



MATHivoire

MATHivoire

1^{ière} D

By TEHUA

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES
Toutes les Leçons



Avant – propos

Ce document a été conçu conformément au programme officiel en vigueur en Côte d'Ivoire.

Cette collection est le fruit d'une longue collaboration d'une équipe de pédagogues très expérimentés.

Elle répond à trois objectifs majeurs qui sont :

- ✓ Faciliter l'acquisition des savoirs et des savoirs faire par les élèves ;
- ✓ Améliorer la participation effective de tous les élèves à la séance de cours ;
- ✓ Réserver un temps de travail suffisant pour la résolution des exercices d'application en limitant le temps consacré à la copie des énoncés.

Vous trouverez dans ce document une grande variété d'exercices d'application et de fixation ainsi que des situations d'évaluation (problèmes de vie courante).

Il est important de préciser que son utilisation n'est aucunement obligatoire en classe. C'est seulement un auxiliaire de travail que nous conseillons aux élèves et aux professeurs, en raison de sa simplicité et sa conformité au programme.

Nous exprimons toute notre gratitude à toutes les personnes qui par leur compréhension, leur encouragements et leur soutien moral et financier, nous ont permis de réaliser ce document.

Pour finir, nous espérons que ce cahier répondra au mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs (professeurs et élèves). Aussi nous remercions d'avance toutes les bonnes volontés pour leurs remarques et suggestions qui permettront d'améliorer à l'avenir le contenu et la présentation de ce document.

Les auteurs

SOMMAIRE

Chapitre I : EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE	3
Chapitre II : DENOMBREMENT.....	10
Chapitre III : GENERALITES SUR LES FONCTIONS.....	20
Chapitre IV : LIMITES ET CONTINUITE.....	36
Chapitre V : PROBABILITES.....	41
Chapitre VI : DERIVATION.....	47
Chapitre VII : BARYCENTRES.....	54
Chapitre VIII : EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE.....	60
Chapitre IX : ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE	
DE FONCTIONS.....	65
Chapitre X : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE	72
Chapitre XI : SUITES NUMERIQUES.....	83
Chapitre XII : COMPOSEES DE TRANSFORMATION DU PLAN.....	91
Chapitre XIII : STATISTIQUES.....	97

CHAPITRE I : EQUATIONS ET INEQUATIONS

DU SECOND DEGRE

SITUATION D'APPRENTISSAGE

La coopérative d'un lycée a un jardin de forme rectangulaire de 40 m sur 60 m où elle cultive de la tomate. Vu la demande croissante du marché, le président de la coopérative souhaite doubler la superficie du jardin en augmentant sa largeur et sa longueur du même nombre de mètres. Les élèves décident de trouver la largeur des parties à aménager pour respecter cette contrainte .

I - EQUATIONS DU SECOND DEGRE

I – 1) Polynômes du second degré : discriminant et factorisations

Exercice 1

Pour chacun des polynômes suivants , determine les coefficients de chacun des monomes

N	Polynomes	a	b	c
01	$-x^2 + 3x - 5$			
02	$4 - \frac{1}{2}x^2$			
03	$-x^2\sqrt{2} + x$			
04	$10x - 2\sqrt{3}$			
05	$x^2 + x + 1$			

Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, trois réponses sont proposées. Choisis la bonne réponse.

		A	B	C
1	Le polynôme $2x^2 - 3x - 1$ a pour discriminant	1	17	11
2	Si le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux solutions x_1 et x_2 , alors :	$x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$x_1 + x_2 = \frac{c}{a}$
3	Si le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux solutions x_1 et x_2 , alors :	$x_1x_2 = -\frac{b}{a}$	$x_1x_2 = \frac{a}{c}$	$x_1x_2 = \frac{c}{a}$
4	Si le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet 2 solutions x_1 et x_2 , alors $P(x) =$	$a(x+x_1)(x+x_2)$	$(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
5	Si le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet 1 solution x_0 , alors : $P(x) =$	$-(x-x_0)^2$	$a(x-x_0)^2$	$(x-x_0)(x+x_0)$

Exercice 3

Entoure la bonne réponse pour chaque cas

1	$x^2 - 3x + 5$ à pour discriminant	11	-29	-11
2	$x^2 + 16x + 63$ à pour discriminant	4	256	508
3	$-12x^2 - 60x - 75$ à pour discriminant	3600	1	0

Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes, répond par vrai ou faux.

	Affirmations	Réponses
1	Le polynômes $\frac{1}{2}x - x^2 - 1$ est un polynôme du second degré	
2	Le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de a .	
3	Le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.	
4	L'équation $-x^2 + x + 2 = 0$ a pour solutions $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$	
5	-1 est une solution de l'inéquation $-x^2 + x + 2 < 0$	

Exercice 5

Calculer le discriminant de chacun des polynômes suivants :

$$p(x) = x^2 - 4x - 50 ; g(x) = 2x^2 + 2x - 7 ; q(x) = 6x^2 - x - 5 ; r(x) = \sqrt{2}x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 1.$$

Exercice 6

En utilisant le discriminant, écrire chacun des polynômes ci-dessous sous la forme d'un produit de polynômes de second degré.

- a) $p(x) = x^2 + x - 2$; b) $g(x) = -x^2 + 2x - 1$; c) $q(x) = -3x^2 - 6x + 3$; d) $h(x) = -2x^2 + x$;
e) $q(x) = -x^2 + 8$.

Exercice 7

On donne $p(x) = -x^2 - (1 - \sqrt{3})x + \sqrt{3}$

- a) Montrer que le discriminant Δ du polynôme P est : $\Delta = (1 + \sqrt{3})^2$
b) En déduire une factorisation du polynôme P.

I -2) Equations du second degré

Exercice 8

Resoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes en utilisant le discriminant :

- a) $x^2 - x - 6 = 0$; b) $-2x^2 + 3x - 4 = 0$; c) $x^2 = \frac{1}{4}$; d) $x^2 + 10 = 0$; e) $x^2 = 20$;
f) $x + \frac{6}{x} - 5 = 0$; g) $(x - 2)^2 = \frac{1}{16}$; h) $-5x^2 = 20x$; i) $(1 - 3x)^2 = -2(3x - 1)$; j) $x^2 + (4 + x)^2 = 0$.

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction polynôme du second degré dont le signe est donné dans un tableau. Dans chaque cas, entoure le discriminant correct.

Cas 1

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	+

a) $\Delta < 0$; $\Delta > 0$; $\Delta = 0$.
 $\Delta = 0$.

Cas 2

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

b) $\Delta < 0$; $\Delta > 0$; $\Delta = 0$.

Cas 3

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	

c) $\Delta < 0$; $\Delta > 0$;

Exercice 10

On donne $P(x) = x^2 - 4x$ et $Q(x) = x^2 + x - 2$ et $R(x) = -3x^2 + 2x - 3$.

- Résoudre dans \square les équations $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$ et $R(x) = 0$.
- Etudier le signe de chacun des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ et $R(x)$ suivant les valeurs de la variable x .

Exercice 11

En utilisant le discriminant, étudier le signe de chacun des polynômes ci-dessous :

$K(x) = 3x^2 + 4x - 1$; $L(x) = 5x^2 - 10x + 5$; $M(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 4$; $N(x) = -3x^2 + x - \frac{1}{4}$

II – INEQUATIONS DU SECOND DEGRE**Exercice 12 :**

Resoudre dans \square les inéquations suivantes :

- a) $x^2 + x - 2 < 0$; b) $-2x^2 + 3x - 4 < 0$; c) $x^2 + 2x - 1 \geq 0$; d) $x^2 + 3x + 2 \geq 0$; e) $-x^2 + x + 2 > 0$
 ; f) $-4x^2 + 4x - 1 \leq 0$; g) $-3x^2 - x + 2 < 0$; h) $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$; i) $x^2\sqrt{3} - 6x + 3\sqrt{3} \geq 0$
 j) $x^2 - 2(1 - \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} < 0$.

Exercice 13

On donne le polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

- Calculer $P(-1)$ puis factoriser $P(x)$.
- Resoudre dans \square l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 14

Résoudre dans \square :

1) Les équations suivantes :

a) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1} = 1$; b) $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x-2} = \frac{11-x}{x^2-4}$; c) $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{2}{x^2-x}$.

2) Les inéquations suivantes :

a) $\frac{3x}{x-3} \leq 1$; b) $\frac{4}{x+3} + \frac{7}{x-1} + \frac{1}{x(x+3)} > \frac{28}{(x-1)(x+3)}$.

III) Sommes et produit et des solutions d'une équation du second degré**Exercice 15**

Dans chacun des cas suivants, x_0 est une solution de l'équation donnée.

Calculer l'autre solution de l'équation en utilisant la somme ou le produit des solutions.

$$(E_1): 4x^2 - 3x - 1 = 0 ; x_0 = 1 \quad (E_2): x^2 - x - 42 = 0 ; x_0 = -6 \quad (E_3): -2x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0 ; x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 16

On donne $P(x) = (2-x)(x^2 - 11x + 24)$. Deux nombres a et b sont tels que $a+b=11$ et $a \times b = 24$.

- Déterminer ces deux nombres a et b .
- Calculer $P(a)$ et $P(b)$ puis déduire $P(x)$ sous forme de produit de polynômes de degré 1.

Exercice 18

Déterminer deux nombres réels qui ont pour somme 1 et pour produit $-\frac{1}{6}$.

Exercice 19

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = x^2 - 3mx + 2(m^2 - 6)$.

Déterminer le réel m pour que 2 soit un zéro de P ; Calculer alors l'autre zéro de P .

Exercice 20

On donne le polynôme $P(x) = x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{7})x + \sqrt{35}$

- Calculer $P(\sqrt{7})$.
- Soit x l'autre zéro du polynôme P .
 - Montrer que les deux zéros du polynôme P sont de même signe.
 - Déterminer alors l'autre zéro x .

I V) Equations et inéquations irrationnelles

Exercice 21

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $\sqrt{x^2 - 3x + 1} = 1$; b) $\sqrt{(x+1)(3-x)} = 3x - 1$; c) $\sqrt{-2x^2 + 5x + 3} = 2x + 1$; d) $\sqrt{x^2 - 9} + x = 9$; e) $\sqrt{2-x^2} - \sqrt{x^2-1} = 0$.

Exercice 22

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- $\sqrt{(2x-1)(x+3)} < -1$; b) $\sqrt{(x^2 - 2x + 1)} < 2$; c) $\sqrt{-2x^2 + x + 1} \leq 2x - 1$; d) $\sqrt{2x^2 + 5x - 7} \leq \sqrt{x^2 - x - 2}$.

EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 1

Soit P le polynôme définie par $P(x) = -2x^3 - x^2 - 1$.

- 1) Calculer $P(-1)$.
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(E): P(x) = 0$
- 3) Résoudre dans \mathbb{R} :
 - a) L'équation $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$
 - b) L'inéquation $\sqrt{-2x^2 + 5x + 3} \leq 2x + 1$
 - c) L'inéquation $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1} \geq 0$.

Exercice 2

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$ défini sur \mathbb{R} .

- 1) Montrer que 1 et -1 sont des zéros du polynôme P .
- 2) Expliquer pourquoi le polynôme P peut se mettre sous la forme $P(x) = (x-1)(x+1)Q(x)$ et déterminer le degré du polynôme Q .
- 3) En déduire que $Q(x) = x^2 + x - 2$.
- 4) Le polynôme Q est-il factorisable ? En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Exercice 3

- 1) Montrer que $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$
- 2) On donne le polynôme P définie par $P(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$
 - a) Ecrire le polynôme P sous la forme canonique puis montrer que $P(x) = (x - \sqrt{3})(x + 1)$
 - b) Résoudre alors dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$
- 3) a) Montrer que le discriminant Δ du polynôme est $\Delta = (1 + \sqrt{3})^2$.
 - c) Déduire le nombre de zéros de P puis les déterminer.
 - d) Vérifier alors le résultat de la question 2-a).

Exercice 4

f et g sont deux fonctions polynômes définies par $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$ et $g(x) = -3x^2 + x + 2$.

- 1) Factoriser les expressions de f et g . (Les mettre sous forme de produit de polynômes de degré 1.)
- 2) On pose $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
 - a) Déterminer D_h ensemble de définition de la fonction h .
 - b) Étudier le signe de h sur D_h .

c) Dédurre l'ensemble des solutions de l'inéquation $(I): x \in \mathbb{R}; h(x) \leq 0$.

3) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $(I'): x \in \mathbb{R}; \sqrt{x(x-3)} \leq x+1$.

Exercice 5

On pose $P(x) = x^3 - (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})x - \sqrt{6}$

1) a- Vérifier que 1 est un zéro de P.

b- Vérifier que $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$.

2) Montrer que $P(x) = (x-1)(x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6})$.

3) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$.

4) a- On pose $Q(x) = x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$. Déterminer le signe de $Q(x)$ suivant les valeurs de x.

b- En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Exercice 6

Soit b ; c ; d ; et e des nombres réels, a un nombre réel non nul et f un polynôme défini par

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

1) on considère la propriété (P) : pour tout nombre réel x non nul, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$.

a) Démontrer que si f vérifie la propriété (P) et si α est une racine non nulle de f , alors $\frac{1}{\alpha}$ est également racine de f .

b) Démontrer que f vérifie la propriété (P) si et seulement si : $a=e$ et $b=d$.

c) En déduire que 0 n'est pas une racine de f .

2) APPLICATION

Soit f le polynôme défini par $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2$.

a) Vérifier que 2 est une racine de f .

b) En déduire une autre racine de f .

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

d) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 7

1) Soit le point P tel que $P(x) = -x^2 - 2x + 3$.

a- Déterminer le discriminant du polynôme P.

b- En déduire l'écriture de $P(x)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du premier degré.

2) On donne la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{(-x+1)(x+3)}{x+1}$.

a- Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .

b- Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

c- Déterminer trois réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$, pour tout élément x de D_f .

3) Utiliser **les résultats de la question 2)** pour résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation

$$(I) : \frac{4}{x+1} \leq x+1.$$

SITUATIONS D'EVALUATION

Situation 1

Madame Kone a payé un vélo pour son fils à 47025 F après deux remises successives de $x\%$ sur un prix initial de 60.000 F. Déterminer la valeur de x .

Après deux hausses successives de $y\%$, elle a aussi acheté un collier qui coûtait 40.000 F à 48.400 F. Déterminer la valeur de y .

Situation 2

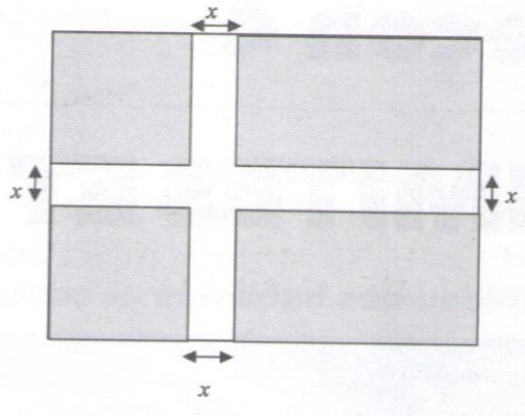
Le drapeau d'un pays est de forme rectangulaire et a pour dimension 3 m sur 2 m.

L'aire de la croix est égale à l'aire colorée.

Tes camarade de classe et toi entreprenez de représenter ce drapeau à l'échelle 1cm sur 1cm.

Pour réussir cette représentation, il est nécessaire de trouver la largeur x des bandes qui forment la croix sur le rectangle (voir figure ci-dessous).

Détermine la valeur de x .



CHAPITRE II : DENOMBREMENT

Situation d'apprentissage

Pour préparer un exposé sur les banques, les élèves d'une classe de 1^{ère} prend des informations auprès d'une banque. Selon ces informations, une banque dispose de guichets automatiques ou certains clients peuvent faire des retraits d'argent à l'aide d'une carte magnétique. Chaque carte magnétique a un code secret connu seulement du titulaire de la carte. Ce code secret est une suite de quatre chiffres du système décimal.

Exemples de codes : 0375 ; 9918 ; 2400.

Curieux, les élèves décident de déterminer le nombre de cartes magnétiques la banque peut distribuer à ses clients ? ils s'organisent pour apprendre à techniques et les formules de dénombrement.

I - DENOMBREMENT DE PARTIES D'ENSEMBLES FINIS

I – 1) Cardinal d'ensembles finis ; Cardinal de réunion, d'intersection d'ensembles finis

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse

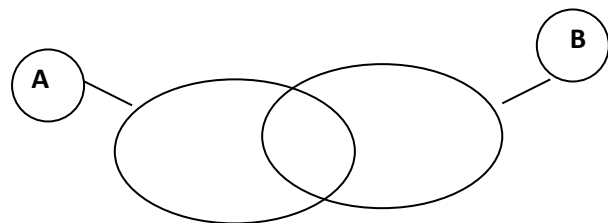
Une classe de terminale comporte 28 élèves. Dans cette classe, chaque élève suit l'enseignement de deux langues vivantes (et pas plus) choisies parmi l'anglais, l'allemand et l'espagnol. Le nombre d'élèves inscrits dans chacune de ces trois langues est : 25 pour l'anglais , 18 pour l'allemand et 13 pour l'espagnol

1. Il y'a plusieurs élèves inscrits à la fois en anglais et en espagnol
2. Tous les élèves inscrits en allemand font de l'anglais
3. Parmi les élèves inscrits en allemand, il y'a autant d'inscrits en anglais qu'en espagnol.
4. Parmi les élèves inscrits en espagnol, 7 font de l'anglais et 6 font de l'allemand.
5. Parmi les élèves inscrits en allemand, il y en a au moins 12 qui sont inscrits en anglais.

Exercice 2

A et B sont respectivement les ensembles des lettres de mots « **MATHEMATIQUES** » et « **ANGLAIS** » .

- 1) Ecrire les ensembles A et B.
- 2) Complète les diagrammes ci-dessous.
- 3) Déterminer les éléments des ensemble $A \cap B$ et $A \cup B$.



- 4) On pose $n = \text{Card}(A \cup B)$ et $m = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$. Déterminer n et m puis les comparer.

Exercice 3

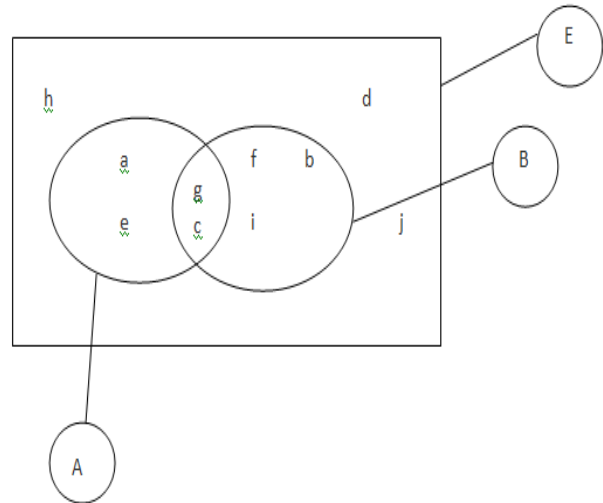
On donne le diagramme ci- dessous.

Citer les éléments de chacun des ensembles

suyvants : A ; B ; $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$;

$B \setminus A$; E ; $E \setminus (A \cup B)$; $E \setminus (A \cap B)$

Puis déterminer leurs cardinaux.



Exercice 4

On donne $Card(A) = 1521$; $Card(B) = 798$ et $Card(A \cup B) = 2319$.

Calculer $Card(A \cap B)$ et $Card(A \setminus B)$.

I – 2) Problèmes de dénombrement et parties d'ensembles finis

Exercice 5

Les 50 élèves d'une classe de 1 ère disposent de deux options sportives, l'athlétisme et la natation. 27 élèves pratiquent l'athlétisme ; 29 élèves pratiquent la natation et 05 élèves ne pratiquent aucun des deux sports.

- 1) Soit A l'ensemble des membres pratiquant l'athlétisme et B l'ensemble de ceux qui pratiquent la natation. Que représente les ensembles $A \cap B$; $A \cup B$ et $B \setminus A$? Déterminer $Card(A \cup B)$.
- 2) Combien d'élèves uniquement la natation ? uniquement l'athlétisme ? les deux sports ?

Exercice 6

Dans un groupe de 450 élèves, 30% des élèves sont en première, 64% des élèves sont des filles et 75 filles sont en première. Complete le tableau ci-dessous.

	Filles	Garçons	Total
Prémière			
Autres classes			
Total			

Exercice 7

Dans une ambassade, 27 personnes parlent anglais, 35 personnes parlent le français et 18 parlent le français et l'anglais. Sachant que chaque personne parle au moins une langue, combien cette ambassade compte de personnes.

Exercice 8

Dans une classe de première D, tous les élèves pratiquent au moins l'un des deux sports proposés : Le football ou le basket ; 24 élèves pratiquent le football et 10 pratiquent les deux sports.

- 1) Déterminer l'effectif de cette classe.
- 2) Déterminer le nombre d'élèves pratiquant un seul sport.

Exercice 9

Dans une classe de première, sont étudiées les langues suivantes : anglais, allemand et espagnol. Chaque élève étudie au moins une langue ; 5 étudient les trois langues, 7 étudient l'anglais et l'allemand, 8 étudient l'anglais et l'espagnol, 9 étudient l'allemand et l'espagnol. Enfin 20 étudient (seulement) l'anglais, 15 l'allemand et 18 l'espagnol.

Quel est l'effectif de cette classe ?

Exercice 10

- 1) Une enquête menée dans une classe de 70 élèves a donné les résultats suivants :
- 2) 25 élèves ont la moyenne en mathématique, 22 élèves ont la moyenne en anglais, 33 élèves ont la moyenne en EPS, 08 élèves ont la moyenne en mathématique et en EPS, 05 élèves ont la moyenne en mathématique et en anglais, 06 élèves ont la moyenne en EPS et en anglais, 04 élèves ont la moyenne en mathématique, en EPS et en anglais.
- 3) Combien y a-t-il d'élèves qui ont la moyenne :
- 4) a) Uniquement en mathématiques ?
b) Uniquement en anglais ?
c) Uniquement en EPS ?
- 5) Combien y a-t-il d'élèves qui n'ont pas la moyenne dans aucune de ces trois matières ?

II- DENOMBREMENT DE P-LISTES

II – 1) Problèmes de dénombrement et produit cartésien d'ensembles finis

Exercice 11

Pour chacune des affirmations suivantes, répond par vrai ou faux.

Soit l'ensemble $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. On a :

	Affirmations	Réponses
1	Le nombre de sous-ensembles de X ayant exactement 2 éléments est 20.	
2	Le nombre de sous-ensembles de X ayant exactement 4 éléments est 16.	
3	Le nombre de sous-ensembles de X contenant l'élément 1 est 2^4 .	
4	Le nombre de sous-ensembles de X contenant les éléments 2 et 3 est 2^4 .	
5	Le nombre de permutations de X est 5	
6	Le nombre de combinaisons de 3 éléments de X est 10	

Exercice 12

Le code d'ouverture d'un coffre fort est un couple composé d'un des chiffres 1 et 2 suivi d'une des lettres a, b, c.

- 1) Trouver tous les codes possibles.
- 2) On donne $A = \{1 ; 2\}$ et $B = \{a ; b ; c\}$.

Complète le tableau ci-dessous.

A \ B	a	b	c
1			
2			

- 3) Déterminer $Card(A)$ et $Card(B)$ puis déterminer les éléments de l'ensemble $A \times B$
- 4) On pose $n = Card(A \times B)$ et $m = Card(A) \times Card(B)$. Déterminer n et m puis les comparer.

Exercice 13

Une personne a dans son placard 7 pantalons, 11 chemises et 5 paires de chaussures. Combien de manières différentes peut-elle s'habiller.

Exercice 14

Une épreuve d'examen comporte un sujet de mathématique et un sujet de français. On propose 3 sujets de mathématiques M_1 ; M_2 ; M_3 ; et 4 sujets de français F_1 ; F_2 ; F_3 et F_4 .

- 1) A l'aide d'un arbre de choix, proposer les différentes épreuves possibles.
- 2) Soit M l'ensemble des sujets de mathématiques et F l'ensemble des sujets de français.
Déterminer $\text{card}(M \times F)$. Vérifier le résultat par le calcul.

Exercice 15

On lance simultanément un dé blanc et un dé rouge tous deux marqués des chiffres de 1 à 6. On note les deux chiffres des faces supérieures des deux dés (Le chiffre du dé blanc puis celui du dé rouge).

- 1) Combien de résultats possibles peut-on avoir ? Illustrer tous les résultats dans un tableau.
- 2) On veut avoir deux chiffres identiques à la suite d'un lancer. Combien de résultats possibles peut-on avoir ? (utiliser le tableau)
- 3) A la suite d'un lancer, on note désormais la somme des deux chiffres des faces supérieures des deux dés. Si on veut que la somme obtenue soit divisible par 2, combien de résultats possibles peut-on avoir ? (utiliser le tableau)

Exercice 16

On propose pour un examen ; 35 textes de français et 20 textes d'anglais. Un candidat un peu paresseux a révisé parmi les textes proposés, 27 textes de français et 17 textes d'anglais. Au cours de l'examen, il est interrogé sur un texte de français et un texte d'anglais.

- 1) Quel est le nombre d'interrogations possibles ?
- 2) Dans combien de cas le candidat connaît-il :
 - a) Les deux textes ?
 - b) Un seul texte ?
 - c) Au moins un texte ?

II – 2) p-listes ; p- arrangements ; permutations ; p – combinaisons et problèmes de dénombrement

Exercice 17

En Côte d'Ivoire, le numéro de téléphone est formé de 8 chiffres.

- 1) Combien peut-il avoir d'abonnés en Côte d'Ivoire ?
- 2) A Anyama, le numéro de téléphone commence par 23. Combien peut-il avoir d'abonnés à Anyama.

Exercice 18

Le code d'ouverture d'un coffre fort est composé de cinq chiffres à taper dans un certain ordre sur un clavier de 10 chiffres (0 ; 1 ; ; 9)

- 1) Combien de codes possibles peut-on avoir si chaque chiffre peut-être répété plusieurs fois ?
- 2) Combien de codes ne comportant aucun chiffre pair peut-on former ?

