

COURS DES MATHEMATIQUES APPLIQUEES TLE ACC /CG

**ZE BELINGA ALBERT DIDIER
PLETP/CG**

**Diplômé de l'ENSET d'EBOLOWA et de L'Université de Yaoundé 2 SOA
(00237) 693777425 / 678 27 75 91**

albertze93@yahoo.com

PREMIERE PARTIE : STATISTIQUES

CHAPITRE 1 : L'AJUSTEMENT LINEAIRE

CHAPITRE 2 : CORRELATION LINEAIRE

DEUXIEME PARTIE : MATHEMATIQUES FINANCIERES

CHAPITRE 0 : LES LOGARITHMES DECIMAUX

CHAPITRE 1 : LES INTERETS COMPOSES

CHAPITRE 2 : LES ANNUITES

CHAPITRE 3 : LES EMPRUNTS INDIVIS

CHAPITRE 4 : LES EMPRUNTS OBLIGATIONS

CHAPITRE 5 : LA RENTABILITE DES INVESTISSEMENTS

CHAPITRE 1 : AJUSTEMENT LINEAIRE

I- DEFINITION

L'ajustement linéaire consiste à construire une courbe qui soit située le plus près possible des points réels pour satisfaire à l'impératif de régularité. En d'autres mots, le problème de l'ajustement linéaire consiste à étudier deux variables x et y .

X est appelé variable expliquée et y est appelé variable explicative. Aussi les hommes de statistique s'efforcent de trouver algébriquement et graphiquement s'il existe une relation entre x et y ; à cet effet il peut utiliser :

a- L'ajustement graphique

b- L'ajustement mécanique

c- L'ajustement analytique

I-1) L'ajustement graphique

C'est un diagramme de dispersion qui représente tous les points de la série statistique. Ces points constituent le nuage des points. Le statisticien y trace une courbe aussi simple que possible qui traverse le nuage de points et le partage en deux parties comprenant sensiblement de même nombres de points

Remarque : il est plus facile de tracer la courbe dans ces nuages de points effilés que celui se présentant sous forme de disque. On y place généralement le point G qui représente le couple $(\bar{X}; \bar{Y})$

Application

Les ventes d'un produit au cours des dix années sont consignées dans le tableau suivant :

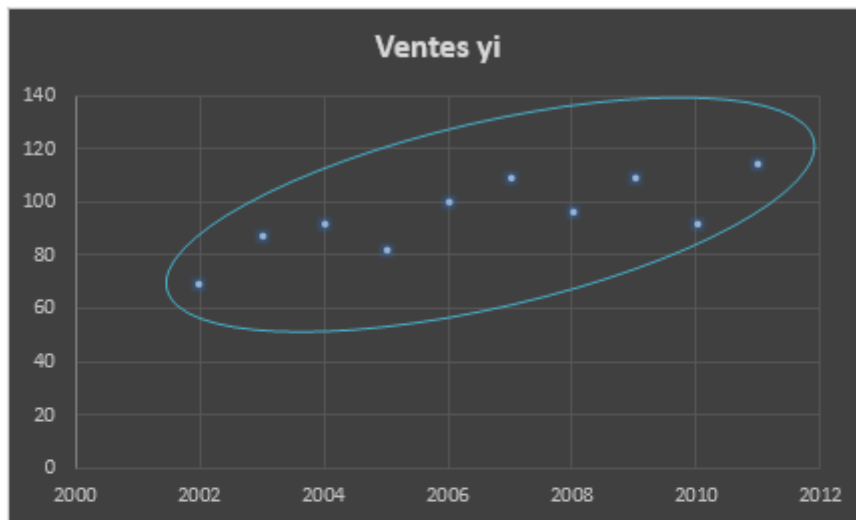
<i>Années x_i</i>	<i>2002</i>	<i>2003</i>	<i>2004</i>	<i>2005</i>	<i>2006</i>	<i>2007</i>	<i>2008</i>	<i>2009</i>	<i>2010</i>	<i>2011</i>
<i>Ventes y_i</i>	<i>70</i>	<i>88</i>	<i>92</i>	<i>82</i>	<i>100</i>	<i>110</i>	<i>97</i>	<i>110</i>	<i>92</i>	<i>115</i>

TRAVAIL A FAIRE

- 1) représenter le nuage de points de cette série statistique
- 2) déterminer les coordonnées du point G

Solution

1) Représentons le nuage de points



NB : il suffit tout simplement de coordonner chaque année à ses ventes.

2) Déterminons les coordonnées du point G

$G(\bar{x} ; \bar{y})$ avec $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ et $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$ n est le nombre d'observation

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} \rightarrow \underline{\bar{x} = 5,5}$$

$$\bar{y} = \frac{70+88+92+82+100+110+97+110+92+115}{10} \rightarrow \underline{\bar{y} = 95,6}$$

Conclusion : G (5,5 ; 95,6)

I-2) l'ajustement mécanique

I-2-1) Principe

L'ajustement mécanique consiste à ajuster mécaniquement au nuage de point de coordonnées x_i, y_i une droite de la forme $y = a x + b$ minimisant autant que possible l'existence des points de part et d'autre de la droite.

Son objectif est d'obtenir rapidement une prévision du phénomène observé par projection ainsi nous retrouverons la méthode des moyennes échelonnées, la méthode des moyennes mobiles et aussi la méthode des totaux mobiles.

I-2-2) Méthode des moyennes

a- Principe

Il consiste à dresser la série statistique en sous ensemble de trois, cinq observation selon l'ordre défini et à représenter en abscisse les points médian x_i et en ordonné les points moyens Y_i

b- Application

La production agricole d'un pays a évolué de la manière suivante au cours des 9 années

X_i	98	99	00	01	02	03	04	05	06
Y_i	10	20	15	5	30	25	35	20	40

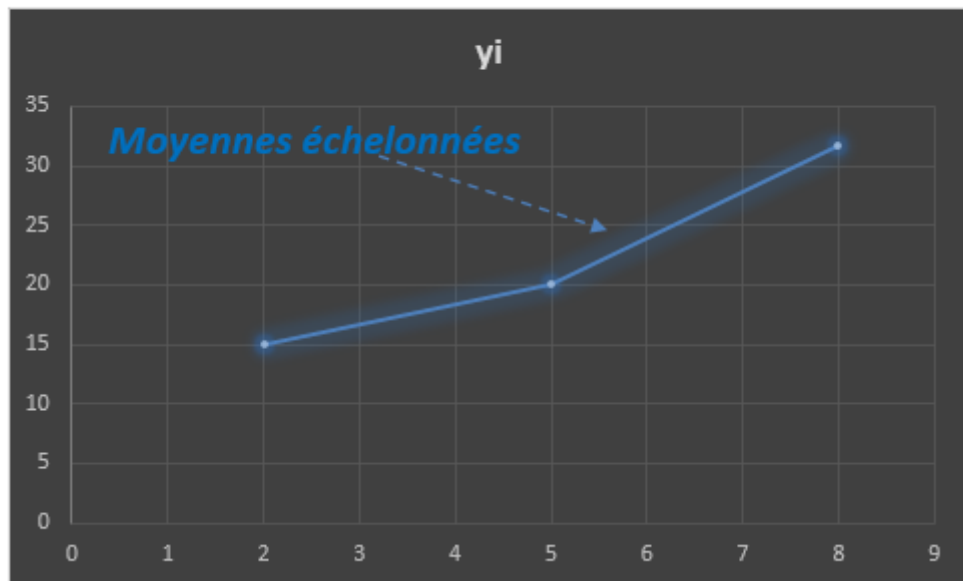
TAF : procéder à l'ajustement par la méthode des moyennes échelonnées. (Tenir compte de trois observations)

Solution :

Procédons à l'ajustement par la méthode des moyennes échelonnées

xi	yi	Calculs des ME	Coordonnées
1	10	$\bar{x} = \frac{1+2+3}{3} \rightarrow \underline{\bar{x} = 2}$ $\bar{y} = \frac{10+20+15}{3} \rightarrow \underline{\bar{y} = 15}$	$G_1 (2 ; 15)$
2	20		
3	15		
4	5	$\bar{x} = \frac{4+5+6}{3} \rightarrow \underline{\bar{x} = 5}$ $\bar{y} = \frac{5+30+25}{3} \rightarrow \underline{\bar{y} = 20}$	$G_2 (5 ; 20)$
5	30		
6	25		
7	35	$\bar{x} = \frac{7+8+9}{3} \rightarrow \underline{\bar{x} = 8}$ $\bar{y} = \frac{35+20+40}{10} \rightarrow \underline{\bar{y} = 31,67}$	$G_3 (8 ; 31,67)$
8	20		
9	40		

Représentation graphique



I-2-3) Méthode des moyennes mobiles

a- Principe

Il consiste graphiquement un nuage de point auxiliaire que nous allons appeler **Xi** constitué en abscisse par les observations **Xi** auxquelles on observe la 1^{ère} et la dernière observation et en ordonnée par les moyennes mobiles **Yi**.

b- Application

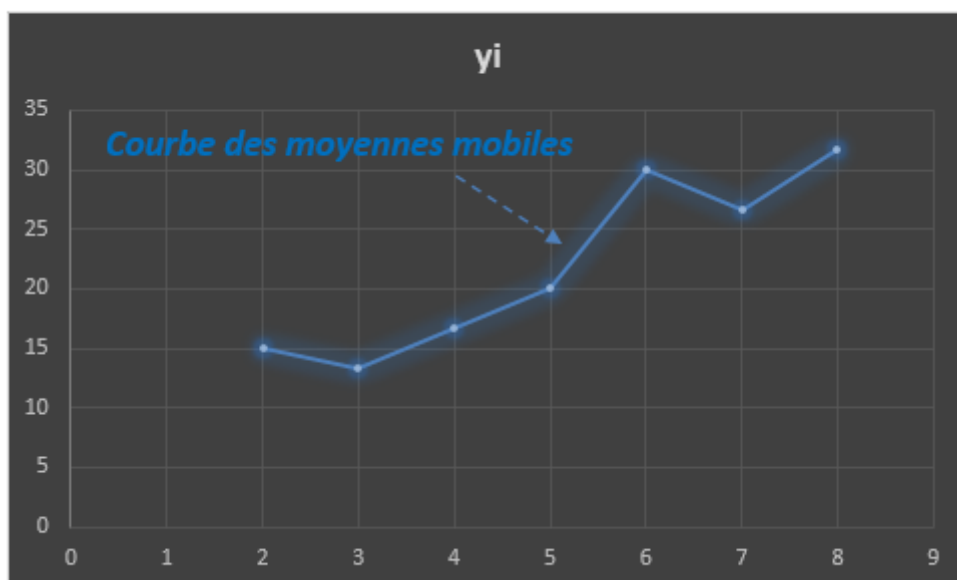
Reprenons le cas précédant et procédons à la méthode des moyennes mobiles et représentons

solution :

ZEBEL EXPERT

xi	yi	Calculs des MM	Coordonnées
1	10	-	-
2	20	$\bar{y} = \frac{10+20+15}{3} \rightarrow \underline{\bar{y} = 15}$	$G_1 (2 ; 15)$
3	15	$\bar{y} = \frac{20+15+5}{3} \rightarrow \underline{\bar{y} = 13,33}$	$G_2 (3 ; 13,33)$
4	5	$\bar{y} = \frac{15+5+30}{3} \rightarrow \underline{\bar{y} = 16,67}$	$G_3 (4 ; 16,67)$
5	30	$\bar{y} = \frac{5+30+25}{3} \rightarrow \underline{\bar{y} = 20}$	$G_4 (5 ; 20)$
6	25	$\bar{y} = \frac{30+25+35}{3} \rightarrow \underline{\bar{y} = 30}$	$G_5 (6 ; 30)$
7	35	$\bar{y} = \frac{25+35+20}{3} \rightarrow \underline{\bar{y} = 26,67}$	$G_6 (7 ; 26,67)$
8	20	$\bar{y} = \frac{35+20+40}{10} \rightarrow \underline{\bar{y} = 31,67}$	$G_7 (8 ; 31,67)$
9	40	-	-

Représentation graphique



I-2-4) Totaux mobiles

a- Principe

Cours préparé par M. ZE BELINGA ALBERT DIDIER PLETP/CG Diplômé de l'ENSET
d'EBOLOWA et de L'Université de Yaoundé 2 SOA (00237) 693777425 / 678 27 75 91
albertze93@yahoo.com

Cette méthode combine efficacement dans le cas des séries chronologiques ; la prise en compte d'une variation saisonnière et la recherche d'une tendance générale.

L'application de cette méthode consiste après avoir fixé la valeur du paramètre X à remplacer chaque observation par le total des n dernières observations. Le nombre de totaux mobiles à étudier porte sur plusieurs années, le total des observations de la première année forme le premier total (la valeur du paramètre X est égale au nombre d'observation de la première année) par exemple : $X = 12$ si les observations sont mensuelles ; $X = 2$ si elles sont semestrielles.

b- Application

Les ventes mensuelles en 1000 FCFA pour les exercices de 1999 et 2000 se présentent comme suit :

<u>Elts</u>	<u>J</u>	<u>F</u>	<u>M</u>	<u>A</u>	<u>M</u>	<u>Jn</u>	<u>Jt</u>	<u>At</u>	<u>S</u>	<u>O</u>	<u>N</u>	<u>D</u>	<u>Total</u>
1999	800	600	200	200	200	400	800	2000	3200	2400	2200	2000	15000
2000	1200	2000	200	200	1000	800	1200	2400	4000	3600	2800	3000	20200

TAF : établir le tableau des totaux mobiles

Solution :

<u>Elts</u>	1999	2000	Totaux mobiles mensuels	
			Calculs	montants
Janv.	800	1200	$15000 + 1200 - 800$	15 400
Fév.	600	2000	$15 400 + 2000 - 600$	16 800
Mars	200	200	$16 800 + 200 - 200$	16 800
Avr.	200	200	$16 800 + 200 - 200$	16 800
Mai	200	1000	$16 800 + 1000 - 200$	17 600
J	400	800	$17 600 + 800 - 400$	18 000
Jt	800	1200	$18 000 + 1200 - 800$	18 400
At.	2000	2400	$18 400 + 2400 - 2000$	18 800
Sept.	3200	4000	$18 800 + 4000 - 3200$	19 600
Oct.	2400	3600	$19 600 + 3600 - 2400$	20 800
Nov.	2200	2800	$20 800 + 2800 - 2200$	21 400
Déc.	2000	3000	$21 400 + 3000 - 2000$	22 400
Total	15000	22400	-	-

Remarque : si on vous demande de représenter ou d'ajuster les totaux mobiles, le procédé est le même que les moyennes mobiles et échelonnées.

