Fomesoutra.com
ça soutra !

MATHivoire

MATHivoire

Tle D

By TEHUA

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES
Toutes les Leçons

Avant - propos

Ce document a été conçu conformément au programme officiel en vigueur en côte d'ivoire.

Cette collection est le fruit d'une longue collaboration d'une équipe de pédagogues très expérimentés.

Elle répond à plusieurs objectifs majeurs qui sont entre autres :

- ✓ Faciliter l'acquisition des savoirs et savoir-faire par les élèves ;
- ✓ Réserver un temps de travail suffisant pour la résolution des exercices en limitant le temps consacré à la copie des énoncés ;
- ✓ Former les apprenants à rédiger correctement;
- ✓ Donner aux enseignants des exemples d'exercices et de problèmes d'évaluation.

Vous trouverez dans ce document une grande variété d'exercices d'application et de fixation, des situations d'évaluation (problèmes de vie courante) ainsi que des anciens sujets de Baccalauréat.

Certains exercices sont entièrement corrigés pour servir de modèle.

Il est important de préciser que son utilisation n'est aucunement obligatoire en classe. C'est seulement un auxiliaire de travail que nous conseillons aux élèves et aux professeurs, en raison de sa simplicité et sa conformité au programme en vigueur en Côte d'Ivoire.

Nous exprimons toute notre gratitude à toutes les personnes qui par leur compréhension, leur encouragement et leur soutien moral et financier, nous ont permis de réaliser ce document.

Pour finir, nous espérons que ce document répondra au mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs (professeurs et élèves). Aussi nous remercions d'avance toutes les bonnes volontés pour leurs remarques et suggestions qui permettront d'améliorer à l'avenir le contenu et la présentation de ce document.

Les auteurs

SOMMAIRE

Leçons **Pages**

Leçon 1 : LIMITES ET CONTINUITE

Exercice 1

Répondre par Vrai (V) ou par Faux (F) aux affirmations suivantes :

	Affirmations	Réponses
1	Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)=1$	
2	Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ g(x)=1$	
3	Si une fonction n'est pas définie en un point alors elle peut toujours être prolongée par continuité en ce point	
4	Si f est une fonction continue sur un intervalle K alors elle réalise une bijection de K sur f(K).	
5	La fonction $x \mapsto x^2+1$ est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $[1; +\infty[$	

Exercice 2

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3+3x^2-x+5\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3+2x+20}{x-4}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{4x-15}{x-3}$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$ 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)$ 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-2}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(x)}{x-\dfrac{\pi}{2}}$ 10) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x+2}}$

14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}$ 15) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)^4$ 16) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x+1}-3}$ 17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{-x+1}$

18) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+\sqrt{x^2-4}\right)$ 19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\sqrt{x^2-4}\right)$ 20) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+5}{|x|-4}$ 21) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\dfrac{x^2+x-2}{|x-1|}$

Exercice* 3

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction numérique f au point a.

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x\neq 2 \\ f(2)=4 \end{cases}$ $a=2$; 2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{x} & si \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ $a=0$

3) $f(x)=\dfrac{|-x+3|}{x}$ $a=0$; 4) $f(x)=\sqrt{x-1}$ $a=1$

Corrigé de l'exercice 3

1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} x+2$ =2+2 = 4.

Or f(2) = 4. Donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Par conséquent f est continue en 2.

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$. Posons X = 2$x$; x=$\frac{X}{2}$

Quand $x \to 0; X \to 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{\frac{X}{2}} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{2\sin X}{X}$ =2, car $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ et f(0) = 0.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$. Donc f n'est pas continue en 0.

3) $f(x) = \frac{|-x+3|}{x}$. Df = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Donc f n'est pas continue en 0.

4) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x-1} = \sqrt{1-1} = 0$ et f(1)=$\sqrt{1-1} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$, par conséquent f est continue en 1.

Exercice 4

1- Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x+1}$.

a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b) f admet –elle un prolongement par continuité en -1 ? Si oui, déterminer ce prolongement.

2- On note la fonction f définie sur par : $f(x) = \frac{2x^2-x-6}{x^2-4}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) La fonction f est- elle prolongeable par continuité en 2 et en -2 ? Si oui, préciser ces prolongements.

3- Soit la fonction $h : x \mapsto \frac{\sin x - 1}{2x-\pi}$ Calculer la limite de h en $\frac{\pi}{2}$ puis en déduire la fonction k, prolongement par continuité de h en $\frac{\pi}{2}$.

4- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2+2 \text{ si } x<0 \\ f(x) = \frac{x-4}{x-2} \text{ si } x>0 \end{cases}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? si oui préciser la fonction g, prolongement par continuité en 0 de f.

Exercice*5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{4x^2-1}$ de représentation graphique (Cf) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 3x$ est asymptote oblique à (Cf.) en $-\infty$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x)+x]$ et donner une interprétation graphique du résultat.

Corrigé de l'exercice 5

$f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 3x = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 - 1} - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{4x^2 - 1} - 2x)(\sqrt{4x^2 - 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{4x^2} + 2x} = 0$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 - 1} + 2x = +\infty$.

Donc la droite (D) d'équation y = 3x est une asymptote horizontale à (Cf) en + ∞.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - (4x^2 - 1)}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}} = 0.$

Car $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - 1} = -\infty$.

Donc la droite d'équation y= -x est une asymptote horizontale à (Cf) en - ∞.

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ de représentation graphique (C_f) dans un repère orthogonal (O, I, J).

Démontrer que (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.

Exercice* 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - x^2 + 1$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

2) Vérifier que : $-1 < \alpha < 0$.

3) Déterminer un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

4) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Corrigé de l'exercice 7

f(x)= $x^3 - x^2 + 1$

1) Df= $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, f'(x) = 3x²-2x = x(3x-2).

$\forall x \in \left]-\infty; 0\right[\cup \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$ f'(x)>0

$\forall x \in \left]0; \frac{2}{3}\right[$, f'($x$)<0

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	$\frac{22}{27}$	↗	$+\infty$

•Sur $]-\infty;0[$, f est continue et strictement croissante et f($]-\infty;0[$)=] $-\infty$;1[.Or 0 $\in$] $-\infty$;1[, donc l'équation f(x)= 0 admet une seule solution dans $]-\infty;0[$.

•Sur $]0;\frac{2}{3}[$ f est continue et strictement décroissante et f($]0;\frac{2}{3}[$) =] $\frac{22}{3}$;1[or 0 $\notin$] $\frac{22}{3}$;1[donc l'équation f(x) = 0 n'admet pas de solution dans $\left[0;\frac{2}{3}\right]$.

•Sur $]\frac{2}{3};+\infty[$, f est continue et strictement croissante et f($]\frac{2}{3};+\infty[$)=] $\frac{22}{3}$; $+\infty$ [or 0 $\notin$] $\frac{22}{3}$; $+\infty$ [donc l'équation f(x) = 0 n'admet pas de solution dans $]\frac{2}{3},+\infty[$

<u>Conclusion</u> : l'équation f(x)= 0 admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty;0[$.

2) f(-1) = -1 -1 + 1 = -1
f(0) = 0 – 0 + 1 = 1
f(-1) $\times$ f(0) < 0, donc -1< α < 0.

3) Encadrement de α par la méthode de balayage.

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	………	0
f(x)	-	-	-	+	………	+

f(-0,8) $\times$ f(-0,7) < 0 donc -0,8 < α < -0,7 .

Exercice* 8

f est une fonction continue en tout point de son ensemble de définition Df , et admettant le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

1) Préciser l'ensemble de définition Df de la fonction f.
2) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants :] $-\infty$; -2] ,]0 ; 1[et]3 ;$+\infty$[.
3) Justifier que f réalise une bijection de $]-2;0]$ sur un intervalle K à préciser.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans]3 ;$+\infty$[.
5) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

<u>Corrigé de l'exercice 8</u>

1) Df = $\mathbb{R} \setminus \{0;3\}$.

2) • f($]-\infty;-2]$) = $\left[f(-2); \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[= [1;+\infty[$.

- f($]0;1[$) =] $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$; $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$ [=]$-\infty$;-3[.
- f($]3;+\infty[$) =] $\lim_{x \overset{>}{\to} 3} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ [= $]-\infty;+\infty[$.

3) Sur $]-2;0]$ f est continue et strictement croissante.

f($]-2;0]$)=] $\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x)$; $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ [= $]1;+\infty[$ donc

f réalise une bijection de $]-2;0]$ sur $]1;+\infty[$.

4) Sur $]3;+\infty[$ f est continue et strictement croissante.

$f(\,]3;+\infty[\,) = \,]-\infty;+\infty[$. Or 0 $\in$ $]-\infty;+\infty[$, donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans $]3;+\infty[$.

5) *Signe de f(x).*

Sur $]-\infty;0[$, 1 est le minimum de f et 1>0, donc
$\forall x \in \,]-\infty;0[$, f(x) > 0.

Sur $]0;3[$, -3 est le maximum de f et -3<0, donc
$\forall x \in \,]0;3[$, f(x) < 0.

Sur $]3;+\infty[$ f est continue et strictement croissante et
f(α) = 0 avec α $\in$ $]3;+\infty[$ .donc $\forall x \in \,]3;\alpha[$,f(x) < .f(α)
et $\forall x \in \,]\alpha;+\infty[$ f(x) > f(α).

Conclusion : $\forall x \in \,]-\infty;0[\, \cup \,]\alpha;+\infty[$ f(x) > 0 et
$\forall x \in \,]0;3[\, \cup \,]3;\alpha[$,f(x) < 0.

Exercice 9

Soit f la fonction définie de ℝ vers ℝ par $g(x) = -2x^3 - 4x + 3$.

1- Montre que g réalise une bijection de $]-\infty\,;1[$ sur l'intervalle que l'on précisera.

2- Démontre que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique $\alpha \in \,]0\,;1[$.

3-Donne un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.

Exercice 10

Soit f la fonction définie de ℝ vers ℝ par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). Unité : 1 cm.

1- Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat.

2-Justifier que la restriction g de f à $]-1;+\infty[$ détermine une bijection de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle J à Déterminer.

3-Soit g^{-1} la bijection réciproque de g et (Γ) sa représentation graphique, dresser le tableau de variations de g^{-1}.

4-Déterminer la formule explicite de g^{-1}.

5-Construire $(\mathcal{C})$ et (Γ) dans le repère (O,I,J).

Exercice 11

Ecrire chacun des nombres réels ci-dessous sous la forme a^p , a étant un entier naturel et p un nombre rationnel.

$\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[4]{6^{12}}$; $\frac{5}{\sqrt[3]{25}}$; $\sqrt[5]{3^4}\left(\sqrt[5]{3^3}\right)^5$; $\left(2^3\right)^3\left(\sqrt[4]{2^2}.\sqrt[3]{2^4}\right)$; $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[5]{3}\times\sqrt{81}}$

Exercice 12

Résoudre dans ℝ

(E_1) : $x\sqrt{x} = 8$; (E_2) : $x^{\frac{1}{2}} - 9x^{\frac{1}{4}} + 8 = 0$; (E_3) : $\left(x\sqrt[3]{x}\right)^2 = 6561$.

Leçon 2 : PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALEATOIRE

Exercice* 1

A et B sont deux événements correspondants à une même épreuve aléatoire.

On sait que $p(A) = 0,6$; $p(B) = 0,5$; $p(A \cap B) = 0,18$

Déterminer : $p(\overline{A})$; $p_A(B)$; $p_A(\overline{B})$; $p(\overline{A} \cap B)$; $p_{\overline{A}}(B)$; $p_{\overline{A}}(\overline{B})$; $p_B(\overline{A})$.

(*On pourra s'aider d'un arbre de probabilité)*

Corrigé de l'exercice 1

• $\cdot P(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,6 = 0,4$

• $\cdot P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,18}{0,6} = 0,3$

• $\cdot P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,3 = 0,7$

• $P(\overline{A} \cap B)$

On a : $P(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

Donc $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(B \cap A)$

$p(\overline{A} \cap B) = 0,5 - 0,18 = 0,32$

• $\cdot P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,32}{0,4} = 0,8$

• $\cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0,8 = 0,2$

• $\cdot P_B(\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(B)} = \dfrac{0,32}{0,5} = 0,64$

Exercice 2

Une réunion rassemble 20 personnes : 12 femmes et 8 hommes. On sait que 20% des femmes fument ainsi que 40 % des hommes.

a. Une personne quitte la réunion. Quelle est la probabilité que cette personne soit occupée à fumer ?

b. Une personne quitte la réunion en fumant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ?

Exercice* 3

Dans un village 80% de la population a été vaccinée contre une maladie. Une enquête a révélé les résultats suivants :

15% de la population vaccinée a la maladie.

40% de la population non vaccinée a la maladie.

On choisit au hasard une personne dans le village et on considère les événements suivants :

V : « La personne choisie a été vaccinée ».

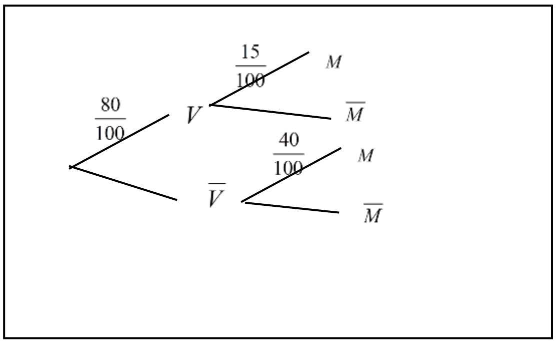
M : « La personne choisie a la maladie »

1) a) Déterminer les probabilités : $P(V)$ et $P_V(M)$.

b) Déterminer $P(V \cap M)$, $P(\overline{V} \cap M)$ et en déduire que $P(M) = \dfrac{1}{5}$.

2) Une personne choisie au hasard est malade. Déterminer la probabilité qu'elle soit vaccinée.

Corrigé de l'exercice 3



1)a) $\cdot P(V)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$, $\cdot P_V(M)=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$

b) $.P(V\cap M)=P(V)\times P_V(M)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{20}=\frac{3}{25}$

$.P(\overline{V}\cap M)=P(\overline{V})\times P_{\overline{V}}(M)=\frac{20}{100}\times\frac{40}{100}=\frac{2}{25}$

$p(M)=p(M\cap V)+p(M\bigcap\overline{V})=\frac{3}{25}+\frac{2}{25}=\frac{1}{5}.$

2) IL s'agit de la probabilité de l'évènement V sachent M

Donc $P_M(V)=\dfrac{P(M\cap V)}{P(M)}=\dfrac{\frac{3}{25}}{\frac{1}{5}}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$

Exercice 4

Un collectionneur de pièces de monnaie a observé que ses pièces peuvent présenter au maximum deux défauts notés a et b. Il prélève au hasard une pièce dans sa collection.

On note A l'événement « une pièce prélevée au hasard dans la collection présente le défaut a »

On note B l'événement « une pièce prélevée au hasard dans la collection présente le défaut b »

On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les événements contraires respectives de A et B. On donne les probabilités suivantes : $P(A)=0,2$ $P(B)=0,1$ et $P(AUB)=0,25$.

I. On note E l'événement « une pièce prélevée au hasard dans la collection présente les deux défauts et F l'événement « une pièce prélevée au hasard dans la collection ne présente aucun des deux défauts »

1- Exprimer E en fonction des événements A et B et calculer la probabilité de E.

2- Démontre que la probabilité de l'événement F est égale à 0,75 .

3- Les événements A et B sont ils indépendants ? Justifier votre réponse.

4- le collectionneur prélève au hasard une pièce parmi celles qui présentent le défaut b. Calculer la probabilité que cette pièce présente le défaut a.

5- Le collectionneur prélève au hasard une pièce parmi celles qui ne présentent pas le défaut b. Calculer la probabilité que cette pièce présente le défaut a. (*On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible*)

II. On prélève au hasard trois pièces dans la collection et on suppose que le nombre de pièces de collection est suffisamment grand pour considérer ces trois prélèvements comme étant indépendants.

1- Calculer la probabilité qu'une seule des trois pièces soit sans défaut.

2- Calculer la probabilité qu'au moins une des trois pièces soit sans défaut.

Exercice *5

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs.

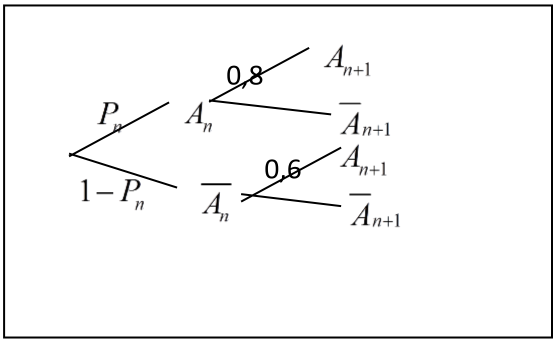
Les expériences précédentes ont montrer que :

- S'il arrête le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité qu'il arrête le suivant est 0,8.
- S'il n'arrête pas le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité qu'il arrête le suivant est 0,6.

La probabilité qu'il arrête le premier tir est 0,7. On note A_n l'événement :
« le gardien arrête le $n^{ième}$ tir » et P_n sa probabilité.

1. Donner les valeurs de $P(A_1)$, $P(A_{n+1}/A_n)$, $P(A_{n+1}/\overline{A_n})$.
2 .Calculer $P(A_{n+1} \cap A_n)$ en fonction de P_n.
3. Démontrer que $P_{n+1} = 0,2\, P_n + 0,6$.
4. Un spectateur arrive juste au deuxième tir qui est arrêté par le gardien.
Quelle est la probabilité pour que le premier tir soit arrêté avant son arrivée ?

Corrigé de l'exercice 5



1. $P(A_1) = 0,7$

$P(A_{n+1}/A_n) = 0,8$ et $P(A_{n+1}/\overline{A_n}) = 0,6$

2. $P(A_{n+1} \cap A_n) = P(A_n) \times P(A_{n+1}/A_n) = P_n \times 0,8$

$P(A_{n+1} \cap A_n) = 0,8P_n$

3. $P_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$

$= 0,8P_n + P(\overline{A_n}) \times P(A_{n+1}/\overline{A_n})$

$= 0,8P_n + (1-P_n) \times 0,6$

$= 0,8P_n + 0,6 - 0,6P_n$

$P_{n+1} = 0,2P_n + 0,6$

4. Il s'agit de la probabilité de l'évènement A_1 sachant A_2.

$$P(A_1/A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_2)}$$

Or $P(A_2 \cap A_1) = 0,8 \times P_1 = 0,8 \times 0,7 = 0,56$

$P(A_2) = 0,2P_1 + 0,6 = 0,2 \times 0,7 + 0,6 = 0,74$

Donc $P(A_1/A_2) = \dfrac{0,56}{0,74} = \dfrac{28}{37}$

Exercice* 6

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement deux jetons rouges et huit (8) jetons verts indiscernables au toucher et d'autre part un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est rouge, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est vert, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

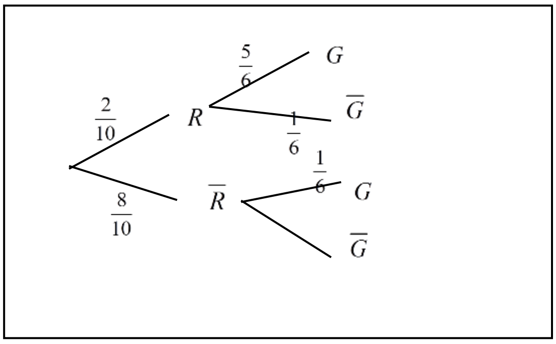
Soit R l'évènement " le jeton tiré est rouge " et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ».
L'évènement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\text{E}}$.
La probabilité d'un événement E sera notée p(E).

1. Montrer que p(G) = $\dfrac{3}{10}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton rouge sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
   Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut.
4. Un joueur fait *n* parties de façon indépendantes ($n \geq 2$).

   a) Démontrer que la probabilité pour que le joueur gagne au moins une partie est $p_n = 1 - (0,7)^n$.

   b) Déterminer le nombre minimal *n* de parties pour que p_n soit supérieure à 0,99.

<u>Corrigé de l'exercice 6</u>



1. $P(G) = P(G \cap R) + P(G \cap \overline{R})$

Or $P(G \cap R) = P(R) \times P_R(G) \quad = \dfrac{2}{10} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{10}{60}$

$P(G \cap \overline{R}) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(G) \quad = \dfrac{8}{10} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{8}{60}$

Donc $P(G) = \dfrac{10}{60} + \dfrac{8}{60} = \dfrac{3}{10}$

2. IL s'agit de la probabilité de l'évènement
R Sachant G

$$P_G(R) = \frac{P(G \cap R)}{P(G)} = \frac{\frac{10}{60}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{9}$$

3. IL s'agit d'un schéma de Bernoulli.
L'évènement considéré comme succès est G.
La probabilité d'avoir exactement deux succès
est : $P_2 = C_4^2 P(G))^2 (1 - P(G))^{4-2}$

$$P_2 = C_4^2 (\frac{3}{10})^2 (\frac{7}{10})^2 = \frac{1323}{5000} = 0,264$$

4.a) IL s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètre n et $\dfrac{3}{10}$.

Soit q_n la probabilité de gagner aucune partie sur les n

$q_n = C_n^0(\frac{3}{10})^0(1-\frac{3}{10})^n = (\frac{7}{10})^n$

Donc $P_n = 1 - q_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n = 1-(0,7)^n$

b) $P_n \geq 0,99 \Leftrightarrow 1-(0,7)^n \geq 0,99$

$\Leftrightarrow -(0,7)^n \geq 0,99-1$

$\Leftrightarrow -(0,7)^n \geq -0,01$

$\Leftrightarrow (0,7)^n \leq 0,01$

$\Leftrightarrow n\ln(0,7) \leq \ln(0,01)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)}$

$\Leftrightarrow n \geq 12,91$

le nombre minimal n est donc 13.

<u>Exercice *7</u>

Une urne est composée de 4 boules noires ,3 boules blanches et 5 boules rouges toutes indiscernables au toucher.

I. On tire successivement sans remise trois boules et on observe les couleurs tirées.

1) Justifier qu'il y a 1320 tirages possibles.
2) Calculer la probabilité d'avoir une seule boule noire parmi les trois boules tirées.

II. Un jeu consiste à miser une somme S et à tirer simultanément 3 boules de l'urne.

1) Justifier qu'il y a 220 tirages possibles.
2) Une boule rouge fait gagner 200 f et toute autre boule fait perdre 100f. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le gain algébrique du joueur. C'est-à-dire la différence entre la somme totale reçue et la somme misée par le joueur.
   a) Justifier que les valeurs prises par X sont :500-S ; 300-S. -S et -300-S
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Déterminer S pour que le jeu soit équitable.
   d) Pour S=100 f , déterminer et représenter la fonction de répartition F.

<u>Corrigé de l'exercice 7</u>

I- 1) Un tirage est un arrangement de 3 éléments pris parmi les 12. Donc le nombre de tirages possibles est $A_{12}^3 = 1320$

2) Soit Ω l'univers des éventualités,

Card $\Omega = 1320$

Soit A l'événement : « Avoir une seule boule noire parmi les 3 »

La seule boule noire peut occuper le 1er rang, le 2è rang ou le 3e rang et les deux autres boules occupent les deux autres places.

Card $A = \left(A_4^1 \times A_8^2\right) \times 3 = 672$

Donc $P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{672}{1320} = \frac{28}{55}$

II- 1) Un tirage est une combinaison de 3 élément pris parmi les 12.

Donc le nombre de tirages possibles est $C_{12}^3 = 220$.

2)a) .•Si on tire 0 boule rouge parmi les 3.

$X = 0 - 300 - S = -300 - S$

. •Si on tire une boule rouge parmi les 3.

$X = 200 - 200 - S = -S$

. •Si on tire deux boules rouges parmi les 3.

$X = 400 - 100 - S$ =300-S

. •Si on tire 3 boules rouges

$X = 600 - S$

Donc les valeurs prises par X sont :

$300 - S$; $100 - S$; $-100 - S$ et $-300 - S$.

b) Loi de probabilité de X .

$$P(X = 300 - S) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}$$

$$P(X = 100 - S) = \frac{C_5^2 \times C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{7}{22}$$

$$P(X = -100 - S) = \frac{C_5^1 \times C_7^2}{C_{12}^3} = \frac{21}{44}$$

$$P(X = -300 - S) = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{7}{44}$$

x_i xxi	$-300 - S$	$-S$	$300 - S$	$600 - S$
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

c) Le jeu est équitable si $E(X) = 0$

$$E(X) = \frac{7}{44}(-300 - S) + \frac{21}{44}(-S)$$

$$+\frac{7}{22}(300 - S) + \frac{1}{22}(600 - S)$$

$E(X) = -S + 75.$ $E(X) = 0 \Leftrightarrow S = 75$

Donc le jeu est équitable si $S = 75.$

d) Pour $S = 100F$, Soit F la fonction de répartition de X . F est définie de $\mathbb{R}$ vers $[0;1]$ Par :

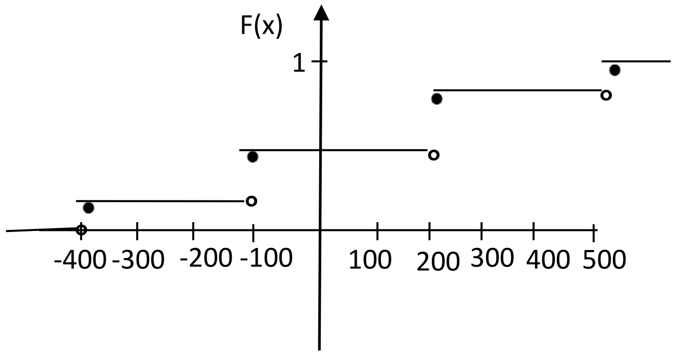
$\forall x \in]-\infty; -400[; F(x) = 0$

$\forall x \in [-400; -100[\; ; F(x) = \frac{7}{44}$

$\forall x \in [-100; 200[; F(x) = \frac{7}{44} + \frac{21}{44} = \frac{7}{11}$

$\forall x \in [200; 500[\; ; \; F(x) = \frac{7}{11} + \frac{21}{22} = \frac{21}{22}$

$\forall x \in [500; +\infty[\; ; \; F(x) = 1$



Exercice 8

Un jeu de loterie dispose de deux urnes **1** et **2** contenant chacune 20 billets.

- Dans l'urne **1**, il y a 12 billets gagnant 500f chacun et 8 gagnant 1000f chacun.
- L'urne **2** contient 14 billets gagnant 500f chacun et 6 billets gagnant 1000f chacun.

La règle de jeu est la suivante : Le joueur tire un billet dans l'urne **1** :

-S'il obtient un billet gagnant 1000f, il tire un autre billet dans l'urne **2** et la partie s'arrête.

-S'il obtient un billet de 500f, il le remet dans l'urne **1** et tire un second billet dans la même urne **1** et la partie s'arrête.

I - *(l'on pourra utiliser un arbre de probabilité).*

1) Déterminer la probabilité pour que le joueur gagne 1500f à l'issue d'une partie sachant qu'il a obtenu un billet gagnant 500f au premier tirage.

2) On note les évènements suivants : A « A l'issue de la partie, le joueur obtient 2000f »
B « A l'issue de la partie le joueur obtient 1500f »

Montrer que $P(A)=\frac{3}{25}$ et $P(B)=\frac{13}{25}$.

II Pour une partie de jeu, le joueur doit miser 1000f.

-si le joueur tire 2 billets gagnant1000f chacun, il reçoit le montant des deux billets tirés et l'organisateur lui rembourse sa mise.

-Si le joueur tire un billet gagnant1000f et un billet gagnant 500f, il reçoit le montant des deux billets tirés mais perd la mise.

-Dans les autres cas, le joueur ne gagne rien.

Soit X la valeur aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1- Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

2- Déterminer l'espérance mathématique E(X) de la variable X puis interpréter le résultat.

3-Définir la fonction de répartition F de la variable X puis la représenter graphiquement.

III- Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes ***(**n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2**)**.*

1-Démontrer que la probabilité p_n qu'il tire au moins une fois un billet de l'urne 2 est $p_n = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

2- Quelle est la plus petite valeur n_0 de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,99$.

Exercice 9

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8 ; on ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1- Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.

2- Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.

3- On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

4- On contrôle 5 individus au hasard.

a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.

b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

5- On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier naturel non nul). Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur 0,98.

Exercice 10

Soit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

$X = x_i$	-3	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	a	0,2	0,45	b	0,05

1- Calculer l'espérance mathématique E(X) en fonction des nombres réels a et b.

2- Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles l'espérance mathématique E(X) est nulle.

3-Pour la suite on prendra : a = 0,25 et b = 0,05

a- Calculer l'écart type σ(X) de la variable aléatoire X.

b- Définir la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

Exercice 11

Un jeu consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte six portes de sortie, numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la porte franchie par la bille. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
P(X= x_i)	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

La règle du jeu est la suivante : Un joueur mise une somme S ; Il reçoit 6000 F si la bille franchit les portes 1 ou 6 ; 2000F si elle franchit les portes 3 ou 4, les portes 2 et 5 ne rapportent rien.

Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise.

Soit Y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur dans une partie

1 - Quelles sont les valeurs prises par Y ?

2 – Déterminer la loi de probabilité de Y.

3- Démontrer que l'espérance mathématique de Y est : E(Y)= $-$ S + 1625.

4 – Déterminer S pour que le jeu soit équitable.

5 – Déterminer les valeurs de S pour lesquelles le jeu est favorable au joueur.

Exercice 12

Le but de cet exercice est de déterminer lesquels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.

On suppose qu'un avion s'écrase dès que plus de la moitié de ses moteurs tombent en panne.

Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Soit p la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne.

***Partie* A**

Dans cette partie $p = 0{,}1$.

1) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

2) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait tous ses moteurs en panne.

3) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne.

4) En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

***Partie* B**

1) Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

Démontrer que : $f(p) = p^2$.

2) Soit g(p) la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Démontrer que : g(p) $= p^2(-3p^2 + 4p)$.

3) On pose $h(p) = f(p) - g(p)$.

a) Etudier le signe de $h(p)$ en fonction de p.

b) En déduire en fonction des valeurs de p, dans quels avions il vaut mieux monter.

Exercice 13

Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation d'une valeur de 120.000 francs CFA.

Au vu de son expérience le commercial estime que :

▪ la probabilité que le premier client visité achète le produit est égale à 0,25 ;

▪ si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,4 ;

▪ si le premier client n'achète pas le produit, la probabilité que le second l'achète est égale à 0,25.

On note les événements A : « le premier client achète le produit » et B:« le deuxième client achète le produit ».

1. Calculer la probabilité de l'événement B.

2. Quelle est la probabilité qu'un seul client conclut l'achat ?

3. Justifie que la probabilité que les deux clients visités achètent le produit est égale à 0,1.

4. Le commercial perçoit 10% sur le total de sa vente. Soit X la variable aléatoire égale au gain de la journée.

a) Justifie que les valeurs prises par X sont : 0 ; 12.000 et 24.000.

b) Etablie la loi de probabilité associée à X.

c) Calcule l'espérance mathématique de X ?

