COURS DE MATHEMATHIQUES FINANCIERES

Présenté par : Mme HARCHEB Leila

Cours de Mathématiques Financières

Présenté par : Mme HARCHAB Leila

Objectif du cours :

Ce cours vise à présenter les différents éléments du calcul financier et d'expliquer la notion de la valeur temporelle de l'argent. Il fait apparaître principalement les préoccupations suivantes :

- La différence entre les différents types d'intérêts (intérêt simple, intérêt composé),
- La différence entre les situations d'actualisation et de capitalisation,
- La méthode de calcul de la valeur future et la valeur présente d'une somme ou d'une suite d'annuités,
- Les tableaux d'amortissement des emprunts.

Plan du cours

Pour atteindre les objectifs d'apprentissage, le contenu du cours est structuré en deux parties :

Partie 1 : Opérations financières à court terme

Chapitre1 : Intérêt simple

Chapitre2 : Escompte

Chapitre3 : Equivalence de capitaux

Partie 2 : Opérations financières à long terme

Chapitre1 : Intérêt composé

Chapitre2 : Escompte à intérêt composé

Chapitre3 : Annuités

Chapitre4 : emprunts indivis

Chacun des chapitres comporte des applications permettant à l'étudiant de bien assimiler le contenu du cours.

Partie 1 : Opérations financières à court terme

Chapitre1 : Intérêt simple

Objectifs

A partir d'informations financières :

- Calculer à intérêt simple un intérêt, un taux, un capital et une durée.
- Connaître le vocabulaire utilisé par un commerçant lorsqu'il négocie une traite.
- Déterminer un escompte commercial et un escompte rationnel.
- Déterminer la valeur acquise ou la valeur actuelle d'un capital.
- Déterminer le capital équivalent à un ensemble de capitaux à un taux donné.

La règle des intérêts simple s'applique aux opérations financières de durée inférieur ou égale à l'année.

1. Définition de l'intérêt :

L'intérêt peut être défini comme la rémunération d'un prêt d'argent. C'est le prix à payer par l'emprunteur au prêteur, pour rémunérer le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent pendant une période de temps. Trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt: la somme prêtée, la durée du prêt, et le taux auquel cette somme est prêtée.

Il y a deux types d'intérêt: l'intérêt simple et l'intérêt composé.

2. Formule fondamentale de l'intérêt simple :

L'intérêt simple se calcule toujours sur le principal. Il ne s'ajoute pas au capital pour porter lui-même intérêt. L'intérêt simple est proportionnel au capital prêté ou emprunté, au taux de placement ou taux d'intérêt s'appliquant à une période donnée et de la durée de placement.

Soit,

C : le montant du capital prêté ou emprunté en dinar (valeur nominale)
t : le taux d'intérêt annuel (en pourcentage)
n : la durée de placement (en année)
I : le montant de l'intérêt à calculer en dinar

$$I = C.\ t\%.\ n$$

$$I = \frac{C.t.n}{100}$$

Durée du placement exprimée en mois.
.d n'est pas un entier, alors n/12 d'où on a :

$$I = \frac{C.t.n}{1200}$$

3. **Durée du placement exprimée en jour.**

Le raisonnement est identique à celui de durée des placements exprimé en mois à la différence que le dénominateur ne sera plus 12 ; qui exprime le nombre de mois de l'an. Ici, il faut faire très attention selon qu'on exprime l'intérêt simple, commercial ou civil.

L'intérêt simple civil est défini comme l'intérêt déterminé sur la base de l'année civil c'est-à-dire 365 jours.

Année civile :

$$I = \frac{C.t.n}{36500}$$

L'intérêt commercial est basé sur l'année commerciale

de 360 jours.

$$I = \frac{C.t.n}{36000}$$

Valeur acquise par un capital.

Valeur acquise (valeur future) représente la valeur du capital augmentée des intérêts à la fin de la période ‹ capitalisation.

VA = C + I

Exemples d'application.

Exemple1 :
Un capital de 45 000 DA est prêté pendant 3 ans au taux de 8%. Quel intérêt fournira t-il au prêteur ? Quel montant l'emprunteur devra t-il remettre au prêteur?

Résolution

♦ I = C x t x n

I = 45 000 x 8% x 3

I = 10 800 DA

♦ VA = C + I

VA = 45 000 + 10800

VA = 55 800 DA

Exemple 2
Un capital de 18 000 DA est placé le 12 juillet dans une banque au taux de 10%. On veut savoir ce que le capital a accumulé comme intérêts au 29 septembre de la même année (commercial et civile).

Résolution

Année commercial : 18 000 x 10x 79/36000 = 395 DA

Année civile : 18 000 x 10 x 79/36500 = 389,58 DA

Exemple 3
Déterminer la somme à déposer aujourd'hui sur un livret à 8% pour obtenir 80 000 DA dans 10 ans

Résolution

I = C x t x n, VA = C + I

80 000 = C + C x 8% x 10

80 000 = C + 0,8C

80 000 = C (1 + 0,8)

80 000 = 1,8C

C = 80 000 / 1,8

C = 44 444 DA

Exemple4:
Une somme de 10000 dinars est placée sur un compte du 23 Avril au 9 Août au taux simple de 7 %

1/ Calculer le montant de l'intérêt produit à l'échéance.

2/ Calculer la valeur acquise par ce capital.

3/ Chercher la date de remboursement pour un intérêt produit égal à 315 dinars.

***Solution* :**

On a :

$I = \frac{C.t.n}{36000}$,C=10000, t=7%, calculons alors le nombre de jours de placement :

$$\begin{array}{lcl} \text{Avril} & = & 7 \\ \text{Mai} & = & 31 \\ \text{Juin} & = & 30 \\ \text{Juillet} & = & 31 \\ \text{Août} & = & 9 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 108 \text{ jours}$$

$$I = \frac{10000.7.108}{36000} = 210$$

2/ La valeur acquise par ce capital est égale à V,

V = C + I = 10000 + 210 = 10210 dinars

3/ Date de remboursement correspondant à un intérêt de 315 dinars

$$I = \frac{C.t.n}{36000}$$

Donc

$$n = \frac{36000.I}{C.t}$$

$$n = \frac{36000.315}{10000.7} = 162\,Jours$$

Avril = 7

Mai	= 31
Juin	= 30
Juillet	= 31
Août	= 31
Septembre	= 30
	160
Octobre =	2
	162

Date de remboursement = 2 octobre

4. Taux moyens d'une série de placements simultanément.

Considérons trois capitaux C1, C2 et C3 placés respectivement aux taux t1 ; t2, t3 pendant des durées respectives de n1, n2, et n3.

L'intérêt total de ces placements est égal à

$$I = \frac{C_1.t_1.n_1}{36000} + \frac{C_2.t_2.n_2}{36000} + \frac{C_3.t_3.n_3}{36000}$$

Le taux moyen de placement serait le taux unique t qui appliqué aux capitaux respectifs et pour leur durée respective conduirait au même intérêt total. Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{C_1.t_1.n_1}{36000} + \frac{C_2.t_2.n_2}{36000} + \frac{C_3.t_3.n_3}{36000} = \frac{C_1.t\ \ .n_1}{36000} + \frac{C_2.t\ \ .n_2}{36000} + \frac{C_3.t\ \ .n_3}{36000}$$

$$t = \frac{C1t1n1 + C2t2n2 + C3t3n3}{C1n1 + C2n2 + C3n3}$$

$$t = \sum \frac{C_i t_i n_i}{c_i n_i}$$

Exemple :
Un individu effectue 3 placements de manière simultanée aux conditions suivantes :

C	t	n
1850	9%	3 juin au 18 octobre
4285	7%	11 mars au 4 juillet
5300	10%	12 novembre au 30 décembre

Calculer en année commerciale le taux moyen.

Résolution

$$t = \sum \frac{C_i t_i n_i}{c_i n_i}$$

.t1 = 1850 x 9 x 137=2281050

.t2 = 4285 x 7 x 115 = 3449425

.t3 = 5300 x 10 x 48 = 254400

Taux moyen t = 8274475/ (253450 + 492775 + 254400) = 8,27% **.t = 8,27%**

5. Terme échu, terme à échoir, taux effectif :

Comme on l'a déjà signalé, selon les modalités du contrat de prêt ou de placement, les intérêts peuvent être versés en début ou en fin de période :

- Lorsque les intérêts sont payés en fin de période, on dit qu'ils sont post-comptés ou terme échu. Ils sont calculés au taux d'intérêt simple, sur le capital initial C qui représente le nominal. Ils sont ajoutés ensuite, au nominal pour constituer le capital final V (valeur acquise).

  Pour un capital initial égal à C on a donc $V = C(1 + \frac{t.n}{36000})$
- Lorsque les intérêts sont payés en début de période, on dit qu'ils sont précomptés ou terme à échoir. Ils sont calculés sur le nominal, qui constitue la somme finale C et retranchés du nominal pour déterminer la somme initiale ou mise à disposition. Etant donné un nominal égal à C, on aura alors C' = C – I, où C' désigne la somme initiale.

- Quand les intérêts sont payables d'avance, le taux d'intérêt effectif est celui appliqué au capital effectivement prêté ou emprunté C' donne le montant de l'intérêt produit. En désignant par T, le taux effectif, on aura alors

$$\frac{C.t.n}{36000} = \frac{C'.T.n}{36000}$$

Or C'= C-I= $C - \frac{C.t.n}{36000}$

Donc : $\frac{C.t.n}{36000} = \frac{\left(C - \frac{C.t.n}{36000}\right).T.n}{36000}$

$$t = T\left(1 - \frac{t.n}{36000}\right)$$

$$T = \frac{t}{1 - \frac{t.n}{36000}}$$

<u>Exemple</u>:
Une personne place à intérêts précomptés la somme de 30000 dinars pour une durée de 6 mois au taux de 10 %. Quel est le taux effectif de ce placement ?