- Les totaux mobiles trimestriels
- Tableau d'exploitation :

<i>Elts</i>	<i>Vente N</i>	<i>Vente N+1</i>	<i>Totaux mobiles trimestriels</i>
<i>Trim 1</i>	<i>A</i>	<i>X</i>	$TM\ 1^{er}\ trimestre\ (n+1) = \sum\ Vente\ n + Vente\ 1^{er}\ Trimestre\ (n+1) - Vente\ 1^{er}\ Trimestre\ (n)$ $(1) = E + X - A$
<i>Trim 2</i>	<i>B</i>	<i>Y</i>	$TM\ 2^{er}\ trimestre\ (n+1) = TM\ 1^{er}\ Trimestre\ (n+1) + Vente\ 2^{er}\ Trimestre\ (n+1) - Vente\ 2^{er}\ trimestre.\ (n)$ $(2) = (1) + Y - B$
<i>Trim 3</i>	<i>C</i>	<i>Z</i>	$TM\ 3^{er}\ trimestre\ (N+1) = TM\ 2^{er}\ trimestre\ (n+1) + Vente\ 3^{er}\ trimestre\ (n+1) - Vente\ 3^{er}\ trimestre.\ (n)$ $(3) = (2) + Z - C$
<i>Trim 4</i>	<i>D</i>	<i>T</i>	$TM\ 4^{er}\ trimestre\ (N+1) = TM\ 3^{er}\ trimestre\ (n+1) + Vente\ 4^{er}\ trimestre\ (n+1) - Vente\ 4^{er}\ trimestre.\ (n)$ $(4) = (3) + T - D$
<i>Total</i>	<i>E</i>	<i>W</i>	-

- **Application :**

Le tableau ci-après présente les ventes trimestrielles d'une entreprise sur une période de 5ans

Années	2007	2008
Trimestres		
Trim. 1	100	125
Trim. 2	150	150
Trim. 3	240	230
Trim. 4	450	600
total	940	1105

Travail à faire :

1. A partir d'un tableau présenter les totaux mobiles trimestriels

Solution

<i>Années</i> <i>Trimestres</i>	<i>2007</i>	<i>2008</i>	<i>TM trimestriels</i>	
			<i>calculs</i>	<i>montants</i>
<i>Trim. 1</i>	100	125	940 + 125 - 100	965
<i>Trim. 2</i>	150	150	965 + 150 - 150	965
<i>Trim. 3</i>	240	230	965 + 230 - 240	955
<i>Trim. 4</i>	450	600	955 + 600 - 450	1105
<i>total</i>	940	1105	-	-

Critique : les ajustements graphiques et mécaniques permettent de déterminer la tendance générale du phénomène observé mais ils sont assez imprécis, c'est pour cela qu'il est préférable de procéder à l'ajustement analytique.

I-3) Ajustement analytique

Le statisticien ne résout plus le problème graphiquement ou mécaniquement mais il s'efforce de déterminer les paramètres de la fonction $Y = f(x)$ dont la courbe représentative passera par les points ajustés.

Il existe trois méthodes

- La méthode des points extrêmes
- La méthode de la double moyennes ou MAYER ou méthode des points médians
- La méthode des moindres carrés.

I-3-1) Méthode des points extrêmes

I-3-1-1) Principe

Cette méthode consiste à ajuster au nuage de points $X_i Y_i$ une droite de la forme $Y = ax + b$ passant par les deux points extrêmes $M (X_1 ; Y_1)$ et $N (X_n ; Y_n)$

En ce qui concerne les séries chronologiques les points M et N représentent les deux extrémités. Pour les séries spéciales, les points M et N représentent les valeurs les moins élevées et celles les plus élevées.

Le statisticien s'applique à déterminer les valeurs du coefficient directeur a et de la constante b par la résolution du système d'équation suivante :

Cours préparé par M. ZE BELINGA ALBERT DIDIER PLETP/CG Diplômé de l'ENSET d'EBOLWA et de L'Université de Yaoundé 2 SOA (00237) 693777425 / 678 27 75 91
albertze93@yahoo.com

$$\begin{cases} a x_1 + b = Y_1 \\ a x_n + b = Y_n \end{cases}$$

I-3-1-2) Application

La production d'une entreprise de la manière suivante au cours des 8 dernières années

Années	99	00	01	02	03	04	05	06
P°	100	200	40	10	150	300	400	120

TAF :

- Déterminer l'équation de la droite de tendance de la production de cette entreprise par la méthode des points extrêmes
- Prévoir la production en 2010

SOLUTION

1. Déterminons l'équation de la droite de tendance

En se basant sur le principe, nous allons trouver les coordonnées de M (x₁ ; y₁) et N (x_n ; y_n) d'où : M (1 ; 100) et N (8 ; 120). Ce qui renvoie au système suivant :

$$\begin{cases} 1a + b = 100 \text{ (1)} \\ 8a + b = 120 \text{ (2)} \end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système par combinaison en multipliant (1) par -1 afin d'éliminer b et déterminer a.

$$\begin{cases} -1a - b = -100 \text{ (1)} \\ 8a + b = 120 \text{ (2)} \end{cases}$$

$$\frac{7a + 0 = 20}{7a + 0 = 20} \text{ d'où } a = 20/7 \rightarrow \underline{a = 2,86}$$

Remplaçons a dans (1) pour trouver b

$$2,86 + b = 120 \rightarrow b = 120 - 2,86 \rightarrow \underline{b = 97,14}$$

Après avoir déterminer a et b, l'équation de la droite est la suivante :

$$\underline{Y = 2,86x + 97,14}$$

2. Trouvons la production prévisionnelle de 2010

Ici, il suffit tout simplement de remplacer x par le rang de 2010 qui est 12 car c'est la douzième année en partant de 1999.

$$Y = 2,86(12) + 97,14 \rightarrow y = 34,32 + 97,14 \rightarrow \underline{y = 131,46 \text{ tonnes}}$$

I-3-2) La méthode de MAYER ou de la double moyenne ou des points moyens

La méthode des points extrêmes a permis d'obtenir l'équation de la droite de tendance, mais elle n'a pas tenu compte de toutes les observations.

La méthode de MAYER reprend le nuage des points et le subdivise en deux sous-ensembles et détermine le point G_1 du premier sous ensemble et le point G_2 du deuxième sous ensemble.

$$G_1 = (\bar{x}_1; \bar{y}_1) \text{ et } G_2 = (\bar{x}_2; \bar{y}_2) \quad \text{avec} \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$$

Il établit par la suite l'équation de la forme $y = ax + b$ et détermine les valeurs du coefficient directeur (a) et la constante (b) par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = a\bar{x}_1 + b \\ \bar{y}_2 = a\bar{x}_2 + b \end{cases}$$

Application

Reprenons l'exercice précédent et déterminons l'équation de la droite de tendance par la méthode de MAYER et déterminons la prévision de 2008.

Solution

Etant donné que la série est paire nous allons scinder en sous ensemble de 4 observations comme suit :

G_1		G_2	
<i>Années (Xi)</i>	<i>P° (Yi)</i>	<i>Années (Xi)</i>	<i>P° (Yi)</i>
1999 (1)	100	2003 (5)	150
2000 (2)	200	2006 (6)	300
2001 (3)	40	2007 (7)	400
2002 (4)	10	2008 (8)	120
$\sum 10$ (1+2+3+4)	350	26 (5+6+7+8)	970
$\bar{x}_1 = 10/4 = 2,5$	$\bar{y}_1 = 350/4 = 87,5$	$\bar{x}_2 = 26/4 = 6,5$	$\bar{y}_2 = 970/4 = 242,5$

Le système devient :

$$\begin{cases} 87,5 = 2,5a + b & (1) \\ 242,5 = 6,5a + b & (2) \end{cases}$$

Pour la résolution de ce système, nous procédons toujours par combinaison en multipliant (1) par -1 pour déterminer a comme suit :

$$\begin{cases} -87,5 = -2,5a - b & (1) \\ 242,5 = 6,5a + b & (2) \end{cases}$$

$$\hline 155 = 4a + 0 \rightarrow a = 155/4 \rightarrow \underline{a = 38,75}$$

Déterminons ensuite b en remplaçant a dans (1)

$$(1) : 87,5 = 2,5 (38,75) + b \rightarrow b = 87,5 - 96,875 \rightarrow \underline{b = -9,375}$$

L'équation de la droite dévient : $\underline{y = 38,75x - 9,375}$

- **Déterminons la production prévisionnelle de 2008**

$$Y = 38,75 (10) - 9,375 \rightarrow \underline{y = 378,125 \text{ tonnes}}$$

I-3-3) La méthode des moindres carrés

- **Principe :**

Elle consiste à rechercher l'équation de la droite de tendance $Y = a x + b$ passant le plus près possible de tous les différents points de la série statistique. Cette méthode permet de minimiser les écarts entre les observations brutes x_i et les observations corrigées de telle manière que la somme des écarts entre les x_i et les soit nulle. Mathématiquement nous

pouvons écrire $\text{écart} = (x_i - \bar{x})$ donc $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$. Ce procédé semble plus réaliste et meilleur que les deux précédents. La détermination de **a** et **b** s'obtient à partir des formules connues et à partir d'un tableau d'étude dont voici la configuration :

x_i	y_i	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$
x_1	y_1				
x_2	y_2				
.	.				
.	.				
.	.				
.	.				
x_n	y_n				
$\sum x_i$	$\sum y_i$	0	0	$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum (x_i - \bar{x})^2$

Formule avec changement de variable

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad \text{avec } \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} \text{ et } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

Il existe également un autre procédé de calcul des paramètres **a** et **b** qui s'obtiendront à partir du tableau d'étude suivant :

x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
x_1	y_1		
x_2	y_2		
.	.		
.	.		
.	.		
.	.		
x_n	y_n		
$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i \cdot y_i$

Formule sans changement de variable

$$a = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} ; b = \bar{y} - a\bar{x} \quad \text{avec } \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} \text{ et } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

Application :

M. THERMANN a décidé de vendre les chemises. Pour mieux envisager ses prévisions il décide de vous communiquer la série statistique suivante :

Cours préparé par M. ZE BELINGA ALBERT DIDIER PLETP/CG Diplômé de l'ENSET d'EBOLOWA et de L'Université de Yaoundé 2 SOA (00237) 693777425 / 678 27 75 91
albertze93@yahoo.com

Xi (années)	1	2	3	4	5
yi (ventes)	3600	4500	6300	9500	13400

Travail à faire :

1. Calculer la droite de tendance par la méthode des moindres carrés
2. Calculer les prévisions de la 6^e et de la 7^{ème} année

SOLUTION

1. Calculons la droite de tendance par la méthode des moindres carrés

- Tableau d'exploitation

xi	yi	(xi - $\bar{x}$)	(yi - $\bar{y}$)	(xi - $\bar{x}$) (yi - $\bar{y}$)	(xi - $\bar{x}$)²
1	3600	-2	-3 860	7 720	4
2	4500	-1	-2 960	2 960	1
3	6300	0	-1 160	0	0
4	9500	1	2 040	2 040	1
5	13400	2	5 940	11 880	4
15	37400	0	0	24 600	10

Calculs annexes

$$\bar{y} = \frac{\sum yi}{N} = 37400/5 \rightarrow \underline{\bar{y} = 7\,460} \quad \text{et} \quad \bar{x} = \frac{\sum xi}{N} = 15/5 \rightarrow \underline{\bar{x} = 3}$$

- Calcul de a et b

$$a = \frac{\sum (xi - \bar{x}) \cdot (yi - \bar{y})}{\sum (xi - \bar{x})^2} = 24\,600/10 \rightarrow \underline{a = 2\,460}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 7\,460 - 2\,460(3) \rightarrow \underline{b = 80}$$

- L'équation de la droite de tendance est :

$$Y = ax + b \rightarrow \underline{y = 2\,460x + 80}$$



CHAPITRE 2 : LA CORRELATION LINEAIRE

La corrélation est une dépendance plus ou moins grande entre deux variables statistiques

- Les droites de régression

Elles permettent de mesurer le degré de dépendance entre deux phénomènes X_i ; Y_i . On distingue deux types de droites de régression à partir de la méthode des moindres carrés.

La droite de régression de Y en X est $D_{y/x}$ et la droite de régression de X en Y notée $D_{x/y}$.

1. La droite de régression de Y en X

Elle est de la forme $y = ax + b$ et permet d'estimer ou de déterminer la valeur de Y_i connaissant celle de X_i

- Formule de a avec changement de variable

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

- formule de a sans changement de variable

$$a = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

L'équation est : $y = ax + b$ avec $b = \bar{y} - a\bar{x}$

1. la droite régression de X en Y

Elle permet d'estimer ou de déterminer la valeur de X_i connaissant Y_i ainsi :

- formule de a' avec changement de variable

$$a' = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

- formule de a' sans changement de variable

$$a' = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum y_i^2 - n \bar{y}^2}$$

L'équation devient : $X = a'Y + b'$ avec $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$

- le coefficient de corrélation linéaire

1. Définition et intérêt de la corrélation

1. Définition de la corrélation

C'est le lien de dépendance ou la relation qui existe entre deux variables (x_i et y_i) étudiées ou observées simultanément c'est-à-dire au même moment

NB : la variable temps n'intervient pas facilement dans la corrélation

1. Intérêt de la corrélation

Elle permet d'apprécier le degré ou l'intensité de dépendance entre deux variables à savoir :

- **La variable explicative (xi)** c'est celle qui se situe à l'axe des abscisses et qui permet à la variable expliquée d'évoluer.
- **La variable expliquée (yi)** c'est celle qui se situe à l'axe des ordonnées et qui évolue en fonction de la variable explicative.

L'intensité de cette interdépendance se mesure en calculant un indicateur appelé **coefficient de corrélation** noté « r » ou 'R'

1. Calcul et interprétation du coefficient de corrélation

1. Calcul du coefficient de corrélation

A partir d'un tableau des moindres carrés complets on peut calculer le coefficient de corrélation de deux manières :

- A partir de la formule brute ou générale :
$$r \text{ ou } R = \frac{\sum (xi - \bar{x})(yi - \bar{y})}{\sqrt{\sum (xi - \bar{x})^2 \cdot \sum (yi - \bar{y})^2}}$$
- A partir des coefficients directeurs a et a' :

$$r \text{ ou } R = \sqrt{a \cdot a'} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\sum (xi - \bar{x})(yi - \bar{y})}{\sum (xi - \bar{x})^2} \quad \text{et} \quad a' = \frac{\sum (xi - \bar{x})(yi - \bar{y})}{\sum (yi - \bar{y})^2}$$

Tableau complet de calcul du coefficient de corrélation						
xi	yi	(xi - $\bar{x}$)	(yi - $\bar{y}$)	(xi - $\bar{x}$) (yi - $\bar{y}$)	(xi - $\bar{x}$) ²	(yi - $\bar{y}$) ²
x ₁	y ₁					
x ₂	y ₂					
.	.					
.	.					
.	.					
x _n	y _n					
$\sum xi$	$\sum yi$	0	0	$\sum (xi - \bar{x})(yi - \bar{y})$	$\sum (xi - \bar{x})^2$	$\sum (yi - \bar{y})^2$

1. Interprétation du coefficient de correction

Le coefficient de corrélation a toujours une valeur comprise entre (1 et -1). Il peut donc s'interpréter de trois façons :

- Si R < 0, on dit qu'il n'existe pas de corrélation entre les xi et yi. Autrement dit les deux phénomènes évoluent en sens contraire ou opposé

- Si $R > 0$ on dit qu'il existe une corrélation entre les deux phénomènes x_i et y_i . Autrement dit, les deux phénomènes évoluent dans le même sens
- Lorsque R est proche de 1 on dit qu'il existe une parfaite corrélation entre les deux phénomènes x_i et y_i . Autrement dit les deux variables sont fortement liées l'une à l'autre

Application

Une entreprise fabrique sa boisson à partir de la consommation de l'eau, les résultats de cette entreprise ont été condensés dans le tableau ci- après

Années	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Production de la boisson en 10 ⁴ FCFA	750	815	883	940	1020	1080	1115
Consommation d'eau 10 ⁴ FCFA	52	56	59	63	69	73	77

Travail à faire :

1. Indiquer ou préciser la variation explicative x_i et variable expliquée y_i
 2. Déterminer de deux manières le coefficient de corrélation. Quel constat faites-vous ?
 3. Interpréter le résultat obtenu
- **Calcul de la variance et de la covariance (x ; y)**

1. La variance

- Cas d'une variance à partir de la variable x

$$V(x) = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \quad \text{Avec } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

- Cas d'une variance à partir de la variable y

$$V(y) = \frac{\sum y_i^2}{n} - (\bar{y})^2 \quad \text{Avec } \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

1. La covariance (x ; y)

$$\text{Cov}_{(x ; y)} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{n} - (\bar{x} \cdot \bar{y})$$

Application :

La JOELPRO SA vous propose d'étudier la demande de riz sur le petit marché du bord de la sanaga à Edéa. On prélève à cet effet les chiffres du tableau ci-dessous, relatifs aux quantités achetées (y_i) en fonction du prix du kilogramme au détail (x_i) :

N°	X_i	Y_i	$(x_i)^2$	$(y_i)^2$	$X_i Y_i$
1	350	750	122500	562500	262500
2	200	1750	40000	3062500	350000
3	280	850	78400	722500	238000
4	250	1100	62500	1210000	275000
5	375	700	140625	490000	262500
6	325	800	105625	640000	260000
7	275	900	75625	810000	247500
8	300	820	90000	672400	246000
9	350	750	122500	562500	262500
10	225	1500	50625	2250000	337500
total	2930	9920	888400	10982400	2741500

Travail à faire :

1. Calculez le prix moyen ($\bar{x}$) et la quantité moyenne ($\bar{y}$)
2. Calculez par la formule développée les variances $V(x)$ et $V(y)$
3. Calculez la covariance $Cov(x,y)$ de la double série.

