

INITIATION AU DENOMBREMENT

I. UN PETIT PEU DE THÉORIE DES ENSEMBLES.

1- Ensemble fini, cardinal :

Lorsqu'un **ensemble E a n éléments**, on dit que E est un ensemble fini.

On dit alors que son cardinal est n, et on note : $\text{card}(E) = n$.

L'ensemble vide est l'ensemble qui n'a pas d'élément, il est noté $\emptyset$ et on pose :

$$\text{card}(\emptyset) = 0.$$

Exemple I.1 :

$E = \{a; b; c; d\}$ est un ensemble fini et dans ce cas $\text{card}(E) = 4$.

Remarque I.1 :

Certains ensembles ne sont pas finis, comme $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ qui ont une infinité d'éléments.

2- Appartenance, Partie d'un ensemble, Inclusion :

L'appartenance d'un élément x à un ensemble E se note $x \in E$ et on dit x élément de E ou x appartient à E. **Lorsque x n'appartient pas à E** on note $x \notin E$.

Un ensemble A est un sous-ensemble d'un ensemble E si tout élément de A est élément de E. On dit alors que **A est inclus dans E** et on note $A \subset E$.

On appelle partie de E tout sous-ensemble de E.

L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Par convention, $\emptyset$ est une partie de n'importe quel ensemble.

Toute partie de E réduite à un seul élément est appelée **singleton**.

Lorsque $\text{card}(E) = n$; il y a n singletons.

Exemple I.2 :

Soit $E = \{a; b; c; d\}$, les singletons de E sont les parties : $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{d\}$.

3- Intersection :

Si A et B sont deux ensembles, l'intersection de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$, constitué des éléments qui appartiennent à A et B :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont des parties disjointes de E.

Quelques propriétés de l'intersection :

- Commutativité : $A \cap B = B \cap A$
- Associativité : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- Avec $\emptyset$: $A \cap \emptyset = \emptyset$

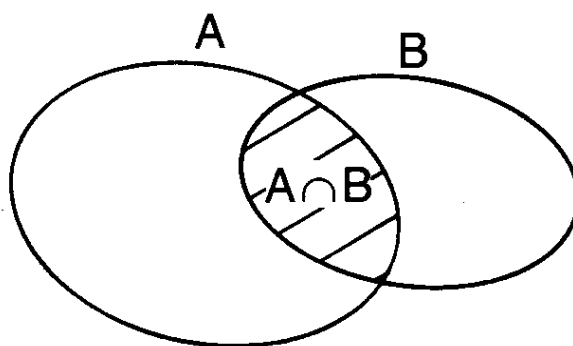


Figure I.1.

$A \cap B$ est représentée par la partie hachurée.

4- Réunion :

Si A et B sont deux ensembles, la réunion de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$, constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Lorsque A et B sont des ensembles disjoints : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B$.

Quelques propriétés de la réunion :

- Commutativité : $A \cup B = B \cup A$
- Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
- Avec $\emptyset$: $A \cup \emptyset = A$

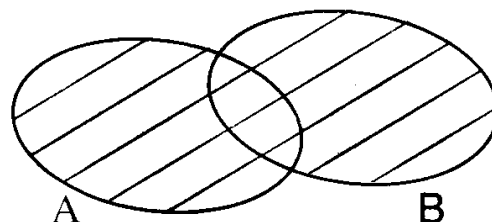


Figure I.2.

$A \cup B$ est représentée par la partie hachurée.

5- Complémentaire :

Si A est une partie d'un ensemble E , le complémentaire de A dans E est la partie de E , constituée des éléments de E qui n'appartiennent pas à A .

