Lycée Moderne
LE PLANTEUR BARRY CALLEBAUT
Akoupé

MATHEMATIQUE Tle D

PREPABAC 2026
M. DJAHA
0709521305
SUJET N°4

EXERCICE 1 : 2 points

Dans chacun des cas suivants, recopie le numéro de l'affirmation suivi de Vrai si l'affirmation est vraie et Faux si non.

1. Lorsque qu'une variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors la variance est $V(X) = np^2$.
2. La fonction $\log_a$ avec $0 < a < 1$ est strictement décroissante sur $]0;\ +\infty[$.
3. La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ est $\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx$.
4. La fonction $x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ a pour réécriture $x \longmapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

EXERCICE 2 : 2 points

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	AFFIRMATIONS OU ENONCES INCOMPLETS	REPONSES			
		A	B	C	D
1	A l'aide d'une intégration par partie, $\int_1^e lnx dx =$	$1 + lne$	$1 + elne - e$	$elne$	$1 - e$
2	Soit X une variable aléatoire pour laquelle à l'issue d'un jeu, un joueur mise une somme M en FCFA et on obtient la loi de probabilité suivante : $X = x_i$: $-M$; 0 ; $3000-M$ $P(X = x_i)$: $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{8}$ Le jeu est équitable si M a pour valeur M =	2000	$\frac{15000}{7}$	1800	$\frac{3000}{7}$
3	L'équation (E) : $ln(x-1) + 2lnx = ln(3-x)$ a pour ensemble de validité l'intervalle V =	[1 ;3]	]0 ;+∞[	]0 ;3[	]3 ;+∞[
4	On a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} =$	$-\infty$	1	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

EXERCICE 3 : 3 points

Soit la fonction h définie sur $]-1;\ +\infty[$ par $h(x) = \frac{x^2+2}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

1. On considère les fonctions M et m telles que : $M(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$ et $m(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$
   Démontre que M est une primitive de m sur $]-1;\ +\infty[$
2. a) Vérifie que $\forall\ x \in\ ]-1;\ +\infty[, \frac{x^2+2}{x+1} = x - 1 + \frac{3}{x+1}$
   b) Détermine la primitive H de h qui s'annule en 0.

EXERCICE 4 : 3,5 points

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et de façon indépendante huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a) Justifie que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calcule la probabilité des événements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;

B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;

C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.

On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement " le stylo présente un défaut " et E l'événement " le stylo est accepté ".

a) Construis un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b) Calcule la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c) Justifie que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,02 à 10-3 près.

3. Après le contrôle, on prélève, successivement et de façon indépendante, un échantillon de n stylos parmi les stylos acceptés. ($n \geq 2$).

a) Justifie que la probabilité notée P_n pour qu'il y ait au moins un stylo avec un défaut dans ce prélèvement de n stylos est $P_n = 1 - (0{,}98)^n$.

b) Détermine la valeur minimale n de n pour laquelle $P_n > 0{,}4$.

EXERCICE 5 : 4,5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + 5x + 5 - \ln(x-1)$.
On note (C_f) sa courbe representative dans le repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ tel que OI = 1 cm et OJ = 2 cm.

1- Calcule que $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x)$ puis interprète graphiquement le résultat.

2- a- Justifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)}{x^2} = 0$.

b- Déduis-en le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement le resultats.

3- Soit f' la fontion dérivée de f, f étant dérivable sur $1;+\infty[$.

a- Démontre que $f'(x) = \frac{(-x+2)(2x-3)}{x-1}$

b- Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variations.

4- a- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[2;+\infty[$.

b- Justifie que $5{,}61 < a < 5{,}62$

c- Démontre que le signe de f sur $]1;+\infty[$ est tel que : $\begin{cases} \forall x \in]1;a[, f(x) > 0 \\ \forall x \in]a;+\infty[, f(x) < 0 \end{cases}$

5- Détermine les coordonnées des points de la courbe (C_f) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

6- Construis la courbe (C_f) et ses deux tangentes et son asymptote. (On prendra $a = 5{,}62$)

EXERCICE 6 : 5 points

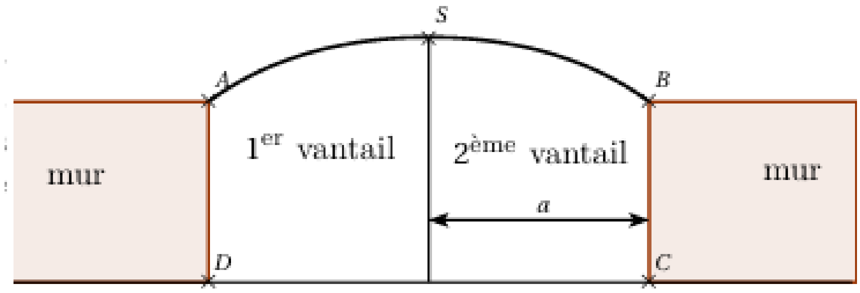

Figure 1 :

L'entreprise DJAHASHIBOSS est spécialisée dans la conception des portails en bois haut de gamme. L'entreprise reçoit une commande de portail que le concepteur a dessiné suivant le plan de la figure ci-dessus.

- Le fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a < 2$.
- Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-dessus. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.
- Ce portail à deux vantaux est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 2]$ par :
  $f(x) = -\frac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4}$ où b est un nombre réel positif.
- Cette fonction est graphiquement illustrée dans un repère tel que la visualisation permet d'afficher les points A, B, C et D de coordonnées respectifs $(-a; f(-a))$, $(a; f(a))$, $(a; 0)$ et $(-a; 0)$: (Figure 2)

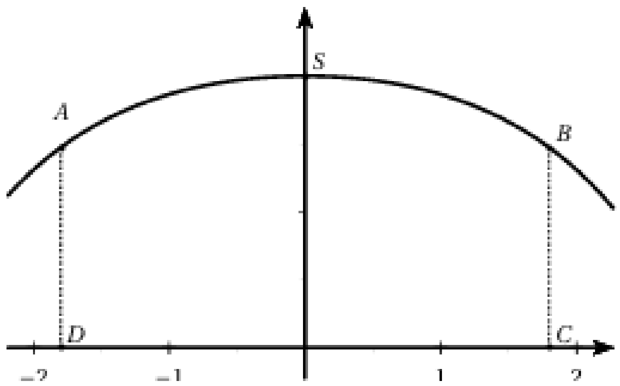

Figure 2.

Le mur de fixation a une hauteur $h = 1{,}5\ m$. Le sommet S du portail doit être à 2 m du sol.
Il y a eu panne d'électricité et le logiciel de programmation s'est arrêté.

Pour satisfaire la commande, Les concepteurs doivent répondre à trois préoccupations qui sont :

- Vérifier si la modélisation permet d'avoir un portail parfaitement symétrique.

- Préciser les valeurs de a, b tels que le sommet S soit à 2 m du sol.

- Automatiser le portail si la masse d'un vantail excède 60 Kg sachant que la densité des planche de bois utilisés pour la fabrication est 20 Kg.m². (On prendra $a = 1{,}8$ et $b = 1$).

En tant qu'expert(e) en modélisation et calculs, tu es sollicité(e).
En utilisant tes connaissances au programme, Réponds à chacune des trois préoccupations.