

3) En utilisant le sens de variation de f et un raisonnement par reccurence, montrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$

- $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{2} \Rightarrow u_1 > u_0$
- Supposons que, $\forall k \in \mathbb{N}, u_k > u_{k-1}$
- Vérifions au rang $k+1$

$u_k > u_{k-1}$ et f croissante alors : $f(u_k) > f(u_{k-1})$

Or $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(u_{k-1}) = u_k$

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$

4) En procédant de la même façon, montrons que $u_n \in [0; 2]$

- $u_0 = 0$ alors $u_0 \in [0; 2]$
- Supposons que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 2]$
- Vérifions au rang $n + 1$

$f(0) = \sqrt{2}$ et $f(2) = 2$

Alors $f([0; 2]) = [\sqrt{2}; 2] \subset [0; 2]$

On a : $\forall\, x \in [0; 2], f(x) \in [0; 2]$

Posons $x = u_n$ alors $f(u_n) = u_{n+1} \in [0; 2]$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 2]$

5) On se propose de montrer que (u_n) converge vers 2

a) Exprimons $u_{n+1} - 2$ en fonction de u_n

$u_{n+1} - 2 = \sqrt{2 + u_n} - 2 = \frac{2+u_n-4}{\sqrt{2+u_n}+2}$

D'où $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n-2}{\sqrt{2+u_n}+2}$

b) Montrons que $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$

$\forall\, x \in [0; 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$u_n \in [0; 2]$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, l'inégalité des accroissements finis à f sur $[u_n; 2]$ donne :

$|f(u_n) - f(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(2) = 2$

D'où $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|, \forall\, n \in \mathbb{N}$

c) Déduisons en que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$

On a : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|, \forall\, n \in \mathbb{N}$

Par itération, on a :

$|u_n - 2| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - 2|$

$|u_{n-1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_{n-2} - 2|$

....

....

....

$|u_1 - 2| \leq \frac{1}{2}|u_0 - 2|$

Par produit et simplification, on a :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$

d) Conclusion

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 2$

D'où la suite (u_n) converge vers 2

<u>Exercice 10</u>

$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

<u>Partie 1</u> : 1) a) Calculons $f'(x)$, puis étudions son signe. Déduisons le sens de variation de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

b) Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) = \frac{1}{1} = 1$

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

2) Démontrons que $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C)

$A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ et un centre de symétrie de (C) si et seulement si :

$f(x) + f(-x) = 1$

$f(-x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x+1}$

$f(x) + f(-x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} = 1$

Alors $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

3) Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point A

$(T) : y = f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2}$

D'où $(T): y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

4) $\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - f(x)$

a) Démontrons que : $\forall\, x \in]-\infty; 0[, \varphi(x) > 0$ et $\forall\, x \in]0; +\infty[, \varphi(x) < 0$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\varphi'(x) = -\frac{1}{4}x - f'(x)$

Alors : $\varphi'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-(e^{2x}-2e^x+1)}{(1+e^x)^2} = \frac{-(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) < 0$ alors φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

De plus $\varphi(0) = \frac{1}{2} - f(0) = 0$

D'où $\forall\, x \in]-\infty; 0[, \varphi(x) > 0$ et $\forall\, x \in]0; +\infty[, \varphi(x) < 0$

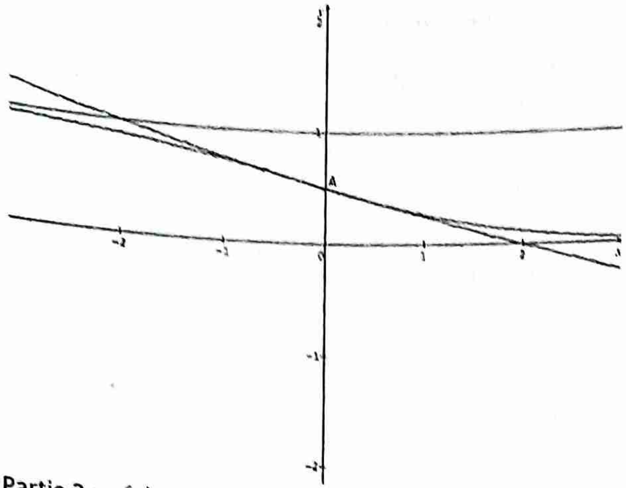
b) Déduisons en la position de (T) par rapport à (C)

$f(x) - y = -\varphi(x)$

Alors : $\forall\, x \in]-\infty; 0[, f(x) - y < 0$ donc (T) est au dessus de (C) sur $]-\infty; 0[$

$\forall\, x \in]0; +\infty[, f(x) - y > 0$ donc (T) est en dessous de (C) sur $]0; +\infty[$

c) Traçons (T) et (C)



<u>Partie 2</u> : $g(x) = x - f(x)$

1) a) Etudions le sens de variation de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $g'(x) = 1 - f'(x)$

Alors : $g'(x) = 1 + \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Calculons les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty - 0 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty - 1 = -\infty$

c) Déduisons en l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$

$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$

D'après ce qui précède :

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$

$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$

D'où α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$

$g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - f\left(\frac{1}{4}\right) = -0{,}188$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}122$

$g\left(\frac{1}{4}\right) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ alors : $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$

2) Démontrons que $\forall\, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], f(x) \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0.44$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.38$

Alors $f\left(\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]\right) = [0.38; 0.44] \subset \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

D'où $\forall\, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], f(x) \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

3) Calculons $f''(x)$ et déduisons que :

$\forall\, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

$f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

f' est dérivable et : $f''(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^2 + 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$

Alors : $f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$

$\forall\, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], f''(x) > 0$ alors f croit sur $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

Alors : $f'\left(\frac{1}{4}\right) \leq f'(x) \leq f'\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -0.24 \leq f'(x) \leq -0.23$

Donc $|f'(x)| \leq 0.24 \leq \frac{1}{4}$

D'où $\forall\, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

4) Déduisons en que :

$\forall\, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$

On a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}, \alpha \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

Appliquons le TIAF, version valeur absolue, à f entre x et α

$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$ or $f(\alpha) = \alpha$

D'où $\forall\, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$

5) $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Démontrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

- $u_0 = \frac{1}{4}$ alors $\frac{1}{4} \leq u_0 \leq \frac{1}{2}$
- Supposons que $\forall\, k > 0, \frac{1}{4} \leq u_k \leq \frac{1}{2}$
- Vérifions que, $\forall\, k \in \mathbb{N}, \frac{1}{4} \leq u_{k+1} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} \leq u_k \leq \frac{1}{2}$ et f décroissante sur $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, alors : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_k) \leq f\left(\frac{1}{4}\right)$

$0.38 \leq u_k \leq 0.44 \Leftrightarrow 0.25 \leq 0.38 \leq u_{k+1} \leq 0.44 \leq 0.5$

Alors : $\frac{1}{4} \leq u_{k+1} \leq \frac{1}{2}$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

b) Démontrons que :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

On a : $\forall\, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$

En posant $x = u_n$, on obtient : $|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

c) Déduisons en que :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

Par itération, on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_{n-1} - \alpha|$$

$$|u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_{n-2} - \alpha|$$

....

....

....

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_0 - \alpha|$$

En multipliant membre à membre et après simplification, on obtient:

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$u_0 = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ alors : $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{4}$

Alors :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{4}$$

Alors : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

d) Déterminons la limite de (u_n)

$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ alors

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

e) Déterminons le plus petit entier p tel que : $|u_p - \alpha| \leq 10^{-2}$

$|u_p - \alpha| \leq 10^{-2} \Leftrightarrow (p+1)ln\frac{1}{4} \leq -2ln10$

$p \geq \frac{2ln10}{ln4} - 1 \geq 2.32$

D'où $p = 3$

Calcul intégral et équations différentielles

Exercice 1

$a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $b \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ avec $a \leq b$

1) Démontrons que, $\forall x \in [a;b], \frac{1}{cos^2a} \leq \frac{1}{cos^2x} \leq \frac{1}{cos^2b}$

$a \leq x \leq b \Rightarrow cosb \leq cosx \leq cosa$

$cos^2b \leq cos^2x \leq cos^2a$

Alors $\forall x \in [a;b], \frac{1}{cos^2a} \leq \frac{1}{cos^2x} \leq \frac{1}{cos^2b}$

2) Déduisons en que : $\frac{b-a}{cos^2a} \leq tanb - tana \leq \frac{b-a}{cos^2b}$

$\forall x \in [a;b], \frac{1}{cos^2a} \leq \frac{1}{cos^2x} \leq \frac{1}{cos^2b}$

$\int_a^b \frac{1}{cos^2a}dx \leq \int_a^b \frac{1}{cos^2x}dx \leq \int_a^b \frac{1}{cos^2b}dx$

$\left[\frac{x}{cos^2a}\right]_b^a \leq [tanx]_b^a \leq \left[\frac{x}{cos^2b}\right]_b^a$

D'où $\frac{b-a}{cos^2a} \leq tanb - tana \leq \frac{b-a}{cos^2b}$

Exercice 2

Calculons les intégrales suivantes

$A = \int_0^1 3xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{3}{2}e^{-x^2}\right]_0^1$ alors

$A = \frac{3}{2}(1 - e^{-1})$

$B = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{xln^2x}dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\frac{\frac{1}{x}}{ln^2x}\right)dx = \left[-\frac{1}{lnx}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$ alors $B = -2$

$C = \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \left[3\sqrt{x^2+4}\right]_0^{2\sqrt{3}}$ alors $C = 6$

$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxsin2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2cosxsin^2xdx = \left[\frac{2}{3}sin^3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

Alors $D = \frac{2}{3}$

$E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cos^2x}dx = \left[\frac{1}{cos}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ alors $E = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$

$F = \int_0^2 (2x+1)\sqrt{2x+1}dx = \left[\frac{1}{5}(2x+1)^2\sqrt{2x+1}\right]_0^2$

Alors $F = 5\sqrt{5} - \frac{1}{5}$

$G = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|sinx|dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -sinxdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx =$

$[cosx]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}}$ alors $G = 1 + 1 = 2$

Exercice 3

1) En utilisant une intégration par parties, calculons :

$A = \int_0^1 (2x+1)e^{2x}dx$

$\begin{cases} u(x) = 2x+1 \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$A = \left[\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}dx$

$A = \left[\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = [xe^{2x}]_0^1$

Alors $A = e^2$

$B = \int_1^{e^2} \sqrt{x}lnxdx$

$\begin{cases} u(x) = lnx \\ v'(x) = \sqrt{x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \end{cases}$

$B = \left[\frac{2}{3}xlnx\sqrt{x}\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{2}{3}\sqrt{x}dx$

$B = \left[\frac{2}{3}xlnx\sqrt{x} - \frac{4}{9}x\sqrt{x}\right]_1^{e^2}$ alors $B = \frac{4}{9}(2e^3 - 1)$

$C = \int_1^e \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$

$\begin{cases} u(x) = lnx \\ v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = 2\sqrt{x} \end{cases}$

$C = \left[2\sqrt{x}lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{x}}dx$

$C = \left[2\sqrt{x}lnx - 4\sqrt{x}\right]_1^e = 4 - 2\sqrt{e}$

$D = \int_e^{e^2} \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)dx$

$\begin{cases} u'x) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = \frac{-2}{x(x^2-1)} \\ v(x) = x \end{cases}$

$D = \left[xln\frac{x^2}{x^2-1}\right]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{2}{x^2-1}dx$

Or $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

$D = \left[xln\frac{x^2}{x^2-1}\right]_e^{e^2} + \int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$D = \left[xln\frac{x^2}{x^2-1}\right]_e^{e^2} + [\ln(x-1) - \ln(x+1)]_e^{e^2}$

$D = e^2\ln\left(\frac{e^4}{e^4-1}\right) - eln\left(\frac{e}{e-1}\right) + \ln(e^2-1) - \ln(e^2+1) - \ln(e-1) + \ln(e+1)$

Alors $D = 4e^2 - e - e^2\ln(e^4-1) + eln(e-1) - \ln(e^2+1) + 2\ln(e+1)$

2) $f(x) = \frac{x^3+3x^2+5x+}{x+1}$

a) Déterminons les réels a, b, c et d tels que : $\forall x \neq -1, f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$

En effectuant la division euclidienne, on obtient :

$\forall x \neq -1, f(x) = x^2 + x + 4 - \frac{2}{x+1}$

b) Déduisons en $\int_0^3 f(x)dx$

$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 + x + 4 - \frac{2}{x+1})dx$

$\int_0^3 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2\ln(x+1)\right]_0^3$

Alors $\int_0^3 f(x)dx = \frac{51}{2} - 4ln2$

3) En utilisant une double intégration par parties, calculons :

$A = \int_0^{\pi} x^2 cosx dx$

$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = cosx \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = sinx \end{cases}$

$A = [x^2 sinx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2xsinxdx$

$\begin{cases} u(x) = 2x \\ v'(x) = sinx \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = -cosx \end{cases}$

$A = [x^2 sinx]_0^{\pi} - [-2xcosx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2cosxdx$

$A = [x^2 sinx + 2xcosx - 2sinx]_0^{\pi}$ alors $A = -2\pi$

$B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos3xe^{2x}dx$

$\begin{cases} u(x) = cos3x \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = -3sinx \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$B = \left[\frac{1}{2}cos3xe^{2x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}sin3xdx$

$\begin{cases} u(x) = sin3x \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 3cos3x \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$B = \left[\frac{1}{2}cos3xe^{2x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{3}{4}e^{2x}sin3x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{9}{4}B$

$\frac{13}{4}B = -\frac{3}{4}(e^{\pi} + e^{-\pi})$ alors $B = -\frac{3}{13}(e^{\pi} + e^{-\pi})$

$C = \int_{-1}^{0}(1+x)^2 e^{-x}dx$

$\begin{cases} u(x) = (1+x)^2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 2(1+x) \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$C = [-(1+x)^2 e^{-x}]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} 2(1+x)e^{-x}dx$

$\begin{cases} u(x) = 2(1+x) \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$C = [-(1+x)^2 e^{-x}]_{-1}^{0} + [-2(1+x)e^{-x}]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} 2e^{-x}dx$

$C = [-(1+x)^2 e^{-x} - 2(1+x)e^{-x} - 2e^{-x}]_{-1}^{0}$

Alors $C = 2e - 5$

Exercice 4

$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

a) Calculons $f'(x)$ et déduisons en u_0

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

D'où $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right]_0^1$

D'où $u_0 = \ln(1+\sqrt{2})$

b) Calculons u_1

$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$

D'où $u_1 = \sqrt{2} - 1$

2) Montrons que (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente

On a : $u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{xx^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}dxx$

Or $\forall x \in [0;1], \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$ alors

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$

D'où (u_n) est décroissante

$\forall x \in [0;1], \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ alors $u_n \geq 0$

(u_n) est décroissante et minorée alors elle est convergente

3) Montrons que, $\forall x \in [0;1], 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$ et déduisons en que, $\forall n \geq 1, \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

$0 \leq x \leq 1$ alors $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$ et $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

D'où $\forall x \in [0;1], 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$ alors $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ et

$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$

$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}dx \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx$ alors $\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{2}}\right]_0^1 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

D'où $\forall n \geq 1, \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

4) Calculons la limite de (u_n)

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Alors : $\lim(u_n) = 0$

5) On pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx, \forall n \geq 3$

a) Vérifions que, $\forall n \geq 3, u_n + u_{n-2} = I_n$

$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $u_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$u_n + u_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$u_n + u_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}$

$u_n + u_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^{n-2}\sqrt{1+x^2}^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$

D'où $u_n + u_{n-2} = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx = I_n, \forall n \geq 3$

b) A l'aide d'une intégration par parties de I_n, montrons que, $\forall n \geq 3, nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$

$I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx, \forall n \geq 3$

$\begin{cases} u(x) = \sqrt{1+x^2} \\ v'(x) = x^{n-2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ v(x) = \frac{x^{n-1}}{n-1} \end{cases}$

$I_n = \left[\frac{x^{n-1}}{n-1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{(n-1)\sqrt{1+x^2}}dx$

$I_n = \frac{1}{n-1}\sqrt{2} - \frac{1}{n-1}u_n$

Or $u_n + u_{n-2} = I_n$

$(n-1)u_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2} - u_n$

$(n-1)u_n + u_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$

D'où $\forall n \geq 3, nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$

Exercice 5

1) Résolvons dans I les équations différentielles suivantes :

a) $xy' - 2 = 0$ et $I =]0; +\infty[$

$y' = \frac{2}{x}$ alors $y(x) = 2lnx + c$

b) $e^x y' - e^{-x} = 0$ et $I = \mathbb{R}$

$y' = e^{-2x}$ alors $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$

c) $2y'e^{-x} = e^{x-1} + e^{x+1}$ et $I = \mathbb{R}$

$y' = \frac{1}{2}(e^{2x-1} + e^{2x+1})$ et $I = \mathbb{R}$

Alors $y(x) = \frac{1}{4}(e^{2x-1} + e^{2x+1}) + c$

d) $2y'' + e^{2x} - e^{-2x} = 0$ et $I = \mathbb{R}$

$y'' = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ alors $y' = -\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c_1$

D'où $y(x) = -\frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{8}e^{-2x} + c_1x + c_2$

e) $2y'' = 1 + tan^2x$ et $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$y'' = \frac{1}{2}(1 + tan^2x)$ alors $y' = \frac{1}{2}tanx + c_1$

D'où $y(x) = -\frac{1}{2}\ln(cosx) + c_1x + c_2$

f) $y'' = (x-1)e^x$ et $I = \mathbb{R}$

$y' = \int(x-1)e^x dx + c_1$

$\begin{cases} u(x) = x-1 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$y' = (x-1)e^x - \int e^x dx + c_1 = (x-2)e^x + c_1$

$y(x) = \int(x-2)e^x dx + c_1x + c_2$

$\begin{cases} u(x) = x-2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$y(x) = (x-2)e^x - e^x + c_1x + c_2$

D'où $y(x) = (x-3)e^x + c_1x + c_2$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y' = -\frac{y}{2}$

$2y' + y = 0$ alors $y(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$

b) $y'\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$

$y(x) = ke^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}$

c) $9y'' - 64y = 0$

E_C : $9r^2 - 64 = 0$ alors $r = \frac{8}{3}$ ou $r = -\frac{8}{3}$

D'où $y(x) = Ae^{\frac{8}{3}x} + Be^{-\frac{8}{3}x}$

d) $2y'' + y = 0$

E_C: $2r^2 + 1 = 0$ alors $r = i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $r = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où $y(x) = Acos\frac{\sqrt{2}}{2}x + Bsin\frac{\sqrt{2}}{2}x$

e) $y'' - 2y' - 2y = 0$

E_C : $r^2 - 2r - 2 = 0$ alors $r = 1 + \sqrt{3}$ ou $r = 1 - \sqrt{3}$

D'où $y(x) = Ae^{(1+\sqrt{3})x} + Be^{(1-\sqrt{3})x}$

f) $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$

E_C: $2r^2 - 2\sqrt{2}r + 1 = 0$ alors $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où $y(x) = (Ax + B)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$

Exercice 6

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ $(E) : y'' + 2y' + 5y = 0$

E_C : $r^2 + 2r + 5 = 0$ alors $r = -1 + 2i$ ou $r = -1 - 2i$

D'où $y(x) = e^{-x}(Acos2x + Bsin2x)$

2) Déterminons la fonction qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$

$f'(x) = -e^{-x}(Acos2x + Bsin2x) + e^{-x}(-2Asin2x + 2Bcos2x)$

$f(0) = 1 \Rightarrow A = 1$

$f'(0) = -1 \Rightarrow -A + 2B = -1 \Rightarrow B = 0$

D'où $f(x) = e^{-x}cos2x$

3) On pose $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$

a) Démontrons que F est une primitive de f

$F'(x) = -\frac{1}{5}[f''(x) + 2f'(x)]$

Avec $f'(x) = e^{-x}(-2sin2x - cos2x)$

$f''(x) = -e^{-x}(-2sin2x - cos2x) + e^{-x}(-4cos2x + 2sin2x)$

$f''(x) = e^{-x}(4sin2x - 3cos2x)$

$F'(x) = -\frac{1}{5}e^{-x}(4sin2x - 3cos2x - 4sin2x - 2cos2x) = e^{-x}cos2x$

$F'(x) = e^{-x}cos2x = f(x)$

Alors F est une primitive de f

Explicitons $F(x)$

$F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$

$F'(x) = -\frac{1}{5}e^{-x}(-cos2x - 2sin2x + 2cos2x)$

D'où $F(x) = -\frac{1}{5}e^{-x}(cos2x - 2sin2x)$

b) Déduisons en le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)$

D'où $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{5}e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{5}$

Exercice 7

Partie A : $(E') : y'' + 2y' + y = 0$

1) Déterminons les solutions de (E')

E_C : $r^2 + 2r + 1 = 0$ alors $r = -1$

D'où $y(x) = (Ax + b)e^{-x}$

2) $(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

a) Vérifions que la fonction $h(x) = x^2e^{-x}$ est solution de (E)

h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$h'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$

$h''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - e^{-x}(2x - x^2) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$

$h''(x) + 2h(x) + h(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x} + 2(2x - x^2)e^{-x} + x^2e^{-x}$

$h''(x) + 2h(x) + h(x) = (2 - 4x + x^2 + 4x - 2x^2 + x^2)e^{-x}$

D'où $h''(x) + 2h(x) + h(x) = 2e^{-x}$

h est donc solution de (E)

b) Démontrons qu'une fonction g est solution de (E') si et seulement si $k = g - h$ est solution de (E)

k solution de (E) alors : $k'' + 2k + k = 0$

$g'' - h'' + 2g' - 2h' + g - h = 0$

$g'' + 2g' + g = h'' + 2h' + h$

Or $h''(x) + 2h(x) + h(x) = 2e^{-x}$

Alors $g'' + 2g' + g = 0$

D'où g est solution de (E')

c) Déterminons toutes les solutions de (E)

$k = g - h$ alors $g(x) = k(x) + h(x)$ est solution générale de (E)

Avec $k(x) = (Ax + B)e^{-x}$

D'où $g(x) = (Ax + B)e^{-x} + x^2e^{-x}$

d) Déterminons la solution f de (E) telle que : $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$

$f'(x) = Ae^{-x} - e^{-x}(Ax + B) + 2xe^{-x} + x^2e^{-x}$

$f(0) = 4 \Rightarrow B = 4$

$f'(0) = 0 \Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow A = B = 4$

D'où $f(x) = (4x + 4)e^{-x} + x^2e^{-x} = (x + 2)^2e^{-x}$

Partie B : $f(x) = (x + 2)^2e^{-x}$

1) Etudions les variations de f et traçons sa courbe

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x) = 2(x + 2)e^{-x} - (x + 2)^2e^{-x} = (2x + 4 - x^2 - 4x - 4)e^{-x}$

D'où $f'(x) = -x(x + 2)e^{-x}$

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et $]0; +\infty[$

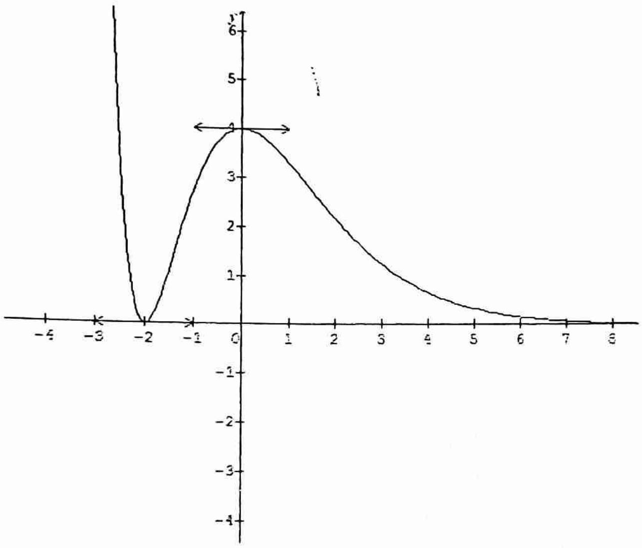
$\forall x \in]-2; 0[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]-2; 0[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2e^{-x} + 4xe^{-x} + 4e^{-x}) = 0$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0



2) Déterminons une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$f(x) = (x + 2)^2e^{-x}$

$\begin{cases} u(x) = (x + 2)^2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'x) = 2(x + 2) \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$F(x) = -(x + 2)^2e^{-x} + 2\int(x + 2)e^{-x}dx$

$\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$F(x) = -(x + 2)^2e^{-x} - 2(x + 2)e^{-x} - 2e^{-x}$

$F(x) = -e^{-x}(x^2 + 4x + 4 + 2x + 4 + 2)$

$F(x) = -e^{-x}(x^2 + 6x + 10)$

3) $I_n = \int_0^n f(t)dt$

a) Exprimons I_n

$I_n = [F(t)]_0^n = 10 - e^{-n}(n^2 + 6n + 10)$

I_n représente l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$

b) Etudions la convergence de la suite (I_n), puis déduisons en l'aire de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant : $x \geq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$

$\lim_{n\to+\infty} I_n = 10$ alors (I_n) converge vers 10, par conséquent l'aire demandée est $10\ cm^2$

Exercice 8

$(E) : f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 6x^2 + 5x$

1) $g(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminons a, b et c pour que g soit solution de (E)

$g'(x) = 2ax + b$ et $g''(x) = 2a$

$2a - 4(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = 6x^2 + 5x$

$3ax^2 + x(-8a + 3b) + 2a - 4b + 3c = 6x^2 + 5x$

$\begin{cases} 3a = 6 \\ -8a + 3b = 5 \\ 2a - 4b + 3c = 0 \end{cases}$ alors $a = 2; b = 7$ et $c = 8$

D'où $g(x) = 2x^2 + 7x + 8$

2) $F = f - g$

a) Démontrons que si f est solution de (E) alors F est solution de $(E') : y'' - 4y' + 3y = 0$

$F = f - g \Rightarrow f = F + g$

$f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 6x^2 + 5x$ alors $F'' - 4F' + 3F + g'' - 4g' + 3g = 6x^2 + 5x$

Or $g'' - 4g' + 3g = 6x^2 + 5x$

$F'' - 4F' + 3F + (6x^2 + 5x) = 6x^2 + 5x$

Alors $F'' - 4F' + 3F = 0$

D'où F est solution de (E')

b) Réciproquement, établissons que si F est solution de (E') alors f vérifie : $f = F + g$

$F'' - 4F' + 3F = 0$ et $g'' - 4g' + 3g = 6x^2 + 5x$

Alors $F'' - 4F' + 3F = 0 + g'' - 4g' + 3g = 6x^2 + 5x$

D'où f vérifie : $f = F + g$

c) Résolvons dans $\mathbb{R}$ (E')

$(E') : y'' - 4y' + 3y = 0$

$E_C : r^2 - 4r + 3 = 0$ alors $r = 3$ ou $r = 1$

D'où $F(x) = Ae^{3x} + Be^x$

d) Déduisons en les solutions de (E)

$f = F + g$ alors $f(x) = Ae^{3x} + Be^x + 2x^2 + 7x + 8$

Exercice 9

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E) : y'' - 4y = 0$

$E_C : r^2 - 4 = 0$ alors $r = 2$ ou $r = -2$

Alors $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$

2) Démontrons que $(E') : y'' - 4y = 4x^2 - 8x + 2$ admet une solution P, fonction du 2nd degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors $P'(x) = 2ax$ et $P''(x) = 2a$

$2a - 4ax^2 - 4bx - 4c = 4x^2 - 8x + 2$

$-4ax^2 - 4bx + 2a - 4c = 4x^2 - 8x + 2$

Alors $a = -1; b = 2$ et $c = -\frac{1}{2}$

D'où $g(x) = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$

3) Démontrons qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si $f - P$ est solution de (E)

$f'' - 4f - (P'' - 4P) = 0$ alors $f'' - 4f = P'' - 4P$

Or $P'' - 4P = 4x^2 - 8x + 2$

Alors $f'' - 4f = 4x^2 - 8x + 2$

Alors f est solution de (E')

4) Déduisons en les solutions de (E'), puis celle qui vérifie : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

$f - P = y(x)$ alors $f(x) = P(x) + y(x)$

D'où $f(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} - x^2 + 2x - \frac{1}{2}$

$f'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x} - 2x + 2$

$f(0) = 0$ alors $A + B = \frac{1}{2}$

$f'(0) = 1$ alors $A - B = -\frac{1}{2}$

$\begin{cases} A + B = \frac{1}{2} \\ A - B = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A = 0$ et $B = \frac{1}{2}$

D'où $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} - x^2 + 2x - \frac{1}{2}$

Exercice 10

Partie A :

$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{|x^2-4|}\right)$

1) Déterminons l'ensemble de définition de f et écrivons $f(x)$ sans le symbole valeur absolue

$f(x)$ existe si et seulement si : $x \neq 0$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right), si\ x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[\\ \ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right), si\ x \in]-2; 0[\cup]0; 2[\end{cases}$

2) Montrons que f est une fonction paire et que, $\forall x \in D_f, f$ peut se mettre sous la forme : $f(x) = lnx^2 - ln|x^2 - 4|$

$\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = \ln\left(\frac{(-x)^2}{|(-x)^2-4|}\right) =$

$\ln\left(\frac{x^2}{|x^2-4|}\right) = f(x)$

D'où f est une fonction paire

$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{|x^2-4|}\right) = lnx^2 - ln|x^2 - 4|$

3) Calculons les limites de f aux bornes de D_f et précisons les asymptotes éventuelles de (C_f)

- $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = ln1 = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C_f)
- $\lim_{-2^-} f = \lim_{-2^+} f = +\infty$ alors la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à (C_f)
- $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C_f)
- $\lim_{2^-} f = \lim_{2^+} f = +\infty$ alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à (C_f)

4) Calculons $f'(x)$, étudions son signe puis dressons le tableau de variation de f

$f(x) = lnx^2 - ln|x^2 - 4|$

f est dérivable sur D_f et on a :

$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{2x^2-8-2x^2}{x(x^2-4)}$

D'où $f'(x) = -\frac{8}{x(x^2-4)}, \forall x \in D_f$

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; 2[, f'(x) > 0$

$\forall x \in]-2; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) < 0$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0

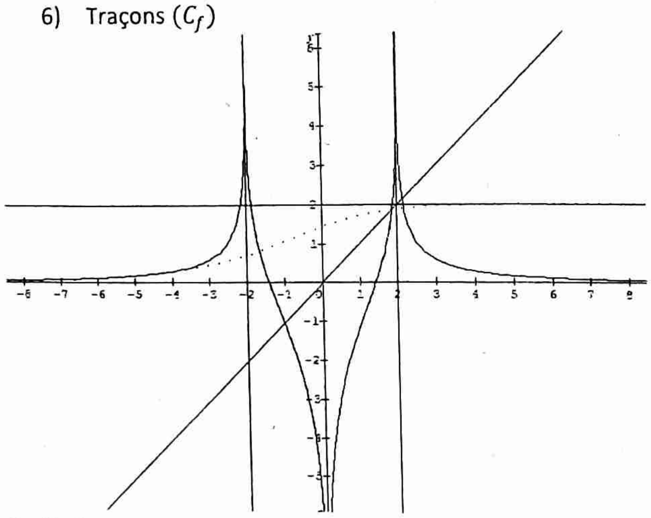
5) Déterminons une équation de la tangente au point d'abscisse $\sqrt{2}$

$(T) : y = f'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + f(\sqrt{2})$

Avec $f(\sqrt{2}) = 0$ et $f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

D'où $(T) : y = 2x\sqrt{2} - 4$

6) Traçons (C_f)



Partie B :

1) $h(x) = f(x)$ sur $]0; 2[$

a) Montrons que h est une bijection de $]0; 2[$ sur un intervalle k à préciser

h est continue et strictement croissante sur $]0; 2[$, h est donc une bijection de $]0; 2[$ vers $k = h(]0; 2[) = \mathbb{R}$

b) Dressons le tableau de variation de h^{-1} bijection réciproque de h

x	$-\infty$	$+\infty$
	$0 \nearrow$	2

c) Représentons graphiquement les courbes (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ (voir figure précédente)

2) Calculons $h^{-1}(0)$ et $(h^{-1})'(0)$

$f(\sqrt{2}) = h(\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow h^{-1}(0) = \sqrt{2}$

$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'\circ h^{-1}(0)} = \frac{1}{h'[h^{-1}(0)]} = \frac{1}{h'(\sqrt{2})}$

D'où $(h^{-1})'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Partie C :

1) Montrons que, $\forall x \in]2;+\infty[$, $f(x) = 2lnx - \ln(x-2) - \ln(x+2)$

$\forall x \in]2;+\infty[, f(x) = lnx^2 - \ln(x^2-4)$

$f(x) = 2lnx - \ln(x-2)(x+2)$

D'où $\forall x \in]2;+\infty[, f(x) = 2lnx - \ln(x-2) - \ln(x+2)$

2) A l'aide d'une intégration par paries, calculons $\int_1^x lntdt$

$\begin{cases} u(t) = lnt \\ v'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = t \end{cases}$

$\int_1^x lntdt = [tlnt]_0^x - \int_1^x dt = [tlnt - t]_0^x$

D'où $\int_1^x lntdt = xlnx - x + 1$

3) Soit F la primitive de $x \mapsto lnx$ qui prend la valeur -1 en 1

De ce qui précède, on déduit : $F(x) = xlnx - x + c$

$F(1) = -1 \Leftrightarrow -1 + c = -1$

Alors $c = 0$

D'où $F(x) = xlnx - x$

4) On pose $F(x) = xlnx - x$. Montrons que $G(x) = 2F(x) - F(x-2) - F(x+2)$ est une primitive de f sur $]2;+\infty[$

$G'(x) = 2F'(x) - F'(x-2) - F'(x+2)$ avec $F'(x) = lnx$

$\Rightarrow G'(x) = 2lnx - \ln(x-2) - \ln(x+2)$

D'où $G'(x) = f(x)$ alors G est une primitive de f

5) $A(a)$ est l'aire de la partie du plan vérifiant : $\begin{cases} a \le x \le 4 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

a) Calculons $A(a)$ et déterminons sa limite en 2

$A(a) = \int_a^4 f(x)dxua = 4\int_a^4 f(x)dx\ cm^2$

$A(a) = 4[2xlnx - (x-2)\ln(x-2) - (x+2)\ln(x+2)]_a^4$

D'où $A(a) = 4(10ln2 - 6ln3 - 2alna + (a+2)\ln(a+2) + (a-2)\ln(a-2))cm^2$

$\lim_{a\to2} A(a) = 4(14ln2 - 6ln3)$

b) Interprétation graphique de cette limite

$4(14ln2 - 6ln3)$ représente l'aire de la partie du plan vérifiant : $\begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

Exercice 11

I) $f(x) = ln\left|\frac{1}{e^x-1}\right|, \forall x \in \mathbb{R}^*$

1) Etudions les variations de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $f'(x) = \frac{-e^x}{e^x-1}$

$\forall x \in]-\infty;0[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$

$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

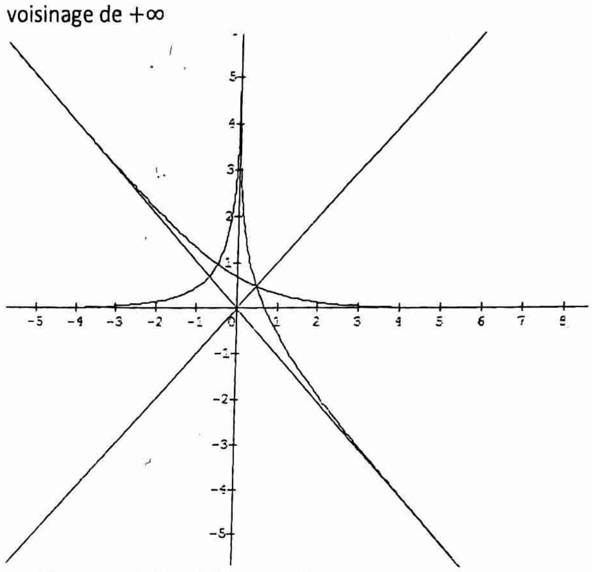
- $\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty}(-ln|e^x - 1| = ln1 = 0$
- $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty}(-\ln|e^x - 1|) = -\infty$
- $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = +\infty$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	−
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$

2) Traçons la courbe (C)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + x) = 0$ alors la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$



3) Soit $g(x) = f(x), \forall x \in]0;+\infty[$

$g(x) = ln\frac{1}{e^x-1} = -\ln(e^x - 1)$

a) Montrons g est une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera

D'après le tableau de variation de f, g est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, g est donc une bijection de $]0;+\infty[$ vers $g(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$

b) Explicitons $\varphi(x) = g^{-1}(x)$

$g(x) = y \Leftrightarrow -\ln(e^x - 1) = y$

$\Rightarrow x = \ln(e^{-y} + 1)$

D'où $\varphi(x) = \ln(e^{-x} + 1), \forall x \in \mathbb{R}$

4) $f_a(x) = ln\left|\frac{1}{e^x-a}\right|, \forall a \in \mathbb{R}^*$ et de courbe (C_a)

a) Montrons que (C_{-1}) est le symétrique de (γ) par rapport au point O

$f_{-1}(x) = ln\left|\frac{1}{e^x+1}\right|$ et $-\varphi(-x) = ln\left|\frac{1}{e^x+1}\right|$

Alors $f_{-1}(x) = -\varphi(-x)$

D'où (C_{-1}) et (γ) sont symétriques par rapport à l'origine du repère

b) Démontrons qu'il existe un vecteur $\vec{u}(\alpha;\beta)$ tel que : $t_{\vec{u}}((C_a)) = (C_b)$

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C_a) \Leftrightarrow y = -ln|e^x - a|$

$t_{\vec{u}}(M) = M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x' = x+\alpha\\ y' = y+\beta\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x = x'-\alpha & (1)\\ y' = -ln|e^x - a| + \beta & (2)\end{cases}$

(1) Dans (2) $\Rightarrow y' = -ln|e^{x'-\alpha} - a| + \beta$

Alors $y' = -ln|e^{x'} - ae^{\alpha}| + \alpha + \beta$ (3)

$M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \in (C_b) \Leftrightarrow y' = -ln|e^{x'} - b|$ (4)

(2) et (4) donnent : $\begin{cases}ae^{\alpha} = b\\ \alpha+\beta = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e^{\alpha} = \frac{b}{a} > 0\\ \alpha = -\beta\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha = ln|b| - ln|a| = ln\frac{b}{a}\\ \beta = ln|a| - ln|b| = ln\frac{a}{b}\end{cases}$

D'où $\vec{u}\begin{pmatrix}ln\frac{b}{a}\\ ln\frac{a}{b}\end{pmatrix}$

II) $\varphi(x) = \ln(e^{-x}+1)$

1) Etudions les variations de φ

$\varphi(x) = g^{-1}(x) = f^{-1}(x)$

D'après ce qui précède, on déduit :

φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation de φ

x	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$ $\searrow$	0

(γ) et (C_g) sont symétriques par rapport à la première bissectrice (voir figure ci-dessus)

2) $A(\lambda)$ est l'aire de la partie du plan vérifiant : $\begin{cases}0 \le x \le \lambda\\ 0 \le y \le \varphi(x)\end{cases}$

a) On a : $\forall u \in [0;+\infty[, u - \frac{u^2}{2} \le \ln(1+u) \le u$

Encadrons $A(\lambda)$ et montrons que $A(\lambda) \le 1$

Posons $u = e^{-x}$ alors : $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \le \varphi(x) \le e^{-x}$

En intégrant membre à membre, on obtient :

$\frac{3}{4} - e^{-\lambda} + \frac{e^{-2\lambda}}{4} \le A(\lambda) \le 1 - e^{-\lambda}$

On remarque : $-e^{-\lambda} < 0$ alors $1 - e^{-\lambda} \le 1$

D'où $A(\lambda) \le 1$

b) Montrons que $A(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$ et déduisons en un encadrement de $A(\lambda)$

$\varphi(x) > 0$ alors $A(\lambda)$ est une fonction strictement croissante

De plus $A(\lambda)$ est majorée par 1 donc $A(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$.

$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{3}{4} - e^{-\lambda} + \frac{e^{-2\lambda}}{4}\right) = \frac{3}{4}$ et $\lim_{\lambda\to+\infty}(1 - e^{-\lambda}) = 1$

D'où $\frac{3}{4} \le limA(\lambda) \le 1$

3) $\begin{cases}u_0 \text{ donné}\\ u_{n+1} = \varphi(u_n)\end{cases}$

a) Montrons que si la suite (u_n) a une limite alors cette est $l = ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc si (u_n) a une limite l alors l est un point fixe de φ

$\varphi(x) = x \Leftrightarrow \ln(e^{-x}+1) = x$

$e^{-x} + 1 = e^x \Leftrightarrow -e^{2x} + e^x + 1 = 0$

$-X^2 + X + 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$

Alors $\varphi(x) = x \Leftrightarrow x = ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

D'où (u_n) a une limite $l = ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) Montrons que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \ge 0$, puis que pour tout réel positif x, $|\varphi'(x)| \le \frac{1}{2}$

- $u_1 = \varphi(u_0) = \ln(e^{-u_0}+1) \ge ln1 = 0$ alors $u_1 \ge 0$
- Supposons que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \ge 0$
- Vérifions que $u_{n+1} \ge 0$

$u_{n+1} = \varphi(u_n) = \ln(e^{-u_n}+1) \ge ln1 = 0$ alors $u_{n+1} \ge 0$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \ge 0$

On a : $\varphi'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-1}{e^x+1}$

$\forall x \ge 0, e^x \ge 1$ et $1 + e^x \ge 2$

$1 + e^x \ge 2$ alors $\frac{1}{1+e^x} \le \frac{1}{2}$

D'où $\forall x \ge 0, |\varphi'(x)| \le \frac{1}{2}$

c) Montrons que, pour tout entier naturel n, $\left|u_{n+1} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right|$, puis que déduisons en la limite de (u_n)

$|\varphi'(x)| \le \frac{1}{2}$, $\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \ge 0$, $u_n \ge 0$ alors l'inégalité des accroissements finis, version valeur absolue, à φ entre $\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et u_n donne :

$\left|\varphi(u_n) - \varphi\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right|$

Or $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ et $\varphi\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

D'où $\left|u_{n+1} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right|$

On a : $\left|u_{n+1} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right|$

Par itération, on a :

$\left|u_n - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|u_{n-1} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right|$

$\left|u_{n-1} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|u_{n-2} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right|$

....

....

....

$\left|u_1 - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|u_0 - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right|$

Par produit et simplification, on a :

$\left|u_n - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|u_0 - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right|$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

D'où $\lim(u_n) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Exercice 12

Partie A : $(E): y'' - 2y' + y = x - 2$

1) Déterminons une fonction affine h qui soit solution de (E)

Soit $h(x) = ax + b \Rightarrow h'(x) = a$ et $h''(x) = 0$

$ax - 2a + b = x - 2 \Rightarrow a = 1$ et $b = 0$

D'où $h(x) = x$

2) Démontrons que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E') : $y'' - 2y' + y = 0$

$g'' - 2g' + g - (h'' - 2h' + h) = 0$

Or $h'' - 2h' + h = x - 2$

$g'' - 2g' + g - (x - 2) = 0$

Alors $g'' - 2g' + g = x - 2$

D'où g est solution de (E)

3) Soit f solution de (E) telle que : $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$

(E') : $y'' - 2y' + y = 0$

E_C : $r^2 - 2r + 1 = 0$ alors $r = 1$

Alors $y(x) = (Ax + B)e^x$

$g - h = y(x) \Rightarrow g(x) = y(x) + h(x)$

D'où $g(x) = (Ax + B)e^x + x$

$f'(x) = Ae^x + (Ax + B)e^x + 1$

$f(0) = -2 \ \Rightarrow B = -2$

$f'(0) = 0 \ \Rightarrow A + B + 1 = 2 \ \Rightarrow A = 1$

D'où $f(x) = (x - 2)e^x + x$

Partie B : $f(x) = (x - 2)e^x + x$

1) $g(x) = (x - 1)e^x + 1$

a) Calculons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - e^x + 1) = 1$
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

b) Calculons $g'(x)$ et dressons le tableau de variation de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = e^x + (x - 1)e^x$

D'où $g'(x) = xe^x$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$1 \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

c) Déduisons en le signe de g

g est minorée sur $\mathbb{R}$ par 0, alors :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$

2) Calculons les limites de f

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - 2x^x + x) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left((x - 2)e^x + x\right) = +\infty$

3) Démontrons que la droite $(D): y = x$ est asymptote à (C)

$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - 2e^x) = 0$

D'où la droite (D) est asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

Etudions la position relative de (C) par rapport à (D)

$f(x) - x = (x - 2)e^x < 0$ alors (C) est en dessous de (D)

4) Calculons $f'(x)$ et dressons le tableau de variation de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x) = e^x + (x - 2)e^x + 1 = (x - 1)e^x + 1$

D'où $f'(x) = (x - 1)e^x + 1 = g(x)$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

5) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que : $1{,}68 < \alpha < 1{,}69$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

$f(1{,}68) = -0{,}037$ et $f(1{,}69) = 0{,}003$

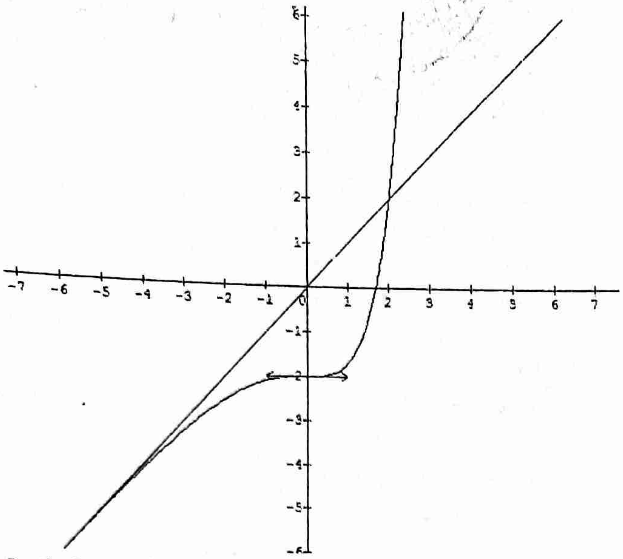
$f(1{,}68) \times f(1{,}68) < 0$ alors $1{,}68 < \alpha < 1{,}69$

6) Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}e^x + 1\right) = +\infty$

Alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (oy), au voisinage de $+\infty$

7) Traçons (C)



Partie C : $t < 0$

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculons $\int_t^0 (x-2)e^x dx$

$\begin{cases} u(x) = x-2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$\int_t^0 (x-2)e^x dx = [(x-2)e^x]_t^0 - \int_t^0 e^x dx = [(x-3)e^x]_t^0$

$\int_t^0 (x-2)e^x dx = -3 - (t-3)e^t$

2) Calculons l'aire de la partie du plan vérifiant : $\begin{cases} t \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq x \end{cases}$

$A(t) = -\int_t^0 (f(x) - x)dxua = -\int_t^0 (x-2)e^x dx\, ua$

D'où $A(t) = (3 + (t-3)e^t)\text{cm}^2$

3) Calculons la limite de $A(t)$ en $-\infty$

$\lim_{t\to-\infty} A(t) = \lim_{t\to-\infty}(3 + te^t - 3e^t)$

D'où $\lim_{t\to-\infty} A(t) = 3$

Exercice 13

I) $(E) : y'' - 2y' + y = 0$

1) Résolvons (E)

E_c : $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

D'où $y(x) = (Ax + B)e^x$

2) On considère les solutions de (E) dont la représentation graphique passe par le point $A(0; -1)$

a) Montrons que ces solutions s'écrivent sous la forme : $f_m(x) = (mx-1)e^x$

$y(0) = -1 \Rightarrow B = 1$

$y(x) = (Ax - 1)e^x$

En posant $A = m$, on obtient : $f_m(x) = (mx-1)e^x$

b) $m < 0$. Etudions les variations de f_m

f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'_m(x) = me^x + (mx-1)e^x = (m + mx - 1)e^x$

D'où $f'_m(x) = (mx + m - 1)e^x$

$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \frac{1}{m}$

$\forall x \in \left]-\infty; -1+\frac{1}{m}\right[, f'_m(x) > 0$ alors f_m est strictement croissante sur $\left]-\infty; -1+\frac{1}{m}\right[$

$\forall x \in \left]-1+\frac{1}{m}; +\infty\right[, f'_m(x) < 0$ alors f_m est strictement décroissante sur $\left]-1+\frac{1}{m}; +\infty\right[$

- $\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty}(mxe^x - e^x) = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty}(mx-1)e^x = -\infty$

Tableau de variation de f_m

x	$-\infty$		$-1+1/m$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(-1+1/m)$	$\searrow$	$-\infty$

II) $f(x) = (2x-1)e^x$

1) Etudions les variations de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f(x) = (2 + 2x - 1)e^x$

D'où $f(x) = (2x+1)e^x$

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$

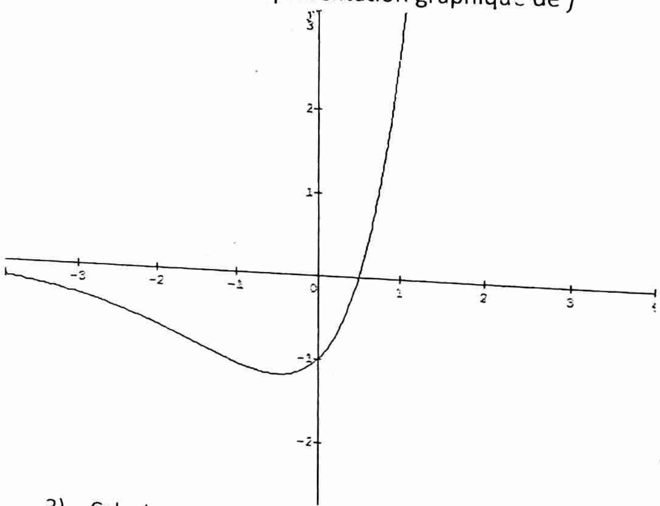
$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1{,}21$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Construisons la représentation graphique de f



3) Calculons l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{2}$ et $y = 0$

$A = -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dxua = -4\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(2x-1)\, e^x dx$

$\begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$A = -4\left([(2x-1)e^x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - [2e^x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\right) cm^2$

$A = -4\left(2e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}}\right) cm^2$

$A = -4\left(4e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}}\right) cm^2 \cong 3{,}49cm^2$

III) Soit h le restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

1) Montrons que h est une bijection de $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ sur un intervalle que l'on précisera

h est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, elle est donc une bijection de $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ sur $h\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) = [0; +\infty[$

2) Déterminons le sens de variation de h^{-1}, bijection réciproque de h

h^{-1} est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Problèmes

Problème 1

$f(x) = \frac{x^3+3x^2-4x-20}{2(x+3)}$

1) Déterminons l'ensemble de définition de f

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow x + 3 \neq 0$ alors : $x \neq -3$

$D_f =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$

2) Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -3^-} f(x) = \frac{-8}{0^-} = +\infty$
- $\lim_{x \to -3^+} f(x) = \frac{-8}{0^+} = -\infty$

3) Déterminons la fonction dérivée de f puis le sens de variation de f

f est dérivable sur D_f et on a : $f'(x) = \frac{(x+1)^2(x+4)}{(x+3)^2}$

$\forall x \in]-\infty; -4[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]-\infty; -4[$

$\forall x \in]-4; -3[\cup]-3; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f croit sur $]-4; -3[$ et sur $]-3; +\infty[$

4) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-4		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-4)$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

5) Démontrons qu'il existe les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x+3}$

En effectuant une division euclidienne, on obtient : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 - \frac{4}{x+3}$

6) Déduisons en que la courbe (C) admet une courbe asymptote (P)

Soit $(P): y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

$\lim_{x \to \infty}(f(x) - y) = \lim_{x \to \infty}\left(-\frac{4}{x+3}\right) = 0$ alors la parabole (P) est dite courbe asymptote à (C).

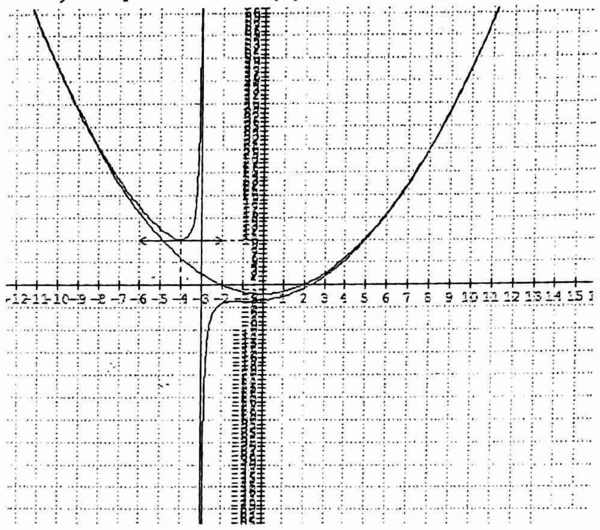
Etudions la position de (C) par rapport à (P).

$f(x) - y = -\frac{4}{x+3}$

$\forall x \in]-\infty; -3[, f(x) - y > 0$ alors (C) est au dessus de (P)

$\forall x \in]-3; +\infty[, f(x) - y < 0$ alors (C) est en dessous de (P)

7) Traçons la courbe (C)



Problème 2

$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1) Précisons les ensembles de définition de f et de g

$D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = [0; +\infty[$

2) $h(x) = g \circ f(x)$

a) donnons l'expression de h en fonction de x

$h(x) = g[f(x)] = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+4}}$

b) Déterminons l'ensemble de définition de h

$D_h =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

c) Limites de h aux bornes de D_h

- $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 1$
- $h(-2) = h(2) = 0$

3) Calculons $f'(x), g'(x)$ puis déduisons en $h'(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

La fonction h est dérivable sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ et on a : $h'(x) = f'(x) \times g'[f(x)] = \frac{8x}{(x^2+4)^2\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+4}}}$

4) Tableau de variation de h

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$u'(x)$	$-$		$+$	
$u(x)$	$1 \searrow 0$		$0 \nearrow 1$	

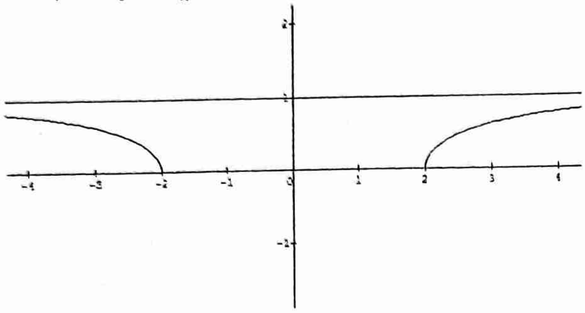
5) Continuité et dérivabilité de h en 2 et en -2

$\lim_{x\to -2} h(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = 0$ alors h est continue en 2 et en -2

$\lim_{x\to -2} \frac{h(x)-h(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+4}}}{x+2} = +\infty$ et

$\lim_{x\to 2} \frac{h(x)-h(-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+4}}}{x-2} = +\infty$ alors h n'est pas dérivable en -2 et en 2

6) Traçons C_h



7) $u(x) = h(x)$ sur $[2; +\infty[$

a) Montrons que u est une bijection de $[2; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

La fonction u est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$ alors u est une bijection de $[2; +\infty[$ vers $J = u([2; +\infty[) = [0; 1[$

b) Dressons le tableau de variation de u^{-1}

x	0	1
	$2 \nearrow$	$+\infty$

c) Traçons la courbe de u^{-1}

Problème 4

$f(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|, \forall x \in]-1; +\infty[$

1) Etudions le signe de l'expression $\frac{1-x}{1+x}$

$\forall x \in]-1; 1[, \frac{1-x}{1+x} > 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[, \frac{1-x}{1+x} < 0$

Ecrivons $f(x)$ sans le symbole valeur absolue

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x}, si\ x \in]-1; 1[\\ \frac{-1+x}{1+x}, si\ x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

Déduisons en l'existence d'asymptotes à (H)

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$ alors la droite d'équation y=1 est asymptote horizontale à (H)
- $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation x=-1 est asymptote verticale à (H).