Le complémentaire de A dans E est noté $C_E A$, A^c ou plus simplement $\bar{A}$:

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$

On a alors :

- $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}E - \text{card}A$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cup \bar{A} = E$

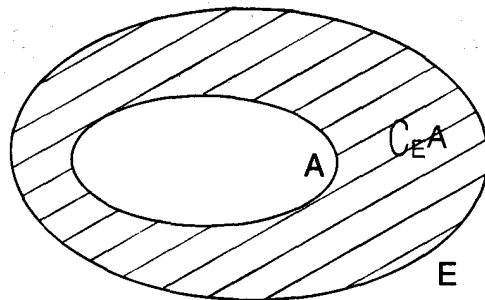


Figure I.3 : A est son complémentaire

6- Propriétés de passage au complémentaire (lois de Morgan, souvent utilisée en probabilités) :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

☺ Exercice I.1:

Soient A , B et C les intervalles de $\mathbf{R}$ suivants : $A = [0; 1]$; $B = [\frac{1}{2} ; 3]$ et $C =]-1 ; \frac{2}{3}[$.

- a) Quel est l'ensemble $A \cap B$? L'ensemble $B \cap C$? L'ensemble $A \cap C$?
- b) Quel est l'ensemble $A \cup B$? L'ensemble $B \cup C$?
- c) Quels sont les ensembles $(A \cup B) \cap C$ et $(A \cap C) \cup (B \cap C)$?

☺ Exercice I.2:

Soit E l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 10.

Soient A l'ensemble des éléments de E qui sont pairs et B l'ensemble des éléments de E divisibles par 3.

- a) Donner les éléments de $A \cap B$ et $A \cup B$.
- b) Décrire un ensemble C qui soit inclus dans B .
- c) Décrire $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
- d) Trouver un ensemble D tel que A et D soient disjoints.

7- Partition :

Une partition d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E , disjointes deux à deux, et dont la réunion est l'ensemble E .

Exemple I.3 :

$\{\{a_1 ; a_2\} ; \{a_3\}\}$ est une partition de l'ensemble $E = \{a_1 ; a_2 ; a_3\}$.

Les familles suivantes ne sont pas des partitions de E :

- $\{\emptyset ; \{a_1 ; a_3\} ; \{a_2\}\}$ car cette famille contient l'ensemble vide,
- $\{\{a_1 ; a_2\} ; \{a_2 ; a_3\}\}$ car a_2 appartient à plus d'une partie,
- $\{a_1 ; a_2\}$ car a_3 n'est pas dans la réunion.

8- Produit cartésien :

On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F l'ensemble noté $E \times F$ des couples $(a ; b)$ où a est un élément de E , et b un élément de F .

On a : $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

En effet :

Soit $(x ; y) \in E \times F$. Il y a $\text{card}(E)$ façons de choisir x .

Pour chaque choix de x , il y a $\text{card}(F)$ façons de choisir y .

Soit au total $\text{card}(F) + \text{card}(F) + \dots + \text{card}(F)$ ($\text{card}(E)$ termes dans la somme) choix possibles du couple $(x ; y)$, ce qui donne le résultat.

Ce type de raisonnement est souvent utilisé en combinatoire.

Exemple I.4 :

- Soient $E = \{1; 2\}$ et $F = \{a; b; c\}$.
 $E \times F = \{(1 ; a) ; (1 ; b) ; (1 ; c) ; (2 ; a) ; (2 ; b) ; (2 ; c)\}$.
- Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ (où $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$) est le produit cartésien $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ également noté $\mathbf{R}^2$.

9- Produit cartésien de p ensembles :

Le produit cartésien de deux ensembles se généralise à plusieurs ensembles.

Soit p ensembles notés $E_1, E_2, \dots, E_p$. On appelle produit cartésien des ensembles

$E_1, E_2, \dots, E_p$ l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ des éléments de la forme $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_p)$ avec $x_1 \in E_1 ; x_2 \in E_2 ; \dots ; x_p \in E_p$.

Les éléments de cet espace sont appelés des p -uples.

Pour $p = 2$ les p -uples sont appelés couples et pour $p = 3$ des triplets.