Solution **:**

$$T = \frac{t}{1 - \frac{t.n}{36000}}$$

$$T = \frac{10}{1 - \frac{10.6}{1200}} = 10{,}52\%$$

6. Nombres et les diviseurs fixes

Nous partons de la formule

I = Ctn / 36 000.

Divisons la fraction par t.

Ce qui donne :

I =(Ctn / 36 000) /t

I=(Ctn/t)/(36000 /t)

Posons D=(36000/t) ceci entraine que :

$$I = \frac{C.n}{D}$$

Nous posons également N = CN. Donc la formule finale devient :

$$I = \frac{N}{D}$$

Exemple

Un capital de 15 000DA est placé à 5% pendant 32 jours.

Quel est le montant de l'intérêt en fin de placement ?

Solution

N = Cn = 15 000 * 32 = 480 000

D = 36 000 / t = 36 000 / 5 =7 200

D'où I = N / D = 480 000/ 7 200

I = 66,66

NB : l'intérêt de cette méthode est de pouvoir faire rapidement le calcul d'intérêt lorsque plusieurs capitaux sont en jeu.

Chapitre2 : Escompte

1. Notion d'effets de commerce

On retient ici deux sortes d'effets de commerce : ***le billet à ordre et la lettre de change.***

1.1- Le billet à ordre.

C'est une promesse écrite (reconnaissance de dette) par l'emprunteur au prêteur qu'il remboursera à la valeur acquise à la date indiquée lors de la contraction du prêt.

1.2- La lettre de change.

C'est une lettre rédigée par le prêteur sur laquelle l'emprunteur signe. C'est la preuve qu'il reconnaît d'avoir rembourser à échéance la valeur acquise.

Le montant de la créance qui n'est autre que la valeur acquise est encore appelé ***valeur nominale*** de l'effet. La date de paiement est encore appelée ***la date d'échéance.***

2. Définition de l'escompte :

L'escompte est une opération de crédit par laquelle la banque transforme une créance, matérialisée par un effet de commerce, en liquidité au profit de son client, avant son échéance et contre remise de l'effet. La banque crédite ainsi le compte de l'entreprise du montant de l'effet escompté diminué des agios. On distingue l'escompte commercial de l'escompte rationnel.

3. L'escompte commercial :

On parle d'escompte commercial quand le prêteur, ayant besoin d'argent, veut négocier l'effet de commerce qui constitue pour lui la preuve qu'il aura de l'argent à une date précise. On dit qu'il *remet à l'escompte et* que celui qui récupère l'effet *escompte l'effet*. Ce dernier accepte l'opération commerciale que s'il obtient un **intérêt** encore appelé ***escompte commercial.***

Avec : C = valeur nominale

t = taux d'escompte

n = durée qui sépare la remise à l'escompte de la date d'échéance.

e = escompte commercial.

$$e = \frac{C.t.n}{36000}$$

3.1- Valeur actuelle commerciale.

A la différence de la valeur acquise, le calcul sur la valeur actuelle commerciale s'effectue comme une opération d'intérêt précompté. L'escompte est immédiatement retenu.

$$\boxed{V_{ac} = C - e}$$

Exemple :
Le 18 mai, un effet de commerce à échéance du 14 août et de nominal 18 000 DA est escompté commercialement. Le taux d'escompte est de 8,5%, d'année commerciale.

a) Calculer l'escompte et la valeur acquise de cet effet.

b) La négociation se fait maintenant le 14 juillet, quels sont l'escompte et la valeur acquise commerciale.

Résolution

a) .e = (C x t x n)/36 000

.e = 18 000 x 8,5 x 88/36 000

.e = 374 DA

V_{ac} = C- e

V_{ac} = 18 000 – 374

V_{ac} = 17626 DA

b) .e =18 000 x 8,5 x 31/36 000

.e = 131,75 DA

V_a = 18 000 – 131,75

V_a=17868.25 DA

3.2. L'escompte rationnel :

C'est l'intérêt calculé sur la somme effectivement prêtée par la banque : la valeur actuelle rationnelle. Cette valeur augmentée des intérêts, calculés en fonction de cette valeur et du nombre de jours couru de la négociation à l'échéance de l'effet, devient égale à la valeur nominale.

Soit,
e' : escompte rationnel
a' : valeur actuelle rationnelle
V : valeur nominale de l'effet
t : taux d'escompte
n : durée de l'escompte

$$é = \frac{à.t.n}{36000}$$

Calcul de la valeur actuelle rationnelle (a') en fonction de la valeur nominale (V)

On a : V = à + é

$$V = à + \frac{à.t.n}{36000}$$

$$V = à(1 + \frac{t.n}{36000})$$

D'où : $V = à(\frac{36000+t.n}{36000})$

$$à = \frac{\mathbf{36000.V}}{\mathbf{36000 + tn}}$$

3.3- L'agio.

Nous avons supposé jusqu'à présent que la retenue effectuée par un prêteur se bornait à l'escompte. En réalité, le prêteur opère d'autres retenues sur la valeur nominale d'un effet. L'ensemble des retenues constitue l'agio. Il s'agit de :

- L'escompte commercial
- Les différentes commissions
- La T.V.A

3.3.1- Les commissions

On retient deux sortes de commissions, celles proportionnelles au temps et celles non proportionnelles au temps.

⟶ **Commissions proportionnelles au temps.**

Elles se calculent sur les même bases que l'escompte proportionnellement à la valeur nominale de l'effet escompté, de la durée qui sépare la date de négociation, de la date de l'échéance de l'effet et du taux attaché à ces commissions. Ces dernières ne sont pas soumises à la TVA. Exemple : **endos.**

⟶ **Commissions indépendantes du temps.**

Elles sont seulement proportionnelles au capital c'est-à-dire à la valeur nominale de l'effet. Elles peuvent aussi être fixe donc indépendantes au nominal de l'effet et du nombre de jours restant à courir. Elles sont hors taxe donc soumises à la TVA.

Exemple : commissions de services, commissions d'acceptation, commission de sort.

3.3.2- La T.V.A

Elle s'applique à toutes les commissions sauf aux commissions d'endos.

Exemple
Le 07 juillet, on porte à l'escompte un effet de valeur nominale 7 000 DA à échéance du 18 août en année commerciale.

Conditions d'escompte :

- Taux d'escompte : 10%
- C.P.T : 0,8%
- C.N.P.T : 0,3%

Calculer l'agio. **Agio = escompte + commissions + TVA**

Résolution

♦ e = Cx t x n / 36 000

. e = (7 000 x 10 x 42) / 36000 = 81,66

♦ C.P.T = (7 000 x 0,8 x 42) / 36 000 = 6,53

♦ C.N.P.T = 7 000 x 0,3% = 21

Agio = 81,66 + 6,53 + 21 = 109,19

3.3.3- La valeur nette

La valeur nette est la valeur effectivement reçue par le vendeur de l'effet.

$$\boxed{V_{nette} = C - agio}$$

Exemple :
Un grossiste en produits cosmétiques remet à l'escompte à son banquier le 20 mai les effets suivants :

- 10 040 DA échéant le 30 juin
- 4 030 DA échéant le 15 juillet
- 5 200 DA échéant le 10 juin

Conditions d'escompte :

–Taux d'escompte : 11,7%

–Commissions d'endos : 0,6%

-Commissions fixe par effets : 25 DA hors taxe

−T.V.A : 20,6%

Etablir le bordereau d'escompte en année commerciale.

Résolution

Valeur nominale	échéance	nombre de jours	Escompte 11,7%	Endos 0,6%	autres commissions
5 200	10 juin	21	35,4	1,82	25
10 040	30 juin	41	133,78	6,86	25
4 030	15 juillet	56	73,346	3,76	25
19 270	-	-	242,616	12,44	75

Total escompte et commissions endos = 242,616 + 12,44 = 255,056

Commissions passible de TVA = 75

TVA (20,6%) (75 x 20,6%) = 15,45

Total agios = 345,506

Net à porter au crédit (19 270 – 345,506) = 18 924,49

3.3.4- Taux réel d'escompte

Encore appelé taux de l'agio, c'est le taux unique **t** qui, appliqué à une valeur nominale pour une certaine durée, donnera un agio identique à celui résultant de la décomposition de l'agio. Ce taux doit satisfaire à l'égalité suivante :

$$\text{Agio} = C \times t \times N/36000 \longrightarrow \mathbf{t = agio \times 36000 / (C \times n)}$$

Le taux réel d'escompte sera d'autant plus élevé que la durée sera faible c'est-à-dire d'autant plus élevé que l'effet remis à l'escompte est d'échéance proche. Ce taux permet de calculer le poids total des commissions.

3.3.5- Taux de revient de l'opération d'escompte

On a pu noter que l'opération d'escompte était une opération d'intérêt précompté. Le porteur de l'effet remis à l'escompte supporte un agio pour un certain montant. Le taux de revient de l'opération d'escompte doit satisfaire l'égalité suivante :

$$\text{Agio} = V_{nette} \times t_r \times n \longrightarrow \mathbf{t_r = agio \times 36000 / (V_{nette} \times n)}$$

Exemple

Le 18 septembre un effet de commerce de valeur nominale 12 600 DA échéant le 12 octobre est remis à l'escompte $t_e = 10{,}8\%$, commission de service = 9DA, TVA = 18,5% en année commerciale.