Solution

1) Calculons $\bar{x}$ et $\bar{y}$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \rightarrow \bar{x} = \frac{2930}{10} \rightarrow \underline{\bar{x} = 293F}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} \rightarrow \bar{y} = \frac{9920}{10} \rightarrow \underline{\bar{y} = 992 \text{ unités}}$$

2) Calculons les variances

$$\begin{aligned} * V(x) &= \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \rightarrow V(x) = \frac{888400}{10} - (293)^2 \\ &\rightarrow \underline{V(x) = 2991} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * V(y) &= \frac{\sum y_i^2}{n} - (\bar{y})^2 \rightarrow V(y) = \frac{10982400}{10} - (992)^2 \\ &\rightarrow \underline{V(y) = 114176} \end{aligned}$$

3) Calculons la covariance

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{(x;y)} &= \frac{\sum x_i y_i}{n} - (\bar{x} \cdot \bar{y}) \rightarrow \text{Cov}_{(x;y)} = \frac{2741500}{10} - (293 \cdot 992) \\ &\rightarrow \underline{\text{Cov}_{(x;y)} = -16506} \end{aligned}$$

CHAPITRE 0 : LES LOGARITHMES DECIMAUX

- Définition

On appelle logarithme d'un nombre A la puissance par laquelle il faut élever 10 pour trouver ce nombre. Ainsi, si x est le logarithme décimal d'un nombre A ou aura :

$$\text{Log } A = x \rightarrow A = 10^x$$

- Propriétés

1. Le logarithme d'un produit

$$\text{Log } (A*B) = \log A + \log B$$

1. Le logarithme d'un quotient

$$\text{Log } (A/B) = \log A - \log B$$

1. Le logarithme d'une puissance

$$\text{Log } A^n = n \log A$$

1. Le logarithme d'un radical

$$\text{Log } \sqrt[n]{A} = \frac{\log A}{n} \text{ ou } \log A = n \log \sqrt[n]{A}$$

1. Quelques logarithmes remarquables

$$\text{Log } 1 = 0 ; \log 10 = 1 ; \log 100 = 2 ; \log 1000 = 3$$

1. Tous les nombres compris entre 0 et 1 ont un logarithme négatif, d'où $\log 0$ n'existe pas
2. Tout nombre positif a un logarithme, cependant les nombres négatifs n'ont pas de logarithme

Application :

1. Calculer les logarithmes suivants :

$$\text{Log } 500 ; \log 25 + \log 30 ; \log (21*2) ; \log 2/3 ; \log 5^3 ; \text{Log } \sqrt[3]{8}$$

1. Résoudre les systèmes suivants à partir des logarithmes

$$\begin{cases} A + B = 80 \\ \frac{A}{B} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10^{(x+y)} = 100\,000 \\ 10^x = 1\,000 \end{cases}$$

SOLUTION :

CHAPITRE : LES INTERETS COMPOSES

I- Généralités

L'intérêt est défini comme le loyer de l'argent prêté.

En classe de première, nous avons étudié l'intérêt simple, en maintenant nous verrons les intérêts composés qui sont la base de tous les chapitres de la partie financières des mathématiques appliquées en terminale.

II- Capitalisation et formulation des intérêts composés.

A- Capitalisation

Soient :

- C_n : la valeur acquise
- C : le capital initial
- n : la durée de placement
- i : le taux d'intérêt pour un franc
- I : l'intérêt total produit
- I_n : l'intérêt produit à la nième année c'est-à-dire à l'année n .

Le tableau de la capitalisation à intérêt composé se présente de la manière suivante :

<i>période</i>	<i>Capitalisation début de période</i>	<i>intérêt</i>	<i>Capitalisation fin de période</i>
1	C	Ci	$C + Ci$ ou $C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)*i$	$C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2*i$	$C(1+i)^3$
-	-	-	-
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1}*i$	$C(1+i)^n$

Formulation :

- Valeur acquise : $C_n = C(1+i)^n$
- Intérêt global : $IG = C_n - C$ ou $IG = C[(1+i)^n - 1]$
- Intérêt produit au courant de l'année P : $I_p = C(1+i)^{p-1}*i$

B- Calcul de la valeur dans le cas d'un nombre de période n non entier.

Dans le concept de la formule générale, il stipule que la valeur acquise, nous allons toujours considérer que dans cette formule, n le nombre de période était toujours un nombre entier.

Il peut arriver dans certains cas que le nombre de période de placement est un nombre entier. Comme par exemple 3 ans 6 mois.

Cette période est décomposée en deux parties :

- Une partie entière qui est de 3 ans,
- Une partie fractionnaire qui est de 6/12

Pour résoudre la détermination de la valeur acquise dans un exercice de capitalisation des intérêts composés, deux méthodes peuvent être envisagées lorsque le nombre de période est un nombre entier ; ces méthodes sont :

- La méthode rationnelle
- La méthode commerciale

1. La méthode rationnelle

Elle est avantageuse pour le prêteur (celui qui donne de l'argent)

Le principe de cette méthode consiste à calculer la valeur par le capital pour la période correspondante à la partie entière notée K , puis à ajouter à cette valeur acquise l'intérêt qu'elle produit pendant la période correspondante à la partie fractionnaire notée p/q

Notons que n sera égale à : $n = k + \frac{p}{q}$

Nous avons le graphe suivant pour illustrer les données :



- **La valeur acquise de la partie entière K**

$$C_k = C (1+i)^k$$

- **l'intérêt simple produit par C_k sur la partie fractionnaire sera :**

$$I_s = C (1+i)^k * \frac{p}{q} * i$$

- **la valeur acquise totale sera**

$$C_n = C_k + I_s \rightarrow C_n = C (1+i)^k + C (1+i)^k * \frac{p}{q} * i$$

$$C_n = C (1+i)^k \left[1 + \left(\frac{p}{q} * i \right) \right]$$

Application :

Vous êtes stagiaire à la JOELPRO SA et le directeur financier vous demande de déterminer la valeur acquise d'une somme de 5 000 000f placée dans une banque pendant 5 ans 8 mois au taux annuel de 5%.

Solution :

Déterminons la valeur acquise de cette somme déposée en banque

$$C_{5,667} = C (1+0,05)^5$$

$$\underline{C_{5,667} = 6\,594\,121f}$$

1. la méthode commerciale

cette méthode est avantageuse pour l'emprunter (celui qui prend de l'argent)

elle stipule qu'on doit capitaliser à intérêt composé la partie entière ainsi que la partie fractionnaire d'où :

1.

$$\text{Ou } C_n = C (1+i)^k(1+i)^{p/q}$$

•

Reprenons l'exercice précédent et déterminons la valeur acquise

$$C_{5,667} = 5\,000\,000 (1+0,05)^5(1+0,05)^{8/12}$$

$$C_{5,667} = 6\,592\,387f$$

Après calcul nous constatons que ce résultat est inférieur à celui trouvé précédemment d'où l'avantage pour l'emprunteur.

- Notion de taux équivalent et de taux proportionnel

1. Notion de taux proportionnel

Deux taux correspondent à des périodes différentes de capitalisation sont dits proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport de leurs périodes de capitaux respectifs. Ainsi :

- ***Le taux semestriel (i_s)***

$$i_a = 2 * i_s \rightarrow i_s = i_a / 2$$

- ***Le taux trimestriel (i_t)***

$$i_a = 4 * i_t \rightarrow i_t = i_a / 4$$

- ***Le taux mensuel (i_m)***

$$i_a = 12 * i_m \rightarrow i_m = i_a / 12$$

1. Notion de taux équivalent

Deux taux correspondants à des périodes de capitalisation différentes sont dits équivalent lorsque pour une même durée de placement, ils font preuve à des valeurs acquises identiques à intérêt composé. Ainsi :

- ***Le taux semestriel (i_s)***

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 \rightarrow i_s = \sqrt[2]{1 + i_a} - 1$$

- ***Le taux trimestriel (i_t)***

$$(1 + i_a) = (1 + i_t)^4 \rightarrow i_t = \sqrt[4]{1 + i_a} - 1$$

- ***Le taux mensuel (i_m)***

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12} \rightarrow i_m = \sqrt[12]{1 + i_a} - 1$$

- application :

Déterminez les taux mensuels, trimestriels et semestriels équivalent et proportionnels au taux annuel de 15%.

Solution :

a- Les taux proportionnels

- ***Le taux semestriel (i_s)***

$$I_a = 2 * i_s \rightarrow i_s = 15/2 \rightarrow \mathbf{i_s = 7,5\% \text{ ou } 0,075}$$

- ***Le taux trimestriel (i_t)***

$$I_a = 4 * i_t \rightarrow i_t = 15/4 \rightarrow \mathbf{i_t = 3,75\% \text{ ou } 0,0375}$$

- ***Le taux mensuel (i_m)***

$$I_a = 12 * i_m \rightarrow i_m = 15/12 \rightarrow \mathbf{i_m = 1,25\% \text{ ou } 0,0125}$$

b- Les taux équivalents

- ***Le taux semestriel (i_s)***

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 \rightarrow i_s = \sqrt[2]{1 + 0,15} - 1 \rightarrow \mathbf{i_s = 0,0723}$$

- ***Le taux trimestriel (i_t)***

$$(1 + i_a) = (1 + i_t)^4 \rightarrow i_t = \sqrt[4]{1 + 0,15} - 1 \rightarrow \mathbf{i_t = 0,0355}$$

- ***Le taux mensuel (i_m)***

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12} \rightarrow i_m = \sqrt[12]{1 + 0,15} - 1 \rightarrow \mathbf{i_m = 0,0117}$$

- Interpolation linéaire sur le taux et sur le temps

On procède à l'interpolation linéaire lorsque le taux d'intérêt ou le temps de placement ne figure pas dans la table financière.

1. Interpolation linéaire sur le taux

Soit :

- t le taux recherché donnant une valeur x de $(1+i)^n$;
- t_1 le taux directement inférieur à t donnant une valeur x_1 de $(1+i)^n$;
- t_2 le taux directement supérieur à t donnant une valeur x_2 de $(1+i)^n$ correspond à t tel que :

$$t_1 < t < t_2$$

$$x_1 < x < x_2$$

d'où la formule suivante :

$$t = t_1 + (t_2 - t_1) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

b - Interpolation linéaire sur le temps

Soit :

- n : le temps recherché donnant une valeur y de $(1+i)^n$;
- n_1 : la durée de placement directement inférieure à n donnant une valeur y_1 de $(1+i)^n$ quelconque ;
- n_2 : la durée de placement directement supérieure à n donnant une valeur y_2 de $(1+i)^n$ quelconque.

Procéder à l'interpolation linéaire consiste à encadrer n de manière à obtenir la valeur y de $(1+i)^n$ correspondant à la durée n ;

Ainsi on aura :

$$n_1 < n < n_2$$

$$y_1 < y < y_2$$

d'où la formule suivante :

$$n = n_1 + (n_2 - n_1) \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

- actualisation à l'intérêt composé

c'est une opération qui est l'inverse de la capitalisation. Elle conduit à la détermination des notions telles que : l'escompte, la valeur actuelle et l'équivalence

- notion de la valeur actuelle à intérêt composé (V_a)

Soit :

- C : la valeur nominale d'un capital
- V_a : la valeur actuelle
- n : la durée séparant l'échéance à la date de négociation
- i : le taux d'intérêt pour 1f

Formulation

$$V_a = C (1+i)^{-n}$$

Exemple : calculez la valeur actuelle d'un capital de 10 000 000f payable dans 5 ans à un taux annuel de 7%.

Solution :

$$V_a = C (1+i)^{-n} \rightarrow V_a = 10\,000\,000 (1+0,07)^{-5} \rightarrow \underline{V_a = 7\,129\,861,79f}$$

- notion d'escompte

Un capital C exigible avant son échéance n à un taux i pour un 1f supporte un escompte e qui est égal à la différence entre sa valeur nominale C et sa valeur actuelle V_a .

Formulation :

$$e = C - C (1+i)^{-n} \rightarrow e = C [1 - (1+i)^{-n}]$$

exemple : calculez l'escompte produit par un capital de 3 000 000f en 4 années à un taux annuel de 12%.

Solution :

Calculons l'escompte produit

$$e = C [1 - (1+i)^{-n}] \rightarrow e = 3\,000\,000 [1 - (1+0,12)^{-4}] \rightarrow \underline{e = 1\,093\,445,77f}$$

- capitaux équivalents à intérêt composé

Deux capitaux C_1 et C_2 d'échéance respective n_1 et n_2 négociés à un taux i sont dits équivalents à intérêt composé lorsque leur valeur actuelle V_{a1} et V_{a2} sont égales.

$$V_{a1} = V_{a2} \rightarrow C_1 (1+i)^{-n_1} = C_2 (1+i)^{-n_2}$$

Exemple :

Un capital de 6 802 445f échéant dans 4 ans est négocié au taux de 8% ; à la même date, un autre capital de 8 569 120f échéant dans 7 ans est négocié au même taux. Calculez les deux valeurs actuelles et vérifiez l'équivalence.

Solution :

$$Va_1 = Va_2$$

$$\rightarrow Va_1 = 6\,802\,445 (1+0,08)^{-4} = 5\,000\,001,148 \approx 5\,000\,000$$

$$\rightarrow Va_2 = 8\,569\,120 (1+0,08)^{-7} = 4\,999\,995,829 \approx 5\,000\,000$$

Vérification :

$$Va_1 = Va_2 \rightarrow 5\,000\,000 = 5\,000\,000$$

- remplacement d'un capital par un autre

le remplacement d'un règlement ou d'un capital C_1 d'échéance n_1 au taux i pour un autre capital C_2 d'échéance n_2 n'est légitime que si les valeurs actuelles des deux capitaux sont égales à la date du remplacement.

Exemple : on désire remplacer un règlement de 40 000f qui était prévu dans 3 ans par un autre règlement Y échéant dans 5 ans.

Calculez la valeur de l'autre règlement Y en prenant comme taux d'escompte 8% l'an.

Solution :

Calculons le règlement Y

Selon le principe de l'équivalence des effets ou des capitaux :

$$Va_1 = Va_2 \rightarrow 40\,000 (1+0,08)^{-3} = Y (1+0,08)^{-5} \rightarrow \underline{Y = 46\,656f}$$

- remplacement de plusieurs capitaux par un capital unique

Le remplacement de plusieurs capitaux ($C_1 ; C_2 ; \dots$) d'échéance ($n_1 ; n_2 ; \dots$) au taux i pour un autre capital unique C d'échéance n n'est légitime que si la valeur actuelle du capital unique est égale aux valeurs actuelles des autres capitaux à la date du remplacement.