Exercice 19

On veut ranger dans sept tiroirs, quatre objets.

- 1) Combien de rangements différents peut-on réaliser si chaque tiroir peut contenir un ou plusieurs objets ?
- 2) Combien de rangements différents peut-on réaliser si chaque tiroir peut contenir un et un seul objets ?

Exercice 20

On lance 3 fois de suite un dé numéroté de 1 à 6. Avec les chiffres obtenus on forme un numéro de 3 chiffres.

- 1) Déterminer le nombre total de numéros qu'on peut avoir.
- 2) Déterminer le nombre total de numéros inférieur à 300.
- 3) Déterminer le nombre total de numéros composés de chiffres distincts.

Exercice 21

- 1) Dénombrer les nombres de trois chiffres du système décimal.
- 2) Combien y a-t-il :
 - a) Qui sont pairs ? Qui sont impairs ?
 - b) Qui s'écrivent sans le chiffre 1 ?
 - c) Qui ont au moins une fois le chiffre 1.

Exercice 22

- 1) Combien de « mots » de trois lettres peut-on former dans l'alphabet français ?
- 2) Combien de « mots » de trois lettres commençant et finissant par une voyelle peut-on former ?

Exercice 23

Avec les lettres du mot GESTION, employées une fois chacune, combien peut-on former de mots de sept lettres ayant un sens ou non ?

Parmi ces anagrammes combien finissent par le mot ON ?

Exercice 24

Lors d'un examen oral, le professeur ZAMBLE BI doit interroger sept élèves dont quatre garçons et trois filles. Pour cela, il doit établir une liste donnant l'ordre de passage.

- 1) Combien de listes peut-il constituer au total ?
- 2) Combien de listes peut-il constituer au total, si Fanta, l'une des élèves doit être la dernière à passer ?

Exercice 25

Dans un sac, il y a 9 billes : 2 oranges ; 3 blanches et 4 vertes. On demande au petit KOFFI de choisir au hasard successivement 3 billes sans remettre.

- 1) Justifier qu'il y a 504 choix possibles.
- 2) Calculer le nombre de choix si KOFFI veut avoir 3 billes de même couleurs.
- 3) Calculer le nombre de choix possibles, si KOFFI choisi dans l'ordre : 1 bille orange ; 1 bille blanche et 1 bille verte.

Exercice 26

Lors d'une course, 10 chevaux numérotés de 1 à 10 prennent le départ.

- 1) Déterminer le nombre d'arrivées possibles, sachant qu'il n'y a pas d'ex aequo.
- 2) Tiercé : jouer au tiercé, consiste à placer parmi les chevaux choisis, les 3 premiers chevaux de l'arrivée. Par exemple : supposons que les chevaux soient arrivés dans l'ordre 3 ; 7 ; 10 ; 6 ; 4 ; 8 ; 9 ; 2, 1 ; 5. Celui qui a joué les chevaux 3 ; 7 ; 10 a gagné le tiercé dans l'ordre. Celui qui a joué 10 ; 3 ; 7 par exemple a gagné dans le désordre.
 - a) Déterminer le nombre de tiercé dans l'ordre.
 - b) Déterminer le nombre de tiercé dans le désordre.

Exercice 27

VALDO écrit les lettres de son nom sur cinq cartons et les met dans un chapeau. Ensuite, il tire successivement et sans remise 3 cartons du chapeau qu'il dépose devant lui de gauche à droite. Il obtient alors un mot (ayant un sens ou non).

- 1) Combien de mots différents l'on peut ainsi former ?
- 2) Parmi ces mots :
 - a) Combien finissent par la lettre V ?
 - b) Combien ne comportent aucune voyelle ?
 - c) Combien comportent une seule consonne ?
 - d) Combien commencent par une consonne ?

Exercice 28

Le code PIN de la puce d'un téléphone portable est composé de 54 chiffres du système décimal.

- 1) Déterminer le nombre de codes possibles.
- 2) Combien de codes y a-t-il si les chiffres sont distincts ?
- 3) Madame GOUPISTE ayant oublié le code PIN de la puce de son mari, se souvient seulement que les deux premiers chiffres sont pairs et que le dernier chiffre est 7. Combien de codes peut-elle essayer dans ces conditions ?

Exercice 29

On se propose d'écrire un mot de trois lettres ayant un sens ou non en utilisant l'alphabet français.

- 1) Quel est le nombre de cas possibles ?
- 2) Déterminer le nombre de mots :
 - a) Commencant par une voyelle ?
 - b) Terminés par une voyelle ?
 - c) Constitués de consonnes uniquement ?

Exercice 30

Une urne contient quatre boules noires, trois boules blanches et cinq boules rouges. On extrait successivement trois boules de l'urne sans remise.

- 1) Justifier qu'il y a 1320 tirages possibles.
- 2) Parmi ces tirages, combien contiennent une seule boule noire ?

Exercice 30

Au départ d'une course de 100 mètres, il y a six coureurs. Combien y a-t-il d'arrivées possibles sans ex aequo ?

Exercice 31

Quatre garçons et deux filles viennent s'asseoir sur un banc de six places. Combien ont-ils de manières de le faire si les deux filles décident de rester l'une à côté de l'autre ?

Exercice 32

Neuf élèves forment un rang pour rentrer dans une salle.

- 1) Combien de rang peut-on former ?
- 2) Il s'agit de 4 garçons et 5 filles. Les garçons décident de faire entrer les filles d'abord. Combien de rang peut-il former ?

Exercice 33

On considère le mot « **THEOREME** ».

Combien d'anagrammes de huit lettres (*mots ayant un sens ou non*) peut-on former ?

Exercice 34

Combien de triangle distinct peut-on construire avec 50 points du plan sachant que trois quelconques de ces points ne sont pas alignés ?

Exercice 35

Une urne contient 12 billes : cinq oranges ; quatre blanches et trois vertes. On tire simultanément 3 billes de l'urne.

- 1) Démontrer qu'il y a 220 tirages possibles.
- 2) Calculer le nombre de tirages comportant 2 billes orange ?

Exercice 36

Une urne contient quatre boules noires, trois boules blanches et cinq boules rouges. On extrait simultanément trois boules de l'urne.

- 1) Justifier qu'il y a 220 tirages possibles.
- 2) Parmi ces tirages, combien contiennent :
 - a) Deux boules rouges ?
 - b) Trois boules de même couleur ?
 - c) Trois boules de couleurs différentes ?

Exercice 37

Une urne contient trois boules noires, deux boules blanches et cinq boules rouges. On extrait simultanément trois boules de l'urne.

- 1) Déterminer le nombre de tirages possibles.
- 2) Parmi ces tirages, combien contiennent :
 - a) Exactement deux boules noires ?
 - b) Une boule de chaque couleur ?
 - c) Au moins 2 boules rouges ?

Exercice 38

Parmi 40 professeurs et 500 élèves, on doit choisir des délégués pour former une commission mixte comportant 4 professeurs et 3 élèves. De combien de façon peut-on former cette commission ?

Exercice 39

Aminata revient du marché avec deux ananas, six mangues et cinq oranges. Elle veut offrir à son ami Fatou un panier de cinq fruits choisis parmi ceux qu'elle vient d'acheter. De combien de façon Fatou peut-elle recevoir un panier contenant :

- 1) Aucune mangue ?
- 2) Uniquement des mangues ?
- 3) Deux mangues avec d'autres fruits ?
- 4) Au moins une mangue ?

Exercice 40

Dans un sac se trouvent quatre pièces de 10F, trois pièces de 25 F, et une pièce de 50 F.

- 1) On tire au hasard et simultanément deux pièces du sac.
 - a) Quel est le nombre de tirages possibles ?
 - b) Combien de tirages donnent deux pièces de même valeurs ?
 - c) Combien de tirages contiennent au moins une pièce de 25 F ?
 - 2) On tire maintenant toujours au hasard et simultanément trois pièces du sac.
 - a) Quel est le nombre de tirages possibles ?
 - b) Combien de tirages donnent exactement 85 F ?
- c) Combien de tirages donnent moins de 50 F ?

Exercice 41

On dispose d'un jeu de 32 cartes ; on en prend successivement huit ; ce qui constitue une « main ».

- 1) Combien y a-t-il de mains possibles ?
- 2) Combien y a-t-il de mains qui contiennent :
 - a) Exactement deux As ?
 - b) Au moins deux As ?
 - c) Au plus trois dames ?

Exercice 42

Un sac contient douze enveloppes. Deux de ces enveloppes contiennent 1000 F Chacune ; quatre contiennent 500 F chacune et les autres sont vides. On tire simultanément du sac deux enveloppe et on observe la somme totale contenue dans les enveloppes tirées à chaque fois..

- 1) Combien de tirages possibles peut-on avoir ?
- 2) Combien de tirages donnent zero franc ?
- 3) Combien de tirages donnent exactement 1000 F ?
- 4) Combien de tirages donnent au moins 1000 F ?

Exercice 43

Une librairie dispose de 30 livres d'un même auteur. Parmi ces livres 5 sont couverts de cuir et coûtent 900 f l'un ; 12 ont une couverture toilée et coûtent 600 f l'un. Les autres sont cartonnés et coûtent 300 f l'un.

Un client vient acheter 3 livres au hasard de cet auteur sans précision particulière.

Calculer la probabilité que ce client choisisse :

- 1) 3 livres en cuir.
- 2) 3 livres de même couverture.
- 3) 3 livres de couvertures différentes.
- 4) 3 livres dont le montant est exactement 1500 f

Exercice 44

A l'issue d'une réunion 10 personnes se serrent chaleureusement les mains.
Chaque personne sert la main de toutes les autres.

- 1) Justifier que le nombre total de poignées de main est 45.
- 2) Pour un total de 1225 poignées de main ; déterminer le nombre n ($n \in \mathbb{IN}$) de personnes de cette réunion.

Exercice 45

1) Sans utiliser la calculatrice, déterminer les nombres suivants :

$$A = 4C_5^2 + 5A_4^2 ; \quad B = 8 \times 5! + 3! ; \quad C = C_8^3 - C_8^5 ; \quad D = C_4^2 - 2 \quad \text{et} \quad A = C_6^3 - 2C_5^2 .$$

2) Vérifie chacune des égalités suivantes

- a) $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4 = 0$.
- b) $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4$.

Exercice 46

Resoudre dans \square les équations ci- dessous d'inconnues n .

- 1) $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$; 2) $A_n^2 = 156$; 3) $C_n^2 - n = 54$; 4) $C_n^5 = 17C_n^4$; 5) $C_n^6 = 3C_n^5$.

EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 1

Un club est composé de 20 élèves dont 12 garçons et 8 filles. L'entraîneur désire former une équipe de 5 joueurs à choisir parmi ces 20 athlètes pour participer à un tournoi.

- a) vérifier que le nombre d'équipes possibles qu'il peut former est 15504
- b) Calculer la probabilité d'avoir une équipe composée uniquement de filles.
- c) Calculer la probabilité d'avoir une équipe contenant au moins une fille.

Exercice 2

Une urne contient quatre boules de couleur bleue, quatre de couleur jaune, quatre de couleur verte.
Nous noterons chaque boule par l'initiale de sa couleur : B ; J ; R ; V.

Partie 1

On effectue deux types d'expériences

- Premier type : On tire successivement 4 boules, avec remise et on note la couleur de chaque boule tirée dans l'ordre du tirage.
- Deuxième type : On tire successivement 4 boules, sans remise et on note la couleur de la boule tirée dans l'ordre du tirage.

Répondre aux questions suivantes pour chacun des deux types d'expériences.

- 1) Combien y a-t-il de résultats possibles ?
- 2) Calculer la probabilité dans chacun des cas suivants :
 - a) La première boule tirée est rouge, la seconde est verte et la troisième est jaune.
 - b) La première boule est bleue et la deuxième est jaune.
 - c) La deuxième boule est verte et la quatrième est bleue.
 - d) La deuxième boule est jaune.

Partie 2

On tire à présent simultanément trois boules de l'urne et l'on note la couleur des boules tirées ; par exemple : B ; J ; V signifie que l'on a tiré simultanément une boule rouge, une boule jaune et une boule verte.

- 1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- 2) Calculer la probabilité dans chacun des cas suivants :
 - a) Le tirage contient une boule bleue ?
 - b) Le tirage contient une boule jaune et une boule rouge ?
 - c) Le tirage ne contient aucune boule bleue ?
 - d) Le tirage contient au moins une boule bleue ?

Exercice 3

Une urne est composée de 4 boules noires, 3 boules blanches et 5 boules rouges toutes indiscernables au toucher.

1. On tire successivement sans remise trois boules et on observe les couleurs tirées.
 - a) Justifier qu'il y a 1320 tirages possibles.
 - b) Calculer la probabilité d'avoir une seule boule noire parmi les trois boules tirées.
2. Un jeu consiste à tirer simultanément 3 boules.
 - a) Justifier qu'il y a 220 tirages possibles.
 - b) Calculer la probabilité des événements suivants :
 - A « Deux des trois boules tirées sont rouges ».
 - B « Les trois boules tirées sont de la même couleur ».
 - C « Les trois boules tirées sont de couleurs différentes ».

SITUATION D'ÉVALUATION

Situation 1

M. N'dré possède dans son sac à main deux billets de 10.000 francs, un billet de 5000 francs, trois billets de 2000 francs et quatre billets de 1000 francs. Il se rend à la CIE pour régler sa facture d'électricité qui s'élève à 12000 francs. Arrivé devant la caissière, M. N'dré met sa main dans le sac et fait sortir trois billets attrapés au hasard.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- a) M. N'dré a dans sa main trois billets de même montant.
- b) M. N'dré a dans sa main trois billets de 1000 francs.
- c) M. N'dré a dans sa main des billets de montants différents.
- d) M. N'dré a dans sa main au moins un billet de 1000 francs.
- e) M. N'dré a dans sa main la somme exacte pour régler sa facture.

Situation 2

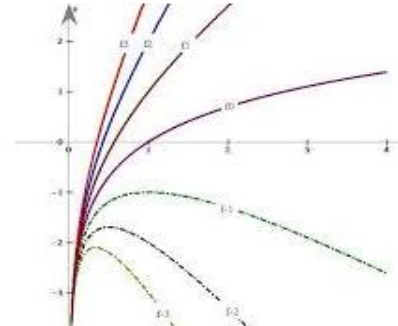
Le code PIN d'une carte SIM est un code de 4 chiffres. M. Silué allume son téléphone qu'il vient d'acheter, mais il a oublié le code de sa carte SIM qu'il n'a pas utilisé depuis plusieurs jours. Il décide alors de saisir au hasard quatre chiffres.

- 1) Quelle est la probabilité que M. Silué ait le bon code.
 - 2) Quelle est la probabilité que M. Silué ait le bon code, alors qu'il se rappelle que son code se termine par 60.
 - 3) Quelle est la probabilité que M. Silué ait le bon code, s'il sait que le code comporte un seul 4 comme le premier chiffre.
 - 4) Quelle est la probabilité que M. Silué ait le bon code, s'il sait que le code comporte un seul 0.
- On suppose qu'aucun chiffre ne doit être répété dans la composition du code.
- 5) Quelle est la probabilité que M. Silué ait le bon code, si le code est composé de chiffres de même parité.
 - 6) Quelle est la probabilité que M. Silué ait le bon code, si son code ne commence pas par 0.
 - 7) Quelle est la probabilité que M. Silué ait le bon code, si son code contient au moins une fois le chiffre 0.

CHAPITRE III : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Situation d'apprentissage

Pendant une expérience en classe, un ordinateur donne différentes trajectoires d'un objet mobile sur son écran. Le professeur affirme qu'il existe une transformation qui permet de passer d'une des courbes à l'autre. Curieux, les élèves décident d'étudier et construire l'image d'une courbe par une transformation.



I) GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I – 1) Restrictions d'une fonction

Exercice 1

Les fonctions f , g et h de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par $f(x) = x$; $g(x) = |x|$ et $h(x) = \frac{x^2}{|x|}$

Réponds à chacune des affirmations ci-dessous par vrai (V) ou faux (F). Exemple de réponse : 1-V

	Affirmations	Reponses
1	f est la restriction de g sur $]0; +\infty[$	
2	f est la restriction de g sur \mathbb{R}^*	
3	f est la restriction de h sur \mathbb{R}^*	
4	f est la restriction de h sur $]0; +\infty[$	
5	$-f$ est la restriction de h sur $]-\infty; 0[$	

Exercice 2

On donne la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Définir la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Exercice 3

On donne la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{x^3}{|x|} + 1$.

1) Donner la restriction g de la fonction f à l'intervalle $]0; +\infty[$.

2) Démontrer que la fonction h définie de $]-\infty; 0[$ vers \mathbb{R} par $h(x) = -x^2 + 1$ est la restriction de f à $]-\infty; 0[$.

Exercice 4

On donne la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = |2x+1| - |x-3|$.

Donner la restriction de f à chacun des ensembles suivants : $]-\infty; -\frac{1}{2}]$; $[-\frac{1}{2}; 3]$. et $[0; +\infty[$.

Exercice 5

On donne la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = |x| + |1-x| - |x-3|$.

Définir la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0;1]$.

I – 2) Ensemble de définition de fonctions

Exercice 6

Pour chaque fonction, un ensemble de définition a été proposé, choisie la bonne réponse.

	Fonctions
1	$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{3}$
2	$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
3	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2-x}}$
4	$f(x) = \sqrt{x-2}$
5	$f(x) = x^2 - 16 + \frac{1}{x}$
6	$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

Exemple : 1a.

	Ensemble de définition
a	$D_f = \square$
b	$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
c	$D_f =]-\infty; 2[$
d	$D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$
e	$D_f =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$
f	$D_f = [2; +\infty[$

Exercice 7

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f de \square vers \square ci-dessous.

$$1) f(x) = \frac{4x^3 - 1}{x^2 - 2x - 3}, 2) f(x) = \frac{3x - 1}{|x - 3| - 8}; 3) f(x) = 7\sqrt{3 - 2x};$$

$$4) f(x) = \sqrt{x - 3} + 2\sqrt{3x - 1}; 5) f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x - 4}}; 6) f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x + 1} - 5};$$

$$7) f(x) = \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x}; 8) f(x) = \frac{x + 1}{|x| - x^2}.$$

I – 3) Comparaison de fonctions ; Maximum, Minimum relatifs d'une fonction

Exercice 8

On donne les deux fonctions f et h définies sur \square par : $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$

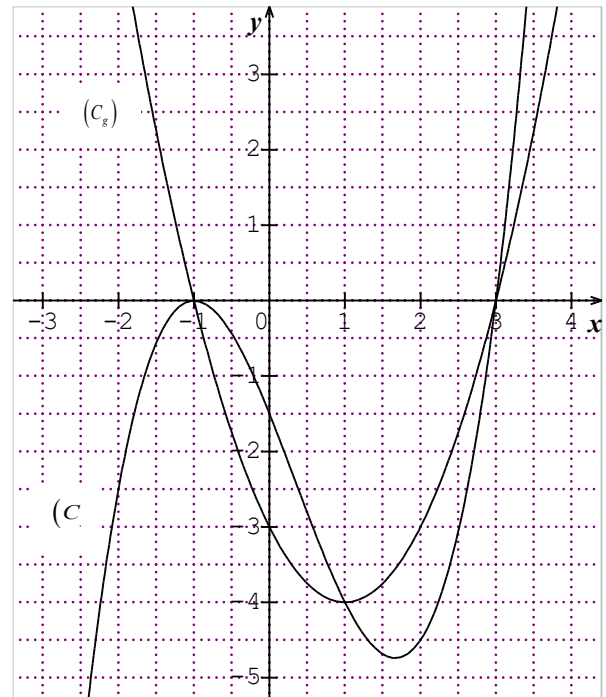
$$1) \text{ Démontrer que pour tout réel } x, f(x) - h(x) = \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)(1+x^4)}$$

2) a) En déduire les intervalles sur lesquels on a $f(x) < h(x)$

b) Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 9

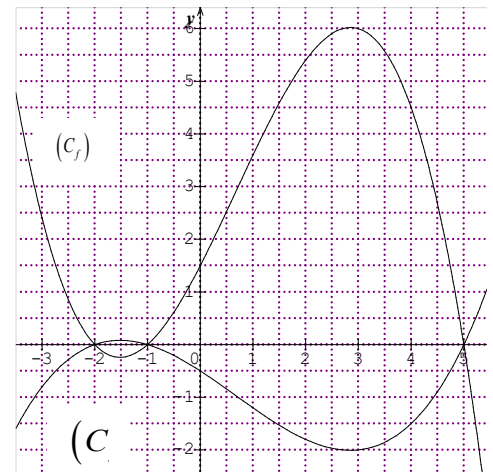
Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$. f et g sont des Applications définies par leurs représentations graphiques ci-dessous. Comparer les fonctions f et g sur l'intervalle $[-2; 5]$. (On pourra étudier les positions relatives de f et g).



Exercice 10

Sur la figure ci-dessous sont représentées les courbes (C_f) et (C_g) respectives des fonctions f et g définies sur $[-3; 6]$.

- 1) Résoudre graphiquement à l'aide du graphique :
 - a) L'équation $(E): f(x) = g(x)$;
 - b) l'inéquation $(I_1): f(x) > 0$;
 - c) l'inéquation $(I_2): g(x) \leq 0$.
- 2) Résoudre à l'aide du graphique :
 - a) L'inéquation $(I): f(x) \geq g(x)$.
 - b) En déduire une comparaison des fonctions f et g sur $[-3; 6]$.



Exercice 11

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 2x + 3$

- 1) Mettre $f(x)$ sous sa forme canonique.
- 2) a- Prouver que 2 est un minorant de f .
b - Justifier que 2 est le minimum de la fonction f . En quel nombre ce minimum est-il atteint ?

I – 4) Opérations sur les fonctions (Somme, Produit, quotient et composition de fonctions)

Exercice 12

Soit f et g deux fonctions définies de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$.

- 1) Déterminer les ensembles de définition de f et g notés D_f et D_g .
- 2) Déterminer l'ensemble de définition de $\frac{f}{g}$ et la formule explicite $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Exercice 13

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x - 5$ et $g(x) = x^2 - x + 2$.

Donner les expressions de $h(x)$ dans chacun des cas suivants :

- 1) $h = f + g$; 2) $h = 2f - 3g$; 3) $h = f + g$; 4) $h = \frac{f}{g}$; 5) $h = \frac{f-g}{g+1}$

Exercice 14

Soit u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = x^2 - 3$ et v définie sur \mathbb{R} par $v(x) = 2x - 1$. Définir les fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 15

Soit f et g deux fonctions définies de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f \times g$; Puis calculer $(f \times g)(x)$;
- 2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\frac{f}{g}$; puis calculer $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Exercice 16

Soit f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+3}$ et $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$.
- 2) Définir les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 17

Soit f et g deux fonctions numériques définies par $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ et $g(x) = \frac{-1+3x}{2-x}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition $D_{\frac{f}{g}}$ de la fonction $\frac{f}{g}$ et pour tout x élément de $D_{\frac{f}{g}}$, déterminer $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.
- 2) Déterminer l'ensemble de définition $D_{f \circ g}$ de la fonction $f \circ g$ et pour tout x élément de $D_{f \circ g}$, déterminer $(f \circ g)(x)$.

II) REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

II – 1) Représentation graphique de fonctions et translations

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère $(O ; I ; J)$. f est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . a et b deux nombres réels. Dans chacun des cas suivants, la représentation graphique de la fonction g (C_g), est l'image de la représentation de f (C_f) par la translation de vecteur \vec{u} .

Relie chaque expression de la colonne A à la caractérisation de sa représentation graphique de la colonne B.

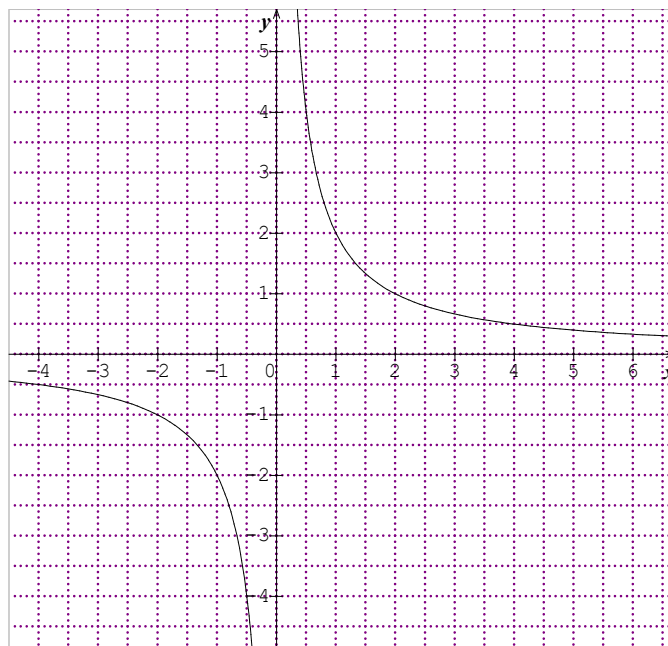
Colonne A	
$g(x) = f(x - a) + b$	●
$g(x) = f(x + 2)$ Les coordonnées du vecteur \vec{u} sont	●
$g(x) = f(x) - 2$ Les coordonnées du vecteur \vec{u} sont	●
$g(x) = f(x + 5) - 1$ Les coordonnées du vecteur \vec{u} sont	●
$f(x) = x^2$ et $g(x) = (x - 1)^2 + 3$ Les coordonnées du vecteur \vec{u} sont	●

Colonne B	
●	(C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $-a\vec{OI} + b\vec{OJ}$
●	(C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $a\vec{OI} + b\vec{OJ}$
●	$(1; 3)$
●	$(-2; 0)$
●	$(-1; 3)$
●	$(0; -2)$
●	$(5; -1)$
●	$(2; 0)$
●	$(-5; -1)$

Exercice 19

Sur le graphique ci-dessous, (C_f) et (C_g) sont les représentations graphiques respectives des fonctions numériques f et g définies par $f(x) = \frac{2}{x}$ et $g(x) = \frac{-3x+14}{x-4}$.

