

**COURS HARMONISES**  
**De**  
**MATHEMATIQUES GENERALES**  
  
**BT 2**

## **Cours de Mathématiques des BT2**

### **PROGRAMME**

#### Partie A ANNALYSE

- ÉQUATIONS – INÉQUATIONS – SYSTÈMES
- FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE
- LIMITES-CONTINUITÉ-DÉRIVATION
- ETUDE DE FONCTION
- SUITES NUMÉRIQUES

#### Partie B ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

- BARYCENTRE
- TRIGONOMÉTRIE
- TRANSFORMATIONS DU PLAN

#### Partie C STATISTIQUES

- STATISTIQUE A UNE VARIABLE

### **CHAPITRE 1 : ÉQUATIONS – INÉQUATIONS – SYSTÈMES LINEAIRES**

#### **Objectifs pédagogiques**

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- résoudre dans  $\mathbb{R}$  une équation du second degré à l'aide du discriminant et discuter lorsqu'elle comporte un paramètre ;
- Trouver un zéro d'un polynôme du second degré connaissant l'autre en utilisant la somme ou le produit ;
- Déterminer deux nombres réels dont on connaît la somme et le produit,
- résoudre dans  $\mathbb{R}$  des équations et inéquations se ramenant au second degré (équations et inéquations bicarrées ou de degré 3),
- résoudre un système de deux équations du 1<sup>er</sup> degré dans  $\mathbb{R}^2$  par la méthode de Cramer et discuter lorsqu'il comporte un paramètre,
- résoudre algébriquement une équation, un système de deux équations, un système de trois équations linéaires dans  $\mathbb{R}^3$ ,
- Mettre un problème en équation et le résoudre,

#### **I. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS**

##### **1) Fonctions polynômes du second degré**

##### **a) Définition**

On appelle polynôme du second degré, tout polynôme de la forme  $ax^2 + bx + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels tel que  $a \neq 0$ .

**Exemple1 :**  $P(x) = -5x^2 + 4x + 1$  ;  $Q(x) = 4x^2 + 12x + 9$  ;  $R(x) = 3x^2 + 4x + 5$ .

**Remarque :** La courbe représentative d'un polynôme du second degré  $P(x) = ax^2 + bx + c$ ,

( $a \neq 0$ ), est une **parabole** de sommet  $S\left(\frac{-b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$ .

**b) Forme canonique d'un polynôme du second degré**

$P(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$

$$\begin{aligned} &= a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \quad \text{Or} \quad \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

D'une manière générale, tout polynôme  $P(x) = ax^2 + bx + c$  du second degré a pour forme canonique

$$P(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

**Exercice 1.1 :**

Ecrire la forme canonique, factoriser lorsque cela est possible et déterminer les racines éventuelles des polynômes suivants :  $P(x) = 5x^2 - 4x - 1$  ;  $Q(x) = 4x^2 - 4x + 1$  ;  $T(x) = 3x^2 + 4x + 2$

**c) Discriminant d'un polynôme du second degré**

On appelle discriminant d'un polynôme du second degré  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , ( $a \neq 0$ ) le nombre réel noté  $\Delta$  tel que  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Exercice 1.2 :**

Déterminer le discriminant de chacun des polynômes suivants :

$P(x) = 5x^2 - 4x - 1$  ;  $Q(x) = 4x^2 - 4x + 1$  ;  $T(x) = 3x^2 + 4x + 2$

**2) Résolution d'une équation du second degré:**

❖ Soit le polynôme du second degré  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , ( $a \neq 0$ )

Le discriminant de  $P$  est  $\Delta = b^2 - 4ac$

- si  $\Delta < 0$ , alors  $P$  n'admet pas de racine réelle et n'est pas factorisable.
- si  $\Delta = 0$ , alors  $P$  admet une racine double  $x_0$  telle que  $x_0 = \frac{-b}{2a}$  et  $P(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$ .
- si  $\Delta > 0$ , alors  $P$  admet deux racines distinctes  $x_1$  et  $x_2$  telles que  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

❖ Résoudre l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ , ( $a \neq 0$ ), équivaut à déterminer les racines du polynôme du second degré  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , ( $a \neq 0$ ).

**Exercice 1.3 :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$x^2 - 4x - 5 = 0$  ;  $2x^2 - 12x + 18 = 0$  ;  $-x^2 + 5x - 4 = 0$  ;  $2x^2 - x + 3 = 0$ .

**3) Signe d'un polynôme du second degré**

❖ Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  et  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

On utilise l'un des tableaux ci-dessous :

- si  $\Delta < 0$ , alors  $P(x) = ax^2 + bx + c$  n'admet pas de racine.

Le signe de  $ax^2 + bx + c$  est celui de  $a$  comme l'indique le tableau suivant :

|                 |            |           |
|-----------------|------------|-----------|
| x               | $-\infty$  | $+\infty$ |
| $ax^2 + bx + c$ | signe de a |           |

- si  $\Delta = 0$ , alors  $P(x) = ax^2 + bx + c$  admet une racine double  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ .

Le signe de  $ax^2 + bx + c$  est celui de  $a$  comme l'indique le tableau suivant :

| x               | $-\infty$  | $\frac{-b}{2a}$ | $+\infty$  |
|-----------------|------------|-----------------|------------|
| $ax^2 + bx + c$ | signe de a |                 | signe de a |

- si  $\Delta > 0$ , alors  $P(x) = ax^2 + bx + c$  admet deux racines distinctes  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

En supposant que  $x_1 < x_2$ , le signe de  $ax^2 + bx + c$  est donné par le tableau suivant :

| x               | $-\infty$  | $x_1$ | $x_2$           | $+\infty$  |
|-----------------|------------|-------|-----------------|------------|
| $ax^2 + bx + c$ | signe de a |       | signe de $(-a)$ | signe de a |

- ❖ Toute inéquation du type  $ax^2 + bx + c \leq 0$  ou  $ax^2 + bx + c \geq 0$  ( $a \neq 0$ ) est appelée inéquation du second degré. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  une telle inéquation revient à étudier le signe de  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) et à donner l'ensemble solution suivant l'inégalité ( $\leq$ ;  $\geq$ ;  $<$  ou  $>$ ) utilisée.

#### Exemple 1.4 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

(I1):  $-5x^2 + 4x + 1 \leq 0$ ; (I2):  $4x^2 + 12x + 9 > 0$ ; (I3):  $3x^2 + 4x + 5 \geq 0$ ;

(I4):  $-5x^2 + 4x + 1 < 0$ ; (I5):  $4x^2 + 12x + 9 \leq 0$ ; (I6):  $3x^2 + 4x + 5 < 0$

#### 4) Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

- Soient  $x_1$  et  $x_2$  les solutions de l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ).  
On a alors :  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$  et  $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ .
- S'ils existent deux nombres réels  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $S = x_1 + x_2$  et  $P = x_1 \times x_2$ , alors  $x_1$  et  $x_2$  sont solutions de l'équation  $x^2 - Sx + P = 0$ .

#### Exercice 1.5

1. Déterminer deux nombres réels, s'ils existent, dont la somme  $S$  et le produit  $P$  vérifient :

a).  $S = 23$  et  $P = 132$  ; b).  $S = 1$  et  $P = \frac{5}{36}$ .

2. Sans résoudre l'équation, déterminer la somme  $S$  et le produit  $P$  des solutions des équations suivantes : (E1) :  $2x^2 - 5x - 3 = 0$  ;

(E2) :  $3x^2 - x - 10 = 0$  ; (E3) :  $-4x^2 - x + 5 = 0$ .

#### 5) Exemple d'équation dépendant d'un paramètre réel

#### Exercice 1.6

Soit l'équation  $(E_m) : x \in \mathbb{R}, (2m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m = 0$ ,  $m$  étant un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de  $m$  l'équation  $(E_m)$  est-elle du 1<sup>er</sup> degré ? En donner les solutions correspondantes.

2.a. Pour quelles valeurs de  $m$  l'équation  $(E_m)$  est-elle du second degré ?

b. Déterminer pour de telles valeurs de  $m$ , le discriminant  $\Delta$ , la somme  $S$  et le produit  $P$  d'éventuelles solutions.

3. a. Pour quelles valeurs de  $m$  l'équation  $(E_m)$  admet-elle deux solutions égales ? Déterminer ces solutions.

b. Pour quelles valeurs de  $m$  l'équation  $(E_m)$  admet-elle deux solutions de signes contraires.

c. Pour quelles valeurs de  $m$  l'équation  $(E_m)$  admet-elle deux solutions distinctes de même signe.

4. Discuter suivant les valeurs de  $m$  le nombre et le signe des solutions de l'équation ( $E_m$ ).

### 6) Équation et inéquations de degré 3

#### Exercice 1.7

On considère le polynôme  $P$  défini par  $P(x) = -x^3 + 7x - 6$

- 1) Calculer  $P(1)$  et conclure.
- 2) En déduire que  $P(x)$  peut s'écrire sous la forme  $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels à déterminer.
- 3) On pose  $Q(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b, \text{ et } c$  sont des réels déterminés en 2). Factoriser  $Q(x)$ .
- 4) Factoriser  $P(x)$  puis résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $P(x) = 0$
- 5) Etudier le signe de  $P(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- 6) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation  $P(x) \geq 0$

#### Exercice 1.8

Soit  $P$  le polynôme défini par  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

- 1) Montrer que le réel  $\alpha = 3$  est un zéro de  $P(x)$ .
- 2) Déterminer trois nombres réels  $a, b, \text{ et } c$  tels que  $P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$
- 3) On pose  $Q(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b, \text{ et } c$  sont des réels déterminés en 2). Factoriser  $Q(x)$ .
- 4) Factoriser  $P(x)$  puis résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $P(x) = 0$
- 5) Etudier le signe de  $P(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- 6) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation  $P(x) < 0$

### 7) Equations et inéquations bicarrées

Toute équation de la forme  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) est appelée **équation bicarrée**. Pour résoudre une telle équation, on la ramène au second degré  $aX^2 + bX + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) en posant  $X = x^2$ . On calcule  $x$  en prenant les valeurs positives de  $X$ .