Par exemple dans l'espace usuel on représente les coordonnées cartésiennes d'un point par un triplet de $\mathbb{R}^3$.

On a: $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_p)$.

😊 Exercice I.3:

Un code est composé d'une lettre de l'alphabet, d'un chiffre (entier entre 0 et 9), d'une lettre de l'alphabet et d'un chiffre.

Combien y a-t-il de codes possibles ?

10-Notion de p -liste :

L'ensemble E étant un ensemble à n éléments, on appelle p -liste de E tout p -uple $(x_1 ; \dots ; x_p)$ où chaque x_k est élément de E .

Une p -liste (ou liste de longueur p) de E est donc est un p -uplet de $E^p = E \times E \times \dots \times E$ (p facteurs). (On dit aussi suite de longueur p d'éléments de E).

D'après le résultat sur le cardinal d'un ensemble :

il y a n^p p -listes d'un ensemble à n éléments.

Exemple I.5 :

Le terme $(a ; n ; a ; n ; a ; s)$ est une 6-liste de l'ensemble $E = \{a; b; c; \dots ; z\}$ des lettres de l'alphabet. Il y a $26^6 = 308915776$, 6-listes de E .

Exemple I.6 :

Tirage avec remise d'un échantillon ordonné de boules dans une urne : une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire successivement p boules de l'urne en notant à chaque tirage le numéro de la boule sortie et en remettant celle-ci dans l'urne.

Quel est le nombre de tirages distincts possibles ? (on appelle ici tirage la suite ordonnée des p numéros obtenus successivement.)

Comme il y a remise, le nombre de tirages est le nombre d'éléments de E^p , avec $E = \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$. Il y en a donc n^p .

On verra au paragraphe suivant le cas d'un tirage sans remise.

😊 Exercice I.4:

On jette successivement 3 fois un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 et on note le nombre à trois chiffres obtenu.

Ecrire tous les nombres que l'on peut obtenir. Combien y en a-t-il ? On pourra utiliser un arbre.

II. PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENTS.

1- Permutations :

Introduction :

Quatre chevaux A, B, C, D prennent le départ d'une course ; combien y a-t-il d'ordres d'arrivée possibles ?

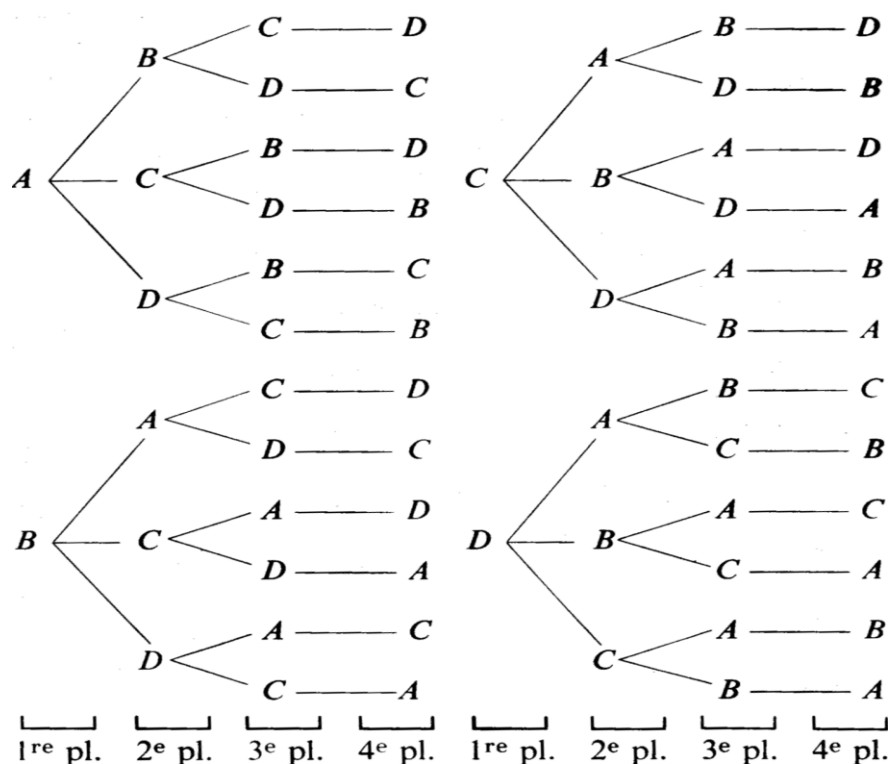
▪ Nous pouvons raisonner comme suit :