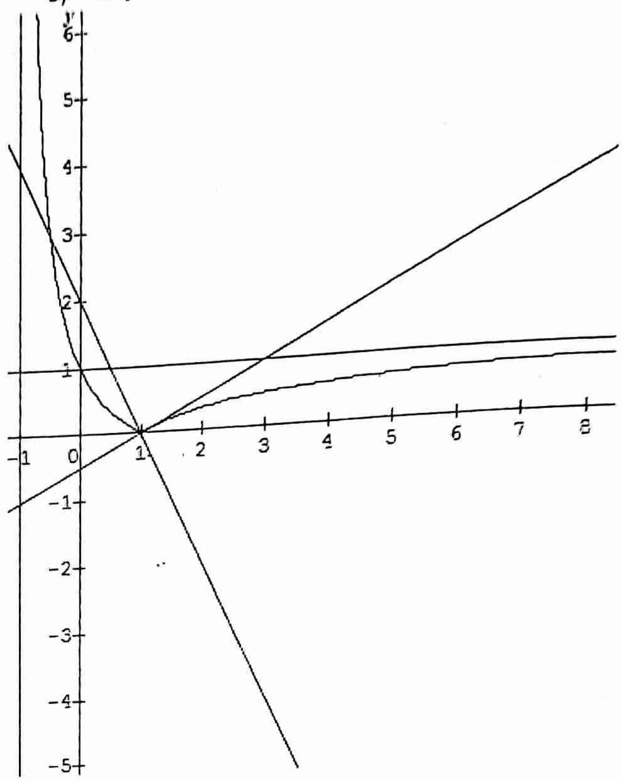
2) Dérivabilité de f en 1

- $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

D'où f n'est pas dérivable en 1 et le graphe (H) admet deux demi tangentes en 1 d'équations respectives :

$T_g : y = -\frac{1}{2}(x-1)$ et $T_d : y = \frac{1}{2}(x-1)$

3) Traçons (H)



Problème 5

1) $g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right)$

a) Etudions le sens de variation de g. Calculons sa limite en $+\infty$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$

b) Déduisons en que, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$

g est strictement croissante et est majorée par 0, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$

2) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}$

a) Calculons les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = lim \frac{-1+\frac{3}{x}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$

b) Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'^{(x)} = g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $\mathbb{R}$

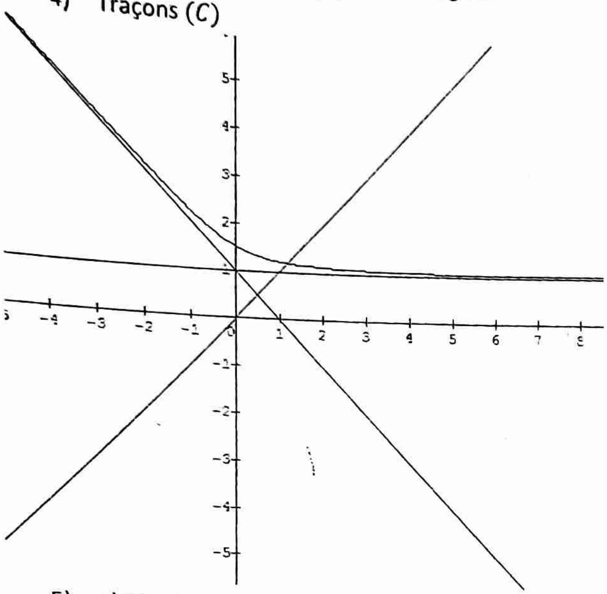
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 1

3) $(\Delta) : y = 1$ et $(\Delta') : y = -x + 1$

Démontrons que les droites (Δ) et (Δ') sont asymptotes à (C)

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ alors $(\Delta) : y = 1$ et asymptote horizontale à (C) en $+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right) = 0$ alors $(\Delta') : y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

4) Traçons (C)



5) a) Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on précisera

f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]1; +\infty[$

Soit f^{-1} la bijection réciproque de f

- f^{-1} est définie sur $]1; +\infty[$
- f^{-1} est continue et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$
- Tableau de variation de f^{-1}

x	1 $\qquad$ $+\infty$
	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

b) calculons $f(0)$ et déduisons en $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$

$f(0) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{f'\circ f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{f'(0)} = -2$

c) Traçons $(C_{f^{-1}})$

$(C_{f^{-1}})$ et (C) sont symétriques par rapport à la première bissectrice

Problème 7

Partie I : $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Etudions les variations de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = 3(x+1)(x-1)$

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, g'(x) > 0$ alors g croît sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$

$\forall x \in]-1; 1[, g(x) < 0$ alors g décroît sur $]-1; 1[$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

2) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$, elle est une bijection de $]1; +\infty[$ vers $]-6; +\infty[$. De plus $0 \in]-6; +\infty[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; +\infty[$

Donnons un encadrement de α à 10^{-1} près

$g(2) \times g(3) < 0$ alors $2 < \alpha < 3$

2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
-	-	+	+	+	+	+	+	+	+

Alors $2{,}1 < \alpha < 2{,}2$

3) Déduisons en le signe de g suivant les valeurs de x

$\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

Partie 2 : $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

1) Déterminons $f'(x)$ et vérifions que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ et on a : $f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

2) Déduisons le signe de $f'(x)$ et dressons le tableau de variation de f

$f'(x)$ est du signe de $xg(x)$, alors :

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]\alpha; +\infty[, f'(x) > 0$

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; \alpha[, f'(x) < 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		0		1		$2,15$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$f(2,15)$	↗	$+\infty$

Avec $\alpha \cong 2,15$

3) a) déterminons les réels a, b, c et d tels que :

$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$

En effectuant une division, on obtient :

$f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$

b) Déduisons en que (C_f) admet une asymptote oblique (D)

Soit $(D) : y = x + 2$

$\lim_{x\to\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2-1} = 0$ alors la droite $(D) : y = x + 2$ est asymptote oblique à (C_f)

c) Etudions la position de (C_f) par rapport à (D)

$f(x) - y = \frac{x+2}{x^2-1}$

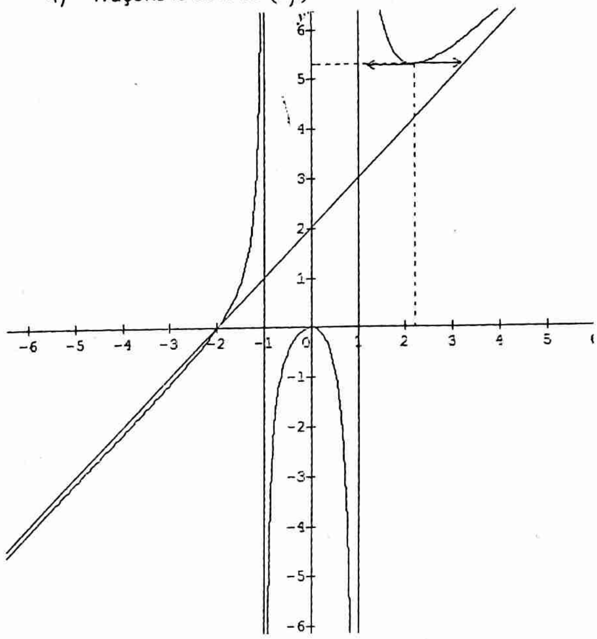
$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]-1; 1[, f(x) - y < 0$ alors (C_f) est en dessous de (D)

$\forall x \in]-2; -1[\cup]1; +\infty[, f(x) - y > 0$ alors (C_f) est au dessus de (D)

d) Donnons les équations des asymptotes à (C_f), parallèles à l'axe (yy')

Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ ont asymptotes verticales à (C_f)

4) Traçons la courbe (C_f)



Problème 8

$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

Partie A :

1) Etudions les variations de f

f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et on a : $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f croit sur $]-\infty; 0[$ et sur $]2; +\infty[$

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; 2[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]0; 1[$ et sur $]1; 2[$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

2) a) Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C)

$\lim_{x\to\infty}(f(x) - y) = \lim\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$ alors (Δ) est asymptote oblique à (C).

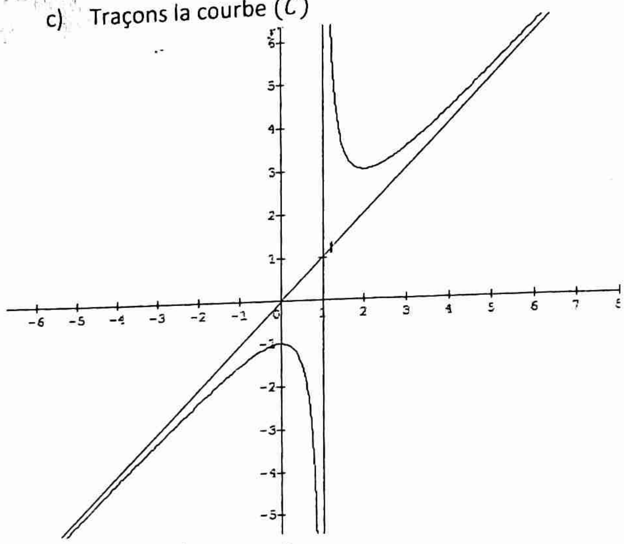
b) Démontrons que le point $I(1 ; 1)$ est un centre de symétrie de (C).

On a : $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

$f(2-x) + f(x) = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 2$

D'où $I(1; 1)$ est un centre de symétrie de (C)

c) Traçons la courbe (C)



Partie B : soit $(D_m) : y = -3x + m$

1) Démontrons que les abscisses des points d'intersection de (C) et de (D_m) sont racines de l'équation : $4x^2 - (4 + m)x + 1 + m = 0$

$(C) \cap (D_m) \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1}{x-1} = -3x + m$

$x^2 - x + 1 = -3x^2 + 3x + mx - m$

D'où $4x^2 - (4 + m)x + 1 + m = 0$

2) Déterminons, suivant les valeurs de m, le nombre des points d'intersection de (C) et de (D_m)

$4x^2 - (4 + m)x + 1 + m = 0$

$\Delta = m^2 - 8m$

Si $m \in]-\infty; 0[\cup]8; +\infty[, \Delta > 0$ alors (C) et (D_m) se coupent en deux points

Si $m \in]0; 8[, \Delta < 0$ alors (C) et (D_m) ne se coupent pas

Si $m = \{0; 8\}$, $\Delta = 0$ alors (C) et (D_m) se coupent en un seul point.

Partie C : soit $\gamma > 1$ et (Δ_γ) la droite passant par I, de coefficient directeur γ

1) Vérifions que le point $A\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma-1}}; 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}}\right)$ est un point d'intersection de (C) et de (Δ_γ)

$(\Delta_\gamma) : y = \gamma(x-1) + 1$ et $(C) : y = x + \frac{1}{x-1}$

$$\begin{cases} y_A = \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma-1}}\right) + 1 = 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}} \\ y_A = 1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma-1}} + \sqrt{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}} \end{cases}$$

2) I est le centre de symétrie de (C)

a) Déterminons le deuxième B, intersection de (C) et (Δ_γ)

On a : $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_I - x_A = 1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma-1}} \\ y_B = 2y_I - y_A = 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}} \end{cases}$

D'où $B\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma-1}}; 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}}\right)$

b) Démontrons que les tangentes à (C) en A et en B sont parallèles

Il suffit de montrer que : $f(x_A) = f(x_B) = 2 - \gamma$

Problème 9

Partie A : $g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$

1) Etudions les variations de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2 - \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) = +\infty$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

3) Justifions que $0 < \alpha < 1$

$g(0) = -1$ et $g(1) = 2 - \sqrt{2}$

$g(0) \times g(1) < 0$ alors $0 < \alpha < 1$

Encadrement de α à 10^{-2} près

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
-	-	-	-	-	+	+	+	+	+

Alors : $0,5 < \alpha < 0,6$

0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,60
-	-	-	-	-	-	-	+	+	+

D'où : $0,57 < \alpha < 0,58$

4) Déduisons en le signe de g

$\forall\, x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

Partie B : $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$

1) Etudions f aux bornes de $\mathbb{R}$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = lim x\left(2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} - 1\right) = +\infty$

2) Démontrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

3) Déduisons en le signe de $f'(x)$ et dressons le tableau de variation de f

$\forall\, x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) < 0$

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) > 0$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$0,495$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$f(0,495)$	$\nearrow +\infty$

Avec $\alpha \cong 0,495$

4) Montrons les droites D_1 et D_2 sont asymptotes à (C).

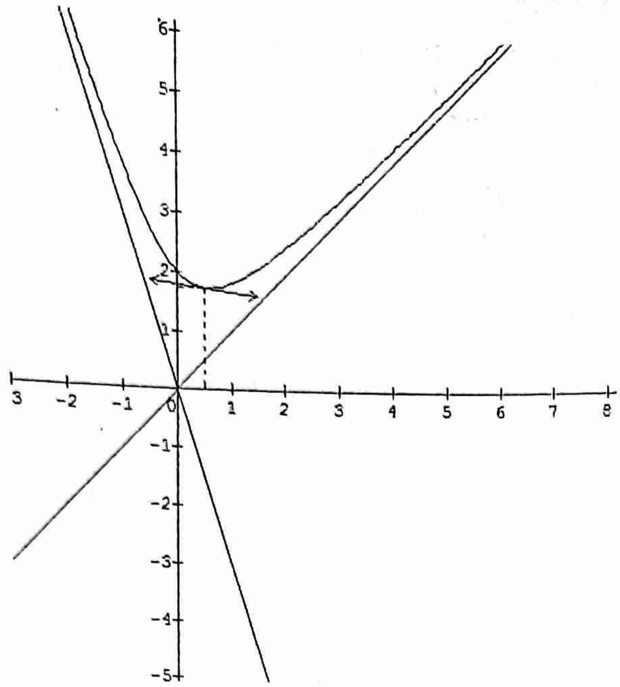
- $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}(2\sqrt{1+x^2} - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{2\sqrt{1+x^2}+2x} = 0$ alors la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty}(f(x) + 3x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{2\sqrt{1+x^2}-2x} = 0$ alors la droite d'équation $y = -3x$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

5) Montrons que $f(\alpha) = 3\alpha$

$g(\alpha) = 0$ alors $\sqrt{1+\alpha^2} = 2\alpha$

$f(\alpha) = 2\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha = 4\alpha - \alpha = 3\alpha$

6) Traçons (C)



Problème 11

$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

$\begin{cases} OI = 4\ cm \\ OJ = 2\ cm \end{cases}$

1) Etudions la continuité de f

$x \mapsto \sqrt{|x|}$ et $x \mapsto 4x^2 - 1$ sont continues sur ℝ alors f est continue sur ℝ comme composée et somme des fonctions continues sur ℝ

2) Etudions la dérivabilité de f en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{2}$

- $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(-\frac{1}{2}\right)}{x + \frac{1}{2}} = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2|2x-1|}{\sqrt{|4x^2-1|}}\right) = \infty$ alors f n'est pas dérivable en $-\frac{1}{2}$ par conséquent (C) admet au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ une demi tangente verticale (à distinguer à gauce et droite)
- $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2|2x+1|}{\sqrt{|4x^2-1|}}\right) = \infty$ alors f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$ par conséquent (C) admet au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ une demi tangente verticale (à distinguer à guache et à droite)

Calculons la dérivée de f sur chaque intervalle où elle est dérivable

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{4x^2 - 1}, si\ x \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ x + \sqrt{1 - 4x^2}, si\ x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

f est dérivable sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ et on a :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2-1}+4x}{\sqrt{4x^2-1}}, si\ x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ \frac{\sqrt{1-4x^2}-4x}{\sqrt{1-4x^2}}, si\ x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[\end{cases}$$

3) En supposant les équivalences suivantes :

a) $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

b) $\sqrt{1 - 4x^2} - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{5}}\right]$

Etudions le signe de $f'(x)$

$\forall\, x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2\sqrt{5}}; \frac{1}{2}\right[, f'(x) < 0$

$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{5}}\right] \cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, f'(x) > 0$

4) Calculons $\lim_{x \to -\infty}(f(x) + x)$ et $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - 3x)$

- $\lim_{x \to -\infty}(f(x) + x) = lim \frac{1}{2x - \sqrt{4x^2-1}} = 0$ alors la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$
- $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - 3x) = lim \frac{1}{-2x - \sqrt{4x^2-1}} = 0$ alors la droite d'équation $y = 3x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

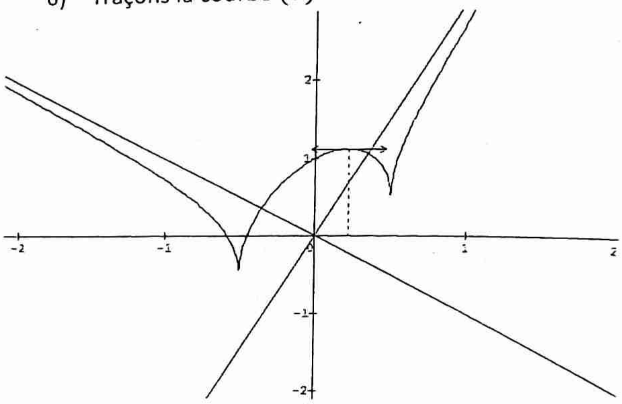
5) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim x\left(1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$

Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$0{,}2236$		$0{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-0{,}5$	↗	$1{,}12$	↘	$0{,}5$	↗	$+\infty$

6) Traçons la courbe (C)



7) Soit $h(x) = f(x)$ sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

a) Montrons que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations

h est continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, alors elle réalise une bijection de $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ vers $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, par conséquent h admet une fonction réciproque notée h^{-1}, définie et strictement sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

b) Déterminons l'expression de $h^{-1}(x)$

$f(x) = y \Leftrightarrow x + \sqrt{4x^2 - 1} = y \Rightarrow 3x^2 + 2xy - y^2 - 1 = 0$

$\Delta = 4(4y^2 + 3)$

$x_1 = \frac{-y-\sqrt{4y^2+3}}{3}$ et $x_2 = \frac{-y+\sqrt{4y^2+3}}{3} \notin \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

D'où $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[, h^{-1}(x) = -\frac{x+\sqrt{4x^2+3}}{3}$

c) Calculons $\lim_{xx\to+\infty}(x + h^{-1}(x))$ et déduisons en que Γ et (C_h) ont même asymptote

$\lim_{xx\to+\infty}(x + h^{-1}(x)) = \lim\left(\frac{-1}{2x+\sqrt{4x^2-1}}\right) = 0$

D'où la droite d'équation $y = -x$ est une asymptote commune aux courbes Γ et (C_h)

d) Traçons Γ

Γ et (C_h) sont symétriques par rapport à la première bissectrice

e) Calculons $h^{-1}(0)$ et déterminons une équation de la tangente à Γ au point de coordonnées $(0; h^{-1}(0))$

$h^{-1}(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'\circ h^{-1}(0)} = \frac{1}{h'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = -\frac{1}{3}$

$(T) : y = -\frac{1}{3}(x-0) - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

Problème 13

Partie 1 : $g(x) = \frac{1+x^2}{3x^2-1}, \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

1) Etudions g et traçons sa courbe représentative

- Dérivée et sens de variation

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ comme quotient des fonctions dérivables et :

$g'(x) = \frac{(1+x^2)'(3x^2-1)-(1+x^2)(3x^2-1)'}{(3x^2-1)^2}$

D'où $g'(x) = \frac{-8x}{(3x^2-1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$

- Limites

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{3}$, $\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}^+} g(x) = +\infty$

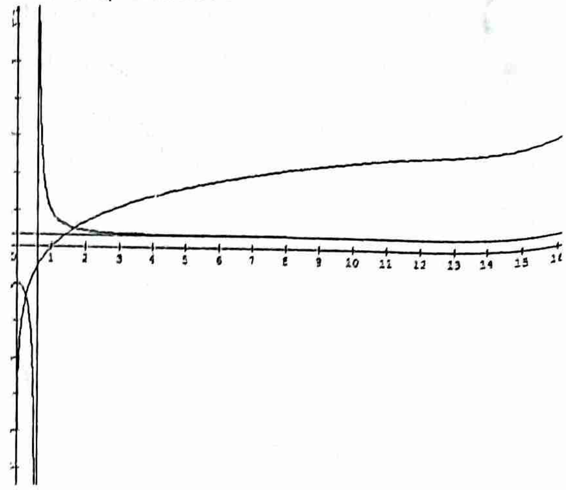
Les droites d'équations respectives $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $y = \frac{1}{3}$ sont respectivement asymptotes verticale et horizontale à la courbe représentative de la fonction g

- Tableau de variation

Avec $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.6$

x	0	0.6	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1/3$

- Courbe représentative



2) Traçons dans le même graphique la courbe représentative da la fonction $x \mapsto lnx$ (voir fig)

Tableau de variation de $x \mapsto lnx$

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	$+$
lnx	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3) $h(x) = lnx - g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

a) Etudions les variations de h

- Dérivée et sens de variation

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ comme somme, quotient et composée des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ et :

$h'(x) = \frac{1}{x} - g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{8x}{(3x^2-1)^2}$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}, h'(x) > 0$ alors h croit sur $\left]0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$

- Calculs des limites

$\lim_{x\to0^+} h(x) = -\infty$; $\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}^-} h(x) = +\infty$; $\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}^+} h(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

Les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sont des asymptotes verticales à la courbe représentative de la fonction h.

- Tableau de variation de h

x	0		0.6		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Montrons qu'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que : $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$ et $h(x_1) = h(x_2) = 0$

- h est continue et strictement croissante sur $\left]0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$, elle réalise une bijection de $\left]0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ vers $\mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe $x_1 \in \left]0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ tel que : $h(x_1) = 0$
- De manière analogue, on peut montrer qu'il existe $x_2 \in \left]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$ tel que : $h(x_2) = 0$

c) Déterminons le signe de h suivant les valeurs de x

D'après le tableau de variation de h et de $h(x_1) = h(x_2) = 0$, on déduit :

$\forall\, x \in]0; x_1[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}; x_2\right[, h(x) < 0$

$\forall\, x \in \left]x_1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup]x_2; +\infty[, h(x) > 0$

Partie 2 : $f(x) = \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$; $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$

1) Calculons $f'(x)$ et montrons que, $\forall\, x \neq \frac{\sqrt{3}}{3}, f'(x) = \frac{(1-3x^2)h(x)}{(x^2+1)^3}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et quotient des fonctions dérivables et :

$$f'(x) = \frac{(x\ln x)'(x^2+1)^2 - x\ln x((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4}$$
$$= \frac{(\ln x + 1)(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1)x\ln x}{(x^2+1)^4}$$
$$= \frac{(\ln x + 1)(x^2+1) - 4x^2\ln x}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 3x^2\ln x + x^2 + 1}{(x^2+1)^3} = \frac{(1-3x^2)\left(\ln x - \frac{x^2+1}{3x^2-1}\right)}{(x^2+1)^3}$$

D'où $\forall\, x \neq \frac{\sqrt{3}}{3}, f'(x) = \frac{(1-3x^2)h(x)}{(x^2+1)^3}$

2) Déterminons la limite de f en $+\infty$ et la limite $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^3}}{\frac{(x^2+1)^2}{x^4}} = \frac{0}{1}$$

D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} = \frac{-\infty}{1}$$

D'où $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

3) Déduisons en les variations de f

$f'(x) = \frac{(1-3x^2)h(x)}{(x^2+1)^3}$ alors $f'(x)$ est du signe de $(1 - 3x^2)h(x)$ car $(x^2+1)^3 > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-3x^2)h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = x_1$ ou $x = x_2$

D'où $\forall\, x \in]0; x_1[\cup]x_2; +\infty[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]0; x_1[$ et $]x_2; +\infty[$

$\forall\, x \in \left]x_1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}; x_2\right[, f'(x) > 0$ alors f croit sur $\left]x_1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ et $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}; x_2\right[$

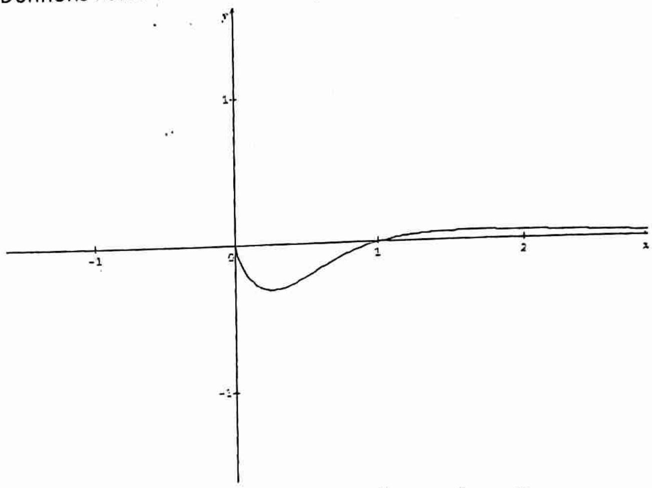
Pour $x = \{x_1; x_2\}; f'(x) = 0$ alors f est constante

Tableau de variation

x	0		$0,4$		$0,6$		$1,4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(0,4)$	$\nearrow$	$f(0,6)$	$\nearrow$	$f(1,4)$	$\searrow$	0

Avec $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0.6$

Donnons l'allure de la courbe C_f



4) Vérifions que, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$

$\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x(x^2+1)}$

D'où $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$

Déduisons en une primitive de $l(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$L(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Problème 14

$f(x) = \frac{x^2\ln x - \ln x}{x^2}$

1) Déterminons l'ensemble de définition de f et les limites aux bornes de D_f

$D_f =]0; +\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0+\infty}{0^+} = \frac{1}{0^+}(+\infty) = +\infty$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Etudions la continuité et la dérivabilité de f sur D_f et déterminons $f'(x)$

$f(x) = \frac{x^2\ln x - \ln x}{x^2} = \ln x - \frac{\ln x}{x^2}$

- La fonction $x \mapsto lnx$ est continue et dérivable sur $]0;\ +\infty[$
- La fonction $x \mapsto \frac{lnx}{x^2}$ est continue et dérivable comme rapport de fonctions continues et dérivables sur $]0;\ +\infty[$

f et alors continue et dérivable sur $]0;\ +\infty[$ comme somme des fonctions continues et dérivables sur $]0;\ +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x-2xlnx}{x^4} = \frac{1}{x} - \frac{1-2lnx}{x^3}$

D'où $f'(x) = \frac{x^2-1+2lnx}{x^3}$, $\forall\, x \in\ ]0;\ +\infty[$

3) $g(x) = x^2 - 1 + 2lnx$, $\forall\, x \in\ ]0;\ +\infty[$

Etudions le sens de variation de g

g est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ comme somme des fonctions dérivables et :

$g'(x) = 2x + \frac{2}{x} = \frac{2x^2+2}{x}$, $\forall\, x \in\ ]0;\ +\infty[$

$\forall\, x \in\ ]0;\ +\infty[$, $g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$

Calculons $g(1)$ et déduisons en le signe de g suivant les valeurs de x

$g(1) = 0$

g est strictement croissante et s'annule en 1 sur $]0;\ +\infty[$, alors :

$\forall\, x \in\ ]0; 1[$, $g(x) < 0$

$\forall\, x \in\ ]1;\ +\infty[$, $g(x) > 0$

Pour $x = 1$, $g(x) = 0$

4) Dressons le tableau de variation de f

$f'(x) = \frac{x^2-1+2lnx}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$ alors f' est du signe de g

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

D'où le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) (C) est la courbe représentative de f et Γ celle de $x \mapsto lnx$

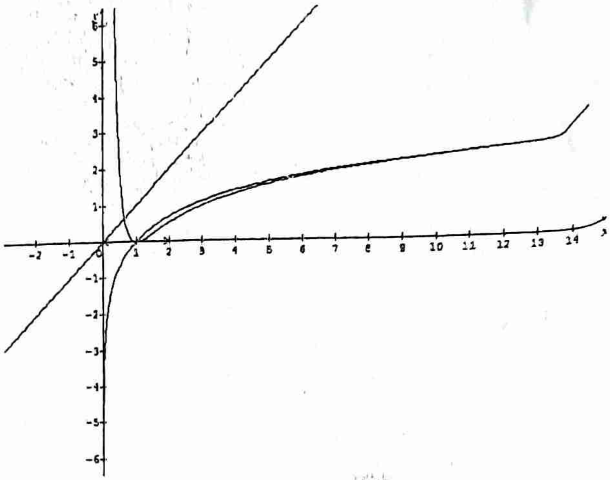
a) Etudions la position de (C) et Γ

$f(x) - lnx = -\frac{lnx}{x^2}$, $\forall\, x \in\ ]0; +\infty[$

$\forall\, x \in\ ]0; 1[$, $f(x) - lnx > 0$ alors (C) est au dessus de Γ

$\forall\, x \in\ ]1;\ +\infty[$, $f(x) - lnx < 0$ alors (C) est en dessous de Γ

b) Traçons (C) et Γ



6) Soit $h(x) = f(x)$ sur $[1;\ +\infty[$

a) Démontrons que h est une bijection de $[1;\ +\infty[$ vers J

h étant continue et strictement croissante sur $[1;\ +\infty[$ alors elle réalise une bijection de $[1;\ +\infty[$ vers $J = h([1;\ +\infty[) = [0;\ +\infty[$

b) Dressons le tableau de variation de h^{-1}

h^{-1} est strictement croissante sur $[0;\ +\infty[$

D'où le tableau de variation de h^{-1}

x	0		$+\infty$
	1	$\nearrow$	$+\infty$

c) Calculons $h(e)$

$h(e) = lne - \frac{lne}{e^2} = 1 - \frac{1}{e^2}$

déduisons en $(h^{-1})'\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$

$(h^{-1})'\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{h' \circ h^{-1}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)} = \frac{1}{h'(e)}$

D'où $(h^{-1})'\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) = \frac{e^3}{e^2+1}$

d) Construisons la courbe représentative de la fonction h^{-1}

Les deux courbes sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice : $(y = x)$

Problème 15

$f(x) = lnx - \frac{1}{lnx}$, $\forall\, x \in\ ]1;\ +\infty[$ et $\Gamma : y = lnx$

1) Etudions les variations de f et précisons les limites de f en 1 et en $+\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(lnx - \frac{1}{lnx}\right) = -\frac{1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(lnx - \frac{1}{lnx}\right) = +\infty$

f est dérivable sur $]1;\ +\infty[$ comme somme et quotient des fonctions dérivables et :

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-\frac{1}{x}}{ln^2x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xln^2x}$

d'où $f'(x) = \frac{ln^2x+1}{xln^2x}$, , $\forall x \in]1; +\infty[$

$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f croît sur $]1; +\infty[$

Tableau de variation de f

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2) Déterminer la limite de $f(x) - lnx$ en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - lnx) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{lnx}\right) = 0$$

Interprétation : la courbe Γ est asymptote à (C)

3) Précisons la position de (C) et Γ

$f(x) - lnx = -\frac{1}{lnx}$, $\forall x \in]1; +\infty[$

$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - lnx < 0$ alors (C) est en dessous de Γ

4) $a \in]1; +\infty[$

a) Démontrons que la tangente (T_a) à (C) au point d'abscisse a par l'origine du repère si et seulement si : $f(a) - af'(a) = 0$

(T_a) : $y = f'(a)(x - a) + f(a) = xf'(a) - af'(a) + f(a)$

(T_a) passe par l'origine si et seulement si son équation est du type : $y = xf'(a)$ si qui équivaut à : $f(a) - af'(a) = 0$

$g(x) = f(x) - xf'(x)$

b) Montrons que sur $]1; +\infty[$ les équations $g(x) = 0$ et $ln^3x - ln^2x - lnx - 1 = 0$ ont les memes solutons

$g(x) = f(x) - xf'(x) = \frac{ln^3x-ln^2x-lnx-1}{ln^2x}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{ln^3x-ln^2x-lnx-1}{ln^2x} = 0 \Leftrightarrow ln^3x - ln^2x - lnx - 1 = 0$ d'où l'équivalence

c) $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$

Montrons que u s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = 3(t-1)\left(t + \frac{1}{3}\right)$

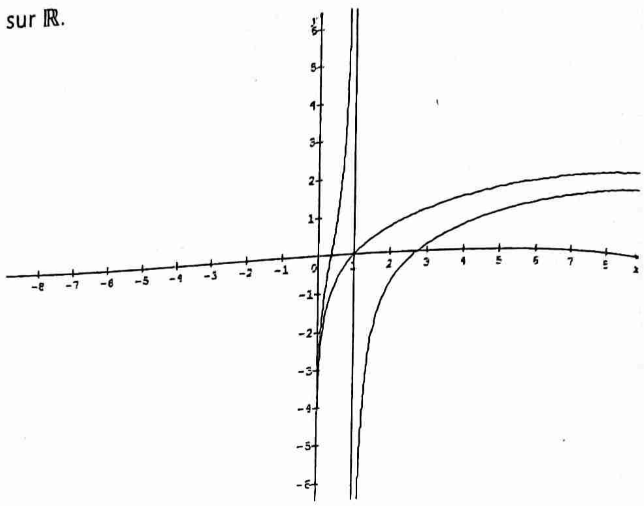
Tableau de variation de u

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation, on a :

u est une fonction continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$, elle réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers $]-2; +\infty[$. De plus $0 \in]-2; +\infty[$ alors l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution sur $]1; +\infty[$

Par conséquent la fonction u s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$.



Problème 16

Partie A :

1) Etudions le signe sur $\mathbb{R}$ de $4e^{2x} - 5e^x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, 4e^{2x} - 5e^x + 1 = 4(e^x - 1)\left(e^x - \frac{1}{4}\right)$

Le produit s'annule pour $x = 0$ ou $x = -2ln2$

$\forall x \in]-\infty; -2ln2[\cup]0; +\infty[, 4e^{2x} - 5e^x + 1 > 0$

$\forall x \in]-2ln2; 0[, 4e^{2x} - 5e^x + 1 < 0$

Pour $x = \{-2ln2; 0\}, 4e^{2x} - 5e^x + 1 = 0$

2) $\varphi(x) = lnx - 2\sqrt{x} + 2$

a) Déterminons D_φ et calculons les limites

$D_\varphi =]0; +\infty[$

$$\lim_{x\to0}\varphi(x) = \lim_{x\to0}(lnx - 2\sqrt{x} + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{lnx}{x^{\frac{1}{2}}} - 2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$

b) Etudions les variations de φ et dressons son tableau de variations

φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$, $\forall x \in]0; +\infty[$

$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

D'où $\forall x \in]0; 1[, \varphi'(x) > 0$ alors φ croit sur $]0; 1[$

$\forall x \in]1; +\infty[, \varphi'(x) < 0$ alors φ décroit sur $]1; +\infty[$

Pour $x = 1, \varphi'(x) = 0$ et φ est constante

Tableau de variation de φ

x	0		1		$+\infty$
		$+$	0	$-$	
	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

c) Déduisons en le signe de φ

φ est majorée par 0 sur $]0; +\infty[$

D'où $\forall\, x \in]0; +\infty[, \varphi(x) < 0$

Partie B :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{e^x}{2e^x - 1}, si\ x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x}lnx, si\ x > 0 \end{cases}$$

1) Déterminons le domaine de définition de f

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-ln2\} =]-\infty; -ln2[\cup]-ln2; +\infty[$

2) Calculons les limites de f aux bornes de D_f et étudions les branches infinies de (C)

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}(x + \frac{e^x}{2e^x - 1}) = -\infty$ (car $\lim_{x \to -\infty}(\frac{e^x}{2e^x - 1}) = 0$).
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}(1 - x + \sqrt{x}lnx) = -\infty$
- $\lim_{x \to -ln2^-} f(x) = \lim_{x \to -ln2^-}(\ x + \frac{e^x}{2e^x - 1}) = -\infty$
- $\lim_{x \to -ln2^+} f(x) = \lim_{x \to -ln2^+}(\ x + \frac{e^x}{2e^x - 1}) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{e^x}{2xe^x - x}\right) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty}(\frac{e^x}{2e^x - 1}) = 0$ alors la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{lnx}{\sqrt{x}}\right) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty}(f(x) + x) = \lim_{x \to +\infty}(1 + \sqrt{x}lnx) = +\infty$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = -x$
- $\lim_{x \to -ln2} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = -ln2$ est asymptote verticale à(C)

3) Etudions la position de (C) par rapport à son asymptote oblique.

$f(x) - y = \frac{e^x}{2e^x - 1}, \forall\, x < 0$

$\forall\, x \in\ ]-\infty; -ln2[, f(x) - y < 0$ alors (C) est en dessous de son asymptote oblique

$\forall\, x \in]-ln2; 0[, f(x) - y > 0$ alors (C) est au dessous de son asymptote oblique

4) Etudions la continuité de f en 0

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(\ x + \frac{e^x}{2e^x - 1}) = 1$ et

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}(1 - x + \sqrt{x}lnx) = 1$ alors la fonction f est continue en 0

Etudions la dérivabilité de f en 0 et interprétons graphiquement les résultats

- $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \left(1 - \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{2e^x - 1}\right) = 1 - 1 = 0$ alors f est dérivable à gauche en 0 et (C) admet à gauche en 0 une demi tangente horizontale
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(-1 + \frac{lnx}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en 0 et (C) admet à droite en 0 une demi tangente verticale

5) Déterminons f' et dressons le tableau de variation de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-ln2\}$ et :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{e^x(2e^x - 1) - 2e^x(e^x)}{(2e^x - 1)^2}, x \leq 0 \\ -1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}lnx + \frac{1}{x}\sqrt{x}, si\ x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4e^{2x} - 5e^x + 1}{(2e^x - 1)^2}, si\ x \leq 0 \\ \frac{lnx - 2\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}}, si\ x > 0 \end{cases}$$

En utilisant les résultats de la partie 1, on déduit :

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-2ln2$		$-ln2$		0		$+\infty\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1.9	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$

Problème 17

Partie 1 : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - lnx, \forall\, x \in]0; +\infty[$

1) Etudions les variations de g

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme et quotient des fonctions dérivables et :

$f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{x}\right), \forall\, x \in]0; +\infty[$

$\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{x} > 0, \forall\, x \in]0; +\infty[$

D'où $\forall\, x \in]0; +\infty[, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $]0; +\infty[$

2) Dressons le tableau de variation de g

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$

Tableau de variation de g

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

3) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

g est une fonction continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ alors elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $g(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$. De plus $0 \in g(]0; +\infty[)$ alors il existe un unique $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que : $g(\alpha) = 0$

4) Vérifions que $1 < \alpha < 2$ et donnons un encadrement de α à 0.1 près

$g(1) = 0,66$ et $g(2) = -0,09$

$g(1) \times g(2) < 0 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 2$

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	α
+	+	+	+	+	+	+	+	-	$g(\alpha)$

On déduit : $1.8 \leq \alpha \leq 1.9$

5) Déduisons le signe de g

D'après le tableau de variation de g et de $g(\alpha) = 0$, on déduit :

$\forall\, x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$

$\forall\, x \in\ ]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

Pour $x = \alpha, g(x) = 0$

Partie 2 : $f(x) = \frac{2lnx}{x^2+x}, \forall x \in]0; +\infty[$

1) Calculons les limites de f, puis interprétons graphiquement les résultats

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2lnx}{x^2+x} = \frac{1}{0^+}(-\infty) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C)
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2lnx}{x^2+x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2+x}.\frac{lnx}{x^2}\right) = 2\times 0 = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C)

2) Calculons $f'(x)$ et vérifions que :

$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme rapport des fonctions dérivables et :

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2+x)-2(2x+1)lnx}{(x^2+x)^2} = \frac{2(x+1)-2(2x+1)lnx}{(x^2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)\left(\frac{x+1}{2x+1}-lnx\right)}{(x^2+x)^2} = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}g(x), \forall x \in]0; +\infty[$$

Déduisons en les variations de f et le tableau de variation de f

f' est du signe de g car $\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} > 0, \forall x \in]0; +\infty[$

D'où $\forall x \in]0; \alpha[, f'(x) > 0$ alors f croit sur $]0; \alpha[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]\alpha; +\infty[$

Tableau de variation de f

x	0	1.85	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(1.85)$	↘ 0

Avec $\alpha \cong 1.85$

3) En utilisant $g(\alpha) = 0$, montrons que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} - ln\alpha = 0 \Leftrightarrow ln\alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$$

$$f(\alpha) = \frac{2ln\alpha}{\alpha^2+\alpha} = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)} = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$$

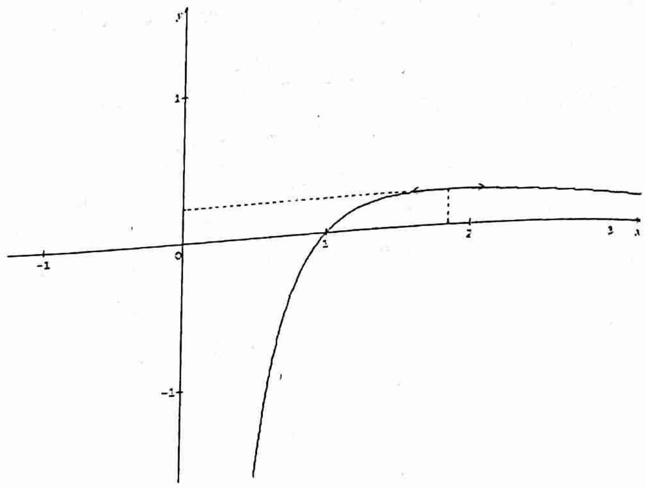
Donnons un encadrement de $f(\alpha)$

$1.8 \leq \alpha \leq 1.9$

$8.28 \leq \alpha(2\alpha+1) \leq 9.12$

Alors $0,2 \leq f(\alpha) \leq 0,24$

4) Traçons la courbe (C)



Problème 18

Partie 1: $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$

1) Calculons les limites de f

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$ et

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$

2) Déterminons $f'(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient des fonctions dérivables et :

$$f'(x) = \frac{9(x-1)^2(3x^2+1)-18x(x-1)^3}{(3x^2+1)^2} = \frac{9(x-1)^2(x^2+2x+1)}{(3x^2+1)^2}$$

D'où $f'(x) = \frac{9(x-1)^2(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

Etudions le signe de f' et dressons le tableau de variation de f

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et de plus $1 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 1$

Déduisons en que : $3 < \alpha < 4$

$3 < \alpha < 4 \Leftrightarrow f(3) < 1 < f(4)$

$0,85 < 1 < 2,89$

D'où : $3 < \alpha < 4$

Partie 2 : $g(x) = \frac{3(ln|x|-1)^3}{3ln^2|x|+1}$

1) a) Montrons que g est définie sur $\mathbb{R}^*$

g existe si et seulement si : $\begin{cases} x \neq 0 \\ 3ln^2|x| + 1 \neq 0 \ (évident) \end{cases}$

D'où $D_g = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

b) Montrons que g est la composée de f et d'une fonction h à préciser.

$g(x) = f \circ h(x) = f[h(x)] = \frac{3(ln|x|-1)^3}{3ln^2|x|+1}$

Or $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ alors $h(x) = ln|x|$

c) Etudions la parité de g

$\forall\, x \in D_g, -x \in D_g$ et $g(-x) = \frac{3(ln|-x|-1)^3}{3ln^2|-x|+1} = \frac{3(ln|x|-1)^3}{3ln^2|x|+1} = g(x)$

D'où g est une fonction paire

d) $D_E =]0;\, +\infty[$ et $k(x) = g(x), \forall\, x \in D_E$

$\forall\, x \in D_E, k(x) = \frac{3(lnx-1)^3}{3ln^2x+1}$

Calculons les limites de k

$k(x) = f \circ h(x)$

En utilisant la propriété des fonctions composée, on a :

$\lim_{x\to 0} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$

Etudions les branches infinies

$\lim_{x\to+\infty} \frac{k(x)}{x} =$

$lim \frac{3(lnx-1)^3}{x(3ln^2x+1)} \lim_{x\to+\infty} \frac{3lnx}{x} \times \frac{1-\frac{3}{lnx}+\frac{3}{ln^2x}-\frac{1}{ln^3x}}{3+\frac{1}{ln^2x}} = 3 \times 0 \times \frac{1}{3}$

Alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{k(x)}{x} = 0$

D'où C_k admet une branche infinie parabolique de direction celle de (OI)

2) a) calculons $k'(x)$ et étudions les variations de k sur D_E

$k(x) = f \circ h(x)$ alors $k'(x) = h'(x) \times f' \circ h(x) = \frac{1}{x} f'(lnx)$

D'où $k'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{9(lnx-1)^2(lnx+1)^2}{(3ln^2x+1)^2}$

$\forall\, x \in D_E, k'(x) > 0$ alors k croit sur D_E

Tableau de variation de k

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$k'(x)$	$+$
$k(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

b) Intersection de (C_k) avec (xx')

$C_K \cap (xx') \Leftrightarrow k(x) = 0 \Leftrightarrow lnx - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$

Alors $I(e; 0) = (C_K) \cap (xx')$

Signe de k sur D_E

$\forall\, x \in]0; e[, k(x) < 0$

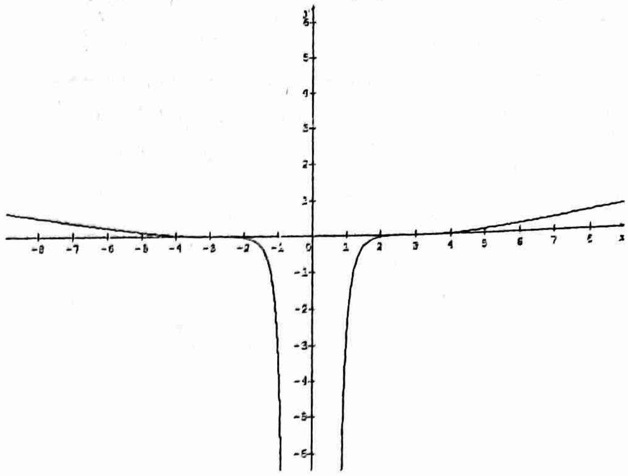
$\forall\, x \in]e;\, +\infty[, k(x) > 0$

Pour $x = e, k(x) = 0$

3) Montrons que k réalise une bijection de D_E sur J à préciser

k est une fonction continue et strictement croissante sur D_E alors k réalise une bijection de D_E sur $J = k(D_E) =]-\infty;\, +\infty[$

Constructions



Problème 20

$f(x) = -x + ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

1) Déterminons l'ensemble de définition de f

$f(x)$ existe si et seulement si : $\begin{cases} 1+x \neq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

Montrons que f est une fonction impaire et interprétons graphiquement le résultat

$\forall\, x \in D_f, -x \in D_f, f(-x) = x + ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = x - ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = -\left(-x + ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$

$\forall\, x \in D_f, f(-x) = -f(x)$

D'où f est nue fonction impaire et l'origine du repère est centre de symétrie de (C)

2) Ecrivons $f(x)$ sans le symbole valeur absolue

x	$-\infty$ $\quad$ -1	1	$+\infty$
$\|1+x\|$	$-1-x$ $\quad 0$	$1+x$	$1+x$
$\|1-x\|$	$1-x$	$1-x$ $\quad 0$	$-1+x$
$f(x)$	$-x+ln(\frac{1+x}{x-1})$	$-x+ln(\frac{1+x}{1-x})$	$-x+ln(\frac{1+x}{x-1})$

$f(x) = \begin{cases} -x + \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right), si\ x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\\ -x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), si\ x \in]-1; 1[\end{cases}$

3) Calculons les limites de f

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x + \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right) = +\infty + ln1 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to-1^{\pm}} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to1^{\mp}} f(x) = +\infty$

4) Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation

f est dérivable sur D_f comme somme, rapport et composée des fonctions dérivables et :

$f'(x) = -1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{-1+x^2+2}{1-x^2}$

D'où $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

f' est du signe de $1 - x^2$

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$

$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) > 0$ alors f croit sur $]-1; 1[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \searrow -\infty$	

5) Démontrons que $(D) : y = -x$ est asymptote à (C)

$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = ln1 = 0$

Alors la droite $(D) : y = -x$ est asymptote oblique à (C)

Etudions la position de (C) par rapport à (D)

$\forall x \in D_f, f(x) - y = ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

D'où $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[, \left|\frac{1+x}{1-x}\right| \in]0; 1[$ alors $f(x) - y < 0$ donc (C) est en dessous de (D)

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, \left|\frac{1+x}{1-x}\right| > 1$ alors $f(x) - y > 0$ donc (C) est au dessus de (D)

6) Précisons les autres asymptotes de (C)

$\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$ alors les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales à (C).

7) a) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions dont l'une est 0

- $f(0) = 0$ alors $0 \in]-1; 1[$ est solution de l'équation $f(x) = 0$
- $\forall x \in]-\infty; -1[$, f est continue et strictement décroissante alors f réalise une bijection de $]-\infty; -1[$ vers $\mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe $\beta \in]-\infty; -1[$ tel que : $f(\beta) = 0$
- De manière analogue, on peut montrer qu'il existe $\alpha \in]1; +\infty[$ tel que : $f(\alpha) = 0$

b) Montrons que $\alpha \in \left]\frac{3}{2}; 2\right[$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0.1$ et $f(2) = -0.9$ alors $f\left(\frac{3}{2}\right) \times f(2) < 0$ donc $\alpha \in \left]\frac{3}{2}; 2\right[$

Déduisons un encadrement de $\beta \in]-\infty; -1[$

f étant impaire, on déduit : $-2 < \beta < -\frac{3}{2}$

8) $h(x) = f(x), \forall x \in]-1; 1[$

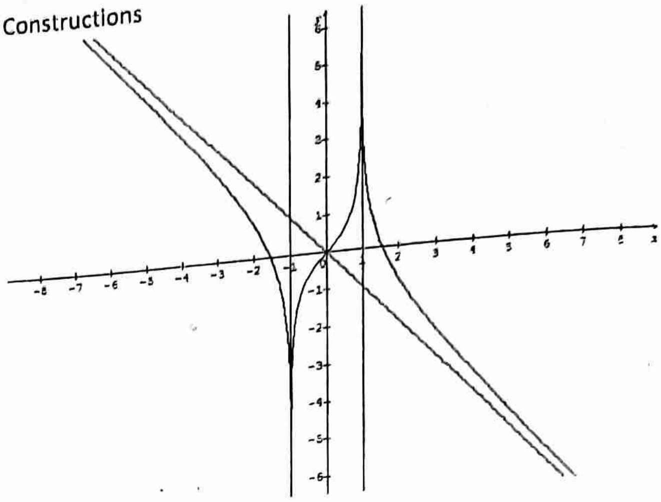
a) Montrons que h est une bijection de $]-1; 1[$ vers K

h est continue et strictement croissante sur $]-1; 1[$ alors h est une bijection de $]-1; 1[$ vers $k = h(]-1; 1[) = \mathbb{R}$

b) Tableau de variation de h^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
	$+$	
	$-1 \nearrow 1$	

Constructions



Problème 22

I) $f(x) = x + \frac{2lnx}{x}, \forall x \in]0; +\infty[$

1) $g(x) = x^2 + 2 - 2lnx, \forall x \in]0; +\infty[$

a) Etudions le sens de variation de g et calculons $g(1)$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x}, \forall x \in]0; +\infty[$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

D'où $\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $]0; 1[$

$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$ alors g croit sur $]1; +\infty[$

Pour $x = 1$, $g'(x) = 0$ alors g est constante

$g(1) = 3$

b) Déduisons le signe de g

g est minorée par 3 sur $]0; +\infty[$, alors :

$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$

2) a) Calculs des limites

$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}(x + \frac{2lnx}{x}) = \frac{1}{0^+}(-\infty) = -\infty$ et

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{2lnx}{x}\right) = +\infty + 0 = +\infty$

b) Sens de variation et tableau de variation de f

f est dérivable comme somme et quotient des fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et :

$f'(x) = 1 + \frac{\frac{2}{x}x-2lnx}{x^2} = 1 + \frac{2-2lnx}{x^2} = \frac{x^2+2-2lnx}{x^2}$

D'où $f'(xx) = \frac{g(x)}{x^2}, \forall x \in]0; +\infty[$

$f'(x)$ est du signe de g

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

c) Montrons que $(D) : y = x$ est asymptote à (C) et étudions la position de (C) par rapport à (D)

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2lnx}{x} = 0$ alors la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C)

$f(x) - y = \frac{2lnx}{x}$, $\forall x \in]0;\ +\infty[$ alors :

$\forall x \in]0; 1[, f(x) - y < 0$ alors (C) est en dessous de (D)

$\forall x \in]1;\ +\infty[, f(x) - y > 0$ alors (C) est au dessus de (D)

d) Déterminons les coordonnées du point $A \in (C)$ en lequel la tangente est parallèle à (D)

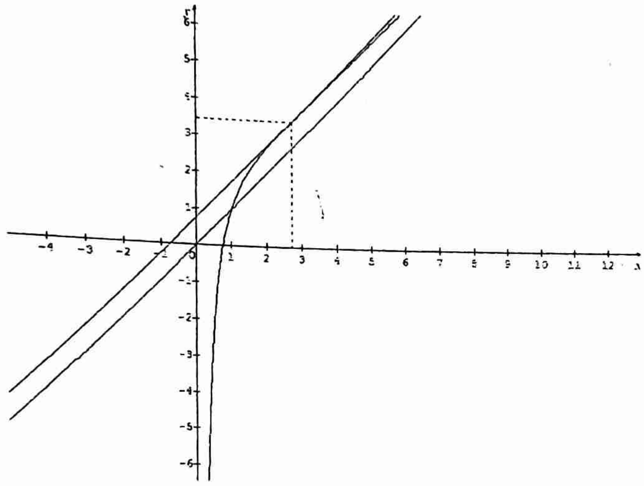
$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et $(D): y = x$

$(T) \parallel (D) \Leftrightarrow f'(x_0) = 1$

${x_0}^2 + 2 - 2lnx_0 = {x_0}^2 \Leftrightarrow lnx_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$

$f(e) = e + \frac{2}{e}$ alors $A\left(e; e + \frac{2}{e}\right)$

Constructions



3) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet $x_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$\left[\frac{1}{2}; 1\right] \subset]0;\ +\infty[$ alors :

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, f est continue et strictement croissante alors f est une bijection de $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ vers $f\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) = [-0{,}07; 1]$.