1. Calculer le montant net de la négociation
2. Calculer le taux réel de l'escompte
3. Calculer le taux de revient

Résolution

1- Calcule du montant net de la négociation

$$\text{Vnette} = \text{Cn} - \text{agio}$$

Agio = escompte + TVA + commissions

♦ escompte = (12 600 x 10,8 x 24) / 36 000 = 90,72

♦ commissions = 9

♦ TVA = 1,665

Agio = 90,72 + 9 + 1,665 = 101,385

$\mathbf{V_{nette} = 12\,600 - 101{,}385 = 12\,498{,}615}$

2- Calcule du taux réel de l'escompte

$$\text{Agio} = C \times t \times n / 36\,000$$

$$T_r = \text{agio} \times 36000 / C \times n$$

$$\mathbf{T_r = 3649860 / 302400 = \longrightarrow 12{,}06\%}$$

3- Calcule du taux de revient

$$T_R = \text{agio} \times 36000 / \text{Vnette} \times n$$

$$\mathbf{T_R = 101{,}385 \times 36000 / (12\,498{,}615 \times 24) = 12{,}17\%}$$

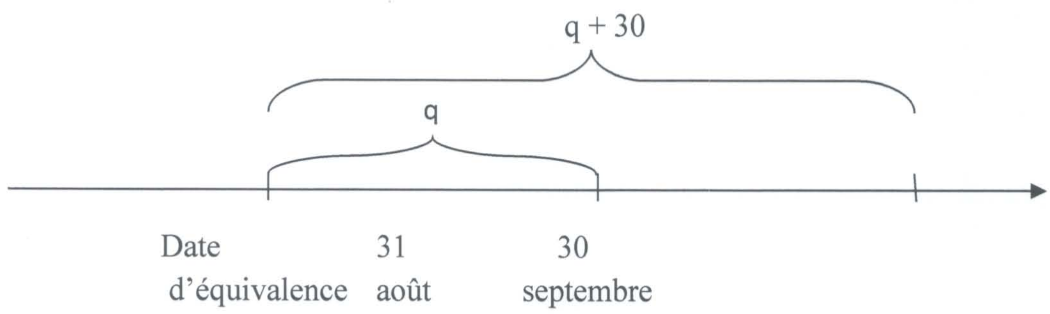
Chapitre3 : Equivalence de capitaux

1. <u>Notion d'équivalence d'effets ou de capitaux</u>.

On parle d'équivalence entre deux effets s'il existe une date à laquelle les valeurs commerciales de ces effets sont égales entre elles. Cette date sera appelée **date d'équivalence des deux effets.**

Exemple :
Deux effets de commerce de valeurs nominales respectives de 75 500 DA échéance au 31 août et de 76 000 DA échéance au 30 septembre sont négociés au taux d'escompte de 8%. La date d'équivalence ne peut se situer qu'avant le 31 août car il n'y a pas en effet possibilité de négociation d'un effet de commerce que s'il n'est pas échu. On désigne par q le nombre de jours qui séparent la date d'équivalence de l'échéance du 31 août. On désigne par (q +30) le nombre de jours qui séparent la date d'équivalence de la date d'échéance du 30 septembre. L'année est commerciale.

<u>Résolution</u>



Recherche de la date d'équivalence

$$C1 - C1 \times t \times q/360 \quad \Longrightarrow \quad Ce - Ce \times t \times (q + 30)/360$$

$75\,500 - (75\,500 \times 8\,\% \times q/360) = 76\,000 - (76\,000 \times 8\,\% \times (q + 30)/360)$ $75\,500 -$

$(6040q/360) = 76\,000 - (6080 \times (q + 30)/360)$

$= 76\,000 - ((6080q + 182\,400)/360)$

$27\,180\,000 - 6080q = 27\,360\,000 - 6080q - 182\,400$

$.-6040q + 6080q = 27\,360\,000 - 182\,400 - 27\,180\,000$

$40q = 2400$

.q = 60 jours avant la date soit le 2 juillet

Remarques:

- La date d'équivalence de deux effets, dans le cas ou elle existe, est antérieure à la date d'échéance la plus proche.
- La date d'équivalence doit être postérieure aux dates à partir desquelles les deux effets ont été créés.
- Deux effets ne peuvent être équivalents qu'à une seule date.

2. Equivalence d'un effet et de plusieurs effets :

Un effet sera équivalent à plusieurs autres effets à une date donné si en les escomptant au même taux et dans les mêmes conditions à cette date, la valeur actuelle commerciale de l'effet unique est égale à la somme des valeurs actuelles commerciales des autres effets.

3. Echéance moyenne de deux ou plusieurs effets:

On appelle échéance moyenne, la date à laquelle plusieurs effets à échéances différentes escomptés au même taux, peuvent être remplacés par un seul effet, qui leur soit équivalent et dont la valeur est la somme des valeurs nominales des effets donnés. A une date donnée, la valeur actuelle de l'effet de remplacement est égale à la somme des valeurs actuelles des différents effets

$Va = \sum Vai$

$C - C \times n/D = C_1 - C_1 \times n_1/D + C_2 - C_2 \times n_2/D + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_i - C_i \times n_i/D$

$C - C \times n/D = (C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_I) - C_1 \times n_1/D - C_2 \times n_2/D - \ldots\ldots\ldots - C_i \times n_i/D$

$C \times n = C_1 \times n_1 + C_2 \times n_2 + \ldots\ldots\ldots + C_i \times n_i$

$$n = \frac{C_1.n_1 + C_2.n_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots + C_i n_i}{C}$$

Exemple :

Soient deux effets de 2800DA à 42jours et 1420DA à 63 jours. Le taux d'escompte est égale à 12%.

Déterminer l'échéance moyenne.

Résolution :

$$n = \frac{C_1.n_1 + C_2.n_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots + C_i n_i}{C}$$

$$n = \frac{2800.42 + 1420.63}{4220}$$

$$n = \frac{117600 + 89460}{4220}$$

n = 49 jours

Partie 2 : Opérations financières à long terme

Chapitre1 : Les intérêts composés

1. Notion

Lorsqu'on a un capital à placer dans une institution financière deux possibilités peuvent s'offrir :

- Soit le capital est retiré augmenté des intérêts calculés une seule fois à la fin de la dernière période (intérêts simples) ;
- Soit le capital est retiré augmenté des intérêts calculés de façon successive à la fin de chaque période.

  Les intérêts calculés à la fin de chaque période dans ce 2eme cas sont incorporés au capital de début de période pour être replacé pour le compte de la période suivante. Ainsi les valeurs acquises obtenues à la fin de chaque période sont aussitôt replacé pour générer des intérêts pour le compte de la période suivante. Les intérêts contenus dans ces valeurs acquises génèrent à leur tour d'autres intérêts : on parle de **Capitalisation des Intérêts**.

2. Généralisation de la notion : formule fondamentale

Soit un capital **C** placé au taux **i** (taux pour un franc : **i** = t /100) pendant une période on a :

Période	Capital Début Période	Intérêts	Capital Fin Période
1	C	Ci	$C+Ci = C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)\,i$	$C(1+i) + C(1+i)\,i = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 i$	$C(1+i)^2 + C(1+i)^2 i = C(1+i)^3$
k	$C(1+i)^{k-1}$	$C(1+i)^{k-1} i$	$C(1+i)^{k-1} + C(1+i)^{k-1} i = C(1+i)^k$
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1} i$	$C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-1} I = C(1+i)^n$

La formule fondamentale en intérêt composé de la valeur acquise est : $\mathbf{C_n = C(1+i)^n}$

Remarque : C_n est la valeur acquise par le capital C placé au taux i pendant n périodes.

- L'expression $(1+i)^n$ se lit dans la table financière n°1

- Contrairement aux intérêts simples la formule fondamentale en intérêt composé débouche sur la valeur acquise. Pour trouver donc l'intêrêt il faut faire la différence entre la valeur acquise et le capital placé. Soit **I** l'intérêt
  $I = Cn - C$ soit $\mathbf{I} = C(1+i)^n - C$ Donc on a $\mathbf{I = C\ [\ (1+i) - 1\ ]}$
  L'intérêt au cour d'une période p quelconque est $\mathbf{I_p = C\ (1+i)^{p-1}\ i}$
- Les valeurs acquises obtenues à la fin de caque période de même que les intérêts contenus dans ces valeurs acquises sont en progression géométrique de raison 1+i

Exerciel : Quelle est la valeur acquise par un capital de 2 000 000 placé à un intérêt composé au taux de 5% pendant 3 ans. ?

Corrigél : D'après la formule on a $C_n = C\ (1+i)^n$ si C = 2 000 000 ; i = 5/ 100 et n = 3 alors $C_n = 2\ 000\ 000\ (1,05)^3$ soit $\mathbf{C_n = 2\ 315\ 250}$

Exercice 2 : Quel capital doit –on placé au taux de 6% pour disposer de 796 924 à la fin de la 8^{eme} année ?

Corrigé 2 : Le montant dont – il dispose à la fin de la 8^{eme} année représente la valeur acquise. Si on doit appliquer la formule on $C_n = C\ (1+i)^n$ **avec** Cn =796 924
I= 6 / 100 et n= 8. Alors on a $C = Cn / (1+i)^n$ **soit** $C = 796\ 924 / (1,06)^8$ ou C= 796 924 $(1,06)^{-8}$ **soit C = 500 000**

Exercice 3 : A quel taux doit –on placé un capital de 800 000 pour obtenir à la fin de la 5eme une valeur acquise de 1 148 503,461 ?