Les quatre chevaux se disputent la première place ; il y a donc quatre possibilités pour désigner le cheval qui arrivera premier : A, B, C, D. L'un des chevaux étant arrivé premier, les trois chevaux restant se disputent la deuxième place ; il y a donc 4×3 possibilités pour désigner les deux chevaux qui arriveront premier et second :

A-B	A-C	A-D
B-A	B-C	B-D
C-A	C-B	C-D
D-A	D-B	D-C

De même les deux chevaux classés premier et second étant arrivés, les deux chevaux restant se disputeront la troisième place ; il y a donc $4 \times 3 \times 2$ façons de désigner les trois chevaux qui arriveront premier, second et troisième. Enfin, les trois chevaux classés premier, second et troisième étant arrivés, le cheval restant se contentera de la quatrième et dernière place.

Il y a donc : $4 \times 3 \times 2 \times 1$ ordre d'arrivée possibles ; chacun d'eux correspond à un chemin dans un des quatre « arbres » suivants :



▪ Nous pouvons aussi raisonner comme suit :

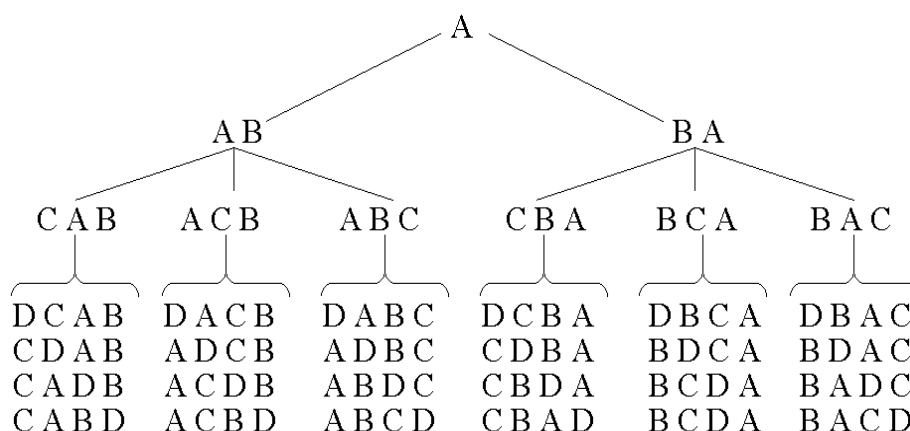
S'il n'y avait que les deux chevaux A et B au départ de la course, il y aurait deux ordres d'arrivée possibles : A-B et B-A.

L'adjonction du troisième cheval C multiplie par 3 le nombre d'ordres possibles : en effet, dans chacun des deux cas précédents, le cheval C peut prendre la première, la deuxième ou la troisième place ; cela donne les 2×3 ordres d'arrivée suivants :

C-A-B A-C-B A-B-C et C-B-A B-C-A B-A-C

De même l'adjonction du quatrième cheval D, multiplie par 4 le nombre des ordres d'arrivée possibles ; ce nombre est donc : $1 \times 2 \times 3 \times 4$.

Avec cette méthode, les ordres d'arrivée sont représentés par le graphe suivant :



Définition :

E étant un ensemble à n éléments, on appelle permutation de E toute n-liste d'éléments distincts de E.

On dit aussi permutation de n éléments.