#### Exercice 1.9

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

- (a)  $2x^4 - 21x^2 + 10 = 0$  ; (b)  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$  ; (c)  $4x^4 - 20x^2 + 25 = 0$   
 (d)  $x^4 - 2x^2 - 15 \geq 0$  ; (e)  $3x^4 - 5x^2 + 22 < 0$

## II-SYSTEMES D'EQUATIONS

### 1) Système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Il se présente généralement sous la forme suivante :  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  où  $x$  et  $y$  sont les inconnues,  $a, b, c, a', b' \text{ et } c'$  sont les coefficients réels.

Il existe plusieurs méthodes de résolutions telles les méthodes de substitution, de combinaison, de comparaison, l'utilisation du graphique (vues en 3<sup>ème</sup>)

#### Exercice 1.10

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes d'équations suivantes :

- a)  $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$  ; b)  $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -\frac{1}{3}x + y = -\frac{4}{3} \end{cases}$  ; c)  $\begin{cases} -2x + 3y = 7 \\ x - \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$

#### Exercice 1.11

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$ , les systèmes suivants :

- a)  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = 17 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x + 12y = 17 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ -5x + 10y = -20 \end{cases}$

### 2). Système de 3 équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Il est sous la forme  $(\Sigma) \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$

**Méthode de substitution** : On exprime l'une des inconnues en fonction des autres dans l'une des équations puis on remplace cette inconnue par son expression dans les deux équations restantes. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues que l'on sait résoudre.

**Exercice 1.12**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  les systèmes suivants par la méthode de substitution.

a)  $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ -4x + y - 5z = -4 \end{cases}$  ; b)  $\begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ x - 2y + 3z = -3 \\ -2x + 3y - z = 4 \end{cases}$  ; c)  $\begin{cases} 3x + 2y + z = 9 \\ x - 4y + 2z = 8 \\ -4x + y - 5z = -23 \end{cases}$

**Méthode de Gauss**

Elle consiste à transformer le système  $(\Sigma)$  ci-dessus en un système dit triangulaire sous la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ b_1y + c_1z = d_1 \\ c_2z = d_2 \end{cases}$$

**Exercice 1.13**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  les systèmes suivants par la méthode de Gauss.

a)  $\begin{cases} x - 2y - 3z = -9 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y - z = 8 \end{cases}$  d)  $\begin{cases} 2x - y - 2z = 6 \\ x + y - z = 1 \\ x - 5y - z = 9 \end{cases}$

**3. Problèmes concrets dont la résolution se ramène à celle d'un système d'équation linéaire**

**Exercice 1.14**

Une coopérative décide d'acheter trois terrains. Les terrains 1, 2, 3 coûtent respectivement 942.000F, 2.374.000F et 1.004.000F. Les membres de la coopérative sont répartis en trois groupes A, B et C. Le tableau ci-dessous indique ce que chaque membre de chaque groupe a payé pour les trois terrains :

|           | A       | B       | C       |
|-----------|---------|---------|---------|
| Terrain 1 | 9.000F  | 12.000F | 21.000F |
| Terrain 2 | 12.000F | 35.000F | 80.000F |
| Terrain 3 | 7.000F  | 13.000F | 31.000F |

- 1- Quel est le nombre de membre de chaque groupe ?
- 2- Quel est le nombre de membre de cette coopérative ?

**CHAPITRE 2 : FONCTION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE**

**Objectifs pédagogiques**

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Déterminer l'ensemble de définition des fonctions usuelles,
- Montrer qu'une fonction donnée est paire, ou impaire,
- Montrer qu'une droite donnée est un axe de symétrie à la courbe d'une fonction donnée,
- Montrer qu'un point donné est un centre de symétrie à la courbe d'une fonction donnée,

**1. Ensemble de définition**

Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

On appelle ensemble de définition de  $f$  noté  $D_f$  l'ensemble des éléments de  $A$  qui ont une image par  $f$  dans  $B$ . On écrit :  $D_f = \{x \in A / f(x) \text{ existe}\}$ .

- $f$  est une fonction polynôme :  $D_f = \text{ensemble de départ}$
- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  :  $D_f = \{x \in A / Q(x) \neq 0\}$
- $f(x) = \sqrt{g(x)}$  :  $D_f = \{x \in A / g(x) \geq 0\}$

### Exercice 2.1

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

(a)  $f(x) = \sqrt{x+3}$     (b)  $f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-2}$     (c)  $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$

### 2. Parité d'une fonction

Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $D_f$ ,  $T$  un nombre réel.

- $f$  est dite **paire** si, pour tout  $x$  élément de  $D_f$ ,  $-x$  est élément de  $D_f$  et  $f(-x) = f(x)$ .

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

- $f$  est dite **impaire** si, pour tout  $x$  élément de  $D_f$ ,  $-x$  est élément de  $D_f$  et  $f(-x) = -f(x)$ .

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

### Exercice 2.2

Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

(a)  $f(x) = 2x^3 - 5x$     (b)  $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-1}$     (c)  $f(x) = 3x^2 + x$     (d)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$     (e)  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

### 3. Éléments de symétrie

#### a. Axe de symétrie

Soit  $f$  une fonction numérique d'ensemble de définition  $D_f$  et de représentation graphique  $C_f$ . La droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie de  $C_f$  si et seulement si l'une des conditions suivantes

est vérifiée :  $\begin{cases} \forall x \in D_f, 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

### Exercice 2.3

Démontrer, dans chaque cas, que la droite  $(D)$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$ .

(a)  $f(x) = x^2 + 4x + 3$  et  $(D) : x = -2$  ;    (b)  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$  et  $(D) : x = 1$   
 (c)  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  et  $(D) : x = 1$

#### b. Centre de symétrie

Soit  $f$  une fonction numérique d'ensemble de définition  $D_f$  et de représentation graphique  $C_f$ . Soit  $I(a; b)$  un point du plan. On dit que le point  $I(a; b)$  est un centre de symétrie de  $C_f$  si et seulement si

l'une des conditions suivantes est vérifiée :  $\begin{cases} \forall x \in D_f, 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$

### Exercice 2.4

Démontrer, dans chaque cas, que le point  $\Omega$  est un centre de symétrie à  $(C_f)$ .

(a)  $f(x) = \frac{3x}{x+1}$  et  $\Omega(-1; 3)$ ,    (b)  $f(x) = (x-1)^3 + 1$  et  $\Omega(1; 1)$   
 (c)  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3}$  et  $\Omega(1; 0)$

## CHAPITRE 3 : LIMITES ET CONTINUITE D'UNE FONCTION

### Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours l'élève doit être capable de :

- Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, d'écrire l'équation d'éventuelles des asymptotes à la courbe représentative d'une fonction donnée,

- étudier la continuité d'une fonction en un point  $x_0$  ou sur un intervalle donné,

## **I/ Limite d'une fonction en l'infini**

### **1/ Activité**

a) Lorsqu'on élève un grand nombre au carré, on obtient un grand nombre. En d'autre terme, on dit : « lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  alors  $x^2$  tend vers  $+\infty$  » et on note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ .

En détaille, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (+\infty)^2 = +\infty$ .

De même, en  $-\infty$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\infty)^2 = +\infty$ .

b) Avec le même raisonnement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (+\infty)^3 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\infty)^3 = -\infty$ .

c) Lorsqu'on divise un nombre  $R$  par un très grand nombre, le résultat est proche de zéro. Et, on dit « lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , alors  $\frac{R}{x}$  tend vers 0 ». On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R}{x} = 0$ .

En généralisant, on dit en terme de limite  $\frac{\text{Réel}}{\text{Infini}} = \text{zéro}$  avec  $\text{Infini} = +\infty$  ou  $-\infty$ .

### **2/. Limite en l'infini de fonctions élémentaires**

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = k$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ .
- e)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ;
- g)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

### **3/. Limite en l'infini des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles**

a) La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini de son monôme de plus haut degré.

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$ .

b) La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

**Exercice 3.1** : Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^2 - 3x + 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 - 3x + 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 1}$$

## **II) Limite d'une fonction en un point $x_0$**

### **1) Limite en $x_0$ d'une fonction définie en $x_0$**

- Soit  $f$  une fonction définie en  $x_0$ . Si  $f$  admet une limite en  $x_0$  alors cette limite est égale à  $f(x_0)$  c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- Lorsqu'une fonction admet une limite en  $x_0$ , cette limite est unique.