- Justifier que (C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $\vec{u}(4; -3)$
(Utiliser la division euclidienne de $-3x+14$ par $x-4$).
- Construire (C_g) connaissant (C_f) .



Exercice 20

Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$.

- 1) Représenter graphiquement la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = x^2$.
- 2) On considère la fonction g définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $g(x) = x^2 + 4x + 7$.
 - a) Ecrire sous forme canonique l'expression de la fonction g .
 - b) Montrer que $g(x)$ s'écrit sous la forme $g(x) = f(x-a) + b$ où a et b sont des réels à déterminer.
 - c) Dédire dans le repère $(O; I; J)$, la représentation graphique (C_g) de la fonction g .
- 3) Déterminer la fonction h de \mathbb{R} vers \mathbb{R} dont la représentation graphique est l'image de la courbe (C_g) de la fonction g par la translation de vecteur $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

Exercice 21

On donne $f(x) = \frac{2x-3}{3x-6}$.

- 1) Déterminer les réels k et a tel que $f(x) = \frac{k}{x-2} + a$.
- 2) a – Montrer alors que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = g(x-2) + a$ où g est une fonction à déterminer.
b – Dédire un programme de construction de la courbe (C_f) de la fonction f à partir de la courbe (C_g) de la fonction g .

Exercice 22

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 2x - 1$ et (C_f) sa représentation graphique.

1) Dans chaque cas, construire sur le même graphique, les images de (C_f) par la translation de vecteur suivant :

a) $\vec{u} = 2\vec{OI}$; b) $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{OJ}$;

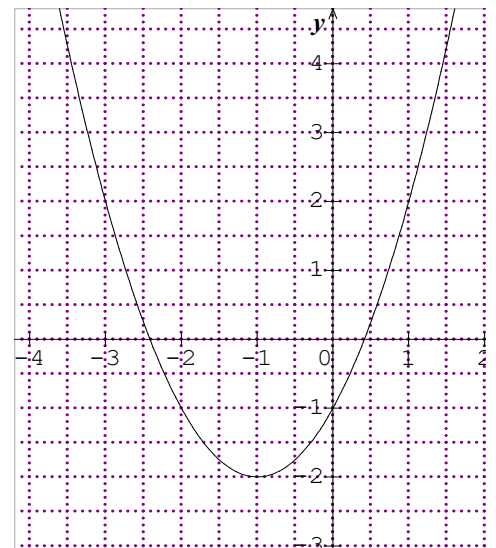
c) $\vec{u} = 3\vec{OI} + 2\vec{OJ}$.

2) Donner l'expression de la fonction g dont la courbe est l'image de (C_f) par :

a) La translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{OI}$.

b) La translation de vecteur $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{OJ}$.

c) La translation de vecteur $\vec{u} = 3\vec{OI} + 2\vec{OJ}$.



Exercice 23

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$. On donne les points $A(3;2)$ et $B(1;1)$. Soit la fonction g définie par $g(x) = 2x + 1$ et (D) sa représentation graphique. Déterminer la fonction f dont la représentation graphique (D') est l'image de (D) par la translation T qui applique le point A sur B .

II – 2) Représentation graphique de fonctions et symétries

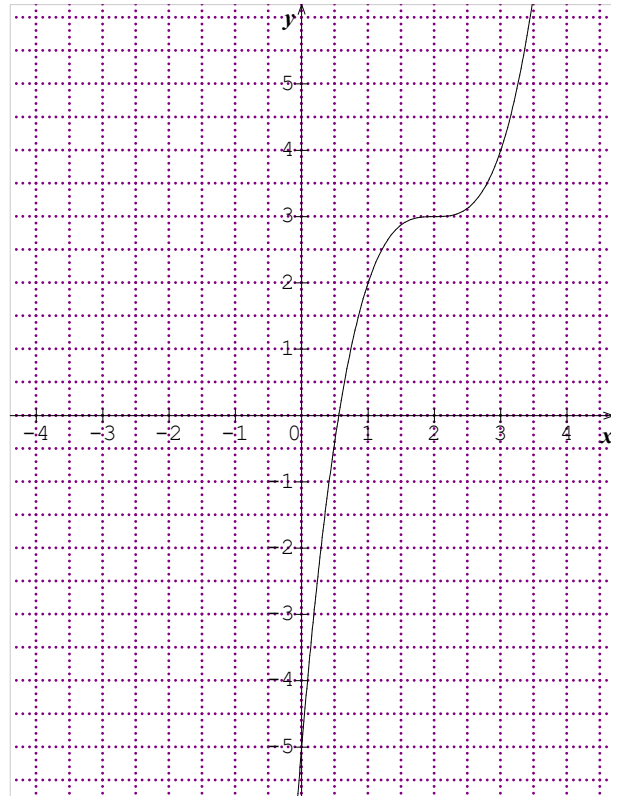
Exercice 24

f et g sont deux fonctions définies de \mathbf{R} vers \mathbf{R} par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 \text{ et } g(x) = -x^3 - 6x^2 - 12x - 5.$$

(C_f) et (C_g) sont les représentations graphiques respectives de f et g dans un repère orthogonal $(O;I;J)$.

- 1) Justifier que (C_g) est la symétrique de (C_f) par rapport à (OJ) .
- 2) Construire (C_g) connaissant (C_f) .



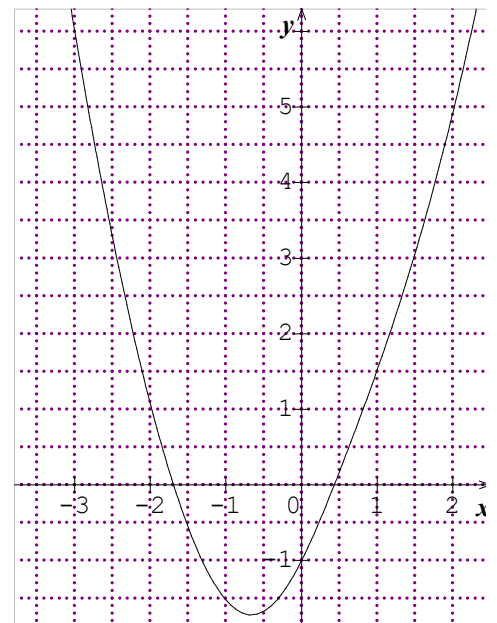
Exercice 25

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 2x - 1$ et (C_f) sa représentation graphique.

Dans chaque cas, construire dans sur le même graphique, les images de (C_f) par :

- 1) La symétrie S_O de centre le point O .
- 2) La symétrie $S_{(OJ)}$ d'axe (OJ) .

Donner l'expression de la fonction g dont la courbe (C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie d'axe (OJ) .



Exercice 26

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , à l'aide de la représentation graphique de la

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x}$$

Construire celle de chacune des fonctions définies sur \mathbb{R} par :

a) $f_1(x) = -\sqrt{x}$; b) $f_2(x) = \sqrt{-x}$; c) $f_3(x) = \sqrt{x+2} + 1$.

Exercice 27

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = x^2$

Indiquer la courbe représentative correspondante à chacune des fonctions associées suivantes :

$$g(x) = -f(x) ; h(x) = f(x) - 2 ; t(x) = f(x+1) + 2 ; u(x) = f(x-1).$$

Figure 1

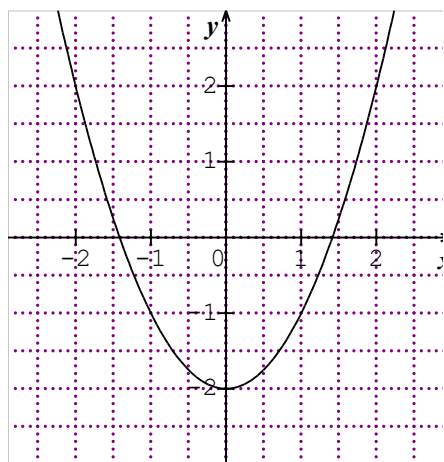


Figure 2

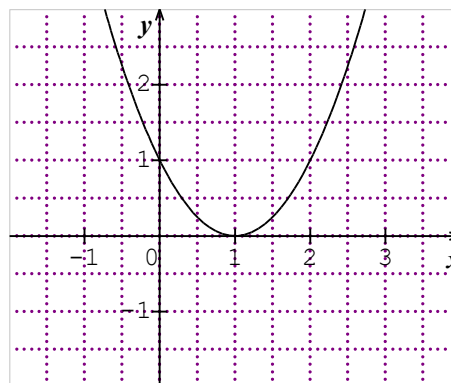


Figure 3

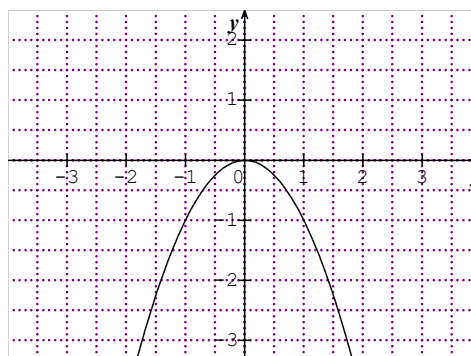
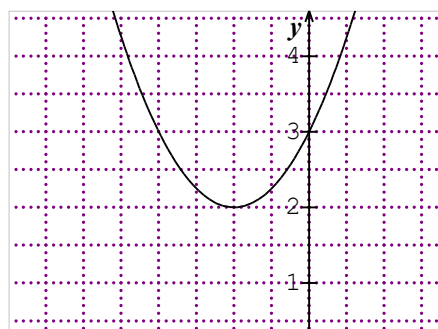


Figure 4



III) PROPRIETES GEOMETRIQUES DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS

III – 1) Parité

Exercice 27

Dans chacun des cas suivants, coche la bonne reponse

1	Une fonction f d'ensemble de definition D_f est dite paire lorsque :	<input type="checkbox"/> $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) + f(x) = 0$ <input type="checkbox"/> $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$ <input type="checkbox"/> $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
2	Une fonction f d'ensemble de definition D_f est dite impaire lorsque :	<input type="checkbox"/> $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$ <input type="checkbox"/> $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$ <input type="checkbox"/> $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(-x)$
4	Le plan est muni d'un repere orthogonal $(O; I; J)$, une fonction f est dite paire si et seulement si :	<input type="checkbox"/> Sa representation graphique dans le repere $(O; I; J)$ est symetrique par rapport à l'axe (OI) <input type="checkbox"/> Sa representation graphique dans le repere $(O; I; J)$ est symetrique par rapport à O <input type="checkbox"/> Sa representation graphique dans le repere $(O; I; J)$ est symetrique par rapport à l'axe (OJ)
	Le plan est muni d'un repere orthogonal $(O; I; J)$, une fonction f est dite impaire si et seulement si :	<input type="checkbox"/> Sa representation graphique dans le repere $(O; I; J)$ est symetrique par rapport à l'axe (OI) <input type="checkbox"/> Sa representation graphique dans le repere $(O; I; J)$ est symetrique par rapport à O <input type="checkbox"/> Sa representation graphique dans le repere $(O; I; J)$ est symetrique par rapport à l'axe (OJ)

Exercice 28

Etudier la parité des fonctions numériques suivantes :

$$1) f(x) = x^2 - 9 ; 2) g(x) = \frac{x^2 + 1}{x} ; 3) h(x) = -x^2 + 3x ; 4) t(x) = -x|x|.$$

Etudier la parité de chacune des fonctions numériques suivantes :

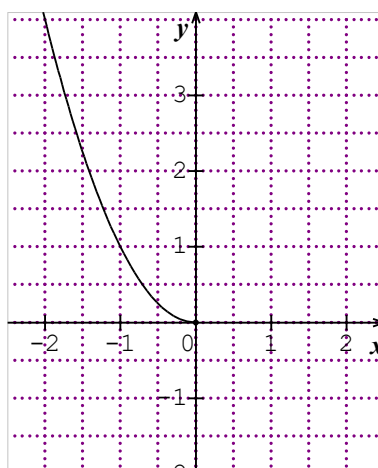
$$a) f(x) = x^2 + 4x + 1 ; b) g(x) = \sqrt{(x-1)(x+1)} ; c) h(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$d) h(x) = \frac{2}{x+3} ; e) h(x) = 2x^3 + x ; f) g(x) = \sqrt{(x+3)(x-2)} ;$$

$$g) h(x) = \frac{3x-1}{x^2-1} ; h) g(x) = -2x^4 - 3x^2 + 6 ; i) f(x) = \frac{x^2-3}{|x|}.$$

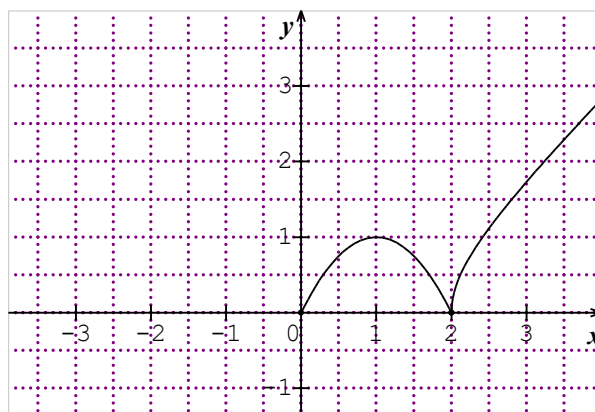
Exercice 29

On donne ci-contre une partie de la représentation graphique (C_f) d'une fonction f paire définie sur $[-2,5; 2,5]$. Compléter la courbe (C_f) .



Exercice 30

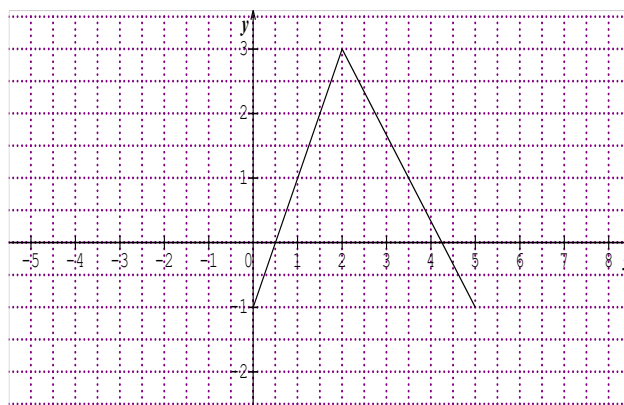
On donne une partie de la représentation graphique d'une fonction f impaire définie sur $[-4; 4]$. Compléter la courbe (C_f) .



Exercice 31

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction périodique f de période 5 sur l'intervalle $[0; 5]$.

Construire la représentation graphique de f sur l'intervalle : $[-5; 8]$



III -2) Courbe admettant un axe de symétrie d'équation $x = a$.

Exercice 32

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; I; J)$. On donne la fonction f définie par :

$f(x) = x^2 + 4x + 1$ Montrer que la droite (D) d'équation $x = -2$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) de la fonction f .

Exercice 33

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{dont la courbe représentative}$$

(C_f) sur le graphique ci-dessous a été partiellement effacée.

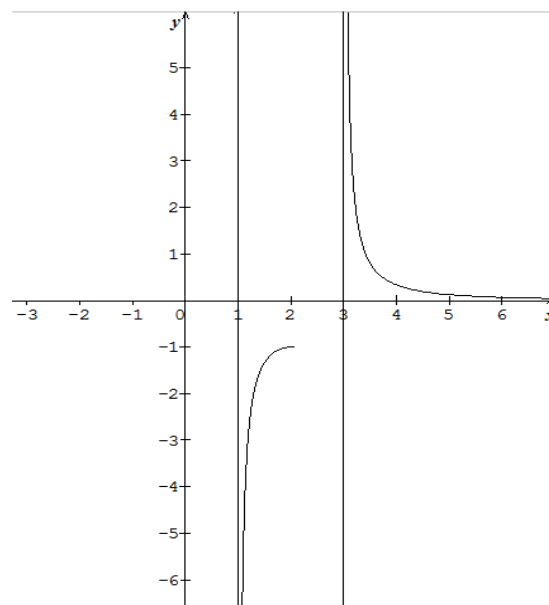
Déterminer D_f , ensemble de définition de f ,

puis justifier que la fonction f est ni paire, ni impaire.

Démontrer que la droite (D) d'équation $x = 2$

est un axe de symétrie de (C_f) .

Compléter la représentation graphique (C_f) de la fonction f .



Exercice 34

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x^2 - 2x + 2}$. (C_f) est sa représentation graphique dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé.

Démontrer que la courbe (C_f) admet la droite (D) d'équation $x = 1$ comme axe de symétrie.

III -3) Courbe admettant un centre de symétrie $\Omega(a; b)$.

Exercice 35

Démontrer que le point $A(2; -1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) de la fonction

$$\text{Numérique } f \text{ définie par } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}.$$

Exercice 36

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; I; J)$. (C_f) est la représentation graphique de la

$$\text{fonction } f \text{ définie par } f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x - 2}.$$

Montrer que le point $\Omega(2; 3)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) .

IV) BIJECTIONS ; BIJECTIONS RECIPROQUES

Exercice 37

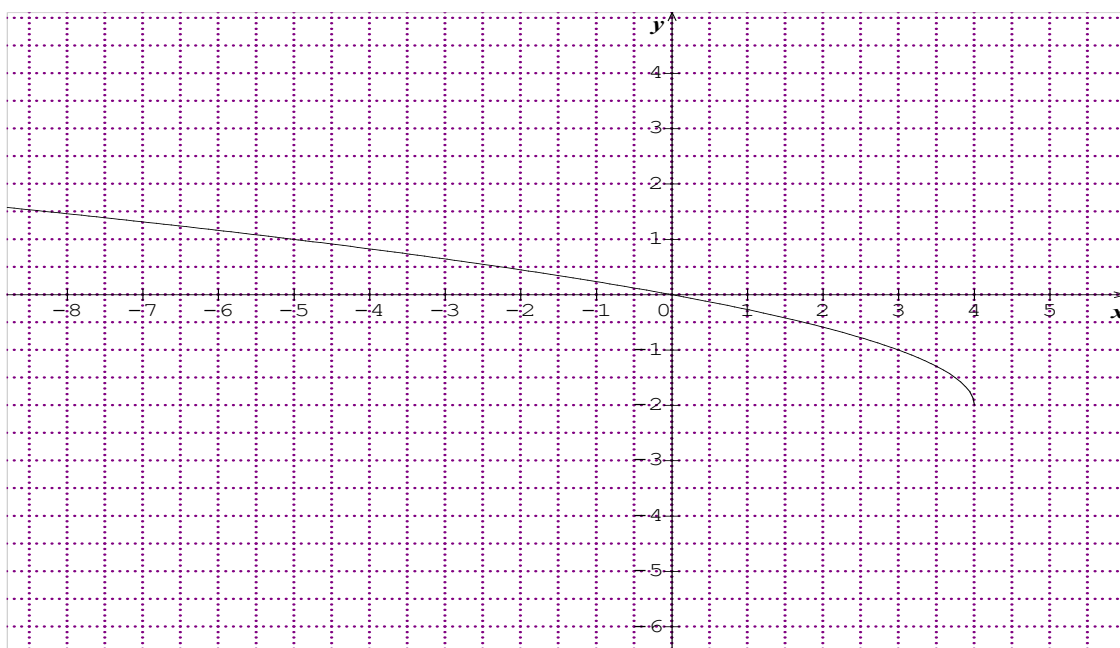
On considère la fonction $f : [2; 5] \rightarrow [-1; 8]$ et $g :]-1; 2[\rightarrow]-\infty; -\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 4x + 3$ et $x \mapsto \frac{2x-3}{x-1}$.

- 1) Démontrer que les fonctions f et g sont des bijections.
- 2) Expliciter f^{-1} puis g^{-1} , bijections réciproques des fonctions f et g respectivement.

Exercice 38

Soit la fonction $f :]-\infty; 4[\rightarrow [-2; +\infty[$
 $x \mapsto \sqrt{4-x} - 2$.

- 1) On suppose que f est une bijection de $]-\infty; 4[$ vers $[-2; +\infty[$.
- 2) Sur le graphique ci-dessous, (C_f) étant la courbe de la bijection f :
 - a) Etudier les positions relatives de la droite (Δ) d'équation $y = x$ et de la courbe (C_f) .
 - b) Tracer la courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} sur le même graphique que (C_f) .



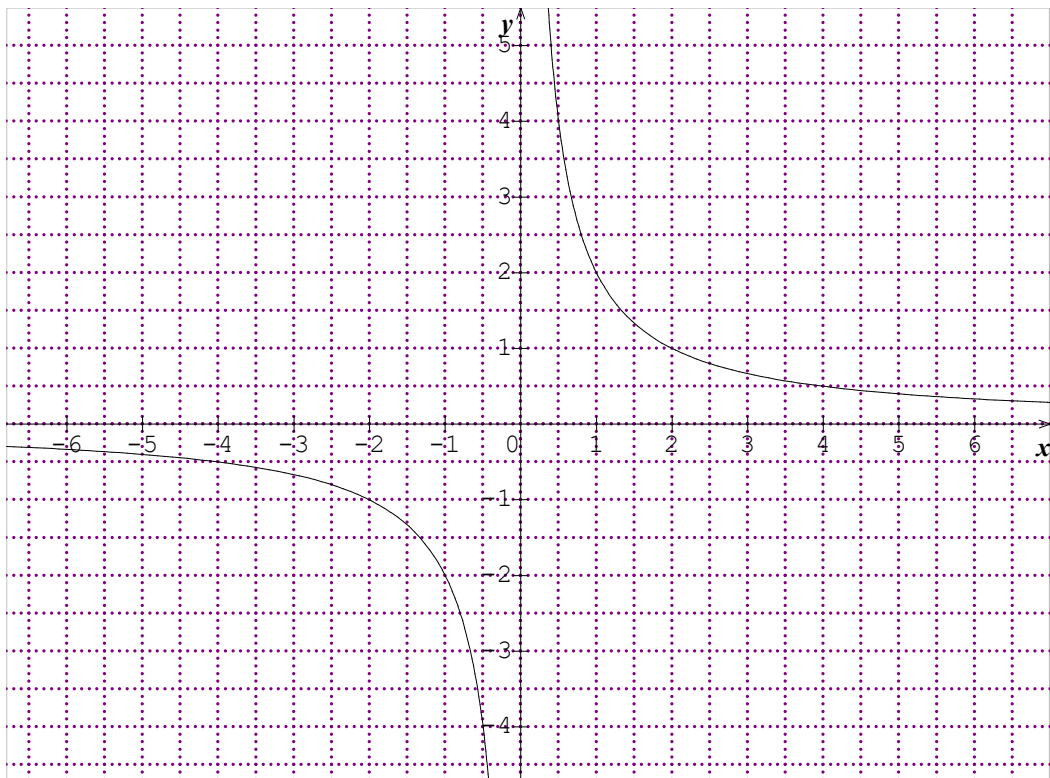
EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 39

On considère la fonction k définie de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ par $k(x) = \frac{2}{x}$, de représentation graphique

(C_k) dans le repère orthonormé $(O;I;J)$.

- 1) A partir de la courbe (C_k) de la fonction, construire (**en bleu**) la représentation graphique de la fonction h définie de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ par $h(x) = -\frac{2}{x}$; Préciser la transformation du plan utilisée.
- 2) On considère la fonction f définie de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ par $f(x) = -\frac{x+1}{x+3}$.
 - a) Vérifier que $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$.
 - b) En déduire la transformation par laquelle (C_f) est l'image de (C_k) , puis construire (C_f) . (**en noir**)
 - c) Soit la fonction g définie de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ par $g(x) = \frac{2}{-x+3} - 1$. A partir de (C_f) , déterminer par quelle transformation du plan, la courbe (C_g) est l'image de (C_f) ? Construire la courbe (C_g) . (**en crayon**)
- 3) Montrer que le point $A(-3; -1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) de la fonction f .



Exercice 40

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

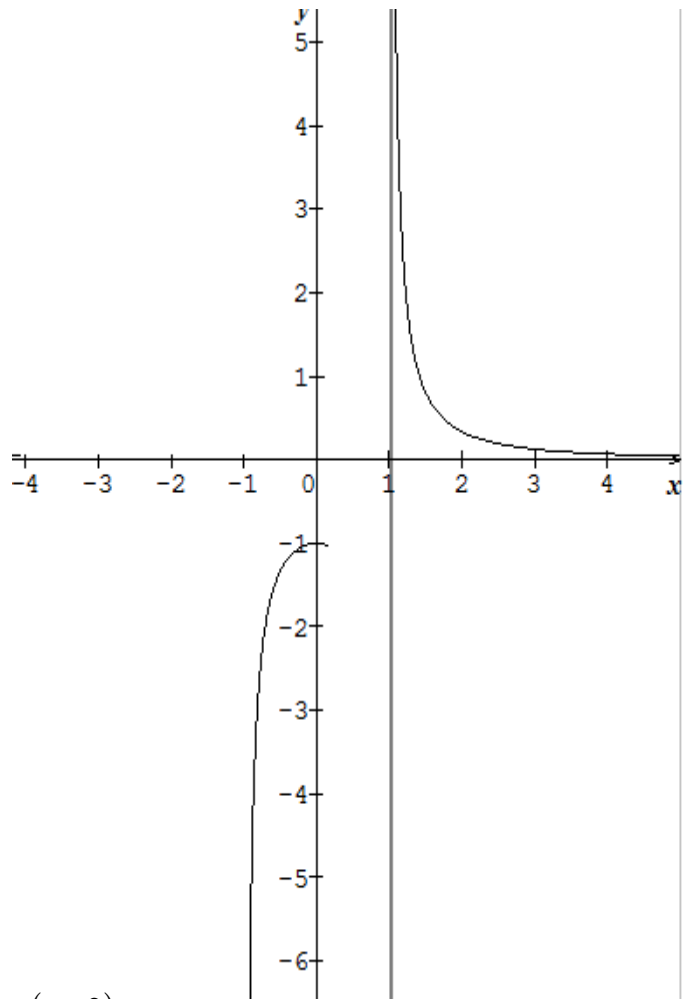
$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad \text{de représentation}$$

graphique (C_g) dont une partie a été accidentellement effacée.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g .
- 2) Montrer que la fonction g est une fonction paire.
- 3) Proposer une méthode de construction de la partie effacée de la courbe (C_g) de la fonction g , puis la construire.