5. On considère sur n jours ($n \in \mathbb{N}^*$) la vente réalisée par ce commercial et on note Y le nombre fois où les deux clients visités achètent le produit.

a) Calcule l'espérance mathématique et la variance de Y.

b) Justifie que la probabilité P_n que les deux clients achètent le produit au moins une fois est $P_n = 1 - (0,9)^n$.

c) Détermine la valeur minimale de n pour que P_n soit supérieure ou égale à 0,9.

Exercice 14

Un lycée compte 660 élèves. La fréquentation mensuelle du CDI (Centre de Documentation d'Information) suivant les niveaux est donnée par le tableau suivant.

Niveaux	Seconde			Première				Terminale			
Nombre de visites mensuelles	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3
Effectifs	56	140	84	10	60	70	60	18	70	38	54

1- (*les résultats seront donnés sous forme fractions irréductibles*).

On interroge un élève choisi au hasard et on considère les évènements suivants :

A « L'élève est en terminale » ;

B « L'élève vient une fois par mois au CDI » ;

C « L'élève est en terminale et vient une fois par mois au CDI ».

a) Calculer $P(A)$.

b) Justifier que $P(B) = \frac{9}{22}$.

c) Calculer $P(C)$.

d) L'élève choisi est l'un de ceux qui viennent une fois par mois au CDI. Quelle est la probabilité qu'il soit en terminale ?

2- (*Les résultats seront donnés sous forme d'arrondi d'ordre 2*).

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de visites mensuelles au CDI d'un élève du lycée.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer $E(X)$.

3- a) On choisit au hasard 10 élèves de cet lycée. Calculer la probabilité pour que parmi les élèves choisis, exactement 2 se rendent une fois par mois au CDI.

b) Sur les 10 élèves choisis, en moyenne combien se rendent-ils une fois par mois au CDI ?

Exercice 15

Dans une région de la Côte d'Ivoire, la probabilité qu'il ait une bonne pluviométrie dans l'année est de 0,6.
Lorsque la pluviométrie est bonne, la probabilité d'avoir une bonne récolte sur une parcelle de riz est de 0,9
En revanche lorsque la pluviométrie n'est pas bonne, la probabilité d'avoir une bonne récolte sur une parcelle de riz est de 0,2.

On considère les événements A ≪ *la puviométrie est bonne* ≫ et B ≪ *la récolte est bonne* ≫.

1. a) Donne chacune des probabilités suivantes: $P(A)$, $P(A)$ et $P_{\overline{A}}(B)$.

b) Démontre que : $P(B) = 0,62$.

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront donnés sous forme d'arrondi d'ordre 2

2. Dans cette région, en 2019, la coopérative BADEYA fait trois parcelles de riz.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de parcelles de riz ayant une bonne récolte.

a) Détermine la loi de probabilité de X.

b) Calcule la probabilité que la coopérative ait exactement deux parcelles de riz ayant une bonne récolte.

c) Calcule l'espérance mathématique de X.

3. En 2020, la coopérative souhaite augmenter à n le nombre de parcelles de riz.

a) Calcule la probabilité P_n d'avoir au moins une parcelle ayant une bonne récolte.

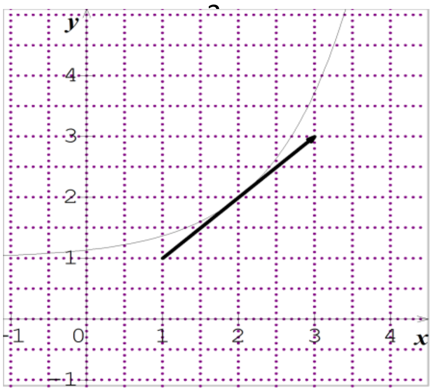
b) Détermine la valeur minimale de n pour que P_n soit supérieure à 0,99.

Leçon 3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTION

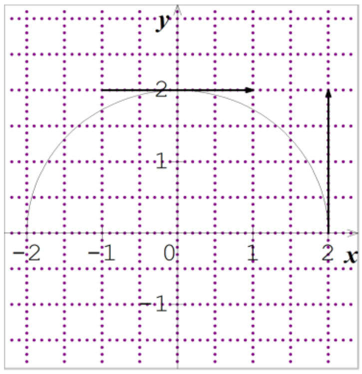
Exercice * 1

Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction f dont la courbe est donnée , est dérivable au point a .

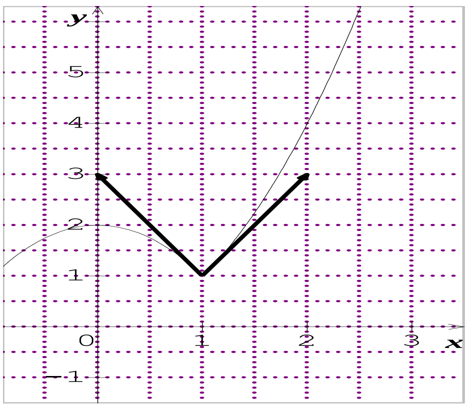
(1) a = 2



(2) a = 2 et a = 0

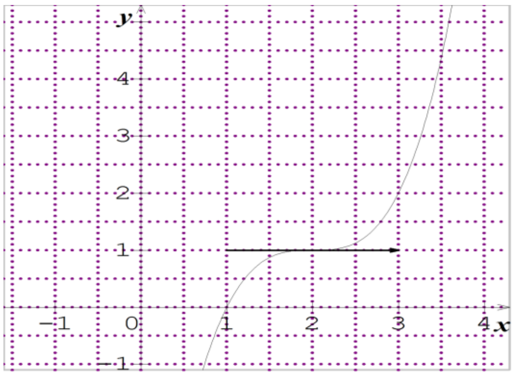


(3)



a =1

(4)



a = 2

Corrigé de l'exercice 1

1) f est dérivable en 2.

2) f est dérivable en 0 et non dérivable en 2.

3) f n'est pas dérivable en 1.

4) f est dérivable en 2.

Exercice *2

Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction numérique g dans chacun des cas suivants :

1) $g(x)=\sqrt{x^2-3}$; 2) $g(x)=\sin\left(x^3-2\right)$; 3) $g(x)=x\sqrt{2-x^2}$; 4) $g(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$;

5) $g(x)=\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}$; 6) $g(x)=\left(2-\sin(5x)\right)^3$; 7) $g(x)=\dfrac{1}{\tan x}$.

Corrigé de l'exercice 2

Déterminons la fonction dérivée g' de la fonction numérique g dans chacun des cas suivants :

1) $g'(x) = \left(\sqrt{x^2-3}\right)' = \dfrac{(x^2-3)'}{2\sqrt{x^2-3}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}$.

2) $g'(x) = \left(\sin\left(x^3-2\right)\right)' = \left(x^3-2\right)'\left(\cos(x^3-2\right) = 3x^2\left(\cos(x^3-2\right)$.

3) $g(x) = (x\sqrt{2-x^2})' = x'\sqrt{2-x^2} + x(\sqrt{2-x^2})' = \sqrt{2-x^2} + x(\dfrac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}) = \sqrt{2-x^2} + x(\dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}})$

$= \sqrt{2-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \dfrac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}$.

4) $g'(x) = (\cos(\frac{\pi}{x}))' = -(\frac{\pi}{x})'(\sin(\frac{\pi}{x})) = (\frac{\pi}{x^2})\sin(\frac{\pi}{x})$.

5) $g'(x) = (\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}})' = \dfrac{(\dfrac{2+x}{1-x})'}{2\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}} = \dfrac{\dfrac{3}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}}$

$= \dfrac{3}{2(1-x)^2\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}}$

6) $g'(x) = \left[\left(2-\sin\left(5x\right)\right)^3\right]' = 3\left(2-\sin\left(5x\right)\right)'\left(2-\sin\left(5x\right)\right)^2 = 3(-5\cos\left(5x\right))\left(2-\sin\left(5x\right)\right)^2$

$= -15\cos\left(5x\right)\left(2-\sin\left(5x\right)\right)^2$

7) $g'(x) = (\dfrac{1}{\tan x})' = \dfrac{-(\tan x)'}{(\tan x)^2} = \dfrac{-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Exercice 3

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt{x}\,(2x-1)$ 2) $f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2x}{x+1}$ 3) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1 + 2\sqrt{x^2+1}$

4) $f(x) = \frac{1}{2}(-1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$ 5) $f(x) = (2x-1)^3$ 6) $f(x) = -\frac{x^2+1}{3}$

Exercice* 4

Pour chacun des cas suivants, étudier la continuité et la dérivabilité de f au point a indiqué, et donner si possible une interprétation graphique (*dans un repère orthogonal (O, I, J)*).

1) $\begin{cases} f(x) = -x^3 - 4 & si \ \ x < 0 \\ f(x) = 2\sqrt{3x+9} & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$ $a = 0$; 2) $\begin{cases} f(x) = x^2 & si \ x \in \left]-\infty;1\right] \\ f(x) = \dfrac{1}{x} & si \ x \in \left]1;+\infty\right] \end{cases}$ $a = 1$

3) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ $a = -1$; 4) $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x+1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ a = 0.

Corrigé de l'exercice 4

1) • continuité

$Df = \mathbb{R}$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -0^3 - 4 = -4$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 2\sqrt{3x+9} = 2\sqrt{3\times 0+9} = 6$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$. Donc f n'est pas continue en 0.

• Dérivabilité

f n'est pas continue en 0 donc f n'est pas dérivable en 0.

2) •continuité

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x^2 = 1^2 = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$ et $f(1) = 1^2 = 1$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)$. Donc f est continue en 1.

•Dérivabilité

$$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x+1 = 1+1 = 2.$$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} -\frac{1}{x} = -1$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ Donc f n'est pas dérivable en 1.

•<u>Interprétation graphique</u>.

La courbe représentative de f admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 1.

3) •Continuité

$Df =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \sqrt{x^2-1} = \sqrt{(-1)^2-1} = 0$

$f(-1) = \sqrt{(-1)^2-1} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = f(-1)$. Donc f est continue en – 1.

•Dérivabilité

$$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{(\sqrt{x^2-1})^2}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x-1)\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty. \text{ Car } \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x-1) = -2 \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty.$$

Donc f n'est pas dérivable en -1.

- **Interprétation graphique** :

La courbe représentative de f dans un repère orthogonal admet une tangente verticale au point d'abscisse -1.

4) • Continuité

$Df = [-1;+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} x\sqrt{x+1} = 0\times\sqrt{0+1} = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 1-\dfrac{1}{x+1} = 1-\dfrac{1}{0+1} = 0 \qquad f(0) = 1-\dfrac{1}{0+1} = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0)$, donc f est continue en 0.

•Dérivabilité

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{x\sqrt{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+1} = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1-\dfrac{1}{x+1}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x+1} = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

Exercice 5

Soit f et g des fonctions numériques définies par : $f(x) = 2x^n \quad (n\in\mathbb{N})$ et $g(x) = \dfrac{-3}{x+1}$

1. Déterminer $f'(x)$; $f''(x)$; $f^{(3)}(x)$ (*en fonction de n*).
2. Déterminer $g'(x)$; $g''(x)$ et $g^{(3)}(x)$.

Exercice 6

Soit la fonction h deux fois dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Justifie que la courbe de h admet un point d'inflexion et détermine-le

Exercice 7

On considère la fonction f deux fois dérivable et définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$

Démontre que la courbe de f est au-dessus de sa tangente en tout point.

Exercice 8

Démontre en utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis que :

1) pour tout réel x, on a : $|\sin x| \leq |x|$.

2) pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ on a : $1-\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1-\dfrac{x}{2}$.

Exercice* 9

Soit h la bijection de $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$ définie par $h(x)=\frac{1}{x}$.

1) Calculer $h\left(\frac{1}{2}\right)$

2) Sachant que h^{-1} est dérivable en 2, calculer $\left(h^{-1}\right)'(2)$.

Corrigé de l'exercice 9

Soit h la bijection de $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$ définie par $h(x)=\frac{1}{x}$.

1) Calculons $h\left(\frac{1}{2}\right)$. $\quad h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

2) Sachant que h^{-1} est dérivable en 2, calculons $\left(h^{-1}\right)'(2)$.

On a $h(x)=\frac{1}{x}$; $h'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$(h^{-1})'(2)=\frac{1}{h'\left[(h^{-1})(2)\right]}$ or $h(\frac{1}{2})=2 \Rightarrow h^{-1}(2)=\frac{1}{2}$

Donc $(h^{-1})'(2)=\frac{1}{h'(\frac{1}{2})}=\frac{1}{-\frac{1}{(\frac{1}{2})^2}}=-\frac{1}{4}$. Donc $(h^{-1})'(2)=-\frac{1}{4}$.

Exercice* 10

Soit f la fonction définie de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$ par $f(x)=\sin x$.

1) Démontrer que f est une bijection.

2) Etudier la dérivabilité de f^{-1} (bijection réciproque de f) en 0 et en 1.

Corrigé de l'exercice 10

1) $\forall x\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)=\cos x\geq 0$. Donc f est Continue et strictement croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

$f\left(\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)=[-1;1]$. Donc f est une bijection.

2) **.**Dérivabilité de f^{-1} en 0.

$f(0)=0$ donc $f^{-1}(0)=0$

$f'(f^{-1}(0))=f'(0)=\cos(0)=1\neq 0$. Donc

f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{1}=1$.

Dérivabilité de f^{-1} en 1.

$f(\frac{\pi}{2}) = 1$ donc $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$.

$f'(f^{-1}(1)) = f'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Donc f^{-1} n' est pas dérivable en 1

Exercice 11

Soit f la fonction définie de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$ par $f(x) = \cos x$.

1) Démontrer que f est une bijection.

2) Etudier la dérivabilité de f^{-1} (bijection réciproque de f) en 0 et en 1.

3) On admet que f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$.

Démontrer que pour tout x élément de $]-1;1[$, $(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{|x|} \quad si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative.

1) a- Démontrer que pour tout nombre réel x de $[-1;0[$, $f(x) = -x\sqrt{x+1}$ et que pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, $f(x) = x\sqrt{x+1}$.

b-Etudier la continuité de f en 0.

c-Etudier la dérivabilité de f en 0, puis en déduire les équations des demi-tangentes à (C) en 0.

d- Etudier la dérivabilité de f en -1 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$.

a- Démontrer que g est une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
On note g^{-1} sa bijection réciproque.

b- Justifier que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ et calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$

c- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe représentative de g^{-1} au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

Exercice* 13

On considère la fonction numérique f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (x-3)\sqrt{2x}$ de représentation graphique (Cf) dans un repère orthonormé (O,I,J). .Unité : 1cm.

1. Etudier la continuité de f en 0
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et donner une interprétation graphique.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique des résultats.
4. On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

   a) Démontrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[$ $f'(x) = \frac{3x-3}{\sqrt{2x}}$.

   b) Déterminer le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de f.

   c) Dresser le tableau de variation de f.
5. Justifier que f réalise une bijection g de $[1;+\infty[$ sur un intervalle K à déterminer.
6. Soit (Γ) la représentation graphique de g^{-1} bijection réciproque de g dans le repère (O,I,J)..

   a- Justifier que g^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(g^{-1})'(0)$.

b- En déduire une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 0.

7- Construire (Cf), (Γ) et (T) dans le repère (O,I,J).

Corrigé de l'exercice 13

On considère la fonction numérique f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (x-3)\sqrt{2x}$.

1. Etudions la continuité de f en 0

$f(0) = (0-3)\sqrt{2\times 0} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x-3)\sqrt{2x} = (0-3)\sqrt{2\times 0} = 0$

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Donc f est continue en 0.

2. Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{(x-3)\sqrt{2x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(x-3)\sqrt{\frac{2x}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(x-3)\sqrt{\frac{2}{x}} = -\infty .$$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x-3 = -3$. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique.

(Cf) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

3. Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)\sqrt{2x} = +\infty$. Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x-3 = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-3)\sqrt{2x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x-3}{x})\sqrt{2x}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$

Interprétation graphique

(Cf) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

4 a) Démontrons que $\forall x\in\ ]0\ ;\ +\infty[\quad f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{2x}}$.

$\forall x\in\ ]0\ ;\ +\infty[\quad f'(x) = [(x-3)\sqrt{2x}]' = (x-3)'\sqrt{2x} + (x-3)(\sqrt{2x})' = \sqrt{2x} + (x-3)(\frac{2}{2\sqrt{2x}})$

$$= \sqrt{2x} + \frac{x-3}{\sqrt{2x}} = \frac{2x+x-3}{\sqrt{2x}}$$

Donc $\forall x\in\ ]0\ ;\ +\infty[\quad f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{2x}}$.

b) Signe de $f'(x)$ et le sens de variation de f.

$\forall x\in\ ]0\ ;\ +\infty[, \sqrt{2x} > 0$ .donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3x-3$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x - 3 > 0 \ \Leftrightarrow \ x > 1.$

$\forall x \in]\ 0\ ;\ 1\ [\ f'(x) < 0$. $\forall x \in]\ 1\ ;\ +\infty\ [\ f'(x) > 0$.

Donc *f* est strictement décroissante sur $]0;1[$ et strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

c) Dressons le tableau de variation de *f.*

5.a) Justifions que f réalise une bijection g

Sur $[1;+\infty[$ f est continue et strictement croissante et

$f([1;+\infty[) = [f(1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[\ = [-2\sqrt{2};+\infty[$

Donc f réalise une bijection g de $[1;+\infty[$ sur l'intervalle $K = [-2\sqrt{2};+\infty[$.

6-a) Justifions que g^{-1} est dérivable en 0

Résolvons l'équation $g(x) = 0$.

$x \in [1;+\infty[\ ;\ g(x) = 0$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{2x} = 0$

$x - 3 = 0$ *ou* $\sqrt{2x} = 0$. Donc $x = 3$ *ou* $x = 0$

Or $x \in [1;+\infty[$ Donc $x=3$

$g(3) = 0 \Rightarrow g^{-1}(0) = 3$.

Calculons $g'\ (g^{-1}(0))$

$g'\ (g^{-1}(0)) = g'(0) = \dfrac{3\times3-3}{\sqrt{2\times3}} \ = \dfrac{6}{\sqrt{6}}$ Or $\dfrac{6}{\sqrt{6}} \neq 0$. Donc g^{-1} est dérivable en 0 et on a

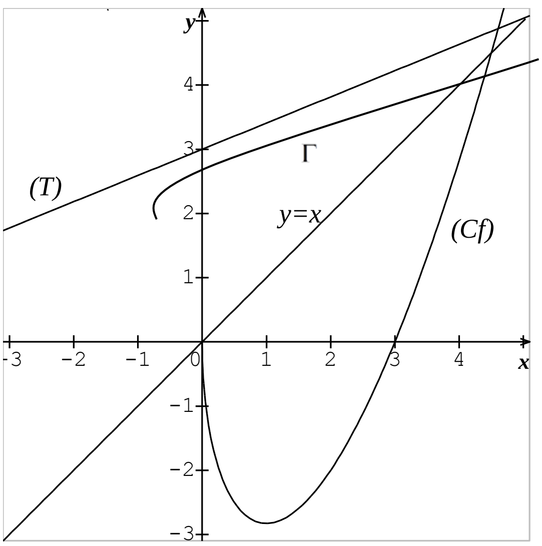
$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{6}{\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

b) Equation de la tangente (T)

$(T): y = (g^{-1})'(0)(x-0) + (g^{-1})(0)$.

$(T): y = \dfrac{\sqrt{6}}{6}x + 3$

7. Construction de *(Cf)*, (Γ) et (T)



Leçon 4 : PRIMITIVES

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par Vrai (V) ou par Faux (F).

F est une primitive de *f* sur un intervalle K.

	Affirmations	Réponses
1	F est dérivable sur K	
2	F est continue sur K	
3	$f' = F$	
4	$F' = f$	
5	$F = f$	

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, choisir la bonne réponse parmi les trois données.

	Affirmations	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Une primitive la fonction $x \longmapsto 3x^2$+1 est la fonction	$x \longmapsto \frac{3}{2}x^2 + x$	$x \longmapsto x^3 + x$	$x \longmapsto 3x^3 + x$
2	Une primitive la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ est la fonction	$x \longmapsto \sqrt{2x+1}$	$x \longmapsto 2\sqrt{2x+1}$	$x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$
3	Une primitive la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ est la fonction	$x \longmapsto \sin^2 x$	$x \longmapsto \frac{1}{\sin x}$	$x \longmapsto \tan x$
4	Une primitive la fonction $x \longmapsto 9(x^2-1)(x^3-3x)^2$ est la fonction	$x \longmapsto 9(x^3-3x)^3$	$x \longmapsto 3(x^3-3x)^2$	$x \longmapsto (x^3-3x)^3$

Exercice *3

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction *f* sur un intervalle à préciser

1) $f(x) = (3x-3)^{-4}$;   2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$;   3) $f(x) = x+1-\frac{x-1}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$

4) $f(x) = -\sin x \cos^5 x$;   5) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+3}}$;   6) $f(x) = \cos^2 x$;   7) $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

<u>Corrigé de l'exercice 3</u>

<u>Déterminons une primitive F de la fonction f</u>

1) F, une primitive de f sur $]1;+\infty[$ *ou* $]-\infty;1[$.

$$f(x) = (3x-3)^{-5} = \frac{1}{3}(3)(3x-3)^{-5} = \frac{1}{3}(3x-3)'(3x-3)^{-5}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}\frac{(3x-3)^{-5+1}}{-5+1} = \frac{1}{3}\frac{(3x-3)^{-4}}{-4} = \frac{-1}{12(3x-3)^4}$$

2) F, une primitive de f sur $]0;+\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$$

$$f(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}}\sin\left(\sqrt{x}\right) = 2\left(\sqrt{x}\right)'\sin\left(\sqrt{x}\right)$$

Donc $F(x) = -2\cos\left(\sqrt{x}\right)$

3) F, une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = x+1-\frac{x-1}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$f(x) = x+1-\frac{1}{2}\times\frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2-2x+5}$$

Donc $F(x) = \frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2x^2-4x+10}$

4) F, une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$f(x)$ = -sin x cos^5 x= cos'(x)(cos$^5 x$)

Donc F(x) = $\frac{(\cos x)^6}{6}$.

5) F, une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+3}} = \frac{3}{4}\times\frac{4x}{\sqrt{2x^2+3}}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}\times\frac{(2x^2+3)'}{\sqrt{2x^2+3}}$$

Donc $F(x) = \frac{3}{4}(2.\sqrt{2x^2+3} = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+3}$

6) F, une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \cos^2 x$$

La forme linéaire de $f(x)$ est $f(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)+x\right) = \frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{2}x$$

7) F, une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \cos^2 x.\sin^3 x = \cos^2 x(\sin x.\sin^2 x)$$
$$= \sin x(\cos^2 x)(\sin^2 x)$$
$$= \sin x(\cos^2 x)(1-\cos^2 x)$$
$$= \sin x(\cos^2 x-\cos^4 x)$$

$f(x) = \sin x.\cos^2 x - \sin x \cos^4 x$

$f(x) = -(\cos x)'\cos^2 x + (\cos x)'\cos^4 x$

Donc $F(x) = -\dfrac{\cos^3 x}{3} + \dfrac{\cos^5 x}{5}$

Exercice 4

Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle K, vérifiant la condition indiquée :

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ K= $\mathbb{R}$; $F(0) = 7$

2) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ K= $]0; +\infty[$; F(1)=0

3) $(x) = (2x-1)(x^2 - x + 4)^2$; K= $\mathbb{R}$; $F(-1) = 1$

4) $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ K= $\mathbb{R}$; $F(\sqrt{2}) = -2$

5) $f(x) = (x+3)(x^2 + 6x - 1)^3$; K= $\mathbb{R}$; $F(0) = \frac{1}{2}$

6) $f(x) = \frac{-2x}{(3x^2-2)^4}$; K= $\left]\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right[$; $F(1) = 1$

7) $f(x) = \sqrt{x}$; K= $]0; +\infty[$; $F(4) = \frac{16}{3}$

8) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ K= $\mathbb{R}$; $F(0) = 2\sqrt{2}$.

Exercice* 5

f est une fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$.

1) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout nombre réel x différent de 1, $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-1)^2}$

2) En déduire la primitive de f sur $]1; +\infty[$ qui prend la valeur 1 en 0.

Corrigé de l'exercice 5

$f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$

1) $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-1)^2} \Leftrightarrow a + \dfrac{b}{(x-1)^2} = \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow a(x-1)^2 + b = 3x^2 - 6x + 5$

$\Leftrightarrow a(x^2 - 2x + 1) + b = 3x^2 - 6x + 5$

$\Leftrightarrow ax^2 - 2ax + a + b = 3x^2 - 6x + 5$

Par indentification on a: $a = 3$, - 2a= - 6 et $a+5=5$

Soit $a = 3$ et $b = 2$ Donc, $f(x) = 3 + \dfrac{2}{(x-1)^2}$

2) Soit F la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0.

$F(x) = 3x + 2 \times \dfrac{1}{x-1} + c$

Or $F(0) = 1$. Donc $F(0) = 3 \times 0 + 2 \times \dfrac{1}{0-1} + c$, soit $-2 + c = 1$; $c = 3$

Donc $F(x) = 3x + \dfrac{2}{x-1} + 3$.

Exercice 6

Soit la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{3x^3-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$

1) Déterminer le plus grand ensemble D sur lequel f est continue.

2) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour $x \in$ D, $f(x)$ = a x + b + $\frac{c}{(x-1)^2}$

3) Déterminer les primitives de f sur $]1;+\infty[$.

4) Déterminer la primitive de f sur $]1;+\infty[$ qui s'annule en 3.

Exercice 7

On donne la fonction f définie sur $[3;+\infty[$ par $f(x) = (x-3)\sqrt{x-3}$

1) Déterminer la dérivée de f.

2) En déduire la primitive sur $]3;+\infty[$ de la fonction g : $x \longmapsto \sqrt{x-3}$ prenant la valeur $\frac{5}{3}$ en 4.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ par : $f(x)=x\sqrt{1-2x}$.

1) Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction F définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ par :

$F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{1-2x}$ soit une primitive de f.

Leçon 5 : Fonctions Logarithmes

Exercice 1

Répondre par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

	Affirmations	Réponses
1	$\ln(1) = e$	
2	$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$	
3	$\ln\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2}$	
4	$\ln(10) \geq \ln(4) + \ln(3)$	
5	$2\ln 7 < 7\ln 2$	
6	La fonction ln est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$	

Exercice 2

Pour chacune ders affirmations suivantes, choisir la bonne réponse.

	Affirmations	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La fonction $x \longmapsto ln\|x\|$ est définie sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$
2	La fonction $x \longmapsto \ln(-x)$ est définie sur	$]-\infty; 0[$	$]0; +\infty[$	$]-\infty; -1[$
3	La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = \ln(2x^2 + 4)$ est	$\frac{1}{2x^2+4}$	$\frac{x}{2x^2+4}$	$\frac{2x}{x^2+2}$
4	Une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$ est	$xln\, x - x$	$xln\, x$	$ln\, x - x$

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes:

A = $\ln 10 + \ln 2$; B = $\ln\frac{1}{1000}$; C = $\ln 12 - \ln 3$; D = $\ln(e\sqrt{e})$; E = $\frac{1}{3}\ln 64$;

F = $\ln(\frac{1}{2}) - 2\ln(\sqrt{2})$; G = $\ln(3+\sqrt{2}) + \ln(3-\sqrt{2}$; H = $\ln(1000) + \ln(0,001)$; I = $\ln(\frac{1}{e^3})$;

J= $\ln(\frac{5}{6}) + \ln(\frac{6}{7}) + \ln\frac{7}{8} + \ln(\frac{8}{9})$; K = $\ln 3 + \ln 5 - \ln 10$; L= $\ln 3 - \ln\left(\frac{1}{3}\right)$; M = $\ln(\frac{3\sqrt{4}}{4})$.

Exercice* 4

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction numérique f dans chacun des cas suivants.

1) $f(x) = \ln(x - 3)$ 2) $f(x) = \ln x - 3$ 3) $f(x) = \ln(4 - x^2)$ 4) $f(x) = x + \ln\left(x^2\right)$

5) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x-2}\right)$ 6) $f(x) = \ln|2x-3|$ 7) $f(x) = \sqrt{\ln x}$ 8) $f(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x}$ 9) $f(x) = \ln(x^2 + x - 12)$ 10) $f(x) = \frac{x+1}{\ln(x-2)}$ 11) $f(x) = \ln(\frac{x}{x-1})$ 12) $f(x) = \ln(\frac{1-x}{1+x})$

13) $f(x) = \ln(\ln x)$ 14) $f(x) = \ln|-x^2 + 4|$ 15) $f(x) = \ln[(3-x)\sqrt{x}]$ 16) $f(x) = \frac{2}{\ln|x|}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminons les ensembles de définition.

1) $f(x) = \ln(x-3)$. $x \in Df \Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

Donc $Df =]3;+\infty[$.

2) $f(x) = \ln(x) - 3$

$x \in Df \Leftrightarrow x > 0$. Donc $Df =]0;+\infty[$.

3) $f(x) = \ln(4 - x^2)$

$x \in Df \Leftrightarrow 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-2;2[$

Donc $Df =]-2;2[$

4) $f(x) = x + \ln(x^2)$

$x \in Df \Leftrightarrow x^2 > 0$. Donc $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5) $f(x) = \ln(\dfrac{1}{x-2})$.

$x \in Df \Leftrightarrow x - 2 \neq 0$ et $\dfrac{1}{x-2} > 0$.

$\Leftrightarrow x \neq 2$ et $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Donc $Df =]2;+\infty[$.

6) $f(x) = \ln|2x-3|$

$x \in Df \Leftrightarrow 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3}{2}$

Donc $Df = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

7) $f(x) = \ln(-x+2)$

$x \in Df \Leftrightarrow -x + 2 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow x < 2$

Donc $Df =]-\infty;2[$.

8) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

$x \in Df \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Donc $Df = [1;+\infty[$

9) $f(x) = (\dfrac{\ln x}{1+\ln x})$

$x \in Df \Leftrightarrow x > 0$ et $1 + \ln x \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq e^{-1}$

Donc $Df =]0;+\infty[\setminus \{e^{-1}\}$.