Nous avons la relation suivante :

$$\rightarrow Va = \sum Va_n \text{ ou } Va = Va_1 + Va_2 + \dots + Va_n$$

$$\rightarrow C (1+i)^{-n} = C_1 (1+i)^{-n_1} + C_2 (1+i)^{-n_2} + \dots + C_n (1+i)^{-n_n}$$

Exemple : un commerçant décide de remplacer le 01/01/2000 trois capitaux respectivement :

- 100 000f échéant le 01/01/2002
- 200 000f échéant le 01/01/2003
- 150 000f échéant le 01/01/2005

Par un capital unique échéant le 01/01/2004

TAF : calculez le capital unique en tenant compte du taux d'escompte de 9%

Solution :

Calculons le capital unique

$$\rightarrow V_a = \sum V_{a_n} \text{ ou } V_a = V_{a_1} + V_{a_2} + \dots + V_{a_n}$$

- Procédons au décompte des échéances
- n_1 : du 01/01/2000 $\rightarrow$ 01/01/2002 = 2 ans
- n_2 : du 01/01/2000 $\rightarrow$ 01/01/2003 = 3 ans
- n_3 : du 01/01/2000 $\rightarrow$ 01/01/2005 = 5 ans
- n : du 01/01/2000 $\rightarrow$ 01/01/2004 = 4 ans

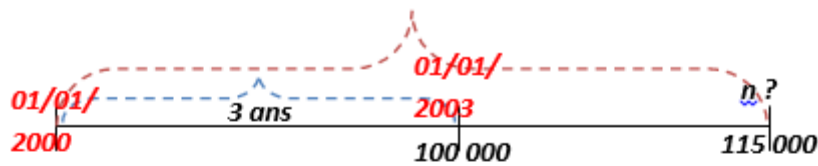
$$\rightarrow C (1,09)^{-4} = 100\,000 (1,09)^{-2} + 200\,000 (1,09)^{-3} + 150\,000 (1,09)^{-5}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{C = 474\,424,6789f}}$$

- détermination d'une échéance

On décide le 01/01/2000 de remplacer un règlement de 100 000f qui aurait lieu le 01/01/2003 par un règlement qui s'élève à 115 000f. à quelle date avoir lieu le règlement de remplacement. Taux annuel 6%.

Solution :



$$Va_1 = Va_2$$

$$100\,000 (1,06)^{-3} = 115\,000 (1,06)^{-n}$$

$$83\,961,9283 = 115\,000 (1,06)^{-n}$$

$$(1,06)^{-n} = \frac{83\,961,9283}{115\,000}$$

$$(1,06)^{-n} = 0,7301037244$$

$$\text{Log } (1,06)^{-n} = \text{log } 0,7301037244$$

$$-n \log (1,06) = \log 0,7301037244$$

$$-n = \frac{\log 0,7301037244}{\log 1,06}$$

$$-n = - 5,398568072$$

$$n = 5,398568072$$

d'où 5 ans 4 mois 24 jours soit le 24 mai 2006

- détermination de l'échéance commune

le principe est le même que celui du capital unique.

Exemple : on remplace le 01/01/2000 quatre règlements :

- 2 000 000f échéant le 01/01/2001
- 3 000 000f échéant le 01/01/2003
- 1 000 000f échéant le 01/01/2004
- 4 000 000f échéant le 01/01/2007

Par un règlement unique de 10 620 046,93f

TAF : déterminez l'échéance de ce règlement au taux d'escompte de 7%.

Solution :

Déterminons l'échéance commune

$$\rightarrow Va = \sum Va_n \text{ ou } Va = Va_1 + Va_2 + \dots + Va_n$$

- Procédons au décompte des échéances
- n_1 : du 01/01/2000 $\rightarrow$ 01/01/2001 = 1 an
- n_2 : du 01/01/2000 $\rightarrow$ 01/01/2003 = 3 ans
- n_3 : du 01/01/2000 $\rightarrow$ 01/01/2004 = 4 ans
- n_4 : du 01/01/2000 $\rightarrow$ 01/01/2007 = 7 ans

$$\rightarrow 10\,620\,046,93 (1,07)^{-n} = 2\,000\,000 (1,07)^{-1} + 3\,000\,000 (1,07)^{-3} + 1\,000\,000 (1,07)^{-4} + 4\,000\,000 (1,07)^{-7}$$

$$\rightarrow 10\,620\,046,93 (1,07)^{-n} = 7\,571\,946,689$$

$$\rightarrow (1,07)^{-n} = \frac{7\,571\,946,689}{10\,620\,046,93}$$

$$(1,07)^{-n} = 0,7129861797$$

$$\text{Log } (1,07)^{-n} = \text{log } 0,7129861797$$

$$-n \log (1,07) = \text{log } 0,7129861797$$

$$-n = \frac{\text{log } 0,7129861797}{\text{log } 1,07}$$

$$-n = -4,9999999$$

$$\underline{n \approx 5 \text{ ans soit le } 01/01/2005}$$

CHAPITRE : LES ANNUITES

- Généralités

L'annuité est une suite de versement effectuée à intervalle de temps constant dans l'intention de rembourser une dette ou de constituer un capital.

Les annuités sont généralement des sommes payables à des intervalles de temps constant.

L'intervalle de temps séparant le paiement de deux annuités est appelé période d'où :

- si la période est l'année : on parlera d'annuité.
- Si la période est le semestre : on parlera de semestrialité.
- Si la période est le trimestre ; on parlera de trimestrialité.
- Si la période est le mois : on parlera de mensualité.

Les annuités peuvent être versées :

- En début de période : c'est le cas des annuités de placement. Dans ce cas, le 1^{er} versement peut être effectué dès la signature du contrat.
- En fin de période : c'est le cas des annuités de remboursement, le 1^{er} versement ou remboursement intervient à la fin de la période.

Elles peuvent aussi être versées dans le but de :

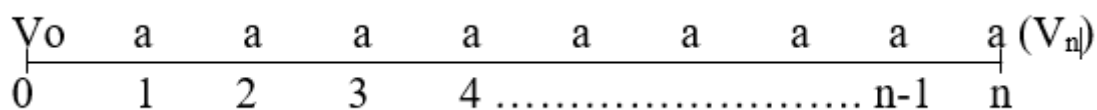
- Constituer un capital : ce sont les annuités de placement ou de capitalisation
- Rembourser une dette : c'est le cas des annuités de remboursement.

II-les annuités constantes de fin de période

Les caractéristiques des annuités constantes de fin de période sont les suivantes :

- La valeur acquise (V_n) : elle est obtenue immédiatement après le dernier versement.
- La valeur actuelle ou d'origine (V_0) : elle est obtenue une période avant la date du premier versement.

Nous aurons la représentation suivante :



- La valeur acquise (V_n)

La valeur acquise d'une suite d'annuité constante de fin de période est une suite géométrique ayant les caractéristiques suivante :

- De premier terme a (annuité)
- De raison $(1+i)$

$$D'où V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

NB : L'expression $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ se trouve dans la table financière N°3

1. Exemple :

Calculez la valeur acquise par une suite de 15 annuités de fin de période de 320 000f chacune au taux de capitalisation de 8%.

Solution :

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \rightarrow V_n = 320\,000 \frac{(1,08)^{15} - 1}{0,08} \rightarrow V_n = 8\,688\,676,457f$$

Remarque : en partant de la formule de la valeur acquise, nous pouvons déterminer le taux et le nombre d'annuité par la relation suivante :

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- Les logarithmes ou la table financière pour n
- La table financière N°3 pour i

Exemple :

18 annuités de 5 000f chacune ont une valeur acquise de 200 000f ; déterminez le taux de capitalisation

Solution

1. Calcul de l'annuité (a)

Formulation

$$a = V_n \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

exemple : un capital de 24 214 120f a été constitué par le versement de 14 annuités constante de fin de période a été capitalisé au taux annuel de 8%

TAF : calculez le montant de l'annuité constante.

Solution :

Calculons l'annuité constante

Données :

$$n = 14 \quad ; \quad i = 0,08 \quad ; \quad V_n = 24\,214\,120$$

$$a = V_n \frac{i}{(1+i)^n - 1} \rightarrow a = 24\,214\,120 \frac{0,08}{(1,08)^{14} - 1} \rightarrow \underline{a = 999\,966,9 \approx 1\,000\,000f}$$

1. Calcul du nombre d'annuité

Le nombre d'annuité correspond toujours à un nombre entier. Si sa valeur trouvée est un nombre non entier, on doit procéder par la discussion des hypothèses pour interpréter le nombre d'annuité.

Exemple : combien d'annuité constante de 10 000f faut-il verser pour obtenir par capitalisation au taux de 7% au moment du dernier versement d'une valeur de 150 000f.

Solution :

Déterminons le nombre d'annuité

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \rightarrow \frac{150\,000}{10\,000} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \rightarrow \mathbf{15} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

D'après la table financière N°3 n est compris entre 10 et 11 versements

- Calcul de la valeur actuelle ou d'origine (V_0)

1. Définition et détermination

On appelle valeur actuelle ou d'origine d'une suite d'annuité constante de fin de période, le total exprimé d'une période avant le versement de la 1^{ère} annuité. Elle se détermine à travers la formule suivante :

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Exemple : calculez la valeur actuelle de 15 annuités de 10 000f chacune au taux d'actualisation de 8% l'an.

Solution :

Calculons la valeur actuelle

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \rightarrow V_0 = 10\,000 \frac{1 - (1,08)^{-15}}{0,08} \rightarrow \mathbf{V_0 = 85\,594,78f}$$

1. Calcul de l'annuité

Elle se détermine à partir de la formule suivante :

$$a = V_o \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

exemple : 10 annuités constantes actualisées au taux de 10,5% ont pour valeur actuelle 2 000 000 ; calculez le montant de l'annuité.

Solution :

Calculons l'annuité

$$a = V_o \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \rightarrow a = 2\,000\,000 \frac{0,105}{1 - (1,105)^{-10}} \rightarrow \underline{a = 332\,514,64f}$$

1. Calcul du taux d'actualisation

Il se détermine à travers la relation suivante :

$$\frac{V_o}{a} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

1. Calcul du nombre d'annuité

La relation de détermination de n est la même que celle du taux.

$$\frac{V_o}{a} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Exemple : JOELPRO a emprunté une somme de 10 000 000f remboursable en annuité constante au 01/01/2000 au taux de 10%. Date du premier versement 01/01/2001 montant de l'annuité 1 650 000f. déterminez le nombre de versement à effectuer par JOELPRO.

Solution :

Déterminons le nombre de versement

$$\frac{V_o}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \rightarrow \frac{10\,000\,000}{1\,650\,000} = \frac{1-(1,1)^{-n}}{0,1} \rightarrow 6,060606 = \frac{1-(1,1)^{-n}}{0,1}$$

$$\rightarrow 0,6060606 = 1 - (1,1)^{-n} \rightarrow (1,1)^{-n} = 1 - 0,6060606$$

$$\rightarrow (1,1)^{-n} = 0,393939 \rightarrow \log (1,1)^{-n} = \log 0,393939$$

$$\rightarrow -n \log 1,1 = \log 0,393939 \rightarrow -n = \frac{\log 0,393939}{\log 1,1}$$

$$\rightarrow -n = -9,77 \rightarrow n = 9,77$$

N est compris entre 9 et 10 versements

- Les annuités de début de période
- 1. Capitalisation des annuités de début de période

Lorsque les annuités sont versées en début de période, dans le but de constituer un capital ; on parle d'annuité de début de période. La formule de la valeur acquise est la suivante :

$$V_n = a (1 + i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

1. Calcul de l'annuité

De la formule générale, nous tirons celle de l'annuité comme suit :

$$a = V_n \frac{i}{(1+i)^n - 1} (1 + i)^{-1}$$

exemple : JOELPRO souhaite constituer un capital de 17 000 000f pour le versement de 20 annuités constantes de début de période au taux de 10% l'an. Déterminez le montant de l'annuité constante.

Solution :

Déterminons le montant de l'annuité constante

$$a = V_n \frac{i}{(1+i)^n - 1} (1+i)^{-1} \rightarrow a = 17\,000\,000 \frac{0,1}{(1,1)^{20} - 1} (1,1)^{-1}$$

$$\rightarrow \underline{a = 269\,808,29f}$$

1. calcul du nombre d'annuité

partant de la formule de la valeur acquise nous pouvons tirer celle du nombre d'annuité comme suit :

$$n = \frac{\log \frac{V_n \cdot i}{a(1+i)} + 1}{\log(1+i)}$$

Exemple : combien faut-il verser d'annuités de début de période de 1 000 000 chacune pour constituer un capital de 10 000 000 un an après le versement de la dernière annuité au taux de capitalisation de 5%.

Solution :

Déterminons le nombre d'annuités à verser

$$n = \frac{\log \frac{10\,000\,000 \times 0,05}{1\,000\,000(1,05)} + 1}{\log(1,05)} \rightarrow n = \frac{\log 1,476190}{\log 1,05} \rightarrow \underline{n = 7,9820}$$

N est compris entre 7 et 8 versements annuels

1. la valeur actuelle d'une suite d'annuités de début de période

formulation :

$$V_o = a (1+i) \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Exemple : calculez la valeur actuelle d'une suite de 8 annuités de début de période de 1 000 000f chacune au taux de 5%.

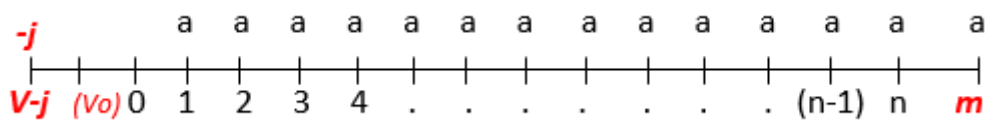
Solution :

Calculons la valeur d'origine

$$V_o = 1\,000\,000 (1,05) \frac{1-(1,05)^{-8}}{0,05} \rightarrow \underline{v_o = 6\,786\,360f}$$

1. évaluation d'une suite d'annuité à une date quelconque

- évaluation à une époque m



Formulation :

$$V_m = \left[a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^m \text{ ou } V_m = V_o (1+i)^m \text{ ou } V_m = V_n (1+i)^{m-n}$$

$$\text{Avec } V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- évaluation à l'époque p avec $0 < p$*

Formulation

$$V_p = V_o (1+i)^p \text{ ou } V_p = \left[a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^p$$

- évaluation à l'époque j avec $j < 0$*

Formulation :

$$V_{-j} = V_o (1+i)^{-j} \text{ ou } V_{-j} = \left[a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^{-j}$$

Exemple : un commerçant qui devrait s'acquitter d'une dette par versement de 5 annuités constantes de 10 000f chacune. La première payable un an après obtient de s'acquitter par un versement unique à la fin de la septième année. Quelle sera le montant de ce versement unique au taux de 6% l'an

Solution :

Déterminons le montant de ce versement

$$V_p = \left[a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^p \rightarrow V_7 = \left[10\,000 \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06} \right] (1,06)^7$$

A retenir :

- lorsqu'on se place pour évaluer une suite d'annuité une période avant le 1^{er} versement, la suite est dite immédiate.

$$V_o = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

- lorsqu'on se place pour évaluer une suite d'annuité t période avant la date à laquelle elle est dite immédiate, la suite d'annuité est dite différée d'un temps t (t pouvant représenter un nombre non entier de période).

$$V_{-t} = \left[a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^{-t}$$

- lorsqu'on se place pour évaluer une suite d'annuité après la date à laquelle elle est immédiate, la suite est dite anticipée.

$$V_t = \left[a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^t$$

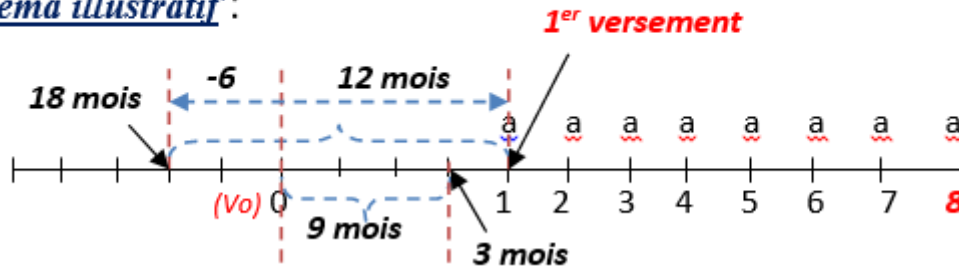
Active
Accédez

Exemple : soit une suite de 8 annuités de fin de période de 10 000f chacune, déterminez au taux de 6% l'an la valeur de l'annuité en se plaçant :

- un an avant le 1^{er} versement
- 18 mois avant le 1^{er} versement
- 3 mois avant le 1^{er} versement

Solution :

Schéma illustratif :



Déterminons la valeur de l'annuité en nous plaçant :

- un an avant le 1^{er} versement

$$V_0 = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \rightarrow V_0 = 10\,000 \frac{1-(1,06)^{-8}}{0,06} \rightarrow \underline{V_0 = 62\,097,938f}$$

- 18 mois avant le 1^{er} versement

$$V_{-t} = \left[a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^{-t} \rightarrow V_{-6} = \left[a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^{-6}$$
$$\underline{V_{-6} = 60\,314,85f}$$

- 3 mois avant le 1^{er} versement

$$V_t = \left[a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^t \rightarrow V_3 = \left[a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^{9/12}$$
$$\underline{V_3 = 64\,871,896f}$$

- Echéance moyenne d'une suite d'annuité

On appelle échéance moyenne d'une suite d'annuité, l'époque à laquelle la valeur acquise par la suite d'annuité est égale à la somme des versements effectifs.

$$na = \left[a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^x$$

Après simplification des annuités (a) nous aurons :

$$n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} (1+i)^x \rightarrow (1+i)^x = n \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\text{D'où } x = \frac{\log n \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}{\log(1+i)} \text{ avec } x : \text{l'échéance moyenne}$$

et n : le nombre d'annuité.