De plus $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$ alors il existe $x_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ tel que $f(x_0) = 0$

II) Soit $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

1) Montrons que x_0 est solution de $h(x) = x$

x_0 est solution de $h(x) = x$ si et seulement si : $f(x) = 0$ et $h(x) = x$ sont équivalentes

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{2lnx}{x} = 0 \Leftrightarrow lnx = -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Alors : $f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = x$, par conséquent x_0 est solution de $h(x) = x$

2) $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Montrons que, $\forall x \in I, h(x) \in I$

$h(x) \in I \Leftrightarrow h(I) \subset I$

$h(I) = [0{,}60; 0{,}88] \subset I$

D'où $\forall x \in I, h(x) \in I$

3) Calculons $h'(x)$ et $h''(x)$

h est dérivable sur I et :

$h'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}, \forall x \in I$

h'est dérivable sur I et :

$h''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = (-1 + x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}, \forall x \in I$

Démontrons que h' est décroissante sur I

$\forall x \in I, e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ et $x^2 - 1 \leq 0$ $sur\ I$ alors $h''(x) \leq 0$

D'où h' est décroissante sur I

Déduisons en que $\forall x \in I, -e^{-\frac{1}{2}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}}$

h est décroissante sur I alors :

$h'(1) \leq h'(x) \leq h'\left(\frac{1}{2}\right)$ avec $h'(1) = -e^{-\frac{1}{2}}$ et $h'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}}$

D'où $\forall x \in I, -e^{-\frac{1}{2}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}}$

4) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

- $u_0 = 1$ alors $u_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$
- Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$
- Vérifions que $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

D'après ce qui précède, on a : $h(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

En posant $x = u_n$, on a : $h(u_n) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ or : $h(u_n) = u_{n+1}$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

b) Montrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_n - x_0|$

$\forall x \in I, -e^{-\frac{1}{2}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}}$ alors $\forall x \in I, |h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$

Appliquons le TIAF, version valeur absolue à h entre u_n et x_0

$|h(u_n) - h(x_0)| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_n - x_0|$ or $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(x_0) = x_0$ alors:

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_n - x_0|$

c) Déduisons en, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_n - x_0|$

Par itération, on a :

$|u_n - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_{n-1} - x_0|$

$|u_{n-1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_{n-2} - x_0|$

$|u_{n-2} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_{n-3} - x_0|$

……………………………………

……………………………………

……………………………………

$|u_1 - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_0 - x_0|$

Par produit et simplification, on a :

$|u_n - x_0| \leq (e^{-\frac{1}{2}})^n\ |u_0 - x_0|$

$\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$ alors : $0 \leq |u_0 - x_0| \leq \frac{1}{2}$

D'où $\forall\ n\ \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}}$

Problème 25

$f(x) = \frac{x}{e^x - x}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

A) $g(x) = e^x - x - 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$

1) Etudions les variations de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, alors :

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $]-\infty; 0[$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, g'(x) > 0$ alors g croit sur $]0;\ +\infty[$

Pour $x = 0, g'(x) = 0$ et g est constante

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty\ \ et\ \ \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Déduisons en le signe de g

g est minorée par 0, alors :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$

2) Justifions que, $\forall\, x \in \mathbb{R}, e^x - x > 0$

Posons $h(x) = e^x - x$

$h'(x) = e^x - 1$

Tableau de variation de h

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

h est minorée par 1, alors :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^x - x > 0$

B) Etude de f

1) Calculons les limites de f

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x - x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{e^x - x}{x}} = \frac{1}{0-1}$

alors : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x - x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = \frac{1}{+\infty}$,

alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) Calculons $f'(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient des fonctions dérivables et :

$f'(x) = \frac{e^x - x - (e^x - 1)x}{(e^x - x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$

3) Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \frac{e^x}{(e^x - x)^2} > 0$ alors f' est du signe de $1 - x$

$f'(x) = 0\ \Leftrightarrow x = 1$, alors :

$\forall\, x \in]-\infty; 1[, g'(x) > 0$ alors g croit sur $]-\infty; 1[$

$\forall\, x \in]1;\ +\infty[, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $]1;\ +\infty[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-1 ↗	0.6	↘ 0

4) Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) en $x_0 = 0$

$(T) : y = f(0)(x - 0) + f(0)$, alors : $(T): y = x$

Etudions la position de (C) par rapport à (T)

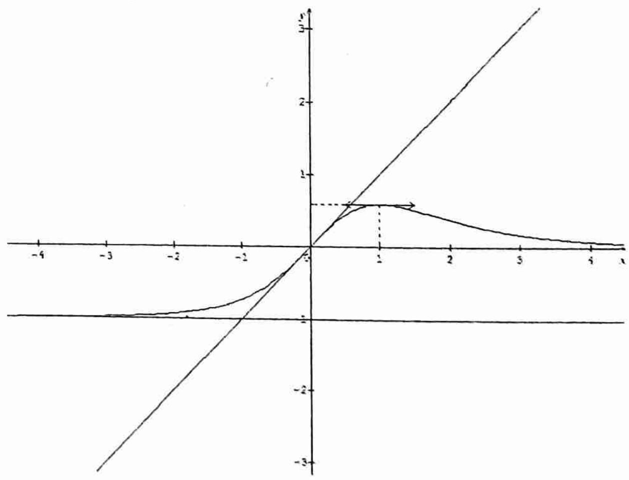
$f(x) - y = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{-xg(x)}{e^x - x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$		$+$
$-x$	$+$	0	$-$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, (f(x) - y) > 0$ alors (C) est au dessus de (T)

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, (f(x) - y) < 0$ alors (C) est en dessous de (T)

Constructions



Problème 27

A) $f(x) = x + \frac{2}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$

1) Montrons que f est une fonction impaire et étudions ses variations

$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -x - \frac{2}{x} = -\left(x + \frac{2}{x}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = -f(x)$ alors f est une fonction impaire

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^*$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

$\forall x \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f croit sur $]-\infty; -\sqrt{2}[$ et $]\sqrt{2}; +\infty[$

$\forall x \in]-\sqrt{2}; 0[\cup]0; \sqrt{2}[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]-\sqrt{2}; 0[$ et $]0; \sqrt{2}[$

Pour $x = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}, f'(x) = 0$ alors f est constante

Tableau de variation de f

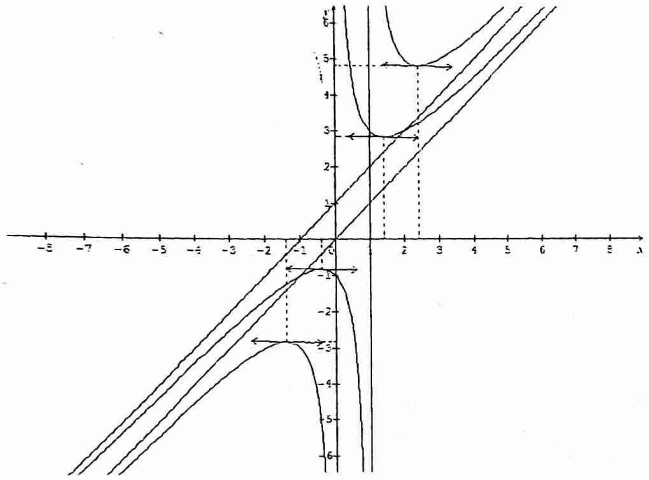
x	$-\infty$	-1.4		0		1.4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	‖	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-2.8	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2.8	↗ $+\infty$

2) a) Déterminons les branches infinies de (C_f)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$ alors la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f)

$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ (yy') est asymptote verticale à (C_f).

b) Constructions



3) $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

a) Montrons que, $\forall x \neq 1, g(x) = f(x-1) + 2$

$f(x-1) + 2 = x - 1 + \frac{2}{x-1} + 2 = x + 1 + \frac{2}{x-1}$

$f(x-1) + 2 = \frac{(x-1)(x+1)+2}{x-1} = \frac{x^2-1+2}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1}$

D'où $\forall x \neq 1, g(x) = f(x-1) + 2$

b) Déduisons en que $I(1,2)$ est un centre de symétrie de (C_f)

$g(x) = f(x-1) + 2 \Leftrightarrow (C_g) = t_{\vec{u}}(C_f)$ avec $\vec{u}(1,2)$ alors $I(1,2)$ est un centre de symétrie de (C_f) (f étant une fonction impaire)

4) Construisons (C_g) (voir figure)

5) Calculons l'aire de la partie du plan limitée par (C_g), les droites d'équations $x = 2, x = \alpha$ et $y = x + 1$

$A = \int_2^\alpha (g(x) - (x+1)dx = \int_2^\alpha \left(\frac{2}{x-1}\right) dx = [2\ln(x-1]_2^\alpha = 2\ln(\alpha - 1)\, ua$

Alors : $A = 2\ln(\alpha - 1)\,(cm^2)$

B) $h(x) = \frac{2e^x+2x-2}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}$

1) - Montrons que, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 2 + \varphi(x)$

$h(x) = \frac{2e^x+2x-2}{e^x} = \frac{2e^x}{e^x} + \frac{2x-2}{e^x} = 2 + \frac{2x-2}{e^x}$

D'où $h(x) = 2 + \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \frac{2x-2}{e^x}$

- Déterminons la limite de φ en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right) = \frac{2}{+\infty} - \frac{2}{+\infty}$

Alors $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$

- Etudions les variations de h et calculons $h(0)$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme rapport des fonctions dérivables et :

$h'(x) = \frac{(2e^x+2)e^x - e^x(2e^x+2x-2)}{e^{2x}} = \frac{4-2x}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$\forall x \in]-\infty; 2[, h'(x) > 0$ alors h croit sur $]-\infty; 2[$

$\forall x \in]2; +\infty[, h'(x) < 0$ alors h décroit sur $]2; +\infty[$

$h(0) = \frac{2e^0+2\times0-2}{e^0} = \frac{0}{1}$ alors $h(0) = 0$

2) – Montrons que la courbe (Γ) coupe son asymptote en un point que l'on précisera

$h(x) = 2 + \varphi(x)$

$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à (Γ)

$h(x) = 2 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $h(1) = 2$

D'où $A(1; 2) = (\Gamma) \cap (D)$

- Ecrivons une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 0

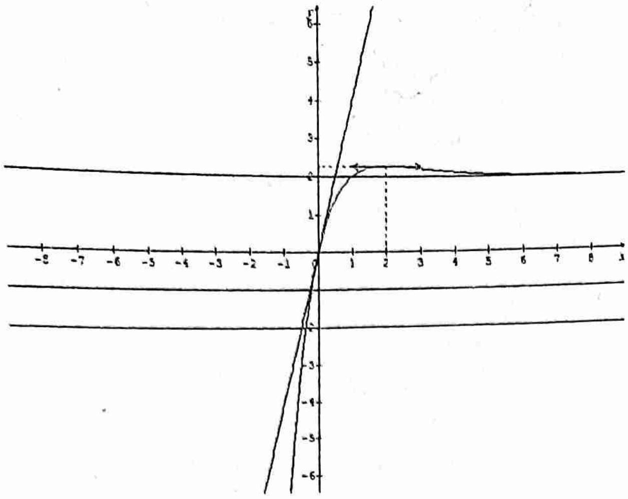
$(T) : y = h'(0)(x-0) + h(0)$ avec $h'(0) = 4$ et $h(0) = 0$

Alors : $(T) : y = 4x$

- Traçons (Γ)

Tableau de variation de h

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	$-\infty$ ↗	2.3	↘ 2



3) $(D_m): y = -m$

a) Traçons $(D_1): y = -1$ et $(D_2): y = -2$

b) Discutons suivant m le nombre et le signe des solutions de l'équation $E_m: (2+m)e^x + 2x - 2 = 0$

$E_m \Leftrightarrow h(x) = -m$

- Si $m = 0$, E_m admet une solution nulle
- Si $m = -2.3$, E_m admet une solution positive
- Si $m = -2$, E_m admet une solution positive
- Si $m \in]-2; 0[\cup]0; +\infty[$, E_m admet deux solutions de signes contraires
- Si $m \in]-2.3; -2[$, E_m admet deux solutions positives

Problème 29

$(E): e^x = \frac{1}{x}$

I) $f(x) = x - e^{-x}$

1) Démontrons que x est solution de (E) si et seulement si $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = x$ alors : $e^x = \frac{1}{x}$ d'où l'équivalence

2) a) Etudions le sens de variation de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(x) = 1 + e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ alors f croit sur $\mathbb{R}$

b) Déduisons en $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $f(\alpha) = 0$

c) Démontrons que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$f(1) = 1 - e^{-1} = 0.63$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} = -0.1$

$f(1) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

d) Etudions le signe de f sur $[0; \alpha]$

$0 \in]-\infty; \alpha]$ et $f(\alpha) = 0$ alors : $\forall x \in [0; \alpha], f(x) < 0$

II) $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$

1) Démontrons que $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$

$g(x) = x \Leftrightarrow 1 + x = x + xe^x \Leftrightarrow x - xe^x = 0 \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0$

D'où $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$

2) Déduisons en que α est solution de $g(x) = x$

$f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$ et α étant solution de l'équation $f(x) = 0$ alors α est aussi solution de l'équation $g(x) = x$ $(g(\alpha) = \alpha)$

3) Calculons $g'(x)$ et déduisons en que g est croissante sur $[0; \alpha]$

g est dérivable sur $[0; \alpha]$ et :

$g'(x) = \frac{1+e^x - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x(x-e^{-x})}{(1+e^x)^2}$

$\forall x \in [0; \alpha], g'(x) = \frac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$

$g'(x)$ est du signe de $-f(x)$, alors :

$\forall x \in [0; \alpha], g'(x) > 0$ alors g est croissante sur $[0; \alpha]$

III) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

1) Démontrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$

g croissante sur $[0; \alpha]$, $\alpha \in [0; 1]$ et $g(\alpha) = \alpha$

- $u_1 = g(u_0) = \frac{1}{2}$ alors $0 \le u_0 \le u_1 \le \alpha$
- Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$
- Vérifions que $0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$

On a : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ et g étant croissante, on a :

$g(0) \le g(u_n) \le g(u_{n+1}) \le g(\alpha)$

$\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha \Leftrightarrow 0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$

2) Déduisons en que (u_n) est convergente

$u_n \le u_{n+1}$ alors (u_n) est croissante et de plus (u_n) est majorée par α

D'où (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

3) Justifions l'égalité $g(l) = l$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $u_{n+1} = g(u_n)$

g étant continue en l, alors $g(l) = l$

Or $g(\alpha) = \alpha$, alors $l \in [0; 1]$ $(l = \alpha)$

Problème 30

$f(x) = x + ln4 + \frac{2}{e^x+1}, \forall x \in \mathbb{R}$

1) Déterminons les limites de f

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + ln4 + \frac{2}{e^x+1}\right) = -\infty$ et

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + ln4 + \frac{2}{e^x+1}\right) = +\infty$

2) Calculons $f(x) + f(-x)$

$f(x) + f(-x) = x + ln4 + \frac{2}{e^x+1} - x + ln4 + \frac{2e^x}{1+e^x}$

$f(x) + f(-x) = 2ln4 + \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} = 2ln4 + 2$

On a : $f(x) + f(-x) = 2(ln4 + 1)$ alors $A(0; ln4 + 1)$ est un centre de symétrie de (C_f)

3) Etudions le sens de variation de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$

Alors : $f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ alors f croit sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4) Démontrons que $f(x) = m$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. De plus $m \in \mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$

- Donnons un encadrement à 0.1 près de la solution de l'équation $f(x) = 3$

Posons $h(x) = f(x) - 3$

$h(0) = -0.6$ et $h(1) = 0.13$ alors $\alpha \in]0; 1[$

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
-	-	-	-	-	-	-	-	-	+

Alors $0,9 \leq \alpha \leq 1,0$

5) – Montrons que, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + 2 + ln4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$

$f(x) = x + 2 + ln4 - \frac{2e^x}{e^x+1} = x + ln4 + \frac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1} = x + ln4 + \frac{2}{e^x+1}$

D'où $f(x) = x + 2 + ln4 - \frac{2e^x}{e^x+1}, \forall x \in \mathbb{R}$

- Montrons que la droite d'équation $y = x + ln4$ et la droite d'équation $y = x + 2 + ln4$ sont asymptotes à (C_f)
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1} = \frac{2}{+\infty} = 0$ alors la droite d'équation $y = x + ln4$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{2e^x}{e^x+1}\right) = \frac{0}{1} = 0$ alors la droite d'équation $y = x + 2 + ln4$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$
- Etudions la position de (C_f) par rapport à $(D): y = x + ln4$

$f(x) - y = \frac{2}{e^x+1}, \forall x > 0$

$\forall x > 0, f(x) - y > 0$ alors (C_f) est au dessus de (D)

6) $-I(\alpha) = \int_0^\alpha (f(x) - x - ln4)dx$

$I(\alpha)$ représente l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan limitée par (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$

- Montrons que $I(\alpha) = 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1}\right)$

$I(\alpha) = \int_0^\alpha (f(x) - x - ln4)dxua = \int_0^\alpha \left(2 - \frac{2e^x}{e^x+1}\right)dxua$

$I(\alpha) = [2x - 2\ln(e^x+1)]_0^\alpha = 2\alpha - 2\ln(e^\alpha+1) + 2ln2 = 2lne^\alpha + 2ln2 - 2\ln(e^\alpha+1)$

$I(\alpha) = 2\ln(2e^\alpha) - 2\ln(e^\alpha+1) = 2(\ln(2e^\alpha) - \ln(e^\alpha+1))ua$

Alors : $I(\alpha) = 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1}\right)$

- Calculons α pour $I(\alpha) = 1$

$I(\alpha) = 1 \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1}\right) = 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1} = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}$

On obtient : $\alpha = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}\right) \cong 1.5$

Problème 31

$f(x) = \frac{e^x-1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^*$

1) $g(x) = (x-2)e^x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$

a) Déterminons les variations de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit des fonctions dérivables et :

$g'(x) = e^x + e^x(x-2) = (x-1)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

$g'(x)$ est du signe de $x - 1$, alors :

$\forall x \in]-\infty; 1[, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $]-\infty; 1[$

$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$ alors g croit sur $]1; +\infty[$

Pour $x = 1, g'(x) = 0$ alors g est constante

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}((x-2)e^x + 2) = 2$

$\lim_{x\to+} g(x) = \lim_{x\to+\infty}((x-2)e^x + 2) = +\infty$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	+
$g(x)$	2	-0.7	$+\infty$

b) Calculons $g\left(\frac{3}{2}\right)$ et montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = -0.24$

$\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, g est continue et strictement croissante alors elle réalise une bijection de $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ vers $[-0.24; 2]$. De plus $g\left(\frac{3}{2}\right) \times g(2) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$

c) Calculons $g(0)$ et déduisons en le signe de g

$g(0) = 0$

D'après le tableau de variation et de $g(0) = 0$, $g(\alpha) = 0$, on déduit :

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

$\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$

Pour $x = \{0; \alpha\}, g(x) = 0$

2) a) Déterminons les limites de f

$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{x} = \frac{1}{0}$

Alors : $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x^2} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

b) Déterminons $f'(x)$ et montrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme rapport des fonctions dérivables et :

$f'(x) = \frac{x^2e^x-2x(e^x-1)}{x^4} = \frac{xe^x-2e^x+2}{x^3}$

$f'(x) = \frac{(x-2)e^x+2}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}, \forall x \in \mathbb{R}^*$

d) Variations et tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		1.75		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Soit $\alpha \cong 1.75$

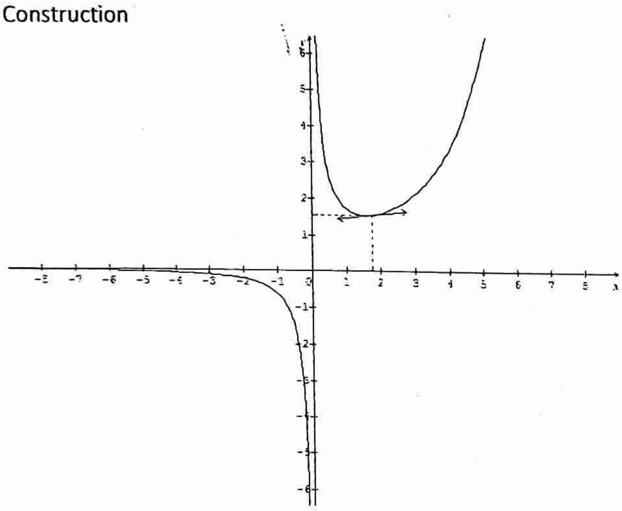
$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0;\ \alpha[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]-\infty; 0[$ et $]0;\ \alpha[$

$\forall x \in]0;\ \alpha[, f'(x) > 0$ alors f croit sur $]0;\ \alpha[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		1.75		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(1.75)$	$\nearrow$	$+\infty$

Construction



e) Démontrons que $f(\alpha) = \frac{-1}{\alpha(\alpha-2)}$

$f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha^2}$ et $g(\alpha) = (\alpha-2)e^{\alpha}+2$

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{-2}{\alpha-2}$ alors : $f(\alpha) = \frac{\frac{-2}{\alpha-2}-1}{\alpha^2} = \frac{\frac{-\alpha}{\alpha-2}}{\alpha^2}$

Alors : $f(\alpha) = \frac{-\alpha}{\alpha^2(\alpha-2)} = \frac{-1}{\alpha(\alpha-2)}$

3) Démontrons que $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(1-e^{-x}) = x$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)e^x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 2-2e^{-x}$

Alors $x = 2(1-e^{-x}) \Leftrightarrow g(x) = 0$

4) Soit $h(x) = 2(1-e^{-x}), \forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

Montrons que, $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$h'(x) = 2e^{-x}$

$\frac{3}{2} \leq x \leq 2$, alors $2e^{-2} \leq h'(x) \leq 2e^{-\frac{3}{2}}$

Or $2e^{-\frac{3}{2}} \cong 0.4$, donc $|h'(x)| \leq 0.4 \leq \frac{1}{2}$

D'où $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$

5) $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

Montrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

- $u_1 = \frac{3}{2}$ alors $u_1 \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$
- Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}, u_k \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$
- Vérifions que $u_{k+1} \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

$\frac{3}{2} \leq u_k \leq 2$ et h croissante alors :

$h\left(\frac{3}{2}\right) \leq u_{k+1} \leq h(2)$

$\frac{3}{2} \leq 1.55 \leq u_{k+1} \leq 1.7 \leq 2$ car $h\left(\frac{3}{2}\right) = 1.55$ et $h(2) = 1.7$

Alors $\frac{3}{2} \leq u_{k+1} \leq 2 \Leftrightarrow u_{k+1} \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

Montrons que $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

On a : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$; $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

Appliquons $TIAF$, version valeur absolue, à h entre α et u_n

$|h(u_n)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ or $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(\alpha) = \alpha$

Alors : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|, \forall n \in \mathbb{N}$

Déduisons en que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

On a : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

Par itération, on a :

$|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1}-\alpha|$

$|u_{n-1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-2}-\alpha|$

$|u_{n-2}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-3}-\alpha|$

....

....

....

$|u_2-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1-\alpha|$

Par produit et simplification, on obtient :

$|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|u_1-\alpha|$

$u_1 = \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2$, alors : $-\frac{1}{2} \leq u_1-\alpha \leq 0$ donc : $|u_1-\alpha| \leq \frac{1}{2}$

Alors : $|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^n}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

Problème 32

$f(x = e^{\frac{1}{2x}}, \forall\, x \in]0;\ +\infty[$

1) a) Démontrons que f est décroissante sur $]0;\ +\infty[$, puis déduisons en le sens de variation de $g(x) = f(x) - x$

f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et : $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}e^{\frac{1}{2x}}, \forall\, x \in]0;\ +\infty[$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, \frac{1}{2x^2}e^{\frac{1}{2x}} > 0$ alors :

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, f'(x) > 0$ alors f décroit sur $]0;\ +\infty[$

g est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et : $g'(x) = f'(x) - 1$, alors :

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $]0;\ +\infty[$

b) Déduisons en que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha > 0$ et que $\frac{5}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$

$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[$, g est continue et strictement décroissante alors elle est une bijection de $]0;\ +\infty[$ vers $g(]0;\ +\infty[) =]-\infty;\ 1[$. De plus $0 \in]-\infty; 1[$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$

$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$ alors α est solution de l'équation $f(x) = x$

$g\left(\frac{5}{4}\right) = 0.22$ et $g\left(\frac{3}{2}\right) = -0.6$

$g\left(\frac{5}{4}\right) \times g\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ alors $\frac{5}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$

2) a) Prouvons que, $\forall\, x \in I = \left[\frac{5}{4};\ \frac{3}{2}\right], f(x) \in I$

$f(I) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right); f\left(\frac{5}{4}\right)\right] = [1.39; 1.49] \subset I = \left[\frac{5}{4};\ \frac{3}{2}\right]$

Alors $\forall\, x \in I, f(x) \in I$

b) Démontrons que, $\forall\, x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}, f'(x) = -\frac{1}{2x^2}e^{\frac{1}{2x}}$

$\frac{2}{9} \leq \frac{1}{2x^2} \leq \frac{8}{25}$ et $e^{\frac{1}{3}} \leq e^{\frac{1}{2x}} \leq e^{\frac{2}{5}}$ alors $\frac{2}{9}e^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{2x^2}e^{\frac{1}{2x}} \leq \frac{8}{25}e^{\frac{2}{5}}$

Donc $|f'(x)| \leq \frac{8}{25}e^{\frac{2}{5}} \leq 0.47 \leq \frac{1}{2}$

D'où $\forall\, x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) Déduisons en que $\forall\, x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\alpha \in I, f(x) \in I$ et $\forall\, x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Appliquons $TIAF$, version valeur absolue à f entre x et α

$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ or $f(\alpha) = \alpha$ alors :

$\forall\, x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

3) $\begin{cases} u_0 = \frac{5}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Démontrons que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

On a : $\forall\, x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ (1)

D'après l'hypothèse de réccurence, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

En posant $x = u_n$ dans (1), on obtient :

$|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ or $f(u_n) = u_{n+1}$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

b) Déduisons en que $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Par itération, on a :

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

$|u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-2} - \alpha|$

$|u_{n-2} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-3} - \alpha|$

....

....

....

$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1 - \alpha|$

$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha|$

Par produit et après simplification, on a :

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$

$u_0 = \frac{5}{4}$ et $\frac{5}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$ alors : $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{4}$

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^2}$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

c) Déterminons n_0 tel que : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+2} \leq 10^{-3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+2} \leq 10^{-3}$

$ln\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+2} \leq ln10^{-3} \Leftrightarrow (n_0 + 2)\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -3ln10$

Alors $n_0 \geq \frac{3ln10}{ln2} - 2 \geq 7.96$ soit $n_0 \cong 8$

<u>Problème 33</u>

A) $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x), \forall\, x \in \mathbb{R}$

1) Variation et signe de g

G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, quotient et composée des fonctions dérivables et :

$g'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x}$

Alors : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	0	$-\infty$

g est majorée par 0 alors : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$

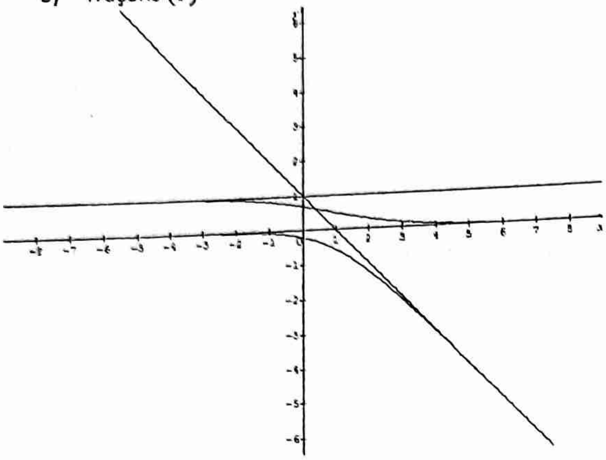
2) Démontrons que $(D): y = -x + 1$ est asymptote à (Γ) au voisinage de $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty}(f(x) - y) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x) + x - 1\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{e^x}{1+e^x} - 1\right) + \lim_{x \to +\infty}(x - \ln(1 + e^x))$

Avec $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{1+e^x}-1\right)=1-1=0$ et $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln(1+e^x))=\lim_{x\to+\infty\infty}(\ln e^x-\ln(1+e^x))=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{1+e^x}=\ln 1=0$

Alors $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0+0=0$ par conséquent la droite $(D): y=-x+1$ est asymptote oblique à (Γ) au voisinage de $+\infty$

3) Traçons (Γ)



B) $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$

1) Calculons la limite de f en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=$

$\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\ln(1+e^x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$

Posons $e^x=X$ alors : si $x\to-\infty, X\to 0$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$

2) Déterminons la limite de f en $+\infty$

On sait que : $f(x)=(1+e^{-x})\frac{\ln(1+e^x)}{1+e^x}$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{1+e^x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x})=1$

Alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1\times 0=0$

3) Démontrons que $f(x)=e^{-x}g(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée des fonctions dérivables et :

$f'(x)=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\frac{e^x}{1+e^x}e^{-x}=e^{-x}\left(-\ln(1+e^x)+\frac{e^x}{1+e^x}\right)$ avec $-\ln(1+e^x)+\frac{e^x}{1+e^x}=g(x)$

Alors : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=e^{-x}g(x)$

4) Tableau de variation de f

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)$ est du signe de g

Alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

5) Construction (voir figure précédente)

Sujets

Sujet n°1

Exercice 1

4 boules blanches et 2 boules noires

On tire successivement avec remise trois boules de l'urne

1) Calculons la probabilité des événements suivants :

A : « tirer au moins une boule blanche »

Soit Ω l'univers des possibles, alors $card\Omega=6^3=216$

$cardA=3(4^1\times 2^2)+3(4^2\times 2^1)+4^3=208$

Alors $P(A)=\frac{208}{216}=\frac{26}{27}$

B : « tirer trois boules de même couleur »

$cardB=4^3+2^3=72$

Alors $P(B)=\frac{72}{216}=\frac{1}{3}$

2) Soit $X=$ nombre des boules noires tirées

$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

a) Déterminons la loi de probabilité de X

$P(X=0)=\frac{4^3}{216}=\frac{8}{27}$; $P(X=1)=\frac{3(4^2\times 2)}{216}=\frac{4}{9}$

$P(X=2)=\frac{3(4\times 2^2)}{216}=\frac{2}{9}$; $P(X=3)=\frac{2^3}{216}=\frac{1}{27}$

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

b) Etablissons la fonction de répartition

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, si\ x<0\\ \frac{8}{27}, si\ 0\le x<1\\ \frac{20}{27}, si\ 1\le x<2\\ \frac{26}{27}, si\ 2\le x<3\\ 1, si\ x\ge 0\end{cases}$$

3) On répète 4 fois de suite l'épreuve précédente. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque série de 4 épreuves, on associe le nombre de fois où l'événement $(X\ge 1)$ a été réalisé

Il s'agit d'une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\frac{19}{27}$

$p=\frac{19}{27}$ alors $q=\frac{8}{27}$

a) Déterminons la loi de probabilité de Y

$Y(\Omega)=\{0;1;2;3;4\}$

$P(Y=0)=\left(\frac{8}{27}\right)^4=0{,}00771$

$P(Y=1)=4\left(\frac{8}{27}\right)^3\left(\frac{19}{27}\right)=0{,}07322$

$P(Y=2)=6\left(\frac{19}{27}\right)^2\left(\frac{8}{27}\right)^2=0{,}26085$

$P(Y=3)=4\left(\frac{19}{27}\right)^3\left(\frac{8}{27}\right)=0{,}41301$

$P(Y=4)=\left(\frac{19}{27}\right)^4=0{,}24521$

Y_i	0	1	2	3	4
P_i	0,00711	0,07322	0,26085	0,41301	0,24521

b) Calculons l'espérance mathématique et la variance de X

$E(Y)=np=\frac{76}{27}$ et $V(Y)=npq=\frac{608}{27}$

Exercice 2

I) $A(-i)$ et $B(2)$ deux points du plan

1) Déterminons les affixes des points C et D tels que $ABCD$ soit un carré direct

$ABCD$ est carré direct alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en B

$z_A - z_B = i(z_C - z_B)$ alors : $z_C = 1 + 2i$

ACD est un triangle rectangle et isocèle en D

$z_C - z_D = i(z_A - z_D)$ alors $z_D = \frac{z_C - iz_A}{1-i} = -1 + i$

2) Déterminons l'affixe du centre de gravité du carré

Soit G ce centre, alors : $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}$

D'où $z_G = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

3) Déterminons les longueurs des diagonales du carré

$[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales du carré

$AC = |z_C - z_A| = |1 + 3i|$

Alors $AC = \sqrt{10}$

$BD = |z_D - z_B| = |-3 + i|$

Alors : $BD = \sqrt{10}$

Déterminons les longueurs des cotés

$AB = BC = CD = DA = |z_B - z_A| = |2 + i| = \sqrt{5}$

II) $P(z) = z^3 - (1 - 2sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1$

1) Calculons $P(1)$

$P(1) = 1 - 1 + 2sin\alpha + 1 - 2sin\alpha - 1$

Alors : $P(1) = 0$

2) Factorisons $P(z)$, puis résolvons dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$

	1	$-1+2sin\alpha$	$1+2sin\alpha$	-1
1		1	$2sin\alpha$	1
	1	$2sin\alpha$	1	0

D'où $P(z) = (z-1)(z^2 + 2sin\alpha z + 1)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 = 0 \\ z^2 + 2sin\alpha z + 1 = 0 \end{cases}$

$z - 1 = 0 \Rightarrow z_0 = 1$

$z^2 + 2sin\alpha z + 1 = 0$

$\Delta = 4sin^2\alpha - 4 = (2iosa)^2$

$z_1 = -sin\alpha + icos\alpha = i(cos\alpha + isin\alpha) = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

$z_2 = -sin\alpha - icos\alpha = -i(cos\alpha - isin\alpha) = e^{i(-\frac{\pi}{2}-\alpha)}$

Alors $S = \left\{1;\ e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)};\ e^{i(-\frac{\pi}{2}-\alpha)}\right\}$

3) Déterminons le module et un argument des solutions

$z_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} |z_0| = 1 \\ arg z_0 = 2k\pi \end{cases}$

$z_1 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = 1 \\ arg z_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha + 2k\pi \end{cases}$

$z_2 = e^{i(-\frac{\pi}{2}-\alpha)} \Rightarrow \begin{cases} |z_2| = 1 \\ arg z_2 = -\frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \end{cases}$

Problème

Partie A :

I) Soit $(E): y' + y = 0$ et $y' + y = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$

1) Montrons qu'il existe une fonction h définie par $h(x) = pe^{-\frac{x}{2}} + q$ solution de (E')

$h'(x) + h(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$ avec $h'(x) = -\frac{p}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

$-\frac{p}{2}e^{-\frac{x}{2}} + pe^{-\frac{x}{2}} + q = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$

$\frac{1}{2}pe^{-\frac{1}{x}} + q = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$

Par identification, on a :

$\begin{cases} p = -1 \\ q = -2 \end{cases}$

D'où $h(x) = -e^{-\frac{1}{x}} - 2$

2) Montrons que $f = g + h$ est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E)

$f' + f = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$ alors

$g' + g + h' + h = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$

Or $h'(x) + h(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$ alors : $g' + g = 0$

D'où $f = g + h$ est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E)

3) Résolvons (E) puis (E')

$y' + y = 0$ alors $y_k(x) = ke^{-x}, k \in \mathbb{R}$

$y' + y = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$ alors $y(x) = ke^{-x} - e^{-\frac{x}{2}} - 2, k \in \mathbb{R}$

II) Soit $f(x) = e^{-x} - e^{-\frac{x}{2}} - 2$

1) Montrons que f est solution de (E')

$f'(x) + f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x} - e^{-\frac{x}{2}} - 2$

Alors : $f'(x) + f(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$

Donc f est solution) de (E')

2) Etudions les variations de f puis dressons son tableau de variations

$f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}(-e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2})$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2ln2$

$\forall x \in]-\infty; 2ln2[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2ln2[$

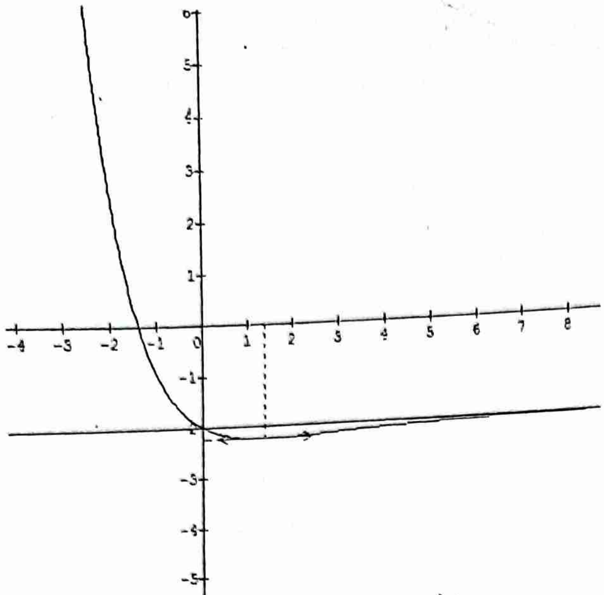
$\forall x \in]2ln2; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]2ln2; +\infty[$

- $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} e^{-\frac{x}{2}}\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 - 2e^{\frac{x}{2}}\right) = +\infty$
- $\lim_{+\infty} f(x) = -2$

Tableau de variation

x	$-\infty$		$2ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2{,}25$	$\nearrow$	-2

3) Traçons (C)



4) a) calculons $A(\alpha)=\int_{ln4}^{\alpha}(-2-f(x))dx$

$A(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left(-e^{-x}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx=\left[e^{-x}-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_{ln4}^{\alpha}$

Alors : $A(\alpha)=e^{-\alpha}-2e^{-\frac{\alpha}{2}}+\frac{3}{4}$

b) Calculons la limite de $A(\alpha)$ en $+\infty$ puis interprétons graphiquement le resultat

$\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$ représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations : $y=-2, x=ln4$ et $x=\alpha$

Partie B : $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}+u_n=-\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}}-2\ (1)\end{cases}$

1) Déterminons une suite (a_n) définie par : $a_n=be^{-\frac{n}{2}}+c$ telle que (a_n) vérifie la propriété (1)

$a_{n+1}=be^{-\frac{n+1}{2}}+c$

$a_{n+1}+a_n=be^{-\frac{n+1}{2}}+c+be^{-\frac{n}{2}}+c=be^{-\frac{n}{2}}\left(e^{-\frac{1}{2}}+1\right)+2c$

$a_{n+1}+a_n=u_{n+1}+u_n$ alors : $b=-\frac{1}{2(e^{-\frac{1}{2}}+1)}$ et $c=-1$

D'où $a_n=-\frac{1}{2(e^{-\frac{1}{2}}+1)}e^{-\frac{n}{2}}-1$

2) On pose $v_n=u_n-a_n$. Montrons que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

$v_{n+1}=u_{n+1}-a_{n+1}=-u_n-\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}}-2+a_n+\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}}+2$

D'où $v_{n+1}=-u_n+a_n=-v_n$

Alors (v_n) est une suite gémétrique de raison $q=-1$ et de premier terme $v_0=u_0-a_0=2+\frac{1}{2(1+e^{-\frac{1}{2}})}$

3) Exprimons v_n, puis u_n en fonction de n

$v_n=v_0q^n=(-1)^n\left(2+\frac{1}{2\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right)$

$v_n=u_n-a_n$ alors $u_n=v_n+a_n$

$u_n=(-1)^n\left(2+\frac{1}{2\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right)-\frac{1}{2(e^{-\frac{1}{2}}+1)}e^{-\frac{n}{2}}-1$

4) $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$. Exprimons S_n en fonstion de n

$S_n=v_0+v_1+\dots+v_n+(a_0+a_1+\dots+a_n)$

Or $v_0+v_1+\dots+v_n=\left(2+\frac{1}{2\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right)\times\frac{1-(-1)^n}{2}$

Et $a_0+a_1+\dots+a_n=\frac{1}{2\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right)}\left(e^0+e^{-\frac{1}{2}}+\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2+\dots+\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^n-(n+1)=\frac{1}{2\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right)}\times\frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}-(n+1)$

D'où $S_n=\left(2+\frac{1}{2\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right)\times\frac{1-(-1)^n}{2}+\frac{1}{2\left(1+e^{-\frac{1}{2}}\right)}\times\frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}-(n+1)$

Convergence de S_n

$\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$ alors (S_n) diverge

Sujet n°2

Exercice 1

$A(a=i), B(b=1+i), r_A=r\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$,

$r_B=r\left(B,\frac{\pi}{2}\right), r_O=r\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)$

A) $C(c=3i),\ D=r_A(C), G=r_B(D)$ et $H=r_O(C)$

1) Démontrons que $z_D=d=-2+i$

$r_B : z'=iz+1+i$

$D=r_B(C)$ alors $d=ic+1+i=-2+i$

2) Déterminons $z_G=g$ et $z_H=h$

$r_B : z'=iz+2$ et $r_O : z'=-iz$

$G=r_B(D)$ alors $g=id+2=1-2i$

$H=r_O(C)$ alors $h=-ic=3$

3) Montrons que $CDGH$ est rectangle

$CD=|z_D-z_C|=|-2-2i|=2\sqrt{2}$

$HG=|z_G-z_H|=|-2-2i|=2\sqrt{2}$

$DG=|z_G-z_D|=|3-3i|=3\sqrt{2}$

$CH=|z_H-z_C|=|3-3i|=3\sqrt{2}$

$\frac{z_D-z_C}{z_H-z_C}=-\frac{2}{3}i$ alors $(CD)\perp(CH)$

$CD=HG, DG=CH$ et $(CD)\perp(CH)$ alors $CDGH$ est un rectangle

B) $M\neq[O;A], z_M=m, N=r_A(M), P=r_B(N)$ et $Q=r_O(M)$

On note : $z_N=n, z_P=p$ et $z_Q=q$

1) Démontrons que : $n=im+1+i$

$N=r_A(M)$ alors : $z_N=iz_M+1+i$

D'où $n=im+1+i$

On admet que : $p=-m+1+i$ et $q=-im$

2) Montron quee $MNPQ$ est un parallélogramme

$z_{\overrightarrow{MN}}=n-m=im+1+i-m=m(-1+i)+1+i$

$z_{\overrightarrow{QP}} = p - q = -m + 1 + i + im = m(-1+i) + 1 + i$

$z_{\overrightarrow{MN}} = z_{\overrightarrow{QP}} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

ALors $MNPQ$ est un parallélogramme

3) Montrons l'égalité : $\frac{m-n}{p-n} = i + \frac{1}{m}$

$\frac{m-n}{p-n} = \frac{m-im-1-i}{-m+1+i-im-1-i} = \frac{m(1-i)-1-i}{m(-1-i)}$

$\frac{m-n}{p-n} = \frac{1-i}{-1-i} + \frac{1}{m}$

D'où $\frac{m-n}{p-n} = i + \frac{1}{m}$

Exercice 2

3 boules portant n° 0 ; 2 boules portant n°5 ; 1 boule portant n°a

On tire simuiltnément 3 boules de l'urne et on réçoit en francs l somme des numéros marqués sur les boules tirées

Soit X = gain du joueur

1) Calculons la loi probabilité de X

- 3 boules n°0 : $X = 0$
- 1 boule n°0 ; 1 boule n°5 et 1 boule n°5 : $X = a + 5$
- 2 boules n°0 et 1 boule n°5 : $X = 5$
- 2 boules n°0 et 1 boule n°a : $X = a$
- 2 boules n°5 et une boule n°a : $X = a + 10$
- 2 boules n°5 et 1 boule n°0 : X=10

Alors : $X(\Omega) = \{0; 5; 10; a; a+5; a+10\}$

x_i	0	5	10	a	a+5	a+10
P_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

Calculons l'espérance mathématique de X

$E(X) = \sum x_i P_i$

$E(X) = \frac{30+30+3a+6a+30+a+10}{20}$

D'où $E(X) = \frac{a+10}{2}$

2) Calculons a pour que $E(X) = 20$

$\frac{a+10}{2} = 20$ alors $a = 30$

Calculons alors $\delta(X)$

$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$ avec $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = \frac{150+300+2700+7350+1600}{20} = 605$

$V(X) = 605 - 400 = 205$

D'où $\delta(X) = 14{,}31$

Problème

$f_m(x) = 1 + \ln(1 + mx)$

Partie A :

1) Déterminons l'ensemble de définition de f_m

$f_m(x)$ existe si et seulement si : $1 + mx > 0$ alors $mx > -1$

- Si $m > 0$ alors $x > -\frac{1}{m}$ alors $D_{f_m} = \left]-\frac{1}{m}; +\infty\right[$
- Si $m < 0$ alors $x < -\frac{1}{m}$ alors $D_{f_m} = \left]-\infty; -\frac{1}{m}\right[$

2) $h_m(x) = f_m(x) - x$

On suppose $m < 0$

Etudions les variations de h_m

h_m est dérivable sur $\left]-\infty; -\frac{1}{m}\right[$ et on a :

$h'_m(x) = \frac{m}{1+mx} - 1 = \frac{m(1-x)-1}{1+mx}$

$h'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{m} \notin \left]-\infty; -\frac{1}{m}\right[$

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{m}\right[$, $h'_m(x) < 0$ alors h_m est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{m}\right[$

- $\lim_{x\to-\infty} h_m(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to-\frac{1}{m}^-} h_m(x) = -\infty$

Tableu de variation de h_m

x	$-\infty$	$-1/m$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Déduisons en le nombre des points d'interection de (C_m) et (Δ)

h_m est continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{m}\right[$, elle réalise une bijection de $\left]-\infty; -\frac{1}{m}\right[$ vers $h_m\left(\left]-\infty; -\frac{1}{m}\right[\right) = \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $h_m(x) = 0$ admet une unique solution par conséquent (C_m) et (Δ) se coupe en un seul point

3) $m > 0$

a) Etudions les variations de h_m

h_m est dérivable sur $\left]-\frac{1}{m}; +\infty\right[$ et on a :

$h'_m(x) = \frac{m(1-x)-1}{1+mx}$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{m}; 1-\frac{1}{m}\right[$, $h_m(x) > 0$ alors h_m est strictment croissante sur $\left]-\frac{1}{m}; 1-\frac{1}{m}\right[$

$\forall x \in \left]1-\frac{1}{m}; +\infty\right[$, $h'_m(x) < 0$ alors $h_m$est strictement décroissante sur $\left]1-\frac{1}{m}; +\infty\right[$

- $\lim_{x\to-\frac{1}{m}^+} h_m(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} h_m(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(1+mx)}{x} - 1\right) = -\infty$

Tableau de varition de h_m

x	$-1/m$		$1-1/m$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$h(1-1/m)$	↘	$-\infty$

Etablissons que la plus grande valeur prise par h_m quand $x \in \left]-\frac{1}{m}; +\infty\right[$ est $u(m) = \frac{1}{m} + \ln(m)$

h_m est majorée sur $\left]-\frac{1}{m};+\infty\right[$ par $h_m\left(1-\frac{1}{m}\right)$

$h_m\left(1-\frac{1}{m}\right) = 1+\ln\left(1+m\left(1-\frac{1}{m}\right)\right)-1+\frac{1}{m}$

$h_m\left(1-\frac{1}{m}\right) = \ln(1+m-1)+\frac{1}{m}$

D'où $h_m\left(1-\frac{1}{m}\right) = u(m) = \ln(m)+\frac{1}{m}$

b) Etudions les variations de u sur $]0;+\infty[$

u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$u'(m) = \frac{1}{m}-\frac{1}{m^2} = \frac{m-1}{m^2}$

$\forall\, m \in]0;1[, u'(m) < 0$ alors u est strictement décroisssante sur $]0;1[$

$\forall\, m \in]1;+\infty[, u'(m) > 0$ alors u est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

$\lim_{m\to0^+} u(m) = \lim_{m\to0^+}\frac{m\ln(m)+1}{m} = +\infty$

$\lim_{m\to+\infty} u(m) = \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{m}+\ln(m)\right) = +\infty$

Tableau de variation de u

m	0		1		$+\infty$
$u'(m)$		$-$	0	$+$	
$u(m)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Déduisons en le signe de $u(m)$

u est minorée sur $]0;+\infty[$ par 1

D'où $\forall\, x \in]0;+\infty[, u(m) > 0$

c) Déterminons le nombre des points d'intersections de (C_m) et (Δ)

h_m est continue et strictement croissante et décroissante respectivement sur $\left]-\frac{1}{m};1-\frac{1}{m}\right[$ et sur $\left]1-\frac{1}{m};+\infty\right[$, elle réalise une bijction respectivement de $\left]-\frac{1}{m};1-\frac{1}{m}\right[$ vers $h_m\left(\left]-\frac{1}{m};1-\frac{1}{m}\right[\right) =]-\infty;u(m)[$ et de $\left]1-\frac{1}{m};+\infty\right[$ vers $]-\infty;u(m)[$ Comme $0 \in]-\infty;u(m)[$ alors l'équation $h_m(x) = 0$ admet une unique solution dans chcun des intrvalles $\left]-\frac{1}{m};1-\frac{1}{m}\right[$ et $\left]1-\frac{1}{m};+\infty\right[$ par conséquent (C_m) et (Δ) se coupent en deux points

Partie B :

1) $\Gamma : y = \ln x$

a) Trouons une translation $t_{\vec{u}}$ qui transforme Γ en C_1

$M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = \ln x$

Soit $\vec{u}(a;b)$ ce vecteur de translation

$t_{\vec{u}}(M) = M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} x = x'-a \\ y = y'-b \end{cases}$

$y = \ln x \Leftrightarrow y'-b = \ln(x'-a)$

$\Rightarrow y' = b+\ln(x'-a)$ (1)

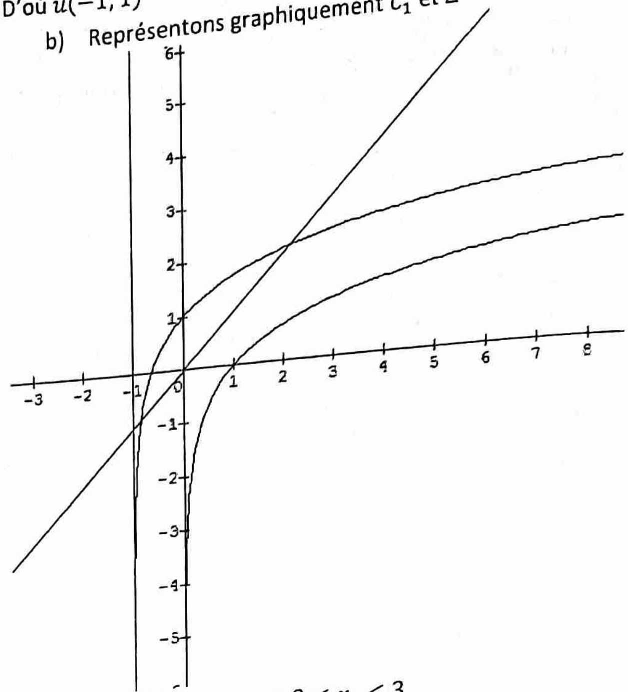
$M' \in C_1 \Leftrightarrow y' = 1+\ln(1+x')$ (2)

(1)=(2) $\Leftrightarrow b+\ln(x'-a) = 1+\ln(1+x')$

Par identification, on a : $a = -1$ et $b = 1$

D'où $\vec{u}(-1;1)$

b) Représentons graphiquement C_1 et Δ



2) a) Démontrons que $2 < x_2 < 3$

x_2 étant la solution positive de $h_1(x) = 0$

$h_1(2) = -1+\ln 3 = 0{,}098$ et $h_1(3) = -2+\ln 4 = -0{,}61$

$h_1(2)\times h_1(3) < 0$ alors $2 < x_2 < 3$

b) Calculons en cm^2 l'aire du donaine D vérifint :

$\begin{cases} x_1 < x < x_2 \\ x < y < f_1(x) \end{cases}$

$A = \int_{x_1}^{x_2}(1+\ln(1+x)-x)dxua = \int_{x_1}^{x_2}(1-x)dx + \int_{x_1}^{x_2}\ln(1+x)\,dx$

$A = \left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\ln(1+x)\,dx$

Posons : $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{1+x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$\int_{x_1}^{x_2}\ln(1+x)\,dx = [x\ln(1+x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{x}{1+x}dx$

$\int_{x_1}^{x_2}\ln(1+x)\,dx == [x\ln(1+x)]_{x_1}^{x_2} - [x-\ln(1+x)]_{x_1}^{x_2}$

$A = x_2-\frac{1}{2}x_2{}^2-x_1+\frac{1}{2}x_1{}^2+x_2\ln(1+x_2)-x_1\ln(1+x_1)-x_2+\ln(1+x_2)+x_1-\ln(1+x_1)$

Or $f_1(x_1) = x_1$ et $f_1(x_2) = x_2$ alors : $\ln(1+x_2) = x_2-1$ et $\ln(1-x_1) = x_1-1$

D'où $A = \frac{1}{2}(x_2{}^2-x_1{}^2)\text{cm}^2$

Partie C :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$

1) Représentons sur (Ox) les termes u_1 et u_2

$u_1 = f_1(u_0) = 2{,}1$ et $u_2 = f_1(u_1) = 2{,}13$

2) Montrons que (u_n) est majorée par x_2

- $u_0 = 2 \le x_2$
- Supposons que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \le x_2$
- Vérifions au rang $n+1$

On a : $u_n \le x_2$ et f_1 étnt strictement croisante alors : $f_1(u_n) \le f_1(x_2)$

Or $u_{n+1} = f_1(u_n)$ et $f_1(x_2) = x_2$ alors $u_{n+1} \leq x_2$

D'où (u_n) est majorée par x_2

3) Montrons que $|f'_1(x)| \leq \frac{1}{3}$, puis que : $|u_{n+1} - x_2| \leq \frac{1}{3}|u_n - x_2|$

$f''_1(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$ alors f'_1 est strictement décroissante

$2 \leq x$ alors $f'_1(x) \leq f'_1(2)$

$f'_1(x) \leq \frac{1}{3}$ car $f'_1(2) = \frac{1}{1+2}$

D'où $|f'_1(x)| \leq \frac{1}{3}$

L'inégalité des accroissements à f_1 sur $[u_n; x_2]$ donne :

$|f_1(x_2) - f_1(u_n)| \leq \frac{1}{3}|x_2 - u_n|$

Or

$u_{n+1} = f_1(u_n)$ et $f_1(x_2) = x_2$

Alors $|x_2 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|x_2 - u_n|$

D'où $|u_{n+1} - x_2| \leq \frac{1}{3}|u_n - x_2|, \forall n \in \mathbb{N}$

4) Déduisons en que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_2| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - x_2|$

On a : $|u_{n+1} - x_2| \leq \frac{1}{3}|u_n - x_2|$

Par itération, on a :

$|u_n - x_2| \leq \frac{1}{3}|u_{n-1} - x_2|$

$|u_{n-1} - x_2| \leq \frac{1}{3}|u_{n-2} - x_2|$

....

....

....

