



COURS HARMONISÉS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

**SERIES TERTIAIRES
(G2 & G3)**

EDITION DE SEPTEMBRE 2022

PROGRAMME DES PREMIÈRES G2 ET G3**MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES****04 HEURES PAR SEMAINE****Chapitre 0 : IMPORTANCE DES MATHÉMATIQUES**

1. Définition des mathématiques
2. Quelques branches des mathématiques
3. Les mathématiques et quelques domaines de la connaissance
 - 3.1. Mathématiques et les autres disciplines (*de la vie courante*)
 - 3.2. Les mathématiques comme outils des matières enseignées à l'enseignement technique :
 - Français : contraction de texte ; dissertation
 - Anglais : feelings gaps ; flow –chart
 - Comptabilité : principe de la comptabilité ; les amortissements ; l'enregistrement des factures
 - Économie générale : cout moyen et marginal ; agrégats ; les indices
 - Économie et organisation des entreprises
 - Techniques commerciales : les taux ; les proportions ; ...

CHAPITRE 1 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS**1. Équations dans $\mathbb{R}$**

- 1.1. Équations du type : $x \in \mathbb{R}, ax + b = 0$
- 1.2. Équations Produit $A(x).B(x) = 0$
- 1.3. Équations du second degré à une inconnue
 - 1.3.1. Définition
 - 1.3.2. Résolution
 - 1.3.2.1. Identités remarquables
 - 1.3.2.2. Méthode du discriminant
- 1.4. Somme et Produit des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)
 - Trouver une solution d'une équation du second degré connaissant l'autre solution en utilisant la Somme ou le Produit.

- Former une équation du second degré dont on connaît la somme et le produit des solutions.

1.5. Équations rationnelles de la forme : $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

1.6. Équations de degré 3 (rappeler les deux méthodes vues en Seconde)

1.7. Équations bicarrées

1.8. Autres types d'équations : $|f(x)| = |g(x)|$; $|f(x)| = ax + b$.

2. Inéquations dans $\mathbb{R}$

2.1. Inéquations du premier degré à une inconnue

2.1.1. Présentation: $ax + b \geq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$, et $ax + b < 0$,

2.1.2. Résolution :

- méthode algébrique
- méthode du tableau de signe

2.2. Inéquations du second degré à une inconnue

2.2.1. Présentation (*insister sur la non nullité du coefficient a*)

2.2.2. Résolution d'une équation du second degré

2.2.3. Signe d'un polynôme du second degré

2.2.4. Résolution

2.3. Inéquation produit

2.4. Inéquations du troisième degré à une inconnue

2.5. Inéquations simultanées ou système d'inéquations à une inconnue

(système d'inéquations dans $\mathbb{R}$)

3. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS IRRATIONNELLES

- Équations du type : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$
- Équations du type : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(x)} = ax + b$
- Inéquations du type : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(x)} \leq ax + b$
- Inéquations du type : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(x)} \geq k$ (où k est un réel)

NB: Quel que soit la méthode de résolution, préciser de façon claire, l'ensemble de validité

4. Équations du second degré à une inconnue comportant un paramètre
(cette partie ne fera pas l'objet d'une évaluation)

CHAPITRE 2 : SYSTÈMES LINÉAIRES ET PROGRAMMATION LINÉAIRE

1. Systèmes

1.1. Systèmes d'équations linéaires dans IR^2 ou IR^3

1.1.1. Équations du type : $(x, y) \in IR^2$, $ax + by + c = 0$

1.1.2. Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

1.1.2.1. Présentation(*forme générale*)

1.1.2.2. Méthodes de résolution (introduire aussi la méthode de Cramer)

NB : Pour un système paramétrique, le déterminant doit être de degré inférieur ou égal à 2.