Exemple :

Déterminez l'échéance moyenne d'une suite de 10 annuités constantes de fin de période au taux de 6% l'an.

Solution :

Déterminons l'échéance moyenne

$$x = \frac{\log n \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}{\log(1+i)} \rightarrow x = \frac{\log 10 \frac{0,06}{1-(1,06)^{-10}}}{\log(1,06)} \rightarrow x = \frac{\log 1,35867958}{\log 1,06}$$

$x = 5,25 \rightarrow 5 \text{ ans, } 3 \text{ mois, } 3 \text{ jours soit le 3 avril de la 6}^{\text{ème}} \text{ année}$

- Remplacement d'une suite d'annuités par une autre suite d'annuités

Pour que le remplacement soit équitable, il faudrait qu'à un taux donné qu'il ait équivalence entre les deux suites d'annuités.

Exemple : un industriel doit au terme d'un contrat de bail verser 4 annuités constantes de 50 000f, la première venant à échéance dans un an. Il obtient de s'acquitter par le versement de 10 semestrialités constantes, la première venant à échéance dans 18 mois.

TAF : déterminez le montant de chacune des semestrialités, les calculs effectués au taux semestriel de 4%.

Solution :

- Trouvons le taux équivalent annuel
 $i_a = (1 + i_s)^2 - 1 \rightarrow i_a = (1,04)^2 - 1 \rightarrow i_a = 0,0816$
- Pour déterminer le montant de chacune des semestrialités, nous allons égaliser les valeurs actuelles

$$V_{a1} = V_{a2}$$

$$50\,000 \frac{1-(1,0816)^{-4}}{0,0816} = a \frac{1-(1,04)^{-10}}{0,04} (1,04)^{-2}$$

Après résolution **$a = 22\,005,42f$**

CHAPITRE 3 : LES EMPRUNTS INDIVIS

- **Définition**

C'est un prêt accordé par une seule institution financière. Les emprunts indivis sont généralement amortissables au moyen des annuités constantes.

- **Eléments du tableau d'amortissement d'un emprunt indivis**

1. **L'annuité constante notée (a)**

C'est la charge financière périodique constante payée par l'emprunteur. Elle est composée d'une fraction du capital dû et de l'intérêt sur le capital dû en début de période, ainsi soit à l'annuité constante, V_0 : le montant initial de la dette ; n : la durée de vie de l'emprunt ; i : l'intérêt pour 1f de capital. Alors l'annuité sera :

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

1. **L'amortissement noté A**

C'est la fraction du capital emprunté à rembourser à la fin de chaque période.

Les amortissements d'un emprunt indivis par annuité constante sont variables. Le 1^{er} amortissement A_1 est obtenu à l'aide de relations suivantes :

$$A_1 = a - (V_0 * i) \text{ ou } A_1 = V_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Remarque : les amortissements successifs $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sont en progression géométrique de raison $(1+i)$. Le dernier amortissement A_n est ainsi obtenu à l'aide des relations suivantes :

$$A_n = A_1 (1+i)^{n-1} \text{ ou } A_n = a (1+i)^{-1} \text{ ou encore } A_n = \frac{a}{(1+i)}$$

1. L'intérêt de la période (I)

C'est le loyer du capital restant dû au début de la période concernée

$$I_1 = V_0 * i ; I_2 = V_1 * i ; I_3 = V_2 * i$$

1. La dette en début de période (V)

Elle correspond au montant initial de l'emprunt V_0 pour la 1^{ère} période et pour les périodes suivantes, elle s'obtient par la différence entre la période précédente et l'amortissement de la période précédente, ainsi :

$$V_0 = V_0$$

$$V_1 = V_0 - A_1$$

$$V_2 = V_1 - A_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$V_n = V_{n-1} - A_{n-1}$$

1. La dette en fin de période

Elle est égale à la différence entre la dette en début de période et l'amortissement de la période.

- Construction du tableau d'amortissement d'un emprunt indivis

période	Capital en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité constante	Capital fin de période
1	V_0	$I_1 = V_0 * i$	$A_1 = a - I_1$	$a = V_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$	$V_1 = V_0 - A_1$
2	V_1	$I_2 = V_1 * i$	$A_2 = a - I_2$	$V_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$	$V_2 = V_1 - A_2$
3	V_2	$I_3 = V_2 * i$	$A_3 = a - I_3$	$V_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$	$V_3 = V_2 - A_3$
n-1	V_{n-2}	$I_{n-1} = V_{n-2} * i$	$A_{n-1} = a - I_{n-1}$	$V_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$	$V_{n-1} = V_{n-2} - A_{n-1}$
n	V_{n-1}	$I_n = V_{n-1} * i$	$A_n = a - I_n$	$V_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$	$V_n = V_{n-1} - A_n$

APPLICATION

Un emprunt indivis de 5 000 000 f est remboursable par 5 annuités constantes au taux de 10%, présenter son tableau d'amortissement

Solution :

période	V_0	I	A	a	
1	5 000 000	500 000	818 987,404	1 318 987,404	4 181 012,596
2	4 181 012,596	418 101,2596	900 886,1444	1 318 987,404	3 280 126,452
3	3 280 126,452	328 012,6452	990 974,7588	1 318 987,404	2 289 151,693
4	2 289 151,693	228 915,1693	1 090 072,235	1 318 987,404	1 199 079,458
5	1 199 079,458	119 907,9458	1 199 079,4	1 318 987,404	

NB : les calculs ont été faits en utilisant les formules du tableau précédent

Remarque : lorsque les amortissements sont constants, les annuités forment une progression arithmétique décroissante de raison : $r = - (V_0 * i)/n$

La somme des amortissements S s'obtient en faisant : $S = \frac{n(A_1 + A_n)}{2}$ ou

$$S = n/2[A_1 + (A_1 + (n-1)r)]$$

NB : les calculs ont été faits en utilisant les formules du tableau précédent.

Remarque : lorsque les amortissements sont constants, les annuités forment une progression arithmétique décroissante de raison : $r = - (V_0 \cdot i)/n$

La somme des amortissements S s'obtient en faisant : $S =$ ou

$$S = n/2[A_1 + (A_1 + (n-1)r]$$

- **Calcul du capital restant dû après le paiement d'une annuité quelconque de rang P (Dp)**

Le capital restant dû ou la dette encore vivante après le paiement de la P^{ème} annuité est obtenu à l'aide des relations suivantes :

$$Dp = V_0 - \frac{V_0(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1} \text{ ou } Dp = V_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

Application :

Un emprunt indivis de 8 000 000 f est remboursable par 6 annuités constantes au taux de 15%. Calculez le capital restant dû après le paiement de la 4^{ème} annuité.

Solution :

Calculons le capital restant dû après le paiement de la 4^{ème} annuité

$$Dp = 8\,000\,000 \quad \underline{Dp = 3\,436\,578,29 \text{ f}}$$

- **Calcul du capital déjà remboursé après le paiement de la P^{ème} annuité (Rp)**

Formulation :

$$Rp = A_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i} \text{ ou } Rp = V_0 \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

Application :

Un emprunt indivis de 10 000 000 f est remboursable par 10 annuités constantes au taux de 8%. Calculez le capital déjà remboursé après le paiement de la 5^{ème} annuité.

Solution :

Calculons le capital déjà remboursé après le paiement de la 5^{ème} annuité.

$$Rp = V_0 \quad ; \quad Rp = 10\,000\,000 \quad ; \quad \underline{Rp = 4\,049\,680,647 \text{ f}}$$

- **Calcul de la somme de p amortissement**

Dans ce système les annuités ne sont pas constantes, elles suivent une progression arithmétique de raison (r). $r = (V_0 \cdot i)/n$

Et la première annuité est : $a_1 = (V_0 \cdot i) + V_0/n$

Les amortissements étant constants, les intérêts contenus dans les annuités sont eux aussi en progression arithmétique : l'expression de l'annuité de rang p+1 est : $a_{p+1} = a_1 - (p \cdot i)/2$
 $[2A_1 + (p-1)r]$

L'expression de la somme de p amortissement en fonction du 1^{er} amortissement.

$$\sum A_p = \frac{(1+i)^p - 1}{i} \left(A_1 + \frac{r}{i} \right) - \frac{pr}{i}$$

- **Emprunts à annuités constantes avec intérêts payables d'avance**

A la signature du contrat, les intérêts de la première annuité sont : $V = V_0 - V_0 \cdot i$

Si les annuités sont constantes, les amortissements sont en progression géométrique de raison (1+i). Ainsi $A_1 = V_0$

- **Emprunt remboursable en une seule fois**

Encore appelé SINKING Fund ou Fonds d'amortissement ou encore système américain c'est un système qui consiste à verser à la fin de chaque année seul l'intérêt ($V_0 \cdot i$) calculé sur le nominal.

A l'échéance de la n^{ème} année, l'intérêt ($V_0 \cdot i$) de cette dernière année est versée, augmenté du montant du capital emprunté V_0 .

L'inconvénient de ce système est que le dernier versement est trop lourd. Pour remédier, l'emprunteur prépare la dernière échéance en constituant chaque année à partir de la 1^{ère} année un fonds d'amortissement constant a de telle sorte qu'à l'expiration de n années et après capitalisation au taux annuel i, l'emprunteur puisse faire face au remboursement du montant V_0 .

$$\text{Ainsi : } V_0 = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ et } A_1 = V_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

L'annuité constante que supportera l'emprunteur annuellement sera :

$$a \text{ (amort. + VO*i)} = Vo \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i \right] \text{ ou } a = Vo \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

- **Emprunt à taux progressif**

Soit V_0 : le montant de l'emprunt, i' : le second taux, i : le premier taux, n : le nombre d'annuité relatif à i' , n' : le nombre d'annuité relatif à i .

Exercices d'application :

CHAPITRE 6 : LES EMPRUNTS OBLIGATIONS

1. **Définition**

C'est un emprunt auquel l'emprunteur (société ou collectivité publique) s'adresse à de nombreux prêteurs en proposant le plus souvent sous forme d'émission publique par l'intermédiaire des banques des obligations (titre négociable représentant une fraction de l'emprunt).

Les obligations sont remboursées le plus souvent par voie de tirage au sort et quelques fois en blocs à une date fixée d'avance lors de l'émission (bons).

1. **Éléments du tableau d'amortissement d'un emprunt obligation**

Ce sont :

- **La valeur nominale notée C** : c'est le montant initial de l'emprunt ; elle est unique pour toutes les obligations du même emprunt. Autrement dit c'est la valeur nominale.
- **Le coupon d'intérêt noté C_i** : c'est l'intérêt calculé sur la valeur nominale au taux offert par l'établissement du débiteur.
- **La valeur d'émission** : c'est le prix auquel les opérations sont souscrites. L'émission se fait le plus souvent en dessous de la valeur nominale, on parle d'émission en dessous du pair.
- **La valeur de remboursement notée R** : c'est le prix auquel le titre est remboursé à l'échéance ; elle est supérieure ou égale à la valeur nominale
- **Le nombre d'obligation** : c'est l'ensemble des obligations, il est noté $N_1, N_2, N_3, \dots$ N_n représentant le nombre d'obligation en circulation après le premier tirage.
- **Le taux nominal i** : c'est le taux servant au calcul du coupon d'intérêt.

1. **Théorie générale des emprunts obligations**

Soient :

N : le nombre d'obligation d'émission

E : le prix d'émission d'une obligation

C : la valeur nominale d'une obligation

R : la valeur de remboursement d'une obligation avec $R \geq C$

i : le taux minimal servant au calcul des coupons d'intérêt

N₁, N₂, N₃, ... N_n : le nombre d'obligation restant en circulation après le 1^{er}, le 2^{ème}, le 3^{ème}, le n^{ème} tirage.

A₁, A₂, A₃, ... A_n : le nombre de titre amorti au 1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème}, et n^{ème} tirage

a₁, a₂, a₃, ... a_n : les annuités successives comportant le service du coupon sur le titre encore en circulation et le remboursement d'un certain nombre d'obligation. En décomposant chaque annuité en amortissement et intérêt, nous pouvons avoir le tableau suivant :

Période	Annuité (a)	Nombre d'obligations vivantes
Année 1	$a_1 = NC + A_1R$	$N_1 = N - A_1$
Année 2	$a_2 = N_1C + A_2R$	$N_2 = N_1 - A_2$
Année 3	$a_3 = N_2C + A_3R$	$N_3 = N_2 - A_3$
Année p	$a_p = N_{p-1}C + A_pR$	$N_p = N_{p-1} - A_p$
Année p+1	$a_{p+1} = N_pC + A_{p+1}R$	$N_{p+1} = N_p - A_{p+1}$
Année n-1	$a_{n-1} = N_{n-2}C + A_{n-1}R$	$N_{n-1} = N_{n-2} - A_{n-1}$
Année n	$a_n = N_{n-1}C + A_nR$	$N_{n-1} = N_{n-1} - A_n = 0$

Remarque : la dernière annuité est égale au dernier amortissement augmenté de ses intérêts.

1. **Relation entre le nombre d'obligations émises et les amortissements**
- 2.

1. **Relation entre les annuités et les amortissements**

- Si les annuités sont constantes, le nombre de titre théoriquement amorti forme une progression géométrique de raison $(1+r)$ avec : $r = (C \cdot i / R)$

Ainsi $a_n - a_{n-1} = 0$ avec $A_n = A_{n-1}(1+r)$

Cours préparé par M. ZE BELINGA ALBERT DIDIER PLETP/CG Diplômé de l'ENSET d'EBOLWA et de L'Université de Yaoundé 2 SOA (00237) 693777425 / 678 27 75 91
albertze93@yahoo.com

- Si les annuités sont constantes et si le remboursement à lieu au pair c'est-à-dire $R = C$ et $R = I$ alors $A_n = A_{n-1}(1+i)$
- Si les amortissements sont constants, chaque amortissement est égal à N/n et les annuités forment une progression arithmétique de raison $(-NC/n)$

Nous déduisons que les amortissements étant de raison $(1+r)$, il est possible de les exprimer tous en fonction du premier.

- Au-dessus du pair $R > C$

$$N \rightarrow A_1 = \text{ou } A_1 =$$

- En dessous du pair $R = C$

$$N = A_1 \text{ ou } A_1 \rightarrow N =$$

1. Relation entre le capital à rembourser et les annuités

- Si les annuités sont constantes, nous aurons le capital à rembourser.

$$NR = a \text{ ou } NR = a$$

- Si $R > C \rightarrow a = NR$
- Si $R = C \rightarrow a = NR$

Application

Une société a émis un emprunt obligation comportant 20 000 obligations de valeur nominale 2000f rapportant un coupon annuel 110f et remboursable à 2200f en 15 tirages au sort par le système d'annuité théoriquement constant.