$|u_1 - x_2| \leq \frac{1}{3}|u_0 - x_2|$

Par prduit et simplification, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_2| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - x_2|$

Convergence de (u_n)

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ alors $\lim (u_n) = x_2$

(u_n) converge vers x_2

5) Déterminons une valeur approchée de x_2 à 10^{-2} près

$|u_n - x_2| \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{3^n}|u_0 - x_2| \leq 10^{-2}$

Or $|u_0 - x_2| \leq 1$

$\frac{1}{3^n} \leq 10^{-2} \Rightarrow n \geq 4{,}19$ alors $n = 5$

D'où u_5 est une valeur approchée de x_2 à 10^{-2} près

Sujet n°3

Exercice1

Dé noir : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

Dé blanc : 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 4 ; 5

On lance simultanément les deux dés

On note X la somme des numéros obtenus

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11

$X(\Omega) = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

1) Définissons la loi de probabilité de X

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P_i	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

2) Calculons l'espérance mathématique, la variance et l'écart type

$E(X) = \sum x_i P_i = \frac{4+12+16+25+36+42+32+18+20+11}{36}$

Alors $E(X) = 6$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ avec $E(X^2) = \sum x_i^2 P_i = \frac{125}{3}$

Alors $V(X) = \frac{125}{3} - 36 = \frac{17}{3}$

$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = 2{,}38$

3) Fonction de répartition de la variable aléatoire X

$$F(x) = \begin{cases} 0, si\ x < 2 \\ \frac{1}{18}, si\ 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{6}, si\ 3 \leq x < 4 \\ \frac{5}{18}, si\ 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{12}, si\ 5 \leq x < 6 \\ \frac{7}{12}, si\ 6 \leq x < 7 \\ \frac{3}{4}, si\ 7 \leq x < 8 \\ \frac{31}{36}, si\ 8 \leq x < 9 \\ \frac{11}{12}, si\ 9 \leq x < 10 \\ \frac{35}{36}, si\ 10 \leq x < 11 \\ 1, si\ x \geq 11 \end{cases}$$

4) Sachant que la somme obtenue est 7, calculons la probabilité que le dé blanc ait donné 2

Soit A cet événement, alors : $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

5) Sachant que la somme obtenue est 7, calculons la probabilité que dé noir ait donné 2

Soit B cet événement, alors : $P(B) = \frac{1}{6}$

6) Sachant que la somme obtenue est 7, calculons la probabilité que l'un de deux dés ait donné 2

Soit C cet événement, alors : $P(C) = P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

7) Démontrons que les événements ≪ $S = 7$ ≫ et ≪le dé blanc a donné 2≫ sont indépendants

Soient D et E respectivement ces deux événements, alors :

$P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(E) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ et $P(D \cap E) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

De plus : $P(D) \times P(E) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18} = P(D \cap E)$

D'où les événements D et E sont indépendants

Exercice 2

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$

$\Delta = (1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$

$z_1 = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}{2} = \sqrt{2}$; $z_2 = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{2} = 1$

D'où $S = \{1; \sqrt{2}\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$: $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$

$z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $S = \left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$z + \frac{1}{z} = \sqrt{2} \Leftrightarrow z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

$\Delta = 2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$

a) Exprimons $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z + \frac{1}{z}$

$\frac{P(z)}{z^2} = z^2 - (1+\sqrt{2})z + 2 + \sqrt{2} - (1+\sqrt{2})\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$

$\frac{P(z)}{z^2} = z^2 + \frac{1}{z^2} - (1+\sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2 + \sqrt{2}$

$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 - (1+\sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2 + \sqrt{2}$

$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1+\sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$

D'où $\frac{P(z)}{z^2} = Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + \sqrt{2}$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$: $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0$

De 1) on déduit : $Z = 1$ ou $Z = \sqrt{2}$

$Z = 1 \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 1$ alors : $\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$Z = \sqrt{2} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ alors : $\begin{cases} z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

D'où $S = \left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Exercice 3

Cercle de diamètre $[OB]$, $A \in [OB]$, I milieu de $[AB]$

La médiatrice de $[AB]$ coupe le cercle en M et M', M étant le point tel que : $mes(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$

$N = (AM') \cap (OM)$ et S la similitude directe de centre N qui transforme M en A

1) Précisons l'angle de S

$AMBM'$ est un losange avec $(AM') \parallel (MB)$

Or $(MB) \perp (OM)$ alors $(AM') \perp (OM)$

D'où $(\overrightarrow{NM}; \overrightarrow{NA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ est l'angle de S

2) Déterminer les images des droites (MI) et (NA), puis l'image par S du point M'

- L'image de la droite (MI) par S est la droite passant par $S(M) = A$ et perpendiculaire à (MI), alors : $S((MI)) = (AB)$
- L'image de la droite (NA) par S est la droite passant $S(N) = N$ et perpendiculaire à (NA), alors : $S((NA)) = (NO)$
- $\{M'\} = (MI) \cap ((NA)$ alors $S(M') = (AB) \cap (NO) = \{O\}$

3) Déterminons l'image I' de I par S

I milieu de $[AB]$ donc aussi milieu de $[MM']$

Or $S(M) = A$ et $S(M') = O$ alors I' est le milieu de $[AO]$

4) Déduisons en que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$

$S((NI)) = (NI')$ et l'angle de S étant $-\frac{\pi}{2}$ alors $(NI) \perp (NI')$

D'où (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$

Problème

$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}, si\ x > 0 \\ f(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1), si -1 < x \leq 0 \end{cases}$

Partie A:

1) Démontrons que : $D_f =]-1; +\infty[$

$D_f =]-1; 0] \cup]0; +\infty[=]-1; +\infty[$

2) a) Calculons les limites de f en -1 et en $+\infty$

- $\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1}(\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)) = -\infty$
- $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 1 \times 1 = 1$

b) Déduisons en les asymptotes à (C)

$\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à (C)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ alors la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (C)

3) a) Montrons que : $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = 0$

Posons : $\frac{1}{x} = X$ alors : $\begin{cases} x \to 0 \\ X \to +\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$

b) Etudions la continuité de f en 0

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}(\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)) = ln1 = 0$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0$

Alors f est continue en 0

c) En posant $h = \frac{1}{x}$, étudions $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2+x+1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}})$

$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}(he^{-h} + h^2e^{-h} + h^3e^{-h}) = 0$

d) Etudions $\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{x}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x}\right) = 1 + 1 = 2$

$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ alors f n'est pas dérivable en 0 par conséquent (C) admet à l'origine du repère deux demi tangentes, horizontale à droite et oblique à gauche

4) Démontrons que :

a) $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$f'(x) = \frac{(2x+1)x^2-2x(x^2+x+1)}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\frac{x^2+x+1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{2x^3+x^2-2x^3-2x^2-2x+x^2+x+1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$

D'où $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

b) $\forall x \in]-1; 0[, f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$

f est dérivable sur $]-1; 0[$ et on a :

$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$

D'où $\forall x \in]-1; 0[, f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$

5) Dressons le tableau de variation de f

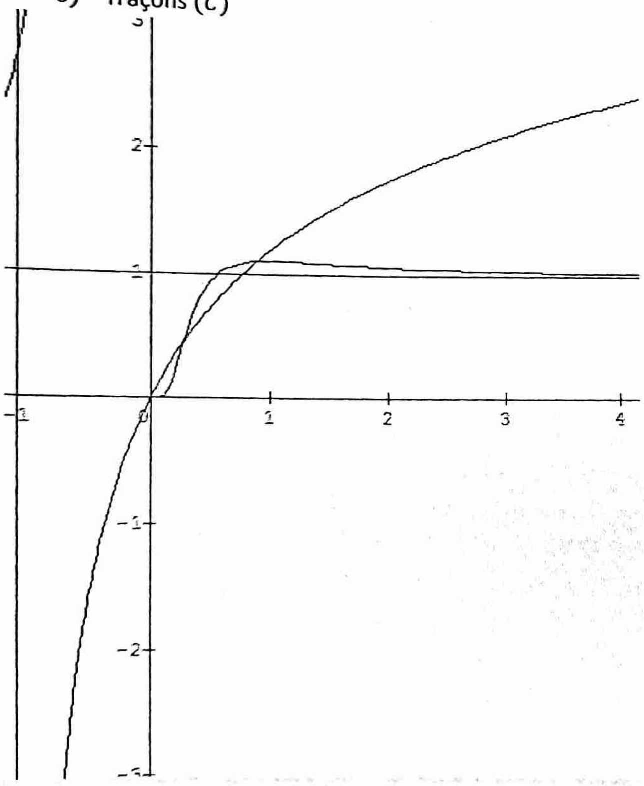
$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ alors $f'(x) > 0$ sur $]0; 1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$

$\forall x \in]-1; 0[, f'(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2} > 0$

Tableau de variation

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$1,1$ ↘	1

6) Traçons (C)



Partie B : $-1 < \alpha < 0$

1) Montrons que, $\forall x \in]-1; 0[, \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$

D'où $\forall x \in]-1; 0[, \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

2) En utilisant une IPP, démontrons que : $\int_\alpha^0 \ln(x+1)\,dx = -\alpha\ln(\alpha+1) + \alpha - \ln(\alpha+1)$

$\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v(x) = x \end{cases}$

$\int_\alpha^0 \ln(x+1)\,dx = [x\ln(x+1)]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 \frac{x}{x+1}dx$

$\int_\alpha^0 \ln(x+1)\,dx = -\alpha\ln(\alpha+1) - \int_\alpha^0 (1 - \frac{1}{x+1})$

$\int_\alpha^0 \ln(x+1) = -\alpha\ln(\alpha+1) - [x - \ln(x+1)]_\alpha^0$

D'où $\int_\alpha^0 \ln(x+1)\,dx = -\alpha\ln(\alpha+1) + \alpha - \ln(\alpha+1)$

3) Déduisons en l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$

$A(\alpha) = -\int_\alpha^0 f(x)dxua = 4\int_\alpha^0 (-1 + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1))dx$

D'où $A(\alpha) = 4(-2\alpha + 2\ln(\alpha+1) - \alpha\ln(\alpha+1))(cm^2)$

4) Calculons la limite de $A(\alpha)$ en -1^+

$\lim_{\alpha \to -1^+} A(\alpha) = -\infty$

NB : on peut effectuer un chandement de variable

Sujet n°4

Exercice 1

$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n)\,; \; a_0 = 2 \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n)\,; \; b_0 = 4 \end{cases}$ et $u_n = a_n + b_n$

1) Montrons que (u_n) est une suite constante

$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) + \frac{1}{4}(3a_n + b_n) = a_n + b_n$

D'où $u_{n+1} = u_n$ alors (u_n) est une suite constante

2) On pose : $v_n = a_n - b_n$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) - \frac{1}{4}(3a_n + b_n)$

$v_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_n - b_n) = -\frac{1}{2}v_n$

Alors (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - b_0 = -2$

b) Exprimons v_n en fonction de n

$v_n = v_0 \times q^n$ alors : $v_n = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Déduisons en a_n et b_n en fonction de n

$\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = a_n - b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n + b_n = 6 \\ a_n - b_n = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$

$2a_n = 6 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ alors $a_n = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$2b_n = 6 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ alors $b_n = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 2

1) Déterminons l'ensemble des M du plan tel que : $|(1+i)z - 2i| = 2$

$(1+i)z - 2i = (1+i)(z - (1+i))$

$|(1+i)z-2i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}|z-(1+i)| = 2$

Posons $z_A = 1+i$

Alors $\sqrt{2}MA = 2 \Leftrightarrow MA = \sqrt{2}$

L'ensemble des points M est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

2) Etudions la transformation d'écriture complexe : $z' = (1+i)z - 2i$

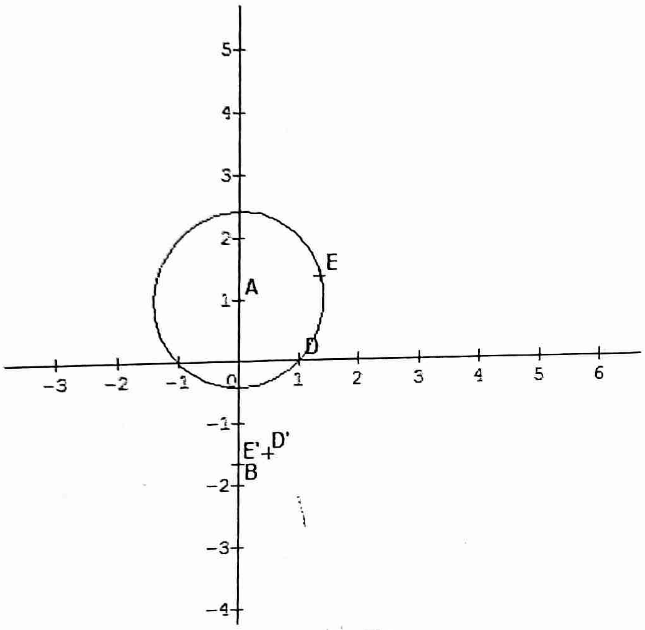
$z' = az + b$ avec $a = 1+i$; $b = -2i$ et $|a| = \sqrt{2} \neq 1$

Alors cette transformation est une similitude directe

- Le centre : $\omega = \frac{-2i}{1-(1+i)} = 2$ alors $\Omega(2;0)$
- Le rapport : $k = \sqrt{2}$
- L'angle : $\alpha = \arg(1+i)$ alors $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Exercice 3

$z_A = i$; $z_B = -2i$; $z_D = 1$ et $f : z' = \frac{2z-i}{iz+1}$



1) Montrons que $z_E = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$

$\frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors $z_E - z_A = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_D - z_A)$

$z_E = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_D - z_A) + z_A = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i) + i$

$$z_E = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$$

2) Exprimons sous forme algébrique l'afixe du point D' associé au point D par f

$z_{D'} = \frac{2z_D - i}{iz_D+1} = \frac{2-i}{1+i}$ alors $z_{D'} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

3) a) Démontons que, $\forall z \neq i, (z'+2i)(z-i) = 1$

$z' + 2i = \frac{2z-i}{iz+1} + 2i = \frac{i}{iz+1}$

$z' + 2i = \frac{i}{i(z-i)} = \frac{1}{z-i} \Leftrightarrow (z'+2i)(z-i) = 1$

b) Déuisons en que, $\forall z \neq i, BM' \times AM = 1$ et $(\vec{u},\overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u},\overrightarrow{AM}) + 2k\pi$

On a : $(z'+2i)(z-i) = 1$

Posons $z' + 2i = z_{\overrightarrow{BM'}}$ et $z - i = z_{\overrightarrow{AM}}$

$|(z'+2i)(z-i)| = 1 \Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{BM'}} \times z_{\overrightarrow{AM}}| = 1$

Alors $BM' \times AM = 1$ (1)

$arg(z'+2i)(z-i) = 2k\pi \Leftrightarrow mes(\vec{u},\overrightarrow{BM'}) + mes(\vec{u},\overrightarrow{AM}) = 2k\pi$

Alors $mes(\vec{u},\overrightarrow{BM'}) = -mes(\vec{u},\overrightarrow{AM}) + 2k\pi$

4) a) Démontrons que D et E appartiennent au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

$AD = |z_D - z_A| = |1-i| = \sqrt{2}$

$$AE = |z_E - z_A| = \left|\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right| = \sqrt{2}$$

$AD = AE = \sqrt{2}$ alors D et E appartiennent au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

b) En utilisant 3) b) plaçons E' associé au point E par f

on a : $AD = AE = \sqrt{2}$

D'après 3) b) : $AD \times BD' = 1$ et $AE \times BE' = 1$ alors : $BD' = BE' = \frac{1}{\sqrt{2}}$

D'après 3) b) : $(\vec{u},\overrightarrow{BE'}) + (\vec{u},\overrightarrow{AE}) = 2k\pi$ et $(\vec{u},\overrightarrow{BD'},\vec{u},\overrightarrow{AD}) = 2k\pi$ alors $(\overrightarrow{BD'},\overrightarrow{BE'}) + (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}) = 2k\pi$

Or $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}$

D'où $(\overrightarrow{BD'},\overrightarrow{BE'}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

5) Déduisons en la nature du triangle $BD'E'$

$BD' = BE' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $(\overrightarrow{BD'},\overrightarrow{BE'}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ alors $BD'E'$ est un triangle équilatéral de sens indirect

Problème

A) $y' - 3y = \frac{3e}{(1+e^{-3x})^2}$

On donne φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$

Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis exprimons $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$

$x \mapsto e^{-3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et φ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit des foctions dérivables

$f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$ alors $\varphi(x) = e^{3x}f(x)$

$\varphi'(x) = 3e^{3x}f(x) + e^{3x}f'(x)$

$\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 3e^{3x}f(x) + e^{3x}f'(x) - 3e^{3x}f(x)$

Alors $\varphi'(x) - 3\varphi(x) = e^{3x}f'(x)$

B) $f(x) = \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$

1) Déterminons les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e}{e^{3x}+1} = e$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{0}{1} = 0$

Etudions les variations de f

$$f'(x) = \frac{-3e^{1-3x}(1+e^{-3x}) + 3e^{-3x} \times e^{1-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$$

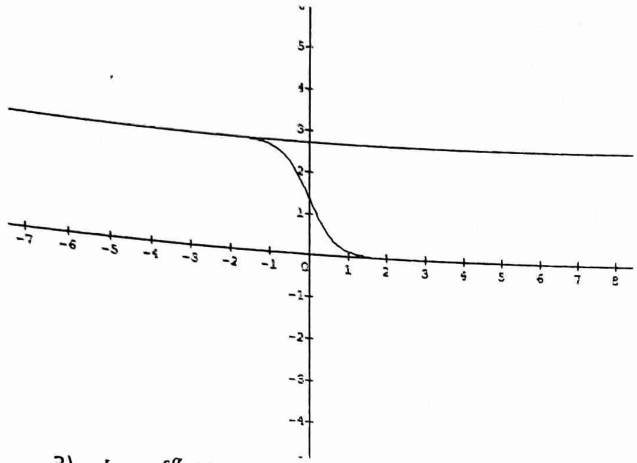
Alors : $f'(x) = \frac{-3e^{1-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	e ↘	0

2) Traçons (C)



3) $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)dx$ avec $\alpha > 0$

a) Donnons le signe de I_α et interprétons graphiquement I_α

$f(x) \in]0; e[$ alors $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$

D'où $I_\alpha > 0$

I_α représente l'aire de la parie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$

b) Exprimons I_α en fonction de α

$I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^\alpha e\frac{e^{-3x}}{1+e^{-3x}}dx$

$I_\alpha = \left[-\frac{e}{3}\ln(1+e^{-3x})\right]_0^\alpha = -\frac{e}{3}\ln(1+e^{-3\alpha}) + \frac{e}{3}ln2$

c) Déterminons la limite de I_α en ∞

$\lim_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = -\frac{e}{3}ln1 + \frac{e}{3}ln2 = \frac{e}{3}ln2$

C) $u_n = \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}dx$

1) Donnons le signe de (u_n)

$\forall x \in [0; 1], f(x) > 0$ et $e^{\frac{x}{n}} > 0$ alors : $u_n > 0$

2) Donnons le sens de variation de (u_n)

$u_{n+1} = \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n+1}}dx$

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 f(x)\left(e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}}\right)dx$

Or $\forall x \in [0; 1], \frac{x}{n+1} < \frac{x}{n}$ alors $e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}} < 0$

D'où $u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante

3) Convergence de (u_n)

(u_n) est strictement décroissante et $u_n > 0$ alors (u_n) est convergente

4) Montrons que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_1 \leq u_n \leq e^{\frac{1}{x}}I_1$

$I_1 = \int_0^1 f(x)dx = -\frac{e}{3}\ln(1+e^{-3}) + \frac{e}{3}ln2$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 0$ alors $f(x) \leq f(x)e^{\frac{1}{x}}, I_1 \leq u_n$ et $u_n \leq I_1e^{\frac{1}{x}}$ alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_1 \leq u_n \leq e^{\frac{1}{x}}I_1$

5) Déduisons en la limite de (u_n)

$\lim_{+\infty} I_1 = I_1$ et $\lim_{+\infty} I_1e^{\frac{1}{x}} = I_1$ car $\lim_{+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

D'où $\lim_{+\infty} u_n = I_1$

Sujet n°5

Exercice 1

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$

1) Montrons que, $\forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq 1$

On a : $u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n+4}$

- $u_1 = \frac{3}{4}$ alors $0 \leq u_1 \leq 1$
- Supposons que, $0 \leq u_k \leq 1, \forall k > 1$
- Vérifions que $0 \leq u_{k+1} \leq 1$

$0 \leq u_k \leq 1$ alors $-\frac{5}{4} \leq -\frac{5}{u_k+4} \leq -1$

Donc $\frac{3}{4} \leq u_{k+1} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{3}{4} \leq u_{k+1} \leq 1$

D'où $0 \leq u_{k+1} \leq 1, \forall k \geq 1$

Cc : $\forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq 1$

2) Montrons que (u_n) est croissante

$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+3}{u_n+4} - u_n = \frac{-u_n^2-2u_n+3}{u_n+4}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+3)}{u_n+4}$

$0 \leq u_n \leq 1$ alors $1 - u_n \geq 0, u_n + 3 > 0$ et $u_n + 4 > 0$

D'où $\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n \geq 0$ par conséquent (u_n) est une suite croissante.

3) $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \frac{u_n-1}{5u_n+15}$

Alors $v_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{u_n-1}{u_n+3} = \frac{1}{5}v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{3}$

b) Déduisons en que la limite de (v_n)

$q = \frac{1}{5} (0 < q < 1)$ alors $\lim v_n = 0$

c) Exprimons u_n en fonction de v_n, et déduisons en sa limite

$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3} \Leftrightarrow v_nu_n + 3v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3 - 3v_n$

Alors $u_n = \frac{3v_n+1}{1-v_n}$

$\lim u_n = 1$ (car $\lim v_n = 0$)

4) Soit $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

a) Calculons S_n en fonction de n

$S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$\Rightarrow S_n = -\frac{1}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}}$

D'où $S_n = -\frac{5}{12}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$

b) Calculons la limite de S_n en $+\infty$

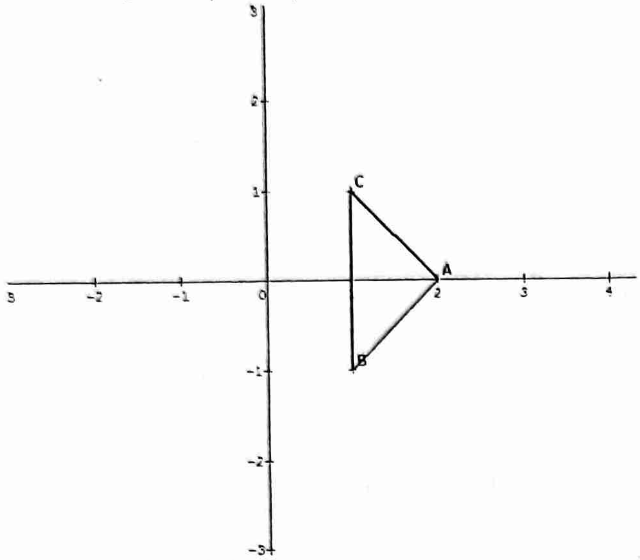
$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim\left(_{n\to+\infty} -\frac{5}{12}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)\right) = -\frac{5}{12}$

c) Calculons $S_{10} = -\frac{5}{12}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{11}\right) = -0{,}41$

<u>Exercice 2</u>

$A(a=2), B(b=1-i), C(c=1+i)$

1) Plaçons les points A, B et C



2) Calculons $\frac{c-a}{b-a}$ et déduisons en que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+i-2}{1-i-2} = \frac{-1+i}{-1-i}$

D'où $\frac{c-a}{b-a} = -i$

$\frac{c-a}{b-a} = -i \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ mes(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

D'où ABC est un triangle rectangle et isocèle en A

3) Soit r la rotation de telle que : $r(A) = A$ et $r(B) = C$

a) Déterminons l'angle de r et calculons l'affixe du point $D = r(C)$

$z_C - z_A = e^{i\alpha}(z_B - z_A)$

Alors $e^{i\alpha} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$

D'où $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$r(C) = D \Leftrightarrow z_D = -i(z_C - z_A) + z_A$

D'où $z_D = 3 + i$

b) Déterminons le centre et le rayon du cercle (C'), image du cercle (C) de centre $I(1\,;\,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$

$r((C)) = (C')$ alors (C') est le cercle de centre $I' = r(I)$ et de rayon $\sqrt{2}$ (conservation de la distance)

$z_{I'} = -iz_I + iz_A + z_A = 2 + i$

D'où $(C') = C(I'(2;1), \sqrt{2})$

<u>Exercice 3</u>

1) Déterminons les couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ tels que : $a \times b = 12950$ et $M(a;b) = 2590$

$\begin{cases} a \times b = 12950 \\ M(a;b) = 2590 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \times b = 12950 \\ pgcd(a;b) = 5 \end{cases}$

Soient a' et b' deux entiers naturels tels que : $a = 5a'$ et $b = 5b'$

$\begin{cases} a \times b = 12950 \\ pgcd(a;b) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' \times b' = 518 \\ pgcd(a';b') = 1 \end{cases}$ avec a' ; b' premiers entre eux

$518 = 2 \times 7 \times 37$

Alors $(a';b') = \{(1;518),(2;259),(14;37),(7;74)\}$

D'où

$(a;b) = \begin{Bmatrix} (5;2590),(2590;5),(10;1295),(1295;10),(70;185), \\ (185;70) \end{Bmatrix}$

2) a) Montrons que 491 et 624 sont premiers entre eux

D	624	491	133	92	41	10
d	491	133	92	41	10	1
r	133	92	41	10	1	0

Alors $pgcd(624;491) = 1$

D'où 624 et 491 sont premiers entre eux

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $491x - 624y = 1$

$\begin{cases} 624 = 491 \times 1 + 133 \\ 491 = 133 \times 3 + 92 \\ 133 = 92 \times 1 + 41 \\ 92 = 41 \times 2 + 10 \\ 41 = 10 \times 4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 133 = 624 - 491 \\ 92 = 491 - 133 \times 3 \\ 41 = 133 - 92 \\ 10 = 92 - 41 \times 2 \\ 1 = 41 - 10 \times 4 \end{cases}$

$1 = 41 - 10 \times 4 = 41 \times 9 - 92 \times 4$

$1 = (133 - 92) \times 9 - 92 \times 4 = 133 \times 9 - 92 \times 13$

$1 = 133 \times 9 - (491 - 133 \times 3) \times 13 = 133 \times 48 - 491 \times 13$

$1 = (624 - 491) \times 48 - 491 \times 13 = 624 \times 48 - 491 \times 61$

Alors $1 = 491 \times (-61) - 624 \times (-48)$

Le couple $(x_0;\,y_0) = (-61;\,-48)$ est une solution particulière

De ce qui précède, on a : $491x - 624y = 491x_0 - 624y_0$

$\Rightarrow 491x - 491x_0 = 624y - 624y_0$

$\Rightarrow 491(x - x_0) = 624(y - y_0)$

491 divise $y - y_0 \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que : $y - y_0 = 491k$

Alors $y = 491k + y_0 = 491k - 48$

624 divise $x - x_0 \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - x_0 = 624k$

Alors $x = 624k + x_0 = 624k - 61$

D'où $S = \{(624k - 61; 491k - 48), k \in \mathbb{Z}\}$

3) a) Démontrons que, $\forall\, n \in \mathbb{N};\ 2^{3n} - 1$ est un multiple de 7

$2^3 = 8 \equiv 1[7]$ alors $2^{3n} \equiv 1[7]$

On obtient : $2^{3n} - 1 \equiv 0[7]$

D'où $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7

b) Déduisons en que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont multiple de 7

$2^{3n+1} - 2 = 2(2^{3n} - 1)$

Or $2^{3n} - 1 \equiv 0[7]$ a

$2(2^{3n} - 1) \equiv 0[7] \Rightarrow 2^{3n+1} - 2 \equiv 0[7]$

D'où $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7

$$2^{3n+2} - 4 = 4(2^{3n} - 1) \equiv 0[7]$$

D'où $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7

Problème

Partie A : $f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$, $\forall x \in]-1;\ +\infty[$

1) Calculons $f'(x)$, étudions son signe et déduisons le tableau de variation de f

f est dérivable sur $]-1;\ +\infty[$ et on a :

$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1}$

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1}$

D'où $f'(x) = \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$, $\forall x \in]-1;\ +\infty[$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\forall x \in \left]-1;\ -\frac{1}{2}\right[, f'(x) > 0$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[, f'(x) < 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)) = -\infty$

$\lim_{x\to-1} f(x)) = \lim_{x\to-1}(\frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)) = -\infty + \infty$

Levons l'indétermination

Posons $X = x + 1$

$\lim_{x\to-1} f(x)) = \lim_{X\to0}(\frac{X-1-2X\ln X}{X}) = -\infty$

Tableau de variation

x	-1	$-0{,}5$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$0{,}4$	↘ $-\infty$

2) Calculons $f(0)$. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est α avec $\alpha \in [-0{,}72;\ -0{,}71]$

$f(0) = 0$

- $f(0) = 0$ alors 0 est solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $\left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$
- f est continue et strictement croissante sur $\left]-1;\ -\frac{1}{2}\right[$ alors elle réalise une bijection de $\left]-1;\ -\frac{1}{2}\right[$ vers $]-\infty; 0{,}4[$. De plus $0 \in]-\infty; 0{,}4[$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left]-1;\ -\frac{1}{2}\right[$

$f(-0{,}72) = 0{,}02$ et $f(-0{,}71) = -0{,}02$

$f(-0{,}71) \times f(-0{,}71) < 0$ alors $\alpha \in [-0{,}72;\ -0{,}71]$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions 0 et α

3) Donnons le signe de f

De ce qui précède, on déduit :

$\forall x \in]-1;\ \alpha[\cup]0;\ +\infty[, f(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; 0[, f(x) > 0$

Partie B : $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$, $\forall x \in]-1; 0[\cup]0;\ +\infty[$

1) Calculons les limites de g

- $\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = -\infty$
- $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x^2} = 0$

2) Calculons $g'(x)$ et déduisons en les variations de f

g est dérivable sur $]-1; 0[\cup]0;\ +\infty[$ et on a :

$g'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}x^2 - 2x\ln(x+1)}{x^4}$

$g'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)}{x^3} = \frac{f(x)}{x^3}$, $\forall x \in]-1; 0[\cup]0;\ +\infty[$

x	-1		0 $+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$ 0	$-$
x	$-$ 0	$-$	$+$
$g'(x)$	$+$	$-$	$-$

$\forall x \in]-1;\ \alpha[, g(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]-1;\ \alpha[$

$\forall x \in]\alpha; 0[\cup]0;\ +\infty[, g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissante sur $]\alpha; 0[\ et]0;\ +\infty[$

3) Montrons que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$

$g(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2} = \frac{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}{\alpha^2}$

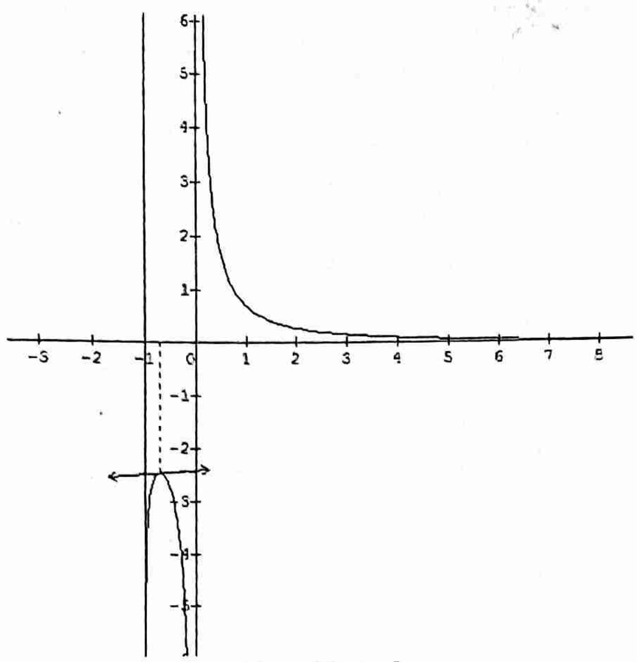
D'où $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

4) Dressons le tableau de variation de f

Soit $\alpha = -0{,}72$ alors $g(\alpha) = -2{,}48$

x	-1	$-0{,}72$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$-0{,}1$	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0

5) Courbe



6) Soit $h(x) = g(x)$ sur $]0; +\infty[$

a) Montrer que h est une bijection de $]0; +\infty[$ vers J à préciser

Sur $]0; +\infty[$ h est continue et strictement décroissante alors h est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $h(]0; +\infty[) =]0; +\infty[= J$

b) Donnons le sens de variation de h^{-1} et dressons son tableau de variation

h et h^{-1} ont même sens de variation d'où h^{-1} est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de h^{-1}

x	0 $\qquad$ $+\infty$
	$-$
	$+\infty$ $\searrow$ 0

c) Construisons (C') courbe de h^{-1}

(C) et (C') sont symétriques par rapport à la première bissectrice

Sujet n° 6

Exercice1

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

$\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ou $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

D'où $S = \{\sqrt{2} + i\sqrt{2}; \sqrt{2} - i\sqrt{2}\}$

2) $A\left(a = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $M_1(z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2})$ et $M_2(z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2})$

a) Déterminons l'affixe z_3 du point M_3, image du point M_2 par l'homothétie de centre A et de rapport 3

$h : z' - a = 3(z - a) \Leftrightarrow z' = 3z - 2a$

$h(M_2) = M_3 \Leftrightarrow z_3 = 3z_2 - \sqrt{2}$

Alors : $z_3 = 2\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$

b) Déterminons l'affixe du point M_4, image du point M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

$r : z' = -iz$

$r(M_2) = M_4 \Leftrightarrow z_4 = -i(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$

Alors : $z_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

c) Calculons sous forme algébrique $Z = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$

$Z = \frac{1-4i}{-2-2i} = \frac{3+5i}{4}$

Alors : $Z = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}i$

Exercice 2

$A(6; 0), B(3; \sqrt{3}), R_1 = r\left(A, \frac{\pi}{6}\right), R_2 = r\left(B, \frac{2\pi}{3}\right)$

1) $M(x; y)$.Donnons en fonction de x et de y les coordonnées de $R_1(M)$ et de celles de $R_2(M)$

$R_1 : z_1 - z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_A)$ alors :

$z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 6 - 3\sqrt{3} - 3i$

$x_1 + iy_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(x + iy) + 6 - 3\sqrt{3} - 3i$

$R_1(M) = M_1 : \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 6 - 3\sqrt{3} \\ y_1 = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 \end{cases}$

$R_2 : z_2 - z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_B)$ alors :

$z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 6$

$x_2 + iy_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x + iy) + 6$

$R_2(M) = M_2 : \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 6 \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

2) Démontrons que l'application $R_1 \circ R_2$ et une rotation dont on déterminera le centre et l'angle

$R_1 \circ R_2(M) = R_1[R_2(M)] = M'$

Alors : $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 6\right) + 6 - 3\sqrt{3} - 3i$

$R_1 \circ R_2 : z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 6$

$R_1 \circ R_2 : z' = az + b$ avec $a = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $b = 6$ et

$|a| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = 1$ alors $R_1 \circ R_2$ est une rotation

$R_1 \circ R_2(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{6+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + i\frac{3}{2+\sqrt{3}}$

$\arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

D'où $R_1 \circ R_2 = r\left(\Omega\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}; \frac{3}{2+\sqrt{3}}\right); \frac{5\pi}{6}\right)$

3) Soit $S = s_{(AB)}$

a) Montrons qu'il existe deux réflexions s_1 et s_2 d'axes respectifs D_1 et D_2 telles que : $R_1 = s_1 \circ S$ et $R_2 = S \circ s_2$

$\overrightarrow{AB}(-3; \sqrt{3})$ et $\overrightarrow{AM}(x - 6; y)$

$M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$

Alors $(AB) : x\sqrt{3} + 3y - 6\sqrt{3} = 0$

$\vec{u}(-3;\ \sqrt{3})$ est un vecteur directeur de (AB)

Soit $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ tel que : $S(M) = M'$

$I\left(\frac{x+x'}{2};\ \frac{y+y'}{2}\right)$ milieu de $[MM']$ alors : $\begin{cases} I \in (AB) \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} x'\sqrt{3} + 3y' = -x\sqrt{3} - 3y + 12\sqrt{3}\ (L_1) \\ -3x' + \sqrt{3}y = -3x + \sqrt{3}y\ (L_2) \end{cases}$

$\sqrt{3}l_1 + L_2 \ \rightarrow y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 3\sqrt{3}$

$L_1 - \sqrt{3}L_2 \ \rightarrow x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3$

Alors S : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3 \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 3\sqrt{3} \end{cases}$

- $R_1 = s_1 \circ S \iff s_1 = R_1 \circ S$

$s_1(M) = M''$: $\begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' + 6 - 3\sqrt{3} \\ y'' = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 3 \end{cases}$

$s_1(M) = M \iff \begin{cases} x + (2+\sqrt{3})y - 6 = 0 \\ x + (2+\sqrt{3})y - 6 = 0 \end{cases}$

D'où D_1 : $x + (2+\sqrt{3})y - 6 = 0$

- $R_2 = S \circ s_2 \iff s_2 = R_2 \circ S$

$s_2(M) = M''$: $\begin{cases} x'' = -\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 6 \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \end{cases}$

s_2 : $\begin{cases} x'' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

$s_2(M) = M \iff \begin{cases} -x + y\sqrt{3} = 0 \\ -x + y\sqrt{3} = 0 \end{cases}$

D'où D_2 : $-x + y\sqrt{3} = 0$

b) Déduisons-en $R_1 \circ R_2 = s_1 \circ s_2$

$R_1 \circ R_2 = s_1 \circ S \circ S \circ s_2 = s_1 \circ s_2$ car $S \circ S = Id$

c) Déduisons en que D_1 et D_2 sont sécants en Ω

$R_1 \circ R_2 = r\left(\Omega, \frac{5\pi}{6}\right)$ alors $s_1 \circ s_2 = r\left(\Omega, \frac{5\pi}{6}\right)$

D'où $D_1 \cap D_2 = \{\Omega\}$

Exercice 3

T : « le client a acheté un téléviseur »

M : « le client a acheté un magnétoscope »

$P(T) = 0{,}6;\ P_T(M) = 0{,}4;\ P_{\bar{T}}(M) = 0{,}2\ et\ P(\bar{T}) = 0{,}4$

1) Calculons la probabilité qu'il achète un magnétoscope et un téléviseur

$P(M \cap T) = P(T) \times P_T(M) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$

Alors : $P(M \cap T) = 0{,}24$

2) Calculons la probabilité qu'il achète un magnétoscope

D »après la formule des probabilités totales, on a :

$P(M) = P(T) \times P_T(M) + P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(M) = 0{,}24 + 0{,}08$

Alors : $P(M) = 0{,}32$

3) Calculons la probabilité qu'il achète un téléviseur sachant qu'il a acheté un magnétoscope

$P_M(T) = \frac{P(M\cap T)}{P(M)} = \frac{0{,}24}{0{,}32}$

Alors : $P_M(T) = 0{,}75$

Problème

$f_n(x) = x^2 - n - \frac{n\ln x}{x}, \forall\, x \in]0;\ +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Partie A :

1) $g_n(x) = x^2 - n + n\ln x, \forall\, x \in]0;\ +\infty[$

a) Etudions le sens de variation de g_n et précisons ses limites

g_n est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on a :

$g'_n(x) = 2x + \frac{n}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, g'_n(x) > 0$ alors g_n est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$

$\lim_{x\to+} g_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

b) Montrons que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n

g_n est continue et strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$, elle réalise une bijection de $]0;\ +\infty[$ vers $g(]0;\ +\infty[) = \mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n

2) Etablissons que, $\forall\, x \in]0;\ +\infty[, f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$

f_n est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on a :

$f'_n(x) = 1 - \frac{\frac{n}{x}x x - n\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - n + n\ln x}{x^2}$

D'où $\forall\, x \in]0;\ +\infty[, f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$

Etudions le signe de g_n et déduisons en le sens de variation de f_n

g_n est strictement croissante et s'annule en α_n, alors :

$\forall\, x \in]0;\ \alpha_n[, g_n(x) < 0$

$\forall\, x \in]\alpha_n;\ +\infty[, g_n(x) > 0$

$f'_n(x)$ étant du signe de $g_n(x)$, on déduit :

$\forall\, x \in]0;\ \alpha_n[, f'_n(x) < 0$ alors f_n est strictement décroissante sur $]0;\ \alpha_n[$

$\forall\, x \in]\alpha_n;\ +\infty[, f'_n(x) > 0$ alors f_n est strictement croissante sur $]\alpha_n;\ +\infty[$

3) Etudions les limites de f_n en 0 et en $+\infty$

- $\lim_{x\to0} f_n(x) = -(-\infty) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

Montrons que la droite (D_n) : $y = x - n$ est asymptote à (C_n)

$\lim_{x\to+\infty}\big(f_n(x) - (x-n)\big) = \lim_{x\to+\infty}\left(-n\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

D'où (D_n) : $y = x - n$ est asymptote oblique à (C_n) en $+\infty$

Etudions la position de (C_n) par rapport à (D_n)

$f_n(x) - (x-n) = -n\frac{\ln x}{x}$

$\forall\, x \in]0; 1[, f_n(x) - y > 0$ alors (C_n) est au dessus de (D_n)

$\forall\, x \in]1;\ +\infty[, f_n(x) - y$ alors (C_n) est en dessous de (D_n)

Partie B : $n = 1$ et $n = 2$

1) Montrons que :

- Pour $n = 1, \alpha_1 = 1$

$g_1(x) = x^2 - 1 + \ln x$

$g_1(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$ alors $\alpha_1 = 1$

- Pour $n = 2$, $1{,}2 < \alpha_2 < 1{,}3$

$g_2(x) = x^2 - 2 + 2\ln x$

$g_2(1{,}2) = -0{,}19$ et $g_2(1{,}3) = 0{,}21$

$g_2(1{,}2) \times g_2(1{,}3) < 0$ alors $1{,}2 < \alpha_2 < 1{,}3$

2) En utilisant les règles sur les inégalités et l'encadrement de α_2, montrons que : $f_2(\alpha_2) > -1{,}24$

$f_2(\alpha_2) = \alpha_2 - 2 - \frac{2\ln\alpha_2}{\alpha_2}$ et $1{,}2 < \alpha_2 < 1{,}3$

$$\begin{cases} -0{,}8 \le \alpha_2 - 2 \le -0{,}7 & (1) \\ -\frac{-2\ln(1{,}3)}{1{,}3} \le -\frac{2\ln\alpha_2}{\alpha_2} \le -\frac{2\ln((1{,}2)}{1{,}2} & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) : f_2(\alpha_2) \ge -0{,}8 - \frac{-2\ln(1{,}3)}{1{,}3} \ge -0{,}36 > -1{,}24$

D'où $f_2(\alpha_2) > -1{,}24$

En utilisant le sens de variation de f_2, montrons que : $f_2(\alpha_2) < -1{,}24$

$\alpha_2 < 1{,}3$ alors $f_2(\alpha_2) \le f_2(1{,}3) < -1{,}10$

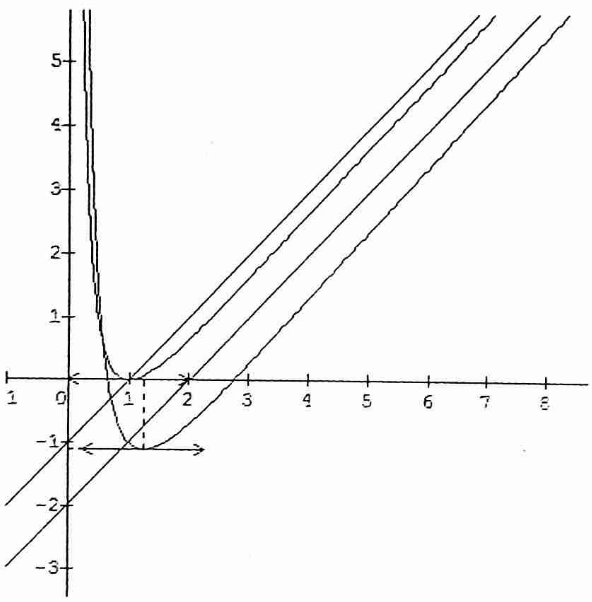
3) Dressons les tableaux de variations de f_1 et f_2

Tableau de variation de f_1

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de variation de f_2

x	0		$1{,}2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1{,}17$	$\nearrow$	$+\infty$



Sujet n°8

Exercice 1

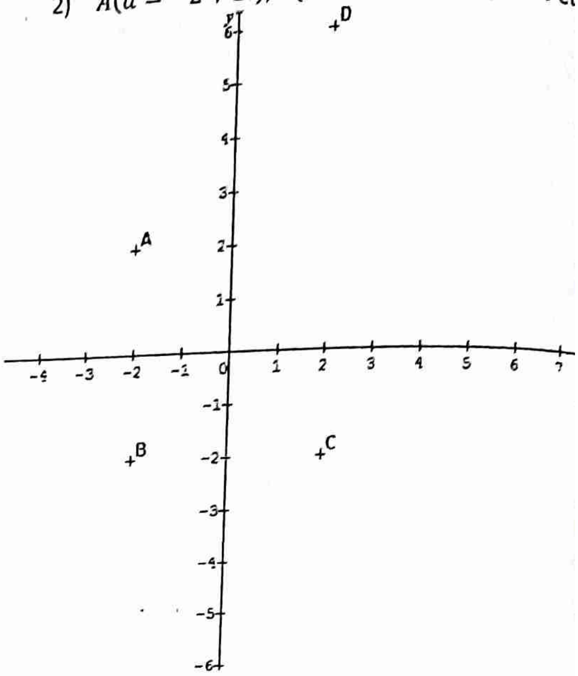
1) Résolvons dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 4z + 8 = 0$

$\Delta' = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$

$z_1 = -2 + 2i$ ou $z_2 = -2 - 2i$

D'où $S = \{-2 + 2i; -2 - 2i\}$

2) $A(a = -2 + 2i), B(b = -2 - 2i)$. Plaçons A et



a) Déterminons l'affixe c du point C image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$r : z' = iz$ alors $z_C = c = i(-2 - 2i) = 2 - 2i$

b) Déterminons l'affixe d du point D image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$r : z' = i(z - z_A) + z_A$

$r(C) = D$ alors $z_D = d = i(z_C - z_A) + z_A = 2 + 6i$

c) Plaçons C et D

3) Soit la similitude directe du plan tel que : $S(O) = O$ et $S(E) = F$ avec $z_E = 1 + i$ et $z_F = 1 + i\sqrt{3}$

a) Déterminons l'écriture complexe de S

$S : z'az + b$

$\begin{cases} S(O) = O \\ S(E) = F \end{cases}$ alors $\begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$

D'où $S : z' = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) z$

b) Déterminons l'angle et le rapport de S

$\alpha = Arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ alors $\alpha = \frac{\pi}{12}$

$k = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right| = \sqrt{2}$

c) Expression analytique de S

$x' + iy' = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)(x + iy)$

$x' + iy' = \frac{\sqrt{3}+1}{2}x - \frac{\sqrt{3}-1}{2}y + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}+1}{2}y\right)$

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}+1}{2}x - \frac{\sqrt{3}-1}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}+1}{2}y \end{cases}$$

Exercice 2

1) $(E): 45x + 28y = 3$

a) Démontrons que 45 et 28 sont premiers entre eux

D	45	28	17	11	6
d	28	17	11	6	5
r	17	11	6	5	1

$pgcd(45; 28) = 1$ alors 45 et 28 sont premiers entre eux

b) Déduisons en le couple $(x_0; y_0)$ solution de l'équation : $45x + 28y = 1$

$$\begin{cases} 45 = 28 \times 1 + 17 \\ 28 = 17 \times 1 + 11 \\ 17 = 11 \times 1 + 6 \\ 11 = 6 \times 1 + 5 \\ 6 = 5 \times 1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17 = 45 - 28 \\ 11 = 28 - 17 \\ 6 = 17 - 11 \\ 5 = 11 - 6 \\ 1 = 6 - 5 \end{cases}$$

$1 = 6 - 5 = 6 \times 2 - 11$

$1 = (17 - 11) \times 2 - 11 = 17 \times 2 - 11 \times 3$

$1 = 17 \times 2 - (28 - 17) \times 3 = 17 \times 5 - 28 \times 3$

$1 = (45 - 28) \times 5 - 28 \times 3 = 45 \times 5 + 28 \times (-8)$

D'où $(x_0; y_0) = (5; -8)$

Déduisons en son ensemble de solution

$45x + 28y = 45 \times 5 + 28 \times (-8)$

$45x - 45 \times 5 = -28y + 28 \times (-8)$

$45(x - 5) = 28(-y - 8)$

45 et 28 étant premiers entre eux alors $\exists! k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} x - 5 = 28k \\ -y - 8 = 45k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28k + 5 \\ y = -45k - 8 \end{cases}$$

D'où $S = \{(28k + 5; -45k - 8), k \in \mathbb{Z}\}$

c) Déterminons le couple $(x ; y)$ solution de l'équation (E)

De ce qui précède, on déduit :

$(x; y) = (28k + 15; -45k - 24), k \in \mathbb{Z}$

2) Déterminons les couples $(a ; b)$ tels que : $m = ppcm(a; b)$ et $d = pgcd(a; b)$ vérifient : $8m - 105d = 30$

d divise $8m - 105d$ alors $d \in D(30)$

$d \in \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$

Pour $d = 2$, on a : $m = 30$

NB : les autres valeurs ne vérifient pas

$\begin{cases} pgcd(a; b) = 2 \\ ppcm(a; b) = 30 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} pgcd(a; b) = 2 \\ a \times b = 60 \end{cases}$

Soit $a = 2a'$ et $b = 2b'$ alors : $\begin{cases} pgcd(a'; b') = 1 \\ a' \times b' = 15 \end{cases}$

Avec a' et b' premiers entre eux

Alors : $(a'; b') = \{(1; 15), (15; 1), (3; 5), (5; 3)\}$

D'où $(a; b) = \{(2; 30), (30; 2), (6; 10), (10; 6)\}$

Exercice 3

1) Soit $(E): 10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$

Démontrons que (E) est une ellipse dont on déterminera les éléments caractéristiques

$10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 = 1$

Alors $(E) : \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1$

Donc (E) est l'ellipse de centre O

Eléments caractéristiques

- Axe focal : $(O, \vec{j})$
- Demi-distance focale : $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Sommets : $B_1(0; 1), B_2(0; -1), A_1\left(\frac{1}{2}; 0\right), A_2\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$
- Foyers : $F_1\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), F_2\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- Directrices : $(D_1): y = \frac{b^2}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $(D_2): y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- Excentricité : $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Déterminons l'équation réduite de (E') image de (E) par la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$

$S : z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z$ alors : $\begin{cases} x' = x\sqrt{2} - y\sqrt{2} \\ y' = x\sqrt{2} + y\sqrt{2} \end{cases}$

En exprimant x et y en fonction de x' et y', on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{x' + y'}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{-x' + y'}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$S((E)) = (E')$ alors : $4\left(\frac{x+y}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-x+y}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1$

D'où $(E'): 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$

3) Déterminons la nature de (E') et ses sommets

(E') est l'ellipse de centre O

$A'_1 = S(A_1) \Rightarrow A'_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$A'_2 = S(A_2) \Rightarrow A'_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$B'_1 = S(B_1) \Rightarrow B'_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$B'_2 = S(B_2) \Rightarrow B'_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

Problème

Partie A : $h_1(x) = x - lnx, \forall x \in]0; +\infty[$

1) Etudions le sens de variation de h_1. Montrons que, $\forall x \in]0; +\infty[, h_1(x) > 0$

h_1 est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $h'_1(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$\forall x \in]0; +\infty[, h'_1(x) = \frac{x-1}{x}$

$h'_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\forall x \in]0; 1[, h'_1(x) < 0$ alors h_1 est strictement décroissante sur $]0; 1[$

$\forall x \in]1; +\infty[, h'_1(x) > 0$ alors h_1 est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

$h_1(1) = 1$

h_1 est minorée sur $]0; +\infty[$ par 1, alors : $\forall x \in]0; +\infty[, h_1(x) > 0$

2) $f_1(x) = \frac{x}{x - lnx}$, $]0; +\infty[$

a) Etudions le sens de variation de f_1

f_1 est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$f'_1(x) = \frac{x - lnx - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - lnx)^2} = \frac{1 - lnx}{(x - lnx)^2}$

$f'_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

$\forall x \in]0; e[, f'_1(x) > 0$ alors f_1 est strictement croissante sur $]0; e[$

$\forall x \in]e; +\infty[, f'_1(x) < 0$ alors f_1 est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$

b) Etudions les limites de f_1 et dressons son tableau de variation

- $\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 0$
- $\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}} = 1$

Tableau de variation

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1,58$	$\searrow$	1

3) $\begin{cases}\varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_1(x) = f_1(x), \forall x \in]0; +\infty[\end{cases}$

a) Montrons que φ_1 prolonge f_1 par continuité en 0

$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = f_1(0) = 0$ alors f_1 est prolongeable par continuité en 0. Soit φ_1 ce prolongement, alors :

$\begin{cases}\varphi_1(x) = \frac{x}{x-\ln x}, si\ x > 0 \\ \varphi_1(0) = 0\end{cases}$

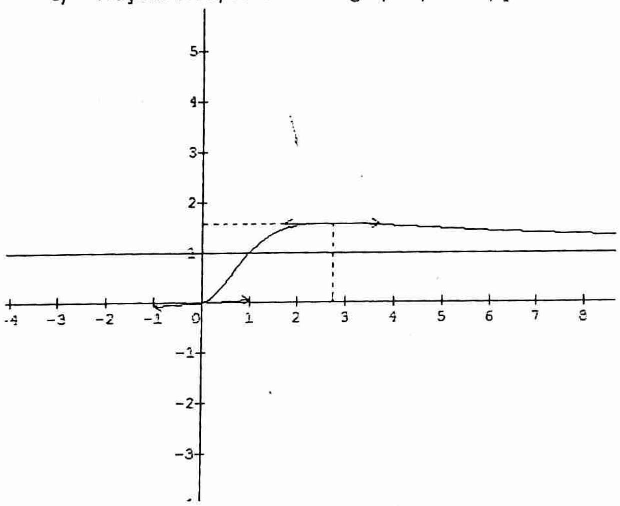
b) Etudions la dérivabilité de φ_1 en 0

$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi_1(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-\ln x} = 0$

Alors φ_1 est dérivable en 0

Interprétation graphique : $\varphi'_1(0) = 0$ alors la courbe représentative de φ_1 admet à l'origine du repère une demi tangente horizontale.

c) Traçons la représentation graphique de φ_1



Partie B : $n \geq 2$

1) $h_n(x) = x^n - \ln x, \forall x \in]0 + \infty[$

Etudions les sens de variation de h_n et déduisons en que, $\forall x \in]0 + \infty[, h_n(x) > 0$

h_n est dérivable sur $]0 + \infty[$ et on a :

$h'_n(x) = nx^{n-1} - \frac{1}{x} = \frac{nx^n - 1}{x}$

$h'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

$\forall x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right[, h'_n(x) < 0$ alors h_n est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right[$

$\forall x \in \left]\frac{1}{\sqrt[n]{n}}; +\infty\right[, h'_n(x) > 0$ alors h_n est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{\sqrt[n]{n}}; +\infty\right[$

$h_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\ln(n) > 0$

h_n est minorée sur$]0 + \infty[$ par $\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\ln(n) > 0$, alors :

$\forall x \in]0 + \infty[, h_n(x) > 0$

2) $f_n(x) = \frac{x}{x^n - \ln x}, \forall x \in]0 + \infty[$

a) $g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - \ln x, \forall x \in]0 + \infty[$

- Montrons que g_n est strictement décroissante sur $]0 + \infty[$

g_n est dérivable sur $]0 + \infty[$ et on a :

$g'_n(x) = n(1-n)x^{n-1} - \frac{1}{x} = \frac{n(1-n)x^n - 1}{x}$

$n \geq 2$, alors $1 - n < 0 \Leftrightarrow n(1-n)x^n - 1 < 0$

D'où $\forall x \in]0 + \infty[, g'_n(x) < 0$ alors g_n est strictement décroissante sur $]0 + \infty[$

- Montrons l'existence d'un unique $\alpha_n \in]0; +\infty[$ tel que : $g_n(\alpha_n) = 0$

g_n est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $g_n(]0; +\infty[) =]\lim_{+\infty} g_n; \lim_{-\infty} g_n[= \mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$ alors $\exists!\ \alpha_n \in]0; +\infty[$ tel que : $g_n(\alpha_n) = 0$

- Comparons α_n et 1

$g_n(\alpha_n) = 0$ et $g_n(1) = 2 - n < 0$ alors

$g_n(\alpha_n) > g_n(1) \Leftrightarrow \alpha_n < 1$

Donnons la valeur de α_2

$g_n(1) = 2 - n$ alors $g_2(1) = 2 - 2 = 0$

D'où $\alpha_2 = 1$

b) Démontrons que, $\forall x \in]0 + \infty[$, on a :

$f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}$

f_n est dérivable sur $]0 + \infty[$ et on a :

$f'_n(x) = \frac{x^n - \ln x - x\left(nx^{n-1} - \frac{1}{x}\right)}{(x^n - \ln x)^2} = \frac{x^n - \ln x - nx^n + 1}{(x^n - \ln x)^2}$

$f'_n(x) = \frac{(1-n)x^n - \ln x + 1}{(x^n - \ln x)^2} = \frac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}$

c) Déduisons en le sens de variation de f_n

f'_n est du signe de g_n

De ce qui précède, on déduit

$\forall x \in]0; \alpha_n[, f'_n(x) > 0$ alors f_n est strictement croissante sur $]0; \alpha_n[$

$\forall x \in]\alpha_n; +\infty[, f'_n(x) < 0$ alors f_n est strictement décroissante sur $]\alpha_n; +\infty[$

d) Etudions les limites de f_n

- $\lim_{0^+} f_n = \lim_{0^+} \frac{x}{x^n - \ln x} = 0$
- $\lim_{+\infty} f_n = \lim_{+\infty} \frac{1}{x^{n-1} - \frac{\ln x}{x}} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f_n

e) Montrons que f_n admet un prolongement par continuité en 0, noté φ_n

$\lim_{0^+} f_n = f_n(0) = 0$ alors f_n est prolongeable par continuité en 0 et soit φ_n ce prolongement

D'où $G'(x) = \frac{x^2(x^2-2x-6)}{(x^2-x-2)^2}$

- $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{7}$ ou $x = 1+\sqrt{7}$

$\forall x \in]-\infty; 1-\sqrt{7}[\cup]1+\sqrt{7}; +\infty[, G'(x) > 0$ alors G croit sur $]-\infty; 1-\sqrt{7}[$ et $]1+\sqrt{7}; +\infty[$

$\forall x \in]1-\sqrt{7}; -1[\cup]-1; 2[; G'(x) < 0$ alors G décroit sur $]1-\sqrt{7}; -1[$ et $]-1; 2[$

2) Etudes aux bornes de D_G

- $\lim_{x\to-\infty} G(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to-1^-} G(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-1^+} G(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à (C_G)

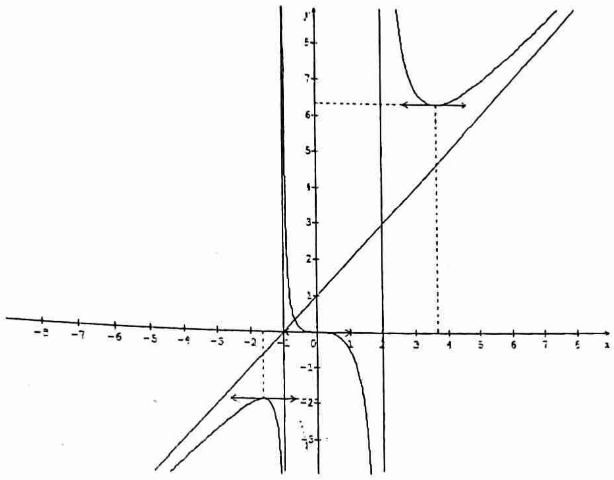
- $\lim_{x\to 2^-} G(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 2^+} G(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 2$ est verticale à (C_G)

3) Traçons la courbe (C_G)

$\lim \frac{G(x)}{x} = 1$ et $\lim(G(x) - x) = 1$

Alors la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$



Sujet n°10

Exercice 1

$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$

1) Montrons que f est une isométrie négative

Soit O un point du plan et $O'(1;3) = f(O)$

$OM^2 = x^2 + y^2$ et $O'M'^2 = (x'-1)^2 + (y'-3)^2$

$O'M'^2 = (y+1-1)^2 + (x+3-3)^2 = y^2 + x^2$

Alors : $OM = O'M'$

Soit φ l'endomorphisme associé à f tel que : $M_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$det\varphi = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

D'où f est une isométrie négative

2) Déterminons l'ensemble des points invariants

M est invariant par f si et seulement si : $f(M) = M$

$\begin{cases} x = y + 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -3 \end{cases}$

D'où l'ensemble des points invariants est l'ensemble vide

Donnons la nature de f

f est un antidéplacement qui n'a point de points invariants donc f est une symétrie glissée

Déterminons les éléments caractéristiques de f

- Vecteur de translation

$f \circ f(M) = M"$ alors : $\begin{cases} x" = y' + 1 \\ y" = x' + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x" = x + 4 \\ y" = y + 4 \end{cases}$

$f \circ f = t_{2\vec{u}}$ alors $\vec{u}(2;2)$ est le vecteur de translation

- Axe de la symétrie

$s_{(D)} = f \circ t_{-\vec{u}}$

$t_{-\vec{u}}: \begin{cases} x_1 = x - 2 \\ y_1 = y - 2 \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} y_2 = y_1 + 1 \\ y_2 = x_1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y - 2 + 1 \\ y_2 = x - 2 + 3 \end{cases}$

Alors $s_{(D)}$: $\begin{cases} x_2 = y - 1 \\ y_2 = x + 1 \end{cases}$

$s_{(D)}(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{cases}$

D'où $(D): x - y + 1 = 0$

Exercice 2

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) : $\frac{z-2}{z-1} = z$

$\frac{z-2}{z-1} = z \Leftrightarrow z - 2 = z^2 - z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta' = -1 = i^2$

$z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$

$S = \{1+i; 1-i\}$

Donnons le module et un argument de chaque solution

$|z_1| = \sqrt{2}$ et $|z_2| = \sqrt{2}$

Soit $\theta = \arg(z_1)$ alors : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

D'où $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$z_2 = \bar{z_1}$ alors $\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (2) : $\frac{z-2}{z-1} = i$

$\frac{z-2}{z-1} = i \Leftrightarrow z - 2 = iz - i \Leftrightarrow z(1-i) = 2 - i$

Alors $z = \frac{2-i}{1-i} = \frac{(2-i)(1+i)}{2} = \frac{2+2i-i+1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