- La limite en n'importe quel point d'une fonction constante est égale à cette constante

### Exercice 3.2

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction  $f$  en  $x_0$

- $f(x) = -x^2 + 4x - 1$  ,  $x_0 = 1$
- $f(x) = -4x^2 + x$  ;  $x_0 = -1$
- $f(x) = \frac{3x}{x+1}$  ;  $x_0 = 1$
- $f(x) = \frac{2x-5}{4x+1}$  ;  $x_0 = 0$

### 2) Limites-en $x_0$ d'une fonction non définie en $x_0$

Soit  $f$  une fonction rationnelle non définie en  $x_0$  ( $x_0$  annule le dénominateur de  $f$ )

- Si le numérateur en  $x_0$  est non nul alors calculer la limite de  $f$  en  $x_0$  revient à calculer la limite de  $f$  à gauche en  $x_0$  ou la limite de  $f$  à droite en  $x_0$ .
  - On étudie le signe du dénominateur
  - En terme de limite, retenons que  $\frac{\text{réel}}{\text{zéro}} = \infty$ . Il s'agira de  $-\infty$  ou  $+\infty$  suivant le signe du numérateur et celui du dénominateur.
- Si le numérateur en  $x_0$  est nul alors la limite de  $f$  en  $x_0$  est égale à  $\frac{\text{zéro}}{\text{zéro}}$  qui est une indétermination. On lève cette indétermination en mettant  $(x - x_0)$  en facteur au numérateur et au dénominateur, puis on simplifie et on calcule aisément la limite demandée.
- **Remarque :** En général, on calcule les limites à gauche et à droite en  $x_0$  d'une fonction  $f$  lorsque  $f$  n'est pas définie en  $x_0$  ou lorsque  $f$  est définie par intervalles dont  $x_0$  est un point de raccordement.

### Exercice 3.3

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction  $f$  à gauche et à droite en  $x_0$

- $f(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$  ;  $x_0 = -2$       (2)  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-3}$  ;  $x_0 = 3$
- $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-4}$  ;  $x_0 = 2$       (4)  $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$  ;  $x_0 = 0$

### Exercice 3.4

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction  $f$  en  $x_0$

- $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$  ;  $x_0 = 3$  ;      2)  $g(x) = \frac{1-x^2}{x-1}$  ;  $x_0 = 1$

### Exercice 3.5

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction  $f$  en  $x_0$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  ;  $x_0 = 2$
- $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x \in ]-\infty; 1] \\ 3x & \text{si } x \in ]1; +\infty[ \end{cases}$  ;  $x_0 = 1$

## III) Calculs de limites

### Limite de la somme de deux fonctions

|                                                                                                                     |                       |                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------|
| f et g sont des fonctions ; $x_0, l$ et $l'$ des nombres réels. Lorsque $x$ tend vers $+\infty, -\infty$ ou $x_0$ , |                       |                               |
| si f a pour limite                                                                                                  | et si g a pour limite | alors $(f + g)$ a pour limite |
| $+\infty$                                                                                                           | $+\infty$             | $+\infty$                     |

|           |           |                 |
|-----------|-----------|-----------------|
| $+\infty$ | $l'$      | $+\infty$       |
| $L$       | $l'$      | $l + l'$        |
| $-\infty$ | $l'$      | $-\infty$       |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$       |
| $-\infty$ | $+\infty$ | indétermination |

**Limite du produit de deux fonctions**

|                                                                                                                       |                       |                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|--------------------------|
| f et g sont des fonctions ; $x_0$ , l et $l'$ des nombres réels. Lorsque x tend vers $+\infty$ , $-\infty$ ou $x_0$ , |                       |                          |
| si f a pour limite                                                                                                    | et si g a pour limite | alors (fg) a pour limite |
| $+\infty$                                                                                                             | $+\infty$             | $+\infty$                |
| $+\infty$                                                                                                             | $l'; l' > 0$          | $+\infty$                |
| $+\infty$                                                                                                             | $l'; l' < 0$          | $-\infty$                |
| $+\infty$                                                                                                             | $-\infty$             | $-\infty$                |
| $L$                                                                                                                   | $l'$                  | $l \times l'$            |
| $-\infty$                                                                                                             | $+\infty$             | $-\infty$                |
| $-\infty$                                                                                                             | $l'; l' > 0$          | $-\infty$                |
| $-\infty$                                                                                                             | $l'; l' < 0$          | $+\infty$                |
| $-\infty$                                                                                                             | $-\infty$             | $+\infty$                |
| $0$                                                                                                                   | $+\infty$             | indétermination          |

**Limite du quotient de deux fonctions**

|                                                                                                                       |                       |                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|------------------------------------------------|
| f et g sont des fonctions ; $x_0$ , l et $l'$ des nombres réels. Lorsque x tend vers $+\infty$ , $-\infty$ ou $x_0$ , |                       |                                                |
| si f a pour limite                                                                                                    | et si g a pour limite | alors $\left(\frac{f}{g}\right)$ a pour limite |
| $L$                                                                                                                   | $l'; l' \neq 0$       | $\frac{l}{l'}$                                 |
| $l; l \neq 0$                                                                                                         | $+\infty$             | $0$                                            |
| $l; l \neq 0$                                                                                                         | $-\infty$             | $0$                                            |

|               |              |                         |
|---------------|--------------|-------------------------|
| $l; l \neq 0$ | 0            | $(\text{signe})^\infty$ |
| 0             | 0            | Indétermination         |
| $+\infty$     | $l'; l' > 0$ | $+\infty$               |
| $+\infty$     | $l'; l' < 0$ | $-\infty$               |
| $-\infty$     | $l'; l' > 0$ | $-\infty$               |
| $-\infty$     | $l'; l' < 0$ | $+\infty$               |
| $\infty$      | $\infty$     | indétermination         |

### Formes indéterminées

On identifie à partir des tableaux de limites ci-dessus **quatre formes indéterminées**, à savoir :

$$+\infty - \infty ; \quad 0 \times \infty ; \quad \frac{0}{0} ; \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Ces formes ne permettent pas de se prononcer sur les résultats de calculs de limite. Il faut alors trouver une autre méthode pour arriver au résultat. Si on y parvient, on dit qu'on « a levé l'indétermination ».

### IV) Notion d'asymptote

#### 1) Asymptote verticale

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ), alors la droite (D) :  $x = x_0$  est une asymptote verticale à  $(C_f)$ .

Le réel  $x_0$  est souvent une borne ouverte de  $D_f$ .

#### 2) Asymptote horizontale

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$  ( $b \in \mathbb{R}$ ), alors la droite (D) :  $y = b$  est une asymptote horizontale à  $(C_f)$  en  $-\infty$  ou en  $+\infty$ .

#### 3) Asymptote oblique

Soit (D) :  $y = ax + b$ . Lorsque  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - y] = 0$ , alors la droite (D) :  $y = ax + b$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  en  $-\infty$  ou en  $+\infty$ .

### Position relative de $(C_f)$ et (D) :

- Si  $f(x) - y > 0$  alors la courbe  $(C_f)$  est au-dessus de (D).
- Si  $f(x) - y < 0$  alors la courbe  $(C_f)$  est au-dessous de (D).

### Exercice 3.6

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{-x^2+4x}{x-1}$  et  $(C_f)$  la courbe de  $f$ .

- 1) Calculer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Montrer que les droites  $(\Delta)$  :  $x = 1$  et (D) :  $y = -x + 3$  sont des asymptotes à  $(C_f)$ .
- 3) Etudier la position relative de  $(C_f)$  et (D).

### Exercice 3.7

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2-1}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative.

- 1) Calculer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Préciser les différentes asymptotes de  $(C_f)$ .

### Exercice 3.8

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{-x^2+3x}{x-2}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative.

- 1) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tel que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
- 2) En déduire une équation de l'asymptote oblique à la courbe  $(C_f)$

### **V) Continuité d'une fonction**

#### **1) Continuité d'une fonction en un point d'abscisse $x_0$**

- Une fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- Si  $f$  est continue en  $x_0$  alors elle est définie en  $x_0$ . Mais la réciproque est fausse.

#### **Exercice 3.9**

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction  $f$  en  $x_0$

- a)  $f(x) = 3x^2 - 5x - 7$  ;  $x_0 = -1$
- b)  $f: \begin{cases} f(x) = x^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  ;  $x_0 = 2$
- c)  $f: \begin{cases} f(x) = 2x^2 - 1 & \text{si } x \in ]-\infty; 1] \\ f(x) = 3x & \text{si } x \in ]1; +\infty[ \end{cases}$  ;  $x_0 = 1$

#### **2) Continuité sur un intervalle**

Soient  $I$  un intervalle inclus dans  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ .  $f$  est continue sur  $I$  si  $f$  est continue en tout élément de  $I$ .

#### **Propriété**

- Toute fonction polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.
- La fonction valeur absolue et toute fonction constante sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- Les fonctions  $x \mapsto \sin x$  et  $x \mapsto \cos x$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

### **CHAPITRE 4 : DERIVATION ET ETUDE DE FONCTIONS**

#### **Objectifs pédagogiques**

A la fin de ce cours l'élève doit être capable de :

- étudier la dérivabilité d'une fonction en un point  $x_0$  ou sur un intervalle et écrire une équation de la tangente à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse  $x_0$ ,
- Calculer l'expression de la fonction dérivée d'une fonction, étudier son sens de variation et établir son tableau de variation.
- Étudier les variations d'une fonction polynôme et tracer sa courbe représentative,
- Étudier les variations d'une fonction rationnelle et tracer sa courbe représentative,
- Étudier les variations d'une fonction  $f$  donnée par intervalles et tracer sa courbe représentative,
- Étudier les variations d'une fonction  $f$  contenant une valeur absolue et tracer sa représentation graphique,

#### **I) Dérivabilité en un point d'abscisse $x_0$**

##### **1) Nombre dérivé d'une fonction en $x_0$**

Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $D_f$  contenant un réel  $x_0$ .

