Lycée Moderne
LE PLANTEUR BARRY CALLEBAUT
Akoupé

MATHEMATIQUE Tle D

PREPABAC 2026
M. DJAHA
0709521305
SUJET N°10

EXERCICE 1 : 2 points

Pour chaque énoncé numéroté, écris le numéro suivi de Vrai si l'énoncé est vrai ou suivi de faux sinon.

N°	Enoncés
1	Soit a et b deux nombres réels non nuls et (E) l'équation différentielle telle que : (E) : $y' - ay = b$. Les solutions de (E) sont les fonctions f telles que $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un nombre réel.
2	Soit a, b et c des nombres réels non nuls tels que $a < b < c$. f etant une fonction continue sur $[a; c]$, D'après l'égalité de Chasles, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$
3	Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{e^x} = 1$
4	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{u}, \vec{v})$, On place les points A, B, Cet D d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C et z_D. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_B} = ki$ où $k \in \mathbb{R}^*$.

EXERCICE 2 : 2 points

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

<table>
<tr><th>N°</th><th>ENONCES INCOMPLETS</th><th colspan="2">REPONSES</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">La forme exponentielle du nombre complexe $-1 + i$ est …</td><td>A</td><td>$2e^{i\frac{\pi}{4}}$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$2e^{-i\frac{\pi}{4}}$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">Soit U la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$
La suite a pour limite…</td><td>A</td><td>2</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0</td></tr>
<tr><td>C</td><td>1</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$\sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td rowspan="4">Pour tout nombre réel θ et tout nombre entier relatif n , d'après la formule de Moivre $(cos\theta + isin\theta)^n = \dots$</td><td>A</td><td>$ncos\theta + insin\theta$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$\cos(n\theta) + isin(n\theta)$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$cos^n(\theta) + isin^n(\theta)$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$cos^n(\theta) - isin^n(\theta)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4</td><td rowspan="4">Soit une série statistique double suivante :
<table>
<tr><td>X_i</td><td>25</td><td>30</td><td>36</td><td>42</td><td>55</td><td>64</td></tr>
<tr><td>Y_i</td><td>139</td><td>125</td><td>111</td><td>105</td><td>98</td><td>92</td></tr>
</table>
La covariance de cette série est …</td><td>A</td><td>$cov(x; y) > 0$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$cov(x; y) = 0$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$cov(x; y) = 1$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$cov(x; y) < 0$</td></tr>
</table>

EXERCICE 3 : 2 points

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = -\sin(2x)$ et l'équation (E') : $y'' + 4y = 0$

1- Justifie que $P(x) = \frac{1}{4}x\cos(2x)$ est solution de (E).
2- Détermine l'ensemble des solutions de (E').
3- a- Démontre qu'une fonction Q est solution de (E) si et seulement si P−Q est solution de (E').
   b- Déduis en les solutions de (E).

EXERCICE 4 : 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité 2 cm.
Soit A et B les points d'affixes respectifs $z_A = i$ et $z_B = 1 + 2i$.

1- Justifie que l'écriture complexe de la similitude directe S de centre Ω telle que S(O) = A , S(A) = B est $z' = (1 - i)z + i$.
2- Précise les éléments caractéristiques de la similitude S.
3- On considère la suite de points A_n telle que :
   - $A_0 = O$ et a pour affixe $z_0 = 0$.
   - A_n a pour affixe z_n
   - A_{n+1} a pour affixe z_{n+1} tel que $A_{n+1} = S(A_n)$, S étant la similitude directe précédente.
   - On a $A_1 = A$ et $A_2 = B$.

   a- Démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ z_n = 1 - (1 - i)^n$.
   b- Détermine en fonction de n les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$
   c- Compare les distances de ΩA_n et A_nA_{n+1}.
   d- Détermine Mes $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}})$.
4- Construis les points A_3 et A_4.

EXERCICE 5 : 5 points

On considère la fonction f définie par sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = (x - \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}\ si\ x \neq 0 \end{cases}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 + x + 1$.

Dans le repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 2 cm, on note (C_f) sa courbe representative de f et (C_g) sa courbe représentative de g .

1- Dresse le tableau de variation de g.
2- a- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
   b- Vérifie que $-1 < \alpha < 0$.
   a- Détermine un encadrement de α à 10^{-2} près.
3- Etudie le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
4- a- Etudie la continuité de f en 0.
   b- Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5- a- Etudie la dérivabilité de f en 0.
   b- Interprète graphiquement les deux résultats qui précèdent.