1.1.3. Systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues

1.1.3.1. Présentation

1.1.3.2. Méthodes de résolution (introduire aussi la méthode de Gauss)

1.2. Système d'inéquations linéaire dans IR^2

1.2.1 Résolution graphique d'une inéquation linéaire dans IR^2 (Régionnement du plan)

1.2.2. Résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires à deux inconnues

2. Programmation linéaire

2.1. Problème de maximisation

2.2. Problème de minimisation

NB : Les variables (les inconnues) doivent être précisées dans l'énoncé ; de même que le système

CHAPITRE 3 : FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

1. Définition d'une fonction

2. Les différents modes de définition d'une fonction : expression explicite ; représentation graphique ; tableau de valeurs.

3. Ensemble de définition d'une fonction.

3.1. Définition

3.2. Recherche d'ensemble de définition

3.2.1. Cas d'une fonction polynôme

3.2.2. Cas d'une fonction rationnelle

3.2.3. Cas d'une fonction irrationnelle

NB: Utiliser les fonctions : polynômes, rationnelles, irrationnelles.

4. Parité d'une fonction

NB : Insister sur la notion d'ensemble symétrique

4.1. Fonctions paires (*définition et conséquence graphique*)

4.2. Fonctions impaires (*définition et conséquence graphique*)

5. Éléments de symétrie

5.1. Axe de symétrie

5.2. Centre de symétrie

NB : Les deux méthodes de démonstration sont à donner au cours

6. Fonctions associées et leurs représentations : $-f(x)$; $|f(x)|$; $f(-x)$; $f(x - a) + b$

CHAPITRE 4 : LIMITE ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

1. Limites d'une fonction

1.1. Notion de limite d'une fonction

1.2. Théorème de l'unicité de la limite

1.3. Limite d'une fonction à l'infini

1.3.1. Limite d'une fonction polynôme

1.3.2. Limite d'une fonction rationnelle

1.4. Limite en un réel x_0

1.4.1. Limite en un réel x_0 d'une fonction polynôme

1.4.2. Limite en un réel x_0 d'une fonction rationnelle

1.4.2.1. Cas où $x_0 \in D_f$

1.4.2.2. Cas où x_0 n'appartient pas à D_f et est une borne de D_f

1.4.2.3. Cas des formes indéterminées

1.5. Notion d'asymptotes

1.5.1. Asymptote horizontale

1.5.2. Asymptote verticale

1.5.3. Asymptote oblique

NB : Les asymptotes doivent être mises en exergue sur le graphique (*fléchées ; coloriées et autres*)

2. Continuité d'une fonction

2.1. Définition de la continuité en un point x_0

2.2. Continuité sur un intervalle

CHAPITRE 5 : DÉRIVATION D'UNE FONCTION

1. Dérivabilité d'une fonction en un point x_0

2. Équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0

3. Fonction dérivée

3.1. Dérivées des fonctions usuelles

3.2. Dérivées et opérations sur les fonctions

4. Signe de la dérivée et sens de variations d'une fonction sur un intervalle

5. Application de la dérivée : (*détermination des coûts marginaux et autres*)

CHAPITRE 6 : ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS

1. Plan d'étude d'une fonction

2. Étude de quelques exemples de fonctions

2.1. Fonctions polynômes

2.1.1. Étude de la fonction de type : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

2.1.2. Étude de la fonction de type : $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

2.2. Fonctions rationnelles

2.2.1. Étude de la fonction de type : $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$)

2.2.2. Étude de la fonction de type : $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ ($a \neq 0$ et $d \neq 0$)

2.2.3. Étude de la fonction de type : $x \mapsto \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$)

2.2.4. Étude de la fonction de type : $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ ($a \neq 0$; $a' \neq 0$)

CHAPITRE 7 : STATISTIQUES À UNE VARIABLE

1. Vocabulaire statistique (*Rappels de seconde G2 et G3*)

1.1. Population statistique

1.2. Unité statistique ou individu

1.3. Caractère statistique

1.4. Modalité statistique

1.5. Variable statistique

1.6. Classe

1.7. Effectif

- 1.8. Fréquence
- 1.9. Distribution statistique ou série statistique
- 1.10. Echantillon
- 1.11. Recensement