Exercice* 5

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes

a) $\ln(3x-1) = \ln(x+1)$; b) $\ln x = -5$; c) $\ln(-2x+1) = 2$;

d) $\ln(1-x) + \ln(x+5) = \ln(-8x)$; e) $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$; f) $\ln(x^2 + x) = 1$;

g) $\ln x < -1$; h) $\ln|2x-1| \leq 0$; i) $\ln(x^2 - x + 1) \geq \ln(2-x)$; j) $2(\ln x)^2 - 3\ln x - 2 > 0$

Corrigé de l'exercice 5

Résolution d'équations et d'inéquation s

a) $\ln(3x-1)=\ln(x+1)$

Soit Ev l'ensemble de validité. $x \in Ev \Leftrightarrow 3x-1>0$ et $x+1>0 \Leftrightarrow$ $x>\frac{1}{3}$ et $x>-1$. $Ev=]\frac{1}{3};+\infty[$

$x \in Ev: \ln(3x-1)=\ln(x+1)$

$\Leftrightarrow$ $3x-1=x+1.$ $\Leftrightarrow$ $2x=2 \Leftrightarrow$ $x=1$

$1 \in Ev$ Donc $S_{\mathbb{R}}=\{1\}$.

b) $\ln x=-5$. $Ev=]0;+\infty[$

$x \in Ev: \ln x=-5$

$x=e^{-5}$ et $e^{-5} \in Ev$ Donc $S_{\mathbb{R}}=\{e^{-5}\}$

c) $\ln(-2x+1)=2$

$x \in Ev \Leftrightarrow -2x+1>0 \Leftrightarrow -2x>-1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$

$Ev=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

$x \in Ev: \ln(-2x+1)=2 \Leftrightarrow -2x+1=e^2 \Leftrightarrow -2x=e^2-1 \Leftrightarrow x=\frac{e^2-1}{-2}$

$x=\frac{1-e^2}{2} \in Ev$. Donc $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{1-e^2}{2}\right\}$

d) $\ln(1-x)+\ln(x+5)=\ln(-8x)$

$x \in Ev \Leftrightarrow 1-x>0; x+5>0$ et $-8x>0$.

Donc $x<1$; $x>-5;$ $x<0$. $Ev=]-5;0[$

$x \in Ev: \ln(1-x)+\ln(x+5)=\ln(-8x)$

$\ln\left[(1-x)(x+5)\right]=\ln(-8x)$

$(1-x)(x+5)=-8x$

$-x^2+4x+5=0$. $\Delta=4^2-4(-1)(5)=36$

$x_1=\frac{-4+6}{-2}=-1$; $x_2=\frac{-4-6}{-2}=5$

$-1 \in Ev$ et $5 \notin Ev$. Donc $S_{\mathbb{R}}=\{-1\}$.

e) $(\ln x)^2-\ln x-2=0$

$Ev=]0;+\infty[$.

$x \in Ev: (\ln x)^2-\ln x-2=0$

Posons $X=\ln x$

$X^2-X-2=0$. $\Delta=(-1)^2-4(-2)=9$

$X_1=\frac{1+3}{2}=2$ $X_2=\frac{1-3}{2}=-1$

$\ln x=2$ ou $\ln x=-1$

$x=e^2$ ou $x=e^{-1}$

$e^2 \in Ev$ et $e^{-1} \in Ev$. Donc $S_{\mathbb{R}}=\{e^2 : e^{-1}\}$

f) $\ln(x^2+x)=1$

$x \in Ev \Leftrightarrow x^2+x>0$

$\Leftrightarrow x(x+1)>0$. $Ev = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]0;+\infty\right[$

$x \in Ev : \ln(x^2+x)=1$

$x^2+x=e \Leftrightarrow x^2+x-e=0$

$\Delta = 1^2-4(-e)=1+4e$

$x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4e}}{2}$

$x_1 \in Ev$ Et $x_2 \in Ev$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \dfrac{-1-\sqrt{1+4e}}{2} ; \dfrac{-1+\sqrt{1+4e}}{2} \right\}$

g) $\ln x < -1$

$Ev = \left]0;+\infty\right[$

$x \in Ev : \ln x < -1$

$x < e^{-1} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; e^{-1}\right[$

$S_{\mathbb{R}} = Ev \bigcap \left]-\infty; e^{-1}\right[$. $S_{\mathbb{R}} = \left]0; e^{-1}\right[$.

h) $\ln|2x-1| \leq 0$

$x \in Ev \Leftrightarrow 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$

$Ev =]-\infty; \dfrac{1}{2}[\cup]\dfrac{1}{2};+\infty[$

$x \in Ev : \ln|2x-1| \leq 0$

$\Leftrightarrow |2x-1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x-1 \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0;1]$

$S_{\mathbb{R}} = [0;1] \bigcap Ev$. $S_{\mathbb{R}} = [0; \dfrac{1}{2}[\cup]\dfrac{1}{2};1]$

i) $\ln(x^2-x+1) \geq \ln(2-x)$

$x \in Ev \Leftrightarrow x^2-x+1>0$ et $2-x>0$

- résolvons $x^2-x+1>0$

$\Delta = 1-4=-3$. Or -3<0

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2-x+1>0$

- $2-x>0 \Leftrightarrow -x>-2$. $x<2$

$Ev = \left]-\infty;2\right[$

$x \in Ev : \ln(x^2-x+1) \geq \ln(2-x)$

$x^2-x+1 \geq 2-x \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

$S_{\mathbb{R}} = Ev \bigcap (\ ]-\infty;-1]\cup[1:+\infty[\ )$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty:-1]\cup[1;2[$

j) $2(\ln x)^2 - 3\ln x - 2 > 0$

$Ev =]0;+\infty[$

$x \in Ev : 2(\ln x)^2 - 3\ln x - 2 > 0$

Posons $X = \ln x$

$2X^2 - 3X - 2 > 0$. $\Delta = (-3)^2 + 4(2)(2) = 25$

$X_1 = \dfrac{3+5}{4} = 2$; $X_2 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$X \in]-\infty;-\dfrac{1}{2}[\cup]2;+\infty[$

$\ln x < -\dfrac{1}{2}$ ou $\ln x > 2$

$x < e^{-\frac{1}{2}}$ ou $x > e^2$

$S_{\mathbb{R}} = Ev \cap (\ ]-\infty; e^{-\frac{1}{2}}[\cup]e^2;+\infty[\ )$

$S_{\mathbb{R}} =]0; e^{-\frac{1}{2}}[\cup]e^2;+\infty[.$

<u>Exercice 6</u>

I) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivantes :

1) $\begin{cases} x+y=11 \\ \ln x + \ln y = \ln(24) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = -3 \\ 4\ln x - \ln y = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = 3 \\ \ln(xy) = -4 \end{cases}$

<u>Exercice 7</u>

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1-a) Justifier que -2 est un zéro de P.

b) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.

c) Déduire des questions précédentes que -2, 1 et 3 sont les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x) = 0$

2-a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $(lnx)^3 - 2\,(lnx)^2 - 5\,lnx + 6 = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I): $(lnx)^3 - 2\,(lnx)^2 - 5\,lnx + 6 > 0$.

<u>Exercice 8</u>

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 3 + \frac{2\ln x - 1}{x}$.

Soit les fonctions h et u définies par : $h(x) = \dfrac{lnx}{x}$ et $u(x) = ln\,x$.

1- a) Exprimer $h(x)$ en fonction de $u(x)$ et $u'(x)$.

b) En déduire une primitive de h sur $]0,+\infty[$.

2-Déterminer les primitives F_k de f sur $]0,+\infty[$.

3- Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1.

<u>Exercice 9</u>

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur un intervalle que l'on précisera.

a) $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$; b) $f(x) = x^2 - 5x - \dfrac{1}{x}$; c) $f(x) = \dfrac{7}{x} + \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}$; d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{5}{x-1} + \dfrac{7}{x+1}$; f) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$; g) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+5}$; h) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

Exercice*10

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{3} - 2x\ln x\right)$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(\ln x+\dfrac{1}{x}-1)$; **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{\ln x}{x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\ln|x|)$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$; **g)** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} x-\dfrac{\ln|x-1|}{x-1}$; **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\dfrac{\ln|x-1|}{x-1}$.

Corrigé de l'exercice 10

Calcul de limites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3}-2x\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\dfrac{1}{3}-2\ln x) = -\infty$

Car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln x = -\infty\end{cases}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(\ln x+\dfrac{1}{x}-1) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x}(x\ln x+1-x) = +\infty$

car $\left\{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x} = +\infty, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0 \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 1-x = 1\right.$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x}(\ln x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x} = +\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\ln|x|) = \lim\limits_{x\to-\infty} x-\ln(-x)$

Posons $X = -x$; $x = -X$

quand $x\to-\infty$; $X\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x-\ln(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -X-\ln(X)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -(X+\ln X) = -\infty$

car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln X = +\infty\end{cases}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\dfrac{\ln x}{x}) = +\infty$

car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0\end{cases}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\sqrt{1+x^2}) = \ln(1+\sqrt{1+0^2}) = \ln 2$

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} x-\dfrac{\ln|x-1|}{x-1}$

Posons $x-1 = X$; $x = X+1$

quand $x\underset{>}{\to}1$; $x\underset{>}{\to}0$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} x-\frac{\ln|x-1|}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} X+1-\frac{\ln|X|}{X}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} X+1-\frac{\ln X}{X}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} X+1-\frac{1}{X}(\ln X)=+\infty$$

Car $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}} X+1=1, \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}}\frac{1}{X}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}}\ln X=-\infty$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\frac{\ln|x-1|}{x-1}$

Posons $x-1=X$; $x=X+1$

quand $x\to-\infty$; $X\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x-\frac{\ln|x-1|}{x-1}=\lim_{X\to-\infty} X+1-\frac{\ln|X|}{X}$$

$$=\lim_{X\to-\infty} X+1-\frac{\ln(-X)}{X}$$

Posons $-X=Y$; $X=-Y$

quand $X\to-\infty$; $Y\to+\infty$

$$\lim_{X\to-\infty} X+1-\frac{\ln(-X)}{X}=\lim_{Y\to+\infty}-Y+1-\frac{\ln(Y)}{-Y}$$

$$=\lim_{Y\to+\infty}-Y+1+\frac{\ln(Y)}{Y}=-\infty$$

car $\begin{cases}\lim\limits_{Y\to+\infty}-Y+1=-\infty\\ \lim\limits_{Y\to+\infty}\frac{\ln Y}{Y}=0\end{cases}$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\frac{\ln|x-1|}{x-1}=-\infty$

<u>Exercice 11</u>

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x}$; **2)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x-\ln x$; **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)\ln(x+1)$; **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x})$; **5)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln(2+\frac{x+3}{x})$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{3}-2\ln x$; **7)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\frac{x^2-1}{1+3x^2}$; **8)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{-2+\ln x}{x}$; **9)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x$; **10)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x(2+\ln x)$;

11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x+2\ln x)$ **12)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2\ln(x-1)}{x-1}$; **13)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$; **14)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x^2})$;

15) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$; **16)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\frac{x^2+1}{3+2x^2}$; ; **17)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\frac{\ln|x-2|}{x-2}$; **18)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$

19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3}-x\ln x$; **20)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3}-x\ln x$; **21)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(2x+1)}{x}$; **22)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(2x+\frac{\ln x}{x^3}$; **23)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln(1+\frac{1}{x})$

24) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{x})$; **25)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(1+\frac{1}{x})$; **26)** $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e}$; **27)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$; **28)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-2}$;

29) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(x+1)}{x^2}$; **30)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$; **31)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{2x+1}$; **32)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)}$.

Exercice 12

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer le ou les intervalle(s) sur lesquels f est dérivable et calculer la dérivée $f\,'$ de f .

1) $f(x) = \ln(-x+1)$; 2) $f(x) = \ln(-x)+1$; 3) $f(x) = \ln(-x^2+1)$; 4) $f(x) = -x + \ln(x^2)$;

5) $f(x) = \ln(\frac{1}{x-1})$; 6) $f(x) = \ln|x-1|$; 7) $f(x) = (x-2)\ln x$; 8) $f(x) = \ln x + \ln(x+1)$;

9) $f(x) = \frac{2\ln x}{x-1}$; 10) $f(x) = \ln(3x-2)$; 11) $f(x) = 2\ln x$; 12) $f(x) = \ln x^2$;

13) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$; 14) $f(x) = \ln(1+x^2)$; 15) $f(x) = \ln(2x-x^2)$; 16) $f(x) = x\ln(x) - x$;

17) $f(x) = \frac{2\ln(x+1)}{x+1}$; 18) $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$; 19) $f(x) = x^2 + (\ln x)^2$; 20) $f(x) = 2x^2 - \ln(x) + 1$;

21) $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$; 22) $f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$; 23) $f(x) = x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}$; 24 $f(x) = 2x + 3 - \frac{x - \ln x}{x^2}$

PROBLEME* 1

On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞ [par : f (x) = $\frac{\ln x}{x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). (*Unité graphique 2 cm*).

1°) a. Déterminer les limites de f en 0 et en + ∞.

b. Donner les interprétations graphiques des résultats.

2°) a. Démontrer que pour tout x de]0 ; + ∞ [, $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

b. Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

3°) Construire (C_f) dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité 2 cm.

Corrigé du problème 1

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

1.a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x}(x\ln x) = -\infty$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

b) Interprétations graphiques

*La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (Cf) .

*La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (Cf)en$+\infty$.

2.a) $\forall x \in]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'x - (\ln x)(x')}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

b) $\forall x \in]0;+\infty[\ x^2 > 0,$ donc le signe de $f(x)$ est celui de $1-\ln x$.

$1-\ln x > 0 \Leftrightarrow -\ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$

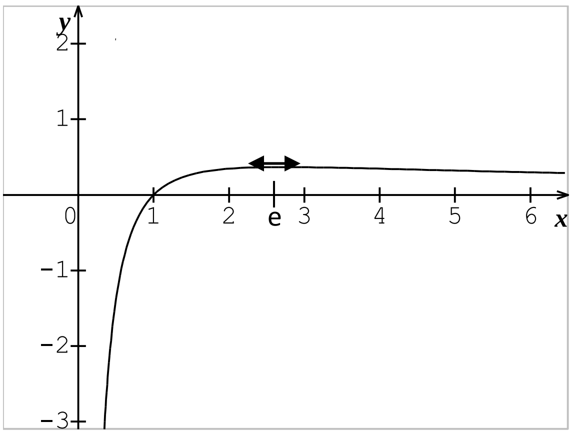
$\forall x \in]0:e[\ f'(x) > 0$, $\forall x \in]e;+\infty[\ f'(x) < 0$ et $f'(e) = 0$

f est donc strictement croissante sur $]0;e[$ et strictement décroissante sur $]e;+\infty[$.

<u>Tableau de variation de</u> f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

<u>Construction</u>



<u>PROBLEME* 2</u>

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = -x + x\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1°) a) Démontrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0, et donner une interprétation graphique du résultat.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique des résultats.

3) a) Démontrer que $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \ln x$.

b) En déduire les variations et le tableau de variation de f.

4) Construire (C_f) dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité 2 cm.

Corrigé du problème 2

$f(x) = -x + \ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1.a) continuité en 0

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} -x + x\ln x = 0$ et $f(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. par conséquent f est continue en 0.

b) dérivabilité en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-x + x\ln x}{x} = \lim_{x \to 0} -1 + \ln x = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique : (Cf) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x + x\ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} x(-1 + \ln x) = +\infty$, car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + x\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} -1 + \ln x = +\infty$$

Interprétation graphique : (Cf) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

3.a) $\forall x \in]0;+\infty[$ $f'(x) = (-x + x\ln x)'$

$f'(x) = -1 + \ln x + 1 = \ln x$.

b) $\forall x \in]0;+\infty[$ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$\forall x \in]0;1[$ $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[$ $f'(x) > 0$

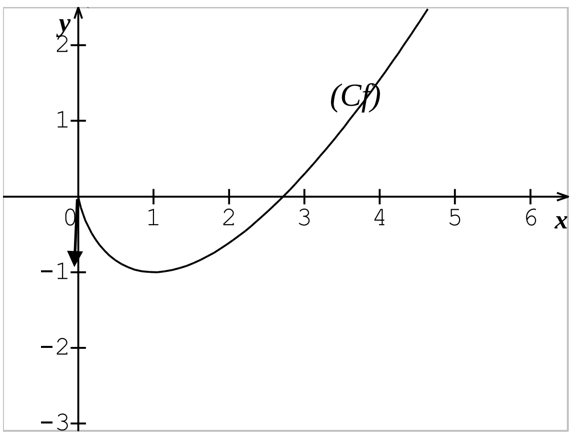
$f'(1) = 0$

f est donc strictement décroissante sur $]0;1[$ et strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

Tableau de variation *f*

x	0		*e*		$+\infty$
f'(x)	|	-	0	+	
f(x)	0 ↘		-1	↗	$+\infty$

Construction de la courbe de *f*



<u>Problème* 3</u>

<u>Partie A</u>

Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞ [par g(x) = x^2 - 2+2ln$x$.

1) Déterminer les limites de g en 0 et en + ∞.

2) a) Pour tout x élément de Dg, déterminer g'(x) et déterminer son signe.

b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de g.

3) a) Justifier que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans] 1,24 ; 1,25[.

b) En déduire que g est négative sur]0 ; α[et positive sur]α ;+∞[.

<u>Partie B</u>

On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par f(x) = $x-2-\dfrac{2\ln x}{x}$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). Unité : 2cm.

1) Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Déterminer la limite de f en +∞ et démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x–2$ est une asymptote oblique à (C_f) en + ∞.

3) Déterminer la position relative de (C_f) par rapport à (Δ).

4) a) Démontrer que pour tout x appartenant à D_f, f '(x) = $\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire le signe de f '(x) et le sens de variation de f.

c) Etablir le tableau de variation de f.

5) a. Montrer que $f(\alpha) = 2\alpha-2-\dfrac{2}{\alpha}$.

b. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

6) Construire (Δ) et (C_f) dans le même repère. On donne f(α) ≈ -1,2.

<u>Corrigé du problème 3</u>

<u>Partie A</u>

$g(x) = x^2 - 2 + 2\ln x$

1) * $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2 + 2\ln x = -\infty$. Car $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2 = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 2 + 2\ln x = +\infty$. Car $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

2-a) $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$ $g'(x) = 2x + \dfrac{2}{x}$

$g'(x) = \dfrac{2x^2+2}{x}$

$\forall x \in \left]0;+\infty\right[$ $x > 0$ et $2x^2 + 2 > 0$. Donc $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$ $g'(x) > 0$.

b) $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$ $g'(x) > 0$ donc sur $\left]0;+\infty\right[$ g est strictement croissante

<u>Tableau de variation de g</u>

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3-a) sur $]0;+\infty[$ g est continue et strictement croissante, en particulier sur $]1,24;1,25[$.

g(1,24) = $(1,24)^2-2+2\ln(1,24)=$ -0,03

$g(1,25)=(1,25)^2-2+2\ln(1,25)=0,008$

$g(1,24)\times g(1,25)<0$. Donc l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans $]1,24;1,25[$.

b) <u>Signe de g.</u>

Sur $]0;+\infty[$ g est continue et strictement croissante

Donc $\forall x\in]0;\alpha[, x<\alpha \Rightarrow g(x)<g(\alpha)$

$\forall x\in]\alpha;+\infty[, x>\alpha \Rightarrow g(x)>g(\alpha)$

Or $g(\alpha)=0$ donc $\forall x\in]0;\alpha[\ g(x)<0$, $\forall x\in]\alpha;+\infty[\ g(x)>0$

<u>**Partie B**</u>

$$f(x)=x-2-\frac{2\ln x}{x}$$

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x-2-\frac{2\ln x}{x}\right)$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x-2-\frac{2}{x}(\ln x))=+\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x-2=\alpha-2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty$

Interprétation graphique.

La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à (Cf).

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-2-\frac{2\ln x}{x}=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

<u>**Asymptote**</u> (Δ) **.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2\ln x}{x}=0$

Donc la droite d'équation $y=x-2$ est asymptote oblique à (Cf). en $+\infty$.

3) <u>**Position relative**</u>.

$\forall x\in]0;+\infty[\ f(x)-(x-2)=-\frac{2\ln x}{x}$

$x>0$, donc le signe de $f(x)-(x-2)$ est celui de $-\ln x$

$-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow x<1$ $\forall x\in]0;1[\ f(x)-(x-2)>0$ $\forall x\in]1;+\infty[\ f(x)-(x-2)<0$

Donc sur $]0;1[$ (Cf) est au-dessus de (Δ) et sur $]1;+\infty[$ (Cf) est au dessous de (Δ).

4.a) $\forall x\in Df$; $f'(x)=\left(x-2-\frac{2\ln x}{x}\right)'$

$$f'(x)=1-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-2\ln x}{x^2}=\frac{x^2-(2-2\ln x)}{x^2}=\frac{x^2-2+2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}.$$

b) $\forall x \in Df, x^2 > 0$. Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

Donc d'après la **partie** A ,

$\forall x \in]0;\alpha[\; f'(x) < 0 \quad \forall x \in]\alpha;+\infty[\; f'(x) > 0$.

f est donc strictement décroissante sur $]0;\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$.

c) <u>Tableau de variation de</u> f .

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

5. a) On a $f(\alpha) = \alpha - 2 - \dfrac{2\ln\alpha}{\alpha}$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 + 2\ln\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \; 2\ln\alpha = -\alpha^2 + 2$

$\Leftrightarrow \; \ln\alpha = -\dfrac{\alpha^2+2}{2}$.

Donc

$$f(\alpha) = \alpha - 2 - \frac{2(-\frac{\alpha^2+2}{2})}{\alpha} = \alpha - 2 - \frac{-\alpha^2+2}{\alpha} = \alpha - 2 + \frac{\alpha^2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} = 2\alpha - 2 - \frac{2}{\alpha}$$

b) <u>Encadrement de</u> $f(\alpha)$

$1,24 < \alpha < 1,25$

$2,48 < 2\alpha < 2,50$

$0,48 < 2\alpha - 2 < 0,50 \qquad (1)$

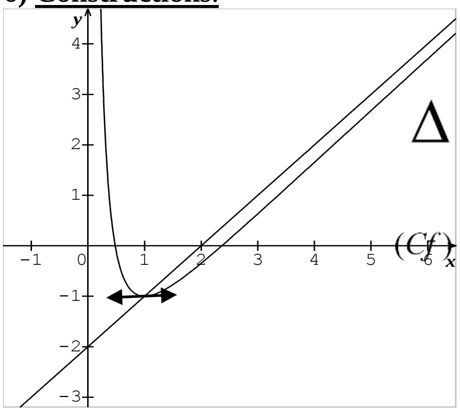
$\dfrac{1}{1,25} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{1,24}$

$\dfrac{-2}{1,24} < \dfrac{-2}{\alpha} < \dfrac{-2}{1,25} \qquad (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow 0,48 - \dfrac{2}{1,24} < f(\alpha) < 0,5 - \dfrac{2}{1,25} \quad -1,1329.... < f(\alpha) < -1,10$

Donc $-1,2 < f(\alpha) < -1,1$

6) <u>Constructions</u>.



Problème 4

Partie A ***(étude d'une fonction auxiliaire)***

Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + 3\ln x$.

1- Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2- a) Calculer $g'(x)$ et justifier que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) Etablir le tableau de variation de g.

3- a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) Vérifier que: $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

c) Donner un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.

4- Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in\ ]0,\alpha[\ ; g(x) < 0 \\ \forall x \in\ ]\alpha,+\infty[\ ; g(x) > 0 \end{cases}$.

Partie B ***(étude de la fonction f)***

Dans un repère orthonormé (O, I, J) la courbe $(\mathcal{C})$ représente la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f(x) = ax + b\frac{1+\ln x}{x}$ où a et b sont deux nombres réels.

La droite (T) est tangente à $(\mathcal{C})$ au point A(1 ; –1) et elle passe par le point B(–1 ; –5).

1- a) Justifier $f(1) = -1$ et que $f'(1) = 2$.

b) En déduire une équation de la droite (T).

2- Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.

3- En utilisant $f(1)$ et $f'(1)$ déterminer les valeurs de a et b.

Pour la suite du problème, on admet que $f(x) = 2x - 3\ \frac{1+\ln x}{x}$

4- a) Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire graphiquement ?

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ comme asymptote en $+\infty$.

5- a) Démontrer que : $\forall x \in\ ]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6- a) Etudier la position relative de (Δ) par rapport à $(\mathcal{C})$.

b) Démontrer que $f(\alpha) = 4\alpha - \frac{3}{\alpha}$.

c) Construire (T), (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le repère (O, I, J).

Problème 5

Partie A

Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)^2 - 1 + ln|x-1|$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de g.

2) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3) Calculer g(0) et g(2) et en déduire le signe de g.

Partie B

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{ln|x-1|}{x-1}$ et $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). unité graphique : 1,5 cm .

1) a- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b- Calculer les limites de f à gauche et à droite en 1 puis interpréter les résultats.

2) Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

3) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4) Démontrer que : $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) a- Justifier que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C}f)$.

b- Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C}f)$ et (D).

c- Démontrer que le point $A(1,1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}f)$.

7) Construire $(\mathcal{C}f)$ et (D).

Problème 6

Soit f la fonction numérique définie sur$]0;+\infty[$par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{1 - \ln x}{x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J)(unité: 1cm)

PARTIE A

Soit g la fonction dérivable sur$]0;+\infty[$par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1. Calculer les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

   b. Démontrer que : $\alpha \in]1,3\ ;\ 1,4[$
4. En déduire que, pour tout nombre réel $x \in]0;+\infty[$.si $x < \alpha$, alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $g(x) > 0$

PARTIE B

1) a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Démontrer que pour tout nombre réelle $x \in]0;+\infty[$. $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4a). Montrer que $\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$ et que $f(\alpha) = 2\alpha - 1 - \dfrac{1}{\alpha}$

b)En prenant $\alpha = 1,3$ calculer $f(\alpha)$

5)a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à *(Cf)* en $+\infty$.

b. Déterminer les positions relatives de la courbe *(Cf)* et de la droite (D)

6) Déterminer les coordonnées du point A où la tangente à la courbe *(Cf)* est parallèle à la droite (D)

7. Montrer qu'une équation de la tangente (T) à *(Cf)* au point d'abscisse e^2 est $y = x - 1 - \dfrac{1}{e^2}$ .83.

8) Tracer *(Cf),* et (T) et (D) (On prendra : $e = 2,7$; $e^2 = 7,4$ et $e^{-2} = 0,14$)

PARTIE C

On considère la fonction F définie sur$]0;+\infty[$par : $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + \ln x - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

1. Vérifier que F est une primitive de f sur$]0;+\infty[$
2. Calculer $F(e) - F(1)$

Leçon 6 : Nombres Complexes

Exercice 1

Pour chaque affirmation ci-dessous, dire si elle est Vraie (V) ou Fausse (F).

	Affirmations	Réponse
1	La somme d'un nombre complexe et son conjugué est égale à sa partie réelle.	
	La somme d'un nombre complexe et son conjugué est égale au double de sa partie réelle.	
2	$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2019} = -1$.	
3	Les racines carrées de -8 sont $2\sqrt{2}\,i$ et $-2\sqrt{2}\,i$.	
4	Les points images des racines cubiques d'un nombre complexe non nul forment un triangle équilatéral.	
5	La partie réelle du nombre complexe $i(2-i)$ est 1	
6	La partie imaginaire du nombre complexe $(1+i)^2$ est i	

Exercice 2

On donne les nombres complexes suivants

$z_1 = -1+i$ $z_2 = -2i$; $z_3 = -i$; $z_4 = 1+i\sqrt{2}$; $z_5 = 0$; $z_6 = 2$; $z_7 = -\sqrt{3}$.

1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun de ces nombres complexes.

2) Calculer chacun des nombres suivants : $z_1 + z_2$; $z_1 \times z_2$; $z_1 + z_3$; $z_4 - z_6$; $z_4 \times z_2$; $z_5 \times z_7$.

Exercice 3

Soit $z = -a + 3bi$ et $z' = 2 + ai$, avec a et b réels.

Déterminer a et b pour que les nombres complexes z et z' soient égaux.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants écrire le nombre complexe z sous forme algébrique .

a) $z = 2-3i(1+1)$; b) $z = (2+i)^2$, c) $z = \dfrac{1-i}{1+i}$; d) $z = \dfrac{1-i}{2}$;

e) $z = \dfrac{1}{1-i}$; f) $z = \dfrac{i-7}{(3+7i)}$; g) $z = \dfrac{2+i}{3-i} - \dfrac{3-i}{2+i}$ h) $z = \dfrac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

Exercice 5

Ecrire sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivantes :

$z_1 =$ i-2 ; $z_2 =$ -5 ; $z_3 =$ 3i ; $z_3 = (4-i\sqrt{3})(1-i)$; $z_4 = \dfrac{2+i}{3-i}$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(E_1) : $-2z+1+2i = 3z+i$; (E_2) : $\dfrac{2}{z+i} = \dfrac{-3}{z-i}$; (E_3) : $\bar{z} - 1 + 2i = 2z - i$; (E_4) : $iz^2 - 2\bar{z} - i = 0$;

Exercice 7

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 4 - 3i$; $z_2 = 1 + i$; $z_3 = -3 + \frac{i}{2}$; $z_4 = -5$; $z_5 = 2i + 5$; $z_6 = -i$;

$z_7 = 5$; $z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_9 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_{10} = \frac{1-i}{3+4i}$; $z_{11} = (1-i)^4$

Exercice 8

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $-3+3i$; b) $\sqrt{2}+i\sqrt{6}$; c) $z = 1+i$; d) $z = \sqrt{2}+i\sqrt{6}$; e) $z = -6i$

Exercice 9

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $z = \frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}$; b) $z = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$; c) $Z = -2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. ; d) $\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$;

Exercice 10

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $ie^{i\frac{\pi}{3}}$ b) $-3e^{i\frac{\pi}{4}}$ c) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d) $e^{-i\frac{6\pi}{7}} - e^{i\frac{6\pi}{7}}$ e) $(1-i)e^{-i\frac{\pi}{3}}$ f) $\frac{1-i}{1+i}e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 11

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + i$, $Z_B = \sqrt{3} + i$ et $Z_C = 2i$.

1- Placer les points A, B et C dans le repère.

2- Calculer l'affixe du point K milieu du segment [AB].

3- Calculer l'affixe du point D telle que ABCD soit un parallélogramme.

4- Ecrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique $Z_A Z_B$.

5- En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A(i) et l'équation (E) : $\left|\left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i\right| = 4$.

1- Démontrer que (E) est équivalente à $|z - i| = 2$.

2- En déduire et construire l'ensemble des points M d'affixes z solutions de (E).
Retrouver le résultat par la méthode algébrique.

Exercice 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -\sqrt{3} + i$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$.

1- Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes a et b .

2- a) Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique le complexe $\frac{c}{a}$.

b) En déduire que $c = 1 - \sqrt{3} + (1+\sqrt{3})i$ et déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

3- A tout point M d'affixe $z \neq a$ et $z \neq b$ on associe le point M′ d'affixe z′ telle que $z' = \frac{z-b}{z-a}$.

a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que $\arg z' = \frac{\pi}{2}$.

c) Démontrer que le point C appartient à $(\Delta)\cap(\Gamma)$ puis en déduire la nature du triangle ABC.
d) Construire (Δ), (Γ) et le point C.