- On appelle taux de variation de  $f$  en  $x_0$ , la fonction notée  $T_{x_0}$  et définie sur

$$D_f - \{x_0\} \text{ par } T_{x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  est finie. Cette limite est appelée le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  et notée  $f'(x_0)$ .

##### **2) Equation de la tangente au point d'abscisse $x_0$**

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors la courbe  $(Cf)$  admet une tangente  $(T)$  au point d'abscisse  $x_0$ , dont le coefficient de directeur est  $f'(x_0)$ . Son équation réduite est donnée par  $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

### Exercice 4.1

Dans chacun des cas suivants, en utilisant la définition, montrer que la fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$  et déterminer une équation de la tangente à  $(Cf)$  au point d'abscisse  $x_0$

- $f(x) = x^2 - x$ ,  $x_0 = -1$
- $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ ,  $x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x_0 = 1$

### 3) Propriété

Si une fonction est dérivable en  $x_0$  alors elle est continue en  $x_0$ . La réciproque est fausse.

## II) Dérivabilité sur un intervalle

### 1) Définitions et propriétés

- Lorsque  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$ , on dit que  $I$  est l'ensemble de dérivabilité de  $f$  c-à-d  $I$  est l'ensemble de définition de la fonction dérivée  $f'$ .
- Toute fonction polynôme est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition
- Les fonctions  $x \mapsto \sin x$  et  $x \mapsto \cos x$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ ,
- La fonction  $x \mapsto |x|$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ ,
- La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

### 2) Détermination de fonctions dérivées

#### a) Fonction dérivée

Soient  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $D_f$  et  $I$  l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .

La fonction dérivée est :  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$

#### b) Remarque

La dérivée de la dérivée  $f'$  est notée  $f''$  ou  $f^{(2)}$  et appelée dérivée seconde

### c) Dérivées des fonctions élémentaires

| Fonction $f(x)$                               | Dérivée $f'(x)$               |
|-----------------------------------------------|-------------------------------|
| $f(x) = c$ ,<br>$c \in \mathbb{R}$            | $f'(x) = 0$                   |
| $f(x) = x$                                    | $f'(x) = 1$                   |
| $f(x) = x^n$ ,<br>$n \in \mathbb{R}^*$        | $f'(x) = nx^{n-1}$            |
| $f(x) = \frac{1}{x}$                          | $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$      |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}$ , $n \in \mathbb{R}^*$ | $f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$  |
| $f(x) = \sqrt{x}$                             | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |

|                 |                        |
|-----------------|------------------------|
| $f(x) = \sin x$ | $f'(x) = \cos x$       |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\sin x$      |
| $f(x) = \tan x$ | $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ |

### d) Formules de calculs de dérivées

Soient  $U$  et  $V$  deux fonctions

| Fonction $f$                       | Dérivée $f'$                 |
|------------------------------------|------------------------------|
| $f = U + V$                        | $f' = U' + V'$               |
| $f = kU$ ( $k \in \mathbb{R}$ )    | $f' = kU'$                   |
| $f = UV$                           | $f' = U'V + V'U$             |
| $f = \frac{1}{v}$                  | $f' = \frac{-v'}{v^2}$       |
| $f = \frac{u}{v}$                  | $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ |
| $f = U^n$ ( $n \in \mathbb{R}^*$ ) | $f' = nU'U^{n-1}$            |
| $f = \sqrt{U}$                     | $f' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$  |

$$f = \cos U$$

$$f' = -U' \sin U$$

$$f = \sin U$$

$$f' = U' \cos U$$

### Exercice 4.2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction  $f$

(a)  $f(x) = -3x + 1$  (b)  $f(x) = -x^2 + 3x + 1$  (c)  $f(x) = -3x^2 + \frac{1}{2}x - 2$

(d)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x$  (e)  $f(x) = (3x - 2)^3$  (f)  $f(x) = (x^2 - 1)^4$

(g)  $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$

### Exercice 4.3

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de  $f$

(a)  $f(x) = \frac{1}{2x-1}$  (b)  $f(x) = \frac{1-3x}{x+4}$  (c)  $f(x) = \frac{3x^2-x+2}{3x-1}$  (d)  $f(x) = \frac{x^2-3}{5x^2-x-1}$

### 3) Dérivée et sens de variation

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et de dérivée  $f'$ .

- $\forall x \in I, f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$  est strictement décroissante sur  $I$ ,
- $\forall x \in I, f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$  est strictement croissante sur  $I$ ,
- $\forall x \in I, f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$  est constante sur  $I$ .

### 4) Dérivée et extrémum relatif

Soit  $f$  une fonction dérivable sur intervalle  $]a; b[$  et  $x_0$  un élément de  $]a; b[$ .

$f'$  s'annule et change de signe en  $x_0$  si et seulement si  $f$  admet un extrémum relatif en  $x_0$  égal  $f(x_0)$ .

L'extrémum relatif est soit un minimum, soit un maximum.

### 5) Tableau de variation d'une fonction

Le tableau de variation d'une fonction  $f$  est un tableau de synthèse renseignant sur son ensemble de définition, ses limites, le signe de sa dérivée, ses éventuels extrémums, son sens de variation et permet de tracer l'allure de sa courbe.

### Exercice 4.4

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction  $f$  puis dresser son tableau de variation.

(a)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$  (b)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$  (c)  $f(x) = \frac{2x-4}{2x-3}$  (d)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

### III) Etude de fonctions

#### 1) Plan d'étude de sens de variations de $f$

- Ensemble de définition  $D_f$
- Dérivée  $f'$  de  $f$
- Signe de  $f'$  et sens de variation de  $f$

- Ensemble de définition  $D_f$
- limites aux bornes de  $D_f$
- Dérivée  $f'$  de  $f$
- Signe de  $f'$  et sens de variation de  $f$
- Tableau de variation de  $f$

#### 2) Plan d'étude des variations de $f$

#### 4. Représentation des fonctions associées à une fonction $f$

Soient  $C_f$  et  $C_g$  désignent les courbes représentatives respectives de  $f$  et  $g$ . Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a)  $g(x) = -f(x) \Leftrightarrow C_g$  est le symétrique de  $C_f$  par rapport à l'axe des abscisses soit  $C_g = S_{(Ox)}(C_f)$

b)  $g(x) = f(-x) \Leftrightarrow C_g$  est le symétrique de  $C_f$  par rapport à l'axe des ordonnées soit  $C_g = S_{(Oy)}(C_f)$

### Exercice 4.5

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^3 - 3x + 1$

- 1) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition
- 2) Déterminer la dérivée de  $f$  et en déduire le sens de variation de  $f$
- 3) Dresser le tableau de variation de  $f$
- 4) Déterminer les extrémums relatifs de  $f$
- 5) Construire la courbe ( $C_f$ )

**Exercice 4.6**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

- 1) Etudier les variations de  $f$  et Construire la courbe ( $C_f$ )
- 2) Déterminer les coordonnées des points de ( $C_f$ ) où la tangente est parallèle la droite d'équation :  $y = 2x$ .

**Exercice 4.7**

Soit  $f$  la fonction rationnelle définie par  $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$

- a. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition
- b. Préciser l'asymptote verticale à ( $C_f$ )
- c. Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation
- d. Montrer que la droite ( $D$ ):  $y = x + 2$  est asymptote oblique à ( $C_f$ )
- e. Montrer que le point  $A(1 ; 3)$  est centre de symétrie à ( $C_f$ )
- f. Construire la courbe ( $C_f$ )

**Exercice 4.8**

Soit la fonction rationnelle définie par  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

- a. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. En donner une interprétation graphique.
- b. Montrer que la fonction  $f$  est paire. En déduire une interprétation graphique.
- c. Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
- d. Tracer la courbe ( $C_f$ )
- e. Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = -f(x)$  Expliquer comment la courbe la courbe ( $C_g$ ) se déduit-elle de ( $C_f$ ). Tracer ( $C_g$ ) dans le même repère que ( $C_f$ ).

**Exercice 4.9**

Soit la fonction polynôme définie par  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ .

- 1) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation
- 3) Montrer que la droite ( $D$ ) d'équation  $x = 2$  est axe de symétrie à ( $C_f$ )
- 4) Construire la courbe ( $C_f$ )
- 5) Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = f(-x)$ . Tracer ( $C_g$ ) dans le même repère que ( $C_f$ )

**CHAPITRE 5 : SUITES NUMERIQUES**

**Objectifs pédagogiques**

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Calculer les termes d'une suite,
- Établir le sens de variation d'une suite donnée,
- Démontrer qu'une suite définie explicitement est convergente ou divergente
- Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique,
- Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

I) **Généralités**

1) **Définition**

On appelle suite numérique une application définie de  $\mathbb{N}$  ou d'une partie de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{R}$ .

2/. **Termes et indices**

Soit  $I$  l'ensemble de définition d'une suite numérique  $U$ , on a :

$$U: I \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto U(n) = U_n$$

- La suite  $U$  est encore notée  $(U_n)_{n \in I}$  ou plus simplement  $(U_n)$
- $U_n$  est appelé terme d'indice  $n$  ou terme général
- Si  $I = \mathbb{N}$  alors le premier terme de la suite  $(U_n)$  est  $U_0$
- Si  $I = \mathbb{N}^*$  alors le premier terme de la suite  $(U_n)$  est  $U_1$
- On note  $(U_n)_{n \geq n_0}$  la suite de terme général  $U_n$  et de premier terme  $U_{n_0}$

3) **Mode de définition d'une suite**

a) **Une formule explicite.**

Une suite  $(u_n)$  est dite définie par **une formule explicite** lorsqu'il est sous la forme  $u_n = f(n)$  où  $f$  est une fonction numérique ;  $u_n$  est alors le terme général de la suite.