2. Enquête et dépouillement

- 2.1. Enquête statistique
- 2.2. Dépouillement statistique
 - 2.2.1. Dépouillement d'un caractère qualitatif
 - 2.2.2. Dépouillement d'un caractère quantitatif
 - 2.2.2.1. Dépouillement d'un caractère quantitatif discret
 - 2.2.2.2. Dépouillement d'un caractère quantitatif continu

3. Tableaux statistiques et représentations graphiques

- 3.1. Tableaux statistiques
- 3.2. Représentations graphiques

4. Description numérique des séries à une variable

- 4.1. Les caractéristiques de tendance centrale
 - 4.1.1. Le mode (cas d'amplitude égale et cas d'amplitude inégale)
 - 4.1.2. La moyenne arithmétique
 - 4.1.3. La médiane (interpolation linéaire et détermination graphique)
 - 4.1.4. Les quartiles
- 4.2. Les caractéristiques de dispersion
 - 4.2.1. L'étendue
 - 4.2.2. La variance
 - 4.2.3. L'écart type
 - 4.2.4. Coefficient de variation

NB : Dans chaque cas sauf pour la variance : calculer et interpréter

CHAPITRE 8 : LES SUITES NUMÉRIQUES

1. Généralités

1.1. Définition

1.1.1. Suite définie par une formule explicite

1.1.2. Suite définie par une formule implicite ou récurrente

1.2. Sens de variation ou monotonie d'une suite

2. Suite arithmétique – suite géométrique

2.1. Suite arithmétique

2.1.1. Définition

2.1.2. Monotonie d'une suite arithmétique

2.1.3. Expression du terme général d'une suite arithmétique

2.1.4. Relation entre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

2.1.5. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

2.1.6. Application des suites arithmétiques : intérêt simple ou amortissement linéaire

2.2. Suite géométrique

2.2.1. Définition

2.2.2. Monotonie d'une suite géométrique

2.2.3. Expression du terme général d'une suite géométrique

2.2.4. Relation entre trois termes consécutifs d'une suite géométrique

2.2.5. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

2.2.6. Application des suites géométriques : intérêt composé ou amortissement dégressif

CHAPITRE 9 : NOTIONS DE TRIGONOMETRIE

1. Cercle trigonométrique

2. Sinus, cosinus et tangente d'un angle orienté (les sinusoides ne sont pas à représenter)

2.1. Définition

2.2. Propriétés

2.2.1. Parité

2.2.2. Périodicité

2.3. Formules d'addition

2.4. Formules de duplication

3. Équations trigonométriques

3.1. Équation : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = m$ ($m \in \mathbb{R}$)

3.2. Équation : $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = m$ ($m \in \mathbb{R}$)

NB : La résolution se fera dans $\mathbb{R}$ pour les équations et non sur des intervalles de $\mathbb{R}$.

PREFACE

Si un poète tire son plaisir du seul fait d'écrire son œuvre, un auteur de manuel ne serait heureux que si son ouvrage est lu, compris et apprécié.

De nos jours, les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans de nombreux secteurs de la vie économique et sociale notamment dans l'éducation, les assurances, les banques, ...

Ce présent support de cours est écrit pour renforcer les acquis antérieurs de ses utilisateurs et respecte le nouveau programme de mathématiques générales des classes de premières G2 et G3.

Il vise un double objectif :

- D'une part, et surtout tenter de montrer aux apprenants, peu tournés vers les disciplines scientifiques, que la mathématique n'est pas une matière rebutante mais qu'elle fait partie de la vie de tous les jours au même titre que la philosophie, la comptabilité, les techniques commerciales, le français, ...
- D'autre part, donner aux apprenants les éléments mathématiques, conformes au programme en vigueur, qui leur seront utiles ultérieurement.