Travail à faire :

1. Calculez le 1^{er} amortissement théorique
2. Calculez le dernier amortissement théorique
3. Calculez l'annuité constante théorique.

-

Solution :

1. Calculons le 1^{er} amortissement théorique

2. _____

$$C = 110 ; R = 2200 ; N = 20\,000 ; n = 15 ; r = C/R \rightarrow r = 110/2200 = 0,05$$

$$A_1 = \rightarrow A_1 = \rightarrow A_1 = 926,84f$$

-

1. Calculons le dernier amortissement théorique

$$A_n = A_1 (1+r)^{n-1} \rightarrow A_{15} = 926,84(1,05)^{15-1} \rightarrow A_{15} = 1\,855,079f$$

1. Calculons l'annuité constant théorique

$$a = NR \rightarrow a = (20\,000 * 2\,200 \rightarrow a = 4\,239\,060,655f$$

CHAPITRE 7 : LA RENTABILITE DES INVESTISSEMENTS

Objectifs

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- Définir investissement, les cash-flows
- Déterminer la valeur actuelle nette
- Déterminer le taux interne de rentabilité
- Déterminer le délai de récupération de l'investissement
- Déterminer l'indice ou le taux de profitabilité

1. Définition

L'investissement c'est immobilisé les ressources financières dans des opérations donc les résultats s'étendront sur plusieurs années.

C'est un moyen d'assurer l'avenir toute fois en supportant des coûts au moment présent.

1. Technique de calcul de la rentabilité des investissements

On décide d'investir lorsque les capitaux dégagés dans le futur par l'investissement sont au moins égaux au montant investi.

On prend en compte dans la décision d'investir deux éléments :

- Les dépenses d'investissements : c'est l'ensemble des dépenses engagées dans le but de réaliser un investissement
- Les capitaux dégagés : on appelle cash-flow ; les capitaux que l'entreprise tire année par année de l'investissement réalisé.

Pour une année donnée on a : cash-flow = recettes – dépenses

Ou cash-flow = résultat net + dotation aux amortissements

La rentabilité objective d'un projet est celle calculée à partir des cash-flows hors mis toute considération du financement du projet.

1. Evaluation d'un projet d'investissement : l'actualisation

Evaluer un projet vise à comparer les cash-flows aux capitaux investis. Il faut donc que les capitaux soient évalués à une même date. Il est logique de choisir l'époque 0, époque à laquelle on débourse le capital pour évaluer, ainsi on ramène les cash-flows des années successives à l'époque 0. On dira donc qu'on actualise les cash-flows.

Soient, t : le taux d'actualisation

$C_1, C_2, \dots C_n$: les cash-flows successifs

A la date 0 : $C_1(\text{actualisé}) = C_1(1+i)^{-1}$ après une année

$C_2(\text{actualisé}) = C_2(1+i)^{-2}$ après la deuxième année

$C_n(\text{actualisé}) = C_n(1+i)^{-n}$ après n année

De manière générale, la valeur actuelle des cash-flows est donc la somme des cash-flows actualisés.

• Cas des cash-flows variables

VA des cash-flows = somme des cash-flows actualisés

Ou $= C_1(1+i)^{-1} + C_2(1+i)^{-2} + \dots + C_n(1+i)^{-n}$

Remarque : on peut aussi déterminer les valeurs actuelles des cash-flows en tenant compte des charges variables et fixes, de l'impôt sur les sociétés et on utilise le tableau suivant :

éléments	Année 1	Année 2	Année 3	Année n
Chiffre d'affaires	X			
Dépenses d'exploitation (charges variables)	-DP			
Amortissement (charge fixe)	-A			
Autres charges fixes	-B			
Résultat avant l'IS (impôt)	$R = X - DP - A - B$			

Impôt sur le résultat	$IS = R \cdot 33\%$			
Résultat après impôt	$R^* = R - IS$			
Amortissement	$+A$			
Résultat net(cash-flow)	$RN = R^* + A$			
Cash-flows actualisés	$= RN (1+i)^{-1}$	$= RN (1+i)^{-2}$	$= RN (1+i)^{-3}$	$= RN (1+i)^{-n}$

- Cas des cash-flows constants

Ici on applique tout simplement la formule de la valeur actuelle ou d'origine des annuités comme suit :

Va actualisée = CF

1. Les critères d'évaluation

Pour évaluer un projet, il existe plusieurs critères tels que :

1. La valeur actuelle nette (VAN)

C'est la différence entre les cash-flows actualisés et l'investissement initial.

- Cash-flows constants

$$VAN = CF - I_0 + V_r (1+i)^{-n}$$

- Cash-flows variables

$$VAN = CF \text{ actualisés} - I_0 + \text{valeur résiduelle actualisée}$$

$$\text{Avec valeur résiduelle actualisée} = V_r (1+i)^{-n}$$

$$\text{Ou } VAN = \sum CF(1+i)^{-n} - I_0 + V_r (1+i)^{-n}$$

- Si la VAN est positive, cela implique que le projet est rentable
- Si la VAN est négative, cela implique que le projet n'est pas rentable

1. Le taux interne de rentabilité

Le taux interne de rentabilité est celui qui annule la valeur actuelle nette. La formule est donc :

Cours préparé par M. ZE BELINGA ALBERT DIDIER PLETP/CG Diplômé de l'ENSET d'EBOLOWA et de L'Université de Yaoundé 2 SOA (00237) 693777425 / 678 27 75 91
albertze93@yahoo.com

Soit x le TIR : c'est l'inconnu qui est à déterminer, on l'obtient à partir de la relation suivante : $VAN = 0$

$$\sum CF(1+i)^{-n} - I_0 = 0 \rightarrow \sum CF(1+i)^{-n} = I_0$$

Nous pouvons également trouver ce taux par interpolation linéaire dans la mesure où nous devons d'abord trouver un taux (t_1) qui rend la VAN positive et un autre (t_2) qui rend la VAN négative, puis interpoler comme suit :

$$t_1 \ll x \ll t_2$$

$$VAN_1 \gg VAN = 0 \gg VAN_2$$

Et la formule dévient :

$$TIR = t_1 + (t_2 - t_1)$$

1. Le taux de profitabilité

C'est le rapport de la valeur actuelle et l'investissement initial.

$$Tp =$$

1. Le délai de récupération

Il est égale au nombre d'année au terme duquel les bénéfices cumulés sont $\geq$ à l'investissement. Ce critère a le mérite d'être simple, facile à comprendre et à calculer. Mais il a des limites car il ignore l'étalement dans le temps des bénéfices réalisés.

TRAVAUX DIRIGES
INTERETS COMPOSES

EXERCICE 1

1. Un capital de 500 000 est placé pendant 2 ans. Quelle sera la valeur acquise si :
 - Le taux annuel est de 18% avec capitalisation annuelle des intérêts
 - Le taux mensuel est de 1,5% par mois avec capitalisation mensuelle des intérêts
1. Si on place plutôt 550 000 f pendant 3 ans 4 mois quelle sera la valeur acquise au taux de 10% (capitalisation annuelle des intérêts). Procédez par les deux méthodes de calculs.

EXERCICE 2

M. THERMANN a placé une somme de 30 000 FCFA dans son compte ouvert dans une banque au taux d'intérêt composé de 5% l'an pendant 7 ans. Quelle somme retira-t-il si la capitalisation des intérêts est semestrielle ?

EXERCICE 3 : Calculer :

- Le taux semestriel équivalent au taux annuel de 15% - Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10%
- Le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 10% - Le taux mensuel équivalent au taux semestriel de 8%
- Le taux annuel équivalent au taux mensuel de 4% - Le taux trimestriel équivalent au taux mensuel de 4%

EXERCICE 4

Un capital de 50 000 FCFA est placé par M. EDIMO au taux trimestriel de 6%. Calculer sa valeur acquise après de

6 ans de placement sachant les intérêts sont capitalisés trimestriellement.

EXERCICE 5

Calculer le taux d'un capital de 45 000 FCFA qui après 11 ans de placement donne 134 957,655 FCFA

EXERCICE 6

Une personne veut constituer un capital de 160 000 FCFA pour le 1^{er} Janvier 2009. Quelle somme doit-elle placée le 1^{er} Janvier 2002. Taux d'intérêt composé : 6% l'an

EXERCICE 7

M. MBAPPOU a placé une somme de 40 000 FCFA dans son compte ouvert à la SGC au taux trimestriel de 4,75%. Au bout de combien de temps, ce capital aura atteint 76 597,84 FCFA

EXERCICE 8

Après 2 ans 9 mois de placement à intérêts composés, un capital de 12 000 000 FCFA a acquis une valeur de 12 893 400 FCFA. Quel est le taux de placement pour une capitalisation annuelle.

EXERCICE 9

Deux capitaux dont le total est de 100 000 FCFA sont placés. L'un à intérêt simple au taux de 10% l'an, et l'autre à intérêt composé au taux de 8%. Au bout de 9 ans, ils ont acquis la même valeur. Calculer les deux capitaux.

EXERCICE 10

M. MBAH place 100 000 FCFA le 1^{er} janvier 2000. Deux ans après, il retire 25 000 FCFA. Quatre ans après le placement, il retire le solde ; à celui-ci il ajoute 11,875 FCFA. Il dispose alors de 94 000 FCFA. Calculer le taux annuel de placement à intérêts composés.

EXERCICE 11

Deux capitaux C1 et C2 dont le montant s'élève à 8 000 000 FCFA sont placés le même jour pour une durée de 6 ans à intérêt composé.

Le capital C1 est placé au taux annuel de 8% et le capital C2 au taux semestriel de 3,75%. Au bout de 6 ans, le total des intérêts produits s'élève à 4 600 732 FCFA. Calculer les deux capitaux.

EXERCICE 12

Deux capitaux placés pendant trois ans, le premier à intérêt simple de 7% et le second à intérêt composé au taux de 10%. Le premier capital étant supérieur au second de 500 000 FCFA a acquis la même valeur que celle du second capital. Calculer les montants des deux capitaux.

ESCOMPTE COMMERCIAL

Cours préparé par M. ZE BELINGA ALBERT DIDIER PLETP/CG Diplômé de l'ENSET d'EBOWA et de L'Université de Yaoundé 2 SOA (00237) 693777425 / 678 27 75 91
albertze93@yahoo.com

EXERCICE 1 :

Un capital de 2 800 000 FCFA est placé à intérêts simples à 4%. Un second capital de 2 400 000 FCFA est placé, toujours à intérêt simple, le même jour à 6%.

Travail à faire :

1. Au bout de combien de temps ces deux capitaux auront-ils la même valeur acquise ?
2. Même question si ces deux capitaux sont placés dans les mêmes conditions, mais à intérêts composés.

EXERCICE 2 :

Le 28 février, un commerçant désire remplacer deux effets, le premier d'un nominal de 280 000 FCFA à l'échéance au 30 mars, le second d'un nominal de 170 000 FCFA à échéance au 10 avril, par un seul effet à l'échéance au 30 avril (taux 5%). Calculez le nominal du troisième effet. (Année civile)

EXERCICE 3 :

Un commerçant désire remplacer un effet de nominal 15 000 000 FCFA à 5 ans par 5 effets de valeurs nominales égales à échéance aux dates 1, 2, 3, 4, 5. Calculez la valeur nominale des effets de remplacement au taux d'escompte de 6%.

EXERCICE 4 :

On appelle taux d'un placement l'intérêt de 1 franc placé pendant 1 an. Un capital A est placé à intérêts simples au taux x pendant 5 ans. On réunit alors les intérêts au capital et la somme B ainsi obtenue est placée au taux y pendant une période de 5 ans. Les intérêts sont de nouveau réunis au capital, et la somme obtenue est désignée par C.

Travail à faire :

1. Calculez C en fonction de A, x et y
2. On donne $x = 0,06$ et $y = 0,04$. Calculez le taux t auquel il aurait fallu placer le capital A à intérêts composés pour obtenir, au bout de 10 ans la somme C.

On donne les extraits de la table de logarithmes :

Log 1,2 = 0,07918

log 1,045 = 0,01912

log 1,3 = 0,11394

log 1,046 =

0,01953

EXERCICE 5 :

Un capital d'un nominal de 15 000 000 FCFA à échéance de 5 ans est négocié au taux d'escompte de 6,5% l'an.

Travail à faire :

1. Calculez sa valeur actuelle à intérêt composé
2. Calculez l'escompte supporté

EXERCICE 6 :

Un capital de 20 000 000 FCFA à échéance de 4 ans est négocié et l'escompte correspondant est de 4

742 100 FCFA. Calculez le taux annuel d'escompte

EXERCICE 7 :

On remplace trois règlements : respectivement :

- 10 000 FCFA à échéance de 2 ans
- 20 000 FCFA à échéance de 3 ans
- 15 000 FCFA à échéance de 4 ans

Par un règlement unique à échéance de 4 ans.

Travail à faire : calculez le montant de ce règlement unique au taux d'escompte de 9%.

EXERCICE 8 :

On remplace trois règlements, respectivement :

- 5 000 FCFA à échéance de 2 ans
- 4 000 FCFA à échéance de 3 ans
- 3 000 FCFA à échéance de 4 ans

Par un montant unique de 12 000 FCFA

Travail à faire :

1. Déterminez l'échéance de ce règlement taux d'escompte de 8%
2. Même question en escompte commercial à intérêt simple.

EXERCICE 9 :

Deux capitaux de valeurs nominales respectivement 40 000 FCFA et 70 000 FCFA et d'échéances respectives 20/11/2005 et 20/11/2008 sont négociés à la date du 20/11/2002. La valeur actuelle totale produite par la négociation s'élève à 75 037,96 FCFA

Calculez le taux d'actualisation retenu.

EXERCICE 10 :

L'acheteur d'un bien a le choix pour le règlement entre deux modalités :

- Payer 165 000 FCFA dans 1 an
- Payer 100 000 FCFA dans 3 ans
- Et 100 000 FCFA dans 4 ans

Quelle est la modalité la plus favorable pour lui ? Taux de 8%.

EXERCICE 11 :

Un investissement est prévu pour le 1^{er} mars 2003. Montant de la dépense : 300 000 FCFA. Cette dépense est susceptible d'engendrer une recette de 200 000 FCFA, qui serait perçue à la date du 1^{er} mars 2006 et une recette de 200 000 FCFA, qui serait encaissée le 1^{er} mars 2007.

Travail à faire :

1. Compte tenu d'un taux d'actualisation de 9% la dépense envisagée est-elle opportune ?
2. Même question si le taux d'actualisation était de 8,5% ?
3. En utilisant les résultats des deux questions précédentes déterminez le taux d'intérêt pour lequel on n'aurait pas plus de raisons d'envisager l'investissement que de raisons de l'écarter.

EXERCICE 12 :

Une personne doit encaisser le 15 janvier 2020, une créance de 1 000 000 FCFA. Le 15 janvier 2004 elle vend son titre de créance contre une somme payable au comptant et représentant la valeur actuelle, à intérêt composé et au taux annuel de 9% de la créance qu'elle devait encaisser le 15 janvier 2020. La somme ainsi obtenue jusqu'au 15 janvier 2020.

Travail à faire :

1. Quel capital la personne obtiendra-t-elle le 15 janvier 2020 ?
2. Déterminez à quelle date elle disposerait 1 000 000 FCFA
3. Quel prélèvement pourrait-elle effectuer sur la somme encaissée le 15 janvier 2004 pour que le solde placé dans les conditions indiquées, lui procure 1 000 000 F le 15 janvier 2020.

4. En utilisant les résultats des trois questions précédentes, apprécier l'opportunité de l'opération effectuée le 15 janvier 2004.