Exercice 14

Donner la forme algébrique des nombres complexes ci-dessous :

1) $e^{i\pi}$; 2) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; 3) $e^{i2\pi}$; 4) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$; 5) $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{1992}$; 6) $(1+i\sqrt{3})^{11}$

Exercice 15

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivant :

$z_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$; $z_2=(1+i)^{200}$; $z_3=(-1+i)^{300}$; $z_4=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{400}$.

Exercice 16

Linéariser :

A = $\cos^2 x$; B = $\sin^2 x$; C = $\cos^3 x$; D = $\cos^2 x\sin^3 x$; E = $\cos^4 x$.

Exercice 17

Déterminer les racines carrées sous forme algébrique de chacun des nombres complexes :

$Z_1 = 6 - 8i$; $Z_2 = 8+6i$; $Z_3 = -3-4i$; $Z_4 = 2i$; $Z_5 = 4$; $Z_6 = 8$;

$Z_7 = -4$; $Z_8 = -7$; $Z_9 = \frac{1}{2}-i\sqrt{2}$; $Z_{10} = -5+12i$.

Exercice *18

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(E_1) $z^2-3z+2=0$; (E_2) $-z^2-(1-2i)z+2i=0$; (E_3) $z^2+z+1=0$;

(E_4) : $iz^2+(2+6i)z+2+11i=0$; (E_5) : $z^2+2iz-1=0$

Corrigé de l'exercice 18

Résolution d'équation dans $\mathbb{C}$.

$(E_1): Z^2-3Z+2=0$. $\Delta=(-3)^2-4\times 2=1$

$Z_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2}; Z_2=\frac{3-\sqrt{1}}{2}$. Donc $S_{\mathbb{C}}=\{2;1\}$

$(E_2): -Z^2-(1-2i)Z+2i=0$ $\Delta=(1-2i)^2-4(-1)(+2i)$. $\Delta=-3+4i$

Soit $\delta=x+iy$ une racine carré de Δ.

$\delta^2=\Delta$ et $|\delta^2|=|\Delta|$

$(x+iy)^2=-3+4i$ et $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}$

$$\begin{cases} x^2-y^2=-3 & (1)\\ x^2+y^2=5 & (2)\\ 2xy=4 & (3)\end{cases}$$

$(1)+(2)\Leftrightarrow 2x^2=2 \Leftrightarrow x^2=1 : \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

Pour $x=1$, $2xy=4\Leftrightarrow y=2$, donc $\delta=1+2i$

$Z_1=\frac{1-2i+\delta}{-2}=\frac{1-2i+1+2i}{-2}=-1$

$Z_2=\frac{1-2i-\delta}{-2}=\frac{1-2i-1-2i}{-2}=2i$

$S_{\mathbb{C}}=\{-1;2i\}$

$(E_3): Z^2+Z+1=0$. $\Delta = 1^2-4(1)=-3$

Une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$. Donc

$Z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $Z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

(E_4) $iZ^2+(2+6i)Z+2+11i=0$

$\Delta=(2+6i)^2-4(i)(2+11i)$

$\Delta=12+16i$

Soit $\delta = x+iy$ une racine carrée de Δ sous forme algébrique.

On a $\delta^2=\Delta$ et $|\delta^2|=|\Delta|$

$(x+yi)^2=12+16i$ et $x^2+y^2=20$

Soit $\begin{cases} x^2-y^2=12 & (1) \\ x^2+y^2=20 & (2) \\ 2xy=16 & (3)\end{cases}$

(1) + (2) $\Rightarrow$ $2x^2=32 \Leftrightarrow x^2=16$

$x=4$ ou $x=-4$

Pour $x=4$ on a $2xy=16 \Rightarrow y=2$

$\delta=4+2i$

$Z_1=\dfrac{-2-6i+\delta}{2i}=\dfrac{-2-6i+4+2i}{2i}=$ - 2 -i

$Z_2=\dfrac{-2-6i-\delta}{2i}=\dfrac{-2-6i-4-2i}{2i}=$ - 4+3i

$S_{\mathbb{C}}=\{-2-i;-4+3i\}$

$(E_5): Z^2+2iZ-1=0$. $\Delta=(2i)^2-4(-1)=-4+4=0$

$Z_0=\dfrac{-2i}{2}=-i$. $S_{\mathbb{C}}=\{-i\}$

Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(E_1) : $z^2+4=0$; (E_2) : $iz^2-(1+3i)z+3=0$; (E_3): $z^2-4z+5=0$;

(E_4) : $4z^2+2z+5=0$; (E_5): $z^2-i2z+1=0$; (E_6): $iz^2+2z+3i=0$;.

(E_7) $Z^2+2(1+i)Z+2i=0$; (E_8) : $2iz^2+6z-7i=0$; (E_{10}): $z^2+(\sqrt{3}-7i)z-4(3+i\sqrt{3})=0$.

Exercice 20

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-z-2=0$
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ des équations suivantes.

a) $(z+1)^2-(z+1)-2=0$; b) $\dfrac{2i}{z^2}-\dfrac{1+i}{z}-2=0$.

Exercice*21

Soit P le polynôme défini par : $P(Z)=Z^3-(11+2i)Z^2+2(17+7i)Z-42$

1. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel α solution de l'équation $P(Z)=0$
2. Déterminer le polynôme Q tel que $P(Z)=(Z-\alpha)Q(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(Z)=0$.

<u>Corrigé de l'exercice 21</u>

$P(Z) = Z^3 - (11+2i)Z^2 + 2(17+7i)Z - 42$

1. Soit α un nombre réel solution de l'équation (E) : $P(Z) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - (11+2i)\alpha^2 + 2(17+7i)\alpha - 42 = 0$

$\Rightarrow \alpha^3 - 11\alpha^2 - 2\alpha^2 i + 34\alpha + 14\alpha i - 42 = 0$

$$\begin{cases} \alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42 = 0 & (1) \\ -2\alpha^2 + 14\alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow -2\alpha^2 + 14\alpha = 0$

$\alpha(-2\alpha + 14) = 0$

$\alpha = 0$ ou $\alpha = 7$

Dans (1) On a : $0^3 - 11\times 0^2 + 34\times 0 - 42 \neq 0$

$7^3 - 11\times 7^2 + 34\times 7 - 42 = 0$

Donc $\alpha = 7$

7 est donc le seul nombre réel solution de (E).

2.Soit Q le polynôme tel $P(Z) = (Z-7)Q(Z)$

Déterminons Q par la méthode d'identification

$P(Z) = (Z-7)Q(Z)$ avec $Q(Z) = aZ^2 + bZ + c$

$P(Z) = (Z-7)(aZ^2 + bZ + c)$

$P(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ - 7aZ^2 - 7bZ - 7c$

$P(Z) = aZ^3 + (b-7a)Z^2 + (c-7b)Z - 7c$

Par identification On a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 7a = -11 - 2i \\ c - 7b = 34 + 14i \\ -7c = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 - 2i \\ c = 6 \end{cases}$$

Donc $Q(Z) = Z^2 - (4+2i)Z + 6$

3. (E) $\Leftrightarrow (Z-7)(Z^2 - (4+2i)Z + 6) = 0$

$\Leftrightarrow Z = 7 \; ou \; (Z^2 - (4+2i)Z + 6) = 0$

<u>Résolvons</u> $Z^2 - (4+2i)Z + 6 = 0$

$\Delta = (4+2i)^2 - 4 + 6 = -12 + 16i$

Soit $\delta = x + yi$ une racine carrée de Δ.

On a $\delta^2 = \Delta$ et $|\delta^2| = |\Delta|$

$(x+yi)^2 = 12 + 16i$ et $x^2 + y^2 = \sqrt{(12)^2 + (16)^2}$ =20

$$\text{Soit} \begin{cases} x^2 - y^2 = -12 & (1) \\ x^2 + y^2 = 20 & (2) \\ 2xy = 16 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) $\Rightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4$

$x = 2$ ou $x = -2$

Pour $x = 2$ on a $2xy = 16 \Rightarrow y = 4$

$\delta = 2 + 4i$

$Z_1 = \dfrac{4 + 2i + 2 + 4i}{2} = 3 + 3i$

$Z_2 = \dfrac{4 + 2i - 2 - 4i}{2} = 1 - i$. L'ensemble de solution de (E) est donc $S_{\mathbb{C}} = \{7; 3+3i; 1-i\}$.

Exercice 22

Soit P le polynôme défini par : $P(Z)=Z^4+(5-2i)Z^3+(8-10i)Z^2+(6-16i)Z-12i$

1.Vérifier que : $P(2i)=P(-3)=0$.

2. Déterminer le polynôme Q du second degré tel que pour tout nombre complexe Z, on a
$P(Z)=[Z^2+(3-2i)Z-6i]Q(z)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(Z)=0$.

Exercice *23

On munit le plan d'un repère orthonormé direct (O,I,J). Dans chacun des cas suivants, déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M dont l'affixe Z vérifie la condition proposée :

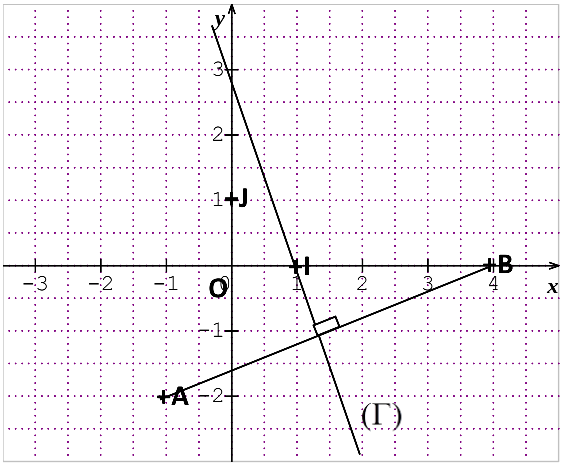
a) $|Z+1+2i|=|Z-4|$; b) $|Z-3i|=2$; c) $\left|\bar{z}-2+i\right|=1$. ; d) $|iZ-(1+i)|=1$; e) $\left|\dfrac{Z+(2-i)}{Z}\right|=1$.

Corrigé de l'exercice 23

$a)|Z+1+2i|=|Z-4|$

Soit A le point d'affixe $Z_A=-1-2i$ et B le point d'affixe $Z_B=4$.

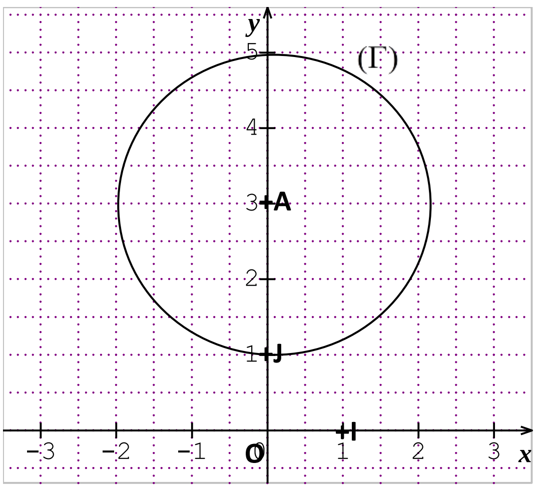
On a $|Z-Z_A|=|Z-Z_B| \Leftrightarrow$ MA = MB. (Γ) est donc la médiatrice du segment [AB].



$b)|Z-3i|=2$

Soit A le point d'affixe $Z_A=3i$

On a $|Z-Z_A|=2 \Leftrightarrow$ MA = 2. (Γ) est donc le cercle de centre A et de rayon 2.



$c)\left|\overline{Z}-2+i\right|=1$

Posons $Z=x+yi$ et $\overline{Z}=x-yi$ avec $M(x;y)$

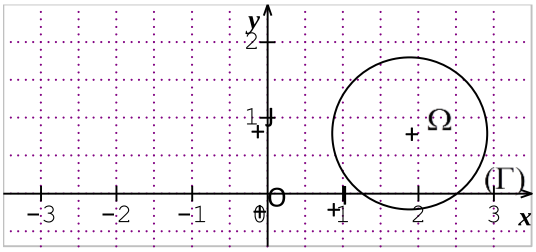
$|x-yi-2+i|=1 \Leftrightarrow |x-2+i(1-y)|=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(1-y)^2}=1$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(1-y)^2=1$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=1$

(Γ) est donc le cercle de centre $\Omega(2;1)$ et de rayon 1.



$d)\left|iZ-(1+i)\right|=\left|Z+1\right|$

Posons $Z=x+yi$ et $\overline{Z}=x-yi$ avec $M(x;y)$

$|i(x-iy)-1-i|=|x+iy+1|$

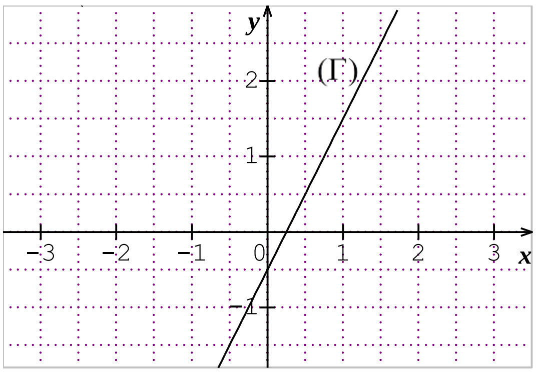
$|xi-y-1-i|=|x+1+iy|$

$\sqrt{(-y-1)^2+(x-1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$y^2+x+2y-2x+2=x^2+y^2+2x+1$

$2y-4x+1=0$ Donc $y=2x-\dfrac{1}{2}$

(Γ) est donc la droite d'équation $y=2x-\dfrac{1}{2}$



$e)\left|\dfrac{Z+(2-i)}{Z}\right|=1$ Avec $Z\neq 0$

On $|Z+(2-i)|=|Z|$

Soit A le point d'affixe $Z_A=-2+i$

et O le point d'affixe $Z_O=0$

On a $|Z-Z_A|=|Z-Z_o| \Leftrightarrow$ MA = MO. (Γ) est donc la médiatrice du segment [OA].

Exercice 24

On munit le plan d'un repère orthonormé direct (O, e_1, e_2)

1.a) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points m d'affixe z tel que : $|Z+4-2i|=|3i-Z|$.

b) Justifier que le point $E(-3+\frac{13}{2}i)$ appartient à (Δ)

2.a) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points m d'affixe z tel que : $|2iz-4|=8$.

b) Déterminer les points d'intersection de l'ensemble (C) et de l'axe des imaginaires.

Exercice 25

le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

A tout nombre complexe z distinct de –i, on associe le nombre complexe Z = $\frac{z+1-2i}{z+i}$.

Déterminer et représenter :

a) L'ensemble (E_1) des points M d'affixes z telle que Z soit un réel.

b) L'ensemble (E_2) des points M d'affixes z telle que Z soit un imaginaire pur.

c) L'ensemble (E_3) des points M d'affixes z telle que $|Z| = 1$.

d) L'ensemble (E_4) des points M d'affixes z telle que Z soit un réel strictement négatif.

e) L'ensemble (E_5) des points M d'affixes z telle que ARG (Z) = $\frac{\pi}{2}$

Exercice 26

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E) : $z^3 = 4\sqrt{2}$ (1+i). (On donnera les solutions sous forme trigonométrique).

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E′) : $z^3 = 1$ (On donnera les solutions sous forme algébrique).

3) Vérifier que $(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3 = 4\sqrt{2}$ (1+i) .

4) a- En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique.

b- En déduire les valeurs exactes de cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$.

Exercice*27

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : a = - i, b = - 2 + 3i, c = 2 + 5i et d = 2 – i.

1°) Faire une fiqure et placer les points A, B, C et D.

2°) Calculer $\frac{a-b}{c-b}$; En déduire la nature du triangle ABC.

3°) Démontrer que les points A, B, C et D sont cocycliques et déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABCD .

4°) Soit E le point d'affixe e = $-1+\frac{7}{2}i$

Calculer le rapport $\frac{b-e}{c-e}$ et donner une interprétation géométrique.

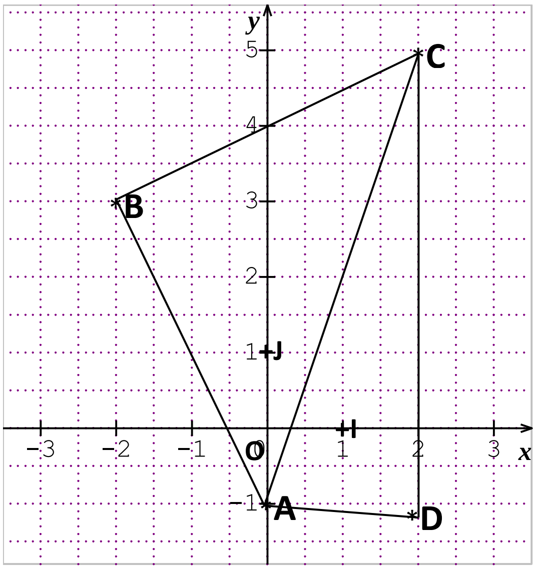
Corrigé de l'exercice 27

1) Voir figure

2) $\frac{a-b}{c-b} = \frac{-i+2-3i}{2+5i+2-3i} = -i$

$\left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1$ et $\frac{a-b}{c-b} \in i\mathbb{R}^*$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en B



3) D'après **2)** ABC est un triangle rectangle en B .

Soit Ω le milieu du segment [AC]

$$Z_\Omega = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{-i+2+5i}{2} = 1+2i$$

On a $\Omega A = |Z_A - Z_\Omega| = |-i-1-2i| = \sqrt{10}$

$$\Omega D = |Z_D - Z_\Omega| = |2-i-1-2i| = \sqrt{10}$$

$$\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \sqrt{10}$$

Donc A,B,C et D Sont cocycliques Car ils appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{10}$.

4) $\dfrac{b-e}{c-e} = \dfrac{-2+3i+1-\frac{7}{2}i}{2+5i+1-\frac{7}{2i}}$

$$\frac{b-e}{c-e} = -\frac{1}{3}$$

Interprétation graphique.

$\dfrac{b-e}{c-e} \in \mathbb{R}^*$ donc les points B,E et C sont alignées.

Exercice 28

Soit le polynôme $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)\, z^2 + (1 - i\sqrt{3})\, z - i$ ($z \in \mathbb{C}$).

1- Démontrer que l'équation (E) : P(z) = 0 admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2- a) Déterminer le polynôme Q(z) de degré 2 tel que $P(z) = (z - z_0)\, Q(z)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3- Ecrire chacune des solutions de (E) sous forme trigonométrique.

4 – Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), unité : 2 cm.

On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = \sqrt{3} + i$, et $z_C = \sqrt{3} - i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère (O, I, J).

b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ puis donner le résultat sous forme exponentielle.

c) En déduire la nature du triangle ABC.

5- Soit D le symétrique de B par rapport à O.

a) Déterminer l'affixe z_D de D.

b) Justifier que les points A, B, C et D appartiennent a un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

c) Quelle est la nature du triangle ADC ? Justifier votre réponse.

6- Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que $\left|\frac{z-2i}{z-\sqrt{3}+i}\right| = 1$.

Exercice 29

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I,J). Unité :2cm.

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 + (-1+2i)z^2 - 3z - (1+2i)$

1. Démontrer que P admet une unique racine imaginaire pure que l'on déterminera

2. Déterminer le polynôme complexe Q tel que $P(z) = (z+i)Q(z)$

3. Calculer $(3-i)^2$ puis résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, Q(z) = 0$.

4. Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.

5. On considère les nombres complexes $z_A = -1, z_B = -i, z_{\mathbb{C}} = 20 - i$ et $z_D = 3i$.

a) Placer les points A, B, C, et D dans le repère (O, I, J).

b) Démontrer que le triangle ACD est rectangle isocèle de sens direct.

6. On désigne par Ω le point d'affixe $1+i$.

a) Placer Ω.

b) Démontrer que le triangle $B\Omega D$ est isocèle en Ω

7. Justifier que Ω est le milieu segment $[DC]$ puis déduire de ce qui précède que les point A, B, C et D appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 30

I. 1) Résoudre l'équation $z \in \mathbb{C},\ z^2 - (2+i)z + 2i = 0$.

2) On considère le polynôme définie de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - (1-i)z^3 - iz^2 - (2+2i)z - 4$.

a) Calculer P(-1) et vérifier que P(-2i) = 0.

b) En utilisant les résultats précédents, résoudre l'équation P(z) = 0.

II . Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).unité 2 cm, on donne les points A, B et K d'affixes respectives -2i ; 2 et -1

1) Faire une figure soignée

2) Démontrer que le quadrilatère ABJK est un trapèze isocèle

Leçon 7 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

Exercice 1

Répondre par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

	Affirmations	Réponses
1	L'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ est $[0;+\infty[$	
2	La fonction exponentielle est la dérivée de la fonction logarithme népérien	
3	La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien	
4	La fonction exponentielle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	
5	Les courbes représentatives des respectives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la première bissectrice	
6	la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$	

Exercice 2

Pour chacune ders affirmations suivantes, choisir la bonne réponse.

	Affirmations	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	u étant une fonction dérivable, on a	$(\mathrm{e}^{u})' = u\mathrm{e}^{u'}$	$(\mathrm{e}^{u})' = \mathrm{e}^{u'}$	$(\mathrm{e}^{u})' = u'\mathrm{e}^{u}$
2	u étant une fonction dérivable sur un intervalle K, une primitive sur K de $u'\mathrm{e}^{u}$ est	e^{u}	$\mathrm{e}^{u'}$	$u'\mathrm{e}^{u}$
3	$\mathrm{e}^{\ln(4)}.\mathrm{e}^{\ln(3)}$ est égal à	1	12	7
4	e^{-x} est égal à	$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$	$1-\mathrm{e}^{x}$	$\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}$

Exercice 3

x désigne un nombre réel strictement positif. Simplifier chacune des expressions suivantes :

$A = e^{\ln 3}$; $B = e^{(x+\ln 3)}$; $C = e^{2\ln 4}$; $D = e^{x+\ln x}$; F =; $(e^{x}+2)(e^{x}-2)$

$G = e^{\ln 4 - \ln 3}$; $H = \dfrac{e^{x}}{e^{2x}}$; $I = \dfrac{e^{x}-1}{e^{2x}-1}$; $K = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}+1}$.

Exercice* 4

Calculer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x}+x+1)$; **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}-x^{2})$; **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$; **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}e^{-x}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|$; **6)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x}-e}{x-1}$; **7)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{2}e^{\frac{1}{x}}$; **8)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-e^{x}}{e^{x}+1}$

Corrigé de l'exercice 4

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}+x+1 = -\infty$ Car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty\end{cases}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}(1-\frac{x^2}{e^{x}}) = +\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ $\;et\; \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x}} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{(e^{x}-1)(e^{x}+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0}(e^{x}+1)\frac{(e^{x}-1)}{x}$

Or $= \lim\limits_{x\to0} e^{x}+1 = e^{0}+1 = 2$ et $= \lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$

Donc $= \lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x} = 2$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x}} = 0$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|x^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty}\left|e^{\frac{x}{2}}(1-e^{\frac{x}{2}})\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}}\left|(1-e^{\frac{x}{2}})\right| \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}}\left(-1+e^{\frac{x}{2}}\right)$

Posons $\frac{x}{2} = X$. Quand $x \to +\infty$; $X \to +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right| = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}(-1+e^{X}) = +\infty$. Car $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x}-e}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x}-e^{1}}{x-1}$

Posons $e^{x} = f(x)$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x}-e}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$

Or $= f'(x) = e^{x}$. Donc $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x}-e}{x-1} = e^{1} = e$.

7) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} x^2e^{\frac{1}{x}}$. Posons $\frac{1}{x} = X$; $x = \frac{1}{X}$

Quand $x \underset{>}{\to} 0$; $X \to +\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} x^2e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{X^2}e^{X} = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^{X}}{X^2} = +\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-e^{x}}{e^{x}+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}(\frac{x}{e^{x}}-1)}{e^{x}(1+\frac{1}{e^{x}})} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{e^{x}}-1}{1+\frac{1}{e^{x}}} = \frac{-1}{1} = -1$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}} = 0\end{cases}$

<u>Exercice 5</u>

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}-e^{-2x}+x-1$; **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$; **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln3}-x$; **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^{2x}$; **6)** $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ >}}\left(x+2\right)e^{\frac{-x+1}{x+2}}$; **7)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{X}+\ln x)$; **8)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}+x+1)$; **10)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{x}\left[\ln\left(x^{2}\right)+\frac{2}{x}\right]$; **11)** $\lim\limits_{x\to+\infty}[x(e^{x}+\frac{1}{x}-1)]$; **12)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{xe^{x}}{1+e^{x}})$;

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{xe^{x}}{1+e^{x}}-x)$; **14)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{x^{2}}{e^{x}-1})$; **15)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^{2}}}$; **16)** $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)e^{\frac{1}{|x|}}$

17.) $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}+5x)$; **18)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+4}{e^{2x}+3}$; **19)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{xe^{x}-x}{x^{2}})$; **20)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{-x}+x-2)$.

<u>Exercice* 6</u>

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $e^{3x+2}=e$; **b)** $e^{2x}-9=0$; **c)** $e^{2x}-5e^{x}+4=0$;

d) $e^{x}=-\frac{1}{2}$; **e)** $e^{x}+3=4e^{-x}$; **f)** $\ln(e^{x}-5)=0$

<u>Corrigé de l'exercice</u> 6

a) $e^{3x+2}=e$

$\Leftrightarrow 3x+2=\ln e \Leftrightarrow 3x+2=1 \Leftrightarrow 3x=-1$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ donc $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

b) $e^{2x}-9=0 \Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^{2}-3^{2}=0$

$\Leftrightarrow \left(e^{x}-3\right)(e^{x}+3)=0$

$\Leftrightarrow e^{x}-3=0$ car $e^{x}+3\neq 0$.

$\Leftrightarrow e^{x}=3$

$\Leftrightarrow x=\ln 3$

Donc $S_{\mathbb{R}}=\{\ln 3\}$.

c) $e^{2x}-5e^{x}+4=0$

Posons $e^{x}=X$ (avec $X>0$)

$X^{2}-5X+4=0$. $\Delta=(-5)^{2}-4(4)=9$

$X_{1}=\frac{5-3}{2}=1$ et $X_{2}=\frac{5+3}{2}=4$

$e^{x}=1$ ou $e^{x}=4$

$x=\ln 1$ ou $x=\ln 4$.

Donc $S_{\mathbb{R}}=\{0;\ln 4\}$

d) $e^{x}=-\frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}}=\varnothing$ car $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x}>0$

e) $e^{x}+3=4e^{-x}$

$\Leftrightarrow e^{x}-4e^{-x}+3=0$

$\Leftrightarrow \quad e^x - \dfrac{4}{e^x} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$. Posons $X = e^x (X > 0)$

$X^2 + 3X - 4 = 0$. $\Delta = 3^2 - 4(-4) = 25$

$X_1 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$

$e^x = 1$ ou $e^x = -4$ (*Impossible*)

$x = 0$.

Donc $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

f) $\ln(e^x - 5) = 0$

Soit Ev l'ensemble de validité

$x \in Ev \Leftrightarrow e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x > 5 \Leftrightarrow x > \ln 5$

$Ev =]\ln 5; +\infty[$.

$x \in Ev : \ln(e^x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow e^x - 5 = 1 \Leftrightarrow e^x = 6 \Leftrightarrow x = \ln 6$

$\ln 6 \in Ev$. Donc $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 6\}$.

Exercice 7

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $e^x - 1 = 0$; **b)** $e^x = e^{-x}$; **c)** $e^x + 1 = 0$; **d)** $e^x(e^x - 16) = 0$;

e) $(2e^x - 1)(e^x - 2) = 0$; **f)** $e^{2x} - e^x = 0$; **g)** $\ln(e^{x+1}) = 0$; **h)** $e^{(1-2\ln x)} = 1$;

i) $e^{3\ln(\sqrt{x})} = 1$; **j)** $e^{2x} + e^x - 2 = 0$; **k)** $2e^{2x} + 3e^x - 5 = 0$; **l)** $4e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$;

m) $e^x + e^{-x} - 2 = 0$; **n)** $e^{2x+1} - e^{x+1} - 2e = 0$; **o)** $e^{x-2} = 1$; **p)** $e^{-x+4} - 3 = 0$;

q) $e^{-x+3} + 4 = 3$; **r)** $e^{2x} - 5e^x - 6 = 0$; **s)** $3e^{4x} + 5e^{2x} - 2 = 0$; **t)** $e^x = \dfrac{1}{2}$;

u) $e^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **;** **v)** $e^{x+3} = e^{2x-1}$; **w)** $2e^x - 3e^{-x} = -5$ **.**

Exercice* 8

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $e^{x-3} \geq 1$; **b)** $\dfrac{e^x + 3}{e^x - 1} < e^x$ **;** **c)** $e^{4-x} < 0$ **;**

d) $e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$; **e)** $(e^{2x}-1)(3-e^x) > 0$ **;** **f)** $e^x - e^{-x} > 0$

Corrigé de l'exercice 8

a) $e^{x-3} \geq 1$

$\Leftrightarrow x - 3 \geq \ln 1 \Leftrightarrow x \geq 3$. $S_{\mathbb{R}} = [3; +\infty[$

b) $\dfrac{e^x + 3}{e^x - 1} < e^x$

Soit Ev l'ensemble de validité

$x \in Ev \Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. $Ev = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \in Ev : \dfrac{e^x + 3}{e^x - 1} < e^x \Leftrightarrow \dfrac{e^x + 3}{e^x - 1} - e^x < 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x + 3 - e^{2x} + e^x}{e^x - 1} < 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{e^{2x}+2e^x+3}{e^x-1}<0 \Leftrightarrow -\frac{(e^x+1)(e^x-3)}{e^x-1}<0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(e^x-3)}{e^x-1}<0 \quad \text{car } (e^x+1)>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x-3}{e^x-1}>0$$

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
e^x-3		-		-	0	+	
e^x-1		-	0	+		+	
$\dfrac{e^x-3}{e^x-1}$		+	‖	-	0	+	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty;0[\cup]\ln 3;+\infty[$

c) $e^{4-x}<0 \quad S_{\mathbb{R}}=\varnothing \quad$ Car $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x>0$

d) $e^{2x}+e^x-2\geq 0$

Posons $X=e^x (X>0)$

On a: $X^2+X-2\geq 0$

$\Delta=1^2-4(-2)=9$. $X_1=1$ et $X_2=-2$

Soit $(X-1)(X+2)\geq 0$

$(e^x-1)(e^x+2)\geq 0 \Leftrightarrow e^x-1\geq 0$ Car $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x+2\geq 0$

$\Leftrightarrow e^x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 0$. $S_{\mathbb{R}}=[0;+\infty[$.

e) $(e^{2x}-1)(3-e^x)>0$

Tableau de signe

$e^{2x}-1>0 \qquad 3-e^x>0$

$e^{2x}>1 \qquad -e^x>-3$

$2x>0 \qquad e^x\leq 3$

$x>0 \qquad x<\ln 3$

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$e^{2x}-1$		-	0	+		+	
$3-e^x$		+		+	0	-	
$(e^{2x}-1)(3-e^x)$		-	0	+	0	-	

$S_{\mathbb{R}}=]0;\ln 3[$

f) $e^x-e^{-x}>0 \Leftrightarrow e^x-\dfrac{1}{e^x}>0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}>0$

$\Leftrightarrow e^{2x}-1>0$ car $\forall x\in\mathbb{R}\ e^x>0$

$\Leftrightarrow (e^x-1)(e^x+1)>0$

$\Leftrightarrow e^x-1>0$ car $\forall x\in\mathbb{R}\ e^x+1>0$

$\Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$ donc $S_{\mathbb{R}}=]0;+\infty[$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants :

(S$_1$) $\begin{cases} e^x + e^y = 2 \\ 3e^x - 2e^y = 11 \end{cases}$ (S$_2$) $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$ (S$_3$) $\begin{cases} 2e^x + 3e^y = 1 \\ e^x - 5e^y = 7 \end{cases}$.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonctions f et la dérivée f '.