Corrigé 3 : posons $C_n = C\ (1+i)^n$ alors on a $(1+i)^n = C_n / C$ soit $(1+i)^n = 1{,}435629$

Donc on a $\mathbf{i = \sqrt[5]{1,435\ 629} - 1}$ **soit i = 0,075 soit t = 7,5%**

Exercice 4 : Pendant combien de temps un capital donné placé au taux de 8% peut-il s'accroitre de 25% de sa valeur.

Corrigé 4 : si le capital doit s'accroitre de sa valeur de 25% on aura C(1,25)

Or $C_n = C(1,08)^n$ **si** on doit poser une égalité entre les deux relations on aura

$C(1,08)^n = C(1,25)$ soit $(1,08)^n = 1,25$. En appliquant la fonction log on a

n log (1,08) = log (1,25) soit n = log (1,25) / log (1,08) **soit n =2ans 10 mois 24 jrs**

<u>**Remarque:**</u> Le capital de 500 000 obtenu dans le deuxième exercice n'est rien d'autre que la valeur actuelle de 796 924. Pour obtenir la valeur actuelle il suffit d'actualiser la valeur acquise. Cette consiste à repousser la valeur acquise à l'origine. Ceci nous pousse à déduire la valeur actuelle d'un capital placé à un taux i qui nommé $\mathbf{C_0 = C\ (1+i)^{-n}}$. Cette formule représente la formule générale de la valeur actuelle en intérêt composé. L'expression $(1+i)^{-n}$ se lit dans la table financière N°2

Exercice :

Une personne désire disposer une somme de 540 242,75 à la fin dans 15 ans. Pour ce faire il place un capital C à un taux semestriel de 5%. La capitalisation des intérêts étant semestrielle :

1. Déterminer le capital C placé
2. Le capital trouvé est placé à un taux semestriel de 5% pendant 15 ans. La capitalisation des intérêts étant semestrielle
   - **2.1.** Déterminer la valeur acquise. Que remarquez-vous ?
   - **2.2.** Déterminer les intérêts produit au cour de la 8^{eme} et 12^{eme} périodes.
   - **2.3.** Déterminer l'intérêt global de ce placement.

Corrigé :

1. Déterminons le capital **C** placé

   C représente dans ce cas la valeur actuelle et équivaut à C_0. Si on doit appliquer la formule de la valeur actuelle on a $C_0 = C\ (1+i)^{-n}$ dans ce cas le C de la formule est égal à 540 242,75 le taux t = 5%. La capitalisation étant semestrielle on n = 15 x 2 soit n = 30 semestres. Ceci dit $C_0 = 540\ 242{,}75\ (1{,}05)^{-30}$ **soit** $C_0 = 125\ 000$ le capital placé est égal à **125 000**

2.

2.1. Déterminons la valeur acquise

Soit C_n cette valeur acquise. On a $C_n = 125\ 000(1{,}05)^{30}$ **soit**

$\mathbf{C_n = 540\ 242{,}75}$. Nous remarquons que Cn est égal à la somme dont voulait disposer la personne dans 15 ans.

2.2. Déterminons l'intérêt produit au cour :

- De la 8^{eme} période

Soit I_8 cet intérêt. $I_8 = C\ (1+i)^{8-1}$ i soit $I_8 = 125\ 000(1{,}05)^7 \times 0{,}05$ soit

$\mathbf{I_8 = 8794{,}375}$ ou soit $I_8 = C_8 - C_7$ soit $I_8 = 125000[(1{,}05)^8 - (1{,}05)^7]$ soit

$\mathbf{I_8 = 8794{,}375.}$

- De la 12^{eme} période

Soit I_{12} cet intérêt. $I_{12} = C\ (1+i)^{12-1}$ i soit $I_8 = 125\ 000(1{,}05)^{11} \times 0{,}05$ soit

$\mathbf{I_{12} = 10689{,}61875}$ ou soit $I_{12} = C_{12} - C_{11}$ soit $I_8 = 125000[(1{,}05)^{12} - (1{,}05)^{11}]$

Soit $\mathbf{I_{12} = 10689{,}61875.}$

2.3. Déterminons l'intérêt global de ce placement

- $1^{ère}$ méthode

$I = Cn - C$ soit $I = 540\ 242{,}\ 75 - 125000$ soit $\mathbf{I = 415242{,}75}$

- $2^{ème}$ méthode

$I = Cn - C$ soit $I = C\ (1+i)^{30} - C$ soit $I = C\ [(1+i)^{30} - 1]$ Donc on a

$I = 125000[(1{,}\ 05)^{30} - 1]$ soit $\mathbf{I = 415242{,}75}$

3. **Formule de la valeur acquise à intérêts composé quand le temps de placement est un nombre non entier de périodes**

Il existe trois méthodes de résolution pour le calcul de la valeur acquise.

A. Méthode logique ou rationnel

$C_{k+p/q} = C_k + C_k\, i\, p/q$ soit $C_{k+p/q} = C_k\,(1+ i\, p/q)$ soit $\mathbf{C_{k+p/q} = C(1+i)^k(1+ i\, p/q)}$
K est la partie entière du temps de placement. P est la partie non entière et Q = 12.
C_k représente la valeur acquise de la partie entière.

B. Méthode commerciale ou pratique

$C_{k+p/q} = \mathbf{C(1+i)^{k+p/q}}$

C. Méthode par interpolation

$\mathbf{C_{k+p/q} = C\,(1+i)^{k} + p/q\,(C_{k+1} - C_k)}$

Exercice : Un capital de 250 000 est placé à intérêts composé pendant 7 ans 3 mois.

Calculer la valeur acquise par ce capital à l'expiration de la durée prévue sachant que le taux de placement est de 11% (capitalisation annuelle des intérêts).

Corrigé :

Déterminons la valeur acquise

- Méthode logique ou rationnelle
  $\mathbf{C_{k+p/q} = C\,(1+i)^{k}(1+ i\, p/q)}$ **soit** $C_{7+3/12} = 250000(1,11)^7(1+0,11 \times (3/12))$ soit
  $C_{7+3/12} = \mathbf{533\,313,6}$
- Méthode commerciale ou pratique
  $C_{k+p/q} = \mathbf{C(1+i)^{k+p/q}}$ **soit** $C_{7+3/12} = 250000(1,11)^{7+3/12}$ **soit** $\mathbf{C_{7+3/12} = 532\,759,9934}$
- Méthode par interpolation
  $\mathbf{C_{k+p/q} = C\,(1+i)^{k} + p/q\,(C_{k+1} - C_k)}$ **soit** $C_{7+3/12} =$
  $250000(1,11)^7 + 3/12[250000(1,11)^8 - 250000(1,11)^7]$
  $C_{7+3/12} = \mathbf{533\,313,6393}$

4. **Taux proportionnel - Taux équivalent**

4.1 Taux proportionnel : Deux taux correspondants à des périodes de capitalisations différentes sont proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport de leur période capitalisation respective. Si i_a est un taux annuel, i_s est un taux semestriel proportionnel au taux annuel, i_t est un taux trimestriel proportionnel au taux annuel, i_m est un taux mensuel proportionnel au taux annuel, i_{ba} est un taux bisannuel proportionnel au taux annuel alors on a : $\mathbf{i_s = i_a / 2}$ $\quad i_t = i_a / \mathbf{4}$ $\quad i_m = i_a / \mathbf{12}$ $\quad i_{ba} = \mathbf{2}\, i_a$

Remarque : En intérêts simples les taux proportionnels conduisent le capital pendant la même durée de capitalisation à une même valeur acquise. Par contre en intérêts composés les valeurs acquises sont différentes.

Exercice : calculer

a) Le taux semestriel proportionnel au taux annuel de 8 %
b) Le taux mensuel proportionnel au taux semestriel de 6%
c) Le taux trimestriel proportionnel au taux annuel de 12%
d) Le taux bimensuel proportionnel au taux semestriel de 9%
e) Le taux bisannuel proportionnel au taux annuel de 3 %

Corrigé : Calculons

a) Le taux semestriel proportionnel au taux annuel de 8 %
   $i_s = i_a / 2$ soit $i_s = 8/2$ soit $i_s = 4$ %
b) Le taux mensuel proportionnel au taux semestriel de 6%
   Dans un semestre on a 6 mois donc pour déterminer le taux mensuel il faut faire i_m = **6/6 soit $i_m = 1$%**
c) Le taux trimestriel proportionnel au taux annuel de 12%
   Dans un an on a quatre trimestres. Pour déterminer le taux trimestriel on fera i_t = **12/4 soit $i_t = 3$ %**
d) Le taux bimensuel proportionnel au taux semestriel de 9%
   Dans un semestre on a 6 mois ce qui fait qu'on a 12 bimensuel. Donc on a 1 mois = 2 * 15 jours.
   $i_{bm} = 9 / 12$ soit **$i_{bm} = 0,75$ %**
e) Le taux bisannuel proportionnel au taux annuel de 3 %
   Dans un bisannuel on a 2 fois un an
   $i_{ba} = 3 * 2$ soit **$i_{ba} = 6$ %**

4.2 Taux équivalent : Deux taux correspondants à des périodes de capitalisations différentes son équivalents si et seulement si pour un même capital et pour une même durée, ils conduisent à une même valeur acquise. Un capital C placé au taux annuel i_a pendant 1 an a pour valeur acquise $C\,(1+ i_a)^1$. Pour réussir à déterminer le taux équivalent, on identifie rapidement la plus grande période et la plus petite période. On recherche combien de fois on a la plus petite période dans la grande période.