Une permutation de n éléments est donc un *n*-uplet formé en rangeant ces n éléments dans un ordre déterminé, c'est-à-dire en les plaçant à n places numérotées 1, 2, ..., n.

Dans l'exemple ci-dessus, chaque ordre d'arrivée possible est une permutation des quatre lettres A, B, C, D.

Deux permutations distinctes sont composées des mêmes éléments, mais différent par l'ordre dans lequel sont rangés ces éléments.

Proposition :

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments, est égal au produit des n premiers entiers : $1 \times 2 \times \dots \times n$.

Définition :

Le produit des n premiers entiers s'appelle factorielle n et se note $n!$:

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n.$$

On pose, par convention, $0! = 1$.

Exemple II.1: $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

☺ **Exercice II.1:**

Calculer : $0!$; $1!$; $2!$; $3!$; $4!$; $5!$; $6!$; $7!$; $\frac{100!}{99!}$; $\frac{10!}{3!7!}$; $\frac{16!}{15 \times 13 \times 11 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 2^8}$.

2- Arrangements :

Introduction :

Cinq chevaux A, B, C, D, E prennent le départ d'une course ; de combien de façons peut-on désigner les trois chevaux arrivant premier, second et troisième, compte tenu de l'ordre d'arrivée de ces trois chevaux ?

(Combien y a-t-il de « tiercés dans l'ordre » différents ?)

Les cinq chevaux se disputent la première place ; l'un des chevaux ayant pris la première place, les quatre chevaux restant se disputent la deuxième place ; un de ces chevaux ayant pris la deuxième place, les trois chevaux restant se disputent la troisième place. Le nombre cherché est donc : $5 \times 4 \times 3$.

Chaque tiercé dans l'ordre correspond à un chemin dans un des cinq arbres suivants:

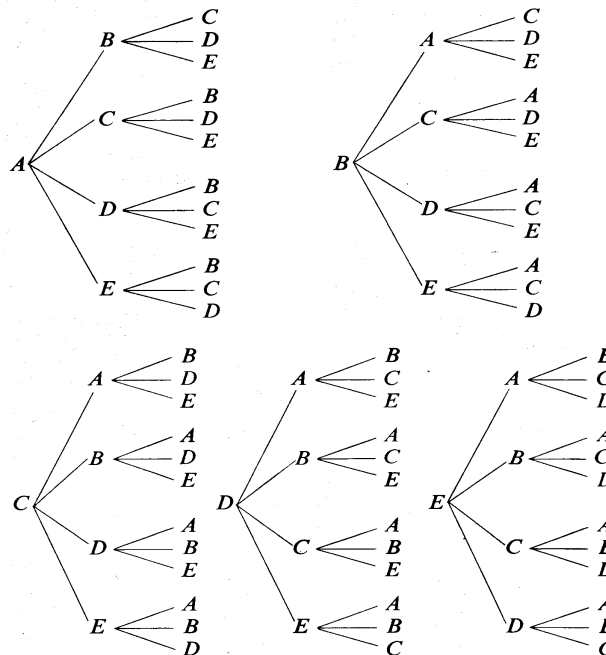


Fig. 2

Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et $0 \leq p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de E toute p -liste d'éléments distincts de E .

On dit aussi arrangement de p éléments parmi n .

Un arrangement de p éléments parmi n est donc un p -uple formé en choisissant p éléments distincts parmi ces n éléments et en les rangeant à p places numérotées.

Dans l'exemple ci-dessus, chaque tiercé dans l'ordre est un arrangement de trois lettres choisies parmi les cinq lettres A, B, C, D, E .

Deux arrangements distincts diffèrent soit par le fait qu'ils ne contiennent pas les mêmes éléments, soit, s'ils contiennent les mêmes éléments, par l'ordre de ces éléments.