D'où $S = \left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

3) Soit M, A et B les ponts d'affixes respectives z, 1 et 2

a) Interpréter géométriquement le module et un argument de : $\frac{z-2}{z-1}$

$\left|\frac{z-2}{z-1}\right| = \frac{MB}{MA}$ et $\arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = mes(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) + 2k\pi$

b) Retrouvons géométriquement la solution de l'équation (2)

(2) : $\frac{z-2}{z-1} = i$

$\begin{cases} \left|\frac{z-2}{z-1}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{MB}{MA} = 1 \\ mes(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

Cette solution est donc l'intersection de la médiatrice du $[AB]$ et le cercle de diamètre $[AB]$(c'est le point d'abscisse positive)

4) – Montrons, à l'aide d'une interprétation géométrique que toute solution de l'équation : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$ a pour partie réelle $\frac{3}{2}$

De ce qui précède, on a : $\left|\frac{z-2}{z-1}\right| = 1$ alors $\left|\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n\right| = 1$

Or $\left|\frac{z-2}{z-1}\right| = \frac{MB}{MA}$ alors $\left|\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n\right| = \frac{MB^n}{MA^n}$

$\left|\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = 1$

D'après 2) et 3) b), on déduit que toute solution de l'équation $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$ a pour partie réelle $\frac{3}{2}$

- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (3) : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$

Posons $Z = \frac{z-2}{z-1}$ alors $Z^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Soit $Z = re^{i\alpha}$ alors $Z^2 = r^2e^{2i\alpha}$

$\begin{cases} r = 1 \\ \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k = \{0; 1\} \end{cases}$

$Z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $Z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Alors : $\frac{z-2}{z-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{z-2}{z-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{z-2}{z-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow z - 2 = (z-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z - z\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \Leftrightarrow z\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$

$\Rightarrow z = \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}+4}{2-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}i$

$\frac{z-2}{z-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow z - 2 = (z-1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z - z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$

$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}+4+i\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{8+4\sqrt{2}}i$

D'où $S = \left\{\frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}i ; \frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{8+4\sqrt{2}}i\right\}$

<u>Problème</u>

$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$

<u>Partie A</u> : $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$

1) Vérifions que, $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$

$f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7} = \frac{4e^x}{e^x(1+7e^{-x})}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$

2) a) vérifions que la courbe (C_1) admet deux asymptotes dont on précisera des équations

- $\lim_{-\infty} f_1 = \frac{4}{+\infty} = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C_1) au voisinage de $-\infty$
- $\lim_{+\infty} f_1 = \frac{4}{1} = 4$ alors la droite d'équation $y = 4$ est asymptote horizontale à (C_1) au voisinage de $+\infty$

b) Démontrons que f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'_1(x) = \frac{4e^x(e^x+7)-4e^{2x}}{(e^x+7)^2}$

D'où $f'_1(x) = \frac{28e^x}{(e^x+7)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'_1(x) > 0$ alors f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c) Démontrons que, $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < f_1(x) < 4$

f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{-\infty} f_1 = 0$ et $\lim_{+\infty} f_1 = 4$ alors : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < f_1(x) < 4$

3) a) Démontrons que le point $I_1(ln7; 2)$ est un centre de symétrie de (C_1)

$f_1(2ln7 - x) = \frac{4}{1+7e^{-2ln7+x}} = \frac{4}{1+\frac{1}{7}e^x} = \frac{28}{7+e^x}$

$f_1(2ln7 - x) + f_1(x) = \frac{28}{7+e^x} + \frac{4e^x}{e^x+7} = \frac{4(7+e^x)}{e^x+7}$

D'où $f_1(2ln7 - x) + f_1(x) = 4$ alors $I_1(ln7; 2)$ est un centre de symétrie de (C_1)

b) Déterminons une équation da tangente (T_1) à (C_1) au point I_1

$y = f'_1(ln7)(x - ln7) + f_1(ln7)$

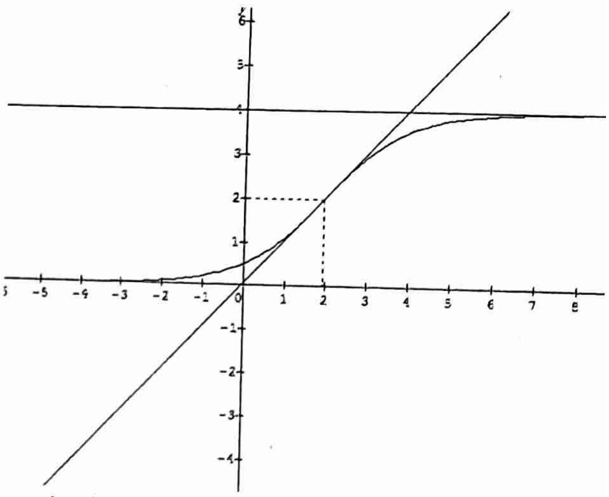
Avec $f_1(ln7) = 2$ et $f'_1(ln7) = 1$

D'où $(T_1) : y = x - ln7 + 2$

c) Traçons (C_1)

<u>Tableau de variation de f_1</u>

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ 4



4) a) Déterminons une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$

$f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$ alors $F_1(x) = 4\ln(e^x + 7) + c$

b) Calculons la valeur moyenne de f_1 sur $[0; ln7]$

$\mu = \frac{1}{ln7}\int_0^{ln7} f_1(x)dx = \frac{1}{ln7}[4\ln(e^x + 7)]_0^{ln7}$

$\mu = \frac{1}{ln7}(4ln14 - 4ln8) = \frac{4}{ln7} ln\frac{14}{8}$

D'où $\mu = \frac{4}{ln7} ln\frac{7}{4}$

<u>Partie B</u> :

1) Démontrons que le point $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ appartient à (C_n)

$f_n(0)=\frac{4e^0}{e^0+7}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ alors $A\left(0;\frac{1}{2}\right)\in(C_n)$

2) a) Démontrons que, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, la courbe (C_n) et la droite d'équation $y=2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse

$(C_n)\cap(y=2)\Leftrightarrow\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}=2$

$4e^{nx}-2e^{nx}=14\Leftrightarrow e^{nx}=7$

$\Rightarrow x=\frac{ln7}{n}$

b) Déterminons une équation de la tangente (T_n) à (C_n) au point I_n

$(T_n): y=f'_n\left(\frac{ln7}{n}\right)\left(x-\frac{ln7}{n}\right)+f_n\left(\frac{ln7}{n}\right)$

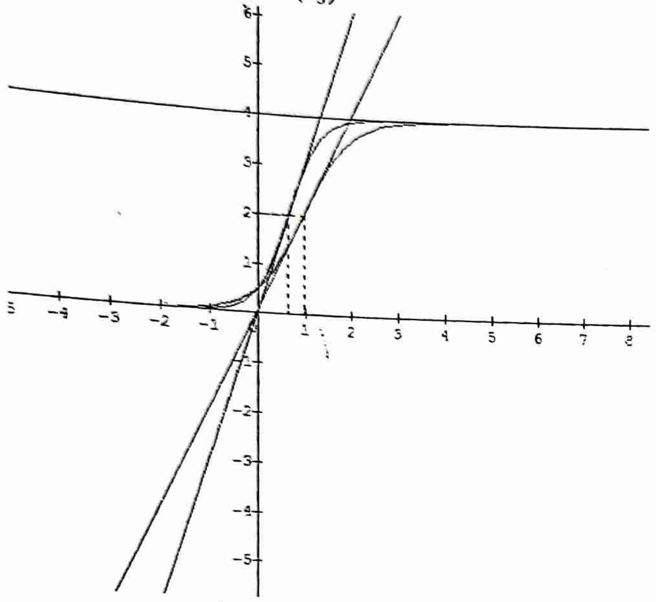
On sait que : $f'_n(x)=nf'_1(nx)=n\frac{28e^{nx}}{(e^{nx}+7^2}$

$\Rightarrow f'_n\left(\frac{ln7}{n}\right)=n$ et $f_n\left(\frac{ln7}{n}\right)=2$

$y=n\left(x-\frac{ln7}{n}\right)+2$

D'où $(T_n): y=nx-ln7+2$

c)Traçons (C_2) et (C_3)



3) $u_n=\frac{n}{ln7}\int_0^{\frac{ln7}{n}}f_n(x)$. Montrons que la suite (u_n) est constante

$f_n(x)=\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}\Rightarrow F_n(x)=\frac{4}{n}\ln\left(e^{nx}+7\right)$

$u_n=\frac{n}{ln7}\left[\frac{4}{n}\ln\left(e^{nx}+7\right)\right]_0^{\frac{ln7}{n}}=\frac{n}{ln7}\times\frac{4}{n}(ln14-ln8)$

$u_n=\frac{4}{ln7}ln\frac{7}{4}$

D'où la suite (u_n) est constante

Sujet n°11

Exercice 1

1) Calculons $(2-\sqrt{3}-i)^2$

$(2-\sqrt{3}-i)^2=6-4\sqrt{3}+i(2\sqrt{3}-4)$

2) $2z^2-(2+\sqrt{3}-3i)z-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})=0$

a) Résolvons $\mathbb{C}$ cette équation

$\Delta=(2+\sqrt{3}-3i)^2-8(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})$

$\Delta=6-4\sqrt{3}+i(2\sqrt{3}-4)=(2-\sqrt{3}-i)^2$

$z_1=\frac{2+\sqrt{3}-3i+2-\sqrt{3}-i}{4}=1-i$

$z_2=\frac{2+\sqrt{3}-3i-2+\sqrt{3}+i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

D'où $S=\left\{1-i;\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$

b) $z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$. Calculons $z_0{}^{2015}$

$z_0{}^{2015}=cos2015\frac{\pi}{6}-isin2015\frac{\pi}{6}$

Or $\frac{2015\pi}{6}=336\pi-\frac{\pi}{6}$

Alors $z_0{}^{2015}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Exercice 2

7 boules noires et n boules rouges soit $n+7$ boules

On tire successivement avec remise deux boules de l'urne

Si les deux boules sont de même couleur, on gagne 25 frs

Si les deux sont de couleurs différentes, on perd 25 frs

1) On suppose $n=5$

a) Calculons la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur

Soit Ω l'univers des possibles, alors : $Card\Omega=12^2=144$

Soit A cet événement, alors : $CardA=5^2+7^2=74$

D'où $P(A)=\frac{74}{144}=\frac{37}{72}$

b) Calculons la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes

Soit B cet événement, alors $CardB=2\times5\times7=70$

Alors $P(A)=\frac{70}{144}=\frac{35}{72}$

2) On suppose $n>5$

a) Calculons $P(X=-25)$ et $P(X=25)$

$P(X=-25)=\frac{2\times7\times n}{(n+7)^2}=\frac{14n}{(n+7)^2}$

$P(X=25)=\frac{7^2+n^2}{(n+7)^2}=\frac{n^2+49}{(n+7)^2}$

b) Déduisons en que : $E(X)=25\times\frac{(n-7)^2}{(n+7)^2}$

$E(X)=-25\times\frac{14n}{(n+7)^2}+25\times\frac{n^2+49}{(n+7)^2}=25\times\frac{-14n+n^2+49}{(n+7)^2}$

D'où $E(X)=25\times\frac{n^2-14n+49}{(n+7)^2}=25\times\frac{(n-7)^2}{(n+7)^2}$

c) Valeur pour laquelle $E(X)=0$

$E(X)=0\Leftrightarrow n=7$

Exercice 3

I) $z'=z^2+2z$, $M(x;y)$ et $M'(x';y')$

1) Calculons x' et y' en onction de x et y

$x'+iy'=(x+iy)^2+2(x+iy)=x^2-y^2+2x+i(2xy+2y)$

$\begin{cases}x'=x^2-y^2+2x\\ y'=2xy+2y\end{cases}$

2) Montrons que l'ensemble (H) des points M tels que z' soit imaginaire pur est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes

$z'\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-y^2+2x=0$

On obtient : $(x+1)^2-y^2=1$

Alors (H) est une hyperbole équilatère de centre $\Omega(-1;0)$, de sommets $A(1;0)$ et $A'(-1;0) \Leftrightarrow O(0;0)$ et $A'(-2;0)$, d'asymptotes $(\Delta): Y = X \Leftrightarrow y = x+1$ et $(\Delta'): Y = -X \ \Leftrightarrow y = -x-1$

II) $\quad \Gamma: \ x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$

1) Montrons que Γ est une conique dont on précisera le centre, les axes de symétries, les foyers, les directrices, les asymptotes et l'excentricité

$(x+4)^2 - 3(y-2)^2 + 12 = 0$

Alors Γ : $-\frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow -\frac{X}{12} + \frac{Y}{4} = 1$

Γ est la conique de centre $\Omega(-4;2)$

- Les axes de symétries : $(\Omega, \vec{j})$ axe transverse et $(\Omega, \vec{i})$ axe non transverse
- Les foyers :

$a = 2\sqrt{3}, b = 2$ alors $c = \sqrt{12+4} = 4$

$F(0;4)$ et $F'(0;-4)$ dans $(\Omega;\ \vec{i};\ \vec{j})$ alors $F(-4;6)$ et $F'(-4;\ -2)$ dans $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$

- Les directrices :

$(D): Y = \frac{b^2}{c} = 1$ et $(D'): Y = -1$ dans $(\Omega;\ \vec{i};\ \vec{j})$ alors $(D): y = 3$ et $(D'): y = 1$ dans $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$

- Les asymptotes :

$(\Delta): Y = \frac{\sqrt{3}}{3}X$ et $(\Delta'): Y = -\frac{\sqrt{3}}{3}X$ dans $(\Omega;\ \vec{i};\ \vec{j})$ alors $(\Delta): y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)+2$ et $(\Delta'): y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)+2$ dans $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$

- Excentricité :

$e = \frac{c}{b} = 2$

2) Soit $(D): y-3=0$ et $P(-4;6)$. Déterminons l'ensemble des points M tels que : $d(M,P) = 2d(M,D)$

$$d(M,P) = 2d(M,D) \Leftrightarrow \frac{d(M,P)}{d(M,D)} = 2 = e$$

Or $P = F$ alors : $\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = 2$

D'où l'ensemble cherché est l'ensemble Γ

Problème

I) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, si\ x < 0 \\ f(x) = x^2 lnx, si\ x \geq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) Montrons que, $\forall\ x < 0, f$ est dérivable et calculons sa dérivée

$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est dérivable pour $x < 0$ et $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable pour $x < 0$

Par produit, f est dérivable pour $x < 0$

$\forall\ x < 0, f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} = \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}}$

D'où $\forall\ x < 0, f'(x) = -\frac{(2x+1)}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Alors : $f'(x) > 0$ sur $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]-\frac{1}{2};0\right[$

b) Montrons que, $\forall\ x \geq 0, f$ est dérivable, calculons $f'(x)$ et étudions son signe

$x \mapsto x^2$ est dérivable pour $x \geq 0$ et $x \mapsto lns$ est dérivable pour $x > 0$

Par produit, f est dérivable pour $x \geq 0$

$\forall\ x \geq 0, f'(x) = 2xlnx + \frac{1}{x} \times x^2 = x(2lnx + 1)$

$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$

Alors : $f'(x) < 0$ sur $\left]0;\ e^{-\frac{1}{2}}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]e^{-\frac{1}{2}};\ +\infty\right[$

c) Calculons $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$. Déduisons en que f est dérivable en 0

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to -\infty} X^3 e^X = 0$

Alors $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} xlnx = 0$

Alors $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = f'(0) = 0$ alors f est dérivable en 0

d) Continuité de f sur $\mathbb{R}$

f continue sur $]-\infty;0[$ et sur $[0;\ +\infty[$. De plus f(0)=0 alors f est continue sur $\mathbb{R}$

2) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{\to +\infty} f(x) = +\infty$

3) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$0{,}5$	$\searrow$	$-0{,}1$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie II :

A) $g(x) = 3 + 2\ln(x-1) - \ln(x+1), \forall\ x \in\ ]1;\ +\infty[$

1) Calculons les limites de g

- $\lim_{x\to 1} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(3 + \ln\frac{(x-1)^2}{x+1}\right) = +\infty$

2) Etudions les variations de g

g est dérivable sur $]1;\ +\infty[$ et on a : $g'(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

D'où $\forall\ x \in\ ]1;\ +\infty[, g(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$

$\forall\ x \in\ ]1;\ +\infty[, g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]1;\ +\infty[$

Tableau de variation de g

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

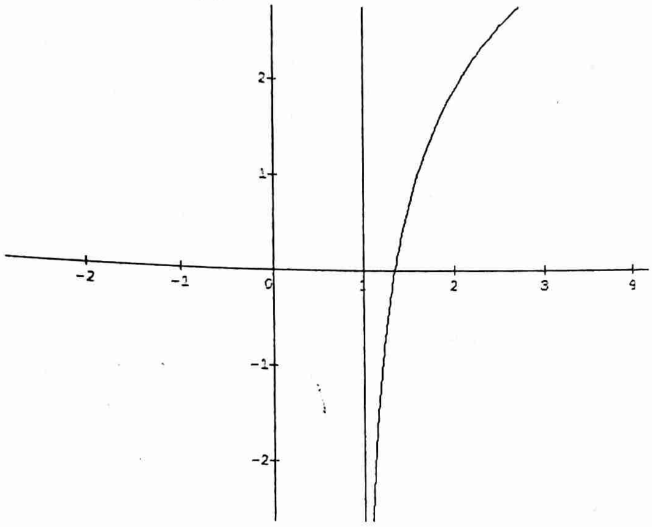
g est continue et strictement croissante sur $]1;\ +\infty[$, elle réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ vers $g(]1;\ +\infty[) = \mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un et un seul $\alpha \in]1;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$

Trouvons une valeur approchée de α à 0, 1 près

α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$g(\alpha)$	-	-	-	+	+	+	+	+	+

Alors $\alpha \cong 1{,}3$

4) Traçons (C)



B) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

1) Représentons sur l'axe des abscises u_0, u_1 et u_2

$u_1 = g(5) = 3{,}98$ et $u_2 = g(3{,}98) = 3{,}57$

2) a) Vérifions que $g(3) = 3$. Montrons que si $x \in [3; 5]$ alors $g(x) \in [3; 5]$

$g(3) = 3 + 2ln2 - 2ln2 = 3$ et $g(5) = 3{,}9$

$g([3; 5]) = [3; 3{,}9] \subset [3; 5]$

D'où si $x \in [3; 5]$ alors $g(x) \in [3; 5]$

b) Montrons que, $\forall\, x \in [3; 5]$, on a : $\frac{1}{4} \leq g'(x) \leq \frac{5}{6}$

$$3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x-1} \leq 1 \\ -\dfrac{1}{4} \leq -\dfrac{2}{x+1} \leq -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Alors $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \leq g'(x) \leq 1 - \frac{1}{6}$

D'où $\forall\, x \in [3; 5]$, on a : $\frac{1}{4} \leq g'(x) \leq \frac{5}{6}$

c) Montrons que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [3; 5]$

- $u_0 = 5 \Rightarrow u_0 \in [3; 5]$
- Suposospns que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [3; 5]$
- Vérifions que $u_{n+1} \in [3; 5]$

On a : $g(x) \in [3; 5]$

Posons $x = u_n \Rightarrow g(u_n) = u_{n+1} \in [3; 5]$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [3; 5]$

d) Montrons que, $\forall\, x \in [3; 5], |g(x) - 3| \leq \frac{5}{6}|x - 3|$

$\forall\, x \in [3; 5], g(x) \in [3; 5]$ et $g'(x) \leq \frac{5}{6}$

L'inégalité des accroisements finis à g entre 3 et x donne :

$|g(x) - g(3)| \leq \frac{5}{6}|x - 3|$

Or $g(3) = 3$

D'où $\forall\, x \in [3; 5], |g(x) - 3| \leq \frac{5}{6}|x - 3|$

3) a) Montrons que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - 3| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n |u_0 - 3|$

Posons $x = u_n$ alors : $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{5}{6}|u_n - 3|$

Par itération, on a :

$$|u_n - 3| \leq \frac{5}{6}|u_{n-1} - 3|$$

$$|u_{n-1} - 3| \leq \frac{5}{6}|u_{n-2} - 3|$$

$$|u_{n-2} - 3| \leq \frac{5}{6}|u_{n-3} - 3|$$

....

....

....

$$|u_1 - 3| \leq \frac{5}{6}|u_0 - 3|$$

Par produit et simpliication, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - 3| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n |u_0 - 3|$$

b) Convergence de (u_n)

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

c) Déterminons n_0 tel que : $|u_{n_0} - 3| \leq 10^{-2}$

$|u_{n_0} - 3| \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{n_0} \times 2 \leq 10^{-2}$

Alors $n_0 \geq \frac{-2ln10 - ln2}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$

Soit $n_0 = 29$

Sujet n°12

Exercice 1

$P(z) = z^3 - 6z^2 + (12 - i)z - 9 + 3i$

1) Montrons qu'il existe un réel α tel que : $P(\alpha) = 0$

$P(\alpha) = \alpha^3 - \alpha^2 + 12\alpha - 9 + i(-\alpha + 3)$

$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - \alpha^2 + 12\alpha - 9 = 0 \\ -\alpha + 3 = 0 \end{cases}$

α réel, $-\alpha + 3 = 0$ alors $\alpha = 3$

2) Déterminons a et b tels que : $P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b)$

$P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b) = z^3 + (a - 3)z^2 + (b - 3a)z - 3b$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a = -3 \\ b = 3 - i \end{cases}$

D'où $P(z) = (z-3)(z^2 - 3z + 3 - i)$

3) Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 3 \text{ ou } z^2 - 3z + 3 - i$

$\Delta = 9 - 12 + 4i = -3 + 4i$

Soit $\delta = x + iy$ tel que : $\delta^2 = \Delta = x^2 - y^2 + 2ixy$ et

$|\delta^2| = x^2 + y^2 = 5$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy > 0 \end{cases}$$

$x = 1$ ou $x = -1$ et $y = 2$ ou $y = -2$

Alors $\delta = 1 + 2i$

$z_1 = \frac{3+1+2i}{2} = 2 + i$ ou $z_2 = \frac{3-1-2i}{2} = 1 - i$

D'où $S = \{3; 2+i; 1-i\}$

4) Soient $z_A = 3, z_B = 2 + i, z_C = 1 - i$

a) Démontrons qu'il existe une unique similitude directe S de centre C, qui transorme A en B

Soit : $z' = az + b$

$$\begin{cases} S(C) = C \\ S(A) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_C = az_C + b \ (1) \\ z_B = az_A + b \ (2) \end{cases}$$

(1) − (2) donne : $z_C - z_B = a(z_C - z_A)$

Alors : $a = \frac{1+2i}{2+i} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

$b = z_C - az_C = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$

D'où $S : z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)z - \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$

b) Déterminons le rapport de S

$k = |a| = 1$

c) Donnons l'xpression analytique de S

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$x' + iy' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)(x + iy) - \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$

$x' + iy' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} + i\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5}\right)$

$$S : \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} \\ y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5} \end{cases}$$

d) Soit $(D) : y = x$. Donnons une équation de la droite (D'), image de la droite (D') par S

Exprimons x et y en fonction de x' et y'

En résolvons le système $\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} \\ y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5} \end{cases}$ on obtient :

$x = \frac{4x'+3y'+4}{5}$ et $y = \frac{-3x'+4y+2}{5}$

$S((D)) = (D')$ alors : $\frac{-3x'+4y+2}{5} = \frac{4x'+3y'+4}{5}$

D'où $(D') : 7x - y + 2 = 0$

Exercice 2

1) Démontrons que, $\forall n \geq 1, 22^{9n+2} - 31^{3n-1}$ est divisible par 9

Soit $P(n)$ cette proposition

- Si $n = 1, 22^{11} - 31^2 = P(1)$

$22 \equiv 4[9]$ et $31 \equiv 4[9]$ alors $22^{11} \equiv 7[9]$ et $31^2 \equiv 7[9]$

Alors : $22^{11} - 31^2 \equiv 0[9]$ donc $P(1)$ vraie

- Suposons que $P(n)$ est vraie
- Vérifions au rang $n + 1$

2) a) Déterminons $pgcd(21590; 9525)$

D	21590	9525	2540	1905
d	9525	2540	1905	635
r	2540	1905	635	0

Alors $pgcd(21950; 9525) = 635$

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$: $21590x - 9525y = 1270$

$21590x - 9525y = 1270 \Leftrightarrow 34x - 15y = 2$

D	34	15	4
d	15	4	3
r	4	3	1

$pgcd(34; 15) = 1$ alors 34 et 15 sont premiers entre eux

$$\begin{cases} 34 = 15 \times 2 + 4 \\ 15 = 4 \times 3 + 3 \\ 4 = 3 \times 1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 34 - 15 \times 2 \\ 3 = 15 - 4 \times 3 \\ 1 = 4 - 3 \times 1 \end{cases}$$

$1 = 4 - 3 \times 1 = 4 - (15 - 4 \times 3) = 4 \times 4 - 15 \times 1$

$1 = (34 - 15 \times 2) \times 4 - 15 = 34 \times 4 - 15 \times 9$

Alors $2 = 34 \times 8 - 15 \times 18$

$34x - 15y = 34 \times 8 - 15 \times 18$

$34(x - 8) = 15(y - 18)$

34 et 15 étant premiers entre eux alors $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} x - 8 = 15k \\ y - 18 = 34k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15k + 8 \\ y = 34k + 18 \end{cases}$$

D'où $S = \{15k + 8; 34k + 18, k \in \mathbb{Z}\}$

Problème

Partie A : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}, \forall x \in]0; +\infty[$

1) Calculons $g'(x)$ et vérifions que,

$\forall \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)}$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = -\frac{\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2}{x(x^2+1)} + \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2+1)+4x^2}{x(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2-2}{x(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$$

2) Etudions le signe de $g'(x)$

$\forall \in]0; +\infty[, \frac{2(x+1)}{x(x^2+1)^2} > 0$ alors $g'(x)$ est du signe de $x - 1$

$\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$

$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$

3) Calculons les limites de g, puis dressons son tableau de variation

- $\lim_{0^+} g = +\infty$
- $\lim_{+\infty} g = \ln 1 = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-0,3$	↗	0

4) Déduisons en qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 0$

g est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$, elle est une bijection de $]0;1[$ vers $g(]0;1[) =]-0{,}3;+\infty[$.
Comme $0 \in]-0{,}3;+\infty[$ alors $\exists!\,\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$g(\alpha) = 0$

Vérifions que : $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$
$g(0{,}5) = 0{,}009$ et $g(0{,}6) = -0{,}14$
$g(0{,}5) \times g(0{,}6) < 0 \Leftrightarrow 0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

5) Déduions en le signe de g
D'après le tableau de variation et de $g(\alpha) = 0$, on a :
$\forall\, x \in]0;\alpha[, g(x) > 0$
$\forall\, x \in]\alpha;+\infty[, g(x) < 0$

Partie B : $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right), si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrons que, $\forall \in]0;+\infty[, f'(x) = g(x)$
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :
$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + x\frac{-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}$
$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1} = g(x)$
Déduisons en le sens de variation de f
$\forall\, x \in]0;\alpha[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0;\alpha[$
$\forall\, x \in]\alpha;+\infty[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]\alpha;+\infty[$

2) Calculons la limite de $xf(x)$ en $+\infty$ puis déduisons en la limite de f en $+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} xf(x) =$
$\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$
$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$

3) a) Montrons que : $\lim_0 f = 0$
$\lim_0 f = \lim_0 x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \lim_0(x\ln(x^2+1) - 2x\ln x) = 0$
$\lim\limits_{0} f = 0$

b) Etudions la dérivabilité de f en 0
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$
Alors f n'est pas dérivable en 0
Interprétation graphique : la courbe (C) admet à l'origine du repère une demi tangente verticale

4) a) Prouvons que, $\forall\, x \in [0{,}5;\alpha], 0 \le f'(x) \le f'(0{,}5)$
$f'(x) = g(x)$ donc f' est décroissante sur $[0{,}5;\alpha]$
$\forall\, x \in [0{,}5;\alpha], f'(\alpha) \le f'(x) \le f'(0{,}5)$
Or $f'(\alpha) = g(\alpha) = 0$
D'où $\forall\, x \in [0{,}5;\alpha], 0 \le f'(x) \le f'(0{,}5)$

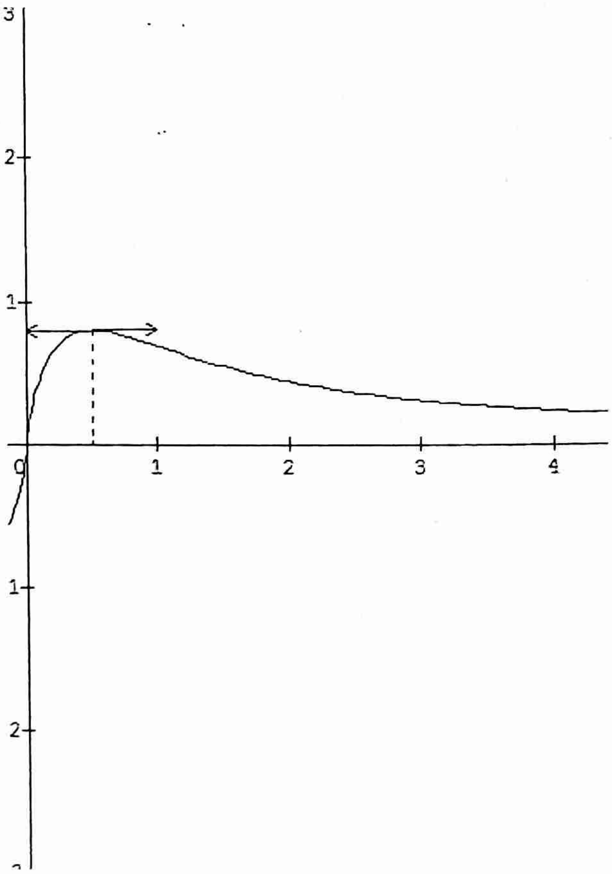
b) Déduisons en que, $\forall\, x \in [0{,}5;\alpha], 0 \le f(\alpha) - f(0{,}5) \le f'(0{,}5)(\alpha - 0{,}5)$
l'inégalité des accroissements finis à f sur $[0{,}5;\alpha]$ donne :
$0(\alpha - 0{,}5) \le f(\alpha) - f(0{,}5) \le f'(0{,}5)(\alpha - 0{,}5)$
D'où $\forall\, x \in [0{,}5;\alpha], 0 \le f(\alpha) - f(0{,}5) \le f'(0{,}5)(\alpha - 0{,}5)$

Déduisons en que $0 \le f(\alpha) - f(0{,}5) \le \frac{1}{10}f'(0{,}5)$
$0 \le f(\alpha) - f(0{,}5) \le f'(0{,}5)(\alpha - 0{,}5)$
Or $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$ alors $\alpha - 0{,}5 \le 0{,}1 = \frac{1}{10}$
D'où $\forall\, x \in [0{,}5;\alpha], 0 \le f(\alpha) - f(0{,}5) \le \frac{1}{10}f'(0{,}5)$

c) Déduisons en une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près
$$0 \le f(\alpha) - f(0{,}5) \le \frac{1}{10}f'(0{,}5)$$
$$\Rightarrow f(0{,}5) \le f(\alpha) \le \frac{1}{10}f'(0{,}5) + f(0{,}5)$$
$0{,}804 \le f(\alpha) \le 0{,}805$
Soit $f(\alpha) \cong 0{,}805$

5) Dressons le tableau de variation de f

x	0		0,5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	0	↗	0,805	↘	0



Sujet n°13

Exercice 1
$P(z) = z^3 + (-9+11i)z^2 + (2-63i)z + 24 + 82i$

1) Démontrons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $P(\alpha) = 0$
$P(\alpha) = \alpha^3 - 9\alpha^2 + 2\alpha + 24 + i(11\alpha^2 - 63\alpha + 82)$
$\begin{cases} \alpha^3 - 9\alpha^2 + 2\alpha + 24 = 0 \\ 11\alpha^2 - 63\alpha + 82 = 0 \end{cases}$
$11\alpha^2 - 63\alpha + 82 = 0$

$\Delta = (-63)^2 - 4(11)(82) = 361 = 19^2$

$\alpha_1 = \frac{63+19}{22} = \frac{82}{22}$ ou $\alpha_2 = \frac{63-19}{22} = 2$

$\alpha = 2$ est la olution réelle

2) Déterminons deux complexes a et b tels que :

$P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$

	1	-9+11i	2-63i	24+82i
2		2	-14+22i	-24-82i
	1	-7+11i	-12-41i	0

$P(z) = (z-2)(z^2 + (-7+11i)z - 12 - 41i)$

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-2=0 \\ z^2 + (-7+11i)z - 12 - 41i = 0 \end{cases}$

$z - 2 = 0$ alors $z_0 = 2$

$z^2 + (-7+11i)z - 12 - 41i = 0$

$\Delta = (-7+11i)^2 - 4(-12-41i) = -24 + 10i$

Soit $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -24 + 10i$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x^2 - y^2 = -24 \\ 2xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 25 \\ xy > 0 \end{cases}$

$x = 1$ ou $x = -1$ et $y = 5$ ou $y = -5$

Alors $\delta = 1 + 5i$

$z_1 = \frac{7 - 11i + 1 + 5i}{2} = 4 - 3i$

$z_2 = \frac{7 - 11i - 1 - 5i}{2} = 3 - 8i$

D'où $S = \{2; 4-3i; 3-8i\}$

4) On donne : $z_A = 2$; $z_B = 4 - 3i$ et $z_C = 3 - 8i$

a) Démontrons qu'il exite une unique similitude directe S qui transforme A en B et B et C

$S : z' = az + b$

$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B = az_A + b \ (1) \\ z_C = az_B + b \ (2) \end{cases}$

(1)-(2)$\Rightarrow a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_B} = \frac{1+5i}{-2+3i} = \frac{(1+5i)(-2-3i)}{13}$

$a = \frac{-2-3i-10i+15}{13} = 1 - i$

$b = z_B - az_A = 4 - 3i - 2(1-i) = 2 - i$

D'où $S : z' = (1-i)z + 2 - i$

b) Déterminons les éléments caractéristiques de S

- Le centre $\Omega(\omega)$

$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2-i}{i} = -i(2-i) = -1 - 2i \Rightarrow \Omega\binom{-1}{-2}$

- Le rapport k

$k = |a| = \sqrt{2}$

- L'angle α

$\alpha = \arg(a) = \begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}$

c) Donnons l'expression analytique de S

$S : z' = (1-i)z + 2 - i$

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$x' + iy' = (1-i)(x+iy) + 2 - i$

$x' + iy' = x + y + 2 + i(-x + y - 1)$

D'où $S : \begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

Exercice 2

x_i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	2	1	α	5	2
P_i	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$		$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{7}$

1) Déterminons α

$\sum P_i = 1 \Rightarrow \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \alpha + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = 1$

$\alpha = 1 - \frac{17}{21} = \frac{4}{21}$

	1	2	3	4	5	6
x_i	1	2	1	4	5	2
P_i	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{}{21}$	$\frac{}{21}$	$\frac{}{7}$

2) Déterminons l'espérance mathématique et la variance de X

$E(X) = \sum x_i P_i = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{9}{21} + \frac{16}{21} + \frac{25}{21} + \frac{36}{21} = \frac{92}{21}$

D'où $E(X) = \frac{92}{21}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Avec $E(X^2) = \frac{1}{21} + \frac{8}{21} + \frac{27}{21} + \frac{64}{21} + \frac{125}{21} + \frac{216}{21} = \frac{441}{21} = 21$

$V(X) = 21 - \left(\frac{92}{21}\right)^2 = \frac{797}{441} = 1{,}81$

3) Définissons et représentons la fonction de repartition de X

$F(X \le x) = \begin{cases} 0, si\ x < 1 \\ \frac{1}{21}, si\ 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{7}, si\ 2 \le x < 3 \\ \frac{2}{7}, si\ 3 \le x < 4 \\ \frac{10}{21}, si\ 4 \le x < 5 \\ \frac{5}{7}, si\ 5 \le x < 6 \\ 1, si\ x \ge 6 \end{cases}$

Exercice 3

$u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1}$

Alors $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$

2) Exprimons v_n en fonction de n

$v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

a) Démontrons que $u_{n+1} = 1 + S_n$

On a : $v_n = u_{n+1} - u_n$

Par itération, on a

$v_0 = u_1 - u_0$

$v_1 = u_2 - u_1$

....

....

....

$v_n = u_{n+1} - u_n$

En additionnant membre à membre et après simplification, on obtient :

$S_n = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1} - 1$ (car $u_0 = 1$)
D'où $u_{n+1} = 1 + S_n$

b) Exprimons S_n en fonction de n, puis déduisons en u_n en fonction de n

$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$u_{n+1} = 1 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors : $u_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) Calculons le plus petit $p \leq n$ tel que : $|u_n - 3| \leq 10^{-4}$

$u_n - 3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ alors $|u_n - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$|u_n - 3| \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-3}$

$(n-1)ln\frac{1}{2} \leq -4ln10$ alors : $n \geq \frac{4ln10}{ln2} + 1 \geq 14{,}28$

D'où $p \cong 15$

Problème

Partie A :

$\begin{cases} f(x) = 1 - xlnx, si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) Etudions la dérivabilité de f en 0, puis interprétons graphiquement le resultat

$\lim_0 \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_0(-lnx) = +\infty$ alors f n'est pas dérivable en 0

Intreprétation graphique : La courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une demi tangente verticale

2) Dressons le tableau de variation de f

f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on a :

$f'(x) = -lnx - \frac{1}{x} \times x = -(lnx + 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

$\forall\, x \in \left]0;\ \frac{1}{e}\right[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $\left]0;\ \frac{1}{e}\right[$

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{e};\ +\infty\right[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{e};\ +\infty\right[$

$\lim_{+\infty} f = -\infty$

Tableau de variation de f

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1{,}4$	$\searrow$	$-\infty$

3) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ dmet une unique solution a

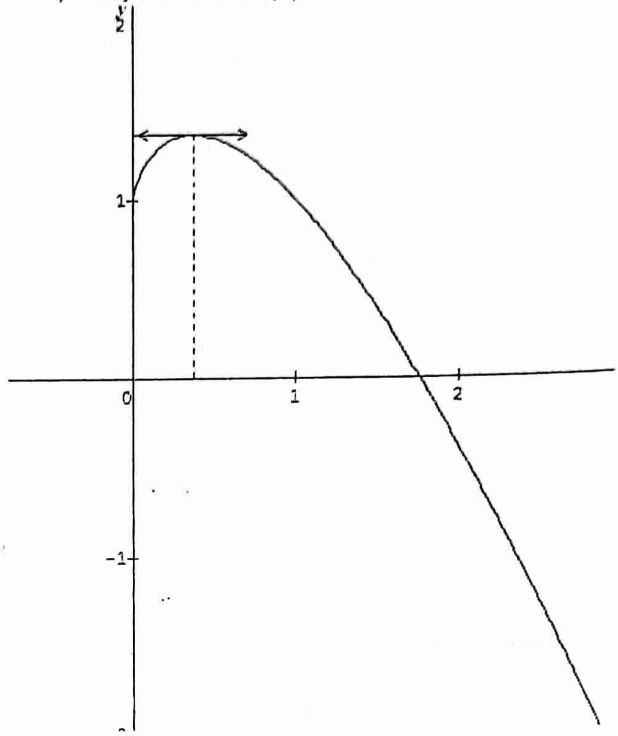
f est continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{e};\ +\infty\right[$, elle est une bijection de $\left]\frac{1}{e};\ +\infty\right[$ vers $f\left(\left]\frac{1}{e};\ +\infty\right[\right) = \ ]-\infty;\ 1{,}4[$. Comme $0 \in\ ]-\infty;\ 1{,}4[$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $a \in \left]\frac{1}{e};\ +\infty\right[$.

Donnons un encadrement de a à 10^{-1}

a	1	…	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(a)$	+	…	+	+	+	+	-	-	-

Alors $1{,}7 \leq a \leq 1{,}8$

4) Traçons la courbe (C)



Partie B :

1) $X_0 > \frac{1}{e}$ et M_0 le point d'abscisse X_0

a) Ecrivons une équation de la tangente (T_0) à (C) au point M_0

$y = f'(X_0)(x - X_0) + f(X_0)$

$f'(X_0) = -(lnX_0 + 1)$

$y = -(lnX_0 + 1)(x - X_0) + 1 - X_0 lnX_0$

$y = -(lnX_0 + 1)x + X_0 lnX_0 + X_0 + 1 - X_0 lnX_0$

$(T_0) : y = -(lnX_0 + 1)x + X_0 + 1$

b) Montrons que le point M_1 intersection de (T_0) et l'axe des abscisses a pour abscisse $X_1 = \frac{1+X_0}{1+lnX_0}$

$(T_0) \cap (xx') \Leftrightarrow y = 0$

$-(lnX_0 + 1)x + X_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+X_0}{1+lnX_0}$

D'où $X_1 = \frac{1+X_0}{1+lnX_0}$

2) $g(x) = \frac{1+x}{1+lnx}, \forall\, x \in \left]\frac{1}{e};\ +\infty\right[$

a) Démontrons que l'équation $g(x) = x$ est équivalente à l'équation $f(x) = 0$

$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1+x}{1+lnx} = x$

$\Rightarrow 1 + x = x + xlnx$

$\Rightarrow 1 - xlnx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

D'où $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$

Déduisons en que l'équation $g(x) = x$ dmet une solution

$g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$ et a étant la solution de l'équation $f(x) = 0$ alors l'équation $g(x) = x$ a pour solution a

b) Soit $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$. Etudions les variations de g sur I

g est dérivable sur I et on a : $g'(x) = \frac{1+lnx-\frac{1}{x}(1+x)}{(1+lnx)^2}$

$g'(x) = \frac{1+lnx-\frac{1}{x}-1}{(1+lnx)^2} = \frac{xlnx-1}{(1+lnx)^2}$

$\forall x \in I, g'(x) = \frac{-(-xlnx+1)}{(1+lnx)^2} = \frac{-f(x)}{(1+lnx)^2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$

$\forall x \in \left[\frac{3}{2}; a\right], g'(x) \leq 0$ alors g décroit sur $\left[\frac{3}{2}; a\right]$

$\forall x \in [a; 2], g'(x) \geq 0$ alors g croit sur $[a; 2]$

<u>Tableau de variation de g</u>

x	$3/2$	a	2
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$1,79$	a	$1,77$

c) Démontrons que, $\forall x \in I, g(x) \in I$

$\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq 1 + x \leq 3$ (1)

$\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{1+ln2} \leq \frac{1}{1+lnx} \leq \frac{1}{1+ln\frac{3}{2}}$ (2)

$(1) \times (2) \Rightarrow \frac{\frac{5}{2}}{1+ln2} \leq g(x) \leq \frac{3}{1+ln\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow 1,5 \leq g(x) \leq 1,6$

$[1,5; 1,6] \subset \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

D'où $\forall x \in I, g(x) \in I$

d) Démontrons que, $\forall x \in I, |g'(x)| \leq 0,15$

$\forall x \in I, g'(x) = \frac{-(-xlnx+1)}{(1+lnx)^2}$

$\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{(1+ln2)^2} \leq \frac{1}{(1+lnx)^2} \leq \frac{1}{\left(1+ln\frac{3}{2}\right)^2}$ (1)

$\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \Rightarrow -\left(-\frac{3}{2}ln\frac{3}{2}+1\right) \leq -(-xlnx+) \leq -(-2ln2+1)$ (2)

$(1) \times (2) \Rightarrow \frac{-\left(-\frac{3}{2}ln\frac{3}{2}+1\right)}{(1+ln2)^2} \leq g'(x) \leq \frac{-(-2ln2+1)}{\left(1+ln\frac{3}{2}\right)^2}$

$|g'(x)| \leq \frac{\left(-\frac{3}{2}ln\frac{3}{2}+1\right)}{(1+ln2)^2} \leq 0,14$

D'où $\forall x \in I, |g'(x)| \leq 0,15$

3) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a) Démontrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

- $u_0 = 2 \in I$
- Supposons que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
- Vérifions que $u_{n+1} \in I$

On a : $\forall x \in I, g(x) \in I$

Posons $x = u_n \Rightarrow g(u_n) = u_{n+1} \in I$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

b) Démontrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leq 0,15|u_n - a|$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I, \forall x \in I, |g'(x)| \leq 0,15$ et $a \in I$

L'inégalité des accroissements finis à g entre u_n et a donne : $|g(u_n) - g(a)| \leq 0,15|u_n - a|$

Or $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(a) = a$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leq 0,15|u_n - a|$

c) Déduisons en que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq (0,15)^n \times \frac{1}{2}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leq 0,15|u_n - a|$

Par itération, on a :

$|u_n - a| \leq 0,15|u_{n-1} - a|$

$|u_{n-1} - a| \leq 0,15|u_{n-2} - a|$

....

....

....

$|u_1 - a| \leq 0,15|u_0 - a|$

Par produit et simplification, on a :

$|u_n - a| \leq (0,15)^n|u_0 - a|$

$u_0 = 2$ et $\frac{3}{2} \leq a \leq 2$ alors $|u_0 - a| \leq \frac{1}{2}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq (0,15)^n \times \frac{1}{2}$

Convergence de (u_n)

$\lim_{n\to+\infty}(0,15)^n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$

<u>Sujet n°14</u>

<u>Exercice 1</u>

$(E) : z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0; d \in \mathbb{C};$ $|d| = 3$

1) Vérifions que $2i$ est solution de (E)

$(2i)^3 + (3 - d^2)(2i) + 2i(1 + d^2) = -8i + 8i - 2id^2 + 2id^2 = 0$

D'où $2i$ est solution de (E).

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

$2i$ racine de (E) alors on a :

	1	0	$3 - d^2$	$2i + 2id^2$
$2i$		$2i$	-4	$-2i - 2id^2$
	1	$2i$	$-1 - d^2$	0

$(E) : (z - 2i)(z^2 + 2iz - 1 - d^2) = 0$

$z = 2i$

Ou

$z^2 + 2iz - 1 - d^2$

$\Delta' = -1 + 1 + d^2 = d^2$

$z_1 = -i - d$ ou $z_2 = -i + d$

$S = \{2i; -i - d; -i + d\}$

2) Calculons MN et déterminons le milieu de $[MN]$

$MN = |z_N - z_M| = |-2d| = 2|d| = 2 \times 3 = 6$

D'où $MN = 6$

$\frac{z_M + z_N}{2} = \frac{-i + d - i - d}{2} = -i = z_B$

Alors B est le milieu du segment $[MN]$

a) Déduisons que lorsque d varie dans $\mathbb{C}$, les points M et N appartiennent à un cercle (C) fixe que l'on précisera

B milieu de $[MN]$ alors : $BM = BN = \frac{MN}{2} = 3$
D'où M et N appartiennent au cercle de centre B et de rayon $r = 3$

b) Dans le cas où AMN est triangle, montrons que O est le centre de gravité de AMN

On a : $\frac{z_A+z_M+z_N}{3} = \frac{2i-i-d-i+d}{3} = 0$
D'où O est le centre de gravité du triangle AMN.

c) Déduisons les valeurs de d pour lesquelles AMN est isocèle de sommet principal A

AMN est isocèle en A ssi : $(AO) \perp (MN)$
Alors : $\frac{z_M-z_N}{z_A-z_O} \in i\mathbb{R}$
$\frac{z_M-z_N}{z_A-z_O} = id \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow d \in \mathbb{R}$
Or $|d| = 3$ alors $d = 3$ ou $d = -3$
D'où $d \in \{-3; 3\}$

Exercice 2

(Γ_α): $(\alpha^2-4)x^2 - 4y^2 - 4(\alpha^2-4) = 0$

1) Comparons (Γ_α) et $(\Gamma_{-\alpha})$

$(\Gamma_{-\alpha})$: $(\alpha^2-4)x^2 - 4y^2 - 4(\alpha^2-4) = 0$
D'où $(\Gamma_\alpha) = (\Gamma_{-\alpha})$

2) Etudions suivant les valeurs de α la nature de (Γ_α)

- Si $\alpha^2 - 4 = 0$ alors $\alpha = 2$ ou $\alpha = -2$ et l'équation réduite est : $y = 0$

D'où (Γ_α) est la droite d'équation $y = 0$

- Si $\alpha^2 - 4 \neq 0$ alors $\alpha \neq 2$ et $\alpha \neq -2$

L'équation réduite est alors : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\alpha^2-4} = 1$

- Si $\alpha \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, $\alpha^2 - 4 > 0$ alors (Γ_α) est l'hyperbole de centre O

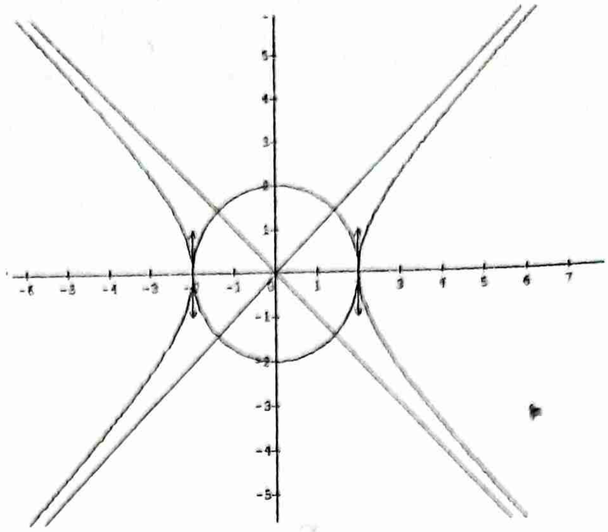
→ sommets : $S_1(2; 0)$ et $S_2(-2; 0)$
→ Demi distance focale : $c = \sqrt{4+\alpha^2-4} = |\alpha|$
→ Foyers : $F_1(|\alpha|; 0)$ et $F_2(-|\alpha|; 0)$
→ Asymptotes : Δ_1: $y = \frac{\sqrt{\alpha^2-4}}{2}x$ et Δ_2: $y = -\frac{\sqrt{\alpha^2-4}}{2}x$

- Si $\alpha \in]-2; 2[$, $\alpha^2 - 4 < 0$ alors (Γ_α) est l'ellipse de centre O

→ Sommets : $A(2; 0)$, $A'(-2\ 0)$ et $(0; \sqrt{4-\alpha^2})$, $B'(0; -\sqrt{4-\alpha^2})$
→ Foyers : $F(|\alpha|; 0)$ et $F'(-|\alpha|; 0)$

3) Dessinons les courbes (Γ_0) et $(\Gamma_{2\sqrt{2}})$

(Γ_0) : $x^2 + y^2 = 4$ alors $(\Gamma_0) = C(O, r = 2)$
$(\Gamma_{2\sqrt{2}})$: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ alors $(\Gamma_{2\sqrt{2}})$ est une hyperbole équilatère



Exercice 3

1) $A = [1; 46]$

(E) : $23x + 47y = 1$ avec x et y des entiers relatifs

a) Donnons une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E)

On a : $47 = 23 \times 2 + 1$ alors : $1 = 47 \times 1 + 23 \times (-2)$
D'où $(x_0; y_0) = (-2; 1)$

b) Déterminons l'ensemble des couples $(x; y)$ solution de (E)

$pgcd(23; 47) = 1$ alors il existe $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que : $23x + 47y = 1$
D'après 1) $(x_0; y_0) = (-2; 1)$ est une solution particulière de (E), alors :
$23x + 47y = 23x_0 + 47y_0$
$\Rightarrow 23(x - x_0) = 47(-y + y_0)$
23 et 47 étant premiers entre eux alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x = 47k - 2$ et $y = -23k + 1$
D'où $S = \{(47k - 2; -23k + 1),\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) Déduisons en qu'il existe un unique $x \in A$ tel que : $23x \equiv 1[47]$

On a : $x = 47k - 2$ et $x \in [1; 47]$, alors : $1 \leq 47k - 2 \leq 47$ soit $0{,}06 \leq k \leq 1{,}04$ donc $k = 1$
D'où $x = 45$

2) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{N}$, on a : $2^{3k} \equiv 1[7]$

$2^3 = 8 = 7 + 1 \Rightarrow 2^3 \equiv 1[7]$
$\Rightarrow (2^3)^k \equiv 1^k[7]$
D'où $2^{3k} \equiv 1[7]$
Déterminons le reste de la division euclidienne de 2^{2015} par 7
$2015 = 3 \times 671 + 2$
$2^{2015} = 2^{3\times671} \times 2^2$
En posant $k = 671$, on trouve : $2^{3\times671} \equiv 1[7]$
Or $2^2 \equiv 4[7]$ alors $2^{2015} \equiv 4[7]$
D'où 4 est le reste de la division euclidienne de 2^{2015} par 7

3) $N = a \times 10^3 + b$

a) Vérifions que $10^3 \equiv -1[7]$

$10 \equiv 3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 3^3[7]$
Or $3^3 = 27 \equiv 6[7]$ alors : $3^3 \equiv -1[7]$

D'où $10^3 \equiv -1[7]$

b) Déduisons en les nombres N qui sont divisibles par 7

D'après a) $10^3 \equiv -1[7]$

$\Rightarrow\ 10^3 \times a + b \equiv -a + b[7]$

N est divisible par $\Leftrightarrow -a + b = 0$ c'est-à-dire $a = b$

Si $a = 1, b = 1$ alors $N = 1001$

Si $a = 2, b = 2$ alors $N = 2002$

Si $a = 3, b = 3$ alors $N = 3003$

Si $a = 4, b = 4$ alors $N = 4004$

Si $a = 5, b = 5$ alors $N = 5005$

Si $a = 6, b = 6$ alors $N = 6006$

Si $a = 7, b = 7$ alors $N = 7007$

Si $a = 8, b = 8$ alors $N = 8008$

Si $a = 9, b = 9$ alors $N = 9009$

D'où

$N = \{1001; 2002; 3003; 4004; 5005; 6006; 7007; 8008; 9009\}$

Problème

$m \in \mathbb{R}, \forall x \in]0;\ +\infty[, f_m(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2} lnx$

A) 1) Calculons suivant les valeurs de m $\lim_{x\to+\infty} f_m(x)$

Si $m < 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$

Si $m > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur pour lever l'indétermination)

2) Calculons $f'_m(x)$ et donnons les différents tableaux de variation de f_m

f_m est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on a :

$f'_m(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{m}{x}\right)$

- $m < 0$

$f'_m(x) > 0$ alors f_m est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$

$\lim_{+\infty} f_m = -\infty$

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- $m > 0$

$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{m}$

$\forall x \in]0;\ \sqrt{m}[, f'_m(x) < 0$ alors f_m est strictement décroissante sur $]0;\ \sqrt{m}[$

$\forall x \in]\sqrt{m};\ +\infty[, f'_m(x) > 0$ alors f_m est strictement croissante sur $]\sqrt{m};\ +\infty[$

$\lim_{+\infty} f_m = +\infty$

Tableau de variation

x	0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\sqrt{m})$	↗	$+\infty$

3) a) Montrons que par un point $M_0(x_0;\ y_0)$ vérifiant $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$ passe une et une seule courbe (C_m)

D' après le tableau de variation, pour $m > 0, \forall x \in]\sqrt{m};\ +\infty[$, f_m est continue est strictement croissante alirs f_m réalise une bijection de $]\sqrt{m};\ +\infty[$ vers $]f_m(\sqrt{m});\ +\infty[$.

De plus $0 \in]f_m(\sqrt{m});\ +\infty[$ alors il existe un unique $x_0 \in]\sqrt{m};\ +\infty[$ tel que : $f_m(x_0) = 0$

D'où par un point $M_0(x_0;\ y_0)$ vérifiant $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$ passe une et une seule courbe (C_m)

b) Montrons qu'il existe un unique point $A \in (C_m)$

$f_{m+1}(x) = f_m(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} lnx = 0$ alors $x = 1$

D'où $A(1; 0)$

B) $f_4(x) = \frac{x^2-1}{4} - 2lnx, \forall x \in]0;\ +\infty[$

1) a) Montrons que l'équation $f_4(x) = 0$ possède deux solutions dont l'une est $x_0 \in [3; 4]$

De ce qui précède, on déduit le tableau de tableau de variation de f_4 ci-dessous

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-0,6$	↗	$+\infty$

$\forall x \in]0; 2[, f_4$ est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]0; 2[$ vers $]-0,6;\ +\infty[$.

De plus $0 \in]-0,6;\ +\infty[$ alors il existe $\alpha \in]0; 2[$ tel que $f_4(\alpha) = 0$.