Exemple :
i_a = le taux annuel ; i_s = le taux semestriel ; i_t = le taux trimestriel ; i_m =le taux mensuel ; i_b = le taux bisannuel

- i_s équivalent à i_a **soit** $(1+ia)^1 = (1+is)^2$ soit $is = \sqrt{(1 + ia)} - 1$

La plus grande période ici est l'année et la plus petite période est le semestre ce qui signifie que 1 année = 2 semestre ce qui justifie les exposants.

- i_t équivalent à ia **soit** $(1+i_a)^1 = (1+i_t)^4$ **soit $it = \sqrt[4]{(1 + ia)} - 1$**
- **i_a** équivalent à ib **soit** $(1+i_b)^1 = (1+i_a)^2$ **soit $ia = \sqrt[2]{(1 + ib)} - 1$**

Remarque : Le taux équivalent est utilisé en intérêts composé alors que le taux proportionnel est utilisé en intérêt simple.

Exercice : Calculer

a) Le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10%
b) Le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 8%
c) Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 9%
d) Le taux annuel équivalent au taux bisannuel de 10,25%

Corrigé : Calculons

a) Le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10%
   $(1+i_a) = (1+is)^2$ soit $1,1=(1+is)^2$ soit $is= \sqrt{1,1} - 1$ soit $is = 0,0488$ soit **ts= 4,88%**
b) Le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 8%
   $(1+i_a) = (1+i_t)^4$ soit $1,08 = (1+it)4$ soit $it = \sqrt[4]{1,08} - 1$ soit **t_t = 1,942655%**
c) Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 9%
   $(1+i_a) = (1+i_m)^{12}$ soit $1,09 = (1+i_m)^{12}$ soit $i_m = \sqrt[12]{1,09} -1$ soit **t_m = 0,720732%**
d) Le taux annuel équivalent au taux bisannuel de 10,25%
   $(1+ib) = (1+ia)^2$ **soit** $1,1025 = (1+ia)^2$ **soit** $ia = \sqrt{1,1025} - 1$ soit $ia = 0,05$ soit **ta= 5%**

Chapitre 2 : Escompte à intérêt composé

1. Escompte à intérêts composés

1.1 Calcul de la valeur actuel d'un capital ou d'un effet

1.1.1. Définition : la valeur actuelle au taux i par francs par périodes d'un effet de valeur nominal C payable dans n périodes est la somme C_0 telle que, capitalisée pendant n période au taux i, elle reproduise la valeur nominale.

1.1.2. Formulation : Posons $C = C_0\,(1+i)^{n}$ ce qui conduit à $C_0 = C\,(1+i)^{-n}$ **telle** est la formule de la valeur actuelle d'un capital ou d'un effet. L'expression $(1+i)^{-n}$ **se** lit dans la table financière n°2

1.2 Calcul de l'escompte à intérêts composés

Dans la pratique, on emploi l'escompte commercial quand il s'agit de négocier des effets dont l'échéance est rapprochée. Mais pour les effets à une échéance lointaine, il est plus logique d'employer l'escompte à intérêts composés (e) qui est la différence entre la valeur nominale d'un effet et la valeur actuelle de l'effet c'est-à-dire :

$$e = C - C_0 \text{ soit } e = C - C\,(1+i)^{-n} \textbf{ soit } \mathbf{e = C\,[1-(1+i)^{-n}]}$$

Exemple : Quel l'escompte à intérêts composés d'un capital de 200 000 DA payable dans 5 an 6 mois ? Taux annuel 8%

Résolution :

1er méthode : $\mathbf{e = C\,[1-(1+i)^{-n}]}$ **soit** $e = 200\,000[1-(1{,}08)^{-(5+6/12)}]$ soit

e = 69021,7 DA

2nd méthode : $e = C - C_0$ **soit** $\mathbf{e = 200\,000 - 200\,000\,(1{,}08)^{-5{,}5}}$ soit **e = 69021,7 DA**

2. Equivalence à intérêts composés

2.1. Equivalence entre deux capitaux ou deux effets

2.1.1. **Définition:**

Deux capitaux ou effet de valeurs nominales différentes (C1, C2) et d'échéances différentes (n1, n2) escomptés à intérêts composés au même taux sont dits équivalents lorsqu'ils ont à la date de l'escompte, des valeurs actuelles égales entre elles.

Equation d'équivalence : valeur actuelle du 1er effet = valeur actuelle du 2nd effet

$C_1\,(1+i)^{-n1} = C_2\,(1+i)^{-n2}$

2.2. Problèmes pratiques posés sur la notion d'équivalence

2.2.1. Recherche de la valeur nominale de l'effet remplaçant

Exemple: Quelle est la valeur nominale d'un effet payable dans 15 ans susceptible de remplacer équitablement à 4% de capitalisation annuelle, un effet de 2000 payable dans 7 ans ?

Résolution : on donne $C_1 = 2000$, $n_1 = 7$ ans C_2= nominal de l'effet à remplacer, $n_2 = 15$ ans
On a l'expression $C_1\,(1+i)^{-n1} = C_2\,(1+i)^{-n2}$ **soit $C_2 =$**
Soit $C_2 = C_1\,(1+i)^{-n1}\,(1+i)^{n2}$ soit $C_2 = C_1\,(1+i)^{-n1+n2}$ d'ou
$C_2 = 2000\,(1,04)^{-7+15}$ soit $C_2 = 2737,138101$

2.2.2. Recherche de l'échéance de l'effet remplaçant

Exemple : Quelle est l'échéance de l'effet de 1462 DA créé en remplacement d'un effet de 1000 payable dans 5 ans au taux de capitalisation annuelle de 6%

Résolution : on donne C1 = 1000 n1 = 5 ans ; C2 = 1462, n2 = durée de l'effet à remplacer

On a l'expression $C_1\,(1+i)^{-n1} = C_2\,(1+i)^{-n2}$ **soit $(1+i)^{-n2} =$** **soit $(1+i)^{-n2} =$** $1000(1,06)^{-5} / 1462$ soit **$(1+i)^{-n2} = 0,511121$** **soit** $-n_2 \log(1,06) = \log(0,511121)$ d'où $n_2 = \log(0,511121) / -\log(1,06)$ donc $n_2 = 11,$~~518148 soit n_2~~**= 11 ans 6 mois 7 jours**

2.2.3. Recherche du taux d'équivalence

- **Exemple:** les effets suivants : 2411,70 payable dans 20 ans et 1422,10 payable dans 8 ans sont équivalents. A quel taux l'équivalence a-t-elle été calculée ?
  Résolution : On donne C1 = 2411,70 n1 = 20 ans ; C2 = 1422,10 n2 = 8 ans
  On a l'expression $C_1\,(1+i)^{-n1} = C_2\,(1+i)^{-n2}$ **soit** = **$= (1+i)^{n1-n2}$**

  Soit $1,695872 = (1+i)^{12}$ soit $i = \sqrt[12]{1,695872} - 1$
  $i = 0,045$ soit **$t = 4,5\%$**

2.3. Equivalence entre plusieurs capitaux et plusieurs autres

Les effets C1, C2, C3,… échéant respectivement dans n1, n2, n3,… période sont équivalents aux effets U1, U2, U3,… échéant respectivement dans p1, p2, p3,…. Périodes si la somme des valeurs actuelles des effets C est égale à la somme des valeurs actuelle des effets U.

Si i est le taux pour un francs par période, l'équation d'équivalence dérivée de la définition pourra s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{m} Ci\,(1+i)^{-ni} = \sum_{i=1}^{m} Ui\,(1+i)^{-pi}$$

Exemple : Un débiteur désire remplacer les deux dettes suivantes : 4000 DA payables dans 4 ans et 7000 DA payables dans 6 ans par deux versements d'égale valeur nominale à régler dans 2 et 4 ans. Quel doit être le montant des ces versements si le taux est de 5% l'an ?

Résolution : Soit le graphique suivant :

				4000		7000				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		V		V						

A l'équivalence (date 0) on a :

$4000(1,05)^{-4} + 7000(1,05)^{-6} = V(1,05)^{-2} + V(1,05)^{-4}$ soit $8514,317979 = 1,729732$ V Soit V = 8514,317979 / 1,729732 soit **V = 4922,333446**

2.4. Remplacement d'un effet par plusieurs autres effets

Pour remplacer un effet par plusieurs autres, il suffit de poser que la valeur actuelle de l'effet unique à remplacer est égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplaçant, c'est-à-dire :

$$C\,(1+i)^{-n} = \sum_{i=1}^{n} Ci\,(1+i)^{-n}$$

C est le nominal de l'effet unique remplacé, n est le nombre de périodes entre la date d'équivalence et l'échéance de l'effet.

Exemple 1 : Mr Dubois désire remplacer un effet unique de nominal 200 000 payable dans 8 ans par trois de même valeur nominale à régler dans 2 4 et 6 ans. Quel doit être le montant commun à ces trois effets si le taux annuel est de 6% l'an ?

Résolution : Soit le graphique suivant

		C		C		C		200 000		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

A l'équivalence (date 0) on a :

$200000\,(1,06)^{-8} = C\,(1,06)^{-2} + C\,(1,06)^{-4} + C\,(1,06)^{-6}$ **soit** $125482,4743 = 2,387051$ C Soit C = 125482,4743 / 2,387051 soit **C =52 568**

Exemple 2 : Un débiteur qui doit s'acquitter des dettes suivantes : 25 000, 20 000 et 40 000 payables respectivement dans 1an, 1an 6mois et 2an 6mois obtient de son créancier de se libérer par un paiement unique dans 5ans.