Ainsi, le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est le suivant :

Proposition:

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est noté A_n^p et est donné par le produit de p entiers consécutifs, décroissant à partir de n :

$$A_n^p = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) \quad (p \text{ facteurs}).$$

Le terme A_n^p s'écrit aussi : $A_n^p = \frac{n!}{(n - p)!}$.

Exemple II.1 : Arrangements sur un sous-ensemble

Dans les problèmes de dénombrement on est souvent amené à effectuer des dénombrements sur des sous-ensembles déterminés.

Considérons l'exemple suivant :

Une classe se compose de 10 garçons et de 7 filles ; de combien de façons distinctes peut-on distribuer les rôles de Cléante, Frosine, Harpagon, Marianne et Valère.

a) Sans distinction de sexe ?

b) En choisissant 3 garçons pour tenir les rôles d'Harpagon, Cléante et Valère, et 2 filles pour tenir les rôles de Frosine et Marianne ?

Réponses :

a) Dans ce premier cas, le nombre de rôles est le nombre d'arrangements de 5 élèves parmi 17 : il y a 17 manières de distribuer le rôle de Cléante, puis 16 manières de distribuer le rôle de Frosine, puis 15 manières de distribuer le rôle de Harpagon, puis 14 manières de distribuer le rôle de Marianne, puis 13 manières de distribuer le rôle de Valère, soit : $A_{17}^5 = 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 742560$ possibilités de distribuer les rôles.

b) Dans ce cas on distribue les 2 rôles féminins chez les 7 filles, soit $A_7^2 = 7 \times 6 = 42$ possibilités, et les 3 rôles masculins chez les 10 garçons, soit $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilités ; or à chaque couple de filles peut être associé 720 triplets de garçons ; il y a donc au total : $A_7^2 \times A_{10}^3 = 30240$ possibilités de distribuer les rôles.

Dans l'ensemble E des élèves de la classe on a donc effectué un dénombrement dans l'ensemble des filles et dans l'ensemble des garçons, le résultat s'obtenant ici en multipliant les résultats obtenus.

☺ Exercice II.2:

Une urne contient 19 boules dont 8 blanches, 5 vertes et 6 rouges.

1- On tire successivement et sans remise 8 boules de l'urne.

a) Combien y a-t-il de manières de tirer successivement de l'urne 3 boules blanches puis 2 boules vertes et enfin 3 boules rouges ?

b) Combien y a-t-il de manières de tirer successivement 2 boules blanches puis 2 boules vertes puis 1 boule blanche et enfin 3 boules rouges ?

2- A chaque tirage de la boule, on note le résultat et on remet la boule.

Que deviennent les résultats précédents ?

☺ Exercice II.3:

Un code est composé d'une lettre de l'alphabet, d'un chiffre (entier entre 0 et 9), d'une lettre de l'alphabet distincte de la précédente et d'un chiffre distinct du chiffre précédent. Calculer le nombre de codes possibles.

3- Combinaisons :

Introduction :

Cinq chevaux A, B, C, D, E prennent le départ d'une course ; de combien de façons peut-on désigner les trois chevaux qui arriveront les premiers ? (On s'intéresse donc aux chevaux composant un tiercé, sans tenir compte de l'ordre du tiercé.)

Supposons par exemple, que les trois chevaux arrivés les premiers soient A, B, C (sans que l'on sache lequel est le premier, lequel est le second, lequel est le troisième).

Il y a alors $3! = 6$ ordres d'arrivée possibles de ces trois chevaux :

A-B-C A-C-B B-A-C B-C-A C-A-B C-B-A.

Ainsi à chaque façon de désigner les trois chevaux arrivés les premiers, correspondent six « tiercés dans l'ordre » différents. Or nous avons vu précédemment qu'il y avait $5 \times 4 \times 3 = 60$ « tiercés dans l'ordre » distincts.

Le nombre cherché est donc : $\frac{60}{6} = 10$.