De manière analogue, il existe un unique réel $x_0 \in]2;\ +\infty[$ tel que $f_4(x_0) = 0$

$f_4(3) = -0,1$ et $f_4(4) = 0,9$

$f_4(3) \times f_4(4) < 0\ \Leftrightarrow x_0 \in [3; 4]$

b) Montrons que : $x_0 = \sqrt{1 + 8lnx_0}$

$f_4(x_0) = 0\ \Leftrightarrow\ \frac{{x_0}^2-1}{4} - 2lnx_0 = 0$

D'où $x_0 = \sqrt{1 + 8lnx_0}$

2) Soit $\varphi(x) = \sqrt{1 + 8lnx}, \forall x \in [3;\ +\infty[$

Montrons que $\varphi(x) \geq 3$ et que $0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{4}{9}$

$x \geq 3 \Rightarrow lnx \geq ln3$

$\Rightarrow 1 + 8lnx \geq 1 + 8ln3 \geq 9,72$

$\Rightarrow\ \varphi(x) \geq \sqrt{9,72} \geq \sqrt{9}$

D'où $\forall x \in [3;+\infty[, \varphi(x) \geq 3$

$\forall x \in [3;+\infty[, \varphi'(x) = \frac{\frac{8}{x}}{2\sqrt{1+8\ln x}} = \frac{4}{x\varphi(x)}$

De ce qui précède : $\varphi(x) \geq 3$

$\Rightarrow x\varphi(x) \geq 9$

$\Rightarrow \frac{1}{x\varphi(x)} \leq \frac{1}{9}$

$\Rightarrow \frac{4}{x\varphi(x)} \leq \frac{4}{9}$

D'où $\forall x \in [3;+\infty[, 0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{4}{9}$

3) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrons que $u_n \geq 3$

- $u_0 = 3$ alors $u_0 \geq 3$
- Supposons que $u_n \geq 3$
- Vérifions que $u_{n+1} \geq 3$

De ce qui précède, on a : $\varphi(x) \geq 3$

$u_n \geq 3 \Rightarrow \varphi(u_n) \geq 3$

Or $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ alors $u_{n+1} \geq 3$

D'où $u_n \geq 3, \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrons que : $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_n - x_0|$

On a : $\forall x \in [3;+\infty[, 0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{4}{9}$ alors : $|\varphi'(x)| \leq \frac{4}{9}$

Comme $x_0 \in [3;4]$, appliquons le théorème des inégalités finis, version valeur absolue à φ sur $[x_0;\ u_n]$

$|\varphi(u_n) - \varphi(x_0)| \leq \frac{4}{9}|u_n - x_0|$

Or $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ et $\varphi(x_0) = x_0$

D'où $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_n - x_0|, \forall n \in \mathbb{N}$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

On a : $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_n - x_0|, \forall n \in \mathbb{N}$

Par iteration, on a:

$|u_n - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_{n-1} - x_0|$

$|u_{n-1} - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_{n-2} - x_0|$

....

....

....

$|u_1 - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_0 - x_0|$

Par produit et simplification, on a:

$|u_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - x_0|$

$3 \leq x_0 \leq 4$ et $u_0 = 3$ alors : $|u_0 - x_0| \leq 1$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

Déduisons la convergence de la suite (u_n)

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = x_0$

D'où (u_n) converge vers x_0

c) Déterminons le plus petit entier p tel que : $|u_p - x_0| \leq 10^{-2}$

$|u_p - x_0| \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^p \leq 10^{-2}$

$p\ln\left(\frac{4}{9}\right) \leq -2\ln(10)$ alors $p \geq \frac{-2\ln(10)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} \geq 5{,}67$

Soit $p = 6$

Une valeur approchée de x_0 à10^{-2} près est u_6

Sujet n°15

Exercice 1

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^2 - (8-6i)z + 1 - 5i = 0$

$\Delta = 12 - 16i$

Soit $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta = x^2 - y^2 + 2ixy = 12 - 6i$ et $|\Delta| = x^2 + y^2 = 20$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 12 \\ 2xy = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ou } x = -4 \\ y = 2 \text{ ou } y = -2 \\ xy < 0 \end{cases}$

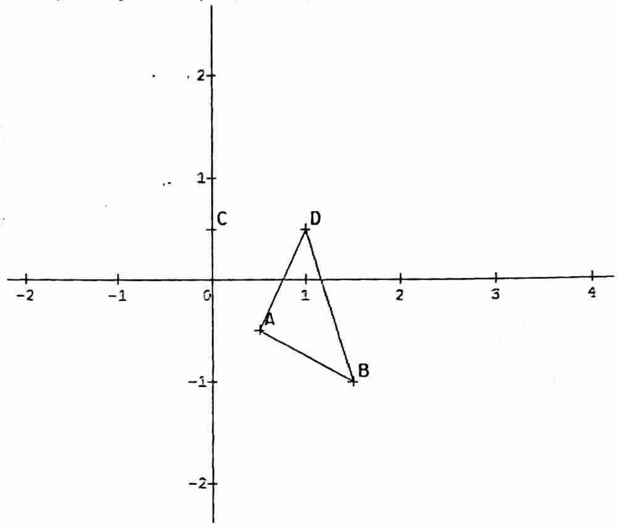
$\delta = 4 - 2i$

$z_1 = \frac{8-6i+4-2i}{8} = \frac{3}{2} - i$ ou $z_2 = \frac{8-6i-4+2i}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

D'où $S = \left\{\frac{3}{2} - i\ ;\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

2) Soient $A(z_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)$; $B(z_B = \frac{3}{2} - i)$; $C(z_C = \frac{1}{2}i)$; $D(z_D = 1 + \frac{1}{2}i)$

a) Plaçons les points A, B, C et D



b) Déterminons le module et un argument de $Z = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$

$Z = i$ alors : $\begin{cases} |Z| = 1 \\ \arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Déduisons en la nature du triangle ABD

$\begin{cases} |Z| = 1 \\ \arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AD \\ mes(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

Alors ABD est un triangle rectangle et isocèle en A

3) Soit $f : z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1 - i$

Donnons la nature de f

$f : z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $b = 1 - i$

$|a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$ alors est une SDP

Eléments caractéristiques de f

- Le centre : $\omega = \frac{b}{1-a} = 2$ alors $\Omega(2;0)$
- Le rapport : $k = |a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- L'angle : $\alpha = \arg(a) = \frac{\pi}{4}$

4) Soit $\begin{cases} z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) z_n + 1 - i \\ z_0 = 2 + i \end{cases}$ et $a_n = z_n - 2$

a) Démontrons que (a_n) est une suite géométrique

$a_{n+1} = z_{n+1} - 2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) z_n - 1 - i$

$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(z_n - 2) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) a_n$

Alors (a_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et de premier terme $a_0 = i$

b) Exprimons a_n en fonction de n. Mettons a_n sous forme exponentielle puis déduisons en que

$$z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{4}\right)} + 2$$

$a_n = a_0 q = i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$

$|a_n| = \left|i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n\right| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$\arg(a_n) = \arg(i) + n\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) + 2k\pi$

Alors $\arg(a_n) = \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

D'où $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{4}\right)}$

$a_n = z_n - 2$ alors $a_n = z_n + 2$

D'où $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{4}\right)} + 2$

c) Déterminons l'ensemble des entiers n pour que P_n, le point image de z_n soit sur l'axe réel

$P_n \in (O\ \vec{e_1}) \Leftrightarrow Im(z_n) = 0$

$\sin\left(n\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow n = 4\left(k - \frac{1}{2}\right)$

Posons $p = k - \frac{1}{2}$ alors $n = 4p, p \in \mathbb{Z}$

Exercice 2

$\begin{cases} n \text{ boules blanches} \\ 6 \text{ boules vertes} \end{cases}$ soit $n + 6$ boules

On tire successivement sans remise deux boules

Si les deux boules sont de même couleur, on gagne 100frs

Si les deux boules sont de couleurs différentes, on perd 100rs

1) On suppose $n = 3$

a) Calculons la probabilité d'obtenir

- Deux boules de même couleur

Soit Ω l'univers des possibles, alors $Card\Omega = A_9^2 = 72$

Soit A cet événement, alors $CardA = A_3^2 + A_6^2 = 36$

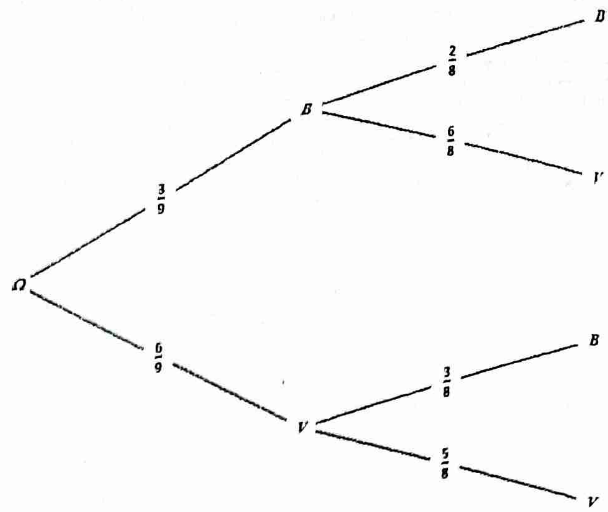
Alors $P(A) = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$

- Deux boules de couleurs différentes

Soit B cet événement, alors $CardB = 2 \times A_3^1 A_6^1 = 36$

Alors $P(B) = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$

b) Sachant que la première boule tirée est verte, calculons la probabilité pour que la deuxième boule tirée soit verte



Alors $P_V(V) = \frac{5}{8}$

2) Dans cette question, on suppose $n > 3$. Soit X le gain algébrique du joueur

a) Calculons les probabilités des événements $(X = -100)$ et $(X = 100)$

$P(X = -100) = \frac{2\times A_6^1 A_n^1}{A_{n+6}^2} = \frac{12n}{(n+6)(n+5)}$

$P(X = 100) = \frac{A_6^2 + A_n^2}{A_{n+6}^2} = \frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$

b) Montrons que l'espérance de X est $E(X) = 100 \times \frac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$

$E(X) = -100 \times \frac{12n}{(n+6)(n+5)} + 100 \times \frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$

$E(X) = 100 \times \frac{-12n+n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$

D'où $E(X) = 100 \times \frac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$

c) Valeurs de n pour lesquelles $E(X) < 0$

$E(X) < 0 \Leftrightarrow \frac{(n-10)(n-3)}{(n+6)(n+5)} < 0$

D'où $n \in]3; 10[$

Problème

Partie I :

A) $g(x) = e^x(1-x) - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

1) Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$g'(x) = e^x(1-x) - e^x = (1 - x - 1)e^x$

D'où $g'(x) = -xe^x, \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in]-\infty; 0[, g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1 ↗	0	↘ $-\infty$

2) Déduisons en le signe de g

g est majorée sur $\mathbb{R}$ par 0, alors :

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$

B) $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x-1} + 2, \forall x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$

1) Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x) = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$

$f'(x)$ est du signe de $g(x)$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^{-x}}{\frac{e^x-1}{e^x}}\right) + 2 = 2$

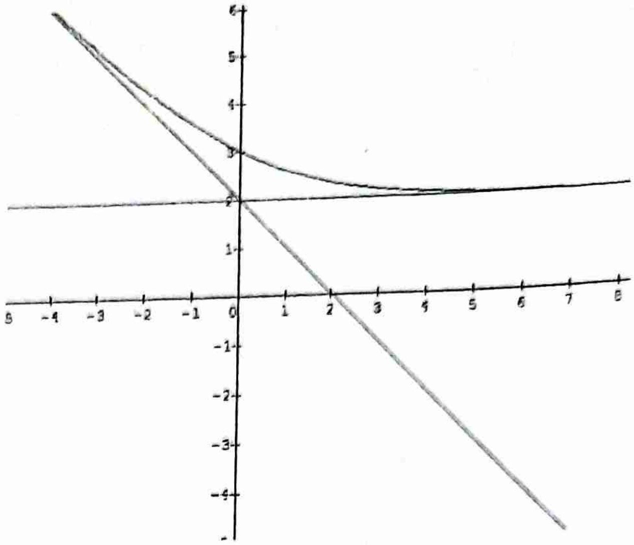
Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	3	↘ 2

2) Déterminons les asymptotes de (C)

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ alors la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à (C)
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x-1} + \frac{2}{x}\right) = -1$ et $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x+xe^x-2}{e^x-1} = 2$ alors la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptote oblique à (C)

3) Traçons (C)



Partie II :

1) $h(x) = x + \ln(x^2 - 1), \forall x \in]1; +\infty[$

a) Etudions les variations de h et ses limites

h est dérivable sur $]1; +\infty[$ et on a :

$h'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$

$\forall x \in]1; +\infty[, h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

- $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Tableau de variation de h

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) Montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $l \in]1; +\infty[$

h est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$, elle réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers $h(]1; +\infty[) = \mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $l \in]1; +\infty[$

Donnons un encadrement de l à 0,1 près

1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
-	-	+	+	+	+	+	+	+	+

D'où $1,1 \leq l \leq 1,2$

2) $u(x) = \sqrt{1 + e^{-x}}, \forall x \in]0; +\infty[$

Montrons que $h(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = x$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x + \ln(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow \ln(x^2 - 1) = -x$

$\Rightarrow x^2 - 1 = e^{-x}$

$\Rightarrow x^2 = 1 + e^{-x}$

$\Rightarrow x = \sqrt{1 + e^{-x}} \Leftrightarrow x = u(x)$

D'où $h(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = x$

3) $I = [1; 2]$

a) Montrons que, $\forall x \in I, u(x) \in I$

$u'(x) = \frac{-e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}} < 0$ alors u est strictement décroissante sur I

$u(I) = [u(2); u(1)] = [1{,}06; 2] \subset [1; 2]$

D'où $\forall x \in I, u(x) \in I$

b) Montrons que, $\forall x \in I, 0 \leq |u'(x)| \leq \frac{1}{5}$

$1 \leq x \leq 2$ alors : $e^{-2} \leq e^{-x} \leq e^{-1}$ et

$\frac{1}{2\sqrt{1+e^{-1}}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+e^{-x}}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+e^{-2}}}$

$\frac{e^{-2}}{2\sqrt{1+e^{-1}}} \leq |u'(x)| \leq \frac{e^{-1}}{2\sqrt{1+e^{-2}}} \leq 0{,}17 \leq \frac{1}{5}$

Alors $0 \leq |u'(x)| \leq \frac{1}{5}, \forall x \in I$

c) Déduisons en que, $\forall x \in I, |u(x) - l| \leq \frac{1}{5}|x - l|$

$\forall x \in I, u(x) \in I, l \in I$ et $|u'(x)| \leq \frac{1}{5}$

L'inégalité des accroissements finis à u entre x et l donne :

$\forall x \in I, |u(x) - l| \leq \frac{1}{5}|x - l|$ car $u(l) = l$

4) $\begin{cases} x_0 = 1{,}1 \\ x_{n+1} = u(x_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) On suppose que $x_n \in I$, montrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - l| \leq \frac{1}{5}|x_n - l|$, puis que $|x_n - l| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n \times 0{,}1$

On a : $\forall x \in I, |u(x) - l| \leq \frac{1}{5}|x - l|$

Posons $x_n = x$, on a :$|u(x_n) - l| \leq \frac{1}{5}|x_n - l|$

Or $u(x_n) = x_{n+1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - l| \leq \frac{1}{5}|x_n - l|$

Par itération on a :

$|x_n - l| \leq \frac{1}{5}|x_{n-1} - l|$

$|x_{n-1} - l| \leq \frac{1}{5}|x_{n-2} - l|$

....

....

....

$|x_1 - l| \leq \frac{1}{5}|x_0 - l|$

Par produit et simplification, on obtient :

$|x_n - l| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n |x_0 - l|$

Or $x_0 = 1{,}1$ et $1{,}1 \leq l \leq 1{,}2$ alors : $|x_0 - l| \leq 0{,}1$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - l| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n \times 0{,}1$

b) Déduisons en que (x_n) converge

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n \times 0{,}1 = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} x_n = l$

D'où (x_n) converge vers l

Sujet n°17

Exercice 1

$A : \begin{cases} 3 \text{ boules noires} \\ 2 \text{ boules blanches} \end{cases}$

$B : \begin{cases} 2 \text{ boules noires} \\ 2 \text{ boules blanches} \end{cases}$

1) On tire sans remise, deux boules de A et une boule de B

Soit Ω l'univers des possibles

$card(\Omega) = A_5^2 \times A_4^1 = 80$

a) Calculons la probabilité pour que les 3 boules obtenues soient noires

Soit E_1 cet événement

$card(E_1) = A_3^2 \times A_2^1 = 12$

D'où $P(E_1) = \frac{3}{20} = 0{,}15$

b) Calculons la probabilité pour que les 3 boules obtenues soient de la même couleur

Soit E_1 cet événement

$Card(E_2) = A_3^2 \times A_2^1 + A_2^2 \times A_2^1 = 16$

D'où $P(E_2) = \frac{1}{5} = 0{,}20$

NB : on peut utiliser un arbre

2) Soit X =variable aléatoire égale au nombre des boules blanches

$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

a) Déterminons la loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{20}$

b) Représentons la fonction de répartition de X

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, si\ x < 0 \\ \frac{3}{20}, si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{5}, si\ 1 \leq x < 2 \\ \frac{19}{20}, si\ 2 \leq x < 3 \\ 1, si\ x \geq 3 \end{cases}$$

c) Calculons l'espérance mathématique de X

$E(X) = \sum x_i P_i = \frac{9+14+3}{20} = \frac{26}{20}$

D'où $E(X) = \frac{13}{10} = 1{,}3$

Exercice 2

ABC triangle équilatéral de coté d

1) Déterminons l'ensemble des réels a tels que :

$\sum \alpha_i = a + 2 \neq 0$ alors $a \neq -2$

D'où $a \in \mathbb{R} - \{-2\}$

Déterminons l'ensemble des points G_a obtenus

$a\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ alors : $\overrightarrow{AG_a} = \frac{1}{a+2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Soit I le milieu du segment $[BC]$

On obtient en fixant I : $\overrightarrow{AG_a} = \frac{2}{a+2}\overrightarrow{AI}$

$G_a \in (AI)$

D'où G_a décrit la droite (AI)

2) $a = 1$

Déterminons G_1

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

$f_1(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$

Déterminons l'ensemble des points M tels que $f_1(M) = 2d^2$

$f_1(M) = 3MG_1{}^2 + f_1(G_1)$ avec $f_1(G_1) = d^2$

$3MG_1{}^2 + d^2 = 2d^2$ alors : $MG_1 = \frac{d\sqrt{3}}{3}$

L'ensemble cherché est le cercle de centre G_1 et de rayon $\frac{d\sqrt{3}}{3}$

3) $a = -2$ et $\vec{V}(M) = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Montrons $\vec{V}(M)$ est un vecteur constant que l'on précisera

$-2 + 1 + 1 = 0$ alors $\vec{V}(M)$ est un vecteur constant avec $\vec{V}(M) = 2\overrightarrow{AI}$

Soit $f_{-2}(M) = -2MA^2 + MB^2 + MC^2$

Déterminons l'ensemble des points M tels que $f_{-2}(M) = 0$

En fixant le point A puis le point I, on obtient : $f_{-2}(M) = 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AI} + 2d^2$

$f_{-2}(M) = 0 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AI} = -2d^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \frac{d^2}{2}$

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AI)

Alors $\overline{AH}.\overline{AI} = \frac{d^2}{2}$

D'où l'ensemble cherché est la droite perpendiculaire à (AI) passant par H.

Exercice 3

$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1) Déterminons les réels a, b et c tels que :

$P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$

Après développement et réduction, on a :

$P(z) = az^4 + bz^3 + (c + 3a)z^2 + 3bz + 3c$

Par identification, on a : $a = 1; b = -6$ et $c = 21$

D'où $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 3 = 0$ ou $z^2 - 6z + 21 = 0$

$z^2 + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = i\sqrt{3} \\ z_2 = -i\sqrt{3} \end{cases}$

$z^2 - 6z + 21 = 0$

$\Delta' = -12 = (2i\sqrt{3})^2$

$z_3 = 3 - 2i\sqrt{3}$ ou $z_4 = 3 + 2i\sqrt{3}$

$S = \{-i\sqrt{3};\ i\sqrt{3};\ 3 - 2i\sqrt{3};\ 3 + 2i\sqrt{3}\}$

3) $A(i\sqrt{3})$; $B(-i\sqrt{3})$; $C(3 + 2i\sqrt{3})$ et $D(3 - 2i\sqrt{3})$

a) Montrons que les 4 points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont précisera le centre et le rayon

A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si : $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \div \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \div \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{(3 - 3i\sqrt{3})(3 + 3i\sqrt{3})} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}^*$$

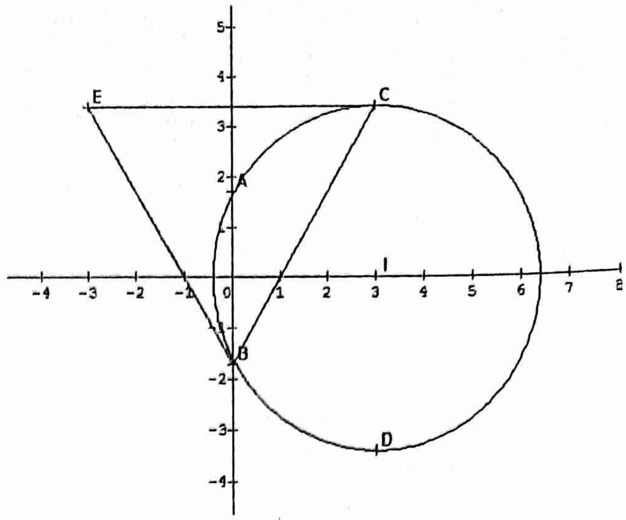
D'où les 4 points sont cocycliques

Soit I le milieu de $[CD]$, centre de ce cercle

$z_I = \frac{z_C + z_D}{2} = 3$ alors $I(3; 0)$

$r = \frac{CD}{2} = \frac{|z_C - z_D|}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$ alors $r == 2\sqrt{3}$

b) Plaçons les points A, C et D



c) $E = s_O(D)$ alors $z_E = -z_D = -3 + 2i\sqrt{3}$

Donnons la nature du triangle BEC

$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} mes(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ BE = BC \end{cases}$

D'où BEC est un triangle équilatéral

Problème

A) $f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$

1) a) Déterminons la limite de f en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$

b) Déterminons la limite de f en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\left(\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)^2$

Posons $\frac{x}{2} = t$

D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2(te^{-t})^2 = 0$

2) a) Explicitons la dérivée et étudions son signe

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = xe^{-x}(1 - \frac{1}{2}x)$

$e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ alors $f'(x)$ est du signe de $x\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$f'(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

$f'(x) >$ sur $]0; 2[$

b) Etudions les variations de f

De 1) a) on déduit :

f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et $]2; +\infty[$

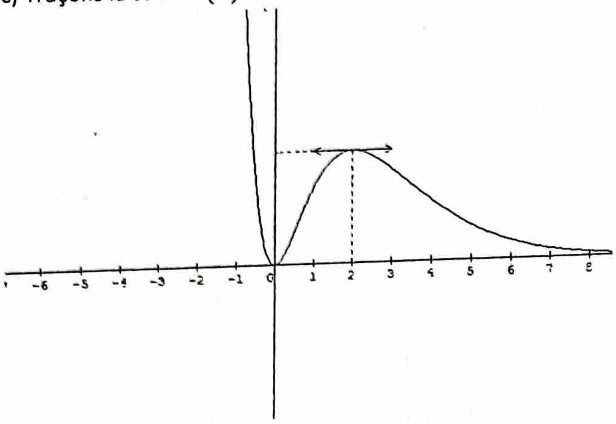
f est strictement croissante sur $]0; 2[$

$f(0) = 0$; $f(2) \approx 0,3$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↗	0,3 ↘	0

c) Traçons la courbe (C)



3) $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ définie sur $[0;\ +\infty[$

a) Utilisons une intégration par parties pour calculer $I(x) = \int_0^x te^{-t}dt$

Posons $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$I(x) = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt$

D'où $I(x) = 1 - e^{-x}(x+1)$

b) En utilisant a) et une nouvelle intégration par parties, montrons que : $F(x) = 1 - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}t^2e^{-t}dt = \frac{1}{2}\int_0^x t^2e^{-t}dt$

Posons $\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$F(x) = \frac{1}{2}[-t^2e^{-t}]_0^x + \int_0^x te^{-t}dt = -\frac{x^2e^{-x}}{2} + I(x)$

$F(x) = \frac{x^2e^{-x}}{2} + 1 - e^{-x}(x+1)$

D'où $F(x) = 1 - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$

c) Montrons que F est une fonction strictement croissante et que $0 \leq F(x) \leq 1$

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$ alors $F'(x) = f(x)$

Or f est positive sur$[0;\ +\infty[$

D'où $\forall\, x \in [0;\ +\infty[, F'(x) > 0$ alors F est strictement croissante sur $[0;\ +\infty[$

On a : $F(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

F étant croissante sur $[0;\ +\infty[$, on déduit : $0 \leq F(x) \leq 1$

d) Montrons en utilisant 1) b) que F admet une limite en $+\infty$

D'après 1) b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Or $F(x) = 1 - e^{-x}(1+x) - f(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(1+x) = 0$

Alors F admet une limite en $+\infty$ et on a : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Déduisons que l'équation $F(x) = c$ $(0 \leq c \leq 1)$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$

D'après 3) c) F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[0; 1[$

Comme $c \in [0; 1]$, alors l'équation $F(x) = c$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

B) $g(x) = \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + ln20$

1) Montrons que l'unique réel α tel que $F(\alpha) = 0{,}95$ est aussi solution de l'équation $g(x) = x$

$F(\alpha) = 0{,}95 \Rightarrow 1 - e^{-\alpha}\left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) = 0{,}95$

$\Rightarrow e^{\alpha} = \frac{1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}}{0{,}05}$

$\Rightarrow \alpha = \ln\left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) - \ln(0{,}05)$

$\Rightarrow \alpha = \ln\left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) + ln20$

$\Rightarrow \alpha = g(\alpha)$

D'où α est solution de l'équation $g(x) = x$

2) Montrons que g est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $g'(x) = \frac{1+x}{1+x+\frac{x^2}{2}}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Déduisons en l'image par g de $[5; 10]$

g est continue et croissante sur $[5; 10]$ alors :

$g([5; 10]) = [g(5); g(10)] = [5{,}9; 7{,}1]$

D'où $g([5; 10]) \subset [5; 10]$

3) a) Justifier que, $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$, $\forall\, x \in [5; 10]$

$g'(x) = \frac{1+x}{1+x+\frac{x^2}{2}}$ alors : $g''(x) = \frac{-x(1+\frac{x}{2})}{\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)^2}$

g' est décroissante sur $[5; 10]$

$g'(5) = 0{,}32$ et $g'(10) = 0{,}18$

$0{,}18 \leq g'(x) \leq 0{,}32 \leq \frac{1}{3}$

D'où $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$, $\forall\, x \in [5; 10]$

b) Déduisons en que $|g(v) - g(u)| \leq \frac{1}{3}$ sur $[5; 10]$

On a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$, $\forall\, x \in [5; 10]$

$\forall\, u, v \in [5; 10]$, le théorème des inégalités finis sur $[u; v]$ donne :

$|g(v) - g(u)| \leq \frac{1}{3}$

c) Montrons que $\alpha \in [5; 10]$

$F(\alpha) = 0{,}95$

$0 \leq F(\alpha) \leq 1 \Rightarrow -0{,}95 \leq F(\alpha) - 0{,}95 \leq 0{,}05$ et $(-0{,}95) \times (0{,}05) < 0$ alors α est solution de l'équation $F(x) - 0{,}95 = 0$ sur $[5; 10]$

Par conséquent $\alpha \in [5; 10]$

4) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a) Utilisons 3) c) pour montrons que $|u_n - \alpha| \leq \frac{5}{3^n}$

De 3) c), on a : $\alpha \in [5; 10]$

En posant $v = u_n$ et $u = \alpha$ la relation de 3) b) dévient :

$|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$

Alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$

Par itération, on a :

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_{n-1} - \alpha|$

$|u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_{n-2} - \alpha|$

....

....

....

$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_0 - \alpha|$

Par produit et simplification, on a :

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - \alpha|$

$u_0 = 5$ et $5 \leq \alpha \leq 10$ alors : $|u_0 - \alpha| \leq 5$

D'où $|u_n - \alpha| \leq \frac{5}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}$

b) Déterminons n_0 tel que : $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-2}$

$|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{5}{3^n} \leq 10^{-2}$

$\ln\left(\frac{5}{3^n}\right) \leq \ln(10^{-2}) \Leftrightarrow n_0 \geq \frac{2\ln(10)+\ln(5)}{\ln(3)} \geq 5{,}65$

D'où $n_0 = 6$

c) Valeur approchée de α à 10^{-2} près

$|u_6 - \alpha| \leq 10^{-2} \Leftrightarrow u_6 - 10^{-2} \leq \alpha \leq u_6 + 10^{-2}$

Or $u_6 = g(u_5) = 6{,}29$

Alors $6{,}28 \leq \alpha \leq 6{,}30$

D'où $\alpha = 6{,}29$ à 10^{-2} près

Sujet 18

Exercice 1

Soient $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) Ecrivons $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(-1-i)}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2(-1-i)(1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

2) a) Ecrivons z_1 et z_2 sous forme exponentielle

$|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_1) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

D'où $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$|z_2| = 1$ et $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

D'où $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) Déduisons en $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$

3) Déduisons en les valeurs exacte de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{11\pi}{12} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} \cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

4) Valeur de n pour laquelle $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ soit réel

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\frac{11n\pi}{12} = 0$

$\sin\frac{11n\pi}{12} = \sin k\pi$ alors $11n = 12k$

$n = 12 \times \frac{k}{11} = 12p$, $p \in \mathbb{Z}$

Exercice 2

$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \cos x$

1) Etudions les variations de f sur $[0; \pi]$

f est dérivable sur $[0; \pi]$ et : $f'(x) = -\frac{1}{2} - \sin x$

$\forall x \in [0; \pi], \frac{1}{2} + \sin x > 0$

D'où $\forall x \in [0; \pi], f'(x) < 0$ alors f décroit sur $[0; \pi]$

2) Déterminons une équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 - \frac{\pi}{4}$

D'où $y = -\frac{3}{2}x + 1 + \frac{\pi}{2}$

3) Montrons que, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f'(x) \geq -\frac{3}{2}$

Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq 1$ alors $-\sin x \geq -1$

$-\frac{1}{2} - \sin x \geq -\frac{3}{2}$

D'où $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f'(x) \geq -\frac{3}{2}$

4) Montrons que, $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], f(x) \geq -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\forall x \in [0; \pi], f(x) \leq -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- Appliquons $TIAF$ à f sur $\left[\frac{\pi}{2}; x\right]$

$f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ alors : $f(x) \geq -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

- Appliquons $TIAF$ à f sur $\left[x; \frac{\pi}{2}\right]$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(x) \geq -\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ alors $-f(x) \geq -\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

D'où $f(x) \leq -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

5) Positions relatives de (C) par rapport à la tangente (T)

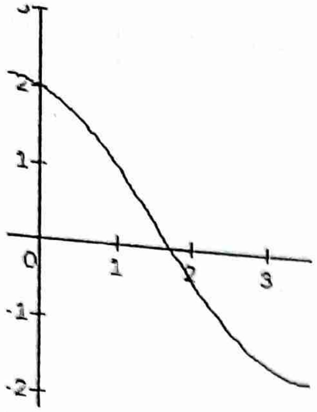
Il suffit d'étudier le signe de $f(x) - y$

$f(x) - y = f(x) + \frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $f(x) \leq -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ alors (C) est en dessous de (T)

Sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], f(x) \geq -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ alors (C) est au dessus de (T)

Courbe de f



Exercice 3

Problème

$f(x) = \frac{x^2-x+m}{x}$

1) Selon les valeurs de m, étudions les variations de f et dressons son tableau de variation

$D_f = \mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $f'(x) = \frac{x^2-m}{x^2}$

1^{er} cas : $m < 0$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2^e cas : > 0

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{m}$ ou $\sqrt{m}$

$\forall\, x \in \left]-\infty, -\sqrt{m}\right[\cup \left]\sqrt{m};\ +\infty\right[, f'(x) >$ alors f est strictement croissante

$\forall\, x \in \left]-\sqrt{m}; 0\right[\cup \left]0;\ \sqrt{m}\right[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\sqrt{m})$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{m})$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Montrons que toutes les courbes (C_m) admettent $I(0\ ;\ -1)$ comme centre de symétrie

$f(-x) + f(x) = \frac{-x^2-x-m+x^2-x+m}{x} = -2$

Alors $I(0\ ;\ -1)$ est un centre de (C_m)

3) Montrons que (C_m) admettent (OJ) et (D_1) comme asymptotes

- $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ alors la droite d »équation x=0 (OJ) est asymptote verticale à (C_m)
- $\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (x-1)\big) = \lim\left(\frac{m}{x}\right) = 0$ alors la droite (D_1) est asymptote oblique à (C_m)

4) Soit $m > 0$

Soient A_m et B_m les points de (C_m) où le tangentes sont horizontales. Déterminons les coordonnées de A_m et B_m

Les tangentes sont horizontales si et seulement si :

$f'(x) = 0$

$f'(x) = 0$ alors $x = -\sqrt{m}$ ou $x = \sqrt{m}$

D'où $A_m\big(-\sqrt{m};\ -2\sqrt{m}-1\big)$ et $B_m\big(\sqrt{m}; 2\sqrt{m}-1\big)$

Montrons que A_m et B_m appartiennent à (D_3) : $y = 2x - 1$

$y = 2(-\sqrt{m}) - 1 = y_{A_m}$ alors $A_m \in D_3$

$y = 2(\sqrt{m}) - 1 = y_{B_m}$ alors $B_m \in D_3$

5) Soit $m < 0$

Montrons que D_2 : $y = -1$ et (C_m) se coupent en deux points E_m et F_m

$(C_m) \cap (D_2) \Leftrightarrow x^2 - x + m = -x$

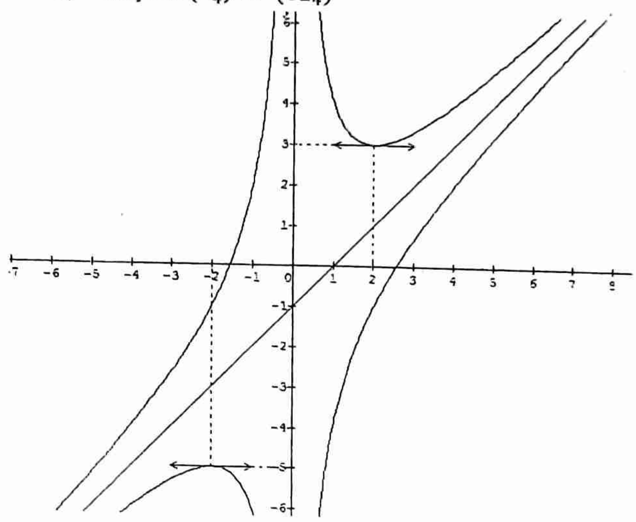
Alors $x = -\sqrt{-m}$ ou $x = \sqrt{-m}$

$(C_m) \cap (D_2) = \{E_m(-\sqrt{-m};\ -1), F_m(\sqrt{-m};\ -1)\}$

Montrons que les tangentes à (C_m) aux points E_m et F_m sont parallèles à (D_3)

Il suffit de montrer que : $f'(-\sqrt{-m}) = f'(\sqrt{-m}) = 2$

6) Traçons (C_4) et (C_{-4})



7) Soit $g(x) = x - 1 + \frac{4}{|x|}$ et (C') sa courbe

Expliquons la construction de (C') à partir de (C_4) et (C_{-4})

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 - \frac{4}{x}, si\ x < 0 \\ x - 1 + \frac{4}{x}, si\ x > 0 \end{cases}$$

$(C') = (C_{-4}) \cup (C_4)$ où (C_{-4}) est courbe de f_{-4} pour $x < 0$ et (C_4) la courbe de f_4 pour $x > 0$

Sujet 19

Exercice 1

$z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

1) Calculons z^2 sous forme algébrique

$z^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + 2i(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}-1)^2 = 4\sqrt{3} + 4i$

2) Déterminons le module et un argument de z^2

$|z^2| = 4|\sqrt{3}+i| = 8$

$\arg(z^2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Déduisons en le module et un argument de z

$|z|^2 = 8 \Rightarrow |z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$2\arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{12} + k\pi$

3) Déduisons en $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

$2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3}-1)$

Par identification, on a : $\begin{cases} \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x = \sqrt{2}$

En divisant tous les membres de l'égalité par $2\sqrt{2}$, on obtient : $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos x + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{12}\cos x + \sin\frac{\pi}{12}\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

D'où $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 3

Soit $z = 1 + e^{i\theta}, \theta \in]-\pi; \pi[$

1) Déterminer le module r et un argument φ de z

$z = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}}$

Alors $r = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\varphi = \frac{\theta}{2} + 2k\pi$

2) Calculons z^4

a) En utilisant $z = 1 + e^{i\theta}$

$z^4 = (1 + e^{i\theta})^4 = 1 + 4e^{i\theta} + 6e^{2i\theta} + 4e^{3i\theta} + e^{4i\theta}$

b) En utilisant $z = re^{i\varphi}$

$z^4 = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^4 e^{4i\varphi} = 16\cos^4\frac{\theta}{2}e^{2i\theta}$

3) Etablissons la relation : $\cos^4\frac{\theta}{2} = \frac{1}{8}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{3}{8}$

$\cos^4\frac{\theta}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)^4 = \frac{1}{8}(\cos 2\theta + 4\cos\theta + 3)$

D'où $\cos^4\frac{\theta}{2} = \frac{1}{8}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{3}{8}$

Exercice 3

ABC est un triangle rectangle d'hypothénus $BC = 2a$

$f(M) = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$

1) Déterminons m pour que $f(M)$ soit un vecteur constant $\overrightarrow{v_0}$ et calculons ce vecteur en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$4 - 1 + m = 0$ alors $m = -3$

$\overrightarrow{v_0} = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

2) On pose : $G = bar\{(A,4); (B,-1); (C,-1)\}$

a) Démontrons que G est le symétrique par rapport à A du milieu I du segment $[BC]$

$G = bar\{(A,4); (B,-1); (C,-1)\} = bar\{(A,4); (I,-2)\}$

Alors $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AI}$ donc G est le symétrique de I par rapport à A

3) Déterminons l'ensemble $C = \{M \in P, 4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2\}$

Soit $g(M) = 4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2$

En fixant G, on obtient : $g(M) = 2MG^2 + f(G)$

Avec $f(G) = \frac{-4BC^2 + BC^2}{2} = -6a^2$

$2MG^2 - 6a^2 = -4a^2$ alors $MG = a$

D'où l'ensemble (C) est le cercle de centre G et de rayon a

Problème

$f(x) = x\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$

1) Calculons la limite de f en $+\infty$ et interprétons graphiquement le résultat

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \times \ln 1 = FI$

Posons $\frac{3}{x} = X$ alors $\begin{cases} x \to +\infty \\ X \to 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} 3\frac{\ln(x+1)}{x} = 3$

Interprétation graphique : la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à C_f.

2) Continuité de f en 0

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \times (+\infty) = FI$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim(x\ln(x+3) - x\ln x) = 0$

Alors f est continue en 0

Etudions la dérivabilité de f en 0

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim \ln\left(\frac{x+3}{x}\right) = +\infty$

Alors f n'est pas dérivable en 0 par conséquent C_f admet à l'origine du repère une demi tangente verticale

3) a) Déterminons f' puis f''

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$f'(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x}\right) - \frac{3}{x+3}$

f' est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $f''(x) = \frac{-9}{x(x+3)^2}$

b) déterminons le sens de variation de f' puis sa limite en $+\infty$

$\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) < 0$ alors f' décroit sur $]0; +\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\left(\ln\left(\frac{x+3}{x}\right) - \frac{3}{x+3}\right) = 0$

Déduisons en le signe de f'

f' est minorée par 0 sur $]0; +\infty[$, alors :

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$

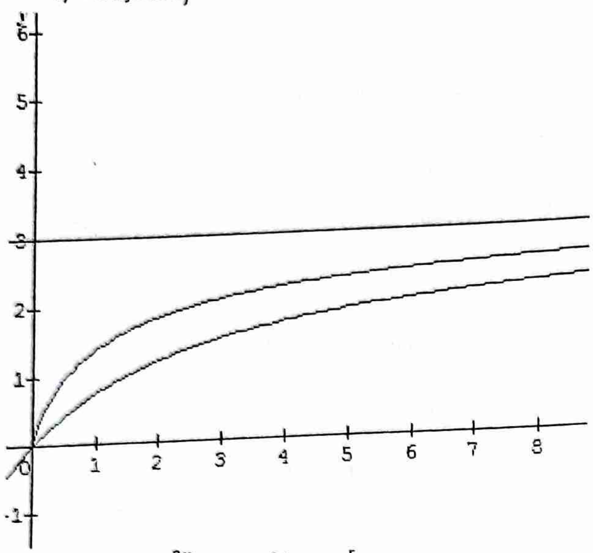
c) indiquons le sens de variation de f puis dressons son tableau de variation

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de

x	$0 \quad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 3$

4) traçons C_f



5) $g(x) = \frac{3x}{x+3}, \forall x \in]0;\ +\infty[$

a) Dressons le tableau de variation de f sur $]0;\ +\infty[$

g est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et : $g'(x) = \frac{9}{(x+3)^2}$

$\forall x \in]0;\ +\infty[, g'(x) > 0$ alors g croit sur $]0;\ +\infty[$

Tableau de variation de g

x	$0 \quad +\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$0 \nearrow 3$

b) Vérifions que, $\forall x \in]0;\ +\infty[, f(x) - g(x) = xf'(x)$

$f(x) - g(x) = xln\left(\frac{x+3}{x}\right) - \frac{3x}{x+3} = x\left(\ln\left(\frac{x+3}{x}\right) - \frac{3}{x+3}\right) = xf'(x)$

c) Déterminons le signe de $f(x) - g(x)$ et sa limite en $+\infty$.

$f(x) - g(x) = xf'(x)$ alors $f(x) - g(x)$ est du signe de $f'(x)$

D'où $\forall x \in]0;\ +\infty[, f(x) - g(x) > 0$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 3 - 3 = 0$

Interprétation graphique : (C_f) et Γ ont un comportement asymptotique avec (C_f) au dessus de Γ

d) Traçons Γ

6) $\lambda \in]1;\ +\infty[$

a) Equation de la tangente (T_λ) au point d'abscisse λ

$y = f'(\lambda)(x - \lambda) + f(\lambda)$

D'où (T_λ) $y = \left(\ln\left(\frac{\lambda+3}{\lambda}\right) - \frac{3}{\lambda+3}\right)x + \frac{3\lambda}{\lambda+3}$

b) Montrons que (T_λ) rencontre (Oy) au point d'ordonnée $g(\lambda)$

(T_λ) rencontre (Oy) pour $x = 0$ alors $y = \frac{3\lambda}{\lambda+3} = g(\lambda)$

Sujet 20

Exercice 2

I) $u_n = ln\frac{2n-1}{2n+1}$

1) Calculons u_1, u_2, u_3

$u_1 = ln\frac{1}{3}$; $u_2 = ln\frac{3}{5}$ et $u_3 = ln\frac{5}{7}$

2) Déterminer la limite de suite (u_n)

$\lim_{n\to+\infty} u_n = ln\frac{2}{2} = ln1 = 0$

3) On pose $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

a) Exprimons S_n en fonction de n.

$S_n = ln\frac{1}{3} + lnln\frac{3}{5} + ln\frac{5}{7} + ln\frac{2n-1}{2n+1} =$

$\ln\left(\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n+1)}\right) = ln\frac{1}{2n+1}$

b) Déterminons la limite de S_n en $+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim(-\ln(2n+1) = -\infty$

II) $v_n = e^{1-\frac{n}{2}}$

1) Montrons que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

$v_{n+1} = e^{1-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \times e^{1-\frac{n}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \times v_n$

Alors (v_n) est une suite géométrique de raison $e^{-\frac{1}{2}}$ et de premier terme $v_0 = e$

2) Montrons que $w_n = lnv_n$ est une suite arithmetique

$w_{n+1} = lnv_{n+1} = lne^{-\frac{1}{2}} \times v_n = -\frac{1}{2} + lnv_n$

$w_{n+1} = -\frac{1}{2} + w_n$ alors (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $lnv_0 = 1$

3) On pose $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

a) Exprimons T_n et P_n en fonction de n

$T_n = v_0 \times \frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{1}{2}}} = e \times \frac{1-e^{-\frac{n+1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}$

$w_n = lnv_n\ alors\ v_n = e^{w_n}$

$P_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times \ldots \times e^{w_n} = e^{w_0+w_1+\cdots+w_n}$

Or $w_0 + w_1 + \cdots + w_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(1 + \frac{2-n}{2}\right) = \frac{(n+1)(4-n)}{4}$

D'où $P_n = e^{\frac{(n+1)(4-n)}{4}}$

b) Comportement de T_n et P_n

$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim\left(e \times \frac{1-e^{-\frac{n+1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right) = \frac{e}{1-e^{-\frac{1}{2}}}$

$\lim_{n\to+\infty} P_n = lm\, e^{\frac{(n+1)(4-n)}{4}} = 0$

Problème

$f(x) = 2 - x - 4\frac{lnx}{x}$

1) $g(x) = -x^2 - 4 + 4lnx$

a) Etudions de variation de sens de g et précisons son maximum

g est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on a : $g'(x) = \frac{-2(x^2-2)}{2}$

$\forall\, x \in\,]0;\ \sqrt{2}[, g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]0;\ \sqrt{2}[$

$\forall\, x \in\,]\sqrt{2};\ +\infty[, g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissante sur $]\sqrt{2};\ +\infty[$

$M = g(\sqrt{2}) = -6 + 2ln2 \cong -4{,}6$

b) Déduisons en le signe de g sur $]0;\ +\infty[$

g est majorée sur $]0;\ +\infty[$ par -4,6, alors :

$\forall\, x \in\,]0;\ +\infty[, g(x) < 0$

2) Calculons les limites de f en 0 et en $+\infty$

- $\lim_0 f(x) = \lim\left(2 - x - 4\frac{lnx}{x}\right) = +\infty$
- $\lim_{+\infty} f(x) = lim\left(2 - x - 4\frac{lnx}{x}\right) = -\infty$

3) Variation et tableau de variation de f

f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on a :

$f'(x) = \frac{-x^2-4+4lnx}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

$\forall\, x \in\,]0;\ +\infty[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0;\ +\infty[$

Tableau de variation de f

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

4) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0

f est continue et strictement décroissante sur $]0;\ +\infty[$, elle réalise une bijection de $]0;\ +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe $x_0 \in\,]0;\ +\infty[$ tel que $f(x_0) = 0$

Vérifions que $1 < x_0 < \frac{3}{2}$

$f(1) = 1$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = -0{,}38$

$f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ alors $1 < x_0 < \frac{3}{2}$

5) Montrons que $\Delta : y = 2 - x$ est asymptote à (C)

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim\left(-4\frac{lnx}{x}\right) = 0$ alors la droite Δ est asymptote oblique à (C)

Etudions la position de (C) par rapport à Δ

$f(x) - y = -4\frac{lnx}{x}$

$\forall\, x \in\,]0; 1[, f(x) - y > 0$ alors (C) est au dessus de Δ

$\forall\, x \in\,]1;\ +\infty[, f(x) - y < 0$ alors (C) est en dessous de Δ

6) Déterminons les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente parallèle à Δ

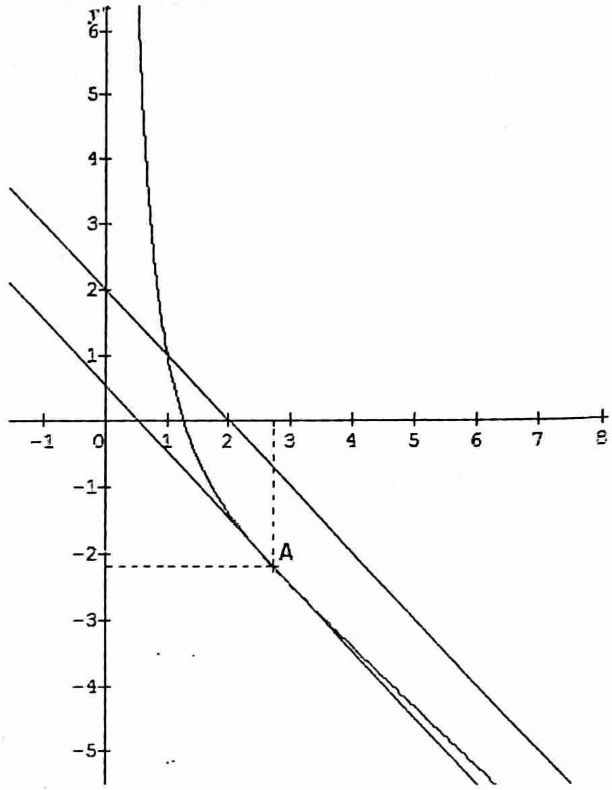
$T_A\ : y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$ et $\Delta : y = 2 - x$

$T_A \parallel \Delta \Leftrightarrow f'(x_A) = -1$

Alors $4lnx_A = 4$ donc $x_A = e$ et $f(e) = 2 - e - \frac{4}{e}$

D'où $A\left(e; 2 - e - \frac{4}{e}\right)$

7) Traçons (C)



8) Soit $h(x) = ln^2x$

a) Calculons $h'(x)$

h est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on a : $h'(x) = 2\frac{lnx}{x}$

b) Déduisons en l'aire de la partie du plan limitée par (C), Δ et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$

$A = -\int_{\frac{1}{e}}^{e}(-4\frac{lnx}{x})dx = 2\int_{\frac{1}{e}}^{e} 2\frac{lnx}{x}dx = 2[ln^2x]_{\frac{1}{e}}^{e} = 2cm^2$

Sujet 24

Exercice 1

1) $P(z) = z^3 - 3z^2 + 9z - 27$

Factorisons $P(z)$, puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = (z - 3)(az^2 + bz + c)$

En développant et après identification, on obtient :

$P(z) = (z - 3)(z^2 + 9)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z^2 = -9 \end{cases}$ alors $z = 3$ ou $z = -3i$ ou $z = 3i$

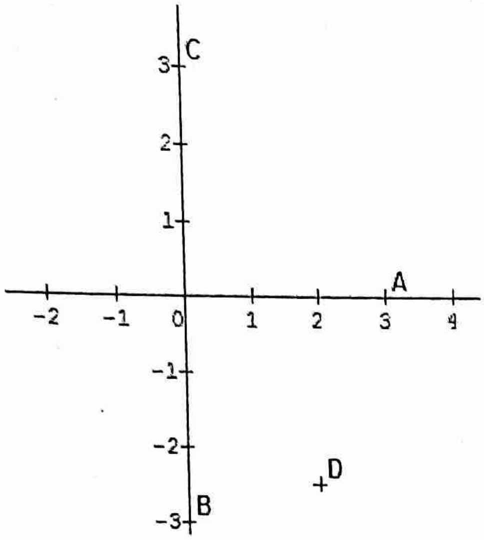
$S = \{3; -3i; 3i\}$

Nature du triangle formé par les points images de ces solutions

$\frac{3i-3}{-3i-3} = \frac{-1+i}{-1-i} = -i$ alors les points images sont les sommets d'un triangle rectangle et isocèle

2) $z_A = 3;\ z_B = -3i;\ z_C = 3i;\ z_D = 2 - \frac{5}{2}i$

Plaçons les points A, B, C et D



a) Déterminer l'affixe du point E, image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$r : z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z = iz$

$r(D) = E \Rightarrow z_E = iz_D = \frac{5}{2} + 2i$

b) Déterminons l'affixe du point I, symétrique de B par rapport à D

$\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{DB} \Rightarrow z_I - z_D = -(z_B - z_D)$

D'où $z_I = 4 - 2i$

Déterminons l'affixe du point J symétrique du point C par rapport à E

$\overrightarrow{EJ} = -\overrightarrow{EC} \Rightarrow z_J - z_E = -(z_C - z_E)$

D'où $z_J = 5 + i$

c) Déterminons l'affixe du point F, milieu du segment $[IJ]$

$z_F = \frac{z_I + z_J}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}i$

d) Précisons, en justifiant la nature du quadrilatère $ODFE$

Il suffit de montrer que : $OD = DF = FE = OE = \frac{\sqrt{41}}{2}$ et $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$

e) On pose : $z = \frac{z_J - z_A}{z_I - z_A}$

Calculons z

$z = \frac{2+i}{1-2i} = i$

Nature du triangle AIJ

$z = i \Rightarrow AJ = AI$ et $mes(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors AIJ est un triangle rectangle et isocèle en A

<u>Exercice 3</u>

$M_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ et $f(O) = A, A(0\,;\,2)$

1) Etablissons que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \end{cases}$

$\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{AM'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' - 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

D'où $f : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \end{cases}$

Exprimons x et y en fonction de x' et y'

Soit : $\begin{cases} 2x' = x + y\sqrt{3} & L_1 \\ 2y' - 4 = x\sqrt{3} - y & L_2 \end{cases}$

$L_1 + \sqrt{3}L_2 \rightarrow x = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y' - 2\sqrt{3})$

$\sqrt{3}L_1 - L_2 \rightarrow y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y' + 2)$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y' - 2\sqrt{3}) \\ y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y' + 2) \end{cases}$

2) $M(z)$ et $M'(z')$

a) Ecrivons z' en fonction de z

$x' + iy' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - i\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y + 2i$

$x' + iy' = \left(\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - iy) + 2i$

D'où $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} + 2i$

b) Démontrons que :

- f laisse globalement invariante $\Delta : x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$

Soit $\vec{u}(\sqrt{3}; 1)$ un vecteur directeur de Δ

$\varphi(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\sqrt{3}; 1)$

$\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$ alors f laisse globalement invariante la droite Δ

- f est la composée de S_Δ et de $t_{\vec{v}}$, $\vec{v}$ vecteur directeur de Δ

$f \circ f(M) = M'' : \begin{cases} x'' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = x + \sqrt{3} \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' + 2 = y + 1 \end{cases}$

Alors $f \circ f = t_{2\vec{v}}$ avec $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) \parallel \Delta$

$f \circ t_{-\vec{v}}(M) = M_1$:

$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1\right) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1 + 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \end{cases}$

$f \circ t_{-\vec{v}}(M) = M \begin{cases} x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \\ x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$

$f \circ t_{-\vec{v}} = s_\Delta : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \end{cases}$

D'où $f = s_\Delta \circ t_{\vec{v}}$

3) $D : x - y\sqrt{3} = 0$ et $\Delta : x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$

a) Déterminons $\vec{v}$ et $\vec{w}$

De ce qui précède, on a $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Soit $\vec{w}(\alpha;\ \beta)$ un vecteur tel que : $\vec{w}.\vec{v} = 0$ alors :

$s_D \circ s_\Delta = t_{\vec{w}} = t_{2\times\frac{1}{2}\vec{w}}$

$\vec{w} + \vec{v} = 2\vec{j} \Leftrightarrow \vec{i}\left(\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \vec{j}\left(\beta + \frac{1}{2}\right) = 2\vec{j}$

Alors $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$

D'où $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) Soit $t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{w}}$ des translations des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$

- Démontrons que : $f = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ s_D$

$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}}(M) = t_{2\vec{j}}(M) = M_1(x_1;\ y_1)$ alors : $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y + 2 \end{cases}$

$s_D(M) = M_2(x_2;\ y_2)$ alors : $\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ s_D(M) = M'(x';y')$ alors : $\begin{cases} x' = x_2 \\ y' = y_2 + 2 \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \end{cases}$

D'où $f = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ s_D$

- Vérifions que : $t_{\vec{w}} \circ s_D = s_\Delta$

$t_{\vec{w}} \circ s_D(M) = M''(x'';\ y'')$ alors $\begin{cases} x'' = x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'' = y_2 + \frac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x'' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \end{cases}$ alors $t_{\vec{w}} \circ s_D = s_\Delta$

<u>Problème</u>

1) $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

a) Déterminons $f'(x)$ et étudions le sens de variation de f

f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on a : $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$

$\forall\ x \in\ ]0;\ +\infty[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0;\ +\infty[$

b) Calculons les limites de f en 0 et $+\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\left(ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = 0$
- * $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

c) Dressons le tableau de variation de f

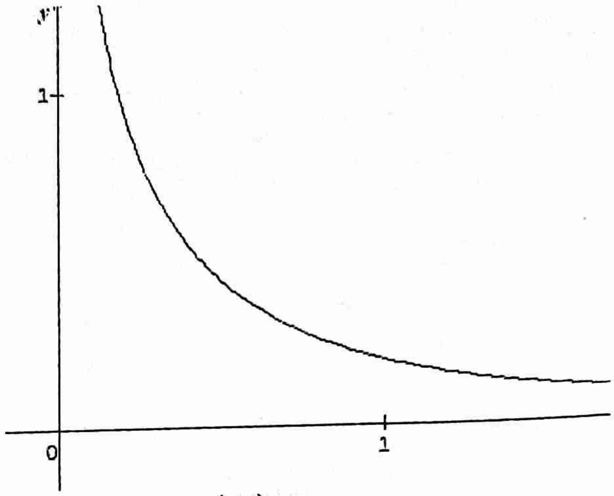
x	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

Signe de f

f est minorée par o, alors :

$\forall\ x \in\ ]0;\ +\infty[, f(x) > 0$

d) Traçons la courbe (C)



2) $g(x) = xln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

a) Dérivons g

g est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on a :

$g'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = f(x)$

Déduisons en le sens dee variation de g

$\forall\ x \in\ ]0;\ +\infty[, g'(x) > 0$ alors g est croit sur $]0;\ +\infty[$,

b) Vérifions que $g = h \circ k$ avec $h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $k(x) = \frac{1}{x}$

$h \circ k(x) = h[k(x)] = \frac{\ln(1+k(x))}{k(x)} = xln\left(\frac{x+1}{x}\right) = g(x)$

Déduisons en les limites de g en 0 et en $+\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} k(x) = 0$ et
  $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1$ alors
  $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$
- $\lim_{x\to 0} k(x) = \lim\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$ alors $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

c) Dressons le tableu de variation de g

x	$+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$0 \nearrow 1$

3) $\lambda > 1$ et M(x ; y) vérifiant : $\begin{cases} 1 \le x \le \lambda \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

a) Calculons $A(\lambda)$

$A(\lambda) = \int_1^\lambda f(x)dx = [g(x)]_1^\lambda = 25(g(\lambda) - (1))cm^2$

$A(\lambda) = 25\left(\lambda\ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) - ln2\right)cm^2$

b) Calculons la limite d $A(\lambda)$ en $+\infty$

$\lim_{+\infty} A(\lambda) = 25(1 - ln2)$

<u>Sujet 27</u>

<u>Exercice 1</u>

$z_A = -2, z_B = -1 + i$ et $z' = \frac{iz+i+1}{z+2}$

1) Interprétons géométriquement le module et un argument de z'

$z' = \frac{i(z-(-1+i))}{z-(-2)} = i\frac{z-z_B}{z-z_A}$

Alors : $|z'| = \frac{MB}{MA}$ et $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + mes(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) + 2k\pi$

2) Déterminons puis traçons l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z'| = 1$

$|z'| = 1$ alors $MA = MB$

L'ensemble cherché est la mediatrice du segment $[AB]$

3) Déterminons puis traçons l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z'| = \frac{1}{2}$

$|z'| = \frac{1}{2}$ alors : $MA = 2MB$

$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0$

Posons : $I = bar\{(A,1);(B,2)\}$ et $J = bar\{(A,1);(B,-2)\}$

En fixant les points I et J, on obtient :

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$

D'où l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[IJ]$

4) Déterminons puis traçons l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit un réel

$z' = \frac{-y+1+i(x+1)}{x+2+iy} = \frac{x-y+2}{(x+2)^2+y^2} + i\frac{x^2+3x+y^2-y+2}{(x+2)^2+y^2}$

$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 0$

$x^2 + 3x + y^2 - y + 2 = 0$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

D'où l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5) Déterminons puis traçons l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit imaginaire pur

$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x' = 0$

Alors $x - y + 2 = 0$

D'où l'enssemble cherché est la droite d'équation $x - y + 2 = 0$

Exercice 2

1) Déterminons la valeur de α

$\sum P_i = 1$ alors $\frac{1}{12} + \alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = 1$ on obtient : $\alpha = \frac{1}{6}$

2) Déterminons l'espérance mathématique, la vrianc et l'écart type de X

$E(X) = \sum x_i P_i = \frac{1+4+9+4+20+6}{12} = \frac{44}{12} = \frac{11}{3}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{47}{3} - \frac{121}{9} = \frac{20}{3}$

$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

3) Fonction de reprtition de X.