On donne les points $A(-1; 2)$ et $B(-3; 2)$.

Soit la fonction f dont la courbe représentative (C_f) est l'image de la courbe (C_g) de la fonction g par la translation t qui applique le point A sur B .



1-a) Montrer que f est définie par $f(x) = \overline{g(x+2)}$.

b- Dédurre que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$, puis déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .

2) A partir de la courbe (C_g) ; Construire la courbe (C_f) de la fonction f dans le même repère $(O; I; J)$.

3) Montrer que la droite (D) d'équation $x = -2$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) de la fonction f .

Exercice 41

f et g sont deux fonctions numériques définies par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x}$.

Partie A

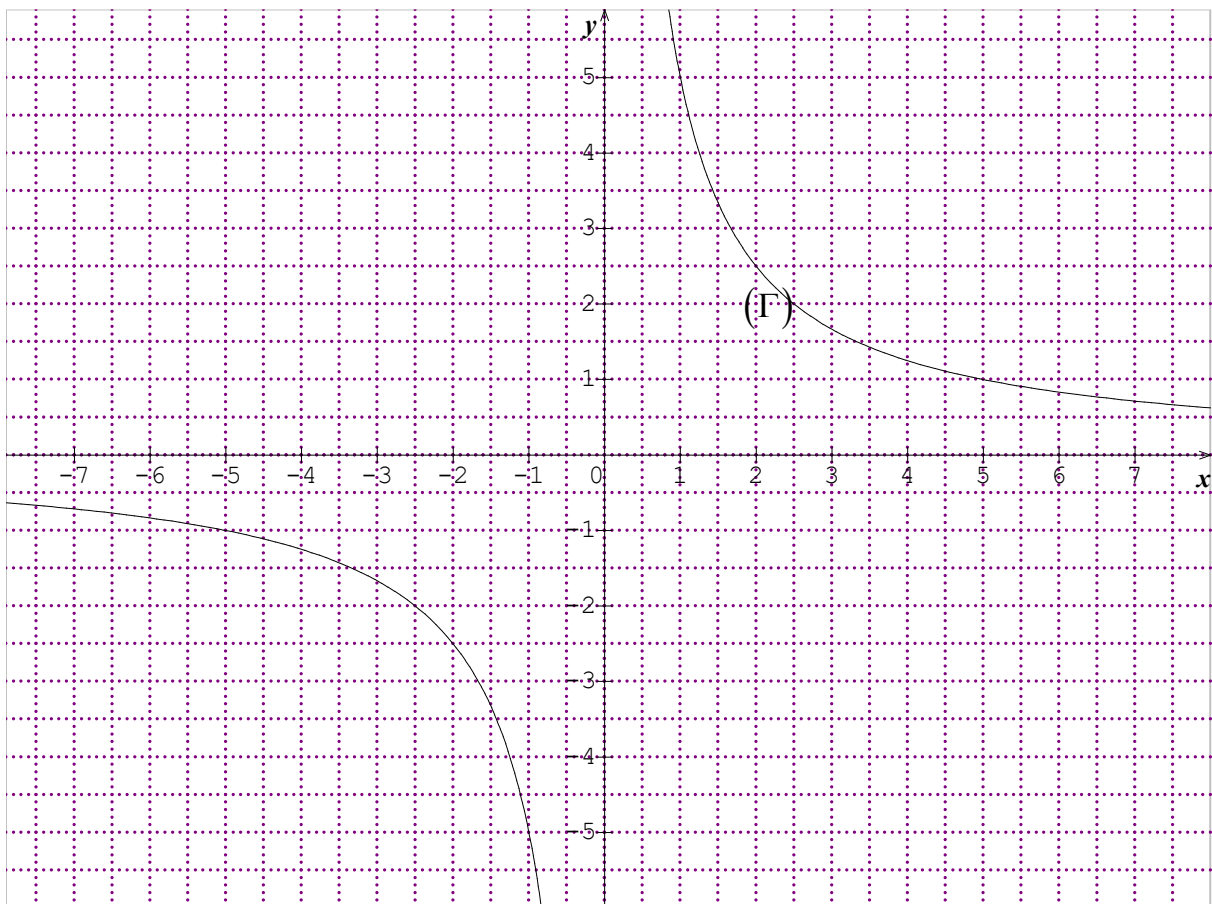
- 1) a- Déterminer D_f et D_g , ensembles de définition des fonctions f et g respectivement.

- b- Déterminer $D_{g \circ f}$ et $D_{f \circ g}$, ensembles de définition des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ respectivement.
- 2) Déterminer les formules explicites des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.
- 3) On pose $u(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$ et $v(x) = 5x+2$.
- a) Justifier que $g \circ f$ et u ne sont pas égales mais coïncident sur un ensemble K que l'on déterminera.
- b) Justifier que $f \circ g$ est la restriction de la fonction v sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Partie B

- 1) a- Résoudre l'équation $(E): x \in \mathbb{R}; f(x) = 2$.
- b- Soit b un nombre réel ; Résoudre l'équation $(E'): x \in \mathbb{R}; f(x) = b$.
- c- Dédurre que f est une bijection sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, puis définir sa bijection réciproque f^{-1} .
- 2) Montrer que $f(x) = \frac{5}{x-1} + 2$.
- 3) Sur le graphique ci-dessous, la courbe (Γ) est la représentation graphique de la fonction w définie par $w(x) = \frac{5}{x}$.
- a – Construire la représentation graphique (C_f) de f sur le même graphique.

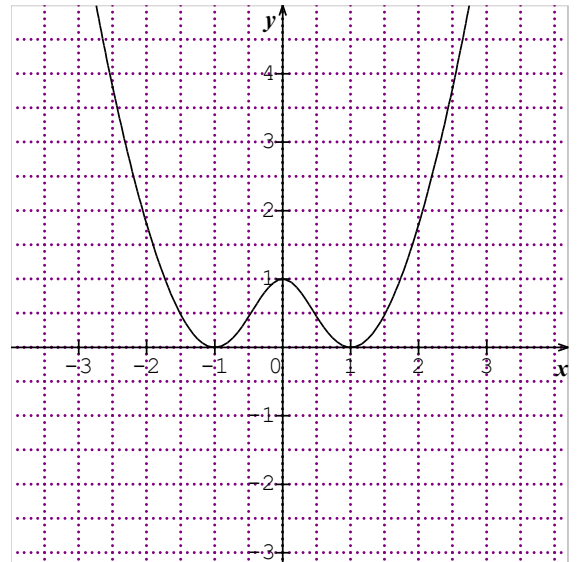
- b- En déduire la courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} , bijection réciproque de la fonction



Exercice 42

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$.

- 1) Déterminer son ensemble de définition.
- 2) Démontrer que f est une fonction positive sur \mathbb{R} .
- 3) Etudier la parité de la fonction f .
- 4) On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction f .
 - a) Donner par lecture graphique la valeur maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-1;1]$;
 - b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$; La fonction f est-elle bijective ?



SITUATION D'ÉVALUATION

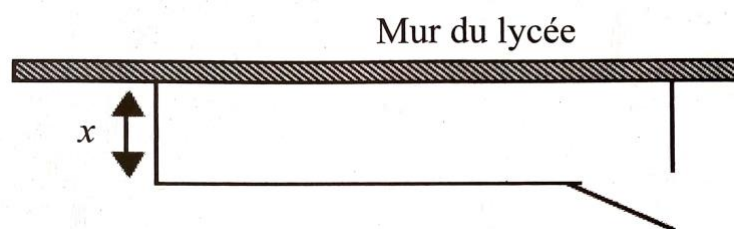
Le club d'agriculture d'un lycée dispose de 40 m de grillage pour clôturer son jardin. La figure ci-dessous a été réalisée par le président du club.

x est la largeur du terrain et le grillage recouvre la porte. Les élèves veulent déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du jardin est maximale. Pour cela ils décident de déterminer et d'étudier la fonction qui à x associe l'aire du jardin.

Soit $s(x)$ la fonction représentant l'aire du jardin. Justifie que $s(x) = 200 - 2(x-10)^2$.

Deduis-en que la valeur maximale de $s(x)$ est 200.

Détermine la valeur de x pour que l'aire $s(x)$ soit maximale.



CHAPITRE IV : LIMITES ET CONTINUITÉ

Situation d'apprentissage

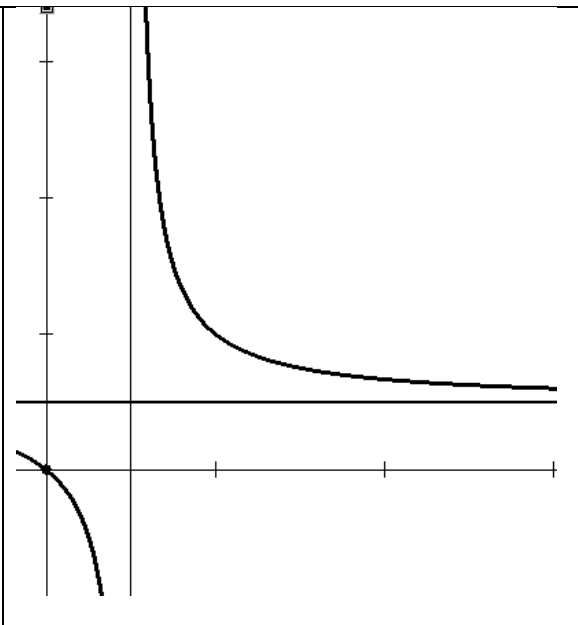
Au cours de leurs recherches en physiques des élèves d'une série scientifique découvrent un objet mobile dont l'équation horaire dans le plan muni d'un repère orthonormé est :

$$y(t) = \frac{t}{2t+1} \text{ où } t \in [0; +\infty[$$

Ils constatent que lorsque t tend vers $+\infty$ la trajectoire de se mobile se rapproche de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ comme l'indique le graphique ci-dessous.

Ils veulent donc expliquer ce résultat.

Ils s'organisent pour étudier les limites d'une fonction



I) LIMITES ET CONTINUITÉ EN a

I -1) Reconnaître qu'une fonction est continue en a

Exercice 1

Réordonne les groupes de mots ci-dessous pour avoir une propriété en mathématique énoncée au cours de limites et continuité de fonction.

Alors cette limite / si une fonction f / est égale à $f(a)$ / admet une limite en a / est définie en a et /.

Exercice 2

Reponds par vrai (V) ou par Faux (F) aux affirmations suivantes :

	Affirmations	Réponses
1	Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires, est continue sur \mathbb{R} .	
2	Le produit de deux fonctions continue en a est une fonction continue en a	
3	$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = a \Leftrightarrow f$ est continue en a	
4	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f$ est continue en a	
5	Si f est définie en a , alors f est continue en a .	
6	Si f est continue en a , alors f est définie en a .	

Exercice 3

Enoncer la propriété qui permet d'affirmer que chacune des fonctions p, f, g, h, t, s et r est continue en a .

1) $p(x) = 2 - \sqrt{7}$; $a = 0$; 2) $f(x) = x^2 + x$; $a = -2$; 3) $g(x) = \frac{1}{x}$; $a = 1$.

4) $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $a = 2$; 5) $t(x) = 4\sin(x) - 3\cos(x)$; $a = \frac{\pi}{3}$.

6) $s(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $a = -\frac{\pi}{6}$; 7) $r(x) = \left(1 - x + \frac{3}{x}\right)\sqrt{x+5}$; $a = 4$.

I – 2) Calcul de limites de fonctions continues en a

Exercice 4

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque ligne et la lettre de la colonne permettant d'obtenir la réponse exacte.

		A	B	C	D
1	$\lim_{x \rightarrow -2} (9 - \sqrt{11})$	$7 - \sqrt{11}$	$9 - \sqrt{11}$	6	-6
2	$\lim_{x \rightarrow -3} x^4$	81	-81	12	-12
3	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)$	-1	2	1	0
4	$\lim_{x \rightarrow 1 - \sqrt{3}} (1 - x)$	$1 + \sqrt{3}$	$1 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$
5	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{9 - x^2}$	$\frac{9}{2}$	2,8	2,6	$\frac{13}{4}$

Exercice 5

Pour chacune des affirmations suivantes, trois réponses sont proposées. Choisis la bonne réponse.

		A	B	C
1	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x =$	-1	0	1
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} =$	N'existe pas	0	1
3	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x} =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
4	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$	1	2	0
5	$\lim_{x \rightarrow 1} 5 =$	1	6	5
6	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x-2} =$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} 2 - \sqrt{7}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x^2$; 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \left(1 - x + \frac{3}{x}\right)$; 4) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 20x + 3}{x - 2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - 7}{x + 2}$;
 6) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\sqrt{x}}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 4} x - \sqrt{x}$.

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan(x)}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) - \sin(x))$; 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (4 \sin(x) - 3 \cos(x))$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2}{4 + \cos(x)}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} 2|x| - 8$; 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(2x)$; 9) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^3 - 7}{x - 4}\right)$;

10) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{x - \pi}{1 - \cos^2 x}\right)$.

I-3) Calcul de limites de fonctions non définies en a

Exercice 8 (Factorisations et simplifications)

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^3 - 3x^2}{x}\right)$; 2) $\lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{x^2 - 25}{x^2 - 3x - 10}\right)$; 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - 4}{x(2 - x) + 4x - 8}\right)$; 4) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^3 + 27}{x + 3}\right)$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}\right)$; 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{(x - 2)(-3x + 4)}{3x - 4}$; 7) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^2 - 4}\right)$;

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{-x^2 - 2x + 3}\right)$; 10) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 6}\right)$.

Exercice 9 (Expressions conjuguées et simplifications)

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}\right)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - 2\sqrt{x}}{x - 4}\right)$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{5x + 1} - 1}{x}\right)$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x - \sqrt{x + 3}}{x^2 - 1}\right)$;

5) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}\right)$; 6) $\lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}\right)$; 7) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - 4}{2 - \sqrt{x}}\right)$; 8) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - 2\sqrt{x}}{x - 4}\right)$;

9) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1 - \sqrt{3x - 5}}{x - 2}\right)$; 10) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4}\right)$.

Exercice 10 (utilisations des formules trigonométriques)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} \right); 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan^2(x) - \sin^2(x)}{\sin(x)} \right); 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos(x) - \sin(x)} \right).$$

II) LIMITES A GAUCHE ; LIMITES A DROITE

II -1) Limites à gauche ; Limites à droite en a

Exercice 11

On donne la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x - 1 & \text{pour } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{x+1} & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 1 de la fonction f . La fonction f admet-elle une limite en 1 ?

Exercice 12

On donne la fonction h de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} h(x) = 2x^2 - x + 5 & \text{pour } x \leq 2 \\ h(x) = 3x + 1 & \text{pour } x > 2 \end{cases}$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 2 de la fonction h . La fonction h admet-elle une limite en 2 ?

Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 1 de la fonction g . La fonction g admet-elle une limite en 1 ?

Exercice 13

On donne la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-9}{|x|-3} & \text{pour } x \neq 3 \text{ et } x \neq -3 \\ f(-3) = f(3) = 6 \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 3, puis en -3 de la fonction f .

3) La fonction f admet-elle une limite en 3? En -3 ? Justifier.

Exercice 14

Calculer :

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} |x-3|; 2) \lim_{x \rightarrow 3} |x-3|; 3) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{x}; 4) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{x}; 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{|x|}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{|x|}.$$

Exercice 15

On donne la fonction $f(x) = \frac{x^2 - x - 6 - |3-x|}{9-x^2}$.

Etudier la limite de la fonction f en 3.

II - 2) Limites à gauche ; limites à droite et continuité en a.

Exercice 16

On donne la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x-3}{x^2+2} & \text{pour } x < 0 \\ f(x) = \frac{2x^2+x+3}{x^2+5x-2} & \text{pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 0 de la fonction f .
- 3) La fonction f est-elle continue en 0? Justifier.

Exercice 17

On donne la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x - 6 & \text{pour } x < 2 \\ f(x) = 2x - a & \text{pour } x > 2 \\ f(2) = b \end{cases}$$

- 1) Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 2 de la fonction f .
- 2) Pour quelle valeur de réel a , La fonction f admet-elle une limite en 2 ?
- 3) Déterminer le réel b pour que la fonction, soit continue en 2.

Exercice 18

On donne la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 1} & \text{pour } x \neq -1 \\ f(-1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Montrer que pour tout $x \in D_f$; $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.
- 3) La fonction f est-elle continue en -1? Justifier votre réponse.

EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 19

On pose $h(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - |x|}$.

- 1-a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h .
- b) Ecrire $h(x)$ sans les barres de la valeur absolue.
- 2) Etudier la continuité de la fonction h en 0.

Exercice 20

On donne $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4} + m$ où (m est un nombre réel).

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) Montrer que pour tout $x \in [-1; +\infty[$; $f(x) = \frac{\sqrt{x+13}+4}{\sqrt{x+1}+2} + m$.
- 3) Déterminer le réel m pour que f soit continue en 3.

Exercice 21

1) Exprimer en fonction de $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, les expressions suivantes :

a) $1 + \cos(x) + \sin(x)$; b) $1 - \cos(x) + \sin(x)$.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1 + \cos(x) + \sin(x)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x) + \sin(x)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)$.

SITUATION D'ÉVALUATION

Un homme dispose d'un cylindre de volume 160 cm^3 . Il constate que l'aire latérale devient de plus en plus grande lorsque le rayon des cylindres diminue. Il te soumet cette curiosité et tu décides d'expliquer avec la notion de limite.

On note x le rayon des cylindres ($x \in]0; +\infty[$).

1) Justifie que l'aire latérale de ces cylindres en fonction de x est $A(x) = \frac{320}{x}$.

2 -a) Calcule la limite de $A(x)$ en 0.

b) Explique cette curiosité

Exemple de situation d'apprentissage

Un jeu organisé à la kermesse de l'école consiste à lancer une fois un dé parfait numéroté de 1 à 6 et à noter le numéro de la face supérieure.

On dit qu'on a le jackpot lorsqu'on obtient 6. Le Jackpot donne droit à 10 000 F.

Au cours d'une discussion, une élève d'une classe de première D, affirme qu'on a peu de chance d'avoir le numéro du jackpot qu'un autre numéro. Son camarade de classe qui vient de décrocher le jackpot n'est pas du même avis.

Afin de les départager, les autres élèves de la classe décident d'effectuer des calculs de probabilité.

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, répond par vrai ou faux.

	Affirmations	Réponses
1	Un événement contraire est un événement incompatible	
2	Un événement incompatible est un événement contraire	
3	L'événement $A \cup B$ contient $A \cap B$.	
4	Si deux événements A et B sont incompatibles alors $A \cap B = \emptyset$.	
5	Dans une expérience aléatoire, l'ensemble de tous les résultats possibles s'appelle éventualité.	
6	Dans une expérience aléatoire, les « et » caractérisent la réunion	

Exercice 2

On lance un dé parfaitement équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre lu sur la face supérieure. Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes.

N°	Affirmations	Reponses
01	Il s'agit d'une expérience aléatoire	
02	On a plus de chances d'obtenir le 6 que le 1	
03	La probabilité de ne pas obtenir le chiffre 5 est .	
04	Les événements « obtenir un chiffre pair » et « obtenir un chiffre supérieur ou égal à 5 » sont des événements incompatibles	
05	On a autant de chance d'obtenir un chiffre pair qu'un chiffre impair	
06	Les événements obtenir « obtenir un chiffre pair » et obtenir un chiffre impair » sont des événements incompatibles	

Exercice 3

Réponds à chacune des affirmations ci-dessous par vrai (V) ou faux (F).

	Affirmation	Réponses
1	Deux événements incompatibles sont contraires	
2	Si $P(A) + P(B) = 1$, alors $A = \bar{B}$	
3	La probabilité de l'événement contraire de l'événement A est égale à $1 + P(A)$	
4	La probabilité d'un événement impossible est 1	
5	Deux événements K et L d'un même univers sont incompatibles signifie que : $P(K \cup L) = P(K) + P(L)$	

Exercice 4

On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1) Définir l'ensemble des éventualités Ω .

2) Ecrire sous forme de partie de Ω les événements :

A : « Obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 ».

B : « Obtenir un numéro impair ».

C : « Obtenir un numéro strictement supérieur à 4 ».

3-a) Ecrire sous forme de partie de Ω les événements : $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup C$; $A \cap C$;

$B \cup C$; $B \cap C$; \bar{A} ; $\bar{A} \cup C$; $\bar{A} \cap C$.

b) Donner pour chacun d'eux une phrase qui le caractérise

4) Parmi les événements utilisés précédemment, citer deux événements contraires.

Exercice 5

Pour chacune des trois questions suivantes, il y a une seule réponse exacte parmi les cinq réponses proposées. Choisissez la bonne réponse.

1. On tire au hasard et simultanément deux boules d'une urne contenant 4 boules rouges et 3 boules noires. La probabilité que les deux boules tirées soient noires vaut :

A. $\frac{1}{7}$; B. $\frac{1}{8}$; C. $\frac{1}{9}$; D. $\frac{2}{3}$; E. $\frac{3}{4}$

2. On tire successivement avec remise trois boules d'une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules noires et 1 boule blanche. La probabilité que 2 boules soient blanches est :

A. $\frac{25}{216}$; B. 0 ; C. $\frac{1}{216}$; D. $\frac{25}{72}$; E. $\frac{5}{216}$

3. On tire successivement sans remise trois boules d'une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules noires et 1 boule blanche. La probabilité qu'une boule soit noire est :

A. $\frac{3}{5}$; B. $\frac{2}{120}$; C. $\frac{6}{216}$; D. $\frac{1}{2}$; E. $\frac{1}{5}$

Exercice 6

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Soit A et B deux événements incompatibles de Ω tels que $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,5$.

1) Calcule $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

2) Calcule $P(\bar{A})$ et $P(\bar{B})$.

Exercice 7

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Soit A et B deux événements de Ω tels que

$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ et $P(A) = \frac{2}{3}$.

1) Calcule $P(B)$; $P(\bar{A})$; $P(\bar{B})$; $P(\overline{A \cap B})$; $P(\overline{A \cup B})$; $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Exercice 8

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Soit A et B deux événements de Ω tels que

$P(A) = 0,3$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6$ et $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,9$.

1) Calcule $P(B)$.

Exercice 9

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher.
On considère l'épreuve qui consiste à tirer au hasard une boule de l'urne.
1°) Définir l'ensemble Ω des éventualités (univers) et la probabilité de chacune de ces éventualités.
2°) Les 20 boules sont de différentes couleurs : 8 jaunes, 6 rouges, 4 vertes et 2 bleues.
Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « La boule tirée est jaune »
B : « La boule tirée est rouge ou verte »
C : « La boule tirée n'est pas noire »

Exercice 10

On lance 2 dés parfaitement équilibrés numérotés de 1 à 6 puis on note la somme de chiffres apparus sur les faces supérieures.
Calcule la probabilité d'avoir :
1- La somme 5 ; la somme 7 ; la somme 10.
2- Une somme inférieure à 8 ; une somme supérieure à 10.

Exercice 11

Dans une urne contenant dix jetons dont n sont blancs ($n \leq 6$) et les autres noirs, on tire simultanément 4 jetons. Quelle est la probabilité d'avoir :
1- Un jeton noir et un seul.
2- Quatre jetons noirs.

Exercice 12

Vingt chevaux numérotés de 1 à 20 participent à une course. Être dans le trio final signifie qu'on a gagné. Les chevaux numérotés de 1 à 10 ont une probabilité individuelle de victoire égale à 0,05. Les chevaux numérotés de 11 à 14 ont une probabilité individuelle de gagner de 0,08. Les chevaux numérotés de 15 à 20 ont une probabilité chacune égale de vaincre.
1- Quelle est la probabilité de voir les numéros 10 ; 11 et 12 occuper les trois premières places.
2- Quelle est la probabilité d'obtenir les numéros 4 ; 11 et 18 dans cet ordre occuper les trois premières places.

Exercice 13

Sur 5 jetons on marque les lettres du mot MARIE. Puis on les met dans un sac et on tire successivement sans remise 3 lettres.
1- Quelle est la probabilité d'avoir :
a- Un mot commençant par A
b- Un mot contenant E
c- Un mot commençant par R et se terminant par E
2- On tire maintenant successivement avec remise 3 lettres. Quelle est la probabilité d'avoir :
a- Un mot se terminant par M
b- Le mot ARE
3- On remplace la lettre E par une autre lettre A et on tire successivement et sans remise 3 lettres. Calcule la probabilité des événements a) ; b) du 1.

Exercice 14

Dans une boîte contenant 4 boules blanches, 2 noires et 1 rouge toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité des événements suivants :
"A" : Avoir deux boules blanches au moins
"B" : Avoir deux boules de même couleur
"C" : Avoir deux boules de même couleur au moins.
"D" : Avoir une boule de chaque couleur

“E” : Avoir deux couleurs différentes

EXERCICE 15

Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, n vertes. (n est un entier naturel supérieur à 3).

On tire simultanément trois boules dans cette urne.

Calculer en fonction de n la probabilité des événements suivants :

- A : « Obtenir trois boules rouges » ;
- B : « Obtenir deux boules rouges exactement » ;
- C : « Obtenir au moins une boule verte » ;
- D : « Obtenir deux boules vertes et une noire » ;
- E : « Obtenir trois boules de la même couleur » ;
- F : « Obtenir trois boules de trois couleurs différentes ».

EXERCICE 16

Dans cet exercice tous les résultats de calcul de probabilité seront donnés à 10^{-2} près.

Une classe de Tle D compte 40 élèves dont 10 filles.