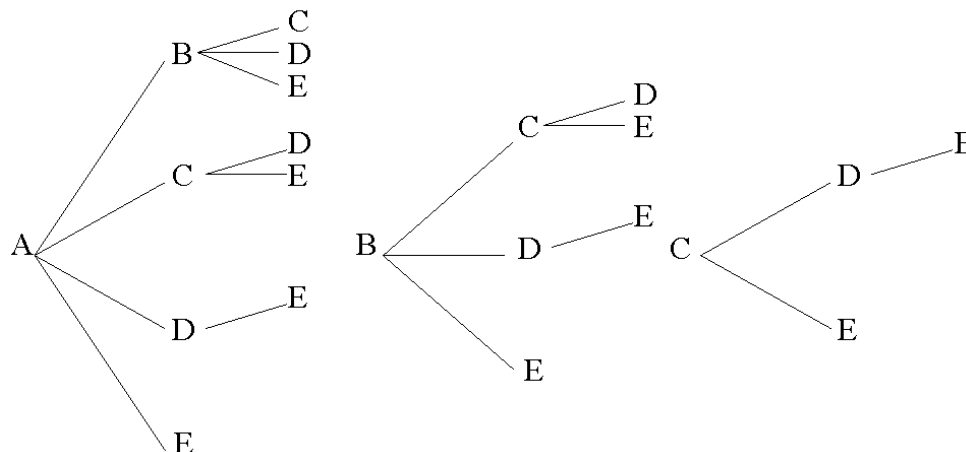
Pour énumérer les ensembles de trois chevaux correspondant aux dix façons de désigner les trois chevaux arrivant les premiers, nous pouvons énumérer d'abord les ensembles de deux chevaux correspondant aux différentes façons de désigner les deux chevaux arrivant les derniers et prendre ensuite les complémentaires de ces ensembles par rapport à l'ensemble des cinq chevaux :

(A-B) (A-C) (A-D) (A-E)
 (B-C) (B-D) (B-E)
 (C-D) (C-E)
 (D-E)

Les complémentaires sont :

(C-D-E) (B-D-E) (B-C-E) (B-C-D)
 (A-D-E) (A-C-E) (A-C-D)
 (A-B-E) (A-B-D)
 (A-B-C)

Chaque tiercé sans ordre d'arrivée correspond aussi à un chemin comportant trois termes des arbres suivants :



Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$.

On appelle **combinaison de p éléments de E, toute partie** (i.e. sous-ensemble) **de E à p éléments.**

On dit aussi **combinaison de p éléments parmi n.**

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons énuméré les combinaisons de deux lettres, puis de trois lettres, choisies parmi les cinq lettres A, B, C, D, E.

Deux combinaisons distinctes ne contiennent pas les mêmes éléments.

Proposition :

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est noté C_n^p , ce nombre est donné

par : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Il est aussi noté $\binom{n}{p}$.

Exemple II.2 :

$$C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 10 \quad C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$$

$$C_n^1 = \frac{n}{1!} = n$$

$C_n^n = \dots = 1$ (en effet, il y a une seule façon de choisir n éléments parmi n éléments.)

Il y a un seul sous-ensemble à 0 élément d'un ensemble de n éléments : c'est $\emptyset$, nous posons donc $C_n^0 = 1$ (remarquons que pour $p = 0$, l'expression $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ vaut 1 grâce à la convention $0! = 1$).

☺ Exercice II.4:

- Exprimer en fonction de n les valeurs de $C_n^1, C_n^2, C_n^{n-1}, C_n^{n-2}$.
- Calculer l'expression $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$.

Propriétés des nombres C_n^p :

On a les relations suivantes pour $0 \leq p \leq n$:

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad (\text{Triangle de Pascal})$$

$$C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} \quad \text{pour } 1 \leq p \leq n \quad \text{et} \quad C_n^p = \frac{A_n^k}{A_p^k} C_{n-k}^{p-k} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq p \leq n$$

A propos du triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal donne les nombres C_n^p lorsque, n étant fixé, p varie de 0 à n :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

...