6- On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0\,;+\infty[$.
   a- Montre que $\forall\, x \in]0; +\infty[,\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$
   b- Déduis-en les variations de g puis dresse son tableau de variation.
7- Trace la courbe (C_f) ainsi que ses asymptotes.

EXERCICE 6 : 5 points

Dans le cadre du programme national de développement routier le gouvernement de ton pays prévoit faire construire deux autoroutes qui traverseront ta ville.

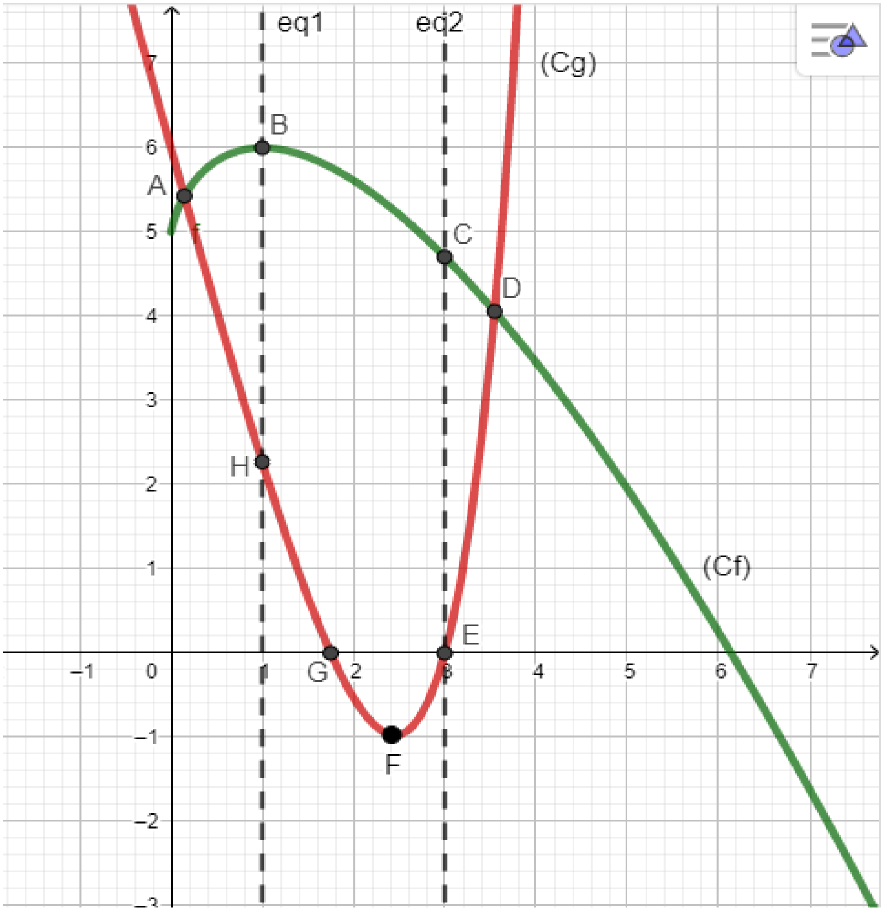
Transposée dans un repère orthonormée d'unité graphique OI = OJ = 1km, ta ville est l'espace intérieure délimitée par les points ABCDEFGH et sa superficie vaut 15 Km²

Les points A, B, C et D appartiennent à la courbe (C_f) définie sur l'intervalle]0,1 ;4[par l'expression $f(x) = 5 - xlnx + x$.

Les points D, E, F, G, H et A appartiennent à la courbe (C_g) définie sur l'intervalle]0,1 ;4[par l'expression $g(x) = 2xe^{x-3} - 4x + 6$.

Les autoroutes eq1 d'entrée et eq2 de sortie sont respectivement des droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

Toutes ses données sont graphiquement illustrées par :



Les zones extérieures (ABH) et (CDE) aux autoroutes sont prévues respectivement pour la construction d'université et cité administrative d'une part et d'espace de sport et loisirs d'autre part sont de superficies égales.

La zone intérieure BCEFHG est naturellement réservée aux habitations des populations.

Les habitants veulent connaitre la superficie allouée à chacune des zones extérieures mais ne sait pas comment s'y prendre. Il sollicite ton aide.