1) $f(x) = e^{-x} + 2e^x$; **2)** $f(x) = e^{x^2+1}$; **3)** $f(x) = \ln\left(1+e^x\right)$; **4)** $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$;

5) $f(x) = (2x+1)e^{2x}$; **6)** $f(x) = e^{-x}(1-x)+1$; **7)** $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$; **8)** $f(x) = e^x \ln x$.

Exercice* 11

Dans chacun des cas suivants , déterminer une primitive F de la fonction numérique f sur un intervalle I que l'on précisera.

1) $f(x) = e^{1-x}$; 2) $f(x) = \dfrac{-e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; 3) $f(x) = (-2x+5)e^{-x^2+5x-2}$;1)

4) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; 5) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$; 6) $f(x) = \dfrac{e^{3x} + 2e^{2x} + 3e^x - 1}{e^x}$.

Corrigé de l'exercice 11

1) $f(x) = e^{1-x} = -(-e^{1-x})$

$f(x) = -(1-x)'e^{(1-x)}$

Donc $F(x) = -e^{1-x}$ $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{-e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{-(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = -\dfrac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}}$

Donc $F(x) = -\ln\left|e^x + e^{-x}\right|$

$F(x) = -\ln(e^x + e^{-x})$ $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = (-2x+5)e^{-x^2+5x-2}$

$f(x) = (-x^2+5x-2)'e^{-x^2+5x-2}$

Donc $F(x) = e^{-x^2+5x-2}$: $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = -(\dfrac{-1}{x^2})e^{\frac{1}{x}} = -(\dfrac{1}{x})'e^{\frac{1}{x}}$

Donc $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$ $I =]0;+\infty[$

5) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = 1 - \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$f(x) = 1 - \dfrac{(1+e^x)'}{1+e^x}$

Donc $F(x) = x - \ln\left|1+e^x\right| = x - \ln(1+e^x)$ $I = \mathbb{R}$

6) $f(x)=\dfrac{e^{3x}+2e^{2x}+3e^{x}-1}{e^{x}}$

$f(x)=e^{2x}+2e^{x}+3-\dfrac{1}{e^{x}}=e^{2x}+2e^{x}+3-e^{-x}$. Donc $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+2e^{x}+3x+e^{-x}$ $\quad I=\mathbb{R}$

Exercice 12

Le but de l'exercice est de déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction numérique définie par f(x) = $x^3.e^{-x^2}$ en utilisant deux méthodes.

1) On pose F(x) = (ax^2 + bx c)e^{-x^2} où a, b et c sont des constantes réelles.

a) Calculer la dérivée F'(x) de F pour tout x réel.

b) Déterminer les réels a, b et c pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par g(x)= $x^2.e^{-x^2}$ et h(x) = $x.e^{-x^2}$.

a) Déterminer une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer g'(x) , puis montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, f(x) = h (x) - $\dfrac{1}{2}g'(x)$.

c) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la primitive F_0 de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Problème* 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2-x)e^{x}$ et on désigne par (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité 1 cm.

1) Calculer la limite de f en en -∞ et interpréter graphiquement le résultat.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

3) a- Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(1-x)e^{x}$.

b- Etudier le signe de f '(x) et en déduire le sens de variation de f.

c- Dresser le tableau de variation de f.

4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Cf) avec les axes (OI) et (OJ).

5) Construire (Cf). *On prendra e ≈ 2,7.*

Corrigé du problème 1

$f(x)=(2-x)e^{x}$ $\qquad Df=\mathbb{R}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}-xe^{x}=0$

Car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0\end{cases}$

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale $à(Cg)en-\infty$.

2) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^{x}=-\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}2-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-x)e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)e^{x}=-\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{x}=-1\\ \lim e^{x}=+\infty.\end{cases}$

Interprétation graphique :

(Cg) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$

3) a. $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\left((2-x)e^{x}\right)'$

$f'(x)=(2-x)'e^{x}+(2-x)(e^{x})'$

$= -e^x + (2-x)e^x \;\; = -e^x + 2e^x - xe^x$

$= e^x - xe^x$

$f'(x) = e^x(1-x)$

b. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$

$1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$

Donc $\forall x \in]-\infty;1[\ f'(x) > 0$

$\forall x \in]1;+\infty[\ f'(x) < 0$ et $f'(1) = 0$

Donc sur $]-\infty;1[$ f est strictement croissante et sur $]1;+\infty[$ f est strictement décroissante.

c. Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e	↘	$-\infty$

4) • $(Cf)\cap(OJ)$.

$f(0) = (2-0)e^0 = 2$

Donc (Cf) et (OJ) se coupent au point $A(0;2)$

• $(Cf)\cap(OI)$. Résolvons l'équation $f(x) = 0$

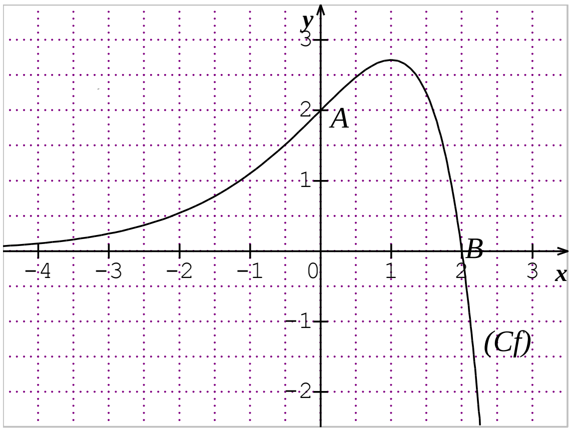
$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^x = 0$

$\Leftrightarrow 2-x = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

Donc (Cf) et (OI) se coupe au point $B(2;0)$

5) construction de (Cf)



Problème *2

On considère la fonction f définie sur IR par : f (x) = $(x+2)e^{-\frac{x}{2}}+1$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). (Unité 1 cm).

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et donner une interprétation graphique du résultat.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et démontrer que (C) admet une branche parabolique de direction(OI) en -∞.

3. a) Calculer f'(x) pour tout x élément de IR.
   b) Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique ß dans IR.

d) Donner un encadrement de ß d'amplitude 10^{-1}.

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2 a pour équation :

$y = \frac{-x}{e} + \frac{6}{e} + 1.$

5. Pour étudier les positions relatives de (C) et (T), on considère la fonction h définie sur IR par

h(x) = $f(x) + \frac{x}{e} - \frac{6}{e} - 1$.

a) Calculer les dérivées successives h'(x) et h''(x) pour tout x élément de IR.

b) Déterminer le signe de h''(x) et en déduire le tableau de variation de h'.

c) En déduire le signe de h'(x) et le tableau de variation de h.(*on ne demande pas les limites*).

d) Calculer h(2) puis en déduire le signe de h(x).

e) Déduire de ce qui précède les positions relatives de (C) et (T),

6. Construire (C) et (T) dans le même repère ainsi que d'éventuelle asymptote.

Corrigé du problème 2

$(f) = (x+2)e^{-\frac{x}{2}} + 1$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)e^{-\frac{x}{2}} + 1$

Posons $X = -\frac{x}{2}; x = -2X$,quand $x \to +\infty : x \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} (-2X+2)e^{X} + 1$

$= \lim\limits_{X\to-\infty} -2Xe^{X} + 2e^{X} + 1 = 1 \; Car \begin{cases} \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0 \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0 \end{cases}$

Interprétation graphique

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale $à(C)en+\infty$.

2. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+2)e^{-\frac{x}{2}} + 1$

Posons $X = -\frac{x}{2}; x = -2X$,Quand $x \to -\infty; X \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} (-2X+2)e^{X} + 1 = -\infty$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} -2X+2 = -\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty \end{cases}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)e^{x} + \frac{1}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x} = 1,\; \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \; et \lim \frac{1}{x} = 0$

Interprétation graphique

(C) admet une branche parabolique de direction (OI) $en\ -\infty$.

3.a) $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = ((x+2)e^{-\frac{x}{2}} + 1)'$

$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + (x+2)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$

$= e^{-\frac{x}{2}}(1 - \frac{1}{2}x - 1) = -\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}}.$

b) $\forall x \in \mathbb{R}; e^{-\frac{x}{2}} > 0$. Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-\frac{1}{2}x$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x > 0 \Leftrightarrow \quad x < 0$.

$\forall x \in]-\infty; 0[\ f'(x) > 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[\ f'(x) < 0$

$f'(0) = 0$

Sur $]-\infty; 0[$ f est strictement croissante

Sur $]0; +\infty[$ f est strictement décroissante

<u>Tableau de variation de</u> f .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

c) Sur $]-\infty; 0]$ f est continue et strictement croissante

$f(\ ]-\infty; 0[\ ) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); f(0)] \quad =]-\infty; 3]$

$0 \in]-\infty; 3]$ Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]-\infty; 0[$

*Sur $]0; +\infty[$ f est continue et strictement décroissante

$f(\ ]0; +\infty[\ ) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); f(0)[\quad =]1; 3[$

f réalise donc une bijection $]0; +\infty[$ sur $]1; 3[$ .Or $0 \notin]1; 3[$,donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]0; +\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans $\mathbb{R}$.

d) <u>Encadrement de</u> β

Sur $[-3; -2]$ f est continue et strictement croissante

$f(-3) = -e^{\frac{3}{2}} + 1 < 0$, $f(-2) = 1 > 0$

$f(-3) \times f(-2) < 0$. Donc $\beta \in]-3; -2[$

Encadrement de β par la méthode de balayage

x	-3			-2,4	-2,3	-2,2	-2,1	-2
$f(x)$	-			-	+	+	+	+

$f(-2,4) \times f(-2,3) < 0$. Donc $-2,4 < \beta < -2,3$

4. <u>Equation de</u> (T)

$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$f'(2) = -e^{-1}$: $f(2) = 4e^{-1} + 1$

$(T): y = -e^{-1}(x-2) + 4e^{-1} + 1$

$= -e^{-1}x + 2e^{-1} + 4e^{-1} + 1$

$(T): y = -\dfrac{x}{e} + \dfrac{6}{e} + 1$.

5. a) $h(x) = f(x) + \frac{x}{e} - \frac{6}{e} - 1$

$$h'(x) = f'(x) + \frac{1}{e} \quad = -\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{e}$$

$$h''(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + (-\frac{1}{2}x)(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}})$$

$$h''(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$$

$$h''(x) = e^{-\frac{x}{2}}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x)$$

b) $h''(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x > 2$

$\forall x \in]-\infty; 2[\, h''(x) < 0$ et $\forall x \in]2; +\infty[\, h''(x) > 0$

<u>Tableau de variation de</u> h'

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h''(x)$		-	0	+	
$h'(x)$		↘	0	↗	

c) D'après le tableau de variation de h', 0 est le minimum de h' sur $\mathbb{R}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \geq 0$

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Tableau de variation de</u> h

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	+	
$h(x)$		↗	0	↗	

d) $h(2) = (2+2)e^{-1} + 1 + \frac{2}{e} - \frac{6}{e} - 1 = 0$

h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $\forall x \in]-\infty; 2[, \quad h(x) < h(2)$

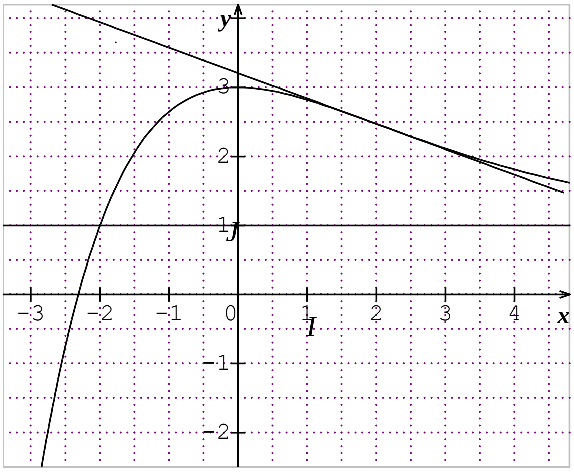
$\forall x \in]2; +\infty[, \; h(x) > h(2)$ .Or $\quad h(2) = 0$

Donc $\forall x \in]-\infty; 2[, h(x) < 0$ et $\forall x \in]2; +\infty[, h(x) > 0$

e) On sait que : $\quad h(x) = f(x) - \left(-\frac{x}{e} + \frac{6}{e} + 1\right)$

Donc d'après **5.d),** sur $]-\infty; 2[$ (C) est au-dessous de (T) et sur $]2; +\infty[$ (C) est au dessus de (T).

6. Construction



Probleme* 3

Soit f la fonction numérique définie sur IR [par : $\begin{cases} f(x) = x e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

(C_f) est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité 2cm.

1) Justifier que f est continue en 0.
2) Justifier que f est dérivable en 0 et et déterminer f '(0).
3) Calculer la limite de f(x) et celle de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
4) Calculer la limite de f(x) en $-\infty$
5) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.
6) On admet que f est dérivable sur]-∞ ; 0[U] 0 ;+∞[.
   a. Démontrer que $\forall x \in]-\infty;0[\bigcup]0;+\infty[$,f'(x) > 0.
   b. En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f sur. $\mathbb{R}$
7) Soit h la restriction de f à l'intervalle]0 ;+∞[Démontrer que h est une bijection de] 0 ;+∞[sur un intervalle J que l'on déterminera.
8) Soit h^{-1}, la bijection réciproque de h de représentation graphique (C').
   Etudier la dérivabilité de h^{-1} en 0 et en donner une interprétation graphique.
9) Construire (D) , (C_f) et (C'dans le même repère.

Corrigé du problème 3

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \quad si\ x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x)\ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} xe^{\frac{1}{x}}$. Posons $\frac{1}{x} = X ; x = \frac{1}{X}$

Quand $x \underset{<}{\to} 0; X \to -\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{X\to -\infty} \frac{1}{X} e^X = 0 \quad \text{Car} \begin{cases} \lim\limits_{X\to -\infty} \frac{1}{X} = 0 \\ \lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} x\ln(1+x) = 0 \times \ln(1) = 0$$

$$f(0) = 0\ln(1+0) = 0$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=f(0)$

Donc f continue en 0.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} e^{\frac{1}{x}}$

Posons $X=\dfrac{1}{x}$ Quand $x\underset{<}{\to}0; X\to-\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}}\dfrac{x\ln(1+x)}{x}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln(1+x)=\ln 1=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+x)=+\infty$

Car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+0}\ln(1+x)=+\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$

<u>Interprétation graphique</u> :

(Cf) admet une branche Parabolique de direction $(OJ) en +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-\frac{1}{x}}$. Posons $\dfrac{1}{x}=X; x=\dfrac{1}{X}$

Quand $x\to-\infty$; $X\underset{<}{\to}0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ <}}\dfrac{1}{X}e^{X}=-\infty$

Car $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ <}}\dfrac{1}{X}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ <}} e^{X}=1$

5) Asymptote oblique $(D): y=x+1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}}-x-1$

Posons $X=\dfrac{1}{x}$; $x=\dfrac{1}{X}$,Quand $x\to-\infty$; $X\underset{<}{\to}0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ <}}\dfrac{1}{X}e^{X}-\dfrac{1}{X}-1$

$=\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ <}}\dfrac{e^{X}-1}{X}-1=0$ Car $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ <}}\dfrac{e^{X}-1}{X}=1$

Donc la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique $à$ (Cf) en $-\infty$.

6) a. $\forall x \in]-\infty;0[\qquad f'(x) = x'(e^{\frac{1}{x}}) + x(e^{\frac{1}{x}})'$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x(-\frac{1}{x^2})e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x}) = e^{\frac{1}{x}}(\frac{x-1}{x})$$

Or $x < 0$, donc $x - 1 < 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 0$

Donc $\forall x \in]-\infty;0[$, $f'(x) > 0$.

$\forall x \in]0;+\infty[;\ f'(x) = \left(x\ln(1+x)\right)'$

$$= x'\ln(1+x) + x(\ln(1+x))'$$

$$= \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

Or $x > 0$ Donc $\ln(1+x) > 0$ et $x + 1 > 0$

Donc $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) > 0$.

<u>Conclusion</u>

$\forall x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[\quad f'(x) > 0$

b. $\forall x \in]-\infty 0[\cup]0;+\infty[\ f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

<u>Tableau de variation de</u> f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

7) Sur $]0;+\infty[$ f est continue et strictement croissante

$f(\ ]0;+\infty[\ ) =]\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[\ =]0;+\infty[.$

Donc h est une bijection de $]0;+\infty[$ sur l'intervalle

$J =]0;+\infty[$.

8) On a $h(0) = 0 \Leftrightarrow h^{-1}(0) = 0$

et $h'(h^{-1}(0)) = h'(0) = f'(0) = 0$

Donc h^{-1} n'est pas dérivable en 0.

<u>Interprétation graphique</u>.

(C') admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

9) <u>Constructions</u>

Problème 4

On considère la fonction f définie sur IR par : f $(x) = 2x+e^{-x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). (Unité 2 cm).

1 Déterminer les limites de f en - ∞ et en $+\infty$.

2. a) Justifier que pour tout nombre réel x, f ’$(x) = \dfrac{2e^x-1}{e^x}$.

b) Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que la droite (Δ) d’équation $y = 2x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

b) Préciser la position relative de (C) par rapport à la droite (Δ).

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d’abscisse 0.

4 .Tracer les droites (Δ) ; (T) et la courbe (C).

Problème 5

On considère la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal; $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité graphique : 4 cm.

Partie A

Soit la fonction *g* définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=x+2-e^x$.

1. Étudier le sens de variation de *g* sur [0 ; +∞[et déterminer la limite de *g* en +∞.

2. *a*) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans [0 ; +∞[.
On note α cette solution.

b) Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.

3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. *a*) Montrer que, pour tout x appartenant à [0 ; +∞[, $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction *f* sur [0 ; +∞[.

2. *a*) Montrer que, pour tout réel positif x, $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

b) En déduire la limite de *f* en +∞. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3. *a*) Établir que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5. *a*) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$,

$$f(x)-x=\frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1} \text{ avec } u(x)=e^x-xe^x-1.$$

b) Étudier le sens de variation de la fonction *u* sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
En déduire le signe de $u(x)$.

c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

6. Tracer (C) et (T).

Partie C

1. Déterminer une primitive F de *f* sur $[0\,;+\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la question **B.2.**

2. On note D le domaine délimité par la courbe (C), la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$
Calculer, en cm^2, l'aire A du domaine D.
Donner une valeur décimale au mm^2 près de l'aire A.

Problème 6

Partie A

Soit g la fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2+(2-x)e^x$.

1) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2) On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g’ sa dérivée.
   a) Déterminer g’ et étudier son signe.
   b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de g.

3) Calculer g(0).

4) Démontrer que l’équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1,5 ; 1,6[$.

5) Déduire des questions précédentes que g est négative sur $]-\infty ; 0[\cup]\alpha ;+\infty[$ et positive sur $]0 ; \alpha[$.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$ et $f(0) = 0$.

(C_f) désigne la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I,J). Unité : 2cm.

1) a) Justifier que f est continue et dérivable en 0.
   b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d’abscisse 0.

2) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique.

3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $f'(x)$ sa dérivée.
   a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$.
   b) En déduire le signe de f' et les variations de f.
   c) Etablir le tableau de variation de f.
   d) Justifier que $f(\alpha) = 2\alpha-\alpha^2$.

4) Soit h la restriction de f à $]-\infty ; 0[$.
   a) Justifier que h est une bijection de $]-\infty ; 0]$ sur un intervalle J que l’on précisera.
   b) Etudier la dérivabilité de h^{-1}, la réciproque de h en 0.

5) Construire (T), (C_f) et la représentation graphique (Γ) de h^{-1} dans le même repère.
   On donne $f(\alpha) \approx 0,7$.

Problème 7

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable sur $]-\infty;0[$ et définie par : $g(x) = x+1+\ln(-x)$

1- Calculer les limites de g à gauche en 0 et en $-\infty$.
2- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3- Démontrer que $\forall x \in]-\infty;0[, g(x) \le 0$.

PARTIE B

Soit f la fonction dérivable sur IR et définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x\ln(-x), \text{si } x < 0 \\ f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}, \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d’un repère orthonormal (O,I,J) : (unité graphique 2cm.)

1- Etudier la continuité de f en 0.

2- Etudier la dérivabilité à gauche de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

3- a) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

b) calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4- a) Démontrer que $\forall x \in]-\infty;0[,\ f'(x) = 2g(x)$

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.

5- Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

6- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat.

7- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

8- Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0;e]$

a) Démontrer que h réalise une bijection de $[0;e]$ sur l'intervalle k que l'on déterminera.

b) On note par h^{-1} la bijection réciproque de h. Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

9- Construire, $(C),(T)$ et son asymptote dans le repère.

PARTIE C

1- Soit t un nombre réel tel que $-1 < t < 0$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I(t) = \int_{-1}^{t} 2x\ln(-x)dx$

b) Calculer, en cm^2 et fonction de t, l'aire $A(t)$ de la partie du plan comprise entre (C). (OI) et les Droites d'équations $x = -1$ et $x = t$

2- Calculer $\lim A(t)$ lorsque t tend vers 0.

Problème 8

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$.

1- Calculer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2- a) Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x-2)e^{1-x}$.

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3- a)Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Justifier que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

c) En déduire que : $\forall\, x \in]-\infty;\alpha[\ g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha;+\infty[\ g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par: $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est 2 cm.

1- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2- a) Démontrer que est une primitive de g .

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3- a) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+2)]$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 2$. Etudier la position relative de (D) par rapport à (C).

4- Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

5- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

6- Démontrer que : $f(\alpha) = 2 + \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$.

7- Justifier que pour tout nombre réel x, $f(-x+2) = \mathrm{e}^{x-1} f(x)$

8- On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On appelle β l'une de ces solutions. Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution.

9- Tracer (D), (T) et (C). (on prendra : $\alpha = 0{,}4$ et $\beta = 2{,}5$).

Partie C

Soit λ un nombre réel strictement positif et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimité par (C), la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

1- Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2- Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Leçon 8 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

Exercice* 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :

a) t la translation de vecteur $\vec{u}(-3;5)$.

b) h l'homothetie de centre $\Omega(1;2)$ et de rapport -3 .

c) r la rotation d'angle $\frac{-\pi}{3}$ et de centre le point K d'affixe i.

d) S la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre le point I.

Corrigé de l'exercice 1

a) Translation de vecteur $\vec{u}(-3;5)$.

$Z' = Z - 3 + 5i$

b) Homothétie de centre $\Omega(1;2)$ et de rapport -3.

$Z' = -3Z + (1+2i)(1+3)$

$Z' = -3Z + 4 + 8i$

c) Rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre le point K d'affixe i .

$Z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}Z + i(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}})$

$Z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}Z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

d) Similitude directe de rapport $\sqrt{2}$,d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre I.

$Z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}Z + 1(1 - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})$

$Z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}Z - i$

Exercice 2

le plan muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

A/ Déterminer l'écriture complexe associée à la transformation du plan dans chacun des cas suivants :

1) La translation τ qui applique $A(1-i)$ sur $B(-2+i)$.

2) L'homothétie h de centre B d'affixe $-1+i$ et de rapport -2 .

3) La rotation r de centre Ω d'affixe $1+i$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

4) La similitude directe S de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de centre E d'affixe $-1-i$.

5) La similitude directe de centre $F(-2i)$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

B/ Soit F $(1-i)$ un point du plan.

1) Déterminer le symétrique de F par rapport à (OI).
2) Déterminer le symétrique de F par rapport à (OJ).
3) Déterminer le symétrique de F par rapport à O.
4) Déterminer le symétrique de F par rapport au point B d'affixe $1+i$.

Exercice *3

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T du plan dont l'écriture complexe est donnée par :

a) z'= -2iz +3 + i ; ; **b)** z'= z -1+ i ; **c)** z'= -3z – i; **d)** z'= -iz - 1+2i

Corrigé de l'exercice 3

a) $Z' = -2iZ + 3 + i$

$-2i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|-2i| = 2 \neq 1$

Donc F est la similitude directe de rapport 2, d'angle $\alpha = Arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe :

$\omega = \frac{3+i}{1+2i} = 1-i$

b) $Z' = Z - 1 + i$

F est la translation de vecteur $\vec{u}(-1;1)$

c) $Z' = -3Z - i$

$-3 \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ Donc F est l'homothétie de rapport - 3 et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{-i}{1+3} = -\frac{i}{4}$

d) $Z' = -iZ - 1 + 2i$

$-i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|-i| = 1$

Donc F est la rotation d'angle $\alpha = Arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe : $\omega = \frac{-1+2i}{1+i} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, reconnaitre l'application f et déterminer ses éléments caractéristiques :

1) $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $z' = -4z + 10 + 5i$

3) $z' = -i\,z + 2\,i.$

4) $z' = z + 2i$

5) $z' = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3} + i$

6) $z' = (1-i)\,z + 1 + i$

Exercice* 5

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). Unité 2 cm.

1°) On considère les points A, B, et K du plan d'affixes respectives : 1 + i ; 3 - i et 3 + i.

a) Placer les points A, B et K puis montrer que le triangle ABK est isocèle rectangle.

b) Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABK.

Déterminer le centre G et le rayon r de (Γ).

2°) Soit (D) l'ensemble des points M d'affixes z vérifiant $|z-1-i| = |z-3+i|$.

a) Justifier que F d'affixe 4 + 2i appartient à (D).

b) Caractériser géométriquement (D).

c) Démontrer que (D) a pour équation – x + y + 2 = 0

d) Déterminer l'affixe du point E de (D) situé sur l'axe des ordonnées.

3°) Soit S la similitude directe du plan qui applique K sur B et qui a pour centre A.

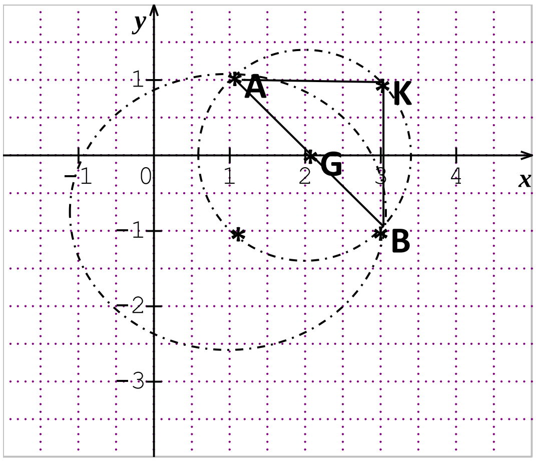
a) Démontrer que l'ecriture complexe de S est $z' = (1-i)z - 1 + i$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S

4°) a) Déterminer et construire (D') l'image de (D) par S.

b) Déterminer et construire (Γ ') l'image de (Γ) par S.

<u>Corrigé de l'exercice 5</u>



$$\frac{Z_A - Z_K}{Z_B - Z_K} = \frac{1+i-3-i}{3-i-3-i} = -i$$

$\dfrac{Z_A - Z_K}{Z_B - Z_K} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Donc ABK est un triangle rectangle et isocèle en K.

b) ABK étant un triangle rectangle en K, le milieu de $[AB]$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABK.

Donc G a pour affixe : $Z_G = \dfrac{Z_A + Z_B}{2} = \dfrac{1+i+3-i}{2} = 2$. $Z_G = 2$

Le rayon *r* de (Γ) est $GA = |Z_A - Z_G| = |1+i-2|$

Donc $r = \sqrt{2}$

2°) (D) : $|Z-1-i| = |Z-3+i|$

a) Soit F d'affixe 4+2i. Justifions que F $\in$ (D).

On a : $|Z_F - 1 - i| = |4+2i-1-i| = |3+i| = \sqrt{10}$

$|Z_F - 3 + i| = |4+2i-3+i| = |3i+1| = \sqrt{10}$

$|Z_F - 1 - i| = |Z_F - 3 + i|$

Donc F $\in$ (D).

b) $|Z-1-i| = |Z-3+i| \Leftrightarrow |Z-(1+i)| = |Z-(3-i)|$

$\Leftrightarrow |Z - Z_A| = |Z - Z_B| \Leftrightarrow$ MA = MB

(D) est donc la médiatrice du segment [AB].

c) Equation de (D).

Soit $M(x;y)$

$M \in (D) \Leftrightarrow |x+iy-1-i| = |x+iy-3+i|$

$|x-1+i(y-1)| = |x-3++i(y+1)|$

$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$

$(x-1)^2+(y-1)^2 = (x-3)^2+(y+1)^2$

$x^2-2x+1+y^2-2y+1 = x^2-6x+9+y^2+2y+1$.

Soit $-x+y+2=0$

Donc (D) a pour équation $-x+y+2=0$

d) E est sur l'axe des ordonnées, donc E a pour abscisse 0.Soit $0+y+2=0 \Leftrightarrow y=-2$ donc E a pour coordonnées $(0;-2)$ et pour affixe $2i$.

3)a) Soit S la similitude directe telle que : $S(K)=B$ et $S(A)=A$ d'écriture complexe $Z'=aZ+b$

On a $\begin{cases} Z_B = aZ_K + b \\ Z_A = aZ_A + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3+i)a+b=3-i \\ (1+i)a+b=1+i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (3+i)a+b=3-i \\ -(1+i)a-b=-1-i \end{cases}$

$(3+i-1-i)a=3-i-1-i \Leftrightarrow 2a=2-2i$

$a=1-i$ et $b=3-i-(3+i)a$

$=3-i-(3+i)(1-i)$

$b=-1+i$

Donc S a pour écriture complexe $Z'=(1-i)Z-1+i$

b) Eléments caractéristiques de S .

$|1-i|=\sqrt{2}$. $1-i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc S a pour rapport $\sqrt{2}$, pour angle $-\frac{\pi}{4}$ et pour centre A.

4-a) Image (D') de (D).

Déterminons deux points de (D)

On a $E(0;-2)$ et $G(2;0)$. (D) = (EG).

Soit $S(E)=E'$ et $S(G)=G'$

E' a pour affixe $Z_{E'}=(1-i)Z_E-1+i$ = -3-i

G' a pour affixe $Z_{G'}=(1-i)Z_G-1+i$ =1-i

$E'(-3;-1)$ et $G'(1;-1)$

Donc (D') est la droite $(E'G')$

b) Image de (Γ) par S

(Γ) a pour centre G et pour rayon $\sqrt{2}$.