**Exercice 5.1**

On donne  $u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Calculer les trois premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

Calculer  $u_{20}$  et  $u_{100}$ .

b) **Une formule de récurrence**

Une suite  $(u_n)$  est dite définie par **une formule de récurrence** lorsqu'il est sous la forme

$$\begin{cases} u_a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ où } u_a \text{ est le 1}^{\text{er}} \text{ terme donné et } f \text{ est une fonction numérique.}$$

**Exercice 5.2**

On donne la suite  $(u_n)$  définie par  $u_1 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{1-u_n}{2+u_n}$  pour tout  $n \geq 1$ .

Calculer les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

4) **Sens de variation d'une suite**

Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite. Pour étudier le sens de variation de  $(U_n)_{n \in I}$ , on calcule  $U_{n+1} - U_n$  :

- Si pour tout  $n \in I$ ,  $U_{n+1} - U_n \leq 0$  alors la suite  $(U_n)$  est décroissante
- Si pour tout  $n \in I$ ,  $U_{n+1} - U_n \geq 0$  alors la suite  $(U_n)$  est croissante
- Si pour tout  $n \in I$ ,  $U_{n+1} - U_n = 0$  alors la suite  $(U_n)$  est constante

**Exercice 5.3**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = n^2 + 2n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$ . Que pensez-vous du sens de variation de la suite  $(u_n)$  ?

2. a. Déterminer  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$  et en déduire que  $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

**Exercice 5.6 : Etudier** le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = \frac{1}{n+2}$ .

**Exercice 5.7**

On donne la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases}$  Déterminer  $u_0$  pour que cette suite soit constante.

II) **Suites arithmétiques-suites géométriques**

1) **Suites arithmétiques**

2) On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in I}$  est **une suite arithmétique** s'il existe un nombre réel  $r$  tel que pour tout  $n \in I$ ,  $u_{n+1} - u_n = r$ .

On dit alors que  $r$  est la raison de la suite arithmétique  $(u_n)$

**Terme général d'une suite arithmétique**

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $U_a$  ( $a \in \mathbb{N}$ ) et de raison  $r$ . Le terme général de la suite  $(U_n)$  est donné par :

$$U_n = U_a + (n - a)r$$

**Relation entre deux termes d'indices  $n$  et  $p$  tel que  $p \leq n$**

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

**Somme des termes consécutifs**

$$S_n = U_a + U_{a+1} + U_{a+2} + \dots + U_n$$

$$S_n = \frac{\text{nombre de termes}(\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

$$S_n = (n - a + 1) \frac{(U_a + U_n)}{2}$$

$$S_n = (n - a + 1) \frac{(2U_a + (n - a)r)}{2}$$

**3) Suites géométriques**

On dit qu'une suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{I}}$  est **une suite géométrique** s'il existe un nombre réel  $q$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{I}$ ,  $U_{n+1} = qU_n$ .

**Exercice 5.8**

On considère la suite numérique  $U$  définie par  $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1 \end{cases}$

- 1) Calculer  $U_1, U_2, U_3$
- 2) On considère la suite  $V$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $V_n = U_n - 3$ . Démontrer que  $V$  est une suite géométrique. Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en une fonction de  $n$ .
- 3) Exprimez  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 5.9**

On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- 1) Calculer  $U_1, U_2, U_3$
- 2) On pose  $V_n = \frac{1}{U_n}$ , pour tout entier naturel  $n$ . Démontrer que la suite  $(V_n)$  est suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison. Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en une fonction de  $n$ .
- 3) Exprimez  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$  en fonction de  $n$ .

**CHAPITRE 6 : BARYCENTRE DES POINTS PONDERES**

**Objectifs pédagogiques**

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Indiquer la condition d'existence du barycentre de deux, trois points ou  $n$  points
- Démontrer qu'un point est barycentre de deux ou trois points
- Construire le barycentre de  $n$  points ( $n=2;3$ .)
- Démontrer que trois points sont alignés en utilisant les propriétés des barycentres

**I) Barycentre de deux points :**

**1/. Activité**

On dit alors que  $q$  est la raison de la suite géométrique  $(U_n)$

**Terme général d'une suite géométrique**

Soit  $(U_n)$  une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme  $U_a$  ( $a \in \mathbb{N}$ ) et de raison  $q$ . Le terme général de la suite  $(U_n)$  est donné par :

$$U_n = U_a q^{n-a}$$

**Relation entre deux termes d'indices  $n$  et  $p$  tel que  $p \leq n$**

$$U_n = U_p q^{n-p}$$

**Somme des termes consécutifs**

$$S_n = u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \dots + u_n$$

$$S_n = \frac{\text{1er terme}(1 - q^{\text{nombre de termes}})}{1 - q}, \text{ si } q \neq 1$$

$$S_n = U_a \frac{(1 - q^{n-a+1})}{1 - q}, \text{ si } q \neq 1$$

$$S_n = (n - a + 1)U_a, \text{ si } q = 1$$

Soient A et B deux points du plan, a et b des réels.

Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation (E) d'inconnue X un point du plan.

a)  $(E_1): \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = \vec{0}$       b)  $(E_2): 3\overrightarrow{XA} - 2\overrightarrow{XB} = \vec{0}$       c)  $(E_3): a\overrightarrow{XA} + b\overrightarrow{XB} = \vec{0}$

**2/. Définition**

- Soient A et B deux points du plan, a et b des réels.

Si  $a + b \neq 0$  alors il existe un et un seul point G tels que  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ .

- On appelle point pondéré tout couple  $(A, a)$  où A est un point et a un réel. a est appelé coefficient de pondération du point A.
- Soient  $(A, a)$  et  $(B, b)$  deux points pondérés tels que  $a + b \neq 0$ . On appelle barycentre des points pondérés  $(A, a)$  et  $(B, b)$ , l'unique point G du plan vérifiant  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ .  
On note:  $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b)\}$ .

**2) Remarques**

a) Si  $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b)\}$ , alors :

- A, B et G sont alignés
- $G = \text{bar}\{(A, ka); (B, kb)\}$  pour  $k \in \mathbb{R}^*$  (homogénéité du barycentre) : Le barycentre de deux points reste inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.
- Si  $a = b$ , on dit que G est l'isobarycentre de A et B. Dans ce cas, G est alors le milieu du segment  $[AB]$ .

b) Si  $a + b = 0$ , le système  $\{(A, a); (B, b)\}$  n'admet pas de barycentre.

c) A et B étant deux points quelconques du plan, l'ensemble des barycentres de A et B est la droite  $(AB)$ .

**Exercice 6.1**

Soient  $(A, 2)$ ,  $(B, 3)$  et  $(C, -2)$  des points pondérés. Les systèmes  $\{(A, 2); (B, 3)\}$  et  $\{(A, 2); (C, -2)\}$  admettent-ils des barycentres?

**3) Réduction de  $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$**

Pour tout point M du plan, on a :

- Si  $a + b = 0$ , alors  $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = b\overrightarrow{AB}$ ,
- Si  $a + b \neq 0$ , alors  $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b)\}$  et  $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$

**4) Propriétés caractéristiques du barycentre de deux points**

Soit  $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b)\}$ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a)  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
- b)  $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$
- c)  $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$ . Ces égalités permettent chacune en particulier la construction du point G. Ailleurs, elles montrent que les trois points A, B et G sont alignés.

**Exercice 6.2**

Soit IAB un triangle quelconque. Soit  $G = \text{bar}\{(A, 5); (B, 2)\}$  et  $J = \text{bar}\{(I, 3); (G, 1)\}$ , Construire G puis J.

**5) Coordonnées du barycentre de deux points**

Le plan est muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

Si  $A \left( \begin{smallmatrix} x_A \\ y_A \end{smallmatrix} \right)$ ,  $B \left( \begin{smallmatrix} x_B \\ y_B \end{smallmatrix} \right)$  et  $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b)\}$  alors  $G \left( \frac{ax_A + bx_B}{a+b}; \frac{ay_A + by_B}{a+b} \right)$ .

**Exercice 6.3 :** On donne dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$ , les points  $A \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$  et  $B \left( \begin{smallmatrix} -2 \\ -3 \end{smallmatrix} \right)$  tels que  $G = \text{bar}\{(A, 5); (B, -2)\}$ . Déterminer les coordonnées du barycentre G.

**II) Barycentre de trois points :**

### 1) Définition

Soient  $(A, a)$ ,  $(B, b)$  et  $(C, c)$  trois points pondérés tels que  $a + b + c \neq 0$ . On appelle barycentre des points pondérés  $(A, a)$ ,  $(B, b)$  et  $(C, c)$ , l'unique point  $G$  vérifiant  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

On note :  $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$

### 2) Remarques

- Si  $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ , alors  $G = \text{bar}\{(A, ka), (B, kb), (C, kc)\}$  pour  $k \in \mathbb{R}^*$  (homogénéité du barycentre). Le barycentre de trois points reste inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.
- Si  $a = b = c$ , on dit que  $G$  est l'isobarycentre de  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Dans ce cas,  $G$  est alors le centre de gravité du triangle  $ABC$  lorsque  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont non alignés.

### 3) Réduction de $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

Pour tout point  $M$  du plan, on a :

- Si  $a + b + c = 0$ , alors  $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$
- Si  $a + b + c \neq 0$ , alors  $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$  et  $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$

### 4) Propriétés caractéristiques du barycentre de trois points

Soit  $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
  - Pour tout point  $M$  du plan,  $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$
  - $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CG} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{CB}$
- Ces égalités permettent chacune en particulier la construction du point  $G$ .