...

C_0^0

$C_1^0 \quad C_1^1$

$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$

$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$

$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$

...

...

La ligne n et la colonne p donnent le nombre C_n^p (en numérotant les lignes et les colonnes à partir de 0).

La troisième égalité de la propriété précédente montre que chaque élément est égal à la somme de l'élément situé au-dessus, et de l'élément situé à gauche de ce dernier ; par exemple : $C_5^3 = C_4^2 + C_4^3$

Cela permet de calculer de proche en proche les éléments des tableaux ci-dessus.

Dans ces tableaux les termes de la première colonne valent $C_n^0 = 1$ et ceux de la diagonale $C_n^n = 1$.

☺ Exercice II.5:

Compléter les lignes 6 et 7 des tableaux précédents.

Proposition : Formule du binôme

Pour deux réels ou complexes x et y et un entier n on a la relation : $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k$

☺ Exercice II.6:

Donner les développements de $(x + y)^4$, $(x + y)^5$, $(a + b)^6$ et $(a - b)^4$.

☺ Exercice II.7:

- 1- Dans une classe de 10 élèves, de combien de façons peut-on choisir 3 élèves pour s'occuper de la bibliothèque ?
- 2- Dans une classe de 10 élèves, de combien de façons peut-on choisir 3 élèves pour tenir respectivement les rôles d'Harpagon, Cléante et Valère dans l'Avare ?
- 3- Une classe se compose de 10 garçons et de 7 filles ; de combien de façons peut-on choisir 3 garçons pour tenir les rôles d'Harpagon, Cléante et Valère, et 2 filles pour tenir les rôles de Frosine et Marianne ?
- 4- De combien de façons peut-on choisir trois cartes dans un jeu de 32 cartes ?
- 5- De combien de façons peut-on choisir 3 cartes dans un jeu de 32 cartes de manière que :
 - a) ces 3 cartes soient 2 rouges et 1 pique
 - b) ces 3 cartes contiennent 2 rois et 1 carreau

☺ Exercice II.8:

Dans un jeu de 32 cartes :

- a) Combien y a-t-il de mains de 5 cartes (c'est-à-dire de paquets de 5 cartes) ?
- b) Combien y en a-t-il contenant exactement 2 coeurs ?
- c) Combien y en a-t-il contenant au moins 1 roi ?

☺ **Exercice II.9:**

- 1- Le loto : On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles ?
- 2- Le poker : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard
 - a) Quel est le nombre de mains total ?
 - b) Quel est le nombre de mains qui contiennent exactement 3 as ?
 - c) Quel est le nombre de mains qui contiennent au moins 3 as ?
- 3- Quel est le nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes ?
- 4- Tirages simultanés : une urne contient 10 boules numérotées 0, 1, ..., 10. On en tire simultanément trois. Combien de tirages différents ?

☺ **Exercice II.10:**

- 1- Combien y a-t-il de nombres formés de 4 chiffres différents choisis parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ?
- 2- Dans une collectivité composée de 5 hommes et de 3 femmes, combien peut-on former de comités composés :
 - a) de 3 hommes et de 2 femmes ?
 - b) de 5 personnes dont au moins 3 hommes ?
- 3- Une boîte contient 5 boules blanches et 3 boules rouges ; de combien de façons peut-on choisir deux boules :
 - a) blanches ?
 - b) rouges ?
 - c) de couleurs différentes ?
- 4- De combien de façons peut-on choisir 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, de manière que ces 5 cartes contiennent
 - a) les 4 as ?
 - b) 2 as et 2 rois ?
 - c) au moins un as ?
- 5- Une boîte contient 5 boules blanches et 3 boules rouges.
 - a) de combien de façons peut-on choisir 3 boules dont deux sont blanches et l'autre rouge ?
 - b) de combien de façons peut-on extraire successivement de la boîte une boule blanche, une boule rouge et une boule blanche ?