1/ A chaque séance du cours de mathématique, le professeur interroge au hasard trois élèves.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « Exactement deux des trois élèves interrogés sont des garçons ».
- B : « Les trois élèves interrogés sont de même sexe »
- C : « Il ya au moins une fille parmi les trois élèves interrogés »

2/ Parmi les 24 internes de la Classe, on compte 6 filles.

On choisit au hasard dans cette classe deux délégués de sexe différent.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

- D : « Les deux délégués sont internes »
- E : « Un seul des deux délégués est interne »

(On pourra se servir d'un tableau à double entrée)

Exercice 17

Une classe de première est constituée de 55 élèves. Certains sont externes et les autres sont internes.

Le tableau ci-contre donne la composition de la classe.

- 1) Complète le tableau ci-contre.
- 2) On choisit au hasard un élève de cette classe
 - a) Détermine la probabilité pour que l'élève choisit soit une fille
 - b) Détermine la probabilité pour que l'élève choisit soit externe
 - c) Détermine la probabilité pour que l'élève choisit soit interne
 - d) Détermine la probabilité pour que l'élève choisit soit externe et garçon.

	garçons	filles	total
Externes			
Internes			
Total			

SITUATION D'ÉVALUATION

Pendant la kermesse d'une école, le jeu suivant est proposé.

On tourne un appareil comportant quatre roues. Chacune des roues affiche au hasard l'image de l'un des fruits suivants : ananas, mangue, banane, pomme, orange, mandarine, papaye, fraise.

A ce jeu, on gagne :

- Un tee-shirt si on fait apparaître 4 fruits identiques
- Une casquette si on fait apparaître 4 fruits distincts
- Un sac si on fait apparaître 3 fruits identiques et 3 seulement.

Un élève de première, en visite sur ce stand avec ses camarades affirme qu'il est plus probable d'obtenir une casquette. Non convaincus ses camarades cherchent à vérifier cette affirmation

- 1) Détermine le nombre de résultats possibles lorsqu'on fait tourner l'appareil.
- 2) Calcule la probabilité d'obtenir chacun de ces trois cadeaux
- 3) Dis si l'affirmation est vraie et justifie ta réponse.

CHAPITRE VI : DERIVATION

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une coopérative gère une broyeuse de manioc. Elle peut traiter jusqu'à 25 tonnes de manioc par jour. Le cout de fonctionnement de la petite entreprise par jour s'exprime par $c(x) = x^2 - 24x + 225$ et la recette quant à elle s'exprime par $r(x) = 16x$ où x est la quantité de manioc traitée en kg. La coopérative veut déterminer la quantité de manioc qu'elle doit traiter par jour pour que le bénéfice soit le plus élevé et avoir une estimation de ce bénéfice. Aider la coopérative à déterminer ces valeurs.

I-DERIVABILITE en a

I – 1) Nombre dérivée

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, répond par vrai ou faux.

	Affirmations	Réponses
1	Une fonction continue en a est dérivable a	
2	Une fonction dérivable en a est continue en a	
3	Le minimum d'une fonction est toujours négatif	
4	Une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ est dérivable sur $[a;b]$	
5	Une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$ est dérivable sur $]a;b[$	
6	Le nombre dérivé d'une fonction en a se note $f'(a)$	
7	La fonction g définie par $g(x) = (2x + 3)^2$ est dérivable en 0 $g'(0) = 12$	
8	$f(x) = \frac{1}{x}$. La tangente en A d'abscisse 2 à (Cf) a pour équation $y = -\frac{1}{4}x + 1$	
9	Deux fonctions différentes ont toujours des dérivées différentes.	
10	Si une fonction f dérivable en a est tel que $f'(a) = 0$ alors f admet en a un extremum relatif	

Exercice 2

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = 5x^3 - x^2 + 2x - 7$.

1) Calculer $f'(0)$.

2) On appelle taux de variation de f en 0 noté $T_0(x)$, la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par

$$T_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

a) Exprimer $T_0(x)$ en fonction de x , puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0} T_0(x)$.

b) En déduire le nombre dérivée $f'(0)$ de la fonction f en 0.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

1- a) Justifier f n'est pas dérivable en 1 et en -1.

b) f étant dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$; Déterminer le nombre de dérivée $f'(2)$ de f en 2.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par sa formule explicite.

A l'aide du taux de variation de f en 1, étudier la dérivabilité de f en 1.

1) $f(x) = -2x + 1$; 2) $f(x) = 3x^2 + 5$; 3) $f(x) = x^3 - 9$; 4) $f(x) = \sqrt{x+1}$;

5) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; 6) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

2) Tangente à une représentation graphique

Exercice 5

Soit la fonction numérique définie par $f(x) = x^2 - 6x + 10$ et (C_f) sa courbe représentative.

1) a) A l'aide du taux de variation de f en 4, calculer le nombre dérivé $f'(4)$.

b) Déduire l'équation de la tangente (D) au point d'abscisse 4.

Exercice 6

Le plan est muni du repère $(O; I; J)$. On donne la fonction polynôme f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

1) Démontrer que la représentation graphique (C_f) de la fonction f coupe (OI) en deux points A et B dont l'un a pour abscisse -1.

2) Déterminer les équations des tangentes à (C_f) en A et en B.

Exercice 7

Le plan est muni du repère $(O; I; J)$. On donne la fonction polynôme f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$$

1) Déterminer les points de la représentation graphique (C_f) de f où la tangente à (C_f) est parallèle à la droite d'équation $y = 7x - 9$.

2) Déterminer les points de la représentation graphique de (C_f) , où la tangente à (C_f) est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x + 3$.

II- CALCUL DE DERIVEES

II – 1) Fonctions dérivées

Exercice 8

Pour chacune des affirmations suivantes, trois réponses sont proposées. Choisis la bonne réponse.

		A	B	C
1	$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 5}{4}$	$f'(x) = \frac{6x - 7}{4}$	$f'(x) = 6x - 2$	$f'(x) = \frac{3x - 1}{2}$
2	$f(x) = \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{-2 + 3x\sqrt{x}}{2x^2}$	$f'(x) = \frac{-2\sqrt{x} + 3x^2}{x^2 + 2\sqrt{x}}$	$f'(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
3	$f(x) = 3(x+1)\sqrt{x}$	$f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{9x+3}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$
4	$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 5}$	$f'(x) = \frac{2x^2 - 20x + 1}{(x - 5)^2}$	$f'(x) = \frac{-11}{(x - 5)^2}$	$f'(x) = \frac{2x^2 - 20x - 1}{(x - 5)^2}$
5	$f(x) = 3x - 4 - \frac{1}{2x + 3}$	$f'(x) = \frac{12x^2 + 36x + 41}{(2x + 3)^2}$	$f'(x) = 3 + \frac{2}{(2x + 3)^2}$	$f'(x) = 3 - \frac{2}{(2x + 3)^2}$

Exercice 9

Dans chacun des cas, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f puis donner sa fonction dérivée f' .

- 1) $f(x) = 2\sqrt{3}$; 2) $f(x) = x$; 3) $f(x) = -x^7$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}$; 5) $f(x) = \sqrt{x}$;
 6) $f(x) = \sqrt{2} \sin(x)$; 7) $f(x) = \cos(x)$.

Exercice 10

1) Calculer en utilisant la fonction dérivée, le nombre dérivé en x_0 de la fonction f dans chacun des cas suivants :

- a) $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$; $x_0 = 2$ b) $f : x \mapsto \cos x$; $x_0 = -\frac{\pi}{2}$
 c) $f : x \mapsto 2x^2 - x - 1$, $x_0 = 1$; d) $f : x \mapsto \frac{3x+2}{x+1}$, $x_0 = 2$;
 e) $f : x \mapsto \frac{1}{3x}$, $x_0 = -1$; f) $f : x \mapsto 2\sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On note (c_f) la courbe représentative de f dans (O, I, J).

Dans chacun des cas ci-dessus, déterminer une équation de la tangente à la courbe (C_f) , au point M_0 d'abscisse x_0 .

Exercice 11

Soit la fonction numérique définie par $f(x) = x^2 - 6x + 10$ et (C_f) sa courbe représentative.

- 1) Soit la droite $(D_1) : y = -2x + 3$
 a) Calculer la dérivée f' de la fonction f .
 b) Déterminer le point de (C_f) où la tangente (D_2) à (C_f) est parallèle à la droite (D_1) .

II – 2) Dérivées et opérations

Exercice 12

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x^2 + 6x - 1$; 2) $f(x) = 2x - \cos(x)$; 3) $f(x) = x^2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

4) $f(x) = (3x - 2)^2$; 5) $f(x) = \frac{2}{x+1}$; 6) $f(x) = \frac{4x+3}{2x-2}$; 7) $f(x) = \frac{1-3x}{x+4}$;

8) $f(x) = \tan(x)$; 9) $f(x) = \frac{2\sin(x)}{1+\sin(x)}$; 10) $f(x) = (6-5x)^{10}$; 11) $f(x) = 2\cos(x)\sin(x)$;

12) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$; 13) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

III- DERIVEES ET SENS DE VARIATIONS

III – 1) Sens de variation de fonctions dérivables

Exercice 13

Pour chacune des affirmations suivantes, choisis la bonne réponse. (*une seule réponse des trois proposées est juste*)

		Reponse A	Reponse B	Reponse C
1	La fonction dérivée f' d'une fonction f est donnée sur \square par $f'(x) = -2x + 6$, alors sur $]-\infty; 3[$ la fonction f est :	croissante	décroissante	constante
2	La fonction dérivée f' d'une fonction f est donnée sur \square par $f'(x) = (x-1)(x+2)$, alors sur $]-2; +\infty[$ la fonction f est :	croissante	décroissante	Décroissante puis croissante
3	La fonction dérivée f' d'une fonction f est donnée sur \square par $f'(x) = (x-1)^2$, alors sur \square la fonction f est :	croissante	décroissante	Croissante puis décroissante
4	La fonction dérivée f' d'une fonction f est donnée sur \square par $f'(x) = 7$, alors sur $]0; +\infty[$ la fonction f est :	croissante	décroissante	constante
5	La fonction dérivée f' d'une fonction f est donnée sur \square par $f'(x) = (x-1)(x+2)$, alors sur \square la fonction f admet :	Un extremum relatif	Aucun extremum relatif	Deux extremums relatifs

Exercice 14

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} de dérivée f' et vérifiant :

$$\begin{cases} f(0) = 2; f(1) = \frac{3}{2} \\ f'(0) = f'(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ \forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[; f'(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 1[; f'(x) < 0 \end{cases}$$

Etudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f .

- 1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; 3) $f(x) = (x^2 + 1)(5x - 7)$
 4) $f(x) = \frac{-2x+1}{3x+5}$; 5) $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-1}$; 6) $f(x) = \sqrt{2x+1}$; 7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$
 8) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x}$; 9) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 6}{x-1}$.

III – 2) Extremums relatifs d'une fonction

Exercice 16

Soit f une fonction dérivable, définie sur \mathbb{R} et admettant le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	6	-3	$+\infty$

- 1) Déterminer le signe de la dérivée f' de la fonction f sur \mathbb{R} .
- 2) a – Déterminer s'il existe, chaque extremum relatif de f . Préciser le nombre réel où il est atteint.
 b – Donner la nature de chaque extremum relatif.

EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 17

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x-3}{2x^2+x-3}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
- 2) Montrer que les droites d'équation $x = -\frac{3}{2}$ et $x = 1$ sont des asymptotes verticales pour (C_f) .
- 3) Montrer que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale pour (C_f) .

4) Calculer $f(0)$ et $f(6)$.

5) **Etude de la variation :**

a) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{-2x^2 + 12x}{(2x^2 + x - 3)^2}$

b) Déterminer les extremums de f .

c) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .

d) Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 18

Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

1) a) Déterminer D_g ensemble de définition de g .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

2) a) Déterminer la dérivée g' de la fonction g .

b) Justifier que : Pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$; $g'(x) > 0$.

Pour tout $x \in]-1; 1[$; $g'(x) < 0$.

3) a) Déterminer alors les variations de g sur \mathbb{R} .

b) Le tableau ci-dessous est le tableau de variation de la fonction g .

Reproduire et compléter ce tableau.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	0	
$g(x)$				

c) Déterminer les extremums relatifs de g .

Exercice 19

I - Soit la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f(x) = 5x^2 + ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

Déterminer les nombres a et b pour que la droite (T) d'équation $y = 12x - 4$ soit une équation de la tangente à la courbe de f , au point d'abscisse 1.

II - Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 1.$$

Déterminer les points de la courbe (s'ils existent) en lesquels la tangente à (C) est parallèle à la droite (D) d'équation : $y = 3x + 1$.

III - Soit la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f(x) = ax^2 + bx + 2$ avec a et b réel.

Déterminer a et b pour que la tangente à la courbe de f au point $A(1, -1)$ soit parallèle à droite de l'axe des abscisses.

SITUATION D'ÉVALUATION

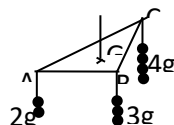
Un cultivateur veut construire un enclos rectangulaire de dimensions x et y . Il dispose de 100 m de grillage pour clôturer son enclos, le grillage étant entièrement utilisé.

- 1) Exprimer y en fonction de x puis l'aire $A(x)$ de l'enclos en fonction de x .
- 2) Étudier les variations de $A(x)$ en fonction de x .
- 3) Déduire la valeur de x pour laquelle $A(x)$ est maximale et calculer y et $A(x)$ dans ce cas.

CHAPITRE VII : BARYCENTRE

situation d'apprentissage

Une suspension est constituée d'un triangle ABC de masse négligeable et de poids fixés en chacun de ses sommets. On se propose de déterminer en quel point G, accrocher la suspension pour qu'elle soit en équilibre



Issa élèves en 1^{ère}, affirme que le point G vérifie $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ces camarades de classe qui sont de cet avis, décident de déterminer alors par la position exacte du point G.

I- BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDERES

Exercice 1

Compléter les pointillés pour que les phrases soient correctes.

1. Soit A, B et G trois points tels que : $-3\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
..... est le barycentre des points pondérés (A;.....) et (B;.....).

2. Soient E, F et T trois points tels : $\frac{1}{2}\overrightarrow{ET} - 3\overrightarrow{TF} = \vec{0}$
..... est le barycentre des points pondérés (E;.....) et (F;.....).

Exercice 2

Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Si G est le barycentre des points pondérés (A,2) et (E,-3), alors $2\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
2. Si E est le barycentre des points pondérés (A,3) et (C,-2), alors $3\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$.
3. Si G est le barycentre des points pondérés (A,a) et (E,b), ou a et b sont des réels non nuls, alors E, A et G sont alignés.
4. Deux points E et F possèdent toujours un unique barycentre.

Exercice 3

A ; B et C sont des points du plan tel que $AB = 6\text{ cm}$ et $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Faire une figure.

Exprimer le point C comme barycentre des points A et B.

Exprimer le point B comme barycentre des points A et C.

Exprimer le point A comme barycentre des points C et B.

Déterminer le nombre réel tel que le point A soit le barycentre du système de points pondérés $\{(B,1);(C,\alpha)\}$.

Exercice 4

Traduire vectoriellement la phrase proposée puis calculer le vecteur \overrightarrow{BA} en fonction du vecteur \overrightarrow{BC} .

A est le barycentre des points pondérés $(B,3)$ et $(C,1)$.

A est le barycentre des points pondérés $(B,5)$ et $(C,2)$.

A est le barycentre des points pondérés $(B,2)$ et $(C,-5)$.

A est le barycentre des points pondérés $(B,-1)$ et $(C,4)$.

Exercice 5

Simplifier l'écriture vectorielle suivante où A et B sont deux points distincts du plan ?

On donne $G = \text{bar}\{(A,2);(B,3)\}$ et $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}$; $4\overrightarrow{JA} + 6\overrightarrow{JB}$; $\overrightarrow{KA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{KB}$.

On donne $G = \text{bar}\{(A,3);(B,1)\}$ et $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$; $6\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB}$; $-\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$.

Exercice 6

Soit A ; B et C trois points du plan tel que $A = \text{bar}\{(B,2);(C,3)\}$.

Déterminer deux réels x et y sachant que : $x + y = 1$ et $B = \text{bar}\{(C,x);(A,y)\}$.

Déterminer deux réels t et z sachant que : $t + z - 1 = 0$ et $C = \text{bar}\{(A,z);(B,t)\}$.

Exercice 7

Soit $A = \text{bar}\{(B,5);(C,7)\}$ et $A' = \text{bar}\{(B,7);(C,5)\}$. Le point I est milieu de $[BC]$. Démontrer que le point I est aussi le milieu de $[AA']$.

Exercice 8

1) On donne deux points distincts A et B

a) construire le barycentre P des points pondérés $(A,-2)$ et $(B,1)$.

b) Construire le barycentre Q des points pondérés $(A,150)$ et $(B,-600)$

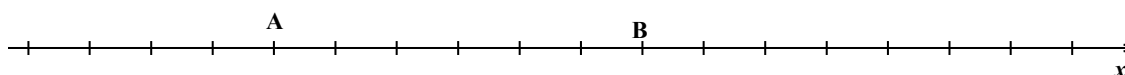
2) Dans chacun des cas suivants, justifier que le point G est barycentre des points A et B.

a) $-2\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$ b) $-3\overrightarrow{AG} = -5\overrightarrow{AB}$

Exercice 9

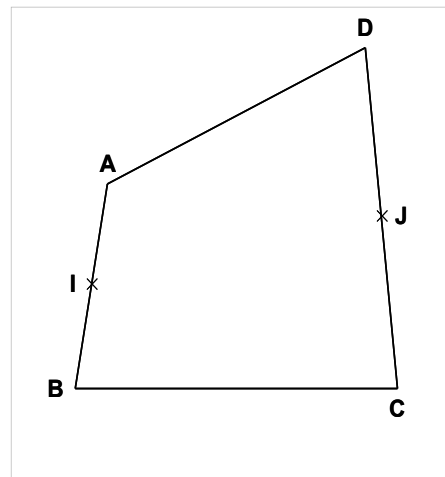
Placer, sans calcul, le barycentre des points (A ; a) et (B ; b) dans chacun des cas suivants :

a) $a = 1$ et $b = 2$; b) $a = 2$ et $b = -5$; c) $a = -5$ et $b = -1$; d) $a = 10$ et $b = 10$.



Exercice 10

ABCD est un quadrilatere. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.



- 1) Placer le point M barycentre des points pondérés $(B;1)$ et $(D;4)$ et le barycentre N des points pondérés $(A;1)$ et $(C;4)$.
- 2) K est le milieu du segment $[AB]$. Le but de l'exercice est de demontrer que les points I, J et K sont alignés.
 - a) Justifier les egalités suivantes : $\overrightarrow{KB} + 4\overrightarrow{KD} = 5\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{KC} = 5\overrightarrow{KN}$.
 - b) En deduire que : $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 4\overrightarrow{KC} + 4\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.
 - c) Demontrer que $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$.
 - d) Conclure.

II - BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDERES

Exercice 11

Pour chacune des affirmations suivantes, une seule des trois reponses A, B e C est exacte. Note le numero de l'affirmation et la lettre correspondant à la bonne reponse.

		Reponse A	Reponse B	Reponse C
1	Le point K est le milieu de $[AB]$, alors le point A est le barycentre du système	$\{(K, -2); (B, 1)\}$	$\{(K, 1); (B, -2)\}$	$\{(K, -1); (B, 2)\}$
2	Le barycentre des systèmes $\{(A, 1); (B, -2)\}$, celui de $\{(A, -100); (B, 200)\}$ et celui de $\{(A, \frac{1}{2}); (B, -1)\}$ sont :	équidistants	alignés	confondus
3	Le barycentre des systèmes $\{(C, 1); (D, 2)\}$, celui de $\{(C, 100); (D, 300)\}$ et celui de $\{(C, -10); (D, -2018)\}$ sont :	équidistants	alignés	confondus
4	Le barycentre du système $\{(E, 4); (F, -4); (G, 2)\}$ est le barycentre du système :	$\{(J, -2); (E, 4)\}$	$\{(J, 0); (G, 2)\}$	$\{(J, -6); (F, -4)\}$

Exercice 12

On donne trois points A, B et C non alignés du plan.

- 1) Construire le barycentre D des points pondérés $(A,1)$; $(B,1)$ et $(C,2)$.
- 2) Construire le barycentre G des points pondérés $(A,2)$ et $(B,-1)$ et $(C,3)$.
- 3) Construire le barycentre H des points pondérés $(A,3)$ et $(B,4)$ et $(C,-5)$.

Exercice 13

ABC est un triangle.

- 1) Construire le point K tel que $K = \text{bar}\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$.
- 2) Soit I le milieu du segment $[BC]$. Démontrer que les points A, K et I sont alignés.

Exercice 14

ABC est un triangle et K est le point du plan vérifiant $\overline{BK} = \frac{3}{2}\overline{BC}$. Soit G le barycentre du système de point pondéré $\{(A,2);(B,-1);(C,3)\}$.

- 1) Faire une figure puis justifier que le point K est le barycentre du système de points pondérés $K = \text{bar}\{(B,-1);(C,3)\}$.
- 2) Démontrer que les points A, G et K sont alignés.
- 3) a - Construire le point G.
b- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan pour lesquels les vecteurs $2\overline{MA} - \overline{MB} + 3\overline{MC}$ et \overline{AB} sont colinéaires.

Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$; On donne les points $A(-2;-1)$; $B(5;1)$ et $C(4;3)$.

- 1) Déterminer les coordonnées du barycentre G_1 du système de points pondérés $\{(A,2);(B,-1);(C,3)\}$ et les coordonnées du centre de gravité G_2 du triangle ABC.
- 2) Construire le triangle ABC et placer le point G_1 et G_2 .
- 3) Déterminer les coordonnées du barycentre H_1 du système de points pondérés $\{(A,2);(B,-1);(C,3)\}$ et les coordonnées du centre de gravité H_2 du triangle ABC.
- 4) Construire le triangle ABC et placer le point H_1 et H_2 .

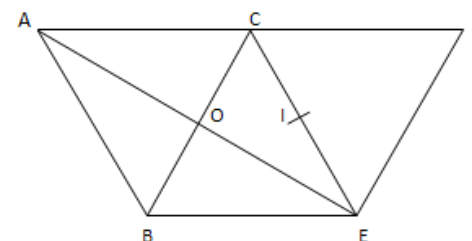
III -DETERMINATION DE LIEUX GEOMETRIQUES

Exercice 16

ABC, BEC et CEF sont des triangles équilatéraux de même côté avec $a > 0$. O est le milieu de $[BC]$

et I est le milieu de $[CE]$.

- 1) a- Ecrire le point O comme barycentre des points A , B et C.
b- Ecrire le point E comme barycentre des points A, B et C.
c- Ecrire le point F comme barycentre des points A, B et C.



c- Construire le point G barycentre du système de points

pondérés $K = \text{bar} \{(A,3);(B,1);(C,1)\}$.

2) Prouver que les points A ; O et G sont alignés.

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan pour lesquels :

a) les vecteurs $3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ et \vec{BC} sont colinéaires.

b) $\|3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3a$

III -1) Ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$ avec $k \geq 0$.

Exercice 17

Soit A et B deux points du plan vérifiant $AB = 6\text{cm}$. On se propose de déterminer l'ensemble (Γ)

des points du plan vérifiant : $\frac{MA}{MB} = 2$.

1) Prouver que le point $M \in (\Gamma)$ si et seulement si $MA^2 - 4MB^2 = 0$.

2) Démontrer que pour tout point M du plan : $MA^2 - 4MB^2 = -3\vec{MG}_1 \cdot \vec{MG}_2$; Avec $G_1 = \text{bar} \{(A,1);(B,2)\}$ et $G_2 = \text{bar} \{(A,1);(B,-2)\}$.

3) A- Déterminer l'ensemble (Γ) .

b- Construire les points G_1 et G_2 puis l'ensemble (Γ) .

Exercice 18

Soit A et B deux points du plan vérifiant $AB = 6\text{cm}$. On se propose de déterminer l'ensemble (Γ)

des points du plan vérifiant : $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$.

1) Prouver que le point $M \in (\Gamma)$ si et seulement si $4MA^2 - MB^2 = 0$.

2) Démontrer que pour tout point M du plan : $4MA^2 - MB^2 = 3\vec{MG}_1 \cdot \vec{MG}_2$; Avec $G_1 = \text{bar} \{(A,2);(B,1)\}$ et $G_2 = \text{bar} \{(A,2);(B,-1)\}$.

3) a- Déterminer l'ensemble (Γ) .

b- Construire les points G_1 et G_2 puis l'ensemble (Γ) .

Exercice 19

On donne le segment $[AB]$ tel que $AB = 12\text{cm}$. Dans chacun des cas suivant, déterminer et tracer

l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{4}{3}$; 3) $k = \frac{3}{4}$.

III - 2) Ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$.

Exercice 20

On donne le segment $[AB]$ tel que $AB = 12\text{cm}$. Dans chacun des cas suivant, déterminer et tracer

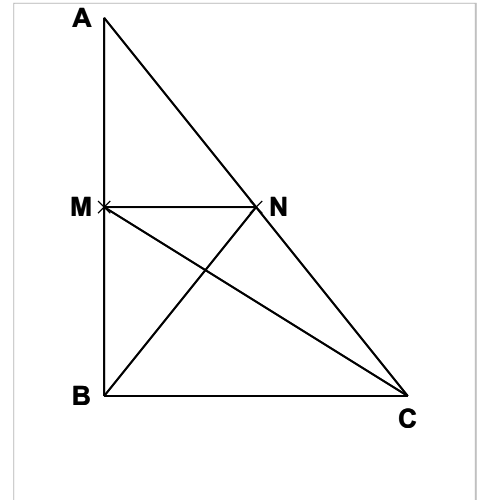
l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$.