Donc (Γ') a pour centre G' et pour rayon $k\times r=\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ = 2. (Γ') est donc le cercle de centre G' et de rayon 2.

<u>Exercice 6</u>

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

On donne A et B les points d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=-1+i\sqrt{3}$

a) Vérifier que les points O, A et B ne sont pas alignés.

b) Déterminer le rapport et l'angle orienté de la similitude directe S de centre O qui transforme A en B.

c) Quelle est l'écriture complexe de S ?

d) Déterminer l'écriture complexe de la similitude S' qui applique O sur A et B sur O.

e) Déterminer les éléments caractéristiques de S'.

<u>Exercice 7</u>

<u>Partie A</u>

On considère l'équation : (E) $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$ où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2+bz+c)$.

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

<u>Partie</u> B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, 2 + 3i et 2 - 3i.

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A', image du point A par r.

2. Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

<u>Exercice 8</u>

On considère l'équation (E) : $z^4 + \left(i - \sqrt{3}\right)z^3 - iz + 1 + i\sqrt{3} = 0$ où z est un nombre complexe.

1- a) Développer, réduire et ordonner le polynôme complexe : $\mathrm{P}(z) = \left(z - \sqrt{3} + i\right)(z^3 - i)$.

b) Résoudre (E).

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) (Unité : 4cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ et $-i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Justifier que le triangle ABC est équilatéral.

3- Soit E le milieu du segment [AC] et $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre E qui transforme A en B.

a) Justifier que l'écriture complexe de $\mathcal{S}$ est $z' = i\sqrt{3}\,z - i$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathcal{S}$.

4- a) Déterminer l'image du point O par $\mathcal{S}$.

b) Déterminer l'aire du triangle AEO et en déduire l'aire du triangle BCE.

5- Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

a) Préciser le centre et le rayon de $(\mathcal{C})$ puis le construire .

b) soit $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par $\mathcal{S}$. Déterminer le centre et le rayon de $(\mathcal{C}')$.

c) Justifier que le point A appartient à $(\mathcal{C})$ et en déduire que le point B appartient à $(\mathcal{C}')$ puis le construire.

<u>Exercice 9</u>

Dans le plan muni du repère orthonormé direct (O, I, J), les points A et B ont pour affixes respectives $\sqrt{3}$ + i et $-\sqrt{3}$ + i. On désigne par S la transformation d'écriture complexe $z' = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3} + i.$

1- Démontrer que S admet un unique point invariant que l'on précisera.

2- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

3- a) Déterminer l'image de la droite (OA) par S.

b) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 2 et $(\mathcal{C}')$ son image par S. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}')$ puis le Construire.

<u>Exercice 10</u>

1- On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $-1+3i$; -2 et $-1-i$.

Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe i.

a) Placer les points A , B et C dans un repère.

b) Démontrer que le point B est l'image du point A par la rotation *r*.

c) Déterminer l'antécédent D du point C par *r*. Placer D sur la figure.

2- a) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Démontrer que le quadrilatère ADBC est un trapèze isocèle.

<u>Exercice 11</u>

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J), les points A et B ont pour affixes respectives a= i et b= $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1- a) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer l'écriture complexe de r.

b) Soit C l'image de B par r. Démontrer que l'affixe de C est c= $e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c) Ecrire b et c sous forme algébrique et placer les points A, B et C dans le repère.

2- a) Soit D le point d'affixe d= $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$i . Placer le point D dans le repère.

b) Démontrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

3 - a) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. Déterminer l'écriture complexe de h.

b) Démontrer que l'image E de D par h a pour affixe e = $\sqrt{3}$.

4 – a) Exprimer le rapport $\frac{d-c}{e-c}$ sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice 12

1) Soit le polynôme P(z) = $z^3 + (1+i)z^2 + (2-6i)z + 8$ et (E) l'équation :z $\in$ C , P(z) = 0.

a) Démontrer que (E) admet une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Déterminer deux nombres complexes b et c tel que P(z) = $(z+2i)(z^2+bz+c)$.

c) En déduire la résolution de l'équation (E).

2) Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité : 2cm.

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives Z_A= -2i, Z_B = -1-i et Z_C = 2+2i.

a) Déterminer le nombre complexe Z = $\dfrac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Soit D et E les symétriques respectifs de Cet B par rapport à (OI).

Placer les points A, B , C et D et démontrer qu'ils appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

d) Démontrer que le quadrilatère ABED est un trapèze isocèle.

3) On considère la similitude directe S de centre A qui transforme C en B .

a) Démontrer que l'écriture complexe de S est :z'= ($\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ i)z – (1+i).

b) En déduire les éléments caractéristiques de S.

c) Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

Justifier que C appartient à (Γ) et construire.(Γ).

d) Déterminer et construire l'image de (Γ) par S.

Exercice* 13

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité : 1cm

1. On considère la transformation *h* du plan qui à tout point M(*x*;*y*) associe le point M'(*x* ;*y*')

tel que : $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$; *z* et *z*' sont les affixes respectives de M et M'.

Exprimer *z*' en fonction de *z* et donner la nature de *h*.

2. Soit la transformation *r* du plan qui au point M d'affixe *z* associe le point M_1 d'affixe z_1

tel que : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}z + 2$.

Reconnaître la nature et ses éléments caractéristiques de *r*.

3. Soit la transformation *roh* du plan qui à tout point M(*x* ; *y*) d'affixe *z* associe le point $M_2(x_2 ; y2)$ d'affixe z_2.

a) Exprimer z_2 en fonction de *z* puis x_2 et y_2 en fonction de *x* et *y*.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de *roh.*

Corrigé de l'exercice 13

1) $h(M) = M'$, $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$

$Z' = x' + iy'$

$= 2x - 1 + i(2y - 1)$

$= 2x+2yi-1-i$
$= 2(x+yi)-1-i$

$Z' = 2Z-1-i$. Donc h est l'homothétie de rapport 2 et de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{-1-i}{1-2} = 1+i$.

2) $M(Z) \to M_1(Z_1)$

$Z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}Z+2$

r est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $\dfrac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{2}}} = 1+i$.

r est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe $1+i$.

3) $r \circ h \qquad M \to M_2$

$r \circ h(M) = M_2$

a) Soit $M_1 = h(M)$ avec $M_1(x_1; y_1)$

On a $r \circ h(M) = r(M_1)$

$h(M) = M_1 \Leftrightarrow Z_1 = 2Z-1-i$

$r(M_1) = M_2 \Leftrightarrow Z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}Z_1+2$

Donc $Z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}(2Z-1-i)+2$

$Z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}Z-(1+i)e^{i\frac{\pi}{2}}+2$

$Z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}Z+3-i$

$x_2+iy_2 = 2i(x+yi)+3-i$

$x_2+iy_2 = 2ix+2yi^2+3-i$

$x_2+iy_2 = 2ix-2y+3-i$

$x_2-2y-3+i(y_2-2x+1) = 0$

$$\begin{cases} x_2-2y-3=0 \\ y_2-2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2y+3 \\ y_2 = 2x-1 \end{cases}$$

b) Eléments caractéristiques de $r \circ h$

L'écriture complexe de $r \circ h$ est :

$Z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}Z+3-i$. Donc $r \circ h$ est la Similitude directe de rapport 2, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $\omega = \dfrac{3-i}{1-2e^{i\frac{\pi}{2}}} = 1+i$.

Exercice 14

Soit T la transformation du plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = -3x+1 \\ y' = -3y+1 \end{cases}$

1) Déterminer l'écriture complexe de T et en déduire ses éléments caractéristiques.
2) En déduire la nature, les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de T^{-1}, la transformation réciproque de T.
3) Déterminer l'image de la droite (Δ) d'équation : $y = x+2$.

Leçon 9 : SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n, par :

$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$; $u_0 = 4$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2}$

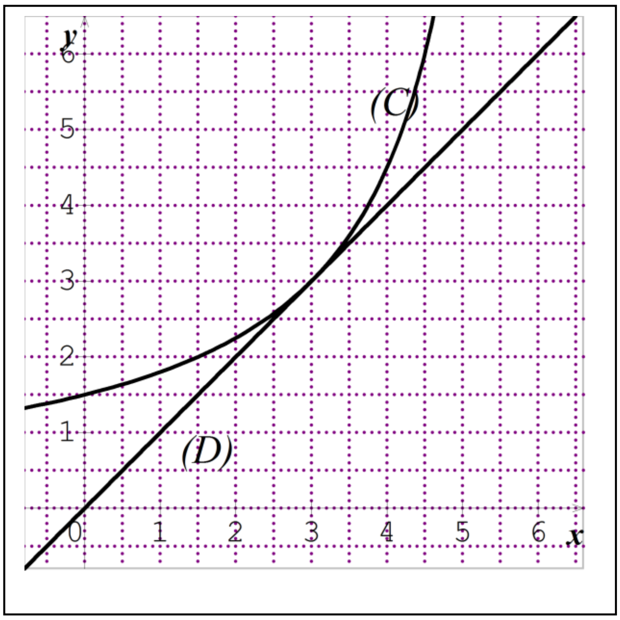
Calculer u_1, v_1 ; u_2 ; v_2

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur]-3 ; 5[par $f(x) = \dfrac{9}{6-x}$ et la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous accompagnée de celle de la droite (D)d'équation $y = x$. Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Représenter sur la droite (OI), et sans les calculer, les 4 premiers termes de la suite (u_n) .



Exercice* 3

Dans chacun des cas suivants , étudier le sens de variation de la suite (U_n).

a) $U_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$; b) $U_n = \dfrac{2^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; c) $U_n = \dfrac{3^{n+2}}{2^{2n}}$ $(n \in \mathbb{N})$; d) $U_n = e^n - n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Corrigé de l'exercice 3

a) $U_{n+1} - U_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+1}{n+1+1} = \dfrac{n^2+2n+2}{n+2}$

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{n^2+2n+2}{n+1+1} - \dfrac{n^2+1}{n+1}$

$= \dfrac{(n^2+2n+2)(n+1) - (n^2+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{n^2+3n}{(n+2)(n+1)}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} - U_n > 0$

(U_n) est donc une suite croissante.

b) $U_n = \frac{2^n}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \; U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

(U_n) est une suite à termes positifs.

Comparons $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 = \frac{2n}{n+1} - 1 = \frac{n-1}{n+1}$$

Or $n \geq 1$ Donc $\frac{n-1}{n+1} \geq 0$ D'où $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$

Donc (U_n) est une suite croissante.

c) $U_n = \frac{3^{n+2}}{2^{2n}} \; (n \in \mathbb{N})$

(U_n) est une suite à termes positifs.

Comparons $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

$\forall n \in \mathbb{N} \; U_{n+1} = \frac{3^{n+3}}{2^{2n+2}}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{3^{n+3}}{2^{2n+2}}}{\frac{3^{n+2}}{2^{2n}}} = \frac{(3^{n+3})(2^{2n})}{(2^{2n+2})(3^{n+2})} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$$

Donc (U_n) est une suite décroissante.

d) $U_n = e^n - n$

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = e^x - x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) > 0 \iff x > 0$

Sur $]0;+\infty[$ f est strictement croissante donc (U_n) est aussi croissante.

<u>Exercice* 4</u>

Etudier la convergence de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants.

a) $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; b) $U_n = \frac{2n^2 - 1}{(2n+1)^2}$; c) $U_n = n - \sqrt{4n^2 + 1}$

d) $U_n = \ln(2+\frac{1}{n})$; e) $U_n = \sin(n\pi)$; f) $U_n = n^2 - n + 2$; g) $U_n = (-1)^n$.

Corrigé de l'exercice 4

$a) U_n = (\frac{1}{2})^n$. $\forall n \in \mathbb{N}\ U_n = \frac{1}{2^n}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = 0$ et $0 \in \mathbb{R}$

(U_n) est donc convergente.

$b) U_n = \frac{2n^2-1}{(2n+1)^2}$

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = \frac{2x^2-1}{(2x+1)^2}$

$f(x) = \frac{2x^2-1}{4x^2+4x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}$

(U_n) est donc convergente car $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

$c) U_n = n - \sqrt{4n^2+1}$

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = x - \sqrt{4x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{4x^2(1+\frac{1}{4x^2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x - 2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x(1-2\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}) = -\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-2\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}} = -1 \end{cases}$$

Donc (U_n) est divergente .

$d) U_n = \ln(2+\frac{1}{n})$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = \ln 2$ et $\ln 2 \in \mathbb{R}$

donc (U_n) est convergente.

$e) U_n = \sin(n\pi)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\sin(n\pi) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Donc (U_n) est convergente.

$f)\ U_n = n^2 - n + 2$

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = x^2 - x + 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $+\infty \notin \mathbb{R}$. Donc (U_n) diverge.

$g)\ U_n = (-1)^n$

Si n est pair $(-1)^n = 1$

Si n est impair $(-1)^n = -1$

Donc (U_n) n'admet pas de limite

(U_n) est donc divergente.

Exercice* 5

U est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1$.

1. Démontrer par récurrence que U est bornée par -2 et 1.
2. Démontrer que U est décroissante. Que peut on dire de la convergence de *U ?*

Corrigé de l'exercice 5

$*U_0 = 1 \qquad U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1$

1 Démontrons par récurrence que

U est bornée par -2 et 1.c'est à dire

$\forall n \in \mathbb{N} \quad -2 \le U_n \le 1$

*On a $U_0 = 1$ donc $-2 \le U_0 \le 1$

*Soit k un entier naturel quelconque tel que : $-2 \le U_k \le 1$. Démontrons que $-2 \le U_k \le 1$.

$-2 \le U_n \le 1$

$-1 \le \frac{1}{2}U_k \le \frac{1}{2}$

$-1-1 \le \frac{1}{2}U_k - 1 \le \frac{1}{2} - 1$

$-2 \le U_{k+1} \le -\frac{1}{2}$

$-2 \le U_{k+1} \le 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\ -2 \le U_n \le 1$

(U_n) est donc bornée par -2 et 1

2. Sens de variation de U

$\forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n - 1 - U_n = -\frac{1}{2}U_n - 1 = -\frac{(U_n + 2)}{2}$. Or $U_n \ge -2$ donc $U_n + 2 \ge 0$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} - U_n \le 0$. Donc U est décroissante.

*U est décroissante et minorée par -2 . Donc U est convergente.

Exercice 6

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par a_0=1, b_0=8 et pour tout entier naturel n,

$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$.

1) Calculer a1 et b1
2) Soit la suite (d_n) définie par : $d_n = b_n - a_n$
   a) Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison

b) En déduire une expression de d_n en fonction de n puis en déduire que pour tout n de IN $d_n \geq 0$.
c) Calculer la limite de (d_n).

3) a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n \leq -1$, $a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$, et $b_{n+1} - b_n = \frac{-d_n}{4}$.

b) En déduire le sens de variation des suites (a_n) et (b_n).
c) Démontrer que pour tout n ∈ IN* , $a_0 < a_n < b_n < b_0$.
d) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

4) a) Déduire de la question 3) a) que $\forall n \geq 1$, $a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + ... + d_n)$.

b) En déduire les limites des suites (a_n) et (b_n).

Exercice* 7

Le prix d'un livre est de 2000 F CFA en l'an 2010 ; ce prix augmente de 8% chaque année.
Soit P_0 = 2000F le prix en l'an 2010 et P_n le prix de ce livre en 2010 + n ($n \in \mathbb{N}$).
(*Les résultats seront arrondis à l'ordre 0*).
1. Calculer les prix P_1et P_2 de ce livre en 2011 et 2012.
2.a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n. En déduire la nature de la suite (P_n).
b) Exprimer P_n en fonction de n.
3. Un parent d'élève décide d'acheter un exemplaire de ce livre chaque année. Quelle somme dépenserait-il de 2010 à 2020 ?
4. A partir de quelle année le prix de ce livre dépasserait-il 10000F CFA ?

Corrigé de l'exercice 7

1. * $P_1 = P_0 + \frac{8}{100} \times P_0$

$P_1 = 200 + \frac{2}{25} \times 2000$ =2160.

* $P_2 = P_1 + \frac{8}{100} P_1$

$P_2 = 2160 + \frac{2}{25} \times 2160$ =2333.

2.a) $P_{n+1} = P_n + \frac{8}{100} P_n = 1,08 P_n$

(P_n) est donc une suite géométrique de raison 1,08

b) $P_n = P_0 . q^n = 2000 \times (1,08)^n$

3. Il s'agit de la somme
$S = P_0 + P_1 + ... + P_{10}$

$S = P_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q}$

$S = 2000 \times \frac{1-(1,08)^{11}}{1-(1,08)}$ =33291

4. Le prix dépasse 10000 si $P_n > 10000$

$2000 \times (1,08)^n > 10000$

$(1,08)^n > 5$

$n \ln(1,08)^n > \ln 5$

$n > \frac{\ln 5}{\ln(1,08)^n}$. Donc $n > 20,9$.

Donc à partir de $n = 21$. Soit $2010 + 21 = 2031$. Donc le prix dépasserait 10000 à partir de 2031.

Exercice 8

Soit (U_n) une suite définie par: $U_1 = 1000000$ et $U_{n+1} = 1,05U_n + 100000$ pour tout n.

l)a)Déterminer les 4 premiers termes de la suite (U_n)

b) En déduire une conjecture du sens de variations de la suite (U_n)

2) Soit (V_n) une suite numérique: $V_n = U_n + 2000000$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n

3) Pour quelles valeurs de n $U_n \geq 2500000$

Pour préparer la fête de fin d'année le bureau de la coopérative d'un lycée reçoit 1000000fcfa le l[er] janvier 2011

Dès la réception de cette somme la coopérative utilise ce montant pour gérer le foyer du lycée et impose à chaque élève une cotisation fixe de l00fcfa à la fin de chaque mois.

Au 1[er] février 2011 le bureau réalise un bénéfice de 5% du capital initial

C_l =*1000000 f CFA et reçoit 100000 f CFA des cotisations des élèves*

On suppose que cette tendance sera maintenue jusqu'au 1[er] juillet 2011

4) a)Calculer C_2 et C_3 les capitaux respectivement au 1[er] février 2011 et au 1[er] mars 2011

b) Montrer que $C_{n+l} = 1,05C_n + 100000$

c)Que peut-on dire de (C_n) et de (U_n)

Pour la fête de fin d'année fixée 15 juillet 2011 le bureau prévoit un budget de 2500000fcfa

Ce bureau sera-t-il en mesure d'organiser cette fête à cette date?

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\, dx$.

1- a) A l'aide d'une intégration par parties calculer u_1.

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\forall$ n ≥ 2, $u_n = -\frac{1}{e} + n\, u_{n-1}$.

c) En déduire u_2.

2- a) Démontrer que : $\forall$ n ≥ 1, $u_n \geq 0$.

b) Démontrer que : $\forall x \in [1; \mathrm{e}]$ et $\forall$ n ≥ 1, $(\ln x)^{\mathrm{n}+1} \leq (\ln x)^{\mathrm{n}}$.

c) En déduire que (u_n) est décroissante.

d) Justifier que (u_n) est convergente.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{n^2}{(n+1)^2}$.

1- a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Trouver les valeurs de n vérifiant $u_n > 0{,}81$.

2- a) Etudier le sens de variation de (u_n).

b) En déduire que (u_n)converge.

c) Calculer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3- On pose $t_n = u_1\, u_2 \ldots\ldots u_n$. Montrer que $t_n = \frac{1}{(\mathrm{n}+1)^2}$.

4- Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $v_n = ln(u_n)$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite à termes négatifs.

b) Calculer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

c) En remarquant que la fonction ln est strictement croissante et en utilisant le sens de variation de (u_n) , en déduire le sens de variation de (v_n)

5- Soit $(\mathrm{S_n})$ la suite définie par $\mathrm{S_n} = v_1 + v_2 + \ldots. + v_\mathrm{n}$.

a) Démontrer par récurrence que : $\mathrm{S_n} = -2\ln(\mathrm{n}+1)$.

b) Retrouver le résultat précédent en utilisant t_n et justifier que $(\mathrm{S_n})$ est divergente.

Exercice 11

Soit la suite numérique u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in IN, u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n} \end{cases}$.

1- Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$, par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x}$ et dont la représentation graphique $(\mathcal{C})$ est donnée ci-dessous (voir feuille annexe).

a) Dresse le tableau de variation de f.

b) Démontre que $f([1;5]) \subset [1;5]$

2- a) Représente sur l'axe (OI), les cinq premiers termes de la suite u .

b) Quelle conjecture peut-on faire concernant sa convergence ?

c) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_n \leq 5$.

3- Soit v la suite numérique définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

a) Démontre que v est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et précise son premier terme.

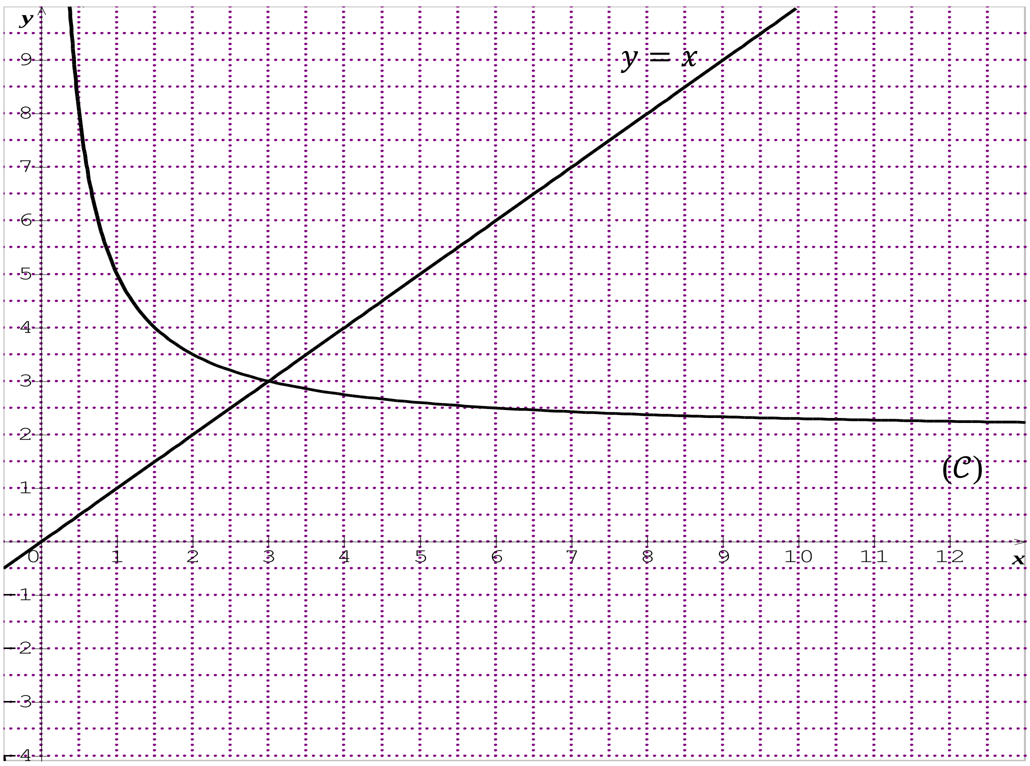
b) La suite v est-elle convergente ? Justifie la réponse.

c) Déduis-en que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$

d) Exprime u_n fonction de n puis justifie la conjecture faite à la question 1.b).

e) Pour tout entier naturel n un nombre, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
Calcule S_n et déduis-en sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Feuille annexe



Exercice 12

Au premier janvier 2018, une ville A compte 200 000 habitants. A la même date une ville B a 150 000 habitants.

On a constaté que la population de la ville A diminue de 3% par an et que celle de la ville B augmente de 5% par an.

on suppose que les croissances et les diminutions se poursuivent à ce rythme.

1. Quelles seront les populations des villes A et B au premier janvier 2019 ? au premier janvier 2020 ?
2. Pour tout entier n, on désigne par : a_n la population de la ville A au premier janvier de l'année (2018+ n) et par b_n la population de la ville B à la même date.
   a) Vérifier que les suites (a_n) et (b_n) sont géométriques. Préciser leurs raisons respectives.
   b) Exprimer a_n et b_n en fonction de n.
   c) Au premier janvier de quelle année, la population de la ville B sera-t-elle, pour la première fois, supérieure à celle de la ville A ?

Exercice 13

Des individus I_1, I_2, ..., I_n, ... se transmettent une information dans cet ordre. Chaque individu transmet l'information reçu de manière fidèle avec une probabilité égale à 0,8 ou la change en son contraire avec une probabilité égale à 0,2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,on note A_n l'événement «le $n^{\text{ième}}$ individu reçoit l'information non déformée » et $p_n = P(A_n)$.

On suppose que $p_1= 1$ (le premier individu I_1 possède l'information non déformée). On a donc $p_2= 0{,}8$.

1. Calculer p_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}2$
3. Soit la suite $(p_n)_{n\epsilon IN^*}$ definie par $\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}2 \end{cases}$
   a) Dans le plan rapporté a un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur l'axe des abscisses les termes $p_1; p_2; p_3$ et p_4 de la suite $(p_n)_{n\epsilon IN^*}$. (Unité graphique : 4cm). (voir feuille annexe)
   b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0{,}5 < p_n \leq 1$
   c) Démontrer que la suite $(p_n)_{n\epsilon IN^*}$ converge.
3. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = p_n - 0.5$.
   a) Montrer que $(q_n)_{\,n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer q_n en fonction de n.
   c) En déduire p_n en fonction de n.
   d) Calculer la limite de la suite (p_n).
4. Quelle est la probabilité que le $10^{\text{ème}}$ individu reçoive l'information non déformée.
   (On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près).

Exercice 14

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$; $\vec{v}$) d'unité graphique : 5 cm, on considère la similitude directe S d'écriture complexe $z' = \frac{1+i}{2}z$. On note A_n le point d'affixe z_n et A_{n+1} est l'image de A_n par S. On pose : $z_0 = 2$.

1.a) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
   b) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n et Calculer z_1 et z_2.
   c) Placer A_0 , A_1 et A_2 dans le plan complexe.

2. On considère la suite U définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = |z_{n+1} - z_n|$.
   a) Justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$.
   b) Démontrer que U est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   c) Exprimer U_n en fonction de n.

3.On désigne par $\mathrm{A_0A_1} + \mathrm{A_1A_2} + \cdots + \mathrm{A_{n-1}\,A_n}$,la longueur de la ligne brisée $\mathrm{A_0A_1A_2} \ldots \mathrm{A_{n-1}\,A_n}$ $(n \in \mathbb{N})$

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, l_n = \mathrm{A_0A_1} + \mathrm{A_1A_2} + \cdots + \mathrm{A_{n-1}\,A_n}$.

a) Calculer l_n.

b) En déduire la limite de l_n .

Exercice 15

Un commerçant dans la ville d'Anyama veut acheter un camion pour transporter ses marchandises. Une société de vente de véhicules lui propose un camion aux conditions suivantes :

▪ Payer en 48 mensualités et ce, à partir du premier mois suivant la livraison du camion ;

▪ Payer 2.700.000 francs CFA comme première mensualité ;

▪Payer 50.000 francs CFA de moins que la mensualité du mois précédent et ceci pendant les 47 autres mois.

Ce commerçant veut connaitre le montant qu'il doit dépenser pour acquérir ce camion.

On désigne par w_n la mensualité du n$^{\text{ième}}$ mois ($1 \leq n \leq 48$).

1- a) Calcule la deuxième mensualité.

b) Justifie que (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Quel est le sens de variation de la suite (w_n) ? Justifie la réponse.

2- a) Exprime w_n en fonction de n.

b) Quelle est la dernière mensualité ?

3) Calcule le montant que ce commerçant doit débourser pour acquérir ce camion.

EXERCICE * 16

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \end{cases} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Pour étudier cette suite, on lui associe la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{1+x}$ dont la courbe représentative (Cf) est donnée sur $]-1; +\infty[$ dans un repère orthonormé (O, I, J) .*(voir feuille annexe).*

1- a) Représenter graphiquement sur l'axe (OI) les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Quelle conjecture peut-on faire concernant sa convergence ?

2) Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 3$.

3- On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

a) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n en fonction de n puis calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis justifier la conjecture faite à la question 1.b) .

Partie B

On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout entier naturel n par :

$a_n = \frac{2^n - 5n + 1}{2}$ et $b_n = \frac{2^n + 5n - 1}{2}$

1- Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $t_n = a_n + b_n$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = a_n - b_n$.

a) Justifier que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $t_0 = 1$.

b) justifier que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme $w_0 = 1$.

2- a) Justifier que pour tout entier naturel n $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = -1 + 2^{n+1}$.

b) Justifier que pour tout entier naturel n $w_0 + w_1 + \ldots + w_n = \frac{n+1}{2}(2 - 5n)$.

3- On pose, pour tout nombre entier naturel n $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

a) Justifier que pour tout nombre entier naturel n $a_n = \frac{1}{2}(t_n + w_n)$.

b) En déduire que $S_n = \frac{1}{2}\left[-1 + 2^{n+1} + \frac{n+1}{2}(2-5n)\right]$.

c) Calculer S_9.

Corrigé de l'exercice 16

Partie A

1) *a- Représentation des termes de la suite.*

voir feuille annexe.

b- Conjecture sur la convergence

On peut conjecturer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

2) *Démontrons par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 3$*

▪ $u_0 = 3$, donc $0 \leq u_0 \leq 3$. L'inégalité est vrai pour $n = 0$.

▪ Soit k un nombre entier naturel tel que $0 \leq u_k \leq 3$. Vérifions que $0 \leq u_{k+1} \leq 3$.

$$0 \leq u_k \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + u_k \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_k} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{1+u_k} \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq 2 \leq 3 \Longrightarrow$$

$0 \leq u_{k+1} \leq 3$.

▪ Pour tout nombre entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 3$.

3- a) *Démontrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique*

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = \frac{-(u_n-1)}{2(u_n+2)} = -\frac{1}{2}v_n.$$

Ainsi $\frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{1}{2}$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

b) *Exprimons v_n en fonction de n puis calculons la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n = v_0(-\frac{1}{2})^n$, avec $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$. Donc $v_n = \frac{2}{5}(-\frac{1}{2})^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{car } -1 < -\frac{1}{2} < 1.$$

c) *Exprimons u_n en fonction de v_n puis justifions la conjecture faite à la question 1.b)*

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = -\frac{2v_n+1}{v_n-1}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2v_n+1}{v_n-1} = 1$$

Partie B

1- a) *Justifions que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique*

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\quad t_n = a_n + b_n = \frac{2^n-5n+1}{2} + \frac{2^n+5n-1}{2} = 2^n$ et $t_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2t_n$.

Ainsi $\frac{t_{n+1}}{t_n} = 2$, donc $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $t_0 = 2^0 = 1$.

b) *Justifions que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique*

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\quad w_n = a_n - b_n = \frac{2^n-5n+1}{2} - \frac{2^n+5n-1}{2} = -5n + 1$ et $w_{n+1} = -5(n+1) + 1 = -5n - 4$

Ainsi $w_{n+1} - w_n = -5$, donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme $w_0 = 1$.