$F(x) = P(X \leq 0)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, si\ x < 1 \\ \frac{1}{12}, si\ 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4}, si\ 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2}, si\ 3 \leq x < 4 \\ \frac{7}{12}, si\ 4 \leq x < 5 \\ \frac{11}{12}, si\ 5 \leq x < 6 \\ 1, si\ x \geq 6 \end{cases}$$

Exercice 3

1) $D_1 : x + y - 1 = 0$ et $D_2 : x - y - 1 = 0$

a) Donnons les expressinons analytiques de S_1 et de S_2

$D_1 : x + y - 1 = 0$

Soit $\overrightarrow{u_1}(-1;1)$ un vecteur directeur de D_1,

$M(x;y)$ et $M_1(x_1;y_1)$ tel que : $S_1(M) = M_1$

$S_1 : \begin{cases} \overrightarrow{MM_1}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ I\left(\frac{x_1+x}{2}; \frac{y_1+y}{2}\right) \in D_1 \end{cases}$ alors :

$\begin{cases} -x_1 + y_1 = -x + y \\ x_1 + y_1 = -x - y + 2 \end{cases}$

La résolution de ce système donne :

$S_1 : \begin{cases} x_1 = -y + 1 \\ y_1 = -x + 1 \end{cases}$

Soit $\overrightarrow{u_2}(1;1)$ un vecteur direteur de D_2,

$M(x;y), M_2(x_2;y_2)$ tel que : $S_2(M) = M_2$

$S_2 : \begin{cases} \overrightarrow{MM_2}.\overrightarrow{u_2} = 0 \\ I\left(\frac{x_2+x}{2}; \frac{y_2+y}{2}\right) \in D_2 \end{cases}$ alors :

$\begin{cases} x_2 + y_2 = x + y \\ x_2 - y_2 = -x + y + 2 \end{cases}$

La résolution de ce système donne :

$S_2 : \begin{cases} x_2 = y + 1 \\ y_2 = x - 1 \end{cases}$

b) $f = S_1 \circ S_2$. Donnons l'expression analytique de f, puis son ecriture complexe

$f(M) = S_1 \circ S_2(M) = M'$ alors $\begin{cases} x' = -y_2 + 1 \\ y' = -x_2 + 1 \end{cases}$

D'où $f : \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y \end{cases}$

$x' + iy' = -(x + iy) + 2$

D'où $f : z' = -z + 2$

Donnons la nature et l'élément caractéristique de f

f est une symétrie centrale de centre Ω

$z = -z + 2$ alors : $z = 1$

D'où $\Omega(1;0)$

$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$ donc $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ par conséquent le resultat est prévisible

2) $g : \begin{cases} x' = y - 4 \\ y' = x + 4 \end{cases}$

a) Exprimons $z' = x' + iy'$ en fonction de $z = x + iy$

$x' + iy' = i(x - iy) - 4 + 4i$

D'où $g : z' = i\bar{z} - 4 + 4i$

b) L'application g est un antidéplacement

c) Nature et élément caractéristique de g

$g(M) = M$ alors $\begin{cases} x = y - 4 \\ y = x + 4 \end{cases}$ donc $x - y + 4 = 0$

D'où g est une symétrie orthogonale de base $(D) : x - y + 4 = 0$

Problème

$f(x) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x$

1) Etudions les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim \left(xe^{-x} - \frac{1}{2}x\right) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim x\left(e^{-x} - \frac{1}{2}\right) = -\infty$

Justifions l'existence d'une droite (D) asymptote à (C)

$\lim_{x\to+\infty}(xe^{-x}) = 0$ alors la droite $(D) : y = -\frac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (C) au oisinage de $+\infty$

2) Calculons la dérivée de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = (1 - x)e^{-x} - \frac{1}{2}$

3) $\varphi(x) = (1 - x)e^{-x} - \frac{1}{2}$

a) Etudions les variartions de φ

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\varphi'(x) = (x - 2)e^{-x}$

$\forall\, x \in]-\infty; 2[, \varphi'(x) < 0$ alors φ décroit sur $]-\infty; 2[$

$\forall\, x \in]2; +\infty[, \varphi'(x) > 0$ alors φ croit sur $]2; +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\frac{1}{2}$

Tableau de variation de φ

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-0,6$	↗	$-0,5$

b) Démontrons que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α

φ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$, elle réalise une bijection de $]-\infty; 2[$ vers $]-0,6; +\infty[$. De plus $0 \in]-0,6; +\infty[$ alors l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty; 2[$

Vérifions que $0 \leq \alpha \leq 0,5$

$\varphi(0) = 0,5$ et $\varphi(0,5) = -0,19$

$\varphi(0) \times \varphi(0,5) < 0$ alors $0 \leq \alpha \leq 0,5$

4) $h(x) = 1 - \frac{1}{2}e^x, \forall\, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

a) Montrons que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$

$h(x) = x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}e^x = x$ alors $e^{-x}(1 - x) - \frac{1}{2} = 0$

D'où $h(x) = x \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$ par conséquent α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$

b) $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Démontrons que, $\forall\, x \in I, h(x) \in I$

$h(I) = \left[h\left(\frac{1}{2}\right); h(0)\right] = \left[0,17; \frac{1}{2}\right] \subset \left[0; \frac{1}{2}\right]$

D'où $\forall\, x \in I, h(x) \in I$

c) Démontrons que, $\forall\, x \in I, |h'(x)| \leq 0,83$

$h'(x) = -\frac{1}{2}e^x$

$\forall\, x \in I, h'\left(\frac{1}{2}\right) \leq h'(x) \leq h'(0)$

$-0,82 \leq h'(x) \leq -0,5$

$|h'(x)| \leq 0,82 \leq 0,83$

D'où $\forall\, x \in I, |h'(x)| \leq 0,83$

d) Déduisons en que, $\forall\, x \in I, |h(x) - \alpha| \leq 0,83|x - \alpha|$

En appliquant, TIAF à f entre x et α, on obtient :

$|h(x) - h(\alpha)| \leq 0,83|x - \alpha|$

Avec $h(\alpha) = \alpha$

D'où $\forall\, x \in I, |h(x) - \alpha| \leq 0,83|x - \alpha|$

5) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

a) Montrons que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,83|u_n - \alpha|$

On a : $|h(x) - \alpha| \leq 0,83|x - \alpha|$

En posant $x = u_n$ alors

$|h(u_n) - \alpha| \leq 0,83|u_n - \alpha|$

Or $h(u_n) = u_{n+1}$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,83|u_n - \alpha|$

Montrons que, $\forall\, x\mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0,83)^n$

On a: $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,83|u_n - \alpha|$

Par itération, on a:

$|u_n - \alpha| \leq 0,83|u_{n-1} - \alpha|$

$|u_{n-1} - \alpha| \leq 0,83|u_{n-2} - \alpha|$

....

....

....

$|u_1 - \alpha| \leq 0,83|u_0 - \alpha|$

Par produit et simplification, on a :

$|u_n - \alpha| \leq (0,83)^n|u_0 - \alpha|$

$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ et $u_0 = 0$ alors : $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$

D'où $\forall\, x\mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0,83)^n$

b) Déterminons la limite de la suite (u_n)

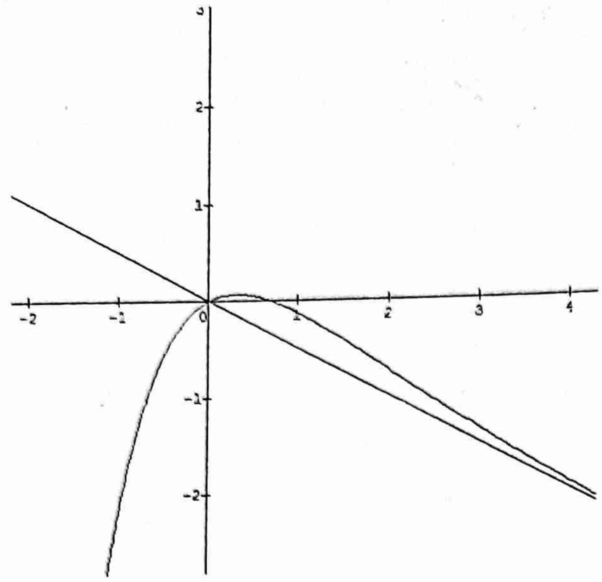
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(0,83)^n = 0$ alors $\lim(u_n) = \alpha$

c) Déterminons un entier p tel que : $|u_p - \alpha| \leq 10^{-4}$

$\frac{1}{2}(0,83)^n \leq 10^{-4}$ alors $n \geq \frac{-4\ln 10 + \ln 2}{\ln(0,83)} \geq 45,71$

D'où $p = 46$

6) Traçons (C)



Sujet 32

Exercice 1

Soit $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

1) Calculons $P(2)$ puis factorisons $P(z)$ par $z - 2$

$P(2) = 0$

$P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$

Après développement et identification, on a : $a = 2\sqrt{2}$ et $b = 4$

D'où $P(z) = (z - 2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)=0

$z = 2$ ou $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

$\Delta = -8 = (2i\sqrt{2})^2$

$z_1 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ ou $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

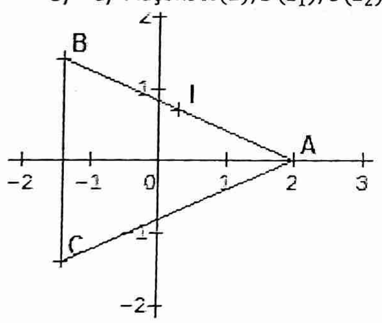
D'où $S = \{2;\ -\sqrt{2} - i\sqrt{2};\ -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\}$

Soit $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Vérifions que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$

$z_1 + z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

3) a) Plaçons $A(2), B(z_1), C(z_2)$ et I milieu de $[AB]$



b) Démontrons que OAB est isocèle

$OA = OB = 2$ alors OAB est un triangle isocèle en O

$mes(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB}) = arg\,\frac{z_B}{z_A} = \arg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

I milieu de $[AB]$, alors $mes(\vec{u};\overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}mes(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})$

D'où $mes(\vec{u};\overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$

c) Calculons l'affixe du point I et calculons son module

$z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$|z_I| = \frac{1}{2}|2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

d) Déduisons en $cos\,\frac{3\pi}{8}$ et $sin\,\frac{3\pi}{8}$

$\sqrt{2 - \sqrt{2}}\left(cos\,\frac{3\pi}{8} + isin\,\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} sin\,\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ sin\,\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{cases}$$

Exercice 2

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5}$

1) En utilisant les termes consécutifs de la suite conjecturons le comportement de la suite

$u_0 = 1, u_1 = \frac{5}{8}, u_2 = \frac{5}{11}$

$u_0 > u_1 > u_2$

La suite semble etre décroissante et converge vers 0.

2) Démontrons que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

- $u_0 = 1 > 0$
- Supposons que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
- Vérifions au rang n+1

$u_{n+1} = \frac{5}{3} - \frac{25}{3(3u_n+5)}$

$\frac{5}{3} - \frac{25}{3(3u_n+5)} > \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = 0$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > 0$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

3) Démontrons que la suite est décroissante

$u_{n+1} - u_n = \frac{-3u_n{}^2}{3u_n+5}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ alors (u_n) est décroissante

(u_n) est décroissante et minorée alors elle est convergente.

4) $v_n = \frac{5}{u_n}$

a) Prouvons que (v_n) est une suite arithmétique

$v_{n+1} = \frac{5}{u_{n+1}} = 3 + v_n$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 5$

Déduisons en v_n puis u_n en fonction de n

$v_n = v_0 + nr = 5 + 3n$

$u_n = \frac{5}{v_n} = \frac{5}{3n+5}$

b) Déterminons le comportement de (u_n)

$lim u_n = 0$ alors (u_n) converge vers 0.

Exercice 3

$$f : \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 3) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 14) \end{cases}$$

1) Démontrons que f est un antidéplacement

φ est l'applction linéaire associée à f

$detM_\varphi = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1$

Alors f est un antidéplacement

2) Démontrons qu'il existe une droite (Δ) et un vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite (Δ) tels que : $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et t la translation de vecteur $\vec{u}$.

$f \circ f : \begin{cases} x'' = \frac{1}{5}(-3x' - 4y' + 3) \\ y'' = \frac{1}{5}(-4x' + 3y'14) \end{cases}$

$f \circ f : \begin{cases} x'' = x - 2 \\ y'' = y + 4 \end{cases}$ alors $f \circ f = t_{2\vec{u}}$

Donc le vecteur de translation est $\vec{u}(-1; 2)$

Soit $t_{-\vec{u}} : \begin{cases} x_1 = x + 1 \\ y_1 = y - 2 \end{cases}$

$f \circ t_{-\vec{u}}(M) = M_2$ alors : $\begin{cases} x_2 = \frac{1}{5}(-3x_1 - 4y_1 + 3) \\ y_2 = \frac{1}{5}(-4x_1 + 3y_1 + 14) \end{cases}$

$f \circ t_{-\vec{u}} : \begin{cases} x_2 = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 8) \\ y_2 = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 4) \end{cases}$

$f \circ t_{-\vec{u}}(M) = M$ alors : $2x + y - 2 = 0$

Donc $f \circ t_{-\vec{u}} = s_\Delta$ alors (Δ) est la droite d'équation : $2x + y - 2 = 0$

D'où $f = s \circ t = t \circ s$ avec $(\Delta) : 2x + y - 2 = 0$ et $\vec{u}(-1; 2)$

Problème

Partie A : Soit $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1) Montrons que la limite de g en $-\infty$ est 1

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1 - \lim_{x \to -\infty} e^{2x} - \lim_{x \to -\infty} 2xe^{2x} = 1 - 0 - 0 = 1$

2) Etudions le sens de variation de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = 4e^{2x}(-1 - x)$

$\forall\, x \in]-\infty; 1[, g'(x) > 0$ alors g croit sur $]-\infty; 1[$

$\forall\, x \in]1; +\infty[, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $]1; +\infty[$

Calculons g(0) puis déduisons le signe de g suivant les valeurs de x

$g(0) = 1 - 1 = 0$

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$

3) Calculons $\int_0^x te^{2t}dt$

En utilisant une IPP, on obtient : $\int_0^x te^{2t}dt = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}$

Déduisons en la primitive de g qui prend la valeur 3 en 0

$g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

$G(x) = x - \frac{1}{2}e^{2x} - 2\left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right) + c = x - \frac{1}{2}e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + c = x - xe^{2x} + c$

$G(0) = 3$ alors $G(x) = x + 3 - xe^{2x}$

Partie B : Soit $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

1) Etudions le sens de variation de f

De ce qui précède, on a : $f'x) = g(x)$

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0$ alors f croit sur $]-\infty; 0[$

$\forall\, x \in]0; +\infty[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]0; +\infty[$

Calculons les limites de f

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2) Montrons que la droite d'équation $y = x + 3$ est symptote à (C) au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \to -\infty}(f(x) - y) = \lim_{x \to -\infty}(xe^{2x}) = 0$ alors la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

Etudions la position de (C) par rapport à son asymptote oblique $y = x + 3$

$f(x) - y = -xe^{2x} > 0$ alors la courbe (C) est au dessus de (D)

3) Montrons que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on appellera I et J avec $x_I < x_J$

$(C) \cap (Ox) \Leftrightarrow f(x) = 0$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ $-\infty$

f est continue et strictement croissante et décroissante respectivement sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, elle réalise une bijection de $]-\infty; 0[$ vers $]-\infty; 3[$ et de $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; 3[$. De plus $0 \in]-\infty; 3[$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions par conséquent (C) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses $x_I < 0$ et $x_J > 0$

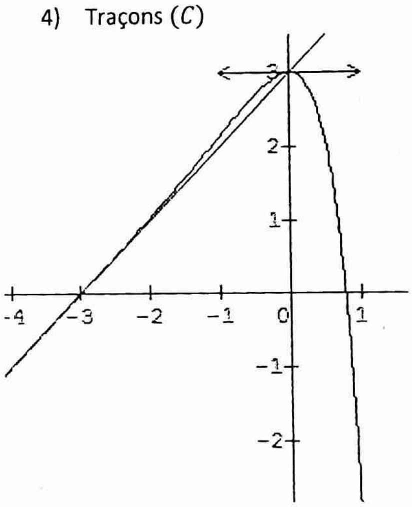
Encadrons x_J

$f(0) \times f(1) < 0$ alors $0 < x_J < 1$

0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-

Alors $0{,}7 < x_J < 0{,}8$

4) Traçons (C)



5) $\begin{cases} t \le x \le 0 \\ x + 3 \le y \le f(x) \end{cases}$

a) Calculons $A(t)$

$A(t) = -\int_0^t -xe^{2x}dx = (2te^{2t} + 1 - e^{2t})cm^2$

b) Calculons la limite de $A(t)$ en $-\infty$

$\lim_{t \to -\infty} A(t) = 1$

Sujet 37

Exercice 1

I) $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. calculons le module et un argument de cacun des nombres complexe suivants :

a) $z_1 = 1 + cos\theta + isin\theta = 1 + e^{i\theta} = 2cos\frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}}$
alors : $|z_1| = 2cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z_1) = \frac{\theta}{2} + 2k\pi$

b) $z_2 = 1 - cos\theta - isin\theta = 1 - e^{i\theta} = -2isin\frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}}$ alors : $|z_2| = 2sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} + 2k\pi$

c) $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ alors : $|z_3| = cotan\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z_3) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

d) $z_4 = 1 + icotan\frac{\theta}{2} = \frac{i}{sin\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}}$ alors : $|z_4| = \frac{1}{sin\frac{\theta}{2}}$ et $\arg(z_4) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + 2k\pi$

e) $z_5 = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$ alors : $|z_5| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\arg(z_5) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

II) $z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1^5}{z_2^3}$

1) Module et argument de ces nombres complexes
$|z_1| = 2$ et $\arg(z_1) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $|z_2| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $|Z| = \frac{|z_1|^5}{|z_2|^3} = 8\sqrt{2}$ et $\arg(Z) = 5\arg(z_1) - 3\arg(z_2) = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$.

2) Formes trigonométrique et exponentielle
$z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_2 = \sqrt{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $\arg(Z) = 8\sqrt{2}\left(cos\frac{19\pi}{12} + isin\frac{19\pi}{12}\right) = 8\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$

3) Forme algébrique de Z
$$Z = 8\sqrt{2}\frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = 4(\sqrt{3} - 1) + 4i(-\sqrt{3} - 1)$$

4) Valeurs exactes de $cos\frac{19\pi}{12}$ et $sin\frac{19\pi}{12}$
$$8\sqrt{2}\left(cos\frac{19\pi}{12} + isin\frac{19\pi}{12}\right) = 4(\sqrt{3} - 1) + 4i(-\sqrt{3} - 1)$$
alors $cos\frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $sin\frac{19\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$: $4(\sqrt{3} - 1)cosx - 4(\sqrt{3} - 1)sinx = 8$
$8\sqrt{2}cos\frac{19\pi}{12}cosx + 8\sqrt{2}sin\frac{19\pi}{12}sinx = 8$ alors $\cos\left(x - \frac{19\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\begin{cases} x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

6) Déterminons n tel que Z^n soit réel
$z^n \in \mathbb{R}$ alors $sin\frac{19n\pi}{12} = 0$ alors $\frac{19n\pi}{12} = k\pi$
$19n = 12k$ alors $n = 12p, p \in \mathbb{Z}$

Exercice 2 : voir sujet 51, exercice 1 (énoncé analogue)

Problème

$f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 4}$

1) a) Ensemble de définition de f
$D_f =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

b) Dérivabilité de f en -2 et 2
$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to-2}\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}\right) = -\infty$$
Alors f n'est pas dérivable en -2
$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2}\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}\right) = +\infty$$
Alors f n'est pas dérivable en 2

c) (C) admet aus points d'abscisses -2 et 2 deux points demi tangentes verticales

d) Calculons Calculons f'
f est dérivable sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ et on a :
$$f'(x) = \frac{3}{5} + \frac{4x}{5\sqrt{x^2-4}} = \frac{3\sqrt{x^2-4}+4x}{5\sqrt{x^2-4}}$$

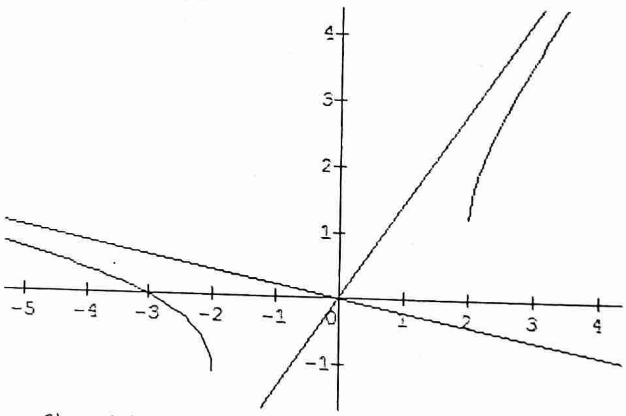
2) Sens de variation de f
$\forall x \in]-\infty; -2[, f'(x) < 0$ alors f décroit
$\forall x \in]2; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f croit

3) Limites et tableau d variation de f
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-6/5$	$6/5$	↗ $+\infty$

4) Calculons la limite $f(x) + \frac{1}{5}x$ en $-\infty$ et la limit de $f(x) - \frac{7}{5}x$ en $+\infty$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) + \frac{1}{5}x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{64}{25}}{\frac{4}{5}x - \frac{4}{5}\sqrt{x^2-4}} = 0$$
Alors la droite Δ: $y = -\frac{1}{5}x$ est asymptote oblique (C) au voisinage de $-\infty$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{7}{5}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{64}{25}}{-\frac{4}{5}x - \frac{4}{5}\sqrt{x^2-4}} = 0$$
Alors la droite Δ' : $y = \frac{7}{5}x$ est asymptote oblique (C) au voisinage de $+\infty$

5) Traçons (C)



6) soit h la restriction de f sur $]-\infty; -2]$

a) h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$ donc h réalise une bijection de $]-\infty; -2]$ vers $J = \left[-\frac{6}{5}; +\infty\right[$

b) $D_{h^{-1}} = J = \left[-\frac{6}{5}; +\infty\right[$

x	$-6/5$	$+\infty$
	-2 ↘	$-\infty$

c) C_h et $C_{h^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice

7) $g(x) =$
$$\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{-x^2+4}, si\ x \in [-2; 2] \\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2+4},\ si\ x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\end{cases}$$

Donc C_g est la réunion de (C) et la courbe $(C_1) : y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{-x^2+4}$

Sujet 38

Exercice 1

1) $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$

a) Montrons que : $P(z) = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$

$P(2) = 0$ alors 2 est racine de P

	1	$2\sqrt{2}-2$	$4-4\sqrt{2}$	-8
2		2	$4\sqrt{2}$	8
	1	$2\sqrt{2}$	4	0

D'où $\forall\, z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$

b) Resolvons dans $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2\ ou\ \Delta = \left(2i\sqrt{2}\right)^2$

D'où $S = \{2; -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\}$

c) Module et argument des nombres complexes $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\,; z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z = \frac{z_1}{z_2}$

$|z_1| = 2\ et\ \arg(z_1) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\ ; |z_2| = 2\ et\ \arg(z_2) = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ et $|z| = 1$ et $\arg(z) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

2) a) $f : z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

a) 1) f est la rotaion de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) 2) Afiixe a' du point A' image de $A'(\sqrt{3} + i)$

$f(A) = A'$ alors $z_{A'} = a' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} + i) = 2i$

b) Soit $h : z' = \frac{3}{2}z - i$

Déterminons l'affixe ω du point Ω image de O par h

$h(O) = \Omega$ alors $\omega = -i$

b) 1) Soit $B\left(-1 + i(\sqrt{3} - 1)\right)$. Montrons que $(\Omega B) \perp (\Omega A)$

$\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ alors $(\Omega B) \perp (\Omega A)$

b) 2) Déduisons que Ω, A, B sont sur un meme cercle dont on précisera le centre et le rayon

$\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = i$ alors ΩAB est un triangle rectangle isocèle inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$

$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

Exercice 2

Tirage simultané de 4 boules d'une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10.

1) Nombre d'éventualités

$card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$

2) Déterminons la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « On obtient un seul multiple de 3 »

$card(A) = C_3^1 \times C_7^3 = 105$ alors $P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

B : « On obtient aucun multiple de 3 »

$card(B) = C_7^4 = 35$ alors $P(B) = \frac{1}{6} = 0{,}16$

C : « On obtient deux multiples de 3 exactement »

$card(C) = C_3^2 \times C_7^2 = 63$ alors : $P(C) = \frac{3}{10} = 0{,}3$

D : « On obtient au moins un multiple de 3 »

$D = \bar{B}$ alors $P(D) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Problème

Partie A : $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$

1) a) Justifions que la limite de g en $+\infty$ est -1

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{X\to-\infty} Xe^X - 1 = 0 - 1 = -1$

b) Déterminons la limite de g en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$

2) a) Démontrons que, $\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ est :

$g'(x) = -e^{1-x} - e^{1-x}(1-x) = (x-2)e^{1-x}$

b) Variations et tableau de variations de g

$x \in]-\infty; 2[, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $]-\infty; 2[$

$\forall\, x \in]2; +\infty[, g'(x) > 0$ alors g croit sur $]2; +\infty[$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-1{,}36$	↗ -1

3) a) Démontrons que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α

g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$, elle réalise une bijection de $]-\infty; 2[$ vers $]-1{,}36; +\infty[$.

Comme $0 \in]-1{,}36;; +\infty[$ alors l'équation g(x)=0 admet une solution unique $\alpha \in]-\infty; 2[$.

b) Justifions que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

$g(0{,}4) = 0{,}09\ et\ g(0{,}5) = -0{,}17$

$g(0{,}4) \times g(0{,}5) < 0$ alors : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

4) Déduisons le signe de g

$\forall\, x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$

$x \in]\alpha;\ +\infty[, g(x) < 0$

Partie B : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$

1) Déterminons la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) a) Démontrons que f est une primitive de g

$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} - 1 = (1-x)e^{1-x} = g(x)$

Alors f est une primitive de g.

b) Etudions les variations de f

$\forall\, x \in]-\infty;\ \alpha[, f'(x) > 0$ alors f croit sur $]-\infty;\ \alpha[$

$\forall\, x \in]\alpha;\ +\infty[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]\alpha;\ +\infty[$

x	$-\infty$	$0{,}4$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$2{,}26$	↘ $-\infty$

3) a) Démontrons que D : y=-x+2 est asymptote à (C) en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} = 0$ alors la droite D est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

b) Etudions la position relative de (C) apr rapport à D

$f(x) - y = xe^{1-x}$

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, f(x) - y < 0$ alors (C) est en dessous de (D) sur $]-\infty; 0[$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, f(x) - y > 0$ alors (C) est au dessus de (D) sur $]0;\ +\infty[$.

4) Démontrons que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ)

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}\right) = +\infty$

alors (C) admet une branche parabolique de directio (OJ) au voisinage de $-\infty$

5) Equation de la tangente au point d'abscisse 1

$(T) : y = -(x-1) + 2 = -x + 3$

6) Démontrons que : $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha e^{1-\alpha} - \alpha + 2$

$g(\alpha) = 0$ alors $e^{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

$f(\alpha) = \frac{-1+1+\alpha}{1-\alpha} - \alpha + 2 = \frac{1}{1-\alpha} + 1 - \alpha$

7) Justifions que, $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

$f(-x+2) = (-x+2)e^{x-1} + x = e^{x-1}(-x + 2 + xe^{1-x})$

D'où $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

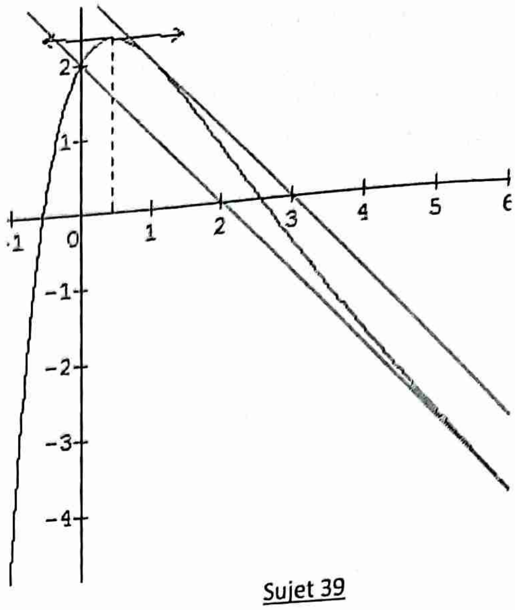
8) f(x)=0 admet deux solutions

$f(\beta) = 0$. démontrons que $-\beta + 2$ est l'autre solution

$f(-\beta+2) = e^{\beta-1}f(\beta)$ or $f(\beta) = 0$ alors $f(-\beta+2) = 0$

par conséquent $-\beta + 2$ est l'autre solution de l'équation f(x)=0

9) Traçons (C)



Sujet 39

Exercice 1

On peut réaliser un talbeau à deux entrées.

1) On peut écrire $5^2 = 25$ nombres complexes.

2) a) La probabilité d'obtenir un nombre complexe de module $\sqrt{3}$ est : $P = \frac{8}{25} = 0{,}32$

e) La probabilité d'obtenir un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{2}$ est : $P = \frac{2}{25} = 0{,}08$

3) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

Il s'agit de la loi binomiale de parametres n=3 et $p = \frac{8}{25}$:

$P(X = k) = C_3^k\left(\frac{8}{25}\right)^k \cdot \left(\frac{17}{25}\right)^{3-k}$

La loi de probabilité de X est :

x_i	0	1	2	3
P_i	0,314	0,444	0,209	0,033

L'espérance mathématique de X est : $E(X) = np = \frac{24}{25}$

Exercice 2

1) Construction voir fin exercice

2) Nature et éléments caractéristiques de l'ensemble : $E = \{M \in P /\ MA^2 + MB^2 + MC^2 = 1{,}25\}$

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 3GA^2 = 3MG^2 + 1$

alors : $MG = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} = GA'$

L'ensemble (E) est le cercle de centre G et de rayon GA', le cercle inscrit dans le triangle ABC.

3) voir figure

4) $h :\ \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et r la rotation de centre G qui transforme C en A. On pose $s = h \circ r$

a) Nature et éléments caractéristiques de h.

En fixant le oint G, on obtient : $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$

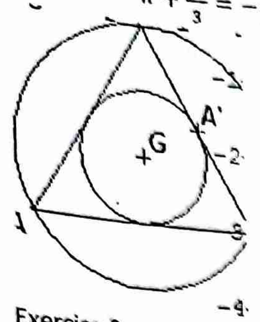
Alors h est l'homothétie de centre G et de rapport -2

b) Image du cercle (E) par h

(E') est le cercle de centre G et de rayon r'=2 × $\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) nature et éléments caractéristiques de s

s est la similitude directe de centre G, de rapport 2 et d'angle $\theta = \pi + \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$



Exercice 3

1) Résolvons dans $\mathbb{C} : z^3 - 2(1+i)z^2 - 3iz + 1 + i = 0$

1 est une racine de cette équation, alors :

$(z-1)(z^2 + (-1+2i)z - 1 - i) = 0$

$z_0 = 1$; $z_1 = -i$; $z_2 = 1 - i$

D'où $S = \{1; -i; 1-i\}$

2) Montrons que les points ayant pour affixes les solutions de cette équation sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle

$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc les points images forment bel et bien un triangle rectangle isocèle.

3) $d : \begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x + 1 \end{cases}$

a) Montrons que d est un antidéplacement

$M_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\det(M_d) = 0 - 1 = -1$

alors d est un antidéplacement

b) Naqture et éléùents caractéristiques de d

d est un antidéplacement qui n'a pas de points invaiants donc d est une symétrie glissée.

- Le veteur

$d \circ d : \begin{cases} x" = y' + 3 = x + 4 \\ y" = x' + 1 = y + 4 \end{cases}$

$d \circ d = t_{2\vec{u}}$ alors $\vec{u}(2;2)$

- la droite

$s_\Delta = t_{-\vec{u}} \circ d : \begin{cases} x" = x' - 2 = y + 1 \\ y" = y' - 2 = x - 1 \end{cases}$

$s_\Delta(M) = M$ alors : $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$

D'où $(\Delta) : x - y - 1 = 0$

4) $(H) : x^2 - y^2 - 6x + 2y + 24 = 0$

a) Equation réduite de (H)

$(x-3)^2 - 9 - (y-1)^2 + 1 + 24 = 0$

$-\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

Posons : X=x-3 et Y=y-1

D'où (H) : $-\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{16} = 1$

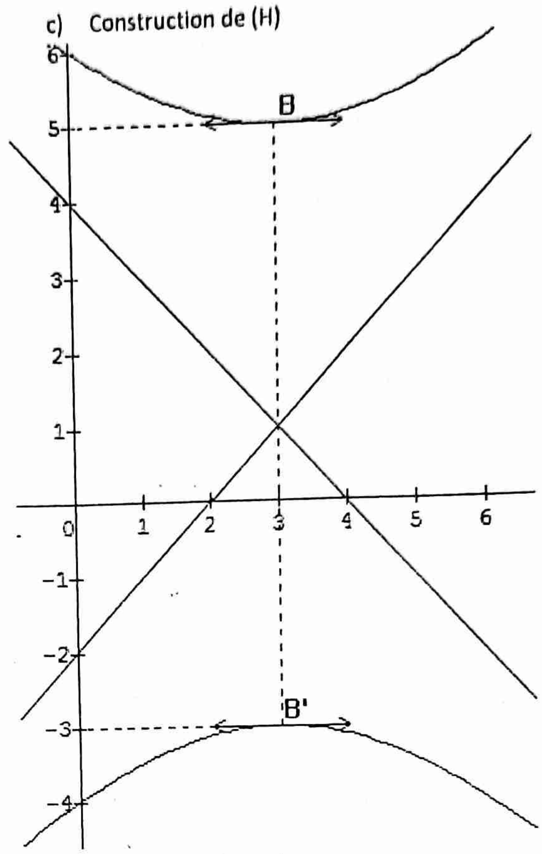
b) Nature et éléments caractéristiques de (H)

(H) est l'hyperbole équilatère de centre $\Omega(3;1)$

Dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$, on a :

- Sommets : $B(0;4)$ et $B'(0;-4)$
- Foyers : $c = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ alors : $F(0;4\sqrt{2})$ et $F'(0;-4\sqrt{2})$
- Directrices : $(D) : Y = 2\sqrt{2}$ et $(D') : Y = -2\sqrt{2}$

c) Construction de (H)



d) Image de (H) par d

$\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x + 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} y = x' - 3 \\ x = y' - 1 \end{cases}$

$M'(x';y') \in (H') \Leftrightarrow M(x;y) \in (H')$

d'où (H') : $\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y-4^2}{16} = 1$ donc (H') est une hyperbole équiltère

Problème

$f(x) = x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Partie A

1) a) Calculs de f' et f''

f est dérivéble deux fois sur $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + \frac{1}{4}xe^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \left(1 + \frac{1}{4}xe^{-x}\right)' = \frac{1}{4}(1-x)e^{-x}$

c) Variations de f'

$f''(x) = \frac{1}{4}(1-x)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in]-\infty; 1[, f''(x) > 0$ alors f' croit sur $]-\infty; 1[$

$\forall x \in]1; +\infty[, f''(x) < 0$ alors f' décroit sur $]1; +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$

Taleau de variation de f'

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	1,1	↘ 1

d) Démontrons que l'équation f'(x)=0 admet une unique solution α

f' est continue et strictement croissante sur $]-\infty;1[$, elle réqlise une bijection de $]-\infty;1[$ vers $]-\infty;1{,}1[$.

Comme $0 \in]-\infty;1{,}1[$ alors l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty;1[$.

Donnons une valeur approchée de α à 10^{-2}près

On a : $-2 < \alpha < -1$

En utilisant le ballayage, on obtient : $-1{,}21 \leq \alpha \leq -1{,}20$

soit $\alpha \cong -1{,}20$

2) a) Variations de f et son tableau de variations

$\forall x \in]-\infty;\alpha[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]-\infty;\alpha[$

$\forall x \in]\alpha;+\infty[, f'(x) > 0$ alors f croit sur $]\alpha;+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-1{,}20$	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(-1{,}20)$	↗ $+\infty$

c) Démontrons que

$(D): y = x$ est symptote (C) en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{4}(x+1)e^{-x}) = 0$

Alors la droite (D) est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

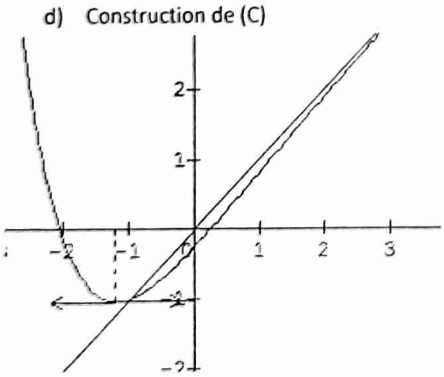
Position de (C) par rapport à (D)

$f(x) - x = -\frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$

$\forall x \in]-\infty;-1[, f(x) - x > 0$ donc (C) est au dessus de (D) sur $]-\infty;-1[$

$\forall x \in]-1;+\infty[, f(x) - x < 0$ donc (C) est en dessous de (D)

d) Construction de (C)



Partie B : 1) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

$u_1 = f(u_0) = -\frac{1}{4}$

- $u_0 > u_1$
- Sopposons que, $\forall k > 1, u_{k-1} > u_k$ et vérifions que : $u_k > u_{k+1}$

f croissante sur $[0;+\infty[$ et $u_{k-1} > u_k$ alors $f(u_{k-1}) > f(u_k)$

d'où $u_k > u_{k+1}$ par conséquent (u_n) est une suite décroissante

la courbe et la prémière bissectrice se coupent en un poin t donc (u_n) est convergente.

2)a)Démontrons que, pour tout $n \geq 1, -1 < u_n < 0$

* $u_1 = -\frac{1}{4}$ alors $-1 < u_1 < 0$

* Supposons que, $\forall k \geq 1, -1 < u_k < 0$ et vrérifions que : $-1 < u_{k+1} < 0$

$-1 < u_k < 0$ et f étant croissante, alors :

$f(-1) < f(u_k) < f(0)$ alors : $-1 < f(u_k) < -\frac{1}{4} < 0$

comme $f(u_k) = u_{k+1}$ alors : $-1 < u_{k+1} < 0$

D'où $-1 < u_n < 0, \forall n \geq 1$

b) Démontrons que (u_n) est une suite décroissante

$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4}(u_n + 1)e^{-u_n}$

$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4}(u_n + 1)e^{-u_n}$

or $-1 < u_n < 0$ alors : $u_n + 1 > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ alors (u_n) est une suite décroissante.

(u_n) étant décroissante et minorée on peut en déduire qu'elle est convergente.

Sujet 40

Exercice 1

$a = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$; $b = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3i\sqrt{2}}{2}$ et $q = \frac{a}{b}$

1) Partie rélle et partie imaginaire de q

$q = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}}{\sqrt{6}+3i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{1-\sqrt{3}}{4}$

D'où $Re(q) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ et $Im(q) = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$

2) Module et argument de a, b et q

$|a| = \sqrt{3}$ et $\arg(a) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$; $|b| = \sqrt{6}$ et $\arg b) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $|q| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(q) = \arg(a) - \arg(b) = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$

3) Formes trigonomtrique et exponentielle de a, b et q

$a = \sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

$b = \sqrt{6}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{6}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$q = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

4) Valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{1-\sqrt{3}}{4}$

Alors $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5) L'ensemble des entiers n tels que q^n soit réel

$q^n \in \mathbb{R}$ alors $\sin\frac{n\pi}{12} = 0$ ce qui donne : $n = 12p, p \in \mathbb{Z}$

Exercice 2

$f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 3$

1) Déterminons les réels a et b tels que la courbe (C_f) admette un ectrmum égal à 2 au point d'abscisse 1

$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$ avec $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 1$

$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases}$ on obtient a=1 et b=-1

D'où $f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$

2) $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 3$

a) Variations de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$f'(x) = 0$ alors $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f croit sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$ et sur $]1; +\infty[$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{3}; 1\right[, f'(x) < 0$ donc f décroit sur $\left]-\frac{1}{3}; 1\right[$

tableau de variation

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3,2	↘	2	↗	$+\infty$

b) Montrons que l'équation f(x)=7 admet une unique solution α

f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$, elle réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers $]2; +\infty[$.

Comme $7 \in]2; +\infty[$ alors l'éuation f(x)=7 admet une solution unique $\alpha \in]1; +\infty[$

Encadrons α par deux entiers consécutifs

$f(2) = 5$ et $f(3) = 18$

$f(2) < 7 < f(3)$ alors $2 < \alpha < 3$

c) Calculons $f(0)$ et $(f^{-1})'(3)$

$f(0) = 3$ et $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'[f^{-1}(3)]} = \frac{1}{f'(0)} = -1$

Exercice 3

$AC = 2AB, AB = d, ABC$ est rectangle en A

a) Constructions de $G_1 = bar\{(A,1); (B,2); (C,1\}$ et $G_2 = bar\{(A,5); (B,2); (C,-3)\}$

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

Calcul de la distance G_1G_2

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{G_1A} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AG_2} = \overrightarrow{G_1G_2} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

${G_1G_2}^2 = AB^2 + AC^2 = d^2 + 4d^2 = 5d^2$ alors $G_1G_2 = d\sqrt{5}$

b) L'ensemble des points M tels que : $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4k$

Soit $f(M) = MA^2 + 2MB^2 + MC^2$

$f(M) = 4{MG_1}^2 + 4d^2$ alors $MG_1 = \sqrt{k - d^2}$

- Si $k = d^2$, l'ensemble cherché est le point G_1
- Si $k < d^2$, l'ensemble cerché est lensemble vide
- Si $k > d^2$, l'ensemble ceché est l cercle de centre G_1 et de rayon $\sqrt{k - d^2}$

c) Touvons l'nsemble des ppoints M tels que : $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = \lambda$

$\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = \frac{\lambda}{16}$ alors : $MI^2 - \frac{{G_1G_2}^2}{4} = \frac{\lambda}{16}$

- Si $\lambda = 0$, l'esnemble cherché est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$
- Si $\frac{\lambda}{16} < \frac{{G_1G_2}^2}{4}$, , l'esnemble cherché est l'esnemble vide
- Si $\frac{\lambda}{16} > \frac{{G_1G_2}^2}{4}$, l'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{\lambda}{16} + \frac{{G_1G_2}^2}{4}}$,
- Si $\frac{\lambda}{16} = \frac{{G_1G_2}^2}{4}$, l'ensemble cherché est le point I.

Problème

$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$; $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

1) Déterminons les réels a, b et c tels que : $f(x = ax + b + \frac{c}{x+1}$

En divisant $x^2 + 3$ par x+1, on obtient : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

avec $a = 1$; $b = -1$ et $c = 4$

2) Montrons que la droite (Δ) : $y = x - 1$ est asypmtote à (C_f)

$\lim_{x\to\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x+1} = 0$ alors la doite (Δ) est asymptote oblique à (C_f)

Postion de $((C_f)$ par rapport à (Δ)

$\forall x \in]-\infty; -1[, f(x) - y < 0$ alors (C_f) est en dessous de (Δ) sur $]-\infty; -1[$,

$\forall x \in]-1; +\infty[, f(x) - y > 0$ alors (C_f) est au dessus de (Δ) sur $]-1; +\infty[$

3) Montrons que le point $A = (y = x - 1) \cap (x = -1)$

$\begin{cases} x = -1 \\ y = x - 1 \end{cases}$ alors $A(-1; -2)$

$\forall x \in D_f, -1 + x \in D_f, -1 - x \in D_f$ et on a :

$f(-2 - x) + f(x) = -4$

$f(-2 - x) = -x - 3 - \frac{4}{x+1}$

$f(-2 - x) + f(x) = -3 - 1 = -4$ alors le point est bien centre de symétrie de C_f.

4) Variations de f

f est dérivable sur D_f et on a :

$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$

$\forall x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f croit sur $]-\infty; -3[$ et sur $]1; +\infty[$

$\forall x \in]-3; -1[\cup]-1; 1[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]-3; -1[$ et sur $]-1; 1[$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-6	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

Déduisons en le signe de f suivant les valeurs de x

$\forall x \in]-\infty; -1[, f(x) < 0$

$\forall x \in]-1; +\infty[, f(x) > 0$

5) Soit $g(x) = f(x), \forall x \in]-\infty; -3[$

a) g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -3[$ donc g réalise une bijection de $]-\infty; -3[$ vers $J =]-\infty; -6[$

b) Tableau de variation de g^{-1}

x	$-\infty$	-6
	$-\infty$ ↗	-3

c) $g(-5) = -7; g(-4) = -\frac{19}{3}$ et $(g^{-1})'(-7) = \frac{4}{3}$

d) Explicitons $g^{-1}(x)$

$g(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y-\sqrt{y^2+4y-12}}{2}$

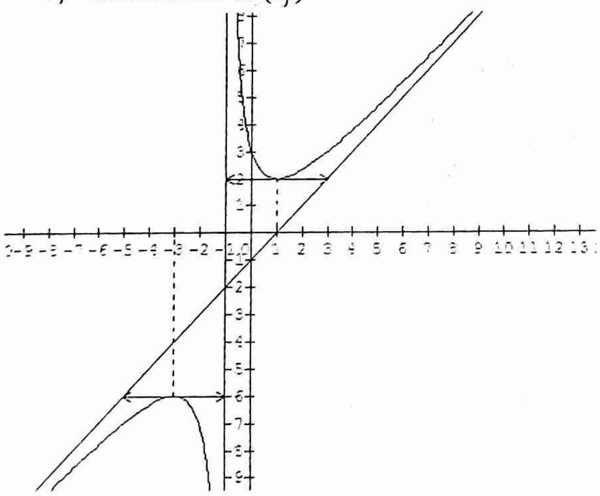
D'où $\forall x \in]-\infty; -6[, g^{-1}(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4x-12}}{2}$

6) Démontrons que, $\forall x \in [1; 3], |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ quis déduisons que : $\left|x - 4 - \frac{4}{x+1}\right| \leq |x-3|$

L'application du théorème de l'inégalité des accroissements finis à f entre x et 3

$\left|x - 1 - \frac{4}{x+1} - 3\right| \leq \frac{3}{4}|x-3|$ alors : $\forall x \in [1; 3], \left|x - 4 - \frac{4}{x+1}\right| \leq \frac{3}{4}|x-3|$

7) Constructions de (C_f)



8) Soit $m \in \mathbb{R}$

a) Discutons graphiquement le nombre des points d'intersection de (C_f) avec la droite $(D_m) : y = m$

- Si $m = \{-6; 2\}$, (C_f) et (D_m) se coupent en un seul point ;
- Si $m \in]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[, (C_f)$ et (D_m) se coupent en deux points
- Si $m \in]-6; 2[,(C_f)$ et (D_m) se coupent en aucun point.

b) Montrons que les abscisses des points d'intersection de ,(C_f) et (D_m) sont les racines de l'équation : $x^2 - mx + 3 - m = 0$

$f(x) = m$ alors : $x^2 + 3 = mx + m$

D'où l'équation : $x^2 - mx + 3 - m = 0$

Sujet 41

Exercice 3(voir sujet 39)

Problème

A) $f(x) = 1 + x - 3x\ln x$

1) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ donc on peut prolonger f par continuité en 0.

Soit g ce prolongement, alors :

$\begin{cases} g(x) = 1 + x - 3x\ln x, si\ x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

2) $D_g = I = [0; +\infty[$

3) Continuité et dérivabilité de g en 0

$\lim_0 g(x) = 1$ donc g est continue en 0

$\lim_0 \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_0(1 - 3\ln x) = +\infty$ donc g n'est pas dérivable en 0

4) Variations de g

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $g'(x) = -2 - 3\ln x$

$g'(x) = 0$ alors $x = e^{-\frac{2}{3}} \cong 0,5$

$\forall x \in \left]0; e^{-\frac{2}{3}}\right[, g'(x) > 0$ alors g croit sur $\left]0; e^{-\frac{2}{3}}\right[$

$\forall x \in \left]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty\right[, g'(x) < 0$ donc g croit sur $\left]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty\right[$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} + 1 - 3\ln x\right) = -\infty$

Tableau de variation de g

x	0	$0,5$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1 ↗	$2,5$	↘ $-\infty$

5) Montrons que l'équation g(x)=0 admet une sulution unique α

g est continue et strictement décroissante sur $\left]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty\right[$, elle réalise une bijection de $\left]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty\right[$ vers $]-\infty; 2,5[$.

Comme $0 \in]-\infty; 2,5[$ alors l'équation g(x)=0 admet une solution unique α sur $\left]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty\right[$

Vérifions que $1 < \alpha < 2$

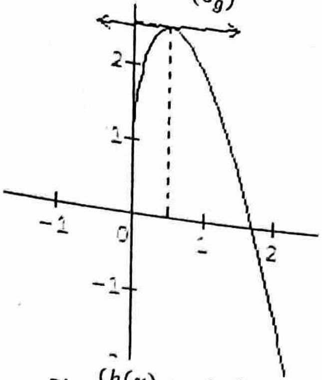
$g(1) = 2$ et $g(2) = -1{,}15$

$g(1) \times g(2) < 0$ alors $1 < \alpha < 2$

6) Etudions la limite de $\frac{g(x)}{x}$ en $+\infty$ et interprétons graphiquement le résultat

$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 - 3\ln x\right) = -\infty$ donc (C_g) admet une branche parabolique de direction (OJ) au voisinage de $+\infty$

7) Traçons (C_g)



B) $\begin{cases} h(x) = xkn^2x \\ h(0) = 0 \end{cases}$

1) Signe de h'

h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$h'(x) = (\ln x + 2)\ln x$

$h'(x) = 0$ alors $x = e^{-2}$ ou $x = 1$

$\forall\, x \in]0; e^{-2}[\cup]1; +\infty[, h'(x) > 0$

$\forall\, x \in]e^{-2}; 1[, h'(x) < 0$

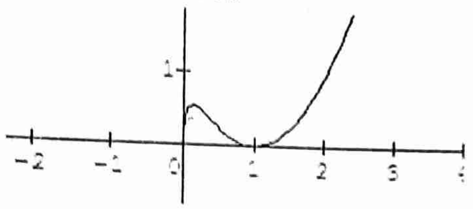
2) Montrons que h n'est pas dérivable en 0

$\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln^2 x = +\infty$ donc h n'est pas dérivable en 0 par conséquent la courbe (C_h) admet à l'origine du repère une demi tangente verticale

3) Equation de la tangente au point d'abscisse e

$(T) : y = h'(e)(x - e) + h(e) = 3x - 2e$

4) Construction



Sujet 42

Exercice 1

a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 + i = 0$

$z^3 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Posons : $z = re^{i\alpha}$ alors $z^3 = r^3e^{3i\alpha}$

$z^3 = z^3 \iff \begin{cases} r = 1 \\ \alpha = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

Alors $z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k \in \{0; 1; 2\}$

D'où $z_0 = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$ et $z_2 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$:$[(1 - i)z]^3 + i = 0$

Posons $(1 - i)z = Z$

De ce qui précède on a :

$z_0 = \frac{\sqrt{3} - i}{2(1 - i)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

$z_1 = \frac{i}{1 - i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$z_2 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2(1 - i)} = \frac{-\sqrt{3} + 1}{4} + i\frac{-\sqrt{3} - 1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$

Exercice 2

$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{6} + \frac{1}{3} \end{cases}$

1) Calculons u_1 et u_2

$u_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $u_2 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

2) $v_n = 2u_n - \frac{2n}{3}$

a) Calculons v_0, v_1 et v_2

$v_0 = 2u_0 = \frac{1}{3}$; $v_1 = 2u_1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ et $v_2 = 2u_2 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

b) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1} = 2u_{n+1} - \frac{2(n+1)}{3} = u_n - \frac{n}{3}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(2u_n - \frac{2n}{3}\right) = \frac{1}{2}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de prémier terme $v_0 = \frac{1}{3}$

3) Calculons v_n puis u_n en fonction de n

$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$v_n = 2u_n - \frac{2n}{3}$ alors $u_n = \frac{1}{2}v_n + \frac{n}{3} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3}$

4) Convergence de (u_n)

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3}\right) = +\infty$

Alors (u_n) diverge vers $+\infty$

Exercice 3

A) $(E) : 4x - 5y = 1$

1) Montrons que (E) admet au moins une solution

$\Delta(4{,}5) = 1$ donc 4 et 5 sont premies entre eux alors 'équation (E) admet au moins une solution.

$4 \times (-1) - 5 \times (-1) = 1$ alos $(-1; -1)$ est une solution particulière de (E).