$k = 13$; 2) $k = 0$; 3) $k = -36$; 4) $k = -40$

EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 21

On donne le triangle ABC . M est un point de (AB) et N un point de (AC) tels que (MN) est parallèle à (BC) . I est le milieu de $[BC]$ et J le point de concours de (BN) et (CM) . Utiliser le barycentre pour justifier qu'les points $A ; I ; J$ sont alignés.



Exercice 22

ABC est un triangle équilatéral ;

- 1) Déterminer et placer le barycentre K du système de points pondérés $\{(B,2);(C,2)\}$.
- 2) On désigne par H le projeté orthogonal de K sur la droite (AB) . Démontrer que H est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1);(B,3)\}$.
- 3) Dédurre des questions 1) et 2), le barycentre G du système de points pondérés $\{(A,1);(B,5);(C,2)\}$.
- 4) Démontrer que la droite (BG) coupe (AC) en L tel que : $\vec{LA} = -2\vec{LC}$.

SITUATION D'ÉVALUATION

Un élève d'une classe de première est retenu pour participer à un concours de mathématiques organisé par le club mathématique de lycée. Lors de sa préparation, en faisant des recherches sur le barycentre, il est amené à déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation

$(R) : \|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{BC}\|$ avec ABC un triangle équilatéral de côté 4. Il trouve que

l'ensemble cherché est un cercle. Son ami, candidat à ce même concours ne partage pas son avis. Il propose donc l'exercice à votre professeur de Mathématiques qui vous demande de le résoudre.

- 1) En notant G le barycentre des points pondérés $\{(A,1);(B,2);(C,-1)\}$, exprime le vecteur $\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}$ en fonction du vecteur \vec{MG} .
- 2) Deducis-en qu'une expression simplifiée de la relation (R) est $MG = 2$.
- 3) Détermine les caractéristiques du cercle trouvé par cet élève puis construis-le.

CHAPITRE VIII : EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE

Situation d'apprentissage

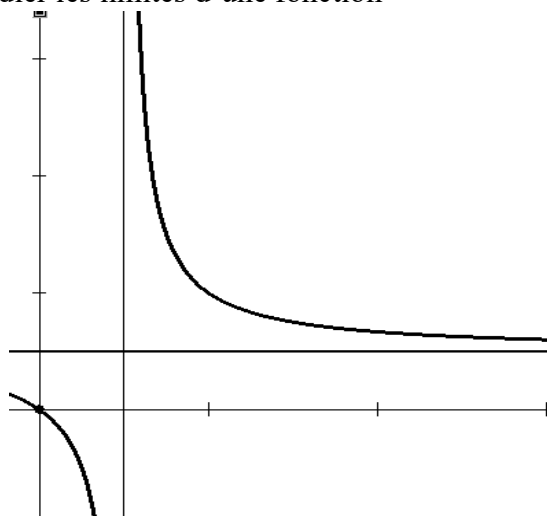
Au cours de leurs recherches en physiques des élèves d'une série scientifique découvrent un objet mobile dont l'équation horaire dans le plan muni d'un repère orthonormé est :

$$y(t) = t/(2t+1) \text{ où } t \in [0; +\infty[$$

Ils constatent que lorsque t tend vers $+\infty$ la trajectoire de se mobile se rapproche de la droite d'équation $y = 1/2$ comme l'indique le graphique ci-dessous.

Ils veulent donc expliquer ce résultat.

Ils s'organisent pour étudier les limites d'une fonction



I-LIMITE INFINIE

I – 1) Limite infinie en a

Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, trois réponses sont proposées. Choisis la bonne réponse.

		A	B	C
1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} =$ <	$-\infty$	0	$+\infty$
2	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} =$ >	0	$+\infty$	$-\infty$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} =$ >	$+\infty$	0	$-\infty$
4	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2-x} =$ <	$-\infty$	0	$+\infty$
5	$\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x =$	1	-1	0
6	$\lim_{x \rightarrow 1} 5 =$	1	6	5

Exercice 2

1) Calcule les limites suivantes

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 1}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{9}{(x+1)^3}$; c) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{3x-1}{5-x} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x-2)^2} \right)$;

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x-5}{(x-2)(x+2)} \right)$; f) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-3}{x^2-x-2} \right)$; g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-2x)^3}{1-x}$; h) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$;

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-2\sqrt{1-x|x|}}{1-x} \right)$.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite à gauche et la limite à droite lorsque x tend vers a

1) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}, a=3$; $g(x) = \frac{x^2-10}{(2+x)^2}, a=-2$; $h(x) = \frac{-x-2}{(5-x)^7}, a=5$.

I -2) Asymptotes verticales

Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes, une seule des trois reponses A, B e C est exacte. Note le numero de l'affirmation et la lettre crrespondant à la bonne reponse.

		Reponse A	Reponse B	Reponse C
1	Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors	La droite d'équation $y = a$ est asymptote à (C_f) .	La droite d'équation $x = a$ est asymptote à (C_f) .	La droite d'équation $x = a$ est tangente à (C_f) .
2	Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors	La droite d'équation $x = a$ est asymptote à (C_f) .	La droite d'équation $x = a$ est tangente à (C_f) .	La droite d'équation $y = a$ est asymptote à (C_f) .
3	Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors	La droite d'équation $x = a$ est tangente à (C_f) .	La droite d'équation $y = a$ est asymptote à (C_f) .	La droite d'équation $x = a$ est asymptote à (C_f) .

Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x-3}{2x^2+x-3}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .

2) Montrer que les droites d'équation $x = -\frac{3}{2}$ et $x = 1$ sont des asymptotes verticales pour (C_f) .

II- LIMITE A L'INFINI

II – 1) Limite à l'infini de fonctions polynomes ou rationnelles

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x + 1$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^4 + 5x^2 - 12x + 50$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 5x + 2$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)(x^2+1)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x + 1$; f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x + 1$; g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2}$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{(2-x)^2}$;

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2 + 3x - 1}{x^2} \right)$; j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{3x - 3}$; k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{3x^2 - 3}$; l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x + 1}{-x - 9}$ m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3x - 1} - \frac{1}{x}$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-2x^3 + 3}$; p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(x-4)^2}$.

II – 3) Limite à l'infini d'autres fonctions

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 6})$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x - 6})$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1 + x^2})$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{1 + x^2})$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$.

Asymptotes horizontales

Exercice 8

Pour chacune des affirmations suivantes, une seule des trois reponses A, B e C est exacte. Note le numero de laffirmation et la lettre crrespondant à la bonne reponse.

		Reponse A	Reponse B	Reponse C
1	Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7$ alors	La droite d'équation $x = 7$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.	La droite d'équation $y = 7$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.	La droite d'équation $y = 7$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.
2	Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ alors	La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.	La droite d'équation $x = -1$ est tangente à (C_f) .	La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.
3	Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors	La courbe (C_f) n'admet pas d'asymptote horizontale en $-\infty$	La courbe (C_f) admet plusieurs asymptotes horizontale en $-\infty$	La droite d'équation $y = -\infty$ est asmpote à (C_f) .

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x-3}{2x^2 + x - 3}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
- 2) Montrer que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale pour (C_f) .

EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 11

On donne le tableau de variation suivant d'une fonction f .

x	$-\infty$	-4	7	9	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	-	+
	$-\infty$	3	4	$-\infty$	5

- 1) Donne l'ensemble de définition de cette fonction f .
- 2) Donne les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition
- 3) Précise les éventuelles asymptotes à la courbe (C_f) de la fonction f .

Exercice 12

On pose $f(x) = \frac{3x+4}{x^2-1}$

Interpréter graphiquement les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x)) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 0$

2) Dans chaque cas, calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f et préciser les asymptotes éventuelles.

1) $f(x) = \frac{1}{x-3}$; 2) $f(x) = \frac{-2}{(-x+5)^8}$; 3) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$; 4) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-6}$.

Exercice 13

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

1) Déterminer D_f , ensemble de définition de la fonction f . (Le mettre sous forme de réunions d'intervalles).

2) a- Calculer les limites aux bornes de D_f .

b- Interpréter graphiquement chacun des résultats obtenus.

Exercice 14

On considère la fonction g de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $g(x) = \frac{2x+3}{x^3(x+7)}$.

1) Déterminer D_g , ensemble de définition de la fonction g . (Le mettre sous forme de réunions d'intervalles).

2) a- Calculer les limites aux bornes de D_g .

b- Interpréter graphiquement chacun des résultats obtenus.

SITUATION D'ÉVALUATION

Lors d'une recherche pour le cours de géographie, les élèves d'une classe de première découvrent une ville créée en 1960. La population de cette ville évolue selon une fonction f telle que

$f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$ où x est le nombre d'années écoulées depuis la fin de l'année 1960 et $f(x)$

est exprimée en milliers d'habitants. Curieux, ces élèves veulent savoir quelle serait cette population si x devient très grand.

1) Détermine les réels a et b tels que : $f(x) = a + \frac{b}{x+10}$.

2) Justifie que la population est croissante.

3) Détermine la population limite de cette ville.

CHAPITRE IX : ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE DE FONCTIONS

Situation d'apprentissage

Amin produit x galettes par jour. Sa fille Awa en classe de 1^{ère} a modélisé en fonction du nombre x de galettes, le coût de production $c(x)$ journalier estimé en FCFA par : $C(x) = 0,004x^2 + 30x + 1000F$.

Elle vend ces galettes à 40 FCF l'unité. Chaque jour, elle réussit à écouler toute sa production. Mais elle constate qu'elle fait souvent des pertes selon de nombre de galettes produites.

Awa explique la situation que vit sa mère à ses camarades de classe.

Les élèves décident d'étudier de représenter la fonction Bénéfice $B(x) = 40x - C(x)$ pour déterminer les valeurs de x pour lesquelles Amin fait des bénéfices.

I -ETUDE DE FONCTIONS POLYNOMES

Exercice 1

On donne f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par x^3 .

1) Complete les phrases suivantes pour qu'elles soient correctes

- a) L'ensemble de définition de f est
 - b) La limite de f en $-\infty$ est et sa limite en $+\infty$ est.....
 - c) La dérivée de f est $f'(x) = \dots\dots\dots$ et son signe est..... sur \mathbb{R} .
 - d) Pour la variation, f est strictement.....sur \mathbb{R} .
- 2) Construis la courbe de f sur \mathbb{R} .

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- 1) Calculer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$;
- 2) Justifier que pour tout réel x , $g'(x) = 3x(x-2)$;
- 3) a -Etudier le sens de variation de g .
b-Dresser le tableau de variation de la fonction g .
c-Déterminer les extremums relatifs de g .
- 4) a-Recopier et compléter le tableau de valeur suivant :

x	-1,5	-1	0	1	2	3
$g(x)$						

b-Construire la représentation graphique de la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

II – ETUDE DE FONCTIONS RATIONNELLES

III – 1) Asymptotes obliques

Exercice 3

Une fonction f est telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x - 0,5) = 0$.

Interprete graphiquement ces resultats.

Exercice 4

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . Pour chacune des fonctions f ci-dessous, démontrer que la droite (D) d'équation donnée est asymptote oblique à la représentation graphique de :

a) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$; $(D) : y = x + 2$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x + 1}$; $(D) : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

c) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x - 1}$, $(D) : y = 2x + 5$; d) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{|x|} - 2$, $(D_1) : y = x - 3$ et

$(D_2) : y = -x - 1$

Exercice 5

Soit f la fonction définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$; et (C_f) sa représentation

graphique dans un repère orthogonal $(O; I; J)$ et D_f son ensemble de définition.

1) Déterminer trois réels a , b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$.

2) On pose : $g(x) = f(x) - (x - 1)$.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

b) En déduire que (C_f) admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique dont on donnera une équation.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; I; J)$. Soit f une fonction numérique définie par :

$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$ et de représentation graphique (C_f) dans $(O; I; J)$.

1) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) On pose $h(x) = f(x) - x + 2$.

a) Déterminer l'expression de h puis étudier le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de la variable x .

b) En déduire les positions relatives de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D) .

III – 2) Etude de fonctions rationnelles

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$ (on donne $OI = OJ = 1\text{cm}$). (C_f) est la courbe représentative de f dans $(O; I; J)$. f est une fonction numérique d'ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. On donne les informations suivantes :

Info A : $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$.

Info B : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x - 0,5) = 0$.

Info C : $f(-3) = -4,5$ et $f(-1) = -2$.

Info D : pour $x \in]-\infty; -3[\cup]-1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ et pour $x \in]-3; -2[\cup]-2; -1[$, $f'(x) < 0$.

1-a) Interpréter graphiquement les résultats de l'info A.

b) Interpréter graphiquement les résultats de l'info B.

2) Etudie les variations de la fonction f puis dresse le tableau de variation de f .

3 -a) Soit $(D_1): x = -2$; $(D_2): y = 6$ et $(D_3): y = x - 0,5$. Construis les droites (D_1) ; (D_2) et (D_3) dans le repère $(O; I; J)$.

b) On donne le tableau de valeur suivant :

x	-7	-5	-4	-3	-0,5	-1	0	1	2	3	5
$f(x)$	-7,7	-5,8	-5	-4,5	-0,35	-2	0	1	1,8	2,7	4,7

Donne une allure de (C_f) dans le repère $(O; I; J)$ à partir de ce tableau.

Exercice 8

On considère que la fonction h définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $h(x) = \frac{x-1}{2x-3}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1) Déterminer l'ensemble de définition h .

2) a - Calculer la limite de h en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche en $\frac{3}{2}$ et à droite $\frac{3}{2}$.

b - En déduire les asymptotes à (C) .

3) Démontrer que pour tout réel x différent de $\frac{3}{2}$, $h'(x) = \frac{-1}{(2x-3)^2}$.

4) a - Etudier le sens de variation de h .

b - Dresser le tableau de variation de h .

5) a - Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$							

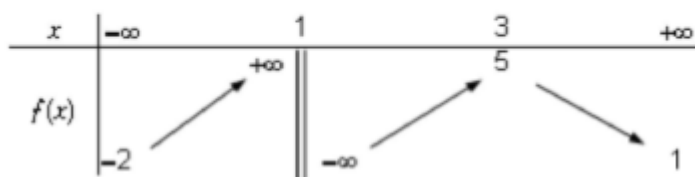
b- Construire (C)

III – 3) Représentations graphiques de fonctions

Exercice 9

Pour chacune des affirmations suivantes, répond par vrai ou faux.

On connaît le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$:



	Affirmations	Réponses
1	La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la représentation graphique de f .	
2	L'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions dans D_f .	
3	La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la représentation graphique de f en $-\infty$.	
4	L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans D_f .	
5	5 est le maximum de f sur son ensemble de définition.	

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Dans chacun des cas suivants, donner l'allure de la représentation graphique de la fonction dont le tableau de variation est indiqué.

1^{er} Cas

x	-4	-2	0	2	3
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	2	4	-3	4	1

2^{ème} Cas

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$+\infty$	3	1

3^{ème} Cas

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$+\infty$	1	$-\infty$	1

EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ tel que $OI = OJ = 0,5\text{cm}$. (C_f) est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 15}{x - 2}$.

- 1) a) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$
 - b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - c) Calculer les limites de f à gauche puis à droite de 2. Interpréter graphiquement les résultats trouvés (*On notera (D_1) la droite d'équation $x = 2$*).

2) Soit la droite (D_2) d'équation $y = -x + 3$.

- a) Montrer que $f(x) = -x + 3 + \frac{-9}{x - 2}$.
- b) Montrer que (D_2) est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ puis en $-\infty$.
- c) Préciser les positions relatives de (C_f) par rapport à (D_2) .

3) Soit f' la dérivée de la fonction f sur D_f .

- a- Montrer $f'(x) = \frac{(1-x)(x+5)}{(x-2)^2}$.
- b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f .
- c - Dresser le tableau de variation de f .

4) Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivantes :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)									

- 5) a-Montrer que le point $A(2; -1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) .
- b - Construire dans le même repère $(O ; I ; J)$ les droites (D_1) et (D_2) , puis la courbe (C_f) .

Exercice 12

On pose $f(x) = \frac{3x+3}{x^2}$ et (C_f) sa courbe de représentation dans le repère orthonormé (O, I, J) .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition (D_f) de f puis justifier que la fonction f n'est pas dérivable en 0.
- 2) Interpréter chacun des résultats suivants $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 3) a- Etudier la dérivabilité de la fonction f en -1 puis déterminer si possible le nombre dérivée de f en -1.
 - b- On suppose que $f'(-1) = 3$. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à (C_f) au point $A(-1 ; 0)$.
- 4) On suppose que f est dérivable en tout élément de son ensemble de définition (D_f) .

a - Montrer que pour tout x élément de (D_f) , $f'(x) = \frac{-3(x+2)}{x^3}$.

b - Vérifier le résultat de la question 3 - a).

5-a) Justifier que $\begin{cases} x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[, f'(x) < 0 \\ x \in]-2; 0[, f'(x) > 0 \end{cases}$

b) Etudier les variations de la fonction f sur (D_f) puis dresser le tableau de variation de f .

c) On donne le tableau de valeurs suivante :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-0.48	-0.56	-0.66	-0.75	0		6	2.25	1.33	0.94	0.72

Sur un papier millimétré, construire la courbe représentative (C_f) de la fonction f sur l'intervalle $[-5; 5]$. (Unité graphique : 1 cm).

Exercice 14

PARTIE 1

On donne $p(x) = x^2 - 4x$ et $q(x) = x^2 + x - 2$.

1- Résoudre dans \mathbb{R} les équations $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$.

2- Justifier que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[; p(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 4[; p(x) < 0 \end{cases}$

PARTIE 2

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit f la fonction $x \mapsto \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$.

1-a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

c) Donner une équation de l'asymptote verticale (Δ) à la courbe représentative (C_f) de la fonction f .

2- a) Démontrer que $\forall x \in D_f$; $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x - 2}$.

b) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est une asymptote à la courbe (C_f) .

c) Déterminer la position relative de (C_f) et (D) .

3- a) Démontrer que $\forall x \in D_f$; $f'(x) = \frac{p(x)}{(x-2)^2}$.

b) Déterminer le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4- a) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C_f) et de l'axe des abscisses (OI).

b) Démontrer que le point $\Omega(2; 5)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_f) .

5) Tracer les asymptotes (Δ) et (D), placer Ω (2 ; 5) ; Puis construire la courbe (C_f).

SITUATION D'ÉVALUATION

Des élèves en classe de 1^{ère} D ont découvert le texte suivant sur une revue « une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'ampoules dite "économique de 20 watts". Chaque ampoule est vendue à 100 FCFA. Il a été établi que le coût de la production d'une ampoule est donné par $U(x)$ tel que $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[10;100]$. Le directeur de l'entreprise cherche à déterminer le nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de la production et d'avoir un bénéfice maximal ». Impressionnés par cette formule donnant le coût de production, ces élèves cherchent à répondre aux préoccupations du directeur.

1-a) Calcule la dérivée de la fonction U sur $[10;100]$.

b) Étudie le sens de variation de U sur $[10;100]$ et dresse son tableau de variation.

2) Trace la courbe (U) de la fonction U . unité 1 cm pour 5 ampoules et 1 cm pour 10 francs)

3-a) Détermine pour quelle production le coût unitaire est le plus bas.

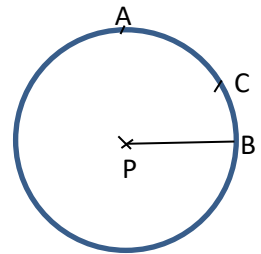
b) Détermine alors le bénéfice de l'entreprise.

CHAPITRE X : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

Situation d'apprentissage

Les élèves de la 1^{ère} D, ont en charge l'aménagement de l'espace pour la kermesse du lycée. Pour cela ils disposent du plan ci-dessus. Par rapport à l'arbre situé au point P et à la boutique située au point B, ils veulent installer les stands E, F, G et H à des points bien précis tout autour de l'espace comme les points A et C.

Ils établissent le tableau suivant qu'ils présentent aux élèves de Tle C chargés d'installer les stands.



I- ANGLES ORIENTES : MESURES ET OPERATIONS
 (Mesures quelconques ; Mesure principale d'un angle orienté)

Exercice 1

Mets une croix en dessous du nombre dans la case correspondant à la bonne réponse.

	propositions de réponses			
$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$	1	-1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2

En utilisant les signes + ou --, complète le tableau suivant :

Mesure α	$\frac{-\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
Signe du $\cos \alpha$						
Signe du $\sin \alpha$						

Exercice 3

Pour chacune des affirmations suivantes, répond par vrai ou faux.

	Affirmations	Réponses
1	La mesure principale de $-\frac{3\pi}{2}$ est $-\frac{\pi}{2}$	
2	La mesure principale de $\frac{83\pi}{4}$ est $\frac{3\pi}{4}$	
3	La mesure principale de π est $-\pi$	
4	$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}$	
5	Si x est un réel tel que $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{4}$, alors $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$	
6	Deux angles complémentaires ont le même cosinus.	
7	Deux angles supplémentaires ont le même sinus.	

Exercice 4

Pour chacune des expressions suivantes, quatre réponses sont proposées. Entoure la bonne réponse.

	propositions de réponses			
$\cos\left(\frac{34\pi}{3}\right) =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) =$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\left(-\frac{59\pi}{4}\right) =$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{1}{2}$

Exercice 5

- Justifier que chacun des réels suivants : $\frac{154\pi}{3}$; $-\frac{38\pi}{9}$; $\frac{1982\pi}{28}$; n'est pas la mesure principale d'un angle orienté.
- Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés de mesures quelconques : $\frac{154\pi}{3}$; $-\frac{38\pi}{9}$; $\frac{1982\pi}{28}$.

Exercice 6

(α) et (β) sont des angles orientés ; $\frac{75\pi}{4}$ est une mesure de (α) et $\frac{62\pi}{3}$ est une mesure de (β) .

1) Justifier que $\frac{75\pi}{4}$ et $\frac{62\pi}{3}$ ne sont pas des mesures principales des angles orientés (α) et (β) .

2) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté (α) puis celle de (β) .

3) On pose $(\theta) = (\alpha) + (\beta)$.

a) Déterminer une mesure quelconque de l'angle (θ) .

b) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté (θ) .

Exercice 7

O est un point du plan. Sur le cercle trigonométrique de centre O, on considère les points A et B, images respectives des nombres réels $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{145\pi}{4}$.

1) On désigne par (θ) un angle orienté de mesure $\theta = \frac{145\pi}{4}$. Déterminer la mesure principale de (θ) .

2) Dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O; I; J)$ avec $OI = 4\text{cm}$.

a) Placer les points A et B sur le cercle trigonométrique ; Puis déterminer les coordonnées des points A et B dans le repère $(O; I; J)$.

b) Exprimer l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ en fonction des angles orientés $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB})$.

c) Dédurre la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. M est le point image de l'angle orienté dont la mesure principale est $\frac{2\pi}{3}$ et N est le point image de l'angle orienté dont la mesure principale est $\frac{\pi}{6}$.

1-a) Placer les points M et N sur le cercle trigonométrique de centre O. (*Unité graphique 4 cm*)

b) Donner les coordonnées des points M et N dans le repère $(O; I; J)$.

2) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON})$;

$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OI})$; $(\overrightarrow{ON}; \overrightarrow{OJ})$ et $(\overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OM})$.

Exercice 9

Sur la figure ci-contre, A et B sont deux points du plan et (α) un angle orienté dont une mesure est $\frac{22\pi}{3}$.



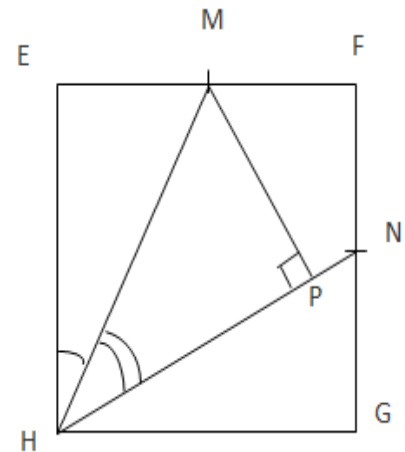
- 1) Déterminer la mesure principale de (α) .
- 2) Placer sur la figure un point C pour que $\frac{22\pi}{3}$ soit une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Exercice 10

Sur la figure ci-contre, EFGH est un carré, M et N sont les milieux respectifs des cotés $[EF]$ et $[FG]$.

- 1) Vérifier que $\cos(EHM) = 2 \sin(EHM)$.
- 2) En déduire que : a) $\text{mes}(MHN) = \frac{\pi}{2} - 2\text{mes}(EHM)$;
b) $\sin(MHN) = 8 \sin^2(EHM) - 1$.
- 3) Les droites (MP) et (HN) sont perpendiculaires en P.

On donne $EF = 2r\sqrt{5}$. Calculer en fonction du réels positif r les distances HM ; HP et MP.



II - FONCTIONS SINUS ; COSINUS ET TANGENTE

Exercice 11

On admet que pour tout nombre réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

- 1) Utiliser la relation ci-dessus pour démontrer que pour tout nombre réel x tel que :

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbf{Z}), : 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

- 2) Sachant que $\tan x = 2$ et $x \in]-\pi; 0[$; Déterminer $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 12

Soit x un nombre réel ; Démontrer les égalités suivantes :

- 1) $(\sin(x) - \cos(x))^2 = 1 - 2\sin(x)\cos(x)$.
- 2) $\sin^4(x) - \cos^4(x) = 1 - 2\cos^2(x)$.
- 3) $\frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$.

$$4) \cos^2(x) - \cos^4(x) = (\cos(x)\sin(x))^2.$$

$$5) \cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{(\sin(2x))^2}{4}$$

$$6) (\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2 = 4\cos(x)\sin(x).$$

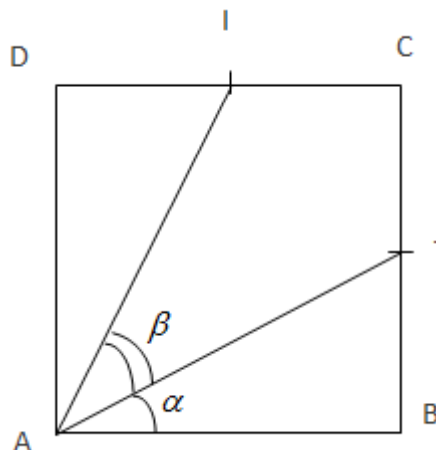
Exercice 13

1) Observe la figure ci-contre puis prouver que :

$$\beta + 2\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

2) Prouver que $\cos(\alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

3) Calculer $\sin(\beta)$.