2- a) *Justifions que pour tout nombre entier naturel n, $a_n = \frac{1}{2}(t_n + w_n)$.*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} t_n = a_n + b_n & (1) \\ w_n = a_n - b_n & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Longrightarrow t_n + w_n = 2a_n \Longrightarrow a_n = \frac{1}{2}(t_n + w_n)$.

b) *Calculons S_n*

$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \frac{1}{2}(t_0 + w_0) + \frac{1}{2}(t_1 + w_1) + \ldots\ldots + \frac{1}{2}(t_n + w_n)$

$S_n = \frac{1}{2}[(t_0 + t_1 + \ldots + t_n) + (w_0 + w_1 + \ldots + w_n)]$.

▪ Comme $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $t_0 = 1$, on a :

$t_0 + t_1 + \ldots + .t_n = t_0 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 1\ \frac{1-2^{n+1}}{-1} = -1 + 2^{n+1}$.

▪ De même $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, on a :

$w_0 + w_1 + \ldots + .w_n = (n+1)\frac{w_0 + w_n}{2} = (n+1)\frac{1-5n+1}{2} = \frac{n+1}{2}\ (2-5n)$.

Par suite, nous obtenons

$S_n = \frac{1}{2}\left[-1 + 2^{n+1} + \frac{n+1}{2}\ (2-5n)\right]$.

c) *Calculons S_9*

$S_9 = \frac{1}{2}\left[-1 + 2^{n+1} + \frac{9+1}{2}\ (2 - 5 \text{ x } 9)\right] = \frac{1}{2}[-1 + 1024 - 215] = \frac{1}{2} \text{x } 808 = 404$.

Leçon 10 : CALCUL INTEGRAL

Exercice* 1

Calculer les intégrales suivantes

I = $\int_{2}^{-1} 5dx$; J = $\int_{2}^{-1}(3x^2-2)dx$; K = $\int_{-1}^{-2}\frac{1}{t^3}dt$; L = $\int_{1}^{\frac{1}{2}}(2t+2-\frac{1}{t})dt$;

M = $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x e^{\sin x}dx$; N = $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$; P = $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x-\frac{\pi}{2})dx$; Q = $\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Corrigé de l'exercice 1

$$I = \int_{2}^{-1} 5dx = [5x]_2^{-1} = 5(-1)-(5)(2) = -5-10 = -15$$

$$J = \int_{2}^{-1}(3x^2-2)dx = \left[x^3-2x\right]_2^{-1} = (-1)^3-2(-1)-(2^3-2\times 2) = -3$$

$$K = \int_{-1}^{-2}\frac{1}{t^3}dx = \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_{-1}^{-2} = \frac{-1}{2(-2)^2}-(\frac{-1}{2(-1)^2}) = \frac{3}{8}$$

$$L = \int_{1}^{\frac{1}{2}}(2t+2-\frac{1}{t})dt = [t^2+2t-\ln t]_1^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})-\ln(\frac{1}{2})-(1^2+2-\ln 1) = -\frac{7}{4}+\ln 2$$

$$M = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos(x)\, e^{\sin x}dx = \left[e^{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = e^0-e^1 = 1-e$$

$$N = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)dx = [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi}$$

$$N = -\cos(\pi)-(-\cos(-\pi)) = -(-1)-(1) = 0$$

$$P = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x-\frac{\pi}{2})dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$P = \frac{1}{2}\sin(\pi-\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2}\sin(-\frac{\pi}{2})$$

$$P = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$Q = \int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1$$

$$Q = \sqrt{1^2+1}-\sqrt{0^2+1} = \sqrt{2}-1$$

Exercice* 2

En effectuant une ou deux intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{0}^{\pi}x\cos x dx$; **2)** $\int_{-1}^{1}(2x-3)e^x dx$; **3)** $\int_{0}^{\pi}\left(e^x\cos x\right)dx$; **4)** $\int_{e}^{1}3x\ln x dx$; **5)** $\int_{0}^{1}(x+2)^2e^{-x}dx$.

Corrigé de l'exercice 2

1) $I=\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$

Posons $U(x)=x \quad ; \quad U'(x)=1$

$V'(x)=\cos(x) \; ; \; V(x)=\sin(x)$

$I=\left[x\sin(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin(x)dx$

$I \;=\pi\sin\pi-0\sin 0+\left[\cos(x)\right]_0^{\pi}$

$I=0-0+\cos(\pi)-\cos(0)=-2$

2) $I=\int_{-1}^{1}(2x-3)e^x dx$

Posons $U(x)=2x-3 \quad ; \quad U'(x)=2$

$V'(x)=e^x \; ; \; V(x)=e^x$

$I=\left[(2x-3)e^x\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}2e^x dx$

$I=(2-3)e^1-(-2-3)e^{-1}-2\left[e^x\right]_{-1}^{1}$

$I=-e+5e^{-1}-2(e^1-e^{-1})$

$I=-3e+7e^{-1}=-3e+\frac{7}{e}$

3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[e^x\cos(x)\right]dx$

Posons $U(x)=e^x \quad ; \quad U'(x)=e^x$

$V'(x)=\cos(x) \; ; \; V(x)=\sin(x)$

$I=\left[\sin(x)\times e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin(x)dx$

$I=\sin(\frac{\pi}{2})\times e^{\frac{\pi}{2}}-\sin 0\times e^0-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin(x)dx$

$I=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin(x)dx \qquad (1)$

$Soit\; J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin(x)dx$

Posons $f(x)=e^x \quad ; \quad f'(x)=e^x$

$g'(x)=\sin(x) \; ; \; g(x)=-\cos(x)$

$J=\left[-\cos(x)\times e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\times\cos(x)dx$

$$= -\cos(\frac{\pi}{2})e^{\frac{\pi}{2}} - (-\cos 0 \times e^0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)dx$$

$J = 1 + I$. Or $I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$

donc $I = e^{\frac{\pi}{2}} - (1+I)$

$$I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - I \Leftrightarrow 2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$$

4) $\mathrm{I} = \int_e^1 3x\ln(x)dx$

Posons $U(x) = \ln x$; $U'(x) = \frac{1}{x}$

$V'(x) = 3x$; $V(x) = \frac{3}{2}x^2$

$$I = \left[\frac{3}{2}x^2 \ln x\right]_e^1 - \int_e^1 \frac{3}{2}x\, dx$$

$$I = \frac{3}{2}(1)^2 \ln 1 - \frac{3}{2}(e)^2 \ln e - \left[\frac{3}{4}x^2\right]_e^1$$

$$I = 0 - \frac{3}{2}(e)^2 - (\frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^2) \qquad I = -\frac{3}{4} \quad .$$

5) $\mathrm{I} = \int_0^1 (x+2)^2 e^{-x}\, dx$

Posons $U(x) = (x+2)^2$; $U'(x) = (2x+4)$

$V'(x) = e^{-x}$; $V(x) = -e^{-x}$

$$I = \left[-e^{-x}(x+2)^2\right]_0^1 + \int_0^1 (2x+4)e^{-x}\, dx$$

$$= -e^{-1}(1+2)^2 - (-e^0(0+2)^2) + \int_0^1 (2x+4)e^{-x}dx$$

$$I = 4 - 9e^{-1} + \int_0^1 (2x+4)e^{-x}dx$$

Soit $J = \int_0^1 (2x+4)e^{-x}dx$

Posons $P(x) = 2x+4$; $P'(x) = 2$

$q'(x) = e^{-x}$; $q(x) = -e^{-x}$

$$J = \left[-e^{-x}(2x+4)\right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}\, dx$$

$$= -e^{-1}(2+4) - (-e^0(4)) + \left[-2e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -6e^{-1} + 4 + (-2e^{-1} + 2e^0)$$

$J = -8e^{-1} + 6$. Donc $I = 4 - 9e^{-1} + (-8e^{-1} + 6)$; $I = 10 - 17e^{-1}$.

Exercice 3

En effectuant une ou deux intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$; 2) $\int_{-1}^{0}(x^2+x)\ln x\,dx$; 3) $\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}\,dx$. 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\cos x\,dx$

5) $\int_0^1 x^2e^x dx$; 6) $\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$; 7) $\int_0^1 (x+1)^2e^{-x}dt$

Exercice 4

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ et $I=\int_0^1\big(h(x)\big)dx$.

1) Démontrer que la dérivée de la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$ est h.

2) Calculer I.

Exercice 5

On pose $I=\int_0^{\pi}cos^2x\,dx$ et $J=\int_0^{\pi}sin^2x\,dx$

1) Calculer I + J.

2) Calculer I – J.

3) En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 6

1) Calculer $\int_1^e \dfrac{1}{x}dx$ et $\int_1^e \dfrac{1}{x+1}dx$

2) Démontrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

3) En déduire la valeur de $\int_1^e \dfrac{1}{x(x+1)}dx$.

Exercice 7

1) Justifier que pour tout réel x : $\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}=e^x-\dfrac{e^x}{1+e^x}$

2) Calculer $\int_0^1 e^x dx$ et $\int_0^1 \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$.

3) En déduire $\int_0^1 \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}dx$.

Exercice 8

1) Montrer que pour tout $x\in[0;1]$; $\dfrac{x^2}{2}\le\dfrac{x^2}{1+x^2}\le x^2$.

2) En déduire un encadrement de $\int_0^1 \dfrac{x^2}{1+x^2}dx$

Exercice 9

1) On donne : $A=\int_0^{ln2}(x+2)e^{-x}dx$ et $B=\int_1^e(1-x)lnx\,dx$

a) Déterminer les signes de A et de B.

b) A l'aide d'une intégration par parties calculer A et B.

2) A l'aide de deux intégrations par parties, calculer l'intégrale suivante : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$.

Exercice 10

L'objectif est d'étudier le signe de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x - \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

1) Justifier que pour tout t appartenant à $[1; +\infty[$ $\frac{1}{t} \leq 1$.

2) En déduire que : $\forall\, x \in [1; +\infty[$, $\ln x \leq x - 1$.

3) Justifier que : $\forall\, x \in [1; +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

Exercice 11

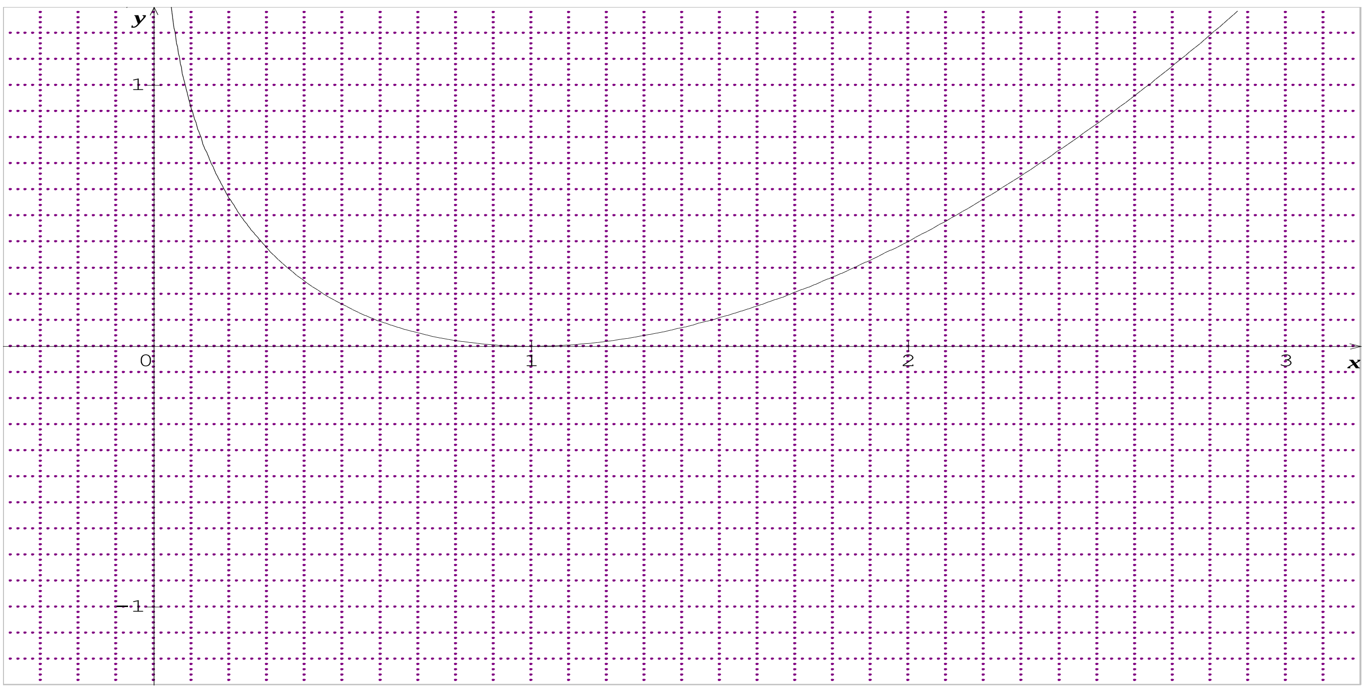
On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$,

1- Etudier les variations de f.

2- a) Soit α un nombre réel strictement positif, calculer l'intégrale $\mathrm{I}(\alpha) = \int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x$.

b) Déterminer la limite $\mathrm{I}(\alpha)$ à droite en 0. En déduire une valeur approchée de l'aire du plan limité par (C), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

La courbe représentative est donné dans un repère orthonormé (O, I, J) ci-dessous, l'unité graphique 5 cm.



Exercice 12

Soit la famille de fonctions f_n définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = x^{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{2x}$ et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). où n est un entier naturel non nul.

On considère l'intégrale $\mathrm{I_n} = \int_0^1 f_{\mathrm{n}}(x)dx$

1- Interpréter graphiquement $\mathrm{I_n}$.

2- Calculer $\mathrm{I_1}$ en utilisant une intégration par parties.

3- En utilisant une intégration par parties, trouver une relation entre $\mathrm{I_{n+1}}$ et $\mathrm{I_n}$.

4- En déduire I_2 et I_3.

5- Utiliser les résultats précédents pour calculer : $I=\int_0^1(t^3+3t^2+2t)e^{2t}dt$.

Exercice 13

1. Déterminer deux nombres réels A et B tels que, pour tout x différent de 1 et -1,

On ait l'égalité $\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$.

2) En déduire la valeur de l'intégrale $I=\int_2^5\frac{4x-5}{x^2-1}$

Exercice* 14

On considère la fonction f définie sur]0 ;+∞[par : $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J). (Unité : OI = 2 cm et OJ = 4cm).

On se propose de trouver un encadrement de l'aire A (en cm^2) de la partie du plan limitée par (Cf) ; (OI) et et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

1) Démontrer que pour tout $x \geq 1$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

2) Calculer I = $\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx$ et J = $\int_1^2\frac{\ln x}{x}dx$.

3) En déduire un encadrement de K = $\int_1^2 f(x)dx$ puis un encadrement de A en cm^2.

Corrigé de l'exercice 14

$$f(x)=\frac{2\ \ln x}{x^2+x}$$

1) • Pour tout $x > 1$

On a: $f(x)-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{2\ln x}{x^2+x}-\frac{\ln x}{x^2}$

$=\frac{2\ln x}{x(x+1)}-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{2x\ln x}{x^2(x+1)}-\frac{(x+1)\ln x}{x^2(x+1)}$

$=\frac{x\ln x-\ln x}{x^2(x+1)}=\frac{(x-1)\ln x}{x^2(x+1)}$

or $x > 1 \Rightarrow x-1>0$, $\ln x > 0$ et $x^2(x+1)>0$

donc $f(x)-\frac{\ln x}{x^2}>0$

$\Rightarrow f(x)>\frac{\ln x}{x^2}$ **(1)**

• Pour $x > 1$ on a : $f(x)-\frac{\ln x}{x}=\frac{2\ln x}{x(x+1)}-\frac{(x+1)\ln x}{x(x+1)}$

$=\frac{\ln x-x\ln x}{x(x+1)}=\frac{(1-x)\ln x}{x(x+1)}$

Or $x > 1 \Rightarrow 1-x<0, \ln x>0$ et $x(x+1)>0$

Donc $f(x)-\frac{\ln x}{x}<0 \Rightarrow f(x)<\frac{\ln x}{x}$ **(2)**

(1) et **(2)** $\Rightarrow \frac{\ln x}{x^2}<f(x)<\frac{\ln x}{x}$

2) I$=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$.

Posons U(x) = $\ln x$; U'(x)= $\frac{1}{x}$

V'(x)= $\frac{1}{x^2}$; V(x)= -$\frac{1}{x}$

I= $\left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^2+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$

$=-\ \frac{\ln 2}{2}+\left[\frac{-1}{x}\right]_1^2 = -\frac{\ln 2}{2}+\left(\frac{-1}{2}+1\right)$ $\text{I}=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}$

$J=\int_1^2\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^2\frac{1}{x}(\ln x)\ dx=\int_1^2(\ln x)'\ln x\ dx\ =\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2=\frac{(\ln 2)^2}{2}$

3) $K=\int_1^2 f(x)dx$

$\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx\leq K\leq\int_1^2\frac{\ln x}{x}dx$

$I\leq K\leq G$

donc $\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}\leq K\leq\frac{(\ln 2)^2}{2}$

<u>Encadrement de A.</u>

On a $A=\int_1^2\left|f(x)\right|dx\times 8cm^2$

$A=\int_1^2 f(x)dx\times 8cm^2$

$A=8Kcm^2$

$\Rightarrow\frac{8-8\ln 2}{2}\leq A\leq\frac{8(\ln 2)^2}{2}$

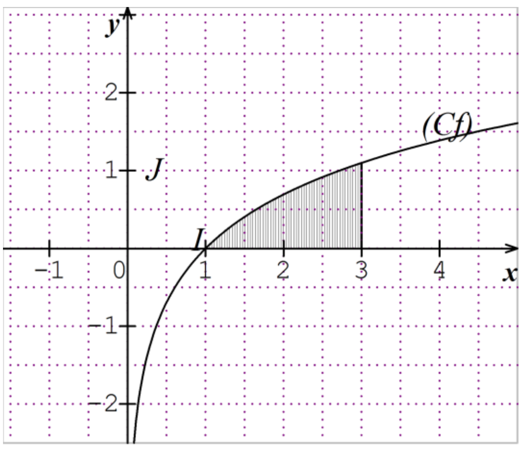
Donc $4-4\ln 2cm^2\leq A\leq 4(\ln 2)^2cm^2$

<u>Exercice 15</u>

La courbe (C_f) donnée ci-dessous représente dans un repère orthonormé (O ,I, J) la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par **:** $f(x)=\ln x$ **.** L'unité est le cm. On cherche à déterminer l'aire A en cm^2 de la partie du plan hachurée.

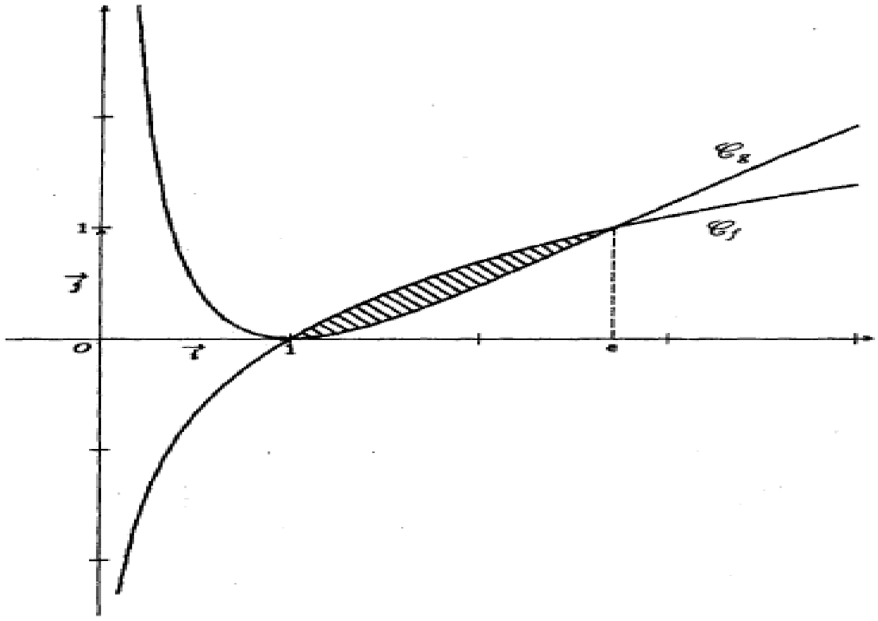
1) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien.

2) En déduire A.



Exercice* 16

Les courbes (C_f) et (C_g)données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal (O,I,J), les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x$ et $g(x)=(\ln x)^2$.



On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I=\int_1^e(\ln x)dx$ et $J=\int_1^e(\ln x)^2dx$.

a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien.

b) En déduire I .

c) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J=e-2I$ et en déduire J .

d) Donner la valeur de A.

Corrigé de l'exercice 16

$f(x)=\ln x \quad ; \quad g(x)=(\ln x)^2$

a. $\forall x\in]0;+\infty[: F'(x)=(x\ln x-x)'$

$F'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'-x' = \ln x+\dfrac{x}{x}-1$

$F'(x)=\ln x$

Donc F est une primitive de $\ln x$

b) Déduction de I

I= $\int_1^e \ln x dx=[x\ln x-x]_1^e$

I = $e\ln e-e-(1\ln(1)-1) = 1$

c) $j=\int_1^e(\ln x)^2dx$

Posons $U(x)=(\ln x)^2 ; U'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$

$V'(x)=1 \quad ; \quad V(x)=x$

$$J = \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2\ln(x)dx$$

$$J = e - 2\int_1^e \ln(x)dx = e - 2I$$

Donc $J = e - 2$

d) $A = \int_1^e f(x) - g(x)dx$

$$= \int_1^e \ln(x)\ dx - \int_1^e g(x)\ dx = I - J = 1 - (e-2)$$

Donc $A = 3 - e$

Exercice 17

On donne la fonction f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par :

f(x) = $\dfrac{x^2 - x + 2}{2x - 2}$ et la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) unité 1cm.

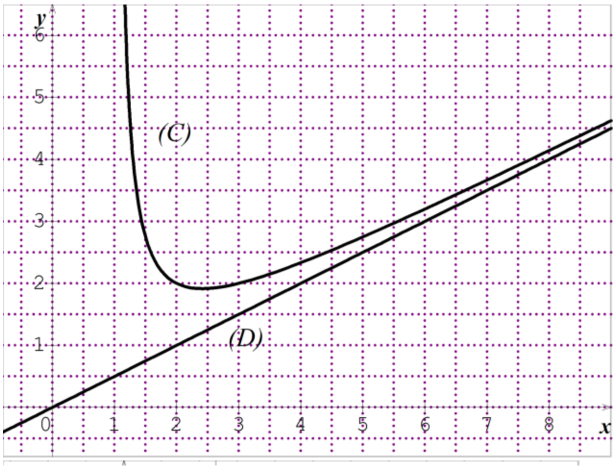
Soit A l'aire en cm^2 de la partie limitée par (C) ; (D) et les droites d'équations x = 2 et x = 4.

1) Hachurer A.

2) Justifier que pour tout nombre réel x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{x-1}$.

3) calculer A.



Leçon 11 : STATISTIQUE A DEUX VARIABLES

Exercice* 1

Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à l'ordre 2.

Le tableau suivant donne l'évolution de 1991 à 1999 du prix du kilogramme d'une denrée alimentaire.

Année (**X**)	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Prix (**Y**)en franc CFA	120	170	180	225	260	275	325	330	365

1) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique double.

Echelle : ***Axe des abscisses*** : Origine 1990 et 1 cm $\rightarrow$ 1an.

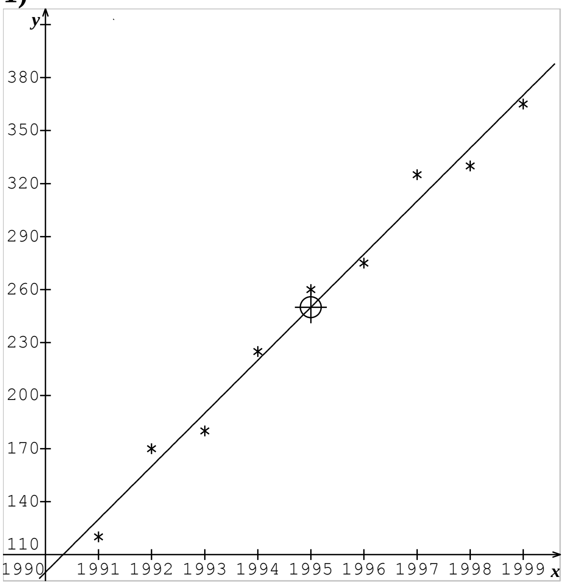
Axe des ordonnées : Origine 100 et 1cm $\rightarrow$ 20 f.

2) Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés.

3) En quelle année la valeur de la denrée dépassera 500 f ? Préciser cette valeur.

Corrigé de l'exercice 1

1)



2) Equation de la droite (D) d'ajustement de y en x

$(D)\ :\ Y = aX + b$

$a = \dfrac{Cov(X;Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

$\overline{X} = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{1991 + ... + 1999}{9}$ = 1995

$\overline{Y} = \dfrac{\sum Y_i}{9} = \dfrac{120 + 170 + ... + 365}{9}$ = 250

$Cov(X;Y) = \dfrac{\sum X_i Y_i}{N} - \overline{X}\,\overline{Y}$

$= \dfrac{1991 \times 120 + ... + 1999 \times 365}{9} - 1995 \times 250$

$Cov(X;Y) = 200$

$$V(X) = \frac{\sum x_i^{\,2}}{N} - \overline{X}^2$$

$$= \frac{1991^2 + ... + 1999^2}{9} - 1995^2$$

$$V(X) = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$$

Donc $a = \frac{200}{\frac{20}{3}} = \frac{600}{20} = 30$

$b = 250 - 30 \times 1995 = - 59\,600$

Donc (D) : $Y = 30X - 59600$

3) Soit à résoudre l'équation $y > 500$

$$30X - 59600 > 500$$

$$30X > 500 + 59600$$

$$X > \frac{60100}{30}$$

$$X > 2003$$

Donc le kg de la denrée alimentaire dépassera 500f à partir de 2004.

<u>Exercice* 2</u>

Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge de dix personnes choisies au hasard dans une population

.

X	36	38	40	42	45	47	50	52	60	70
y	11,8	12,0	12.2	12.0	12,5	12,3	13,1	14,0	15,5	15,4

1) Calculer les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ respectivement des variables X et Y.

2) Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (X ;Y) ainsi que le point moyen G. *(Unité graphique : 0,5 cm pour un an et 3cm pour l'unité de tension artérielle).*

3) Calculer la variance V(X) de X et la covariance COV(X,Y) de X et Y.

4) a) Déterminer une équation de la droite (D) de regression de Y en fonction de X .

b) Construire (D).

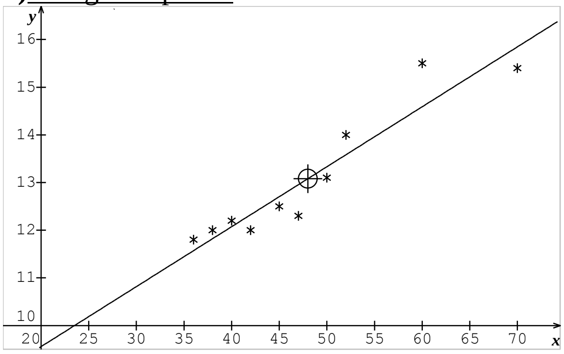
5) En utilisant la droite (D), calculer une estimation de la tension artérielle d'une personne âgée de 65 ans.

<u>Corrigé de l'exercice 2</u>

1) $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{36 + 38 + ... + 70}{10} = 48$

$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{11,8 + 12,0 + ... + 15,4}{10} = 13,08$

2) Nuage de points



3) $V(X) = \dfrac{\sum x_i^2}{N} - \overline{X}^2$

$= \dfrac{36^2 + ... + 70^2}{10} - 48^2$

$V(X) = \dfrac{24042}{10} - 2304 = 100{,}2$

$Cov(X;Y) = \dfrac{\sum X_i Y_i}{N} - \overline{X}\,\overline{Y}$

$= \dfrac{36 \times 11{,}8 + ... + 70 \times 15{,}4}{10} - 48 \times 13{,}08$

$Cov(X;Y) = 12{,}6$

4) a. (D) a pour équation $Y = aX + b$

avec $a = \dfrac{Cov(X;Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

$a = \dfrac{12{,}6}{100{,}2} = \dfrac{126}{1002} = \dfrac{21}{167} = 0{,}126$

$b = 13{,}08 - 0{,}126 \times 48 = 7{,}032$

Donc (D) : $Y = 0{,}126X + 7{,}032$

b. Voir courbe

5) Pour 65 ans $X = 65$

$Y = 0{,}126 \times 65 + 7{,}032 = 15{,}2$

Donc à 65 ans on estime la tension artérielle à 15,2

Exercice* 3

Une entreprise veut prévoir le nombre d'articles qu'elle aura en stock en l'an 2015.
L'évolution du stock de ses articles, au cours des six dernières années , est donnée par le tableau statistique ci-dessous.

Années	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	3810	3860	3940	4020	4100	4180

x_i = Ordre des années et y_i = nombre d'articles en stock.

1. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.
   (On prendra l'arrondi d'ordre zéro pour l'ordonnée de G).
2. Représenter graphiquement le nuage de points de la distribution statistique définie par le tableau précédent, dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   (Unité 2 cm en abscisse et 200 articles pour 1 cm en ordonnées).

3. Déterminer une équation de la droite de régression de y en fonction de x.
(On donnera l'arrondi d'ordre 2 des résultats).
4. Quel serait à partir de ces études le nombre d'articles en stock de l'entreprise en 2015 ?
(*On donnera l'arrondi d'ordre 0 du résultat).*

Corrigé de l'exercice 3

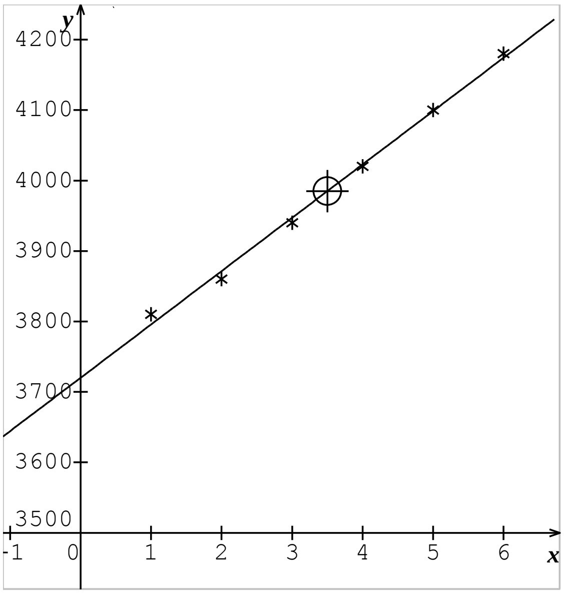
1) Coordonnées du point moyen G. $G(\overline{X};\overline{Y})$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{3810+....+4180}{6} = 3985$$

$G(3,5;3985)$

2) Nuage de point



3) Equation de la droite (D) de régression de Y en X

(D) $Y = aX + b$ avec

$$a = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \text{ et } b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

$$V(X) = \frac{\sum x_i^2}{N} - \overline{X}^2$$

$$= \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} - (3,5)^2$$

$V(X) = 2,92$

$$Cov(X;Y) = \frac{\sum X_i Y_i}{N} - \overline{X}\,\overline{Y} \quad = \frac{1\times 3810+....+6\times 4180}{6} - 3,5\times 3985 = 220,83$$

Donc $a = \dfrac{220,83}{2,92} = 75,62$

$b = 3985 - 75,62\times 3,5 = 3720,33$

Donc $(D): Y = 75,62X + 3720,33$.

