Lycée Moderne
LE PLANTEUR BARRY CALLEBAUT
Akoupé

MATHEMATIQUE Tle D

PREPABAC 2026
M. DJAHA
0709521305
SUJET N°8

EXERCICE 1 : 2 points

Pour chaque énoncé numéroté, écris le numéro suivi de Vrai si l'énoncé est vrai ou suivi de faux sinon.

N°	Enoncés
1	Soit p et q deux nombres entiers relatifs non nuls. La fonction $x \longmapsto x^{\frac{p}{q}}$ est appelée fonction puissance à exposant rationnel. Elle est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
2	Pour tout nombre réel $\omega > 0$, l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$ a pour ensemble se solution la fonction $Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$, A et B étant des nombres réels.
3	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{u}, \vec{v})$, On place les points A, B et C d'affixes respectifs z_A, z_B et z_C. Le triangle ABC est rectangle isocèle en B si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ ou i
4	Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, d'après la formule d'Euler : $\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2i}$

EXERCICE 2 : 2 points

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	ENONCES INCOMPLETS	REPONSES	
1	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on donne $z_E = -2 + i$ et $z_K = 3 - 4i$. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\lvert z + 2 - i \rvert = \lvert z - 3 + 4i \rvert$ est….	A	Un cercle de diamètre [EK]
		B	La médiatrice du segment [EK]
		C	L'ensemble vide
		D	Un cercle de rayon EK et de centre E
2	f est une fonction telle que: $\forall x \in]4; +\infty[; \lvert f(x) - 1 \rvert \leq \frac{3}{\sqrt{x}-2}$, alors, d'après la propriété de comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \cdots$	A	3
		B	0
		C	1
		D	$+\infty$
3	Soit a un nombre réel strictement positif. On a : $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a} = \cdots$	A	$a^{\frac{1}{12}}$
		B	$a^{\frac{1}{6}}$
		C	$a^{\frac{3}{4}}$
		D	a^6
4	Le nombre complexe z tel que $z = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$ a pour argument…..	A	$\frac{3\pi}{4}$
		B	$-\frac{\pi}{4}$
		C	$\frac{\pi}{4}$
		D	$-\frac{3\pi}{4}$

EXERCICE 3 : 2 points

On considère la loi de probabilité d'une variable aléatoire X donnée par le tableau suivant :

$X = X_i$	-1	0	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

1- Détermine $P(X > 0)$ et $P(X \leq 2)$
2- Détermine puis représente graphiquement la fonction de répartition.

EXERCICE 4 : 4 points

On considère la suite I définie par $I_0 = \int_0^1 e^x dx$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x\, dx$.

1- Calcule $\int_0^1 (1-x)^n dx$
2- Sachant que $\forall\, x \in [0;1], 1 \leq e^x \leq e$, montre que $\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$
3- Démontre que la suite I est convergente et détermine sa limite.
4- Calcule I_0 puis I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
5- En intégrant par parties, démontre que : $\forall\, n \geq 1$, $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n!}$ (1)
6- On pose $\forall\, n \geq 1$, $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$
   a- En utilisant la relation (1), exprime S_n en fonction de I_0 et I_n.
   b- Déduis la limite l de la suite (S_n).
   c- Justifie l'encadrement $\frac{1}{(n+1)!} \leq l - S_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$

EXERCICE 5 : 5 points

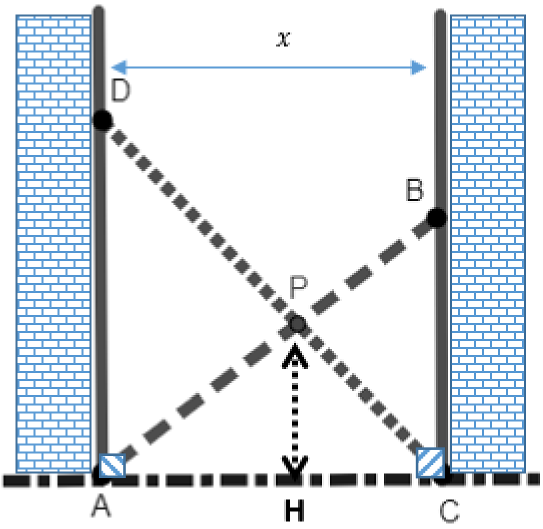
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.

On note (C_f) sa courbe representative dans le repère orthogonal (O, I, J) tel que OI = 2 cm et OJ = 2 cm.

1- Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2- a- Montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$.
   b- Interprète graphiquement le résultat précédent.
3- Trace la courbe (C_f)
4- Justifie que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty;0[$.
5- Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$
   a- Justifie que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$
   b- Interprète graphiquement les deux résultats précédents.
6- Soit g' la fonction dérivée de g.
   a- Démontre que $g'(x) = e^{-x} f(x)$.
   b- Etudie les variations de g puis dresse son tableau de variations.
7- a- Démontre que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$
   b- Détermine pour tout nombre réel $\lambda > 0, I(\lambda) = \int_0^\lambda g(x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
   c- Calcule $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$.
8- On admet que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0;1[$. Et on note g^{-1} sa réciproque.
   a- Calcule g(0).
   b- Montre que g^{-1} est dérivable en ln2 puis calcule $(g^{-1})'(ln2)$

EXERCICE 6 : 5 points

Ton frère cadet est étudiant dans un établissement professionnel où il suit la formation pour obtenir un CAP option Construction métallique et bâtiment. Pour valider son stage pratique, il assiste un peintre dans ses travaux. Celui-ci doit peintre deux façades de mur comme l'indique la figure ci-dessous.



Sol (AC)

Le peintre ayant oublié son matériel de métrage, dispose de deux échelles [AB] et [CD] de longueurs respectives 2 mètres et 3 mètres qu'il va utiliser pour refaire les façades des deux murs formant un couloir de largeur AC $= x$ mètres. La disposition de ces deux échelles est telle qu'elles se joignent en P à une hauteur HP du sol qui vaut 1 mètre.

Les plans des murs (AD) et (BC) du sol (AC) sont perpendiculaires.

Le peintre doit passer la commande de pot de peinture et se fera livrer par une charrette qui devra passer entre les murs. Pour cela, il doit connaitre la largeur du couloir afin de spécifier le type de charrette qui fera la livraison et minimiser les couts. Ne sachant pas comment s'y prendre il te sollicite.