Lycée Moderne
LE PLANTEUR BARRY CALLEBAUT
Akoupé

MATHEMATIQUE Tle D

PREPABAC 2026
M. DJAHA
0709521305
SUJET N°3

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3 , 2/3 et 3/3. Les calculatrices scientifiques non graphiques ; les tables trigonométriques et de logarithmes sont autorisées. Le candidat utilisera une feuille de papier millimétré pour les représentations graphiques des fonctions

EXERCICE 1 : 2 points

Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des propositions ci-dessous suivi de vrai (V) si l'affirmation est vraie ou suivie de Faux (F) si elle est fausse.

1- Dans un univers de probabilité, Si une variable X suit une loi binomiale de paramètre n et p alors la variance de X peut s'exprimer par la relation $V(X) = np - np^2$.

2- Lors d'une étude statistique double entre de variables X et Y. Si X et Y ont pour coefficient de corrélation linéaire $r = -1$ ou $r = 1$ alors les droites d'ajustement linéaires en Y en X et de X en Y notées respectivement (D) et (D') sont confondues.

3- Soit a et b deux nombres réels nstrictement positifs et m et k deux nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On a : $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[k]{b} = \sqrt[m\times k]{a \times b}$.

4- Soit x et y deux nombres réels. Si $e^x \geq e^y$ alors $x \leq y$.

EXERCICE 2 : 2 points

Pour chacune des affirmations (1, 2, 3 et 4) suivantes, quatre réponses (A, B, C et D) sont proposées dont une seule est juste. Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse vraie.

1- Une primitive F sur $]-\infty; 1[$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$ est exprimée:

A- $F(x) = 2\ln(x-1) - \frac{3}{x-1}$; B- $F(x) = 2\ln(1-x) - \frac{3}{x-1}$;

C- $F(x) = -2\ln(x-1) - \frac{3}{x-1}$; D- $F(x) = 2\ln(1-x) + \frac{3}{x-1}$

2- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$ telle que f' et g' sont aussi continues sur [a ; b] alors $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ est égale à :

A- $[f(x)g(x)]_a^b + \int_a^b f(x)g'(x)dx$; B- $[f(x)g'(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g(x)dx$;

C- $[f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$; D- $[f'(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

3- Soit f une fonction continue et dérivable telle que $f(3) = 5$ et $f'(3) = \frac{4}{7}$ alors :

A- f^{-1} n'est pas dérivable en 5 ; B- f^{-1} est dérivable en 5 telle que $(f^{-1})'(5) = \frac{7}{4}$;

C- f^{-1} est dérivable en 5 telle que $(f^{-1})'(5) = \frac{4}{7}$; D- f^{-1} est dérivable en 3 telle que $(f^{-1})'(3) = \frac{7}{4}$.

4- L'équation différentielle (E) : $y'' - 9y = 0$ a pour ensemble de solutions :

A- $ae^{3x} + be^{-3x}$, a ∈ ℝ, b ∈ ℝ, B- $ae^{9x} + be^{-9x}$, a ∈ ℝ, b ∈ ℝ

C - $a\cos(3x) + b\sin(3x)$, a ∈ ℝ, b ∈ ℝ D- $a\cos(-3x) + b\sin(-3x)$, a ∈ ℝ, b ∈ ℝ

EXERCICE 3 : 3 points

Soit u un nombre complexe différent de $1-i$.

1-a) Développe puis réduis $(iu-1-i)^2$

b) Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z tel que : $z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$.

2- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J) d'unité graphique 2 cm.
Soit A, B , C et D quatre points du plan et d'affixes respectives $z_A=(1+i)u-2i$, $z_B=(1-i)u+2$, $z_C=u$ et $z_D=2-2i$

a- Détermine l'affixe du point K milieu du segment [AB] puis détermine le vecteur de translation t qui transforme C en K.

b- Soit R la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$. Montre que R(A) = B.

c- Déduis-en que les droites (ΩK) et (AB) sont perpendiculaires.

3- On pose $u=a(1+i)-2i$ où $\in$ $\mathbb{R}$.

a- Détermine les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de a.

b- Déduis-en que les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 4 : 3,5 points

Le tableau suivant indique, pour chaque année donnée, le nombre de milliers de mariages constatés en Côte d'ivoire.

Année	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de mariages (en milliers) : y_i	450	400	350	300	250	200

1- Représente le nuage de point de cette série (x_i, y_i). Echelle : 1cm pour 1 année et 1 cm pour 50 milliers.

2- Justifie que le coefficient de corrélation linéaire est égale à -1. Interprète le résultat.

3- Démontre qu'une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrées est : $y=-50x+450$

4- Détermine le nombre de mariages en 2026.

EXERCICE 5 : 4,5 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]1;+\infty[$ par :
$f(x)=x+1+2[\ln x-\ln(x-1)]$. On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O; I; J) d'unité graphique 1 cm.