ANNUITES

EXERCICE 1 :

Un épargnant verse 1 000 f chaque année sur un livret d'épargne logement à 5%. Quelle somme aura-t-il acquise au bout de 10 ans ?

EXERCICE 2 :

Quelle annuité est nécessaire pour amortir un capital de 5 000f à 8% pendant 7 ans ?

EXERCICE 3 :

Un négociant achète un fonds de commerce estimé à 150 000f. il paie 30 000f comptant et s'engage à s'acquitter du reste par huit versements annuels égaux, le premier ayant lieu 2 ans après l'acquisition.

Le taux étant de 10%, calculez le montant de chacun de ces versements.

Après avoir payé le troisième versement, le négociant obtient de s'acquitter par 6 annuités à terme échu, mais à un taux supérieur.

Sachant que chaque annuité nouvelle est égale à 22 170,69f, calculer le nouveau taux.

EXERCICE 4 :

Une personne verse, à intervalles réguliers à 1 an, des sommes constantes de montant 10 000f chacune, à un organisme de capitalisation. Taux d'intérêt : 10%. Date du premier versement : 01/12/2017. Calculez le montant du capital constitué :

1. A la date du 01/12/2017
2. A la date du 01/12/2018. On rappelle que le dernier versement est daté du 01/12/2017. On suppose que le titulaire du capital constitué le 01/12/2017 n'a pas retiré ce capital.
3. A la date du 01/12/2022. Même hypothèse qu'en b).

EXERCICE 5 :

Dix annuités de 1 000f chacune ont une valeur acquise de 15 800f. Calculer le taux de capitalisation

EXERCICE 6 :

N annuités de 25 000f chacune, capitalisées à 11%, ont une valeur acquise de 400 000f. Calculer n (donner deux solutions)

EXERCICE 7 :

Calculez la valeur acquise de 10 versements de chacun 10 000f, effectués tous les deux ans. Le taux annuel d'intérêt est de 8,5%.

EXERCICE 8 :

Déterminer l'échéance moyenne d'une suite de 30 annuités constantes de 10 000f chacune au taux de 10,25%

EXERCICE 9 :

Une suite de 15 annuités est ainsi constituée :

- 5 annuités de 1 000f chacune
- Puis 5 annuités de 1 500f chacune
- Puis 5 annuités de 2 000f chacune

Calculez la valeur acquise et la valeur actuelle de cette série d'annuités au taux de 11,5%

EXERCICE 10 :

Une suite de 12 annuités se présente de la façon suivante :

- 4 annuités égales chacune à X francs
- Puis 4 annuités égales chacune à 2X francs
- Puis 4 annuités égales chacune à 3X francs

La valeur à l'origine de ces annuités, estimée à 9,5%, s'élève à 184 704,04 francs

Calculez le montant de X.

EXERCICE 11

Un investissement entraînerait les dépenses suivantes :

- Versements annuels de 100 000f chacun, la première fois le 1^{er} mars 2002, la dernière fois le 1^{er} mars 2005.
- Ces dépenses devraient permettre des recettes annuelles constantes, égales chacune à X francs. Première recette : 1^{er} mars 2004 ; dernière recette : le 1^{er} mars 2011.

A partir de quel montant x l'opération peut-elle être envisagée ?

Taux annuel pour l'ensemble des opérations : 10%

EXERCICE 12 :

1. Vous vous constituez un capital en versant en banque, à intervalles semestriels, des sommes égales chacune à 10 000f.

Date du premier versement : 15 novembre 2002

Date du dernier versement : 15 mai 2006

Le capital constitué à la date du 15 mai 2006 est laissé en banque et continue à porter des intérêts jusqu'au 15 mai 2008.

- Calculez, compte tenu d'un taux semestriel de capitalisation égal à 4,5% le montant du capital constitué à la date du 15 mai 2008.

1. Le capital constitué est arrondi aux 10 000f les plus voisins. Il est alors versé dans un autre établissement bancaire à cette même date du 15/05/2008 à la charge, pour ce nouvel établissement de vous verser une rente annuelle constante. Date du premier encaissement : 15/05/2010. Date du dernier : 15/05/2016.

- Calculez le montant X du terme constant de cette rente. Taux annuel : 9,5%

1. On décide de fixer à 24 000f le montant de chacun de ces termes de rente, sauf le montant du dernier.

- Calculez alors le montant Y de ce dernier.

EXERCICE 13 :

1. Une personne a entrepris d'effectuer des placements annuels de 20 000f chacun, les 1^{er} juillet de chacune des années 2000 à 2009 inclusivement. Ces placements étant prévus devoir porter intérêt composé à 8,5% l'an.

- De quelle somme peut-elle espérer le placement du 1^{er} juillet 2014, le capital constitué en 2009 ayant continué à porter des intérêts.

1. Immédiatement après avoir effectué le placement du 1^{er} juillet 2005, la personne constate que le capital déjà constitué, ainsi que les placements à venir, ne pourront plus désormais produire des intérêts qu'au taux de 7,5%

- Dans ces conditions de quelle somme la personne en question disposera-t-elle le 1^{er} juillet 2014 ?

1. Dans les conditions de b) la personne considérée envisage d'effectuer des versements supplémentaires constants les 1^{er} de chaque année des années 2010 à 2013 inclusivement de façon à obtenir le 1^{er} juillet 2014, la somme prévue en a).

- Déterminer le montant de ces versements supplémentaires constants.

EMPRUNTS INDIVIS

EXERCICE 1 :

Cours préparé par M. ZE BELINGA ALBERT DIDIER PLETP/CG Diplômé de l'ENSET d'EBOLOWA et de L'Université de Yaoundé 2 SOA (00237) 693777425 / 678 27 75 91
albertze93@yahoo.com

Un emprunt de 100 000 FCFA a été contracté. Durée d'amortissement : 16 ans au taux de 9%. Les 15 premières annuités sont égales chacune à 12 000 f. (l'emprunt n'est donc par remboursable par annuités constantes)

Travail à faire :

1. Calculer le montant de la 16^{ème} annuité
2. Présenter les deux premières lignes et la dernière ligne du tableau d'amortissement
3. Calculer par deux procédés différents le montant de la dette encore vivante après paiement de la 11^{ème} annuité.

EXERCICE 2 :

Un emprunt d'un montant de 600 000f est remboursable au moyen de deux versements annuels à échéances respectives de 1 an et 2 ans et dont les montants sont respectivement de 300 000f et 393 453,75f.

Travail à faire :

Présenter le tableau d'amortissement de cet emprunt

EXERCICE 3 :

Un emprunt indivis d'un montant initial de 800 000f est amortissable au moyen de 12 annuités constantes. Taux d'intérêt : 9%

Travail à faire :

1. Calculer par quatre procédés au moins la dette résiduelle après paiement de 7 échéances
2. Présenter la 8^{ème} ligne du tableau d'amortissement de cet emprunt

EXERCICE 4 :

Un emprunt consenti au taux semestriel de 4,25% est amortissable au moyen de semestrialités de chacune 2 620,92f. le dernier amortissement surpasse le premier de 2 018,15f.

Travail à faire :

Calculer le nominal initial de l'emprunt

EXERCICE 5 :

Un emprunt de nominal K est amortissable en dix échéances annuelles constantes.

Montant du 3^{ème} amortissement : 23 460,22f

Montant du 6^{ème} amortissement : 30 381,67f

Travail à faire :

1. Calculer : le taux d'emprunt ; le capital emprunté ; l'annuité ; le capital restant dû après paiement de la 7^{ème} annuité
2. Présenter la partie du tableau d'amortissement relative aux trois dernières années d'emprunt.

EXERCICE 6 :

La JOELPRO SA contracte un emprunt de 2 000 000f remboursable au moyen de 20 annuités constantes. Taux d'intérêt : 10%

Lors du paiement de la 13^{ème} annuité le prêteur consent une réduction de 10% sur le montant des intérêts compris dans cette 13^{ème} annuité (réduction limitée aux seuls intérêts de cette seule 13^{ème} annuité)

- Calculer le montant de la 13^{ème} annuité après réduction.

EXERCICE 7 :

La JOELPRO SA a contracté le 15/09/2002 un emprunt de 10 000 000f amortissable en 12 échéances constantes. Taux : 15%. Première échéance : 15/09/2003. Immédiatement après l'échéance du 15/09/2007, la JOELPRO SA envisage de rembourser par anticipation les annuités restant à verser.

Travail à faire :

1. Calculer le montant de la somme dont la société a besoin pour faire face à cette décision
 2. Pour se procurer cette somme, l'entreprise contracte à la date du 16/09/2007 un emprunt de nominal égal au montant précédent arrondi au 100 000f supérieurs ; taux : 11% ; première annuité : 15/09/2008 ; dernière annuité : 17/09/2014 ; annuités constantes.
- Apprécier le bien fondé de la décision prise par l'entreprise JOELPRO SA.

EXERCICE 8 :

Un capital doit être remboursé au moyen de 12 annuités constantes.

On donne $m_1 + m_2 = 13\,515,22f$

$M_2 + m_3 = 14\,528,86f$

- Calculer : i , m_1 , m_{12} , a , K

EXERCICE 9 :

Un prêt de 165 000f est consenti au taux de 10%. Il est amortissable en 9 échéances annuelles.

Les cinq premières comprennent intérêt et amortissement, et les amortissements qu'elles contiennent constituent une progression arithmétique de raison 2 000f.

Les quatre dernières comprennent également intérêt et amortissement, et les amortissements qu'elles contiennent constituent une progression géométrique de raison 1,1.

Sachant que la date résiduelle, après paiement des cinq premières échéances s'élevait à 92 820f.

- Présenter le tableau d'amortissement complet de cet emprunt

EXERCICE 10 :

Un emprunt d'un montant initial de 1 000 000f est amorti en 8 échéances annuelles au taux d'intérêt de 15%. La première moitié de la dette contractée est remboursable suivant le système des amortissements annuels constants, en 4 échéances. Les 4 dernières échéances sont faites d'annuités constantes.

- Présenter le tableau d'amortissement complet de cet emprunt

EXERCICE 11 :

Un emprunt d'un montant de 500 000f est amortissable au moyen de dix versements annuels constants, comprenant intérêt et amortissement, le premier intervenant 3 ans après la conclusion de l'emprunt. Taux annuel : 14%.

Immédiatement après avoir effectué le versement de la 4^{ème} annuité, l'emprunteur demande à s'acquitter au moyens de trois versements annuels constants (au lieu des six initialement prévus), le premier intervenant un an après, mais calculés à un taux inférieur au primitif.

- Calculez ce nouveau taux, sachant que le montant de l'annuité nouvelle s'élève à 205 168,34f.

EXERCICE 12 :

Un emprunt est remboursable au moyen d'annuités constantes. On relève entre autres, dans le tableau d'amortissement de cet emprunt, les indications sont les suivantes :

- Intérêt contenu dans la 5^{ème} annuité : 6 263,78f
- Amortissement contenu dans cette même annuité : 5 477,26f
- Amortissement contenu dans la 8^{ème} annuité : 7 290,23f

Travail à faire :

1. Calculer le montant de la dette initiale
2. Calculer le nombre d'annuités

EXERCICE 13 :

Une société envisage de contracter un emprunt d'1 000 000f étudie diverses modalités d'amortissement.

1. Emprunt amortissable par annuités constantes calculées sur la base d'un intérêt annuel de 10%. Dans ces conditions le capital qui resterait dû après le versement de la cinquième annuité se monterait à 714 504f.
 - En combien d'années le prêt serait-il amortissable ?
1. Emprunt dont le service serait assuré par des semestrialités constantes, le taux de l'intérêt semestriel étant de 5%, dans ce cas il y aurait une différence de 46 549f entre le dernier et le premier amortissement semestriel
 - Calculer le montant de la semestrialité constante et le nombre de semestrialités à verser
1. La modalité finalement retenue est la suivante : l'emprunt sera amorti par 10 annuités dont les montants seront en progression arithmétique ; taux d'intérêt ; 10%. La première annuité est alors égale à 116 176,25f.
 - Calculer la raison de la progression arithmétique.

EXERCICE 14 :

Un prêt de 6 000 000f consenti au taux annuel de 8% est amortissable en 12 ans, au moyen de 12 annuités telles que chacune soit égale à la précédente majorée de 8%.

1. Construire la première, la septième et la douzième ligne du tableau d'amortissement de cet emprunt.

EXERCICE 15 :

Un emprunt de 100 000f est contracté le 15/11/2002 ; il est remboursable au moyen de trimestrialités constantes de chacune 8 376,66f, la première versée le 15/02/2003.

Dans un tableau d'amortissement dressé à cette occasion l'amortissement afférent à la dernière trimestrialité s'élève à 8 132,68f.

1. Déterminer la date de paiement de la dernière trimestrialité.

EMPRUNTS OBLIGATAIRES

EXERCICE 1

Un emprunt obligations répond aux caractéristiques suivantes :

- Nombre d'obligations émises : 50 000f
- Nominal de l'obligation : 1f
- Valeur d'émission du titre : 0,994f
- Taux nominal d'intérêt : 8,5%
- Remboursement du titre au pair (à la valeur nominale)
- Amortissement au moyen de 12 annuités sensiblement constantes

Travail à faire :

1. Présenter les trois premières lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt
2. Présenter la dernière ligne du tableau
3. Au bout de combien d'échéances aura-t-on amorti au moins la moitié des obligations émises ?
4. Calculer, à l'émission, le taux de rendement de cet emprunt.
5. On suppose des frais d'émission égaux à 2,4% du nominal de l'emprunt. Quelle devrait être, au moins la valeur du titre qui permettrait de ne pas dépasser un taux de revient de 8,75%, de 9,25%.
6. Calculer à l'émission, le taux de revient de l'emprunt (avec une valeur d'émission de 0,994f).
7. En supposant un remboursement anticipé de l'emprunt à la date 7, l'emprunteur devrait verser ce jour là aux obligataires l'annuité du jour, augmenté du remboursement anticipé des titres encore en circulation après paiement de cette annuité.
 - De quelle somme globale l'emprunteur devrait-il disposer pour faire face à ces paiements ?

EXERCICE 2 :

Un emprunt obligataire répond aux caractéristiques suivantes :

- Nombre d'obligation : 1f
- Valeur d'émission : 0,995 f
- Taux nominal d'intérêt : 9,5%
- Amortissement sur la base de 10 annuités constantes

Travail à faire :

1. Présenter les trois premières lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt
2. Présenter la dernière ligne du tableau
3. Au bout de combien d'échéances aura-t-on amorti aux moins les deux tiers des obligations émises ?
4. Calculer à l'émission le taux moyen de rendement de cet emprunt
5. Un opérateur achète en bourse, immédiatement après la 6^{ème} échéance, des obligations de cet emprunt. A quel cours doit-il les acheter s'il souhaite réaliser un taux de placement de 9,75% ?
6. Compte tenu de frais d'émission égaux à 2,8% du nominal, calculer le taux de revient de cet emprunt
7. A l'émission de l'emprunt quelle est la probabilité pour le porteur d'une obligation, de voir son titre remboursé,
 - A l'occasion du 3^{ème} tirage
 - Au plus tard dans 4 ans
1. Après paiement de 6 échéances, quelle est la probabilité pour le porteur d'une obligation encore vivante d'être remboursé à la dernière échéance ?

EXERCICE 3 :

La JOELPRO SA a émis un emprunt obligations amortissable par annuités sensibilité constantes. Les annuités sont payables chaque année le 1^{er} janvier. Dans un bilan établi par cette société au 31/12/2004 (les écritures comptables relatives à l'échéance du lendemain ont été passées, mais l'annuité n'a pas encore été réglée et son règlement n'a pas encore été comptabilisé) on trouve les postes suivants :

- Prime de remboursement : 300 f
- Amortissement de la prime de remboursement : 100 f
- Emprunt obligations : 49 071 f
- Obligations à rembourser : 2 235
- Coupons à payer : 4 617,54

Les obligations, au nominal de 1 f, sont remboursables au pair. Il ne reste ni coupon à payer, ni titres à rembourser sur les exercices précédents. L'amortissement de la prime de remboursement se fait par fractions constantes tout au long de la durée de l'emprunt.