### 5) Coordonnées du barycentre de trois points

Le plan est muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

Si  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$  et  $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$  alors  $G \left( \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \right)$ .

#### Exercice 6.4

$G = \text{bar}\{(A, 7), (B, 8), (C, -5)\}$  et  $A(8, 7)$ ,  $B(-12, -8)$  et  $(4, -11)$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

Déterminer les coordonnées de  $G$  dans  $(O, I, J)$ .

**Remarque :** La notion de barycentre a été étendue de deux à trois points pondérés. Cette notion peut être étendue à plus de trois points pondérés.

#### Exercice 6.5

$ABC$  est un triangle équilatéral de côté  $\sqrt{3}$ . On considère le système

$$S = \{(A; 2 - \alpha); (B; 1 + \alpha); (C; 2 - \alpha)\} \text{ où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

Déterminer l'ensemble  $E$  des valeurs du nombre réel  $\alpha$  pour lesquelles  $S$  admet un barycentre.

#### Exercice 6.6

$ABC$  est un triangle. Construire le point  $G$  barycentre de  $(A, -1)$ ,  $(B, 2)$ ,  $(C, 3)$ .

#### Exercice 6.7

$ABC$  est un triangle équilatéral de côté 4.

$D$  est le point du plan tel que :  $3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

- 1- Démontrer que  $D$  est le barycentre des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  affectés de coefficients que l'on déterminera.

2- a/ I étant le milieu de  $[AC]$ ,

Démontrer que D est le barycentre des points B et I affectés de coefficients que l'on déterminera.

b/ En déduire que D appartient à la médiatrice de  $[AC]$ .

## CHAPITRE 7 : TRIGONOMETRIE

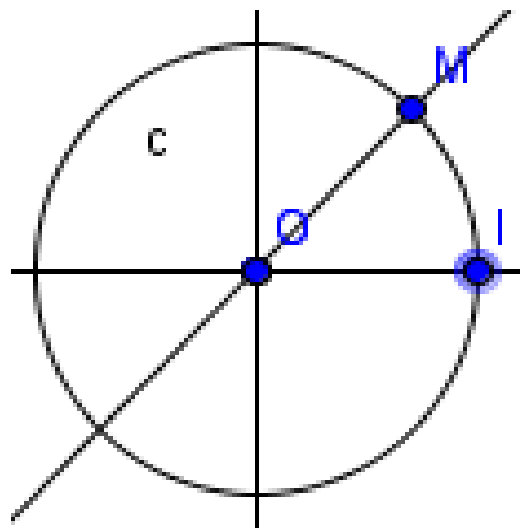
### Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Placer l'image d'un angle orienté sur le cercle trigonométrique
- Calculer le sinus, le cosinus et la tangente d'un nombre réel,
- Transformer des expressions à partir des formules trigonométriques,
- résoudre dans  $]-\pi; \pi]$  ou dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations trigonométriques

### 1) Mesures d'un angle orienté-mesure principale

- Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls déterminent un angle orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$
- Soit  $(\vec{u}; \vec{v})$  un angle orienté et  $x$  une mesure en radians de  $(\vec{u}; \vec{v})$ .  
Tout autre mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$  est de la forme  $x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- Parmi toutes les mesures d'un angle orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$ , il en existe une et une seule qui appartient à l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ . C'est la mesure principale de cet angle orienté notée  $\text{Mes}(\vec{u}; \vec{v})$ .
- Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$   
On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle  $(\mathcal{C})$  orienté de centre O et de rayon unité.  
A chaque mesure  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$ , on associe le point  $M \in (\mathcal{C})$  telle que  $\text{Mes}(\vec{OI}; \vec{OM}) = \alpha$ .  
M est appelé **point image de  $\alpha$**  sur le cercle  $(\mathcal{C})$  et est noté  $M(\alpha)$ .



- Déterminer la mesure principale  $\alpha$  d'un angle orienté de mesure  $x$  connue, consiste à écrire  $\alpha = x + 2k\pi$ , où  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - Si  $x \in ]-\pi; \pi]$  alors  $\alpha = x$
  - Sinon, on détermine tout d'abord  $k$  à l'aide des inégalités  $-\pi < x + 2k\pi \leq \pi$
  - Puis l'on détermine  $\alpha$  en utilisant l'égalité  $\alpha = x + 2k\pi$ .

**Exercice 7.1 :** Placer les angles remarquables sur le cercle trigonométrique.

### 2) Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , si M est le point du cercle

trigonométrique image du réel  $x$ ,

- L'abscisse de  $M$  est appelée cosinus de  $x$ , elle est notée  $\cos(x)$  ou  $\cos x$ ,
- L'ordonnée de  $M$  est appelée sinus de  $x$ , elle est notée  $\sin(x)$  ou  $\sin x$ ,
- tangente de  $x$  est le nombre réel noté  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  si  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Pour tout réel  $x$ , on a :  $-1 \leq \cos x \leq 1$  ;  $-1 \leq \sin x \leq 1$  ;  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- Pour tout réel  $x$ , on a :  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  et  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

3) Cosinus et sinus des angles remarquables et angles associés

| Angle en degré  | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$      | $120^\circ$          | $135^\circ$           | $150^\circ$           | $180^\circ$ |
|-----------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|
| Angle en radian | 0         | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$     | $\frac{3\pi}{4}$      | $\frac{5\pi}{6}$      | $\pi$       |
| Sinus           | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         | 0           |
| Cosinus         | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | $-\frac{1}{2}$       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1          |

- $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$  ;
- $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$  ;
- $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$  ;
- $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$  ;
- $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases}$

Exercice 7.2

Calculer en fonction de  $\sin x$  et de  $\cos x$ , les expressions suivantes :

$$A = \cos(x + \pi) + \cos(\pi - x) + \cos(-x) \text{ et } B = \sin(x + \pi) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$$

4) Formules usuelles de trigonométrie

a) Formule d'addition

$$(1) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (2) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(3) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad (4) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Exercice 7.3 : En remarquant que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ , utiliser les formules d'addition pour trouver les valeurs exactes de  $\sin \frac{\pi}{12}$  et  $\cos \frac{\pi}{12}$ .

b) Formule de duplication

En posant  $a = b$ , on a :

$$(1) \Rightarrow \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad (5)$$

$$(3) \Rightarrow \sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad (6)$$

c) Formule de linéarisation

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 a = 1 - \sin^2 a \\ \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \end{cases} \text{ d'où (5) donne : } \begin{cases} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} & (7) \\ \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} & (8) \end{cases}$$

Exercice 7.4 : On considère un réel  $\alpha$  tel que  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$  et  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ .

Calculer les valeurs exactes de  $\cos \alpha$  ;  $\sin 2\alpha$  ;  $\cos 2\alpha$  ;  $\sin 3\alpha$  ;  $\cos 3\alpha$ .

### 5) Équations trigonométriques

a) **Equations du type (E):**  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos x = a$  ou  $\sin x = a$ , avec  $a \in \mathbb{R}$

1<sup>er</sup> cas : si  $|a| > 1$  alors l'équation (E) n'admet pas de solution

2<sup>ème</sup> cas : si  $-1 \leq a \leq 1$  alors on cherche une solution particulière  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$  et l'équation devient :

- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$  ou  $x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$  ou  $x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Exercice 7.5** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :  $\cos x = \frac{1}{2}$ ;  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\cos x = 2$

**Exercice 7.6** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :  $\sin x = \frac{1}{2}$ ;  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\sin x = -3$

## CHAPITRE 8 : TRANSFORMATIONS DU PLAN

### Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Déterminer et construire l'image d'un point par une translation, une rotation, une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une homothétie ;
- Utiliser la définition, le vocabulaire et les propriétés des transformations dans la résolution de problèmes portant sur les positions relatives de figures géométriques (alignement, orthogonalité et parallélisme,) et/ou de comparaison de mesures (angles ou longueurs,).

#### 1. Translation

##### Définition

Etant donné un vecteur  $\vec{u}$  du plan, la translation de vecteur  $\vec{u}$ , notée  $t_{\vec{u}}$ , est la transformation du plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ .

##### Remarques

- L'image du point M par  $t_{\vec{u}}$  est appelé le translaté de M par le vecteur  $\vec{u}$ . On note :  $M' = t_{\vec{u}}(M)$ .
- L'élément caractéristique de la translation  $t_{\vec{u}}$  est le vecteur  $\vec{u}$ .
- $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow M = t_{-\vec{u}}(M') = M$ .

##### Exercice 8.1

On considère les points A, B, C, D et E du plan deux à deux distincts et non tous alignés.

1. Déterminer l'image des points B, C, D et E par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AE}$ .
2. Construire ces images.

#### 2. Symétries orthogonales et centrales

##### a). Symétrie orthogonale

##### Définition

Etant donnée une droite  $(\Delta)$  du plan, la symétrie orthogonale d'axe  $(\Delta)$  est la transformation du plan notée  $S_{\Delta}$ , qui associe à tout point M le point M' tel que  $(\Delta)$  est la médiatrice de  $[MM']$ .

Le point M' est appelé image de M par  $S_{\Delta}$ . On dit aussi que M' est le symétrique de M par rapport à  $(\Delta)$ .

On note  $S_{\Delta}(M) = M'$ . La droite  $(\Delta)$  est l'élément caractéristique de la symétrie orthogonale.