1- a- Justifie que la limite de f à droite en 1 est égal $+\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.

b- Justifie que : $\forall\, x \in\,]1;+\infty[, f(x)=x+1+2\ln(1+\frac{1}{x-1})$

c- Déduis-en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- a- Démontre que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique à (C_f).

b- Déduis-en la position relative de (C_f) par rapport à (D).(On pourra utiliser la comparaison)

3- Soit f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

a- Démontre que $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[, f'(x)=\frac{(x-2)(x+1)}{x(x-1)}$

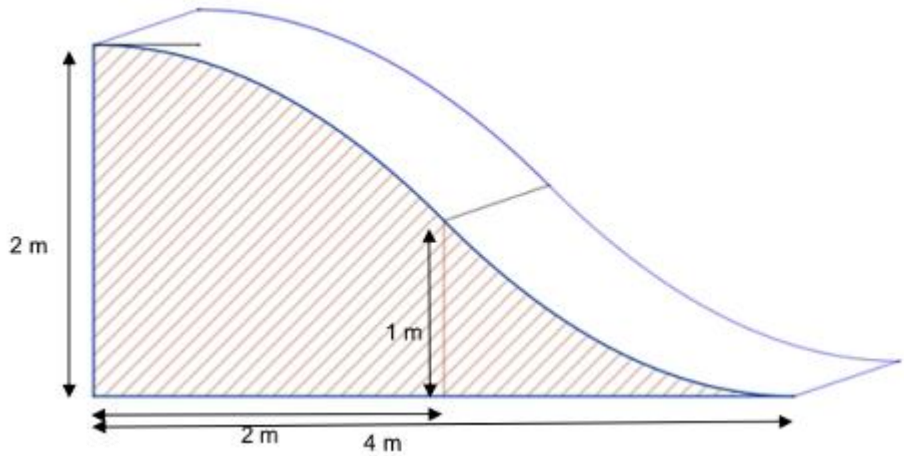
b- Justifie que f est décroissante sur $]1;2[$ puis croissante sur $]2;+\infty[$.

4- Dresse le tableau de variation de f.

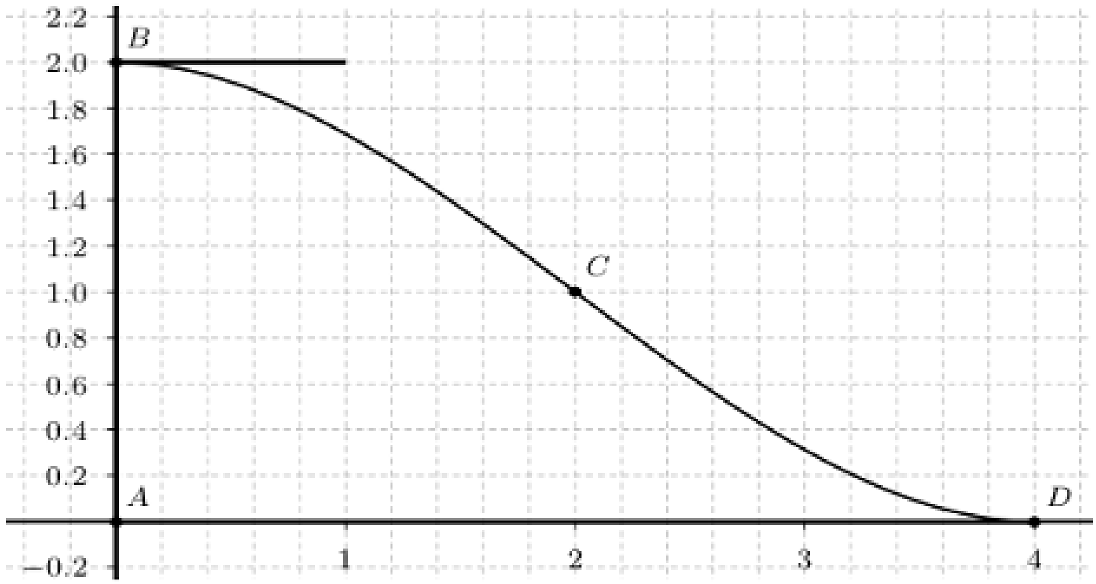
5- Justifie que la courbe (C_f) est au dessus de l'axe (OI) des abscisses.

EXERCICE 6 : 5 points

La municipalité de la ville d’Akoupé a décidé d’installer un toboggan pour les enfants dans un parc de la commune. Le toboggan doit se terminer en pente douce à l’arrivée au sol. La barre d’appui scellée sur un coin au départ est parfaitement parallèle au sol comme l’indique la figure ci-dessous :



Pour des raisons de sécurité, l’espace situé sous le toboggan est coffré par un panneau en bois de chaque côté. Le but du problème est d’estimer l’aire, en m², d’un des panneaux servant de coffrage en vue de le peindre. Sur le document ci-dessous, à partir d’une photo, on a modélisé la ligne du toboggan à l’aide d’un logiciel dans un repère orthonormé direct par une fonction polynomiale f définie sur l’intervalle [0 ; 4] par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, a, b, c et d sont quatre nombres réels.



Sachant que le m² de bois de coffrage coute 1275 FCFA et que le montant en caisse est de 728 000 FCFA, Le maire se demande si cette somme sera suffisante pour réaliser le toboggan.
Ne sachant comment s’y prendre, il te sollicite.
Réponds à la préoccupation de Monsieur le maire.