1. Calculer la valeur nominale de ce paiement unique au taux de 6% l'an
2. Déterminer l'échéance pour un paiement unique de 150 000 DA

Résolution 2 :

1. Calculons la valeur nominale de ce paiement unique. Soit ce paiement unique
   $25\,000(1,06)^{-1} + 20\,000(1,06)^{-1,5} + 40\,000(1,06)^{-2,5} = C(1,06)^{-5}$ **soit**
   76488,69240=0,747258C soit C=76488,69240 / 0,747258C soit **C= 102 359,1246**
2. Déterminons l'échéance unique pour un paiement de 150 000
   $25\,000(1,06)^{-1} + 20\,000(1,06)^{-1,5} + 40\,000(1,06)^{-2,5} = 150\,000(1,06)^{-n}$ soit 76488,69240 $= 150\,000(1,06)^{-n}$ soit $(1,06)^{-n} = 76488,69240 / 150\,000$ soit $(1,06)^{-n} = \mathbf{0,509925}$
   -n log(1,06)= log(0,509925) n=11,558349 soit **n = 11 ans 6 mois 21 jours** .

L'échéance obtenue sera appelée échéance commune car 150 000 est différente de la somme de (25 000+20 000+40 000)

- **Echéance moyenne**

Dans le cas particulier où la valeur nominale de l'effet unique remplaçant est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés, la date d'échéance du paiement unique est dite ***Echéance moyenne.***
A l'équivalence, on a : Valeur actuelle de l'effet remplaçant = somme des valeurs actuelles des effets remplacés c'est-à-dire :

$C\,(1+i)^{-n} = \sum_{i=1}^{n} Ci\,(1+i)^{-n}$

Exemple : Un débiteur retrouve dans son portefeuille les dettes suivantes 1 600 000 impayé depuis 15 mois ; 2 400 000 payables dans 42 mois ; 2 700 000 payables dans 4 ans et 1 300 000 payable dans 30 mois.

1. Le débiteur négocie et obtient de son créancier de rembourser ces dettes par deux versements bisannuels égaux, le premier dans 1 an. Quel est au taux de 8% la valeur commune des versements bisannuels ?
2. En réalité ces dettes devraient être remboursées par un versement unique dans trois ans. Quelle est dans les mêmes conditions de taux la valeur du versement unique.
3. Déterminer l'échéance moyenne des quatre dettes.

Résolution :

1. Calculons la valeur commune des versements bisannuels. Soit C cette valeur
   $1\,600\,000(1{,}08)^{(1+3/12)} + 2\,400\,000(1{,}08)^{-(3+6/12)} + 2\,700\,000(1{,}08)^{-4} + 1\,300\,000(1{,}08)^{-(2+6/12)} = C(1{,}08)^{-1} + C(1{,}08)^{-3}$ soit 6651893,772 = 1,719758 V Soit C = 6651893,772/1,719758 soit **C = 3 867 923,932**
2. Déterminons la valeur du versement unique. soit V_1 cette valeur
   $1\,600\,000(1{,}08)^{(1+3/12)} + 2\,400\,000(1{,}08)^{-(3+6/12)} + 2\,700\,000(1{,}08)^{-4} + 1\,300\,000(1{,}08)^{-(2+6/12)} = C_1(1{,}08)^{-3}$ soit 6651893,772 = 0,793 832 C_1 soit C_1= 6651893,772 / 0,793 832 soit **V_1= 8 379 470,407**
3. Déterminons l'échéance moyenne
   $(1\,600\,000 + 2\,400\,000 + 2\,700\,000 + 1\,300\,000)(1{,}08)^{-m} = 6651893{,}772$ soit $(1{,}08)^{-m} = 6651893{,}772 \;/\; 8\,000\,000$ Soit $(1{,}08)^{-m} = 0{,}831487$ soit $-m \log(1{,}08) = \log(0{,}831487)$ soit m = - [log (0,831487) / log (1,08)] soit m=2,397836 soit **m= 2 ans 4 mois 23 jours**

Chapitre 3 : Annuités

1. Définition et caractéristiques :

On appelle annuités une suite de flux monétaires perçus ou réglés à intervalles de temps égaux.

Le terme « annuité » est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme « annuité » par « semestrialité », « trimestrialité » ou « mensualité ».

L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre des flux et le montant de chaque flux.

Lorsque les annuités sont égales, on parle d'annuités constantes, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle d'annuités variables.

Les annuités peuvent être perçues ou versées en début de période ou en fin de période. Les annuités peuvent être certaines lorsque leur nombre est connu à l'avance, aléatoires ou viagères, lorsque leur nombre est inconnu au moment du contrat ou enfin perpétuelles lorsque leur nombre est illimité.

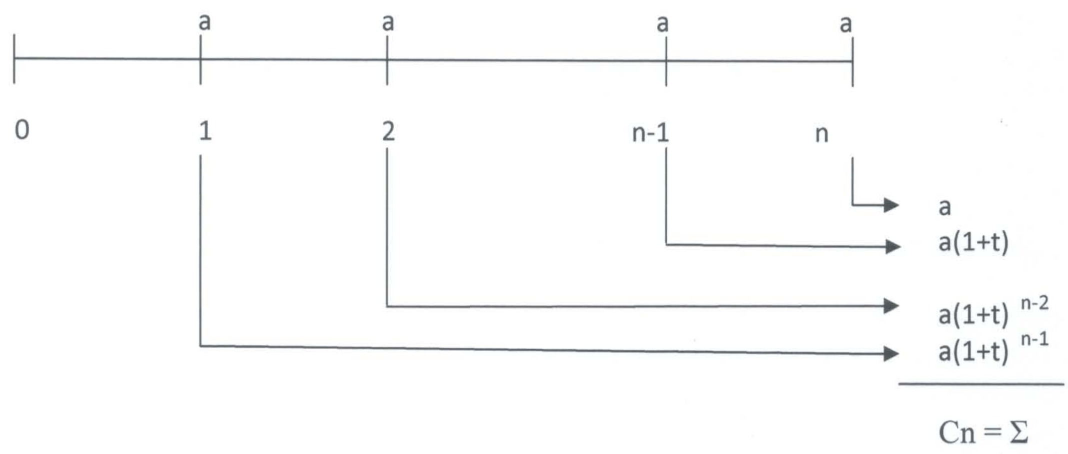
2. Les annuités constantes :

2.1. Les annuités constantes de fin de période :

La valeur acquise ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes dépend de la date de versement c'est à dire début de période ou fin de période.

2.1.1. La valeur acquise :

On appelle valeur acquise par une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités (C_n) exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.



Si on note par:

C_n : la valeur acquise par la suite des annuités

a : l'annuité constante de fin de période

n : le nombre de périodes (d'annuités)

t : le taux d'intérêt par période de capitalisation

On a alors:

$$C_n = a + a(1+t) + a(1+t)^2 + \ldots..+ a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-1}$$

$$C_n = a\,[\,1 + (1+t) + (1+t)^2 + \ldots..+ (1+t)^{n-2} + (1+t)^{n-1}\,]$$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+t) et comprenant n termes. La formule devient donc:

$$Cn = \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$\boldsymbol{Cn = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

Le terme $\frac{(1+t)^n-1}{t}$ est fourni par la table financière N°3

Exemple :

Calculer la valeur acquise de 12 annuités constantes égales chacune à 10000DA, taux de capitalisation 5,5%.

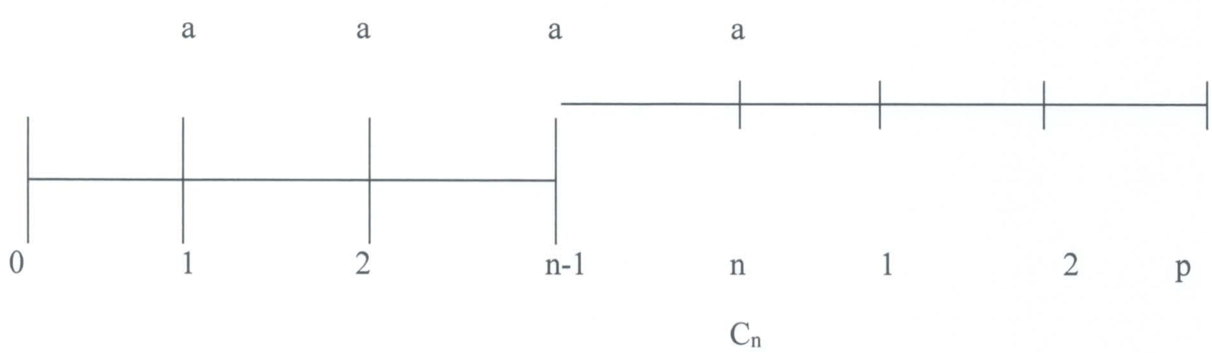
Solution :

$$Cn = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$C12 = 10000\,\frac{(1{,}055)^{12} - 1}{0{,}055}$$

C12= 163855,91 DA

2.1.2. La valeur acquise exprimée « p »période après le dérnier versement :



Soit C_n^p la valeur acquise de la suite des annuités constantes de fin de période exprimée p périodes après le dernier versement.

$$\mathbf{C_n^p = C_n\,(1+t)^p}$$

$$C_n^p = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}(1+t)^P$$

On peut donc écrire :

$$C_n^p = a\frac{(1+t)^{n+p} - (1+t)^P}{t}$$

$$C_n^p = a\left[\frac{(1+t)^{n+p} - 1}{t} - \frac{(1+t)^p - 1}{t}\right]$$

Exemple :

On verse 500 DA chaque mois pendant 12mois à un taux d'intérêt annuel de 5%. De quelle somme disposera-t-on trois mois après le dernier versement.