III - FORMULES TRIGONOMETRIQUES

III - 1) Utilisation de la formule d'addition.

Exercice 14

Ecrire les expressions suivantes sous la forme des cosinus ou du sinus du nombre réel x .

$$a(x) = \cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \sin x ; b(x) = \cos 3x \cdot \sin 2x - \cos 2x \cdot \sin 3x ;$$

$$c(x) = \cos 4x \cdot \cos x + \sin 4x \cdot \sin x ; d(x) = \sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos x$$

Exercice 15

I - On considère un réel a tel que $\frac{\pi}{2} \leq a < \pi$ et $\sin a = \frac{1}{3}$.

Calculer la valeur exacte de $\cos a$, $\cos 2a$, $\sin 2a$, $\sin 3a$, $\cos 3a$.

II - Soit x et y deux réels tels que $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On pose $\sin x = \frac{2}{3}$ et $\cos y = \frac{1}{3}$.

Calculer $\cos(x)$; $\sin(y)$; $\tan(2x)$; $\sin(x+y)$; $\cos(x-y)$.

Exercice 16

Ecrire chaque expression en fonction de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$.

$$A = \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right); B = \sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right); C = \sin(-x + 24\pi); D = \cos(x - 3\pi); E = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right)$$

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right); G = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right); H = \cos\left(-x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Exercice 17

Ecrire en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ chacune des expressions suivantes :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right).$$

$$B = \sin(\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \sin(4\pi - x) + \cos(2011\pi - x).$$

$$C = \cos\left(x - \frac{141\pi}{2}\right) + \cos(x + 1347\pi) + \sin(x - 2020\pi) + \sin\left(x - \frac{413\pi}{2}\right)$$

$$D = \cos(-x + \pi) + 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi - x).$$

Exercice 18

1) Sachant que $3x = 2x + x$, démontrer que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ et $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$.

2) En déduire que pour tout réel x tel que $x \neq \frac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

Exercice 19

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1) $\cos(3x) + \cos(x) = 2\cos(2x)\cos(x)$.

2) $\sin(3x) + \sin(x) = 2\sin(2x)\cos(x)$.

Exercice 20

1) Sachant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, démontrer que $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

2) En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 21 : Ecrire plus simplement.

$$A = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} - \tan\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) - \frac{1}{\tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}$$

Exercice 22

1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$; $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

2) En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, démontrer que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 23

On donne $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ et on note $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1-a) Démontrer que pour tout réel de x de D , on a : $\tan(x + \pi) = \tan x$.

b) En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{9\pi}{8}\right)$.

2-a) Démontrer que pour tout réel x de D : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

b) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3) calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

III – 2) Utilisation de la formule de duplication.

Exercice 24

Sachant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ en utilisant les formules de duplication.

Exercice 25

x est un nombre réel tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $\cos(x) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

1) Calculer $\cos(2x)$.

2) Déduire la valeur de x .

3) Calculer $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$, puis montrer que : $\sin(x) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Exercice 26

Sachant que $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ et $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

1) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2) En déduire $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 27

Soit α un nombre réel. On pose $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

1) a- Calculer $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$.

b- Déterminer 2α et prouve que $\alpha = \frac{3\pi}{8}$.

2) Déterminer $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

3) Sachant que $\frac{3\pi}{8} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{7\pi}{24}$; Calculer $\sin\left(-\frac{7\pi}{24}\right)$.

Exercice 28

1) Sachant que $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en utilisant les formules de duplication.

2) En déduire $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ sachant que $\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi$.

3) Déterminer $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$.

IV – RESOLUTION D'EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

IV – 1) Equation du type $\cos x = a$; $\sin x = b$; $\tan x = c$.

Exercice 29

1) Résoudre les équations suivantes dans \square .

a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$; b) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Résoudre dans \square l'équation $(E_1) : \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) $2\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$.

Exercice 30

Résoudre les équations et inéquations trigonométriques suivantes :

1) $x \in \mathbf{R}$; $2\cos x - \sqrt{2} = 0$; 2) $x \in [0; 2\pi]$; $\sqrt{3} - 2\sin(x) = 0$; 3) $x \in [0; 2\pi]$; $\sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) $x \in [-\pi; \pi]$; $\sin x < \frac{1}{2}$; 5) $x \in [-\pi; \pi]$; $\sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$. (*On utilisera le cercle trigonométrique pour les inéquations*).

Exercice 31

Résoudre dans \mathbf{R} les équations suivantes :

1) $\cos\left(x - \frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$; 2) $3 - 4\cos^2(x) = 0$; 3) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{-3\pi}{5}\right)$.

Exercice 32

Résoudre dans $]-\pi; \pi[$ chacune des équations ci-dessous puis représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $x \in \square$, $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$; b) $x \in \square$; $1 - 2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$.

IV – 2) Equation du type $\cos x + a \sin x = b$.

Exercice 33

1) Donner les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

2) Résoudre dans \square les équations suivantes : a) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$

et c) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

3) Déduire des questions précédentes, les solutions de l'équation $(E) : x \in \square$; $\sqrt{3} \sin(x) + 3 \cos(x) = 1$.

Exercice 34

1) Résoudre les équations suivantes dans \square .

b) $\sin(x) = \frac{1}{2}$; b) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) a- Résoudre dans \square l'équation $(E_1): \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b - On considère l'équation $(E_2): \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$. Démontrer que l'équation (E_2) est équivalente à l'équation (E_1) .

c- Déduire les solutions de l'équation (E_2) pour $x \in [-\pi; \pi]$.

Exercice 35

Résoudre dans \mathbf{R} les équations suivantes :

1) $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = -\sqrt{2}$; 3) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$

4) $3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 3$.

IV – 3) Equations trigonométriques se ramenant aux équations polynomiales.

Exercice 36

Soit le polynôme définie par $P(X) = 2X^2 - 5X + 2$.

1) Justifier que $P(X) = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)(X - 2)$.

2) Résoudre dans \square l'équation $(E_1): P(X) = 0$.

3) On considère l'équation $(E_2): x \in \square ; 2\sin^2(2x) - 5\sin(2x) + 2 = 0$.

a) Montrer à l'aide d'un changement de variable que l'équation (E_2) est équivalente à (E_1)

b) Résoudre alors l'équation (E_2) dans \square .

Exercice 37

On considère le polynôme P définie par $P(x) = 4x^3 - 3x - 1$.

1-a) Calculer $P(1)$ puis factoriser $P(x)$ en un produit de polynôme de degré 1.

b) Résoudre dans \square l'équation $(E): P(x) = 0$.

2) On donne l'équation $(E'): 4\cos^3(x) - 3\cos(x) - 1 = 0$.

a) A l'aide de la question 1) , résoudre l'équation (E') .

b) Placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de l'équation (E') .

EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 38

Soit x un nombre réel. On pose $A = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ et

$$B = \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right).$$

- 1) Calculer $A+B$.
- 2 - a) Démontrer que $A-B=0$.
- b) En déduire les valeurs de A et B .

Exercice 39

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$. On donne $OI = OJ = 4$ cm. Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon OI . A, B, C et D sont quatre points du plan tel que $A(1;1)$ et $B(1;-1)$.

1) Montrer que 2012π est une mesure principale de l'angle orienté nul.

2-a) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB})$.

b) Montrer que 2012π est une mesure de l'angle orienté $(\alpha) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB})$.

3) on pose $(\beta) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OI})$.

a) Placer sur (Γ) le point D tel que $-\frac{5\pi}{6}$ soit la mesure principale de (β) . Déterminer alors les coordonnées du point D dans le repère $(O;I;J)$.

b) On donne $mes(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC}) = -\frac{85\pi}{4}$. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC})$. Déterminer les coordonnées du point C sachant que C appartient à (Γ) .

4) Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

NB ; on a : $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 8 - 4\sqrt{3}$.

Exercice 40

1) Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$, et $y \in \mathbb{R}$:

a) $\sin(x+y) \times \sin(x-y) = \sin^2(x) - \sin^2(y)$.

b) $\sin(x+y) \times \sin(x-y) = \cos^2(y) - \cos^2(x)$.

2) On rappelle que $\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$ et $\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$.

a) Prouver que : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ et en déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$; $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

b) Prouver que $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ et en déduire $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

Exercice 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;I;J)$. (Unité graphique 4cm). (Γ) est le cercle trigonométrique.

- 1) Placer sur (Γ) les points A ; B et C images respectives des nombres $\frac{\pi}{12}$; $\frac{3\pi}{3}$ et $-\frac{7\pi}{12}$ sur le cercle.
- 2) Prouver que :
 - a) $Mes(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3}$ et $Mes(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$.
 - b) Le triangle ABC est équilatéral.
 - c) Le point O est le centre de gravité du triangle ABC
- 3) a- Déterminer le couple de coordonnées du point A
b- sachant que $B\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right); \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ et $C\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right); -\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$, démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 0$.
- 4) Dans cette partie, on donne : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
 - a) Démontrer que $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
 - b) Prouver que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 0$.
 - c) Déterminer $\tan\left(\frac{\pi}{12} + \frac{133\pi}{2}\right)$.

SITUATION D'ÉVALUATION

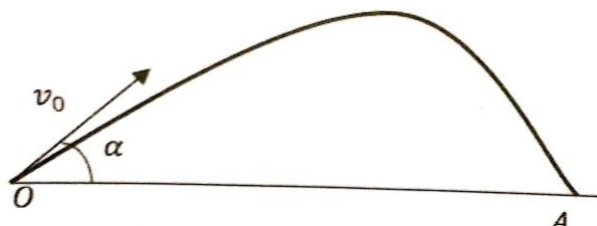
Lors d'un cours dans une classe de 1^{ère} D, un professeur de physique dessine la figure ci-dessous au tableau. Il affirme que la portée $P = OA$ d'un point lancé dans le vide avec une vitesse initiale

v_0 inclinée d'un angle α avec l'horizontal est donnée par $P = \frac{v_0 \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{g}$ où g est

l'accélération de la pesanteur. Pour une vitesse initiale v_0 donnée, il demande de déterminer la valeur de l'angle α pour laquelle la portée est maximale.

1) Calcule la portée lorsque $OA = 1,8\sqrt{3}$ m ; $g = 10$ et $v = 6$ m/s.

Détermine la valeur de l'angle α pour laquelle cette portée est maximale.



CHAPITRE XI : SUITES NUMERIQUES

situation d'apprentissage

Le père d'un élève de 1^{re} a déposé la somme de 200000 francs dans une banque à son nom dès sa naissance à un taux de 3% par an. Il ne pourra toucher à la somme qu'à sa majorité c'est-à-dire à 18 ans. Votre ami impatient, désire avoir une idée de ce qu'il aura. Les élèves de sa classe s'organisent pour étudier les suites numériques.

I- GENERALITES

I – 1) Suites définies par une formule explicite

Exercice 1

Complète ls suites logiques de nombres pour obtenir les 8 premiers termes de chacune d'elles

- a) 4 – 7 – 10 – 13 – – – –
- b) 3 – 6 – 12 – 24 – – – –
- c) 20 – 19 – 17 – 14 – – – –
- d) 5 – 7 – 11 – 17 – – – –
- e) 1 – 4 – 9 – 16 – – – –

Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, répond par vrai ou faux.

	Affirmations	Réponses
1	u_{20} est le 20 ^{ème} terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	
2	v_{11} est le 12 ^{ème} terme de la suite $(u_n)_{n > 1}$	
3	La somme $u_{16} + u_{17} + u_{18} + \dots + u_{30}$ comporte 14 termes.	
4	La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2n+1}{n}$ est une suite définie par formule de récurrence.	
5	La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2u_n+1}{u_n}$ est une suite définie par formule explicite.	
6	Si pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \frac{2n+1}{n}$ Alors le sixième terme de la suite est égal à $\frac{15}{7}$	
7	Si pour tout entier $n \geq 1$, le premier terme de la suite $u_n = \frac{2u_n+1}{u_n-1}$ est égal à -1 alors le troisième terme est égale - 4	

Exercice 3

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = 2^n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_{11} .

Exercice 4

Calculer les quatre premiers termes de la suite (U_n) dans les cas suivants.

1) $U_n = 2n - 5$ ($n \in \mathbb{N}$); 2) $w_n = (-1)^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$); 3) $U_n = -2n^2 + 5n - 3$ ($n \in \mathbb{N}$)

4) $U_n = \sqrt{n+5}$ ($n \in \mathbb{N}$); 5) $U_n = \sqrt{n^2 - n}$ ($n \in \mathbb{N}$); 6) $U_n = \frac{n^2 - 1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

7) $U_n = \frac{2n-3}{n-1}$ ($n \geq 2$); 8) $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ ($n \in \mathbb{N}$); 9) $t_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ($n \geq 1$).

I -2) Suites définies par récurrence

Exercice 6

Calculer les quatre termes u_1, u_3, u_4 et u_5 de la suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$.

Exercice 7

(U_n) est définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 26$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + 1$. Calculer U_3, U_5, U_8 .

Exercice 8

Dans chaque cas, calculer les quatre termes u_1, u_2, u_4 et u_5 de la suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par :

1) $U_n = \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 5 \end{cases}$ ($n \in \mathbb{N}$); 2) $U_n = \begin{cases} U_0 = -\frac{1}{2} \\ U_{n+1} = -4U_n + 2 \end{cases}$ ($n \in \mathbb{N}$);

3) $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = U_n^2 - 5 \end{cases}$ ($n \in \mathbb{N}$); 4) $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = -U_n^2 + U_n - 2 \end{cases}$ ($n \in \mathbb{N}$);

5) $U_n = \begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$ ($n \in \mathbb{N}$)

I - 3) Passage d'un mode de détermination à l'autre

Exercice 9

On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par : $w_n = -2n + 3$

Donner en fonction de n l'expression de : w_{n-1} ; w_{n+1} ; w_{n+2} ; w_{2n} ; w_{n+1} ; w_n^2 et w_{2n+1}

Déterminer une relation entre w_n et w_{n+1} puis entre w_{2n} et w_{2n+1} .

Exercice 10

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par sa formule explicite : $a_n = 3n + 2$.

Donner la formule de récurrence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_n = \frac{5}{4^n}$. Définir la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide d'une formule de récurrence.

Exercice 12

On donne la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $\begin{cases} v_0 = 0,8 \\ v_{n+1} = 5v_n \end{cases}$. Définir la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide d'une

formule explicite.

II -REPRESENTATION GRAPHIQUE DE TERMES D'UNE SUITE NUMERIQUE

II – 1) Représentation graphique de termes de suites définies par formule explicite

Exercice 13

On donne la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 3 + n \times (-1)^n$.

Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis représenter ces termes sur l'axe (OI).

Exercice 14

On donne la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \sqrt{n}$.

- 1) Dans un repère orthonormé (O;I;J), Représenter la courbe de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.
- 2) A l'aide du graphique, construire sans calculer, sur l'axe (OJ) puis sur l'axe (OI) les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II – 2) Représentation graphique de termes de suites définies par formule de récurrence

Exercice 15

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), représenter sur la droite (OI), et sans calculer, les termes d'indices 0 à 5 de chacune des suites numériques ci-dessous :

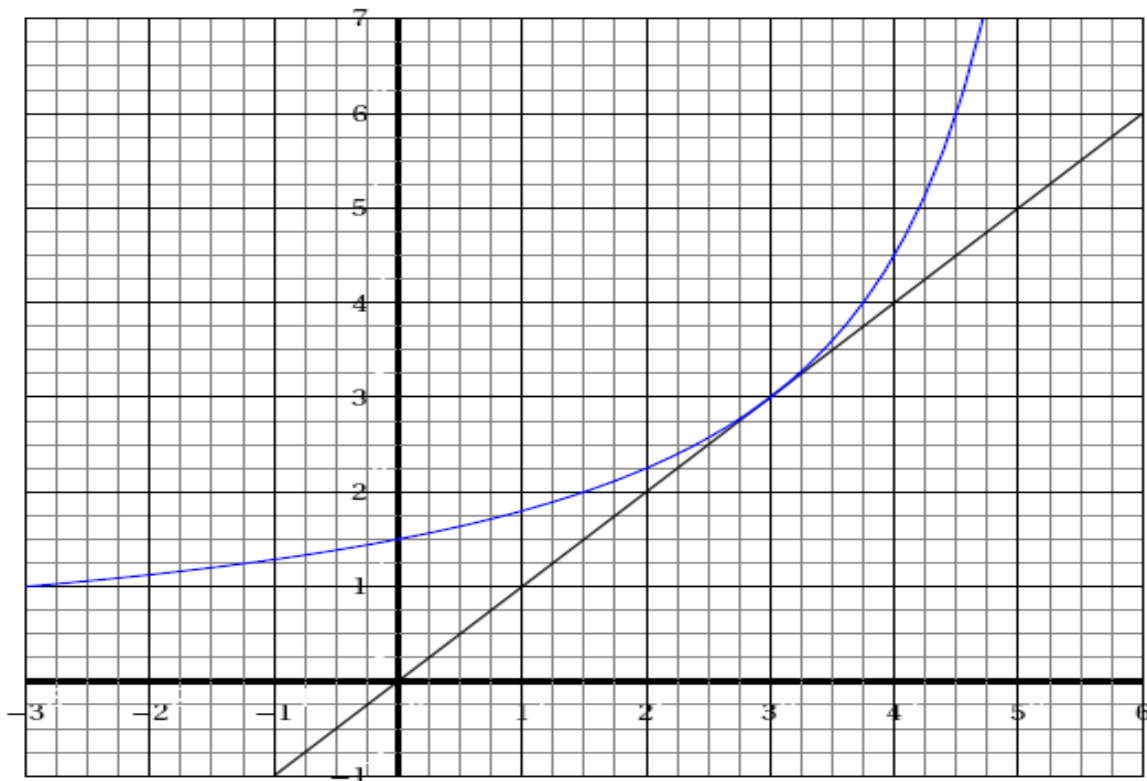
$$1) \begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = -2V_n + 5 \end{cases} ;$$

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 6[$ par $f(x) = \frac{9}{6-x}$.

On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire sur ce graphique les points $M_0(u_0;0)$; $M_1(u_1;0)$; $M_2(u_2;0)$; $M_3(u_3;0)$ et $M_4(u_4;0)$



III - SUITES ARITHMETIQUES ; SUITES GEOMETRIQUES

III – 1) Suites arithmétiques

Exercice 17

Pour chacune des affirmations suivantes, répond par vrai ou faux.

	Affirmations	Réponses
1	Si (u_n) est une suite arithmétique, de premier terme $u_1 = 2$ et de raison -5 alors $u_{40} = -198$.	
2	La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{1+3n}{4}$ est une suite arithmétique	
3	La somme des 100 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 5 est 503.	
4	Pour toute suite arithmétique on a : $u_{n+1} = u_n + u_1$.	
5	Si (u_n) est une suite arithmétique, de premier terme $u_1 = 2$ et de raison -5 alors $u_{40} = -198$.	

Exercice 18

Démontrer que la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par $U_n = 3 - 2n$ est une suite arithmétique puis définir la suite (U_n) à l'aide d'une formule de récurrence.

Exercice 19

1) Déterminer la raison r et le terme général de la suite arithmétique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sachant que :

$$U_4 = \frac{13}{2} \text{ et } U_7 = 11.$$

2) Calculer la somme des 15 premiers termes que l'on notera S .

Exercice 20

Les suites définies ci-dessous sont elles arithmétiques ? Si oui préciser pour chacune d'elle, préciser le terme initial et la raison.

$$u_n = \frac{1-n}{3} ; \quad u_n = \frac{n+1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* ; \quad u_n = n^2 ; \quad u_n = \frac{3^n}{n} ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_n = -3u_n ; n \in \mathbb{N}^* \end{cases} ; \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_n = u_n + \sqrt{2} ; n \in \mathbb{N}^* \end{cases} .$$

Exercice 21

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique définie par $u_n = 5n + 8$.

- 1) Calculer u_0 ; u_1 ; u_2 et u_{10} .
- 2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- 3) Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
- 4) Calculer la somme S des 11 premiers termes consécutifs de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 22

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite arithmétique de premier terme 2 et raison $\frac{1}{3}$.

Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12}$.

III – 2) Suites géométriques

Exercice 23

Pour chacune des affirmations suivantes, répond par vrai ou faux.

	Affirmations	Réponses
1	Pour toute suite géométrique, on a $u_{n-1} \times u_{n+1} = (u_n)^2$	
2	La somme des 100 premiers termes de la suite géométrique de premier terme -3 et de raison -2 est égale à $2^{100} - 1$.	
3	Un prix qui diminue de 5% chaque année diminue de moitié en 10 ans.	
4	Si une suite géométrique est telle que $u_{20} = 10$ et $u_{24} = 90$ alors sa raison est $\sqrt{3}$	
5	Si une suite géométrique est telle que $u_{30} = 10$ et $u_{34} = 40$ alors sa raison est $\sqrt{2}$	

Exercice 24

- 1) Démontrer que la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par $V_n = \frac{3}{7^n}$ est une suite géométrique, puis définir la suite à l'aide d'une formule de récurrence.
- 2) Calculer la somme $S' = V_2 + V_3 + \dots + V_{11}$.

Exercice 25

- 1) Déterminer la raison q et le premier terme V_0 de la suite géométrique $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sachant que $V_5 = -27$ et $V_8 = -1$.
- 2) Exprimer la somme S_n des n premiers termes en fonction de n .

Exercice 26

On donne $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

- 1) Calculer v_1 ; v_2 et v_3 .
- 2) Démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3.
- 3) Exprimer v_n en fonction de v_0 et sa raison.

EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 27

- 1) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 8$. Sachant que $u_{100} = 650$, déterminer u_0 .
- 2) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r telle que $a_{10} = 12$ et $a_{20} = -32$.

Calculer $a_{10} + a_{11} + \dots + a_{20}$.

- 3) (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$.

On sait que $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 253$. Calculer u_{10} .

- 4) On considère la suite géométrique $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $(t_0) = 1$ et de raison $q = 3$

Calculer la somme $T = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{10}$.

- 5) Calculer la valeur exacte de chacune des sommes ci-dessous :

$$s_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 2013$$

$$s_2 = 2002 + 2003 + 2004 + \dots + 9998 + 9999$$

$$s_3 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots + 4096$$

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{38}}$$

$$s_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) \text{ (Somme des } n \text{ premiers entiers naturels impairs).}$$

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad ; \quad P_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Exercice 28

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. (*unité graphique : 2cm*)

- 1) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_n = 2n + 1$.

a) Calculer les termes u_0 ; u_1 ; u_2 et u_{100} de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

c) Calculer la somme $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 1003$.

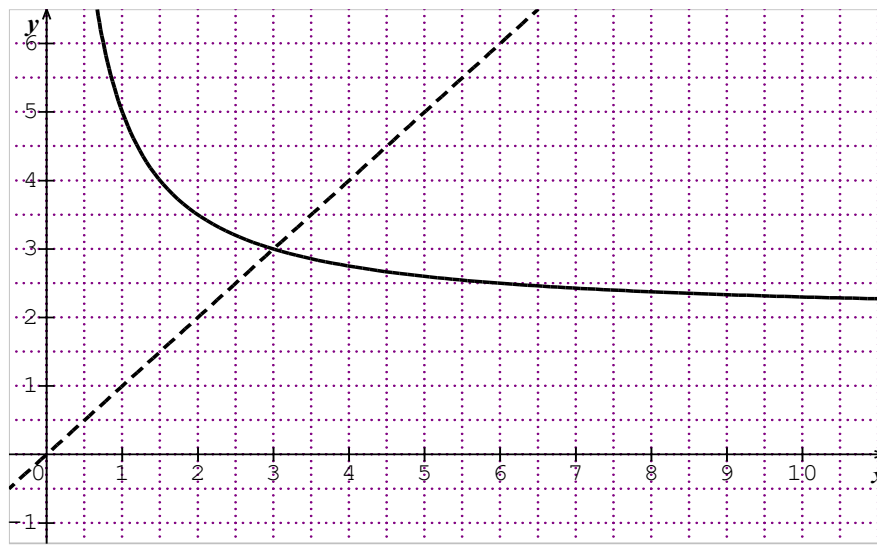
- 2) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 4 \end{cases}$$

- a) Tracer les droites (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 4$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$ et placer sur l'axe (OI) , les cinq premiers termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- b) On pose $w_n = v_n - 8$. Prouver que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Exercice 29

Soit la suite numérique U définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n}$.

- 1) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ et dont la représentation graphique (C) est donnée ci-dessous.



2. Soit V la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$.

- a) Représenter sur l'axe (OI) , les quatre premiers termes de la suite U à l'aide de la courbe (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.
- b) Démontrer que V est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
- c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{3^n} \right)$

3) Exprimer U_n en fonction de V_n puis en fonction de n .

Exercice 30

Soit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} P_0 = -2 \\ P_{n+1} = \frac{9}{6 - P_n} \end{cases}$$

- 1) Quelle est la fonction g associée à la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $P_{n+1} = g(P_n)$.
- 2) Déterminer les variations de la fonction g , puis justifier que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.
- 3) Démontrer que si $x \leq 3$ alors $g(x) \leq 3$; Et en déduire que $-3 \leq P_n \leq 3$.

On pose $Q_n = \frac{1}{P_n - 3}$. Démontrer que la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique puis donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 31

Dans un placement à intérêt simple, le capital produit le même intérêt chaque fin d'année.

Dans un placement à intérêt composé, les intérêts sont capitalisés chaque fin d'année.

Pour une somme de 1000000 F, une banque A propose un placement à intérêt avec 100000 F comme intérêt annuel et une banque B propose un placement à intérêt composé au taux annuel de 8%.