4) Nombres d'articles en 2015

En 2015 $x = 11$

Donc $Y = 75,62(11) + 3720,33 = 4552$

En 2015 on aura donc 4552 articles.

Exercice 4

Le tableau suivant donne les notes sur 20 obtenues en mathématiques et en sciences physiques par huit candidats de la série D au BAC 2018. X_i est la note de mathématiques et Y_i est la note de physique-chimie.

X_i	4	6	7	9	11	14	12	17
Y_i	3	4	6	8	10	12	9	14

1- Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 1cm.

2- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage puis le placer dans le repère.

3- a) Vérifier que la covariance *cov*(X, Y) de la série statistique est égale à $\frac{57}{4}$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double.

4- Démontrer qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés est : $y = \frac{19}{22}x - \frac{17}{44}$.

5- Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calculer la note probable de mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en physique-chimie.

Exercice 5

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires d'une entreprise, exprimé en millions de francs, huit années consécutives de 2009 à 2016.

Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires (y_i) (en millions)	41	67	55	80	95	104	100	122

1- Représenter le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal :
Unité graphique : en abscisse 1 cm ↔ 1 année et en ordonnée 1 cm ↔ 10 millions.

2- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3- Justifier qu'une équation de la droite d'ajustement linéaire obtenue par la méthode des moindres carrées est : $y = 10,643x + 35,107$

4- En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires de cette entreprise gardera la même tendance, déterminer le chiffre d'affaire pour l'année 2017.

5- En quelle année le chiffre d'affaire de l'entreprise atteindra 160 millions ?

Exercice 6

Dans la ville d'Abidjan, le ministère de la santé recense par clinique, le nombre de postes de personnel en fonction du nombre de lits de la clinique. Les résultats de 10 cliniques sont regroupés dans le tableau suivant:

Clinique	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Nombres de lits X	120	175	75	135	110	90	185	128	120	145
Nombres de postes Y	205	250	112	180	125	122	242	170	164	188

1. Construire le nuage de points M_i (x_i ; y_i) correspondant à cette série statistique.
On prendra comme unités graphiques: en abscisse,1 cm pour 10 lits et en ordonnée : 1 cm pour 20 postes.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r. Un ajustement affine est-il justifié ?
4. a) Déterminer une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindre carrés.
b) Tracer la droite (D) sur le graphique.
5. Une nouvelle clinique de 100 lits vient d'ouvrir. A combien peut-on estimer le nombre de postes de cette clinique? Illustrer sur le graphique.
6.Dans une clinique où le personnel est estimé à 280 personnes, quel est le nombre de lits de cette clinique?

Exercice 7

Une enquête menée dans une entreprise auprès du personnel a porté sur le salaire mensuel Y par agent et le nombre X d'années d'ancienneté. Les résultats pour dix agents sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Salaire net mensuel y_i (en milliers de francs)	45	30	60	80	75	90	100	120	110	130
Nombre d'années d'ancienneté x_i	2	1	3	4	4	5	5	6	6	7

Tous les résultats seront donnés au centième près.

1) Représenter le nuage de points correspondant à la série double (X, Y) dans un repère orthogonal.
Sur l'axe des abscisses, prendre 1cm pour 1 année. Sur l'axe des ordonnées, prendre 1cm pour 10000 francs.
2- a) Calculer le salaire moyen du personnel de l'entreprise.
b) Quel est le nombre moyen d'année d'ancienneté du personnel ?
c) Placer le point moyen G dans le repère
3-Calculer la covariance de X et Y.
4- Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en X par la méthode des moindres carrées et la tracer.
5- a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série et interpréter le.
b) Si un agent de cette entreprise gagne 150000 francs par mois, à combien d'années peut-on évaluer son ancienneté ?
c) Quel est le salaire d'un agent qui a 10 années d'ancienneté ?

Exercice 8

Un pharmacien observe durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaire en million de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où X désigne le numéro du mois et Y le chiffre d'affaire correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22

1) Calculer les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ respectivement des variables X et Y .
2) Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point G
(Unité graphique : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnées)
3) Calculer la variance V(X) de X et la covariance COV(X, Y) de X et Y.
4) Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de Y en fonction de X est $Y = \frac{78}{35}X + 9,2$
5) En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaire de cette pharmacie à la fin du $7^{ème}$ mois.

<u>Exercice 9</u> (concours de CAFOP 2012)

Le tableau ci-dessous donne l'ancienneté x_i en année et le salaire y_i en millier de francs CFA par mois de chacun des huit ouvriers d'une exploration agricole.

x_i	3	5	7	9	12	14	16	18
y_i	68	74	89	101	120	130	135	155

1.Représenter le nuage de point en portant en abscisse les valeurs x_i et en ordonnée les y_i.
Unité : 1 cm pour 1an en abscisse et 1 cm pour 10 milliers de francs CFA en ordonnées.

2.a) calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points.
b) placer G sur le graphique.

3.a) Vérifier que la covariance de la série double (x_i, y_i) est égale à 145.
b) Démontrer qu' une équation de la droite de régression de y en fonction de x par la méthode des moindres carrés est : $y = \frac{580}{101}x + \frac{4919}{101.}$
c) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat.
d) Déterminer le salaire d' un ouvrier dans sa 24$^{\text{ème}}$ année.

<u>Exercice* 10</u>

Au cours d'une séance d'essais un pilote d'automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.
Au moment du top sonore, on meure la vitesse V_i en km/h de l'automobile puis la distance Y_i en mètre nécessaire pour arrêter le véhicule. On obtient les résultats suivants pour six essais.

V_i (km/h)	27	43	62	80	98	115
Y_i(m)	6,8	20,5	35,9	67,8	101,2	135,8

On pose pour les six valeurs de V_i, $X_i = V_i^2$ et on considère la série double (X_i, Y_i).

1. Compléter le tableau suivant :

Xi						
Yi						

2. Construire le nuage de points associé à la série statistique double (Xi ;Yi)
(Xi en abscisse avec 1 cm pour 1000 et Yi en ordonnée avec 1cm pour 10).

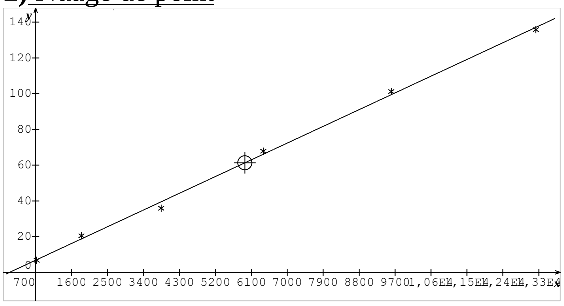
3.a)Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X puis la tracer dans le repère précédent..
b) En déduire la valeur estimée de X pour une distance d'arrêt de 180m puis la vitesse du véhicule.
c) Quelle est la distance d'arrêt estimée pour une vitesse de 150 km/h.

<u>Corrigé de l'exercice 10</u>

1) Tableau à compléter

x_i	72 9	1849	3844	6400	9604	13225
y_i	6,8	20,5	35,9	67,8	101,2	135,8

2) <u>Nuage de point</u>



3) a. Soit (Δ) la droite de régression de Y en X

(Δ) a pour équation $Y = aX + b$

avec $a = \dfrac{Cov(X;Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

$$V(X) = \frac{\sum x_i{}^2}{N} - \overline{X}^2$$

$$Cov(X;Y) = \frac{\sum X_i Y_i}{N} - \overline{X}\,\overline{Y}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{729 + ... + 13225}{6} = 5941{,}8$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{6{,}8 + ... + 135{,}8}{6} = 61{,}3$$

$$V(X) = \frac{729^2 + ... + 13225^2}{6} - 5941{,}8^2$$

$$V(X) = 19165132{,}8$$

$$Cov(X;Y) = \frac{729 \times 6{,}8 + ... + 13225 \times 135{,}8}{6} - 5941{,}8 \times 61{,}3$$

$$Cov(X;Y) = 199344$$

$$a = \frac{199344}{19165132{,}8} = 0{,}01$$

$$b = 61{,}3 - 0{,}01 \times 5941{,}8 = 1{,}8$$

Donc (Δ) : $Y = 0{,}01X + 1{,}8$

b. Pour une distance d'arrêt de 180m $Y = 180$

Donc $180 = 0{,}01X + 1{,}8$

$$X = \frac{180 - 1{,}8}{0{,}01} = 17820$$

Donc la vitesse du véhicule sera $V = \sqrt{X} = \sqrt{17820}$

$V = 133{,}5 km/h$

c. Pour une vitesse de 150km/h

$X = 150^2 = 22500$

$Y = 0{,}01 \times 22500 + 1{,}8 = 226{,}8$

la distance d'arrêt sera donc 226,8 m.

Exercice 11

Un hypermarché de la ville d'Abidjan dispose de 20 caisses qui ne sont pas toutes ouvertes. Afin d'améliorer ses services, le responsable commercial souhaite qu'un client n'attende pas plus d'une minute avant d'être reçu à une caisse. Pour cela, Il aimerait connaitre le nombre de caisses à ouvrir afin de répondre à cette préoccupation. Il a donc mené une enquête qui donne le temps moyen d'attente avant d'être reçu à une caisse en fonction du nombre de caisses ouvertes. Les résultats de l'enquête sont regroupés dans le tableau ci-dessous:

Nombre de caisses ouvertes x	3	4	5	6	8	10	12
Temps moyen d'attente (en minutes) y	16	12	9,6	7,9	6	4,7	4

NB : ***Les résultats seront donnés sous forme d'arrondi d'ordre 2, sauf pour la question 5.***

1. Construis le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ correspondant à cette série statistique.

   Unités graphiques: en abscisse 1 cm pour une caisse et en ordonnée 1 cm pour une minute d'attente.

2. Calcule les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

3. a) Détermine une équation de la droite de régression (D) de y en fonction de x par la méthode des moindres carrés.

   b) Trace la droite (D) sur le graphique. (*Marquer les points utilisés pour tracer (D)*).

4. a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r et interprète le.

   b) Estime à l'aide d'un calcul utilisant l'équation de la droite (D) :

   i) le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit égal à 1,16 minutes.

   ii) le temps moyen d'attente à une caisse pour un jour férié, sachant que seulement 7 caisses sont ouvertes les jours fériés.

5. Détermine le nombre minimal de caisses à ouvrir afin de répondre à la satisfaction du responsable commercial.

Leçon 12 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice* 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $f'+3f=0$; 2) $2y'=3y$; 3) $f''=0$; 4) $y''-4y=0$; 5) $f''=-3f$.

Corrigé de l'exercice 1

1) $f'+3f=0$

Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ke^{-3x}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

2) $2y'=3y$

$2y'-3y=0$

$y'-\frac{3}{2}y=0$

Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ke^{\frac{3}{2}x}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

3) $f''=0$

$f'=k \quad k\in\mathbb{R}$

$f(x)=k\,x+c \quad c\in\mathbb{R}$

Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=k\,x+c$ $(k\in\mathbb{R}\ ;c\in\mathbb{R})$

4) $y''-4y=0$

$y''-(2^2)y=0$

Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=k_1e^{2x}+k_2e^{-2x}$ $(k_1\in\mathbb{R};k_2\in\mathbb{R})$.

5) $f''=-3f$

$f''+3f=0$

Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=A\cos(\sqrt{3}x)+B\sin(\sqrt{3}x)$ avec $(A\in\mathbb{R};B\in\mathbb{R})$.

Exercice 2

f étant une fonction numérique inconnue, résoudre les équations différentielles suivantes et préciser dans chaque cas la solution particulière vérifiant les conditions initiales données.

1) $f'=3f$; $f(0)=4$; 2) $3f'+7f=0$; $f(2)=-5$.

3) $f''=0$; $f(0)=1$ et $f(-1)=2$; 4) $9f''+64f=0$; $f(\pi)=0$ et $f'(2\pi)=-\frac{1}{3}$.

Exercice 3

On donne les deux équations : E_1 : y' = 3y et E_2 : y' = 2y

1°) Donner la solution générale de l'équation différentielle E_1 et celle de l'équation différentielle E_2.

2°) Soit f une fonction définie sur IR par : f (x) = f_1 (x) + f_2 (x) où f_1 désigne une solution de l'équation différentielle E_1 et f_2 désigne une solution de l'équation différentielle E_2.
Déterminer f (x) sachant que f (0) = - 2 et f '(0) = - 3.

Exercice *4

On se propose de chercher les fonctions dérivables f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E) : $y'+2y=3e^{-3x}$

1) Démontrer que la fonction numérique g définie par $g(x)=-3e^{-3x}$ est solution de (E).

2) Soit (E') l'équation différentielle $y'+2y=0$

Résoudre (E')

3) a) Démontrer qu'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de (E').

b) En déduire les solutions de (E).

Corrigé de l'exercice 4

$(E): y'+2y=3e^{-3x}$

1) $g(x)=3e^{-3x}$

$g'(x)=9e^{-3x}$

$g'(x)+2g(x)=9e^{-3x}+2(-3)e^{-3x}$

$g'(x)+2g(x)=3e^{-3x}$

Donc g est solution de (E)

2) $(E'): y'+2y=0$

Les solutions de (E') sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ke^{-2x}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

3.a) $f-g$ est solution de (E') $\Leftrightarrow (f-g)'(x)+2(f-g)(x)=0$

$\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)+2f(x)-2g(x)=0$

$\Leftrightarrow f'(x)+2f(x)=g'(x)+2g(x)\ =9e^{-3x}+2(-3)e^{-3x}$

$\Leftrightarrow f'(x)+2f(x)=3e^{-3x}$

$\Leftrightarrow$ f *est solution de* (E).

b) f *est solution de* (E) $\Leftrightarrow (f-g)$ est solution (E')

$\Leftrightarrow (f-\mathrm{g})(x)=ke^{-2x}$

$\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{g}(x)+ke^{-2x}$

$\Leftrightarrow f(x)=-3e^{-3x}+ke^{-2x}$

Donc les solutions (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-3e^{-3x}+ke^{-2x}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Exercice 5

On se propose de trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que pour tout nombre réel x :

(E) : f '(x) -2 f(x) = 5sin(x).

1. Résoudre l'équation différentielle (F) : f '- 2f = 0.

2. Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par g(x) = a cos(x) + b sin(x) soit solution de (E).

3. a) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de (E').

b) En déduire les solutions de (E).

c) Déterminer la solution *h* de l'équation différentielle (E) qui s'annule en 0.

Exercice* 6

On considère les équations différentielles (E): f ''+ 4f = 3cox et (E'): f ''+ 4f = 0 ,

où *f* est une fonction numérique de la variable réelle *x* deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : f ''+ 4f = 0.

2. Vérifier que la fonction g définie par g(*x*) = cos(*x*) est solution de (*E*).

3. a) *h* étant une solution de (E'), démontrer que toute fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par *f*(*x*) = *h*(*x*) + *g*(*x*) est solution de (*E*).

b) En déduire la solution *f* de (E) telle que $f(\frac{\pi}{2})=0$ et $f'(\frac{\pi}{2})=1$.

Corrigé de l'exercice 6

1. (E') : $f''+4f=0$

Les solutions de (E') sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=A\cos(2x)+B\sin(2x)$ $(A\in\mathbb{R};B\in\mathbb{R})$

2. $g(x)=\cos(x)$

$g'(x)=-\sin(x)$

$g''(x)=-\cos(x)$

$g''(x)+4g(x)=-\cos(x)+4\cos(x)$

$g''(x)+4g(x)=3\cos(x)$

Donc g *est solution de* (E)

3a) $f(x)=h(x)+g(x)$

$f'(x)=h'(x)+g'(x)$

$f''(x)=h''(x)+g''(x)$

$f''(x)+4f(x)=h''(x)+g''(x)+4(h(x)+g(x))$

$=h''(x)+g''(x)+4h(x)+4g(x)$

Or $h''(x)+4h(x)=0$

Donc $f''(x)+4f(x)=g''(x)+4g(x) \quad =-\cos(x)+4\cos(x)$

$f''(x)+4f(x)=3\cos(x)$

Donc f *est solution de* (E)

3) b) $f(x)=A\cos(2x)+B\sin(2x)+\cos(x)$

$f'(x)=-2A\sin(2x)+2B\cos(2x)-\sin(x)$

$f(\frac{\pi}{2})=0 \Leftrightarrow A\sin\pi+B\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2}=0$

$f'(\frac{\pi}{2})=1 \Leftrightarrow -2A\sin\pi+2B\cos\pi-\sin\frac{\pi}{2}=1$

$$\begin{cases}-A=0\\-2B-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=0\\B=-1\end{cases}$$

Donc $f(x)=-2\sin(2x)+\cos(x)$

Exercice 7

Après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (*taux de glucose sanguin*) décroit à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi $g'+kg=0$ où *g* désigne la fonction glycémique dépendant du temps t $(t\geq 0)$ et k une constante strictement positive appelée coefficient d'assimilation glucidique.

1. Déterminer l'expression de $g(t)$ à l'instant t sachant que $g(0) = 2$.

2. Etudier les variations de *g* et donner l'allure de sa représentation graphique.

Exercice 8

Soit à résoudre sur ℝ l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$, où r est la fonction définie sur ℝ par : $r(x) = xe^{-x}$.

1) Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ est solution de (E) .

2) Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.

a) Démontrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est une solution de (F).

b) Résoudre l'équation différentielle (F).

c) En déduire la solution φ de (E) qui vérifie $f(0) = -\frac{3}{2}$.

Exercice 9

On se propose de résoudre sur ℝ l'équation différentielle (E) : $f'(x) + 2f(x) = e^{-2x}$.

1- Vérifier que la fonction $g(x) = (x + 1)e^{-2x}$ est une solution de (E).

2- Résoudre sur ℝ l'équation différentielle (E'): $f'(x) + 2f(x) = 0$.

3- Soit f une fonction, démontrer que $f + g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de (E')

4- En déduire les solutions de (E).

*R. C. I. – MENET-FP * Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - MENET-FP*

BACCALAURÉAT **Coefficient : 4**
SESSION 2019 **Durée : 4h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

En vue de sélectionner des joueurs pour un tournoi international de football, une fédération nationale met à la disposition de l'entraîneur un certain nombre de joueurs évoluant au pays et hors du pays. Parmi eux, il y a des joueurs professionnels et des joueurs non professionnels.
Ces joueurs se répartissent comme suit :

- 75% des joueurs évoluent au pays ;
- 60% des joueurs évoluant au pays sont professionnels ;
- 80% des joueurs évoluant hors du pays sont professionnels.

On choisit au hasard un joueur pour subir un test antidopage.
On désigne par A l'évènement « Le joueur choisi évolue au pays ».
On désigne par B l'évènement « Le joueur choisi est professionnel ».
On désigne par C l'évènement « Le joueur choisi évolue au pays et est professionnel ».

1. *a*) Traduis l'énoncé par un arbre de probabilité.
   b) Donne $P_A(B)$, la probabilité de B sachant A.
   c) Démontre que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,45.
2. Calcule la probabilité de B.

Partie B

Un entraîneur doit sélectionner des joueurs parmi ceux mis à sa disposition. Pour ce faire, il soumet d'abord chaque joueur à un test qui consiste à faire trois tirs au but successifs à partir du point de penalty. Est retenu à l'issue de ce premier test, tout joueur qui réussit au moins deux de ses trois tirs. On suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres et que la probabilité qu'un joueur donné réussisse un tir est égale à $\frac{3}{4}$.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs réussis par un joueur donné à l'issue de l'épreuve de trois tirs au but successifs.
   a) Détermine les valeurs prises par X.
   b) Détermine la loi de probabilité de X.
2. Calcule l'espérance mathématique de X.
3. Démontre que la probabilité qu'un joueur donné soit retenu est égale à $\frac{27}{32}$.

EXERCICE 2

Une société ivoirienne de transformation de produits agricoles a acheté 5 000 tonnes de noix de cajou aux paysans en 2011. La société décide d'augmenter de 5% ses achats chaque année par rapport à l'année précédente.
On note, pour tout entier naturel n, Q_n la quantité en tonnes de noix de cajou achetée en l'an $(2011 + n)$.
On a : $Q_0 = 5\,000$.

1. Justifie que la quantité de noix de cajou achetée en 2012 est de 5 250 tonnes.

2. Démontre que (Q_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

3. *a*) Justifie que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $Q_n = 5\,000 \times (1{,}05)^n$.
   b) Détermine la quantité de noix de cajou qu'achètera cette société en 2020.
   Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

4. *a*) Détermine l'année où la quantité de noix de cajou achetée sera supérieure à 10 000 tonnes.
   b) Détermine la quantité totale de noix de cajou achetée par cette société de 2011 à fin 2020.
   Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est : 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x-1} - \ln(x-1)$.
On note $(\mathscr{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. *a*) Calcule la limite de g à droite en 1.
   b) Interprète le résultat obtenu.

2. *a*) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.
   c) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.

3. On suppose que g est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
   a) Justifie que : $\forall\, x \in]1\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{-x}{(x-1)^2}$
   b) Déduis de ce qui précède le signe de $g'(x)$.
   c) Dresse le tableau de variation de g.

4. *a*) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
   On note α cette solution.
   b) Vérifie que : $2{,}7 < \alpha < 2{,}8$.

5. Démontre que :
   $\forall\, x \in]1\,;\alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha\,;+\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = 4e^{-x}\ln(x-1)$.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. *a*) Justifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.

2. *a*) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$.

   b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.

3. On suppose que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Justifie que : $\forall x \in]1\,;+\infty[,\ f'(x) = 4e^{-x}g(x)$.
   b) Déduis de la question précédente et de la question 5 de la partie A, les variations de f.
   c) Dresse le tableau de variation de f.

4. Construis les courbes $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C})$ dans le même repère (O, I, J).
   On prendra : $\alpha = 2{,}75$ et $f(\alpha) = 0{,}14$.

Partie C

1. Justifie que : $\ln(\alpha - 1) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, en utilisant la question 4-*a*) de la partie A.

2. On pose : $U = \displaystyle\int_2^\alpha \frac{1}{x-1}\,dx$ et $V = \displaystyle\int_2^\alpha \ln(x-1)\,dx$.
   a) Calcule U.
   b) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que : $V = 3 - \alpha$.

3. On désigne par A l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_g)$, l'axe (OI), les droites d'équations $x = 2$ et $x = \alpha$.
   a) Justifie que : $U - V = \dfrac{(\alpha - 2)^2}{\alpha - 1}$.
   b) Déduis-en l'aire A.

3/3

BACCALAURÉAT **Coefficient : 4**
SESSION 2018 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est : 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $4i$; 2 et $1 + i\sqrt{3}$.

1. *a*) Écris le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.
b) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère (O, I, J).

2. Soit $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre O qui transforme B en C.
a) Justifie que l'expression complexe de $\mathcal{S}$ est : $z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$.
b) Justifie que $\mathcal{S}$ est une rotation dont on précisera une mesure de l'angle.

3. Soit (E) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 4i| = 2$.
a) Détermine et construis (E).
b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (E') l'image de (E) par $\mathcal{S}$.

4. Soit (F) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 2| = |z - 1 - i\sqrt{3}|$.
a) Détermine et construis (F).
b) Justifie que le point O et le point K milieu du segment [BC] appartiennent à (F).
c) Justifie que l'image de (F) par $\mathcal{S}$ est la droite (OJ).

EXERCICE 2

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. En l'an 2000, l'effectif était égal à mille (1 000).
L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approché par une fonction f. Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle [2000 ; +∞[et est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) : \quad y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}.$$

1. Soit h la fonction dérivable et définie sur l'intervalle [2000 ; +∞[par : $h(t) = \frac{200}{t}$.

Vérifie que h est une solution de (E_1).

2. Résous l'équation différentielle

(E_2) : $y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = 0$.

3. *a*) Démontre qu'une fonction g est solution de (E_1) si et seulement si $g - h$ est solution de (E_2).
b) Déduis-en les solutions de (E_1).
c) Sachant que $f(2000) = 1000$, vérifie que :

$$\forall\, t \in [2000 ; +\infty[,\ f(t) = 999{,}9\,e^{(10-\frac{t}{200})} + \frac{200}{t}.$$

d) Détermine le nombre d'individus de cette population animale en 2020.
Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur l'intervalle]0 ; + ∞[par :
$g(x) = 2 + x - 3x\ln(x)$.

1. Calcule la limite de g en 0 et la limite de g en $+\infty$.

2. *a*) On désigne par g', la fonction dérivée de g.
Calcule $g'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.
b) Étudie les variations de g.
c) Vérifie que : $g(e^{-\frac{2}{3}}) = 2 + 3e^{-\frac{2}{3}}$.
Dresse le tableau de variation de g.

3. *a*) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[e^{-\frac{2}{3}} ; +\infty[$, une solution unique notée α.

b) Justifie que : $1{,}9 < \alpha < 2$.

4. Démontre que : $\forall\, x \in]0 ; \alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{20\ln(x)}{(x+2)^3}$.

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 5 cm.

1. *a)* Calcule la limite de f en 0.
Interprète graphiquement le résultat.
b) Justifie que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0.
Interprète graphiquement le résultat.

2. On note f' la fonction dérivée de f.
a) Démontre que :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\quad f'(x) = \frac{20g(x)}{x(x+2)^4}.$$

b) Déduis-en les variations de f.
c) Dresse le tableau de variation de f. *On ne calculera pas $f(\alpha)$.*

3. Justifie qu'une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1 est : $y = \dfrac{20}{27}x - \dfrac{20}{27}$.

4. Trace (T) et $(\mathscr{C})$. On prendra $\alpha = 1{,}95$ et $f(\alpha) = 0{,}22$.

Partie C

On pose : $\mathrm{U} = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)^2}\,dx$ et $\mathrm{V} = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{(x+2)^3}\,dx$.

1. On admet que : $\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ \dfrac{1}{x(x+2)^2} = \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{4(x+2)} - \dfrac{1}{2(x+2)^2}$

Déduis-en que : $\mathrm{U} = \dfrac{\ln 3}{4} - \dfrac{\ln 2}{4} - \dfrac{1}{24}$

2. *a)* À l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\mathrm{V} = -\dfrac{\ln 2}{32} + \dfrac{1}{2}\mathrm{U}$.

b) Calcule en cm² l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe (OI), les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
Donne le résultat arrondi à l'ordre 1.

BACCALAURÉAT **Coefficient : 4**
SESSION 2017 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.
Chaque candidat recevra trois (03) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.

EXERCICE 1

Dans le cadre d'un recensement portant sur le nombre de travailleurs dans les champs d'hévéa, un agent recenseur a visité huit (8) exploitations. Un exploitant voudrait estimer le nombre de travailleurs que prendrait une exploitation de 16 ha d'hévéa. Pour cela l'agent recenseur a recueilli les informations consignées dans le tableau ci-dessous.

Nombre x de travailleurs	2	4	4	5	7	7	8	8
Superficie exploitée y (en ha)	3	5	6	7	10	11	8	12

1. Représente le nuage de points correspondant à la série statistique double (X, Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On prendra sur l'axe des abscisses 1 cm pour 1 travailleur et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour une superficie de 1 ha.
Pour les questions 2), 3), 4) et 5), les résultats seront arrondis à l'ordre 2.
2. Justifie que le point moyen a pour couple de coordonnées (5,63 ; 7,75).
3. On note V(X) la variance de X, V(Y) la variance de Y et Cov(X,Y) la covariance de X et Y.
Justifie que : V(X) = 4,18 ; V(Y) = 8,44 et Cov(X,Y) = 5,37.
4. a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r de la série (X, Y).
b) Interprète le résultat obtenu précédemment.
5. *a*) Justifie qu'une équation de la droite ($\mathscr{D}$) d'ajustement de Y en X par la méthode des moindres carrés est : $y = 1{,}28x + 0{,}54$.
b) Trace ($\mathscr{D}$) sur le graphique précédent.
6. Utilise l'ajustement précédent pour répondre à la préoccupation de l'exploitant.
On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
L'unité graphique est 2 cm.

1. Résous l'équation : $z \in \mathscr{C}$, $z^2 + (1 - 3i)z - 4 = 0$.
2. On pose : $\forall z \in \mathscr{C}$, $P(z) = z^3 + (1 - i)z^2 + (2 + 2i)z - 8i$.
a) Justifie que : $P(-2i) = 0$.
b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$.
c) Déduis des questions précédentes les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

3. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $-2i$; $-2 + 2i$ et $1 + i$.
On note D le symétrique de A par rapport au point O.
a) Place les points A, B, C et D dans le plan complexe.
b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.
c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2 cm.

1. *a*) Justifie que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu précédemment.

2. *a*) Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
b) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.

3. On suppose que f est dérivable et on note f' sa fonction dérivée.
a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$.
b) Justifie que :
* $\forall x \in]-\infty ; 1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2} ; +\infty[, f'(x) > 0$;
* $\forall x \in]1 - \sqrt{2} ; 1 + \sqrt{2}[, f'(x) < 0$.
c) Dresse le tableau de variation de f.
On ne calculera pas $f(1 - \sqrt{2})$ et $f(1 + \sqrt{2})$.

4. Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (c) au point d'abscisse 0 est : $y = -x + 1$.

5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (1 + x)e^{-x} - 1$.
a) On suppose que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note h' sa fonction dérivée. Calcule $h'(x)$.
b) Étudie les variations de h.
c) Calcule $h(0)$ et dresse le tableau de variation de h. On ne demande pas de calculer les limites de h.
d) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) \leq 0$.
e) Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + x - 1 = (1 - x)h(x)$.
f) Déduis des questions précédentes la position relative de (C) et (T).

6. Trace la tangente (T) et la courbe (C).
On prendra : $f(1 - \sqrt{2}) = 1{,}3$ et $f(1 + \sqrt{2}) = -0{,}4$.

Partie B

Soit λ un nombre réel de l'intervalle $]1 ; +\infty[$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

1. Démontre, en utilisant deux intégrations par parties, que : $A(\lambda) = \left(\frac{16}{e} - \frac{4(1+\lambda)^2}{e^{\lambda}}\right)$ cm².

2. Détermine la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

2/2