Solution :

1) Taux mensuel équivalent à 5% l'an :
   $(1+5\%)^1=(1+t_{12})^{12}=\sqrt[12]{1+5\%}-1=0{,}407\%$.
2) La valeur acquise au moment du $12^{ème}$ versement de 500DA :

$$Cn = 500\,\frac{(1+0{,}407\%)^{12}-1}{0{,}407\%}$$

Cn=6136,1489DA à la date 12.

3) La valeur acquise au moment du $12^{ème}$ versement de 500DA actualisée à 3 mois plus tard :
   $C= 6136{,}1489(1+0{,}407\%)^3=$**6211,3767 à la date 15**

Ou bien

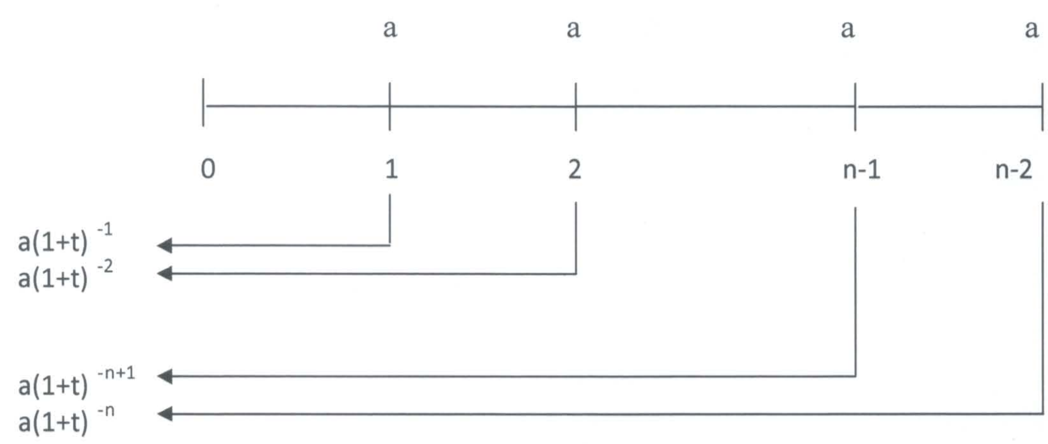
$$\boldsymbol{C_n^p = a[\frac{(1+t)^{n+p}-1}{t} - \frac{(1+t)^p-1}{t}]}$$

$$C_{12}^{15} = 500[\frac{(1+0{,}00407)^{12+3}-1}{0{,}00407} - \frac{(1+0{,}00407)^3-1}{0{,}00407}]$$

C=6211 ,38DA

2.1.3. La valeur actuelle :

On appelle valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités actualisées (C_0) exprimée à la date origine.



$C_0 = \Sigma$

Si on note par:

C_0 = la valeur actuelle par la suite des annuités
a = l'annuité constante de fin de période
n = le nombre de périodes (d'annuités)
t = le taux d'intérêt par période de capitalisation
Alors:

$C_0 = a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \ldots..+ a(1+t)^{-n+1} + a(1+t)^{-n}$

$C_0 = a\,[\,(1+t)^{-1} + (1+t)^{-2} + \ldots..+ (1+t)^{-n+1} + (1+t)^{-n}\,]$ C_0

$= a\,(1+t)^{-1}\,[\,1+ (1+t)^{-1} + \ldots..+ (1+t)^{-n+2} + (1+t)^{-n+1}]$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+t)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

$$C_0 = a(1+t)^{-n}\frac{1-(1+t)^{-n}}{1-(1+t)^{-1}}$$

$$C_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{1+t-1}$$

$$\boldsymbol{C_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}}$$

Le terme$\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ est fourni par la table financièreN°4

Exemple :

Calculer la valeur à l'origine d'une suite de 15 annuités constantes de montant 1000DA chacune, taux d'escompte 8%.

Solution :

$$\boldsymbol{C_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}}$$

$$C_0 = 1000\frac{1-(1{,}08)^{-15}}{0{,}08}$$

$$C_0 = 1000(8{,}559479) = 8559{,}48DA$$

2.2.4. La valeur actuelle exprimée « p » période avant la date d'origine :

$$C_0^p = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}(1+t)^{-P}$$

On peut donc écrire :

$$C_0^p = a\frac{(1+t)^{-p}-(1+t)^{-n-P}}{t}$$

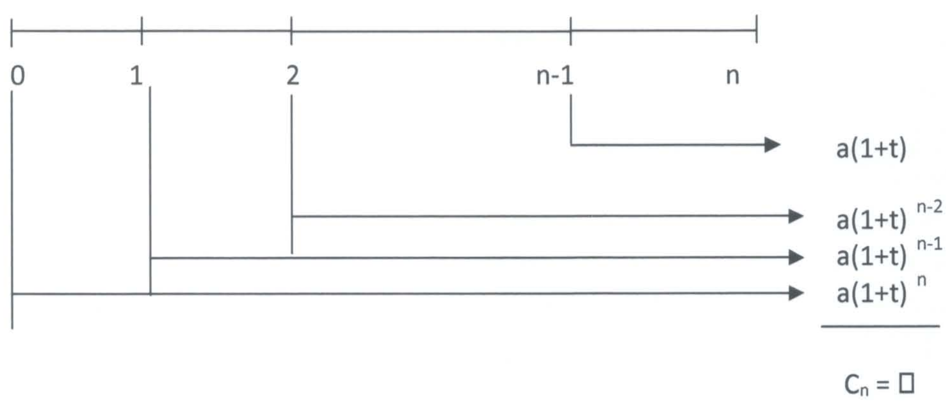
$$C_0^p = a[\frac{1-(1+t)^{-n-p}}{t} - \frac{1-(1+t)^{-p}}{t}]$$

2.2. Les annuités constantes de début de période :

2.2.1. La valeur acquise :

Si on considère que les flux sont versés en début de période, on obtient le graphique suivant: a a a

a



$C_n = a(1+t) + a(1+t)^2 + ...+ a(1+t)^{n-1} + a(1+t)^n$

$C_n = a(1+t)\ [\ 1 + (1+t) + (1+t)^2 + ...+ (1+t)^{n-2} + (1+t)^{n-1}\ ]$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+t) et comprenant n termes. La formule devient donc:

$$Cn = a(1+t)\ \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t)-1}$$

$$Cn = a(1+t)\ \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Exemple :

En déposant un montant d'argent le premier de chaque mois du 1er janvier 2020 au 1er janvier 2021,on désire accumuler 1000 DA au 1er janvier 2021.Si le taux mensuel est de 0,005, quelle doit être la valeur du montant d'argent déposé chaque mois ?

$$C_0^p = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}(1+t)^{-P}$$

On peut donc écrire :

$$C_0^p = a\frac{(1+t)^{-p}-(1+t)^{-n-P}}{t}$$

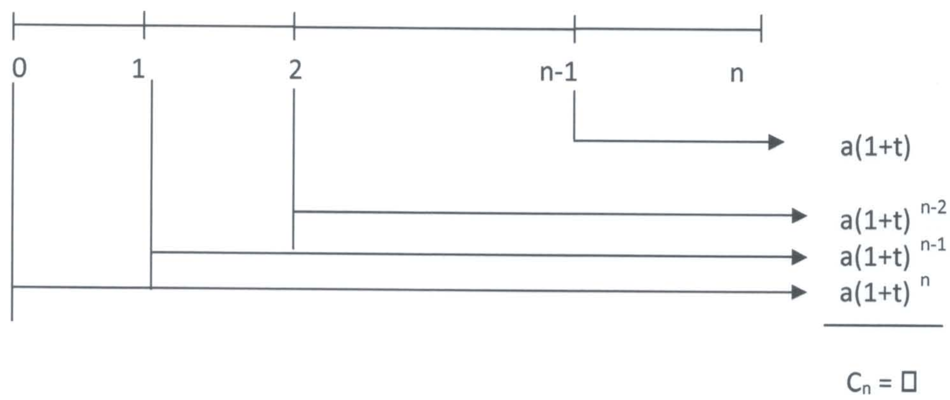
$$C_0^p = a[\frac{1-(1+t)^{-n-p}}{t} - \frac{1-(1+t)^{-p}}{t}]$$

2.2. Les annuités constantes de début de période :

2.2.1. La valeur acquise :

Si on considère que les flux sont versés en début de période, on obtient le graphique suivant: a a a

a



$C_n = a(1+t) + a(1+t)^2 + ...+ a(1+t)^{n-1} + a(1+t)^n$

$C_n = a(1+t)\ [\ 1 + (1+t) + (1+t)^2 + ...+ (1+t)^{n-2} + (1+t)^{n-1}\ ]$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+t) et comprenant n termes. La formule devient donc:

$$Cn = a(1+t)\ \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$Cn = a(1+t)\ \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Exemple :

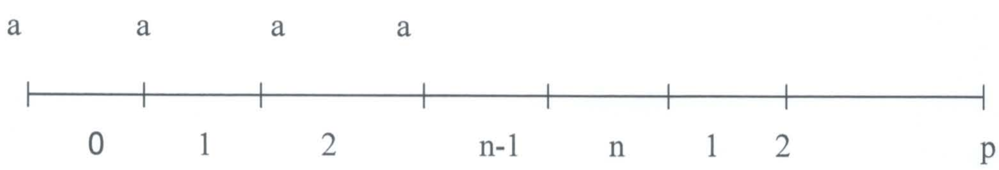
En déposant un montant d'argent le premier de chaque mois du 1er janvier 2020 au 1er janvier 2021,on désire accumuler 1000 DA au 1er janvier 2021.Si le taux mensuel est de 0,005, quelle doit être la valeur du montant d'argent déposé chaque mois ?