**Remarque :** La droite  $(\Delta)$  est invariante par  $S_{\Delta}$  :  $\forall M \in (\Delta), S_{\Delta}(M) = M$ .

##### Exercice 8.2:

1. Tracer dans le plan une droite  $(\Delta)$ . Placer de part et d'autre de cette droite les points A et B. Placer sur  $(\Delta)$  les points N et P.
2. Placer les images A', B', N' et P' images respectives des points A, B, N et P.

3. Que remarque-t-on ?

**b). Symétrie centrale**

**Définition**

Soit  $O$  un point du plan. On appelle symétrie centrale de centre  $O$  et on note  $S_O$ , la transformation du plan, qui à tout point  $M$  du plan associe le point  $M'$  tel que  $O$  est milieu de  $[MM']$ .

On écrit :  $M' = S_O(M)$ .

**Remarques**

- L'image  $M'$  de  $M$  par la symétrie de centre  $O$  est appelée symétrique de  $M$  par rapport à  $O$ .
- Le centre  $O$  est l'élément caractéristique de la symétrie centrale  $S_O$ .

**Exercice 8.3**

Soit  $O$  un point du plan. Placer les points  $A, B, C$  deux à deux distincts et tous distincts du point  $O$ .

1. Construire les images  $A', B'$  et  $C'$  des points  $A, B$  et  $C$  par la symétrie centrale de centre  $O$ .
2. Quel est l'image de  $O$  par cette symétrie.

**3. Homothéties**

**Définition**

Soit  $O$  un point,  $k$  un nombre réel non nul.

On appelle homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$  l'application  $h_{(O,k)}$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$ , associe le point  $M'$  tel que :  $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ .

**Conséquences**

- Si  $k < 0$ , alors le centre  $O$  est entre  $M$  et  $M'$ .
- Si  $k > 0$ , alors le centre  $O$  est à l'extérieur du segment  $[MM']$ .

**Propriété 1**

Un point  $M$ , son image  $M'$  par une homothétie et le centre  $O$  de cette homothétie sont alignés.

**Propriété 2**

Le seul point invariant, par une homothétie de rapport différent de 1, est son centre.

**Propriété fondamentale**

Soit  $h$  une homothétie de rapport  $k$ ,  $M'$  et  $N'$  images respectives par  $h$  de deux points quelconques  $M$  et  $N$ . On a :  $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ .

**Exercice 8.4**

On considère le triangle  $ABC$  du plan.

1. Construire les images de  $B$  et  $C$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $-\frac{1}{2}$ .
2. Construire les images de  $B$  et  $C$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport 2 sur une autre figure.

**4. Rotation**

**Définition**

Soit  $O$  un point,  $\alpha$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ .

On appelle rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$  l'application du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que :

- si  $M = O$ , alors  $M' = M$  ;
- si  $M \neq O$ , alors  $OM' = OM$  et  $\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})} = \alpha$ .

On note  $r_{(O,\alpha)}$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ .

**Remarque**

Les éléments caractéristiques d'une rotation  $r_{(O,\alpha)}$  sont : le centre  $O$  et l'angle  $\alpha$ .

**Propriété 1**

Le seul point invariant par une rotation d'angle non nul est le centre de cette rotation.

**Propriété fondamentale**

Soit  $r$  une rotation d'angle  $\alpha$ ,  $A'$  et  $B'$  les images respectives par  $r$  de deux points quelconques  $A$  et  $B$ .

$$\text{On a : } \begin{cases} A'B' = AB \\ \text{Mes}(\widehat{AB, A'B'}) = \alpha. \end{cases}$$

### Exercice 8.6

Soit  $ABC$  un triangle de sens direct et  $I$  un point du plan.

Construire les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  images respectives des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  par la rotation de centre  $I$  et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ .

### Exercice 8.7

Soit  $O$  le centre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral  $ABC$  de sens direct.

Trouver les images des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

## CHAPITRE 9 STATISTIQUES A UNE VARIABLE

### Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Déterminer les caractéristiques de position d'une série statistique regroupée en classes
- Déterminer les caractéristiques de dispersion d'une série statistique regroupée en classes
- Déterminer la médiane par interpolation linéaire et par méthode graphique.
- Interpréter les caractéristiques de position et de dispersion.

### Introduction

Les **statistiques** sont des études des faits socio-économiques par des procédés numériques. Elles désignent un ensemble de méthodes scientifiques permettant de collecter, d'analyser et d'interpréter les données numériques afin de pouvoir tirer des conclusions valables et à prendre des décisions raisonnables sur la base cette analyse.

#### 1) Activité 1

**Compléter le texte à l'aide des mots suivants :** classes, enquête, unité statistique, quantitatif, population, classement, effectif, qualitatif, sondage, dépouillement.

Après une année de commercialisation d'un produit, Monsieur Jean doit effectuer une..... . Les données dont il dispose sont les factures correspondantes à la vente de ce produit, tout au long de l'année. Ces factures constituent la ..... sur laquelle va porter l'étude. Une facture représente une ..... . M. Jean va étudier le montant de ces factures; le montant est un caractère ..... . Il possède 1200 factures. Il va en faire le ..... . Pour simplifier sa tâche, il les range par ordre croissant; il effectue ainsi un ..... . Il regroupe les factures comprises entre 0 et 100 € puis entre 100 et 200 €, etc.; M. Jean forme donc des ..... . Il compte, enfin, le nombre de factures dans chaque groupe. Ce nombre est appelé.....

#### 2) Terminologie de base

- Une population** est un ensemble dont les éléments choisis possèdent une même caractéristique ou sont de même nature. C'est un ensemble des faits, d'individus, d'objets sur lequel porte l'étude statistique.  
Exemple : L'ensemble des factures de l'année de l'entreprise. L'ensemble des élèves d'un établissement scolaire est une population
- Un échantillon** est un sous ensemble sur lequel porte l'étude statistique dans le cas où tous les individus d'une population ne peuvent pas être atteints (dans le cas d'une population trop importante)
- Un individu** (ou une unité statistique) est un élément de la population
- Un caractère** est un critère retenu pour analyser une population. C'est la variable de l'étude statistique.Exemple : sexe, nationalité, la taille...

- e) **Les modalités** sont les différentes valeurs ou situations qu'on peut attribuer à un caractère  
Exemple :
- Le sexe peut masculin ou féminin
  - La nationalité peut être togolaise, béninoise, ghanéenne...
  - La taille d'un élève peut être 1m ; 1,50m ou 1,70m...
- Un caractère est **qualitatif** lorsque ses modalités ne sont pas des valeurs numériques.  
Exemple : sexe, nationalité...
  - Un caractère est **quantitatif discret** lorsque ses modalités sont des valeurs numériques isolées. Exemple : la taille, le poids...
- f) **Effectif :** C'est le nombre d'individus ayant la même modalité  $x_i$ . L'effectif de la valeur  $x_i$  est notée  $n_i$ . Les effectifs sont obtenus après dépouillement des valeurs. La somme des effectifs est notée  $N$  et est appelé effectif **total**.
- g) **Fréquence :** Pour permettre des comparaisons entre les différentes modalités  $x_i$  d'un caractère, on calcule la fréquence  $f_i$  de chacune des modalités  $x_i$  du caractère. C'est le nombre  $f_i = \frac{n_i}{N}$ . La fréquence peut aussi s'exprimer en pourcentage  
 $f_i = \frac{n_i \times 100}{N}$  (%).
- h) **Une série statistique** est une suite ordonnée ou non des modalités prises par un caractère donné. Une série statistique dont le caractère prend  $p$  modalités sera notée  $(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ ,  $n_i$  étant l'effectif de la modalité  $x_i$ .

### 3) Caractère quantitatif continu

Un caractère est **quantitatif continu** lorsque les modalités du caractère sont des nombres (valeurs numériques) regroupés en classes définies par des intervalles de formes  $[a; b[$ .

- L'effectif  $n_i$  d'une classe  $[a_i; b_i[$  est le nombre d'individus de la population étudiée dont les modalités appartiennent à  $[a; b[$ .
- Le centre de  $[a_i; b_i[$  est le nombre  $c = \frac{a_i + b_i}{2}$
- L'amplitude de  $[a_i; b_i[$  est le nombre  $k = b_i - a_i$
- Si  $N$  est l'effectif total de la série, la fréquence  $f_i$  d'une classe  $[a_i, b_i[$  d'effectif  $n_i$  est le nombre  $f_i = \frac{n_i}{N} \times 100$  (%) où  
 $N = \sum n_i$

#### Activité 2

Une étude statistique sur l'âge de chacun des élèves d'une section donne la série suivante :

19 - 15 - 18 - 17 - 17 - 15 - 16 - 16 - 15 - 19 - 16  
 - 15 - 19 - 16 - 18 - 16 - 16 - 17 - 18 - 19 -  
 15 - 17 - 17 - 16 - 18 - 19 - 17 - 17 - 18 - 19 - 15  
 - 19 - 18 - 18 - 16 - 16 - 17 - 16 - 18 - 18 -

On regroupe les résultats dans un tableau : compléter le tableau.

| Age $x_i$ | Effectif $n_i$ | Fréquence $f_i$ |
|-----------|----------------|-----------------|
| 15        |                |                 |
| 16        |                |                 |
| 17        |                |                 |
| 18        |                |                 |
| 19        |                |                 |

|       |  |  |
|-------|--|--|
| Total |  |  |
|-------|--|--|

#### Activité 3

Une étude statistique sur la taille (en m) des élèves d'une section donne la série suivante :

1.70 - 1.67 - 1.53 - 1.47 - 1.72 - 1.68 - 1.46 -  
 1.76 - 1.45 - 1.77 - 1.71 - 1.63 - 1.65 - 1.58 -  
 1.54 - 1.46 - 1.75 - 1.66 - 1.78 - 1.52 - 1.63 - 1.46  
 - 1.80 - 1.75 - 1.82 - 1.51 - 1.61 - 1.84 -  
 1.49 - 1.72 - 1.63 - 1.64 - 1.73 - 1.66 - 1.58 - 1.57  
 - 1.76 - 1.63 - 1.78 - 1.81 -

Les tailles sont regroupées par intervalles appelées ..... D'amplitude déterminée (ici 0,05m).