2) Déduisos en que l'équation (E) équivaut à $4(x + 1) = 5(y + 1)$

$\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 4 \times (-1) - 5 \times (-1) = 1 \end{cases}$

$4x - 5y = 4 \times (-1) - 5 \times (-1)$ aloss $4(x + 1) = 5(y + 1)$

3) Démontrons que l'ensemble des solutions de (E)est l'ensemble des couples (x ; y)/$\begin{cases} x = 5k - 1 \\ y = 4k - 1 \end{cases}$

On a : $4(x + 1) = 5(y + 1)$

4 et 5 sont premiers entre eux donc il existe un entier relatif k tel que : $\begin{cases} x + 1 = 5k \\ y + 1 = 4k \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x = 5k - 1 \\ y = 4k - 1 \end{cases}$

4) Indiquons les couples solutions de (E) tels que : $10 \leq xx \leq 30$ et $10 \leq y \leq 30$

$\begin{cases}10 \leq 5k-1 \leq 30 \\ 10 \leq 4k-1 \leq 30\end{cases}$ alors : $\begin{cases}2 \leq k \leq 6 \\ 2 \leq k \leq 7\end{cases}$ soit $k = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

Les couples cherchés sont :

$(x; y) = \{(9;7), (14;11), (19;15), (24;19), (29;23)\}$

A) On peut utiliser un raisonnement analogue de la partie A)

Sujet 43

Exercice 2

$u_1 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$

1) Montrons que la suite est majorée par 6 et est croissante

- $u_1 = 3$ alors $u_1 < 6$
- Supposons que, $\forall\, k \geq 1, u_k < 6$ et vérifions que : $u_{k+1} < 6$

$u_k < 6$ alors $\frac{1}{3}u_k + 4 < 2 + 4$ donc $u_{k+1} < 6$

D'où $\forall\, n \geq 1, u_n < 6$ donc la suite est majorée par 6

$u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}(u_n - 6)$

or $u_n < 6$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ par conséquent la suite est croissante

2) On pose $v_n = u_n - 6$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de prémier terme $v_1 = -3$

b) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = -3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$u_n = v_n + 6 = -3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 6$

c) (v_n) est une suite croissante et converge vers 0

3) $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ et $T_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

a) Exprimons S_n et T_n en fonction de n

$S_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = -3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{9}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

$T_n = S_n + 6n = -\frac{9}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + 6n$

b) Calculons les limites de S_n et T_n en $+\infty$

$limS_n = -\frac{9}{2}$ et $limT_n = +\infty$

Exercice 3

$AB = 4, AC = 6$ et I milieu de $[AB]$

1) a) Construisons $G = bar\{(A,5), (B,-3), (C,2)\}$ et le point I

$\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) Calculs de GA^2, GB^2 et GC^2

$AG^2 = \left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{9}{16}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 = 18$

$BG^2 = \left(-\frac{7}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{49}{16}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 = 58$

$GC^2 = GA^2 = 18$

2) Déterminons l'ensemble

$E_1 = \{M \in (P)\ tel\ que \|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|\}$

On a : $\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\|\overrightarrow{MG}\|$ et $2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 4\|\overrightarrow{MI}\|$

$\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \Leftrightarrow MG = MI$

Alors l'ensemble E_1 est la médiatrice du segement $[GI]$

3) Déterminons les ensembles E_2 et E_3 tels que :

$E_2 = \{M \in (P)\ tel\ que: 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24\}$

Soit $f(M) = 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2$

En fixant le point G et après reduction, on : $f(M) = 4MG^2 + f(G)$ avec $f(G) = 5GA^2 - 3GB^2 + 2GC^2 = -48$

$f(M) = 24 \Leftrightarrow MG = \sqrt{18} = GA$

Alors l'ensemble E_2 est le cercle de centre G et de rayon GA.

$E_3 = \{M \in (P)\ tel\ que: 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = -72\}$

$f(M) = -72 \Leftrightarrow MG^2 = -6$

Alors l'ensemble E_3 est l'ensemble vide

Problème

A) $\varphi(x) = e^x - 2x - 1$

1) Sens de va riation de φ

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^x - 2$

$\forall\, x \in]-\infty; ln2[, \varphi'(x) < 0$ donc φ est strictement décroissante sur $]-\infty; ln2[$

$\forall\, x \in]ln2; +\infty[, \varphi'(x) > 0$ donc φ est strictement croissante sur $]ln2; +\infty[$,

$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$;$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\ x\left(\frac{e^x}{x} - 2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

Tableau de variation

x	$-\infty$		$ln2$		$+\infty$
		$-$	0	$+$	
	$+\infty$	$\searrow$	$-0{,}4$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Démontrons que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions 0 et α

- $\varphi(0) = 0$ alors 0 est solution de l'éuation $\varphi(x) = 0$ dans l'intervalle $]-\infty; ln2[$
- φ est continue et strictement croissante sur $]ln2; +\infty[$, elle réalise une bijection de $]ln2; +\infty[$ vers $]-0,,4; +\infty[$.

Comme $0 \in]-0{,}4; +\infty[$, alors l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]ln2; +\infty[$

Ccl : l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions 0 et α.

Donnons un encadrement de α à 0,1 près

On a : $1 < \alpha < 2$

1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
-	-	-	+	+	+	+	+	+	+

Alors: $1,2 \leq \alpha \leq 1,3$

3) Déduisons le signe de φ

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[, \varphi(x) > 0$

$\forall x \in]0; \alpha[, \varphi(x) < 0$

B) $f(x) = (2x+3)e^{-x} + x - 1$

1) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Calculons f'

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x) = 2e^{-x} - (2x+3)e^{-x} + 1 = e^{-x}(2 - 2x - 3 + e^{x})$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}(e^{x} - 2x - 1) = e^{-x}\varphi(x)$

3) Tableau de variation de f

Prenons $\alpha \cong 1,25$

x	$-\infty$		0		$1,25$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$f(1,25)$	↗	$+\infty$

4) $(\Delta) : y = x - 1$

a) Montrons que la droite (Δ) est asymptote à (C) en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty}(2xe^{-x} + 3e^{-x}) = 0$

Alors $(\Delta) : y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

b) Position de (C) par rapport à$(\Delta) : y = x - 1$

$$f(x) - y = (2x+3)e^{-x}$$

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[, f(x) - y < 0$ donc (C) est en dessous de (Δ) sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$

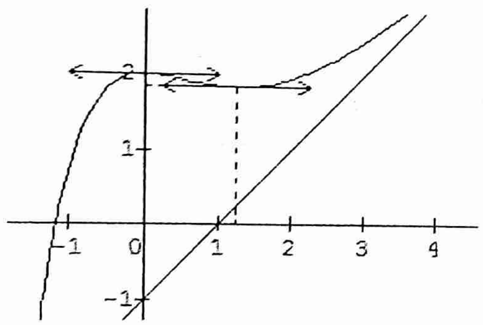
$\forall x \in \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[, f(x) - y > 0$ donc (C) est au dessus de (Δ) sur $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$,

c) Coordonnées du point d'intersection de (C) et (Δ)

$A = (C) \cap (\Delta)$ alors : $\begin{cases} f(x) - y = 0 \\ y = x - 1 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}$ D'où

$A\left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

5) Construction



6) $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ x - 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

a) Calculons : $\int_0^{\lambda}(2x+3)e^{-x}dx$

$\begin{cases} u(x) = 2x + 3 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$\int_0^{\lambda}(2x+3)e^{-x}dx = [-(2x+5)e^{-x}]_0^{\lambda} = 5 - e^{-\lambda}(2\lambda + 5)$

b) Calculons l'aire $A(\lambda)$

$A(\lambda) = 16\left(5 - e^{-\lambda}(2\lambda + 5)\right) cm^2$

Sujet 44

Exercice 1

$f(z) = z^3 - (9+4i)z^2 + (19+29i)z + 22 - 46i$

1) Montrons que l'équation f(z)=0 admet une solution unique imaginaire pure z_0

Soit $z_0 = i\alpha$

$f(i\alpha) = 9\alpha^2 - 29\alpha + 22 + i(-\alpha^3 + 4\alpha^2 + 19\alpha - 46$

$f(i\alpha) = 0$ alors : $\begin{cases} 4\alpha^2 - 29\alpha + 22 = 0 \\ -\alpha^3 + 4\alpha^2 + 19\alpha - 46 = 0 \end{cases}$

$4\alpha^2 - 29\alpha + 22 = 0$

$\Delta = 49$

$\alpha = 2 \text{ ou } \alpha = \frac{11}{9}$

$z_0 = 2i$

2) Déterminons un polynome du 2[nd] dégré Q tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (z - z_0)Q(z)$

$f(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$

	1	-9-4i	19+29i	22-46i
2i		2i	4-18i	-22+46i
	1	-9-2i	23+11i	0

$f(z) = (z - 2i)(z^2 - (9+2i)z^2 + 23 + 11i)$

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation f(z)=0

$f(z) = 0$ alors : $\begin{cases} z - 2i = 0 \\ z^2 - (9+2i)z + 23 + 11i = 0 \end{cases}$

$z_0 = 0$ ou $\Delta = -16 - 8i = (-1 + 4i)^2$

$z_1 = 4 + 3i$ ou $z_1 = 5 - i$

D'où $S = \{2i; 4 + 3i; 5 - i\}$

4) $z_A = 2i;\ z_B = 4 + 3i; z_C = 5 - i$

a) Démontrons qu'il existe une et une seule similitude directe S qui transforme A en B et B en C

Soit $S : z' = az + b$

$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = C \end{cases}$ alors : $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases}$

$a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_B} = -i$

$b = z_B - az_A = 2 + 3i$

D'où $S : z' = -iz + 2 + 3i$

b) Eléments caractéristiques de S

S est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

c) Expression analytique de S

$x' + iy' = -i(x + iy) + 2 + 3i = y + 2 + i(-x + 3)$

D'où $S : \begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = -x + 3 \end{cases}$

5) Soit $(D) : x + y - 1 = 0$

Déterminons une équation de la droite $(D') = S((D))$

$\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = -x + 3 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = -y' + 3 \\ y = x' - 2 \end{cases}$

$-y + 3 + x - 2 - 1 = 0$ alors $y = x$

D'où $(D') : y = x$

Exercice 2

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \end{cases}$$

1) Démontrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{2} \leq u_n$

- $u_0 = 1$ alors $-\frac{1}{2} \leq u_0$
- Supposons que, $\forall k > 0, -\frac{1}{2} \leq u_k$
- Vérifions que, $\forall k > 0, -\frac{1}{2} \leq u_{k+1}$

On a : $u_{k+1} = 1 - \frac{6}{2u_k+5}$

$-\frac{1}{2} \leq u_k$ alors $4 \leq 2u_k + 5$ et $-\frac{3}{2} \leq -\frac{6}{2u_k+5}$

$1 - \frac{3}{2} \leq 1 - \frac{6}{2u_k+5}$ alors : $\forall k > 0, -\frac{1}{2} \leq u_{k+1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{2} \leq u_n$

2) Démontrosb que la suite (u_n) est décroissante

$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n-1}{2u_n+5} - u_n = -\frac{2\left(u_n+\frac{1}{2}\right)(u_n+1)}{2u_n+5}$

$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{2} \leq u_n$ alors : $u_n + \frac{1}{2} \geq 0;\ u_n + 1 > 0\ et\ 2u_n + 5 > 0$

Alors : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc (u_n) est décroissante

3) Convergence de la suite (u_n)

(u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente

4) $v_n = \frac{2u_n+1}{u_n+1}$

a) Démontrons que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1} = \frac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+1} = \frac{6u_n+3}{4u_n+4}$

$v_{n+1} = \frac{3}{4} \times \frac{2u_n+1}{u_n+1} = \frac{3}{4} v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3}{2}$

b) Expression de v_n et u_n en fonction de n

$v_n = v_0 q^n = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$v_n = \frac{2u_n+1}{u_n+1}$ alors : $u_n = \frac{1-v_n}{v_n-2} = \frac{1-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n-2}$

c) Limite de la suite (u_n)

$\lim(u_n) = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$

d) Exprimons $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n

$S_n = \frac{3}{2} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = 6\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$

Problème

A) $g(x) = -x^3 + 1 - 2\ln x, \forall x \in]0; +\infty[$

1) Variations de g

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$g'(x) = -3x^2 - \frac{2}{x} = -\frac{3x^3+2}{x}, \forall x \in]0; +\infty[$

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) < 0$ donc g décrit sur $]0; +\infty[$

$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

2) Vérifions que g(1)=0

$g(1) = -1 + 1 - 2\ln 1 = 0$

3) Déduisons en le signe de g

$\forall x \in]0; 1[, g(x) > 0$

$\forall x \in]1; +\infty[, g(x) < 0$

B) $f(x) = -x + \frac{\ln x}{x^2}, \forall x \in]0; +\infty[$

1) Continuité de f sur $]0; +\infty[$

$x \longmapsto \ln x$ est continue sur $]0; +\infty[$

$x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $]0; +\infty[$

Comme $x^2 \neq 0, x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$

$x \longmapsto -x$ est continue sur $]0; +\infty[$

Donc f est continue sur $]0; +\infty[$ comme quotient et somme des fonctions continues.

2) Limites de f

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3) Calculons f'(x) et vérifions que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient et somme des fonctions dérivables et on a :

$f'(x) = -1 + \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = -1 + \frac{1-2\ln x}{x^3}$

$f'(x) = \frac{-x^3+1-2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}, \forall x \in]0; +\infty[$

4) Variations de f

f' est du signe de g, alors :

$\forall x \in]0; 1[, f'(x) > 0$ donc f croit sur $]0; 1[$

$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$ donc f décroit sur $]1; +\infty[$

Tableau de variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$

5) Soit $(D) : y = -x$

a) Démontrons que (D) est asymptote à (C) en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

Alors la droite (D) est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

b) Positions de (C) parv rapport à (C)

$f(x) - y = \frac{\ln x}{x^2}, \forall x \in]0; +\infty[$

$\forall x \in]0; 1[, f(x) - y < 0$ donc (C) est en dessous de (D) sur $]0; 1[$

$x \in]1; +\infty[, f(x) - y > 0$ donc (C) est au dessus de (D) sur $]1; +\infty[$

$A = (C) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ y = -x \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (C) \cap (D)$

c) Coordonnées du point B de (C) sachant que (C) admet en ce point une tangente parallèle à (D)

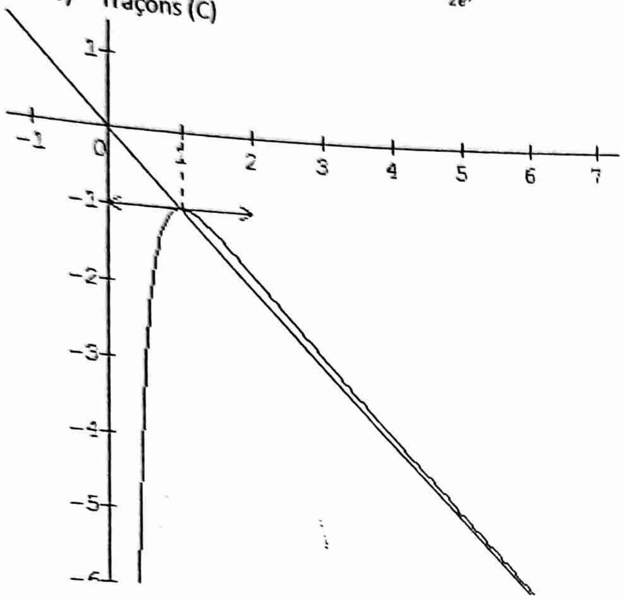
$(T) : y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$

$(T) \parallel (D) \Leftrightarrow f'(x_B) = -1$

$\frac{-x^3+1-2\ln x}{x^3} = -1$ alors : $x = \sqrt{e}$

$y = f(\sqrt{e}) = -\sqrt{e} + \frac{1}{2e}$ alors : $B\begin{pmatrix} \sqrt{e} \\ -\sqrt{e} + \frac{1}{2e} \end{pmatrix}$

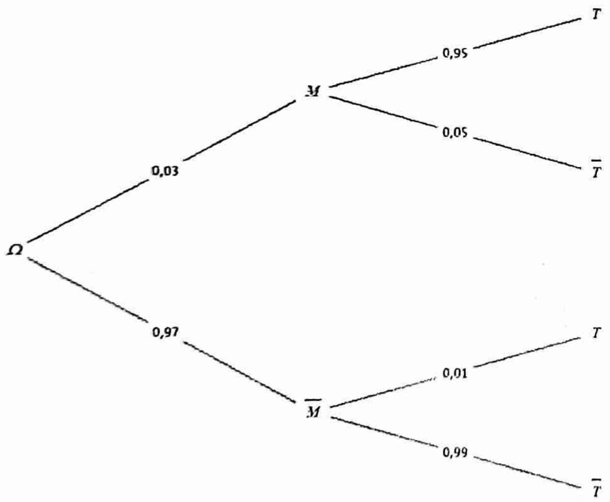
6) Traçons (C)



Sujet 46

Exercice 2

1) Construisons un arbre de probabilités



2) Calculons $P(M \cap T)$ et $P(M \cap \bar{T})$

$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}03 \times 0{,}95 = 0{,}0285$

$P(\bar{M} \cap T) = P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) = 0{,}97 \times 0{,}01 = 0{,}0097$

3) Calculons P(T) et $P(\bar{T})$

$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0{,}0382$

$P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}0382 = 0{,}9618$

4) Calculons $P_T(M)$

$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0285}{0{,}0382} = 0{,}7461$

5) Calculons $P_{\bar{T}}(M)$

$P_{\bar{T}}(M) = \frac{P(M \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0{,}03 \times 0{,}05}{0{,}9618} = 0{,}0016$

Exercice 3

$f : \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

1) $O' = f(O)$

a) Calculons OM^2 et $O'M'^2$

$OM^2 = x^2 + y^2$ et $O'M'^2 = (x' - 1)^2 + (y' - 2)^2 = x^2 + y^2$

b) Déduisons la nature de f

$OM = O'M' = \sqrt{x^2 + y^2}$ alors f est isométrie plane

2) a et b sont deux nombres complexes

a) Déterminons a et b tels que : $x' + iy' = a\overline{(x + iy)} + b$

$x' + iy' = i(x - iy) + 1 + 2i$ alors $a = i$ et $b = 1 + 2i$

b) Nature et éléments caractéristiques de f

f et un antidéplacement qui n'a pas de points invariants donc f est une symétrie glissée

- $f \circ f(M) = t_{2\vec{u}}(M) = M'' : z'' = z + 3 + 3i$ alors le vecteur est $\vec{u}\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$
- $s_\Delta = f \circ t_{-\vec{u}} : z_2 = iz_1 + 1 + 2i = i\bar{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ avec $z_1 = z - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

$s_\Delta(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ y = x + \frac{1}{2} \end{cases}$ alors $(\Delta) : -x + y - \frac{1}{2} = 0$

Problème

A) $g(x) = 2 + \frac{3}{x^3} - 6\frac{\ln x}{x^3}$

1) Déterminons les limites de g

$\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty + = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2$

2) Etudions les variations de g

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a:

$g'(x) = -\frac{9}{x^4} - 6\frac{1 - 3\ln x}{x^4} = \frac{-15 + 18\ln x}{x^4}$

$g'(x) = 0$ alors $x = e^{\frac{5}{6}} \cong 2{,}3$

$\forall x \in \left]0; e^{\frac{5}{6}}\right[, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $\left]0; e^{\frac{5}{6}}\right[$

$\forall x \in \left]e^{\frac{5}{6}}; +\infty\right[, g'(x) > 0$ alors g croit sur $\left]e^{\frac{5}{6}}; +\infty\right[$

Tableau de variation de g

x	0	2,3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty \searrow$	1,8	$\nearrow 2$

Déduisons que, $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$

g est minorée par g(2,3)=1,8 > 0 alors :

$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$

B) $f(x) = 2x + 3\frac{\ln x}{x^2}$

1) a) Calculons $f'(x)$ et précisons le sens de variation de f

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$f'(x) = 2 + 3\frac{x-2x\ln x}{x^4} = 2 + \frac{3}{x^3} - 6\frac{\ln x}{x^3} = g(x)$

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f croit sur $]0; +\infty[$

b) Calculons les limites de f

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c) Dressons le tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) $(D) : y = 2x$

a) Démontrons que (D) est asymptote à (C)

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{x^2} = 0$

Précisons la position de (C) par rapport à (D)

$f(x) - y = \frac{3\ln x}{x^2}$

$\forall x \in]0; 1[, f(x) - y < 0$ alors (C) est en dessous de (D) sur $]0; 1[$

$x \in]1; +\infty[, f(x) - y > 0$ alors (C) est au dessus de (D) sur $]1; +\infty[$

b) Calculons $f(0,5), f(1), f(2)$ et $f(3)$

$f(0,5) = -7,3$; $f(1) = 2$; $f(2) = 4,5$ et $f(3) = 6,4$

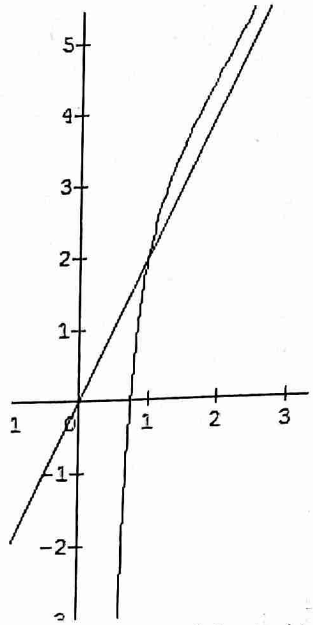
c) Démontrons que l'équation f(x)=0 admet une solution unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation f(x)=0 admet une unique solution α.

$f(1) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ alors $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$.

3) Construction



4) Calculons l'aire du domaine plan compris entre (D), (C) et les droites d'équations x=1 et x=e

$A = \int_1^e (f(x) - y)dx = 3\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} \\ v(x) = \ln x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = -\frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$A = 3\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + 3\int_1^e \frac{1}{x^2}dx = 3\left[-\frac{\ln x+1}{x}\right]_1^e = \frac{3e-6}{e}$

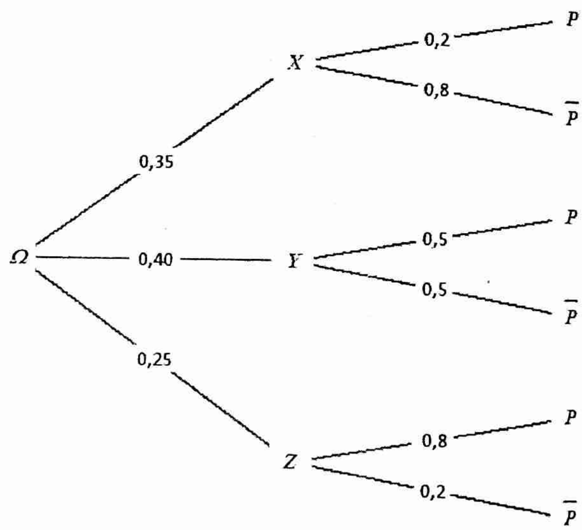
Sujet 48

Exercice 2

$P(X) = 0,35; P(Y) = 0,40$ et $P(Z) = 0,25$

1) $P_X(P) = 0,2$ est la probabilité d'avoir un sujet portant sur la probabilité sachant que Mr X a crée le sujet.

Arbre de probabilité



2) Calculons P(P)

$P(P) = P(P \cap X) + P(P \cap Y) + P(P \cap Z) = 0,47$

3) Calculons $P_P(X)$

$$P_P(X) = \frac{P(P \cap X)}{P(P)} = \frac{0,35 \times 0,2}{0,47} = 0,149$$

Problème

$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$

A) $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1) Calculons les limites de g

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

2) Calculons g'(x), déterminons son signe et le sens de varaition de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$g'(x) = -(2x - 2)e^{-x} + (x^2 - 2x + 2)e^{-x} = (x - 2)^2 e^{-x}$

$\forall \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ donc g croit sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	2

3) Démontrons que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty; 1[$.

Comme $0 \in]-\infty; 1[$ alors l'équation g(x)=0 admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Vérifions que : $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$

$g(0,35) = -0,0024$ et $g(0,36) = 0,016$

$g(0,35) \times g(0,36) < 0$ alors $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$

4) Déduisons en le signe de g suivant les valeurs de x

$\forall\, x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

B) Etude de la fonction f

1) Calculons les limites de f

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim \; e^{-x}(xe^x - e^x + x^2 + 2) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim \; (x - 1 + x^2 e^{-x} + 2e^{-x}) = +\infty$

2) Calculons f'(x)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x) = 1 + 2xe^{-x} - (x^2 + 2)e^{-x} = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x} = g(x)$

3) Variations de f

$\forall\, x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) < 0$ alors f décroit sur $]-\infty; \alpha[$

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f roit sur $]\alpha; +\infty[$

Prenons $\alpha \cong 0,35$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0,35	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(0,35)$	↗ $+\infty$

4) Démontrons que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$

$f(\alpha) = \alpha - 1 + (\alpha^2 + 2)e^{-\alpha}$

$g(\alpha) = 0$ alors $1 = (\alpha^2 - 2\alpha + 2)e^{-\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha - \alpha^2 e^{-\alpha} + 2\alpha e^{-\alpha} - 2e^{-\alpha} + \alpha^2 e^{-\alpha} + 2e^{-\alpha} = \alpha + 2\alpha e^{-\alpha}$

alors $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$

Encadrons $f(\alpha)$

$0,35 \leq \alpha \leq 0,36$ alors $1 + 2e^{-0,36} \leq 1 + 2e^{-\alpha} \leq 1 + 2e^{-0,35}$

Par suite, on a : $0,35(1 + 2e^{-0,36}) \leq f(\alpha) \leq 0,36(1 + 2e^{-0,35})$

D'où $0,84 \leq f(\alpha) \leq 0,86$

5) Démontrons que $(\Delta) : y = x - 1$ est asymptote à (C)

$\lim_{x \to +\infty}(f(x) - y) = \lim_{x \to +\infty}(x^2 + 2)e^{-x} = 0$ alors la droite (Δ) est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

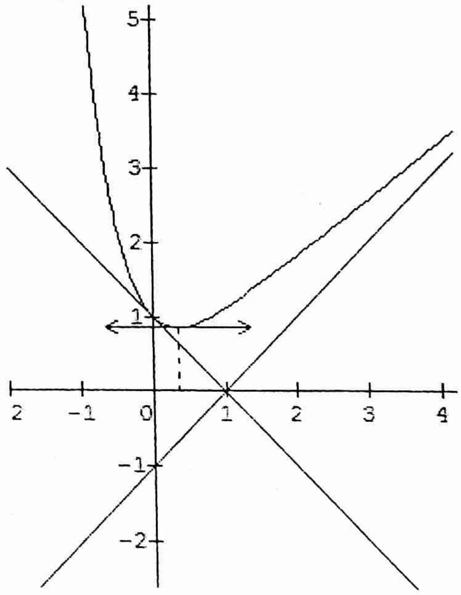
Position de (C) par rapport à (Δ)

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) - y > 0$ alors la courbe (C) est au dessus de (Δ).

6) Equation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0

$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x + 1$

7) Constructions



8) a) Déterminons les réels a, b et c tels que : $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction $x \longmapsto (x^2 + 2)e^{-x}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, P'(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$

$P'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)e^{-x} + b - c)e^{-x}$

$P'(x) = (x^2+2)e^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases}$

D'où $P(x) = -(x^2+2x+4)e^{-x}$

b) Calculons en fonction de α l'aire A de la partie limitée par (C), (Δ) et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$

$A = 4\int_{-\alpha}^{0}(x^2+2)e^{-x}dx = 4[-(x^2+2x+4)e^{-x}]_{-\alpha}^{0}$

Alors $A = 4(-4+(\alpha^2-\alpha+4)e^{\alpha})cm^2$

Sujet 50

Exercice 2

Dé bleu : $\{1;1;1;2\}$

Dé rouge : $\{-1;0;2;2\}$

	1	1	1	2
-1	0	0	0	1
0	1	1	1	2
2	3	3	3	4
2	3	3	3	4

1) $X(\Omega) = \{0;1;2;3;4\}$

a) Donnons la loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	3	4
P_i	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{2}{16}$

b) Calculons $E(X)$ et $\delta(X)$

$E(X) = \sum x_iP_i = \frac{4+2+18+8}{16} = 2$

$V(X) = \frac{4+4+54+32}{16} - 4 = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$

$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = 1{,}36$

2) On effectue ces jets n fois de suite

a) Donnons la probabilité p de relever une fois et une seule fois le nombre 2 pour le dé bleu

Soit $p_1 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ et $q_1 = 1 - p_1 = \frac{3}{4}$

$p = C_n^1 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = n\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

b) Donnons la probabilité q de relever une et une seule fois le nombre 2 pour le dé rouge

Soit $p_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{2}$ et $q_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$q = C_n^1 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) Valeur de n pour que : $p > q$

$p > q$ alors $n\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} > n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$ln\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} > ln\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ alors $-ln2 + (n-1)ln\frac{3}{4} > (n-1)ln\frac{1}{2}$

$n > \frac{ln2}{ln3 - ln2}$ alors $n = 3$

Exercice 3

$f : z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $f : z' = a\bar{z} + b$ avec $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc f est un antidéplacement

b) Prouvons que $f = s \circ t$

- $f \circ f(M) = M'' : z'' = z + 2 + 2i\sqrt{3}$

$f \circ f = t_{2\vec{u}}$ alors $\vec{u}(1;\ \sqrt{3})$

- $s = t_{-\vec{u}} \circ f(M_1) = M_2 :\ z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $z_1 = z - 1 - i\sqrt{3}$

$s(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} = 0 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$ alors $(\Delta): -3x + y\sqrt{3} + 3 = 0$

Problème

A) $g(x) = e^x + x - 5$

1) Sens de variation de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x + 1$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrons que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation g(x)=0 admet une unique solution réelle α.

3) Justifions que : $1{,}30 \le \alpha \le 1{,}31$

$g(1{,}30) = -0{,}03$ et $g(1{,}31) = 0{,}016$

$g(1{,}30) \times g(1{,}31) < 0$ alors $1{,}30 \le \alpha \le 1{,}31$

B) $f(x) = \ln(5-x)$, $\forall\, x \in]-\infty; 5[$

1) Sens de variation de f

f est dérivable sur $]-\infty;5[$ et on a :

$f'(x) = -\frac{1}{5-x} = \frac{1}{x-5}$

$\forall\, x \in]-\infty;5[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty;5[$.

Calculons les limites de f

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to5} f(x) = -\infty$

2) Vérifions que : $f(\alpha) = \alpha$

$g(\alpha) = 0$ alors $e^{\alpha} + \alpha - 5 = 0$

$e^{\alpha} = 5 - \alpha$ alors $\alpha = \ln(5-\alpha) = f(\alpha)$

3) Démontrons que, $\forall\, x \in [0;3], |f'(x)| \le \frac{1}{2}$

$0 \le x \le 3$ alors $-5 \le x - 5 \le -2$

$2 \le |x-5| \le 5$ alors $\frac{1}{5} \le \frac{1}{|x-5|} \le \frac{1}{2}$

D'où $\forall\, x \in [0;3], |f'(x)| \le \frac{1}{2}$

Déduisons en que : $\forall\, x \in [0;3], |f(x) - \alpha| \le \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\alpha \in [0;3]$ et $\forall\, x \in [0;3], |f'(x)| \le \frac{1}{2}$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[\alpha; x]$ donne : $|f(x) - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Or $f(\alpha) = \alpha$

D'où $\forall\, x \in [0;3], |f(x) - \alpha| \le \frac{1}{2}|x - \alpha|$

4) Montrons que, $\forall\, x \in [0;3], f(x) \in [0;3]$

$0 \le x \le 3$ alors $f(3) \le f(x) \le f(0)$ car f est décroissante

$ln2 \le f(x) \le ln5$ alors : $0 \le f(x) \le 3$

D'où $\forall\, x \in [0;3], f(x) \in [0;3]$

5) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n), \forall\, n \in \mathbb{N}$

a) Montrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

On a : $\forall x \in [0;3], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$u_n \in [0;3]$, posons $u_n = x$

Alors : $|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

b) Déduisons en que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Par itération, on a :

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

$|u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-2} - \alpha|$

....

....

....

$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha|$

Par produit et après simplification, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$

Déduisons en que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$u_0 = 1$ et $0 \leq \alpha \leq 3$ alors : $|u_0 - \alpha| \leq 2$

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \times 2$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

Sujet 51

Exercice 1

$z = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$

1) Calculons z^2

$z^2 = (1 - \sqrt{3})^2 - (1 + \sqrt{3})^2 - 2i(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = -4\sqrt{3} + 4i$

2) Module et un argument de z^2

$|z^2| = 8$ et $\arg(z^2) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Déduisons le module et un argument de z

$|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

3) Valeurs exactes de $cos\frac{17\pi}{12}$ et $sin\frac{17\pi}{12}$

$2\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{12} + isin\frac{5\pi}{12}\right) = 1 - \sqrt{3} + i(-1 - \sqrt{3})$

$\begin{cases} cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ sin\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$ alors : $\begin{cases} cos\frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ sin\frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(1 - \sqrt{3}cosx - (1 + \sqrt{3})sinx = 2$

$cos\frac{5\pi}{12}cosx + sin\frac{5\pi}{12}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = cos\frac{\pi}{4}$ alors $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

Exercice 2

$\begin{cases} 5 \text{ boules rouges} \\ 4 \text{ boules noires} \end{cases}$ soit 9 boules dans l'urne

Soit Ω l'univers es possibles

1) Tirage successif sans remise de deux boules

$Card(\Omega) = A_9^2 = 72$

Calculons la probabilité de chacun des événements suivants :

a) A : « les deux boules sont e meme couleur »

$Car(A) = A_5^2 + A_4^2 = 32$

Alors $P(A) = \frac{32}{72} = 0{,}44$

b) B : « les eux boules sont de meme couleur »

$Card(B) = A_5^1 \times A_4^1 \times 2 = 40$

Alors : $P(B) = \frac{40}{72} = 0{,}56$

2) Tirage successif avec remise de deux boules

$$Card(\Omega) = 9^2 = 81$$

Calculons la probabilité de chacun des événements suivants :

a) C : « on obtient au moins une boule rouge »

$Car(C) = 5^1 \times 4^1 \times 2 + 5^2 = 65$

Alors : $P(C) = \frac{65}{81} = 0{,}80$

b) D : « la prémière boule tirée est noire »

$Card(D) = 4^1 \times 5^1 + 4^1 \times 4^1 = 36$

$P(D) = \frac{36}{81} = 0{,}44$

3) Tirage simultané de deux boules

Calculons $P(A), P(B), P(C)$ et $P(D)$

$Card(A) = C_5^2 + C_4^2 = 16$

Alors : $P(A) = \frac{16}{36} = 0{,}44$

$Card(B) = C_5^1 \times C_4^1 = 20$

Alors : $P(B) = \frac{20}{36} = 0{,}56$

$Card(C) = C_5^1 \times C_4^1 + C_5^2 = 30$

Alors : $P(C) = \frac{30}{36} = 0{,}83$

$P(D) = 0$ car D est un événement impossible

Exercice 3

On peut utiliser une methode analogue que celle de l'exercice 3 du sujet 50.

Problème

$f_m(x) = (1 - mx)e^{x+1}$

1) Suivant les valeurs de m, dressons le tableau de variation de f_m

f_m est érivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'_m(x) = (1 - m - mx)e^{x+1}$

$f'_m(x) = 0$ alors $x = \frac{1}{m} - 1$

- $m < 0$

x	$-\infty$	$-1+1/m$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	$f(-1+1/m)$	$\nearrow +\infty$

- $m > 0$

x	$-\infty$	$-1+1/m$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$f(-1+1/m)$	$\searrow -\infty$

2) $g(x) =' 1 - x)e^{x+1}$

a) dressons le tableau de variation de g

$g'(x) = -xe^{x+1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$0 \nearrow$	e	$\searrow -\infty$

b) Equation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse -1

$(T): y = g'(-1)(x+1) + g(-1) = x + 1 + 2$

D'où $(T): y = x + 3$

c) Déterminons g'' et étudions son signe

$g''(x) = -e^{x+1} - xe^{x+1} = -(x+1)e^{x+1}$

$\forall\, x \in]-\infty; -1[, g''(x) > 0$

$\forall\, x \in]-1; +\infty[, g''(x) < 0$

3) La primitive de g qui s'annule en -1

$G(x) = \int (1-x)e^{x+1}dx + c$

$\begin{cases} u'(x) = e^{x+1} \\ v(x) = 1 - x \end{cases}$ alors : $\begin{cases} u(x) = e^{x+1} \\ v'(x) = -1 \end{cases}$

$G(x) = (1-x)e^{x+1} + \int e^{x+1}dx + c$

$G(x) = (2-x)e^{x+1} + c$

$G(-1) = 0$ alors : $c = -3$

D'où $G(x) = (2-x)e^{x+1} - 3$

4) Calculons l'aire du domaine plan limité par (C_g), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=-1 et x=1

$A = \int_{-1}^{1} g(x)dx = [(2-x)e^{x+1}]_{-1}^{1} = (e^2 - 1)cm^2$

5) $h(x) = g(x), \forall\, x \in]0; +\infty[$

a) Mon trons que h est une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J

h est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ onc h réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; e[= J$

b) Calculons $(h^{-1})'(0)$

$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h' \circ h^{-1}(0)} = \frac{1}{h'(h^{-1}(0))}$

Or $h(1) = 0$ alors : $1 = h^{-1}(0)$

$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(1)} = -\frac{1}{e^2}$

6) $M\begin{pmatrix} -1 + lnt \\ (2 - lnt)t \end{pmatrix}$

a) Trajectoire du point M

$\begin{cases} x = -1 + lnt \\ y = (2 - lnt)t \end{cases}$ alors : $\begin{cases} t = e^{x+1} \\ y = (2 - lnt)t \end{cases}$

$y = (1-x)e^{x+1} = g(x)$

D'où le piont M décrit la courbe (C_g)

b) Les coordonnées du vecteur vitesse de M

$\overrightarrow{OM}: \begin{cases} x = -1 + lnt \\ y = (2 - lnt)t \end{cases}$ alors $\vec{V}_M : \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{t} \\ \dot{y} = 1 - lnt \end{cases}$

D'où $\vec{V}_M \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 - lnt \end{pmatrix}$

Sujet 52

Exercice 1

$Z = -8\sqrt{3} + 8i$ et $u = \sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

1) Ecrivons z sous forme trigonométrique

$|Z| = 16$ et $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$ alors $Z = 16(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

Déterminons les racines carrées de z sous forme trigonométrique

$Z = 16e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Posons $Z = z^2 = 16e^{i\frac{5\pi}{6}} = r^2e^{2i\alpha}$

Par identification, on a :

$\begin{cases} r^2 = 16 \\ 2\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \alpha = \frac{5\alpha}{12} + k\pi \end{cases}$

$z_k = 4e^{i\left(\frac{5\pi}{12} + k\pi\right)}$ avec $k \in \{0; 1\}$

$z_0 = 4e^{i\frac{5\pi}{12}} = 4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

$z_1 = 4e^{i\frac{17\pi}{12}} = 4\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$

2) Calculons u^2

$u^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 2i(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$

alors $u^2 = -8\sqrt{3} + 8i = Z$

Déduisons les racines carrées de Z sous forme algébrique

$u^2 = Z$ alors : $\sqrt{Z} = u$ ou $\sqrt{Z} = -u$

D'où $z_0 = \sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ et $z_1 = -\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(-\sqrt{6} - \sqrt{2})$

3) Valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

$\cos\frac{5\pi}{12} > 0$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$ alors :

$4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

Alors : $\begin{cases} \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Exercice 2

On lance simultanément deux dés cubiques

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Calculons les probabilités des événements suivants :

a) La somme des numéros obtenus est 6

$P_1 = \frac{5}{36}$

b) La somme des numéros obtenus est impaire

$P_2 = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

c) La somme des numéros obtenus est paire

$P_3 = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

d) La somme des numéros obtenus est supérieure ou égale à 8

$P_4 = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

e) La somme des numéros obtenus est strictement inférieure à 4

$P_5 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Problème

A) $g(x) = x^3 + lnx - 1, \forall x \in]0; +\infty[$

1) Variations de g

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} = \frac{3x^3+1}{x}$

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$ donc g coit sur $]0; +\infty[$

$\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Tableau de variations de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	∞ ↗	$+\infty$

2) Calculons g(1) et déduisons le signe de g

$g(1) = 1 + ln1 - 1 = 0$

$\forall x \in]0; 1[, g(x) < 0$

$\forall x \in]1; +\infty[, g(x) > 0$

B) $f(x) = \frac{x^3-4x-2ln}{2x} = \frac{x^2}{2} - \frac{lnx}{x}$

1) Ensemble de définition de f

$\forall x \in D_f, x > 0$ alors : $D_f =]0; +\infty[$

2) Calculons f'(x) et vérifions que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$f'(x) = x - \frac{1-lnx}{x^2} = \frac{x^3-1+lnx}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

Déduisons le tableau de variation de f

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-3/2$	↗	$+\infty$

3) (P) est la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2} - 2$

a) Etudions la position de (C) par rapport à (P)

$f(x) - y = -\frac{lnx}{x}, \forall x \in]0; +\infty[$

$\forall x \in]0; 1[, f(x) - y > 0$ donc (C) est au dessus de (P) sur $]0; 1[$

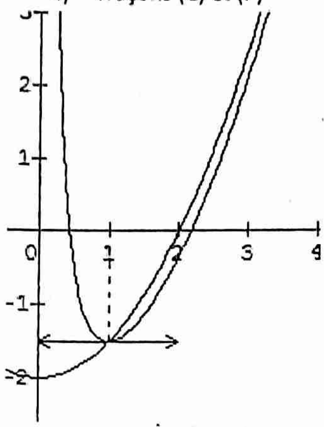
$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - y < 0$ donc (C) est en dssous de (P) sur $]1; +\infty[$

b) Calculons la limite de f(x)-y en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{lnx}{x}\right) = 0$

Alors les courbes (C) et (P) ont un comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$

4) Traçons (C) et (P)



5) $(C_1) = (C)$ sur $]2; +\infty[$

a) Démontrons qu'il existe un unique point d'intersection de (C_1) avec l'axe (OX)

$(C_1) \cap (Ox) \Leftrightarrow f(x) = 0$

f est continue et strictement croissante sur $]2; +\infty[$, elle réalise une bijection de $]2; +\infty[$ vers $]f(2); +\infty[= \left]-\frac{ln2}{2}; +\infty\right[$.

Comme $0 \in \left]-\frac{ln2}{2}; +\infty\right[$, alors l'équation f(x)=0 admet une solution unique $x_0 \in]2; +\infty[$ par conséquent (C_1) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse x_0.

b) Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2

$(T) : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$y = \left(\frac{7+ln2}{4}\right)(x - 2) - \frac{ln2}{2} = \left(\frac{7+ln2}{4}\right)x - \frac{7}{2} - \frac{ln2}{2} - \frac{ln2}{2}$

D'où $(T) : y = \left(\frac{7+ln2}{4}\right)x - \frac{7+2ln2}{2}$

Calculons l'abscisse x_1 du point d'intersection de (T) avec (OI)

$(T) \cap (OI) \Leftrightarrow y = 0$

D'où $x_1 = \frac{14+4ln2}{7+ln2}$

6) $\alpha > 1$

a) Calculons en fonction de α l'aire de la partie du plan comprise entre (C), (P) et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = \alpha$

$A(\alpha) = 4\int_1^\alpha \frac{lnx}{x}dx = 4\left[\frac{1}{2}ln^2x\right]_1^\alpha = (2ln^2\alpha)cm^2$

b) $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = +\infty$

Sujet 53

Exercice 1

$z_A = 3 - i$; $z_B = -2 + i$ et $z' = \frac{z-3+i}{z+2-i}$

1) Interprétons géométriquement le module et un argument de z'

$z' = \frac{z-z_A}{z-z_B}$

Alors : $|z'| = \frac{MA}{MB}$ et $\arg(z') = mes(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) + 2k\pi$

2) Calculons x' et y' en fonction de x et y

$x' + iy' = \frac{x-3+i(y+1)}{x+2+i(y-1)} = \frac{(x-3+i(y+1))(x+2-i(y-1))}{(x+2)^2+(y-1)^2}$

$x' + y' = \frac{x^2-x+y^2-7}{(x+2)^2+(y-1)^2} + i\frac{2x+5y-1}{(x+2)^2+(y-1)^2}$

D'où $\begin{cases} x' = \frac{x^2-x+y^2-7}{(x+2)^2+(y-1)^2} \\ y' = \frac{2x+5y-1}{(x+2)^2+(y-1)^2} \end{cases}$

3) Déterminons l'ensemble des points M(z) tels que :

a) z' soit réel

$z' \in \mathbb{R}$ alors $x^2 - x + y^2 - 7 = 0$

On obtient : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{29}{4}$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{29}}{2}$

b) z' est imaginaire pu

$z' \in i\mathbb{R}$ alors $2x + 5y - 1 = 0$

L'ensemble cherché est la droite d'équation $2x + 5y - 1 = 0$

c) $|z'| = 1$

$|z'| = 1$ alors $MA = MB$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

d) $|z'| = 2$

$|z'| = 2$ alors $MA = 2MB$

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[KL]$ avec : $K = bar\{(A,1); (B,2)\}$ et $L = bar\{(A,1); (B,-2)\}$

Exercice 2

Déterminons l'ensemble des primitives de f sur I

Dans chacun des cas suivants f est une fonction continue sur I alors elle admet une primitive sur I

1) $f(x) = sin^4x cos^5x$ et $I = \mathbb{R}$

$f(x) = cosx sin^4x(1 - sin^2x)^2 = cosx sin^4x - 2cosx sin^6x + cosx sin^8x)$

Alors : $F(x) = \frac{1}{5}sin^5x - \frac{2}{7}sin^7x + \frac{1}{9}sin^9x + c$

2) $f(x) = \frac{3}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2}$ et $I = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$

$F(x) = \frac{3}{2}\ln(-2x-1) - \frac{1}{2(2x+1)} + c$

3) $f(x) = \frac{2}{x ln^2x} = 2\frac{\frac{1}{x}}{ln^2x}$ et $I =]0; 1[$

$F(x) = -\frac{2}{lnx} + c$

4) $f(x) = \frac{x sin + cosx}{x^2} = -\left(\frac{cosx}{x}\right)'$ et $I = \mathbb{R}^*$

$F(x) = -\frac{cosx}{x} + c$

5) $f(x) = \frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$ et $I = \mathbb{R}$

$F(x) = x - \ln(e^x + 1) + c = ln\frac{e^x}{e^x+1} + c$

Exercice 3

I) V est une suite géométrique

1) $v_9 = \frac{1}{625}$ et $q = \frac{1}{5}$. Calculons v_0 et S_9

$v_9 = v_0 q^9$ alors $v_0 = 3125$

$S_9 = v_0\frac{1-q^{10}}{1-q} = 3125\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10}\right) \times \frac{5}{4} = 3906{,}24$

2) $q = -3$ et $v_4 = 81$. Calculons v_0

$v_0 = \frac{v_4}{q^4} = 1$

3) U est une suite arithmetique

$u_0 = 7, u_{64} = -181$. Calculons r et S_{95}

$u_{94} = u_0 + 94r$ alors $r = \frac{u_{94}-u_0}{94} = -2$

$S_{95} = 48(u_0 + u_{95}) = 48(2u_0 + 95r) = -8448$

II) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+2} \end{cases}$

1) Démontrons que $v_n = \frac{1}{u_n}$ est une suite arithmétique

$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} + v_n$

Alors (v_n) est une suite arithmetique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de prémier terme $v_0 = 1$

2) Exprimons v_n et u_n en fonction de n

$v_n = v_0 + nr = 1 + \frac{n}{2} = \frac{n+2}{2}$

$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{2}{n+2}$

$\lim(u_n) = 0$

Problème

A) 1) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

a) Etudions le sens de variation de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3x^2 - 6x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, g'(x) > 0$ donc g croit sur $]-\infty; 0[$ et sur $]2; +\infty[$

$\forall x \in]0; 2[, g'(x) < 0$ donc g décroit sur $]0; 2[$

b) Limites de g

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2) Démontrons que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

g est continue et strictement croissante sur $]2; +\infty[$, elle réalise une bijection de $]2; +\infty[$ vers $]-5; +\infty[$.

Comme $0 \in]-5; +\infty[$ alors l'équation g(x)=0 admet une unique solution $\alpha \in]2; +\infty[$.

Vérifions que : $3{,}10 < \alpha < 3{,}11$

$g(3{,}10) = -0{,}093$ et $g(3{,}11) = 0{,}063$

$g(3,10) \times g(3,11) < 0$ alors $3,10 < \alpha < 3,11$

3) Déduisons le signe de g

$\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

B) $f(x) = e^{-x}(1 - x^3)$

1) Calculons f'(x) et vérifions que f' est du signe de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{-x}(1 - x^3) - 3x^2e^{-x} = e^{-x}(x^3 - 3x^2 - 1)$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc f' est du signe de g

2) Déterminons les limites de f

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^{-x} - x^3e^{-x}) = 0$

Tableau de variation de f

Soit $\alpha \cong 3,11$

x	$-\infty$		$3,11$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(3,11)$	$\nearrow$	0

3) Démontrons que : $f(\alpha) = -3\alpha^2e^{-\alpha}$

$f(\alpha) = e^{-\alpha}(1 - e^{-\alpha})$

$g(\alpha) = 0$ alors : $\alpha^3 = 1 + 3\alpha^2$

Alors : $f(\alpha) = e^{-\alpha}(1 - 1 - 3\alpha^2) = -3\alpha^2e^{-\alpha}$

Donnons un encadrement de $f(\alpha)$

$3,10 < \alpha < 3,11$ alors : $3(3,10)^2 < 3\alpha^2 < 3(3,11)^2$

$3,10 < \alpha < 3,11$ alors : $e^{-3,11} < e^{-\alpha} < e^{-3,10}$

$3(3,10)^2e^{-3,11} < 3\alpha^2e^{-\alpha} < 3(3,11)^2e^{-3,10}$

D'où $-1,3 < f(\alpha) < -1,2$

4) $(\Delta) : y = -x + 1$

a) Donnons le sens de variation de la fonction h définie par : $h(x) = e^{-x}(x^2 + x + 1)$ sur $[0; 1]$

h est dérivable sur $[0; 1]$ et on a :

$h'(x) = -e^{-x}(x^2 + x + 1) + (2x + 1)e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + x)$

$\forall x \in [0; 1], h'(x) \geq 0$ donc h croit sur $[0; 1]$

b) Déduisons en que, $\forall x \in [0; 1], h(x) \geq 1$

h croisante sur $[0; 1]$ alors : $h(0) \leq h(x) \leq h(1)$

$h(0) \leq h(x)$ alors : $1 \leq h(x)$

D'où $\forall x \in [0; 1], h(x) \geq 1$

c) Démontrons que (C) est au dessuss de (Δ)

$f(x) - y = (1 - x)(h(x) - 1), \forall x \in [0; 1]$

Or $\forall x \in [0; 1], h(x) \geq 1$ alors $f(x) - y \geq 0$ par conséquent (C) est au dessus de (Δ)

5) a) Montrons qu'il existe a, b et c tels que : $F(x) = e^{-x}(x^3 + ax^2 + bx + c)$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$

$F'(x) = -e^{-x}(x^3 + ax^2 + bx + c) + e^{-x}(3x^2 + 2ax + b) = e^{-x}(-x^3 + (3 - a)x^2 + (2a - b)x + b - c)$

Par identification, on a :

$\begin{cases} 3 - a = 0 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 1 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 5 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 5)$

b) Calculons l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1

$A = 4\int_0^1 f(x)dx = 4[F(x)]_0^1 = 4(F(1) - F(0)) = 4\frac{15-5e}{e}cm^2$

Sujet 54

Exercice 1

1) $P(x) = -x^3 - 6x + 20$

Calulons P(2)

$P(2) = -8 - 12 + 20 = 0$

2) $f(z) = z^3 - 6z + 20i$

Montrons que l'équation f(z)=0 admet une solution imaginaire pur z_0

Soit $z_0 = i\alpha$

$f(i\alpha) = -i\alpha^3 - 6i\alpha + 20i = i(-\alpha^3 - 6\alpha + 20)$

$f(i\alpha) = 0$ alors $-\alpha^3 - 6\alpha + 20 = 0$

De ce qui précède, on a : $\alpha = 2$

D'où $z_0 = 2i$

3) Résolvons dans l'équation f(z)=0

$f(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$

	1	0	-6	20i
2i		2i	-4	-20i
	1	2i	-10	

$f(z) = (z - 2i)(z^2 + 2iz - 10)$

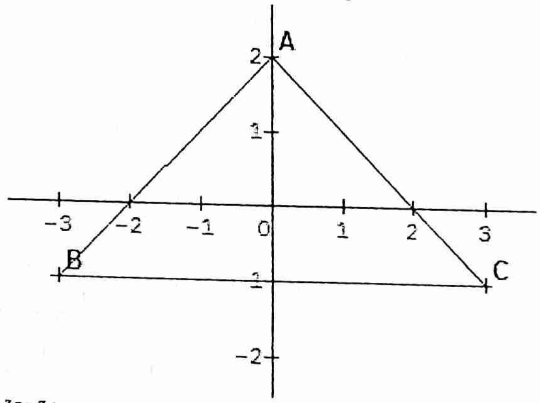
$f(z) = 0$ alors : $z_0 = 2i$ ou $z^2 + 2iz - 10 = 0$

$\Delta' = 9$

$z_1 = -3 - i;\ z_2 = 3 - i$

$S = \{2i; -3 - i; 3 - i\}$

4) $z_A = 2i;\ z_B = -3 - i;\ z_C = 3 - i$



$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$ alors ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

Exercice 2

1) $u_0 = 3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$

a) Démontrons que la suite (u_n) est minorée par 2

- $u_0 = 3$ alors : $2 < u_0$
- Supposons que, $\forall k \in \mathbb{N}, 2 < u_k$
- Vérifions que, $\forall k \in \mathbb{N}, 2 < u_{k+1}$

On a : $u_{k+1} = 3 - \frac{1}{u_{k-1}}$

$2 < u_k$ alors : $-1 < -\frac{1}{u_{k-1}}$

$3 - 1 < 3 - \frac{1}{u_{k-1}}$ alors : $\forall\, k \in \mathbb{N}, 2 < u_{k+1}$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, 2 < u_n$ par conséquent la suite est minorée par 2.

b) Prouvons que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-2)^2}{u_n-1}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n-4}{u_n-1} - u_n = \frac{-(u_n^2-4u_n+4)}{u_n-1}$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-2)^2}{u_n-1}$

Déduisons le sens de variation de (u_n)

$u_{n+1} - u_n < 0$ alors (u_n) est décroissante

c) Convergence de (u_n)

(u_n) est décroissante et minorée alors elle est convergente.

d) Justifions que (u_n) converge vers 2

Soit $f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$ et (Δ) la droite d'équation $y = x$

$(C_f) \cap (\Delta) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

On obtient x=2 p

D'où (u_n) converge vers 2

2) Soit $v_n = \frac{1}{u_n-2}$

a) Démontrons que (v_n) est une suite arithmétique

$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-2} = \frac{u_n-1}{u_n-2}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n-1}{u_n-2} - \frac{1}{u_n-2} = \frac{u_n-2}{u_n-2} = 1$

$\forall \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 + v_n$ donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de prémier terme $v_0 = 1$

b) Exprimons v_n et u_n en fonction de n

$v_n = v_0 + nr = n + 1$

$v_n = \frac{1}{u_n-2}$ alors : $u_n = \frac{1+2v_n}{v_n} = \frac{2n+3}{n+1}$

3) Soit $w_n = ln u_n$

a) Justifions que la suite (w_n) converge vers $ln2$

$w_n = ln u_n = ln\frac{2n+3}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} ln\frac{2n+3}{n+1} = ln2$

Alors la suite (w_n) converge vers $ln2$

b) Prouvons que w_n est décroissante

Soit $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$

$f'(x) = -\frac{1}{(2x+3)(x+1)} < 0$ alors f est décroissante par conséquent (u_n) est décroissante

c) Résolvons dans $\mathbb{N}$, $|w_n - ln2| \leq 10^{-2}$

Problème

A) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2}$

1) Déterminons les limites de f et interpr étons graphiquement les résultats

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ alors la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

2) Etudions les variations de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$..

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-1/2$	$1/2$

3) démontrons que f est impaire

$\forall\, x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et on a :

$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{2} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2}$

$f(-x) = -\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{2} = -\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2}\right) = -f(x)$

Alors f est une fonction impaire par conséquent l'origine du repère est un centre de symétrie de (C).

4) Déduisons le signe de f

$f(0) = 0$ alors :

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, f(x) < 0$

$\forall\, x \in]0; +\infty[, f(x) > 0$

B) $g(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{1}{2}x$

1) Prouvons que : $g(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{2}x = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$

$g(x) = \ln(e^x(1 + e^{-x})) - \frac{1}{2}x = lne^x + \ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{2}x$

$g(x) = x + \ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{2}x = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{2}x$

$g(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{1}{2}x = \ln\left(e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\right) - \frac{1}{2}x$

$g(x) = lne^{\frac{x}{2}} + \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) - \frac{1}{2}x = \frac{x}{2} + \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) - \frac{x}{2}$

D'où $g(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$

2) Vérifions que $g'(x) = f(x)$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$g'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2} = f(x)$

Déduisons les variations de g

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, g'(x) < 0$ alors g décroit sur $]-\infty; 0[$

$\forall\, x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$ alors g croit sur $]0; +\infty[$

3) Déterminons la limite de g

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim\ (_{x\to+\infty} \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{2}x) = +\infty$

4) Prouvons que la droite $(\Delta) : y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = lim\ \ln(1 + e^{-x}) = ln1 = 0$

Alors la droite $(\Delta) : y = \frac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

Position de (C) par rapport à (Δ)

$f(x) - y = \ln(1 + e^{-x})$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + e^{-x} > 1$ alors $\ln(1 + e^{-x}) > 0$ par conséquent (C) est au dessus de (Δ)

5) Démontrons que g est paire

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$g(-x) = \ln(e^{-x} + 1) + \frac{1}{2}x = \ln(e^{-x}(1 + e^{-x}) + \frac{1}{2}x$

$g(-x) = -x + \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{2}x = \ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{2}x$

D »où $g(-x) = \ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{2}x = g(x)$

Alors g est une fonction paire

On peut en déduire que la droite $(\Delta') : y = -\frac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

6) Traçons (C)