Solution :

$$Cn = a(1+t)\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$a = \frac{1}{1,005}\left(\frac{1000}{\frac{1,005^{13}-1}{0,005}}\right) = 74,27$$

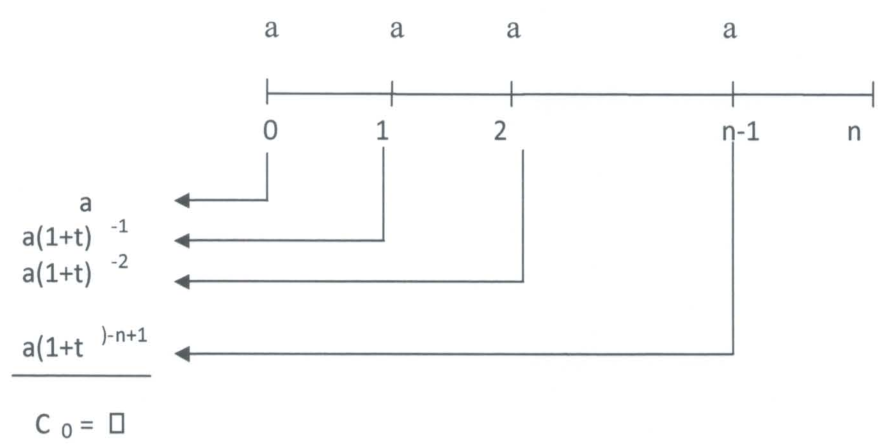
2.2.2. La valeur acquise exprimée « p » période après la date n :



En se basant sur les mêmes principes que précédemment, on aura :

$$C_n^p = a[\frac{(1+t)^{n+p+1} - 1}{t} - \frac{(1+t)^{p+1} - 1}{t}]$$

2.2.3. La valeur actuelle :



$C_0 = a + a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \ldots.. + a(1+t)^{-n+1}$

$V_0 = a\ [\ 1 + (1+t)^{-1} + (1+t)^{-2} + \ldots.. + (1+t)^{-n+1}]$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+t)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

$$C_0 = a(1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Exemple :

Quel montant doit-on verser le premier janvier de chaque année et pendant 8 ans pour rembourser un emprunt de 90000DA avec un taux de 7%.

Solution :

$$C_0 = a(1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

a = 14086 DA

2.2.4. La valeur actuelle exprimée "p" période avant la date d'origine:

$$C_0^p = a[\frac{1-(1+t)^{1-n-p}}{t} - \frac{1-(1+t)1^{-p}}{t}]$$

Chapitre 4 : Les emprunts indivis

1. Définition :

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur. Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis.

Le remboursement de cet emprunt s'effectue généralement, par annuités de fin de période.

Chaque annuité est composée de deux éléments:

Un remboursement d'une partie du capital emprunté, appelé l'amortissement.
Une partie intérêt calculée sur la base du taux d'intérêt convenu entre les deux parties et du capital restant dû dépendant.

2. Le tableau d'amortissement :

Le remboursement d'un emprunt dépend du mode d'amortissement utilisé (in fine, par annuités constantes ou par amortissement constant). D'une façon générale le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 \,.\, t$	m_1	$a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 \,.\, t$	m_2	$a_2 = I_2 + m_2$
p	$Cp\text{-}1 = Cp\text{-}2 - mp\text{-}1$	$Ip = Cp\text{-}1 \,.\, t$	m_p	$a_p = I_p + m_p$
n-1	$Cn\text{-}2 = Cn\text{-}3 - mn\text{-}2$	$In\text{-}1 = Cn\text{-}2 \,.\, t$	m_{n-1}	$an\text{-}1 = In\text{-}1 + mn\text{-}1$
n	$Cn\text{-}1 = Cn\text{-}2 - mn\text{-}1$	$In = Cn\text{-}1 \,.\, t$	m_n	$a_n = I_n + m_n$

Avec:

C_0 : capital restant dû au début de la première année soit le montant de l'emprunt.

I_p : intérêt de la $p^{ème}$ période.

m_p : amortissement de la $p^{ème}$ période.

a_p : annuité de la $p^{ème}$ période.

C_{p-1}: capital restant dû au début de la $p^{ème}$ période.

Les amortissements servent à rembourser la dette donc leur somme est égale au capital emprunté:

$$\sum_{p=1}^{n} m_p = C_0$$

Après le paiement du $n^{ème}$ amortissement m_n, le capital restant dû est égal à zéro donc la dette non remboursée avant le paiement de m_n est égale à m_n c'est à dire $C_{n-1} = m_n$

3. Etude des systèmes d'emprunt les plus utilisés :

3.1. Remboursement in fine ou emprunt remboursable en une seule fois :

Le remboursement du capital d'un emprunt s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat. Le montant de l'intérêt (I) versé à chaque échéance, prévue par le contrat, est égal au montant emprunté multiplié par le taux d'intérêt.

TABLEAU D'AMORTISSEMENT

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = I = C_0.i$	---	$a_1 = I_1 = I$
2	C_0	$I_2 = I = C_0.i$	---	$a_2 = I_2 = I$
p	C_0	$I_p = I = C_0.i$	---	$a_p = I_p = I$
n-1	C_0	$I_{n-1} = I = C_0.i$	---	$a_{n-1} = I_{n-1} = I$
n	C_0	$I_n = I = C_0.i$	C_0	$a_n = I_n + C_0 = I + C_0$

Exemple :

Le 15/09/2014, emprunt de 5000DA sur 5ans au taux annuel de 6,5%.

Date déchéance	Capital restant dû début de période	Intérêt de la periode	amortissement	Annuité	Capital restant dû fin de période
15/09/2015	50000	3250	0	3250	50000
15/09/2016	50000	3250	0	3250	50000
15/09/2017	50000	3250	0	3250	50000
15/09/2018	50000	3250	0	3250	50000
15/09/2019	50000	3250	0	53250	0

3.2. Remboursement par amortissement constant :

Chaque période on remboursera une annuité égale à :

Amortissement= Capital/Nombres d'annuités.

Intérêt = Capital restant dû début de période x Taux d'intérêt.

Annuité = Amortissement + Intérêt.

Capital restant dû fin de période = Capital restant dû début de période –Amortissement.

Date déchéance	Capital restant dû début de période	Intérêt de la periode	amortissement	Annuité	Capital restant dû fin de période
15/09/2015	50000	3250	10000	13250	40000
15/09/2016	40000	2600	10000	12600	30000
15/09/2017	30000	1950	10000	11950	20000
15/09/2018	20000	1300	10000	11300	10000
15/09/2019	10000	650	10000	10650	0

3.3. Remboursement par annuité constante :

On pose le principe que la somme des annuités actualisées est égale (équivalente) au capital emprunté.

$$a = C_0 \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

Intérêt = Capital restant dû début de période x Taux d'intérêt.

Amortissement= Annuité - Intérêt.

Capital restant dû fin de période = Capital restant dû début de période –Amortissement.

$a = 50000 \ \frac{0{,}065}{1-(1{,}065)^{-5}}$ = 12031,73DA

Date déchéance	Capital restant dû début de période	Intérêt de la periode	amortissement	Annuité	Capital restant dû fin de période
15/09/2015	50000	3250	8781,73	12031,73	41218,27
15/09/2016	41218,27	2679,19	9352,54	12031,73	31865,73
15/09/2017	31865,73	2071,27	9960,46	12031,73	21905,27
15/09/2018	21905,27	1423,84	10607,89	12031,73	11297,38
15/09/2019	11297,38	734,33	11297,38	12031,73	0

Remarque :

On remarque que les amortissements sont en progression géométrique de raison (1+t).

Exercice :

Un emprunt amortissable en 25ans par annuités constantes tel que le premier amortissement est égale à 3024,12DA, alors que le $3^{ème}$ amortissement est égale à 3930,15DA.

1. Trouver le taux d'intérêt de cet emprunt.
2. Calculer le capital emprunté sachant que l'annuité constante est égale à 80024,12DA.
3. Combien vaut le $25^{ème}$ et dernier amortissement.
4. Quel est le montant du capital dû immédiatement après le paiement de la $20^{ème}$ annuité.

Solution :

1. Les amortissements sont en progression géométrique de raison (1+t), par conséquent :

$A_3 = A_1 \times (1+t)^2$ soit $3024,12(1+t)^2$ d'où t= 0,14

Le taux nominal est de : **14%**.

2. L'annuité constante étant égale à 80024,12 et le premier amortissement égale à 3024,12 nous en déduisons que le premier intérêt est égale à **77000DA .**

Ce premier intérêt étant calculé sur le capital total emprunté C_0, nous en déduisons que $77000 = 0,14 \times C_0$ d'où $\mathbf{C_0 = 550000DA}$

3. Nous avons $A_{25} = A_1(1+t)^{24} = 3024,12 \times 1,14^{24} = 70196,50DA$

Le dernier amortissement est égale à : **70196,50DA**

4. Le capital dû immédiatement après le paiement de la $20^{ème}$ annuité est égale au capital total emprunté diminué de la somme des 20 premiers amortissements :

$C = C_0 - (A_1 + A_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{20}) = C_0 - A_1\frac{(1+t)^{20}-1}{t}$

Nous trouvons ainsi **C= 274729,70DA**