Travail à faire :

Déterminer :

1. Le taux annuel d'intérêt
2. La durée de l'amortissement et la date d'émission de l'emprunt
3. Le nominal initial de l'emprunt
4. Le nombre d'obligations émises
5. La valeur d'émission de l'obligation

EXERCICE 4 :

Un emprunt obligations répond aux caractéristiques suivantes :

- Nombre d'obligations émises : 50 000
- Nominal de l'obligation : 1f
- Valeur d'émission du titre : 0,9975 f
- Valeur de remboursement : 1f
- Taux d'intérêt : 14%

Service de l'emprunt par annuités aussi constantes que possible.

1. Sachant qu'il a été amorti à la dernière échéance 6000,3 obligations de plus qu'à la première, calculer le montant de l'annuité constante et le nombre d'échéances (le nombre 6000,3 est obtenu à partir des nombres théoriques d'obligations amorties, et non à partir des nombres arrondis)
2. Présenter les deux premières et la dernière ligne du tableau d'amortissement de cet emprunt. Arrondir à l'entier le plus voisin les nombres annuels d'obligations amorties.
3. Calculer à l'émission, le taux moyen de rendement de cet emprunt.
4. Compte tenu de frais d'émission égaux à 4% du nominal, à quelle valeur faut-il au moins, émettre le titre, pour que le taux de revient ne dépasse pas 15%.
5. Calculer, à l'émission le taux de rendement attaché aux obligations qui seront amorties à la 10^{ème} échéance.

EXERCICE 5 :

Les caractéristiques connues d'un emprunt obligations amortissable par annuités constantes sont :

- Nombre d'obligations émises : 20 000

Cours préparé par M. ZE BELINGA ALBERT DIDIER PLETP/CG Diplômé de l'ENSET d'EBOWA et de L'Université de Yaoundé 2 SOA (00237) 693777425 / 678 27 75 91
albertze93@yahoo.com

- Nominal de l'obligation : 1f égal à la valeur de remboursement
- Taux d'intérêt : 9%

On indique que le nombre d'obligations amorties à l'avant dernière échéance est supérieur de 1 268,44 (avant arrondissement) unités au nombre d'obligations amorties à la seconde échéance.

Travail à faire :

Calculer :

1. Le montant de l'annuité constante
2. Le nombre d'annuités

EXERCICE 6 :

La JOELPRO SA a émis le 15/11/2005, un emprunt obligations dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Nombres d'obligations émises : 20 000
- Nominal de l'obligation : 1f
- Emission et remboursement au nominal
- Taux annuel d'intérêt : 16%. On donne
- Annuités aussi constantes que possible payées le 15 octobre de chaque année
- Première échéance : 15/10/2006, dernière échéance : 15/10/2017.

Les taux d'intérêt ont subi une baisse notable, la société décide de rembourser l'emprunt par anticipation. Le remboursement anticipé a lieu le 15 janvier 2010. La société versera à cette date le capital encore dû par elle, elle augmente de la fraction courue d'intérêt, calculée à intérêt simple.

Pour se procurer la somme dont elle a besoin pour faire face à cette décision la société JOELPRO émet un nouvel emprunt obligations aux conditions suivantes :

- Taux annuel d'intérêt : 12,5%
- Nominal de l'obligation : 1f
- Emission à 0,996f
- Remboursement à 1f
- Amortissement au moyen de 8 annuités constantes

- Frais d'émission : 3% du nominal

Compte tenu des besoins de la société JOELPRO, compte tenu de l'émission de l'obligation à 0,996f, et des frais supportés par la société.

Travail à faire :

1. Calculer le nombre d'obligations à émettre pour faire face au versement du 15 janvier 2010.
2. Calculer le taux actuariel brut ou le taux de rendement qui résulte des conditions auxquelles ce second emprunt est émis.
3. Le directeur général de la société aurait souhaité que le prix d'émission de l'obligation soit tel que le taux de revient du second emprunt ne dépasse pas 13%. La chose vous paraît-elle possible ?
4. Calculer dans les conditions données, le taux de revient de ce second emprunt.

EXERCICE 7 :

Les caractéristiques d'un emprunt obligations sont les suivantes :

- Nombre de titres émis : 60 000
- Nominal du titre : 1 franc
- Valeur d'émission du titre : 1 franc
- Valeur de remboursement : 1,025 f
- Taux nominal d'intérêt : 10,25%

Amortissement au moyen de 10 annuités sensiblement constantes compte tenu de l'amortissement du titre au-dessus du pair.

Travail à faire :

1. Présenter les deux premières lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt.
2. Présenter la dernière ligne
3. Calculer à l'émission le taux actuariel brut de l'emprunt.

EXERCICE 8 :

Les caractéristiques d'un emprunt obligations sont les suivantes :

- Nombre d'obligations émises : 50 000

- Nominal du titre : 1 franc
- Valeur d'émission du titre : 1 franc
- Valeur de remboursement : 1,625 f
- Taux nominal d'intérêt : 8,5%

Amortissement au moyen de 12 annuités sensiblement constantes compte tenu de l'amortissement du titre au-dessus du pair.

Travail à faire :

1. Présentez les trois premières lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt.
2. Présentez la dernière ligne
3. Calculez à l'émission le taux moyen de rendement de cet emprunt
4. En supposant des frais d'émission égaux à 2,4% du nominal, calculez le taux de revient de l'emprunt.

EXERCICE 9 :

Les caractéristiques d'un emprunt obligations sont les suivantes :

- Date d'émission : 31/12/2002
- Date de versement de la première annuité : 31/12/2003
- Taux du titre : 10,5%
- Nominal du titre : 1 franc

Amortissement en 18 échéances annuelles sensiblement constantes, mais à une valeur supérieure au montant nominal du titre.

Le tableau d'amortissement de cet emprunt indique :

- Intérêts versés le 31/12/2020 : 2 327,745f
- Annuité relative à la 18^{ème} échéance : 25 605,195 f

Travail à faire :

1. Calculer le nombre d'obligations émises le 31/12/2002

EXERCICE 10 :

Les caractéristiques d'un emprunt obligations sont les suivantes :

- Nominal du titre : 1f

- Taux nominal d'intérêt : 14,35%
- Remboursement de l'obligation : 1,025f

Amortissement au moyen d'annuités constantes, compte tenu du remboursement du titre à 1,025f. le montant des sommes consacrées à l'amortissement (à la valeur de remboursement) s'est élevé, pour la première échéance à 2 255f.

Le montant des coupons d'intérêt versés à l'occasion de la dernière échéance à 1 334,263f.

Travail à faire : calculez le nombre des échéances et le montant l'annuité constante.

RENTABILITE D'INVESTISSEMENT

EXERCICE 1 :

Deux personnes A et B doivent recevoir ensemble 10 000f au 1^{er} janvier 1988.

1. Combien recevraient-elles si elles étaient payées le 1^{er} janvier 1982 ?
2. A doit être réglée le 1^{er} janvier 1985 et B le 1^{er} janvier 1990. Combien recevront-elles chacune, sachant que, si le règlement avait lieu le 1^{er} janvier 1988, A aurait reçu 6 000f et B : 4 000f ? les calculs seront faits à intérêts composés à 5%.

EXERCICE 2 :

Une entreprise, pour lancer un produit nouveau, estime qu'elle aura à faire des dépenses nettes d'investissement pendant trois ans qui lui procureront des recettes nettes pendant 10 ans. Recettes et dépenses sont indiquées dans le tableau suivant, en millions de f.

date	recettes	dépenses	Date	Recettes
1	5	20	6	7
2	7	8	7	5
3	10	4	8	4
4	10	-	9	3
5	10	-	10	2

Travail à faire :

1. Actualiser les recettes et les dépenses au taux de 15%
2. Calculer le taux de rentabilité de l'investissement.

EXERCICE 3 :

Cours préparé par M. ZE BELINGA ALBERT DIDIER PLETP/CG Diplômé de l'ENSET d'EBOLWA et de L'Université de Yaoundé 2 SOA (00237) 693777425 / 678 27 75 91
albertze93@yahoo.com

Une grande société désire créer une usine nouvelle. Elle a le choix entre trois projet dont les caractéristiques sont les suivantes :

éléments	Projet A	Projet B	Projet C
Capacité maximale de production	150 000 unités	200 000 unités	300 000 unités
Dépenses d'investissement	20 000 000f	25 000 000f	30 000 000f
Charges structurelles annuelles	6 000 000f	10 000 000f	12 000 000f
Coût variable unitaire	150f	120f	110f
durée	10 ans	10 ans	10 ans

Travail à faire : calculer les coûts unitaires dans chaque projet, de 100, 125, 150, 175, 200, 225, et 300 mille unités. En déduire, à chaque niveau de production, quel est le projet le plus rentable.

EXERCICE 4 :

Un investissement suppose une dépense de 980 000f qui serait réglé comptant. La mise en œuvre des moyens d'actions acquis grâce à cette dépense, moyens dont la durée d'utilisation est estimée à 6 ans, permettrait des recettes annuelles nettes estimées dans l'ordre, pour les 6 ans, à 200 000f, 300 000f, 250 000f, 250 000f, 200 000f, 150 000f

Travail à faire :

1. Le taux courant d'intérêt s'élevant à 11% à l'époque de l'investissement, l'opération présente-t-elle de l'intérêt ? méthode de la valeur actuelle nette. Valeur de récupération nulle.
2. Même question si l'investissement, au lieu d'être réglé immédiatement, était réglé en trois versements de chacun 490 000f au dates 2, 4, 6.
3. Même question qu'en 1) en supposant une valeur nette de récupération de 50 000f à la date 6.
4. Même question qu'en 1) en retenant un taux d'évaluation de 10,5%
5. Calculer à partir des résultats des questions 1 et 4, le taux de rentabilité interne attaché à l'investissement.

EXERCICE 6 :

Un investissement suppose une dépense de 225 000f réglée comptant et permettrait, pendant 6 ans, des recettes supplémentaires nettes de :

- Chacune 60 000f aux dates 1 et 2
- Chacune 55 000f aux dates 3 et 4
- Chacune 45 000f aux dates 5 et 6

Valeur nette de récupération : 30 000f

Travail à faire : calculez le taux de rentabilité interne correspondant à ces données

EXERCICE 7 :

Vous hésitez entre deux investissements possibles :

- Le premier suppose une dépense initiale de 600 000f, réglée immédiatement et permettant des recettes nettes, constantes, annuelles, aux dates 1,2,3,4,5, estimées à 165 000f.
- Le second pour lequel la dépense initiale serait de 965 000f, réglée comptant entraînant des recettes annuelles nettes estimées à 300 000f aux dates 1, 2, 3 et 200 000f aux dates 4 et 5.

Vous envisagez de retenir l'investissement le plus intéressant. Déterminez lequel :

1. En utilisant la méthode de la valeur nette, le taux d'évaluation retenu étant égal à 11,5%
2. En vous fondant sur la comparaison des taux de rentabilité interne respectifs des deux investissements ;
3. En calculant à partir des résultats de la question a), les taux de profitabilité respectifs des deux investissements.

EXERCICE 8 :

Un projet d'investissement sur une durée de 5 ans est envisagé par une entreprise. Le coût de l'investissement est de 1 700 000f. les recettes prévisionnelles nettes sur les cinq années à venir sont respectivement de – 100 000f, 600 000f, 800 000f, 1 200 000f, 900 000f. la valeur résiduelle est supposée nulle.

Travail à faire :

1. Déterminez la valeur actuelle nette de cet investissement pour les taux respectifs de 15% et 25%
2. Déterminez le taux de rentabilité interne de cet investissement

3. Un autre investissement est proposé à l'entreprise pour une durée de 7 ans ; le coût initial de l'investissement est de 1 650 000f ; les recettes annuelles nettes respectives sur les 7 années sont prévues devoir s'élever à 450 000, 780 000, 970 000, - 450 000, 920 000, 300 000, 100 000f.

La valeur résiduelle étant toujours supposée nulle quel investissement conseillez-vous à l'entreprise ?

(pour cette question on calculera la valeur actuelle nette du second investissement en utilisant le taux obtenu en 2) et la décision sera prise en s'appuyant sur le signe du résultat obtenu)

EXERCICE 9 :

Une société anonyme désirant assurer la diversification de sa production et son expansion sur de nouveaux marchés envisage au début de l'année 1 d'acquérir une nouvelle machine.

Le directeur technique hésite entre deux équipements que l'on désignera respectivement par A et B. il dispose des informations suivantes :

1. Prix d'acquisition : équipement A = 1 000 000f et B = 1 500 000f
2. Durée d'utilisation : équipement A = 5 ans et B = 5 ans.
3. Amortissement linéaire, au taux de 20% sur la valeur d'origine.
4. La production prévisionnelle, en nombre d'articles (tous identiques) est la suivante :
 - Année 1 : 50 000
 - Année 2 : 60 000
 - Année 3 : 70 000
 - Année 4 : 80 000
 - Année 5 : 90 000

On suppose que la totalité de la production est susceptible d'être écoulee sur le marché.

1. Le prix de vente de l'article est de 20F. on suppose qu'il sera, pour les années suivantes de 23, 26, 29, 32f.
2. Les dépenses d'exploitation relatives à cet équipement additionnel sont estimées à :
 - Année 1 machine A : 15 f par article, machine B : 12f par article
 - Année 2 machine A : 17f par article, machine B : 14f par article
 - Année 3 machine A : 19f par article, machine B : 16f par article
 - Année 4 machine A : 21f par article, machine B : 18f par article

- Année 5 machine A : 23f par article, machine B : 20f par article

1. On tiendra compte de l'impôt sur les bénéfices des sociétés au taux de 40%.

Travail à faire : déterminez dans ces conditions, vers lequel des deux équipements se portera le choix de l'entreprise. On comparera successivement :

1. Les deux valeurs actuelles nettes (en utilisant le taux de 15%)
2. Les deux taux de profitabilité ;
3. Les deux taux de rentabilité interne

Les calculs sont conduits en utilisant le taux de 15% (pour la question 1)

EXERCICE 10 :

Pour améliorer la mise au point de ses projets la société JOELPRO SA hésite entre deux solutions :

1. Elle achète le matériel indispensable le 1^{er} janvier 2000 et finance à l'aide des fonds propres.
 - Prix d'acquisition : 422 100 f TVA comprise.
 - Amortissement en 5 ans selon le système dégressif.
 - Valeur de revente au 31/12/2004, estimée à 30 000f, hors taxe. La plus value réalisée à l'occasion de cette vente sera taxée à 40%.
1. Location du matériel auprès d'une société de crédit bail aux conditions suivantes :
 - Durée de location : 5 ans à dater du 1^{er} janvier 2000,
 - Mensualités de location, exprimées TVA comprise : année 1, 2, 3 : 9 648f, années 4, 5 : 9 045f

Pour l'ensemble des solutions le taux de TVA est de 20,60% ; on retiendra un taux de 40% pour le calcul de l'impôt sur les sociétés. Pour faciliter les calculs d'actualisation les douze mensualités d'une année seront supposées versées en fin d'année.

Les recettes (différence entre chiffre d'affaires et dépenses de fonctionnement) espérées au cours des cinq années d'utilisation sont égales, dans l'ordre à 200 000f, 140 000f, 110 000f, 100 000f, 90 000f, (chiffres donnés hors taxe). On admettra, pour les deux modalités, que ces recettes sont les mêmes.

Travail à faire :

1. En faisant usage d'un taux d'évaluation de 15%, indique laquelle des deux solutions envisagées est la meilleure (méthode de la valeur actuelle nette).

2. Calculer le taux de rentabilité interne que révèle la solution a).

ZEBEL EXPERT