On regroupe les résultats dans le tableau suivant. Compléter le tableau.

| Classes d'âges | Effectif $n_i$ | Fréquence $f_i$ |
|----------------|----------------|-----------------|
| [1.45; 1.50[   |                |                 |
| [1.50; 1.55[   |                |                 |
| [1.55; 1.60[   |                |                 |
| [1.60; 1.65[   |                |                 |
| [1.65; 1.70[   |                |                 |
| [1.70; 1.75[   |                |                 |
| [1.75; 1.80[   |                |                 |

|              |  |  |
|--------------|--|--|
| [1.80; 1.85[ |  |  |
| Total        |  |  |

**Questions:**

- a- Combien y a-t-il d'élèves dont la taille est inférieure à 1.65 m ?  
 b- Calculer le pourcentage d'élèves dont la taille est supérieure ou égale à 1.75 m

**4) Effectifs cumulés**

Quand les valeurs du caractère sont ordonnées, on peut cumuler les effectifs de façon croissante ou décroissante.

**a) Effectifs cumulés croissants (ECC)**

L'effectif cumulé croissant d'une classe est la somme de l'effectif de cette classe et des effectifs des classes qui précèdent.

**b) Effectifs cumulés décroissants (ECD)**

L'effectif cumulé décroissant est la somme de l'effectif de cette classe et des effectifs des classes suivantes.

**Activité 4**

En utilisant les données des activités 2 et 3 compléter les tableaux correspondants aux effectifs cumulés.

| Age $x_i$ | Effectif $n_i$ | ECC | ECD |
|-----------|----------------|-----|-----|
| 15        |                |     |     |
| 16        |                |     |     |
| 17        |                |     |     |
| 18        |                |     |     |
| 19        |                |     |     |
| Total     |                |     |     |

|              |  |  |  |
|--------------|--|--|--|
| [1.45; 1.50[ |  |  |  |
| [1.50; 1.55[ |  |  |  |
| [1.55; 1.60[ |  |  |  |
| [1.60; 1.65[ |  |  |  |
| [1.65; 1.70[ |  |  |  |
| [1.70; 1.75[ |  |  |  |
| [1.75; 1.80[ |  |  |  |
| [1.80; 1.85[ |  |  |  |
| Total        |  |  |  |

| Classes d'âges | Effectif $n_i$ | ECC | ECD |
|----------------|----------------|-----|-----|
|----------------|----------------|-----|-----|

**5) Représentations graphiques des séries statistiques**

**a) Diagramme en bâtons**

Il est utilisé pour représenter les séries statistiques correspondant à un caractère quantitatif à variable discrète (si elle ne prend que des valeurs isolées, souvent entières). Les bâtons sont représentés par des segments de droite dont les longueurs sont proportionnelles:

- aux effectifs s'il s'agit d'un diagramme des effectifs
- aux fréquences s'il s'agit d'un diagramme des fréquences
- aux effectifs cumulés s'il s'agit d'un diagramme des effectifs cumulés.

**b) Diagramme à secteurs (diagramme circulaire)**

Un diagramme à secteurs admet pour support un disque découpé en secteurs dont les aires sont proportionnelles aux fréquences ou aux effectifs.

**Exemple 1 :**

La répartition des dépenses prévues au budget de la C.E.E. est la suivante :

Edition de Septembre 2023

- Agriculture et pêche : 72,9%
- Politique sociale : 5,7%
- Industrie et transports : 2,6%
- Politique générale : 5,9%
- Recherche : 3,9%
- Frais de fonctionnement : 4,6%
- Divers : 4,4%

**Exemple 2**

Dans une société d'assurances, les salaires mensuels payés au personnel sont résumés dans le tableau suivant :

| Salaire (en € ) | Effectif ( $n_i$ ) |
|-----------------|--------------------|
| [800; 850[      | 2                  |
| [850; 900[      | 5                  |
| [900; 950[      | 12                 |
| [950; 1000[     | 36                 |
| [1000; 1500[    | 30                 |
| [1500; 2000[    | 15                 |
| Total           |                    |

Faire un diagramme à secteurs.

c) **Histogramme**

Une série statistique dont les valeurs sont regroupées par classe est représentée par un histogramme.

**On traitera le cas où toutes les classes ont même amplitude :**

Les résultats sont traduits au moyen d'un diagramme composé de rectangles:

- La base de chaque rectangle a même largeur : c'est l'amplitude des classes
- Les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux effectifs si on représente l'histogramme des effectifs.

**III) Caractéristiques de position**

**1. Le mode**

- Pour une série statistique à caractère quantitatif discret ( $x_i; n_i$ ), on appelle **mode** toute modalité d'effectif maximal.
- Pour une série statistique à caractère quantitatif continu ( $[a_i; b_i[; n_i$ ), on appelle **classe modale** toute classe d'effectif maximal. C'est la classe du mode.

Si  $[a_0; b_0[$  est une classe modale alors le mode est  $M_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$

- Une série statistique peut admettre un ou plusieurs modes

**2. La moyenne**

- Pour une série statistique à caractère quantitatif discret ( $x_i; n_i$ ), la moyenne est

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \dots}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots} \quad \text{où } x_i \text{ est une modalité d'effectif } n_i.$$

- Pour une série statistique à caractère quantitatif continu ( $[a_i; b_i[; n_i$ ), la moyenne est

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i c_i}{\sum n_i} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + n_3 c_3 + \dots}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots} \quad \text{où } c_i \text{ est le centre de la classe } [a_i; b_i[ \text{ d'effectif } n_i.$$

**3. La médiane**

**3.1 Médiane d'une série statistique à variable discrète**

**3.1.1 Cas d'un nombre impair d'observations**

**Exemple**

Voici le chiffre d'affaires d'une entreprise A basée dans la production et la commercialisation de soja : 3 ; 6 ; 4 ; 10 ; 12 ; 9 ; 7.8 ; 5

(Les données sont en millions de francs CFA) Quel est le chiffre d'affaires médian de cette entreprise ?

Pour trouver la médiane ; on classe les données par ordre croissant ou décroissant et on retient la valeur médiane (celle qui est au milieu)

**3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12** ou **12 ; 10 ; 9 ; 8 ; 7 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3**

Le chiffre d'affaires médian est 7 000 000 F CFA

**3.1.2 Cas d'un nombre pair d'observations**

**Exemple**

Voici le chiffre d'affaires d'une entreprise B basée dans la production et la commercialisation de soja : 14 ; 3 ; 6 ; 4 ; 10 ; 12 ; 9 ; 7.8 ; 5

(Les données sont en millions de francs CFA) Quel est le chiffre d'affaires médian de cette entreprise ?

Pour trouver la médiane ; on classe les données par ordre croissant ou décroissant et on retient la demi somme des valeurs médianes (celles qui sont au milieu)

3 ; 4 ; 5 ; 6 ; **7 ; 8** ; 9 ; 10 ; 12 ; 14 ou 14 ; 12 ; 10 ; 9 ; **8 ; 7** ; 6 ; 5 ; 4 ; 3

$$Me = \frac{7+8}{2} = 7,5$$

Le chiffre d'affaires médian est 7 500 000 F CFA

### 3.2 Médiane d'une série statistique à variable continue

#### On procède par l'interpolation linéaire

Dans une société d'assurances, les salaires mensuels payés au personnel sont résumés dans le tableau suivant :

| Salaire (en €) | Effectif ( $n_i$ ) |
|----------------|--------------------|
| [800; 850[     | 3                  |
| [850; 900[     | 4                  |
| [900; 950[     | 10                 |
| [950; 1000[    | 8                  |
| [1000; 1050[   | 12                 |
| [1050; 1100[   | 3                  |
| [1100; 1150[   | 5                  |
| [1150; 1100[   | 5                  |
| TOTAL          | 50                 |

Déterminer la médiane de cette série statistique

| Salaire (en €) | Effectif ( $n_i$ ) | Effectif cumulé croissant ( $N_i$ ) |
|----------------|--------------------|-------------------------------------|
| [800; 850[     | 3                  | 3                                   |
| [850; 900[     | 4                  | 7                                   |
| [900; 950[     | 10                 | 17                                  |
| [950; 1000[    | 8                  | 25                                  |
| [1000; 1050[   | 12                 | 37                                  |
| [1050; 1100[   | 3                  | 40                                  |
| [1100; 1150[   | 5                  | 45                                  |
| [1150; 1100[   | 5                  | 50                                  |
| TOTAL          | 50                 | -                                   |

La classe médiane est : [1000; 1050[

1000 ----- 17

Me ----- 25

1050 ----- 37

$$\frac{Me - 1000}{1050 - 1000} = \frac{25 - 17}{37 - 17}$$

$$\frac{Me - 1000}{50} = \frac{8}{20}$$

$$Me = 1000 + \left(50 \times \frac{8}{20}\right)$$

$$Me = 1010$$