On note A_n et B_n les valeurs acquises (capital+intérêt) au bout de n années, respectivement dans les banques A et B.

1. a) Calculer A_1 et A_2
b) Justifier que (A_n) est une suite arithmétique de premier terme $A_0=1000000$ et de raison r que l'on déterminera.
c) En déduire A_n en fonction de n .
2. a) Calculer B_1 et B_2 .
b) Justifier que (B_n) est une suite géométrique de premier terme $B_0=1000000$ et de raison q que l'on déterminera.
c) En déduire B_n en fonction de n .
- 3) Un vieux paysan désire placer la somme de 1000000 F dans l'une des deux banques pour la récupérer dans dix ans. Laquelle des deux banques conseillerais-tu au « vieux père » ?

SITUATION D'ÉVALUATION

Un COGES prévoit d'équiper son école en tables-blancs et en matériels du bureau. Il s'adresse à deux entreprises A et B. Il doit choisir la moins chère. Celles-ci lui font les propositions suivantes :

- L'entreprise A propose de lui livrer le matériel mais il doit régler la dette par traites mensuelles sur trois ans. Le COGES doit leur verser, dès le premier mois 80 000F à l'accord et que chaque traite sera supérieure de 15 000F à la précédente.
- L'entreprise B quant à elle propose au COGES de livrer le matériel, selon les modalités suivantes : régler la dette par traites mensuelles sur trois ans. Il doit verser dès le premier mois 45 000F à l'accord. Pour les traites suivantes, il doit verser la valeur de la somme précédente augmentée de 10% de celle-ci jusqu'à la fin des traites.

Dans l'impossibilité de faire un choix, le président du COGES fait appel à son fils élève en classe de première. Celui-ci avec l'aide de ses camarades cherche à faire une proposition au COGES.

- 1-a) Justifie que ces traites de l'entreprise A, constituent une suite arithmétique dont on déterminera la raison.
b) Détermine le montant de la première traite.
c) Détermine le montant à payer le douzième mois.
d) Quel serait le montant à payer après les 3 ans de traites ?
- 2-a) Justifie que les traites de l'entreprise B constituent une suite géométrique dont on déterminera la raison puis détermine le montant de la première traite.
a) Détermine le montant à payer le douzième mois.
b) Quel serait le montant à payer après les 3 ans de traites ?
- 3) Détermine la proposition la moins chère.

CHAPITRE XII: COMPOSEES DE TRANSFORMATIONS DU PLAN

Situation d'apprentissage

Lors de l'exposition « Archibat » en 2015 à l'aéroport d'Abidjan, les élèves de la 1^{ère} C ont visité les stands avec leur professeur de mathématique, lui-même passionné d'architecture. Ils observent la photographie d'une maison et s'émerveillent devant la répétitions de certaines figures géométriques. Leur professeur affirme que l'architecte a utilisé une image de base et a composé deux transformations pour obtenir cette œuvre architecturale. Impressionnés par cette prouesse, les élèves décident de d'apprendre à construire l'image d'un point par la composée de deux transformations et de démontrer des propriétés en utilisant la composée de deux transformations.

I – COMPOSEES D'HOMOTHETIES ET DE ROTATIONS

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, trois réponses sont proposées.

Choisie la bonne réponse.

		A	B	C
1	Si h_1 et h_2 sont des homothéties de B et de rapports non nuls respectifs k_1 et k_2 , alors $h_1 \circ h_2$ est l'homothétie de rapport :	$k_1 + k_2$	$\frac{k_1}{k_2}$	$k_1 \times k_2$
2	Si h_1 et h_2 sont des homothéties de A et de rapports respectifs 2 et $\frac{1}{3}$, alors $h_1 \circ h_2$ est l'homothétie de rapport :	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}$	6
3	Si k est un réel non nul h_1 et h_2 sont les homothéties de centre O et de rapports respectives k et $\frac{1}{k}$, alors $h_1 \circ h_2$ est égale à :	$h_{(O,k)}$	Id	$h_{(O,\frac{1}{k})}$
4	Si r_1 et r_2 sont les rotations de centre A et d'angles orientés respectifs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$

Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, répond par vrai ou faux.

	Affirmations	Réponses
1	La transformation réciproque de l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$ est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$	
2	La transformation réciproque de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$	

3	Si h_1 et h_2 sont des homothéties, alors $h_1 \circ h_2 \neq h_2 \circ h_1$.	
---	--	--

I – 1) Utilisation des propriétés des homothéties

Exercice 3

Soit A ; B C et I quatre points deux à deux distinct du plan ; I un point du segment et C un point n'appartenant pas à la droite (AB) . On considère l'homothétie de centre I telle que $h(A) = B$. Placer le point D tel que $h(C) = D$.

Exercice 4

Soit un rectangle ABCD, E et F deux points de $[AD]$. On note h l'homothétie de centre E qui transforme A en F. Construis l'image du rectangle ABCD par h .

Exercice 5

Soit A et B deux points fixes du plan, I le milieu du segment $[AB]$. Soit M un point du plan, P le point tel que ABPM soit un parallélogramme et Q le milieu du segment $[BM]$. Déterminer l'ensemble des points Q lorsque M décrit le cercle (C) de diamètre $[AI]$.

I – 2) Composées d'homothéties

Exercice 6

E et F sont deux points du plan. On pose : $h_1 = h_{(E;2)}$ et $h_2 = h_{(F;\frac{1}{2})}$.

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_1 \circ h_2$.
- 2) On donne $h_3 = h_{(F;-\frac{3}{2})}$. Déterminer les éléments caractéristiques de $h_3 \circ h_1$.

Exercice 7

h_1 et h_2 sont deux homothéties de centre Ω et de rapports respectifs 2 et -3. Soit h l'homothétie définie par $h = h_1 \circ h_2$.

- 1) Donner le centre et le rapport de h .
- 2) Quelle est la réciproque de l'homothétie h .

Exercice 8

Soit EFGH un trapèze ; I est le milieu du segment $[EF]$ et J est le milieu du segment $[EH]$. Soit K le point d'intersection des droites (EH) et (FG) . Soit h l'homothétie de centre K qui applique le point E sur le point H. Soit h' l'homothétie qui applique le point G sur le point E et le point H sur F.

- 1) Faire une figure.
- 2) Déterminer le rapport de l'homothétie h et l'image du point F par h .
- 3) Construire le centre O de h' et déterminer le rapport k_2 de h' .
- 4) Démontrer que les points I ; J ; K et O sont alignés.

Exercice 9

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $BC = 4$ et $AC = 3$. O est un point du plan. On considère les homothéties h_1 de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$ et h_2 de centre C et de rapport -1. On pose

$$h = h_2 \circ h_1.$$

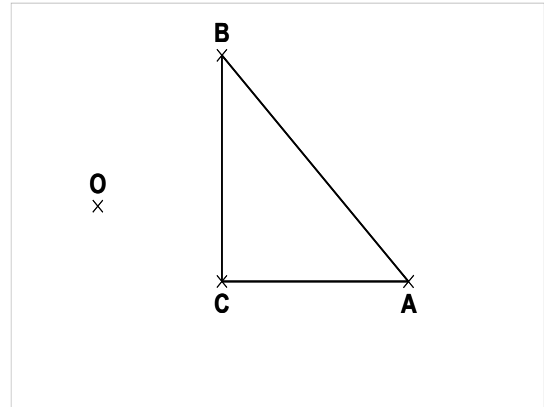
1) a- on suppose que K est un point du plan tel que $h(K) = K$. Traduire par une égalité vectorielle, chacune des égalités suivantes : $h(A) = A'$; $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$.

2) a- reproduire la figure ci-dessous, puis construire l'image du triangle ABC par h .

b- Placer le point K sur votre figure.

3) a- Démontrer que $\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ puis calculer les distances AB et A'B'.

b – Soit Δ l'aire du triangle ABC. Calculer Δ puis déduire l'aire Δ' de l'image du triangle ABC.



Exercice 10

ABCD est un parallélogramme. M est un point de la diagonale (BD). La droite (AM) coupe les droites (DC) et (BC) respectivement en P et en Q. Le but de cet exercice est de démontrer que $MA^2 = MP \times MQ$.

1) On considère par h_1 l'homothétie de centre M telle que $h_1(P) = A$ et par h_2 l'homothétie de centre M telle que $h_2(Q) = A$. Justifier que $h_1(D) = B$ et $h_2(B) = D$.

2) On pose h l'homothétie définie par $h = h_2 \circ h_1$.

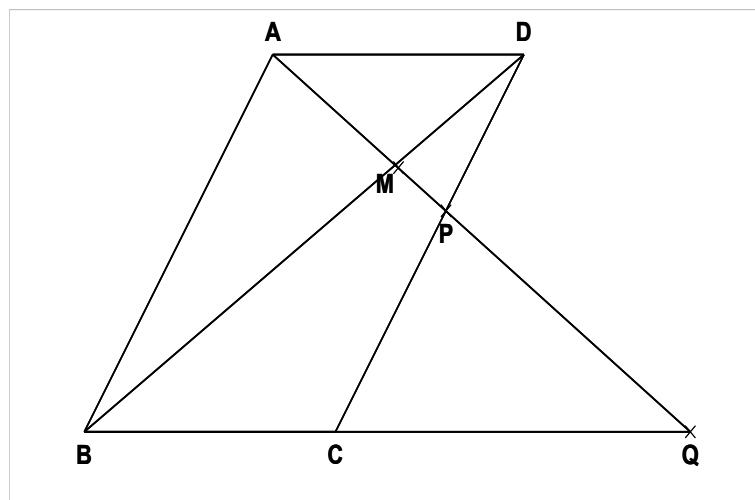
a) Quel est le centre de l'homothétie h ?

b) Vérifier que $h(D) = D$.

Quel est le rapport de l'homothétie h ?

c) En déduire que les homothéties h_1 et h_2 sont réciproques l'une de l'autre.

3) démontrer que $MA^2 = MP \times MQ$.



I -3) Utilisation des propriétés des rotations

Exercice 11

Observe la figure ci- dessous.

ABCD est un carré de centre O ; E est un point de $[AB]$

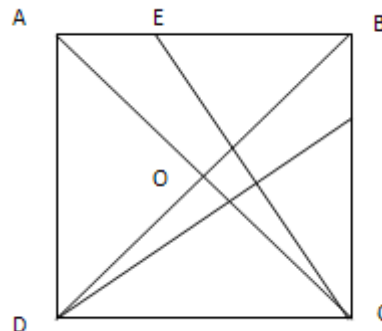
et F un point de $[BC]$ tel que $AE = BF$.

Soit $r_{\left(0; \frac{\pi}{2}\right)}$ le quart de tour direct de centre O.

1) Donner $r(B)$ et $r(E)$.

2) Justifier que $EC = DF$ et donner $Mes(\vec{EC}; \vec{DF})$.

3) En deduire que $(EC) \perp (DF)$.



I -4) Composées de rotations de meme centre.

Exercice 12

On propose la figure ci-dessous :

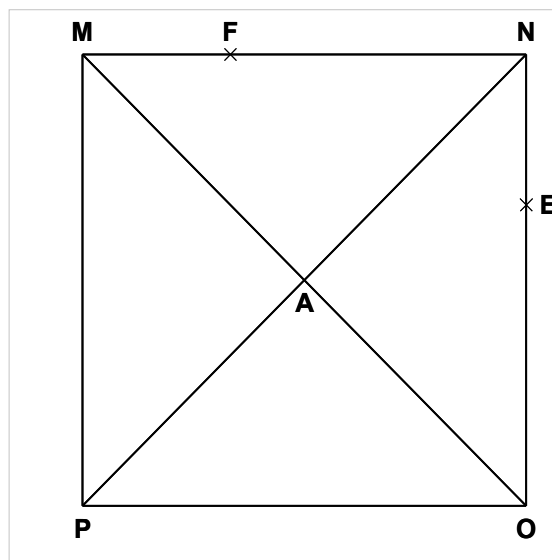
- MONP est un carré de centre A ;
- $F \in (MN)$ et $E \in (ON)$ tel que $MF = NE$

On considere r_1 la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

1) a – Justifier que le triangle MNP est isocèle rectangle en M.

b – Deduire $Mes(\vec{MN}; \vec{MP})$ puis $Mes(\vec{AM}; \vec{AN})$

et en donner la nature du triangle MAN.



2) Déterminer $r_1(M)$ puis justifier que $r_1(F) = E$.

a– Justifier que $OF = PE$.

b– Déterminer $Mes(\vec{FO}; \vec{EP})$ puis justifier que $(FO) \perp (PE)$.

c – Déduire l'image du triangle FON par la rotation r_1

3) On considere la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{3\pi}{4}$. On pose $r = r_2 \circ r_1$.

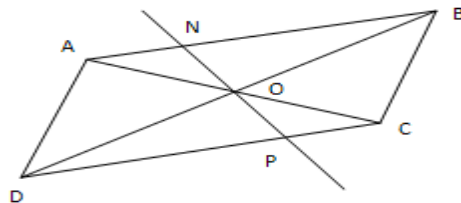
a) Donner les éléments caractéristiques de l'application r .

b) M' ; N' ; O' ; et P' sont les images respectives des points M ; N ; O et P par l'application r . Reproduire la figure et construire les points M' ; N' ; O' ; et P' .

II - COMPOSEES DESYMETRIES

Exercice 12

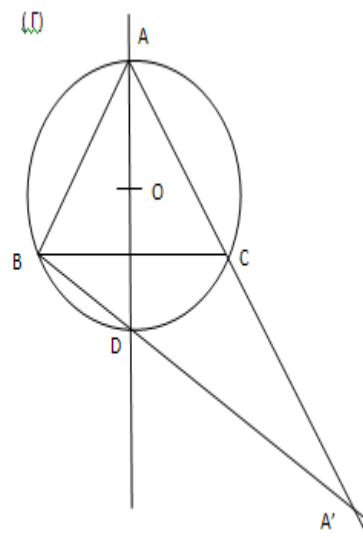
ABCD est un parallélogramme de centre O. (D) la droite passant par le point O et qui coupe le segment [AB] en N et [DC] en P. soit S_o la symétrie de centre O.



- 1) Donner par la symétrie S_o , l'image :
 - a) Du point A.
 - b) De la droite (D).
 - c) En déduire alors que $P = S_o(N)$.
- 2) Deducire de la question 1), que $AN = CP$.

Exercice 13

ABC est un triangle équilatéral direct. (Γ) est le cercle circonscrit au triangle ABC et de centre O. La médiatrice de [BC] recoupe le cercle (Γ) en D. A' est le point d'intersection de (BD) et (Γ) .

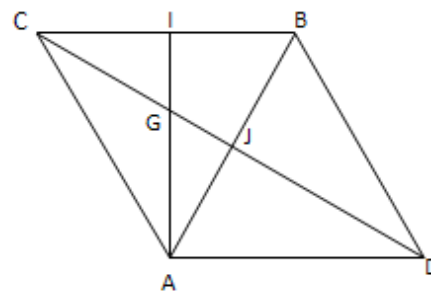


- 1) Démontrer que $A' = S_C(A)$.
- 2) Donner la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
 - a) $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$; b) $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$; c) $S_{(DC)} \circ S_{(CA)}$.
- 3) On note $f = S_{(BD)} \circ S_C \circ S_{(AB)}$.
 - a) Déterminer $f(A)$ puis la nature et les éléments caractéristiques de f .

EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 14

ABC est un triangle équilatéral de centre G et de sens direct. I et J sont les milieux respectifs des segments [BC] et [AB].



- 1) r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 est la rotation de centre G et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
 - a) Déterminer $r_2 \circ r_1(A)$ et $r_2 \circ r_1(B)$.
 - b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$.
- 2) h_1 est l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$ et h_2 est l'homothétie de centre G et de rapport -2. Déterminer et caractériser $h_2 \circ h_1$.

3) H est le centre de gravité du triangle ABD ou D est le symétrique de C par rapport à (AB).

a) Démontrer que $\overrightarrow{CH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CJ}$

b) Ecrire H comme barycentre des points A, B et C.

Exercice 15

(Γ) est un cercle de centre O. le point A est un point extérieur à (Γ).

1) Construire les tangentes (T_1) et (T_2) à (Γ) passant par A.

2) h est l'homothétie de centre A et de rapport -2.

A – Construire l'image(Γ') de (Γ) par h .

b- Démontrer que (T_1) et (T_2) sont tangentes à (Γ').

Exercice 16

On donne deux cercles disjoints (Γ) et (Φ) de centre L et K et de rayons respectifs 5cm et 2cm.

h_1 et h_2 sont les homothéties qui appliquent le cercle (Γ) sur le cercle (Φ); (h_1 étant de rapport positif et h_2 de rapport négatifs).

1) Construire le point I, centre de h_1 et le point J, centre de h_2 .

2) Calculer les rapports de h_1 et h_2 .

3) Construire les tangentes communes aux cercles (Γ) et (Φ).

Exercice 17

(C) est un cercle. A et B sont deux points du plan. I est le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du cercle (C), N est le centre de gravité du triangle ABM.

1) Prouve que $h(M) = N$ où h est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points N lorsque M décrit le cercle (C)

CHAPITRE V : STATISTIQUES

Situation d'apprentissage

L'équipe de course à pieds d'un lycée a un nouvel entraîneur. Celui-ci vient de recevoir le tableau ci-dessous indiquant le temps mis par chacun des membres de l'équipe lors de la dernière épreuve de 10 km.

Nom	Temps (en min)
Agnero	53
Aka	51
Akalé	66
Allou	63
Amani	59
Ballo	61
Camara	48
Dago	41
Ehouman	47
Fallé	46

Nom	Temps (en min)
Goly	51
Gnali	60
Kassi	49
Koffi	46
Kouamé	44
Kouman	43
Lath	52
Lamine	39
Lohess	42
Manouan	53

Nom	Temps (en min)
Pakora	51
Sery	57
Seyo	62
Tiékoura	50
Traoré	43
Vanié	47
Yao	48
Yéo	56
Zadi	49
Zatto	61

Soucieux d'améliorer les performances de l'équipe, l'entraîneur expose ses décisions suivantes à l'équipe. « Je vais vous partager en cinq équipes de niveau équivalent (selon le temps mis lors de votre dernière épreuve) et de même effectif.

Pour exposer les raisons de mon choix, je vais faire un affichage présentant une représentation graphique sous forme d'un histogramme.

Chacun des sportifs sera situé par rapport aux autres avec le classement, ainsi qu'une mise en évidence du premier quart, de la moitié et du troisième quart et des temps correspondants ».

Les élèves des classes de première D faisant partie de l'équipe sont impatients de savoir dans quelles équipes ils seront et quelle est la situation de chacun par rapport aux autres.

Ils se mettent ensemble pour répondre à ces préoccupations.

I- SERIES STATISTIQUES GROUPEES EN CLASSES

I -1) Regroupements en classes

Exercice 1

Le tableau qui suit donne les notes obtenues en mathématiques par les élèves des classes de première :

3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 17 ; 11 ; 14 ; 7 ; 8 ; 4 ; 5 ; 7 ; 4 ; 7 ; 11 ; 15 ; 13 ; 11 ; 10 ; 7 ; 8 ; 13 ; 14 ; 5 ; 9 ; 8 ; 10 ; 13 ; 5 ; 9 ; 8 ; 4 ; 11 ; 8 ; 10 ; 10 ; 14 ; 12 ; 10 ; 12 ; 13 ; 12 ; 11 ; 15 ; 3 ; 14 ; 4 ; 8 ; 9 ; 12 ; 14 ; 13 ; 11 ; 11 ; 10 ; 17 ; 16 ; 6 ; 12 ; 10 ; 15 ; 3 ; 10 ; 10 ; 16 ; 10 ; 10 ; 15 ; 11 ; 6 ; 13 ; 12 ; 4 ; 2 ; 15 ; 11 ; 13 ; 4 ; 3 ; 15 ; 11 ; 4 ; 11 ; 12 ; 4 ; 7 ; 6 ; 17 ; 3 ; 8 ; 5 ; 9 ; 13 ; 8 ; 9 ; 8 ; 10 ; 10 ; 10 ; 9 ; 13 ; 11 ; 15 ; 11 ; 10 ; 11 ; 10 ; 15 ; 9 ; 8 ; 7.

- 1) Regrouper ces notes dans les classes suivantes : $[0;8[$; $[8;10[$; $[10;12[$; $[12;15[$ et $[15;20[$
- 2) Déterminer l'amplitude, la densité et le centre de chaque classe.
- 3) Déterminer les effectifs et les fréquences de chacune des classes.
- 4) Déterminer la série des centres de classes associées.

Exercice 2

On relève la taille, en centimètres, des élèves d'une classe et on obtient :

160 – 135 – 140 – 155 – 135 – 185 – 170 – 145 – 166 – 135
155 – 170 – 135 – 153 – 172 – 163 – 149 – 154 – 184 – 170
175 – 160 – 154 – 163 – 161 – 157 – 144 – 177 – 181 – 162
180 – 140 – 166 – 173 – 174 – 138 – 169 – 159 – 162 – 155
145 – 145 – 156 – 158 – 189 – 142 – 137 – 147 – 172 – 143
185 – 180 – 150 – 162 – 153 – 171 – 168 – 182 – 139 – 171.

Regrouper les modalités en classes d'amplitudes 5, puis dresser le tableau des effectifs.

I -2) Représentations graphiques

Exercice 3

On considère la série statistique suivante :

- 1) Construire l'histogramme des effectifs de cette série.
- 2) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et déterminer la médiane.

Classe	[2 ; 5[[5 ; 9[[9 ; 13[[13 ; 16 [[16 ; 18[[18 ; 20[
Effectifs	3	7	10	4	13	6

Exercice 4

Stéphane joue sur sa console de jeu < NINTENDO > et note ses cent derniers scores, exprimés en milliers de points.

Classe	[0;30[[30;60[[60 ;80[[80 ;100[[100 ;120[[120 ;150[[150 ;180[[180 ;230[
Effectifs	5	13	16	22	17	15	10	2

- 1) Déterminer les effectifs cumulés croissants.
- 2) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et déterminer le score médian.

Exercice 5

Chez des candidats à un concours, on a relevé lors d'une visite médicale, leurs masses récapitulées dans le tableau suivant :

Masse x_i en KG	[40 ; 60[[60 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 70[
Effectif n_i	22	42	16	20

- 1) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
- 2) Déterminer graphiquement la médiane.

Exercice 6

On donne la série Statistique

Prix en milliers de francs	[6 ; 7[[7 ; 8[[8 ; 9[[9 ; 10[[10 ; 12[[12 ; 15[[15 ; 18[[18 ; 19[[19 ; 20[
Nombres de clients	1	3	8	18	20	16	9	4	1

- 1) Déterminer algébriquement la médiane.
- 2) Construire l'histogramme de cette série.

II -CARACTERISTIQUES DES SERIES REGROUPEES

(Classe modale ; Mode ; Moyenne ; Variance ; Ecart-type ; Mediane)

Exercice 7

On considère la série statistique suivante :

- 1) Déterminer le mode de cette série.
- 1) Calculer la moyenne.
- 2) Calculer la variance et l'écart type.

modalités	12	21	25	28	30	32
Effectifs	3	7	5	2	6	10

Exercice 8

Une radio FM de proximité a enquêté sur l'âge de ses auditeurs. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau ci – dessous :

Age	[5 ; 8[[8 ; 13[[13 ; 16[[16 ; 18[[18 ; 22[[22 ; 30[
Fréquences (en %)	06	12	26	30	18	08

- 1) Donner la classe modale
- 2) Déterminer l'âge médian des auditeurs de cette radio :
 - a) Par une méthode graphique
 - b) Par le calcul

Exercice 9

On considère la série statistique suivante :

- 1) Déterminer la classe modale
- 2) Calculer le mode et la moyenne de cette série.
- 3) Calculer la variance et l'écart type.
- 4) Calculer la médiane.

x_i	[-1 ; 2[[2 ; 7[[7 ; 13[[13 ; 23[[23 ; 35[
n_i	14	26	41	19	11

Exercice 10

Voici le tableau des salaires en milliers de francs de l'entreprise Ivoire 2000.

Salaire	[150 ; 200[[200 ; 300[[300 ; 450[[450 ; 650[[650 ; 950[
Effectifs	90	30	40	25	5

- 1) Déterminer la classe modale
- 2) Calculer le salaire moyen des employés de cette entreprise.
- 3) Calculer la variance et l'écart type de cette série.

Exercice 11

Le tableau suivant donne l'âge des habitants d'un échantillon de la ville d'Anyama.

Age	[0 ; 6[[6 ; 15[[15 ; 25[[25 ; 35[[35 ; 45[[45 ; 60[[60 ; 90[
Nombre	40	34	32	29	22	21	18

- 1) Construire un histogramme représentant cette série groupée.
- 2) Evaluer le nombre d'individus de cet échantillon dont l'âge :
 - a) Est compris entre 5 ans et 20 ans.
 - b) Est supérieure à 50 ans.
 - c) Est inférieure à 30 ans.
- 3) Construire le diagramme des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.

SITUATION D'ÉVALUATION

Pour écrire un article sur la scolarisation des jeunes filles dans le journal de leur école, des élèves d'une classe de 1^{ère}D demandent à un éducateur l'âge des filles et des garçons de tous les collèges et lycées de la ville. Il leur fournit le tableau ci-dessus.

Age	[11;13[[13;16[[16;17[[17;21[[21;22[
Garçons					
Files					

Pour une meilleure exploitation de ces informations, ils font des calculs et des représentations graphiques.

- 1) On note X la variable associant à chaque élève garçon son âge.
 - a) Détermine la classe modale de la série obtenue
 - b) Calcule la moyenne, la médiane, le premier quartile, le troisième quartile, la variance et l'écart type de X .
- 1) On note Y la variable associant à chaque élève fille son âge.
 - a) Détermine la classe modale de la série obtenue
 - b) Calcule la moyenne, la médiane, le premier quartile, le troisième quartile, la variance et l'écart type de X .
- 3) Trace les deux courbes cumulatives sur la même figure
- 4) Tire les conclusions.