Mais faire les mathématiques, ne signifie pas seulement apprendre les formules ; c'est aussi savoir les utiliser. Aussi, une bonne assimilation des cours de mathématiques passe nécessairement par la résolution des situations problèmes conformes aux notions apprises en classe. Il est donc important de faire de nombreux exercices. A ce titre, le présent support propose de nombreux exercices d'application et des exercices d'approfondissement par chapitre qui faciliteront l'assimilation des notions étudiées.

**CHAPITRE 0 :
IMPORTANCE DES MATHÉMATIQUES**

1. Définition des mathématiques

Les mathématiques sont la science et la connaissance. Autrement dit, c'est l'ensemble des connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à des objets divers tels que les nombres, les formes, les structures et les transformations.

D'après le mathématicien Ronald Brown, les mathématiques sont une science de la description (on dit aussi modélisation), de la démonstration, et du calcul. On peut les étudier pour elles-mêmes, pour les appliquer à d'autres sciences, ou comme un exercice de l'esprit. Les principes fondamentaux de cette discipline remontent à l'antiquité (arithmétique et géométrie) ou au XVII^e siècle (mécanique et stochastique), mais la recherche mathématique n'a jamais été aussi vivante qu'aujourd'hui. Chaque réponse à un problème donné suscite en effet de nouvelles questions, et les applications de cette recherche sont de plus en plus variées.

2. Quelques branches des mathématiques

Les principales branches des mathématiques sont :

- L'arithmétique (ou *théorie des nombres*) est sans doute la branche la plus ancienne des mathématiques. Le calcul arithmétique est enseigné à l'école primaire; ppcm, pgcd et divisibilité et accentué en terminale C4.
- La géométrie est, à l'origine, une théorie de la mesure des longueurs, des aires, et des angles. Plus généralement, c'est la théorie du plan, de l'espace, et de toutes les formes qui peuvent se concevoir au-delà de notre espace à trois dimensions. En d'autres termes, c'est l'étude des figures comme les triangles et les parallélogrammes.
- La mécanique est la théorie des forces et des mouvements qu'elles induisent (*statique* et *dynamique*).
- La stochastique (prononcer "stokastique") est la théorie des phénomènes aléatoires. Elle s'appuie sur le *calcul des probabilités* pour modéliser les jeux de hasard.

Ces quatre branches partagent un corps de notions et de méthodes, que l'on découpe habituellement en deux grands chapitres :

- L'algèbre est la théorie générale des opérations qui apparaissent notamment en arithmétique et en géométrie. *On y trouve des équations, des inéquations, des structures, ...*
- L'analyse est la théorie générale des suites, séries et fonctions (réelles ou complexes).
- La combinatoire est la théorie des structures finies (ou plus généralement, *discrètes*) telles que les graphes, les mots, ou les permutations. Le dénombrement de telles structures est d'ailleurs le fondement du calcul des probabilités.
- La logique (mathématique) est la théorie du langage mathématique et des démonstrations.

- L'algorithmique (mathématique) est la théorie des méthodes de calcul.

3. Mathématiques et quelques domaines de la connaissance

3.1 - Mathématiques et les autres disciplines (vie courante)

L'interaction entre mathématiques et autres sciences est maintenant un sujet d'intérêt constant. L'articulation avec la physique est encore plus visible et remarquable.

C'est une illusion de penser que les élèves ne savent que ce qu'on leur enseigne à l'école. En arrivant au cours préparatoire, ils savent parler, dessiner et compter. Les mathématiques sont surtout une manière de classer et d'organiser leurs connaissances, et les livres les plus remarquables partent de connaissances communes pour développer le sens de la géométrie et celui du calcul.

Les programmes de mathématiques incitent au rapprochement avec les autres disciplines. Actuellement on trouve des enseignements de mathématiques dans la plupart des formations universitaires ou d'écoles post-baccalauréat. C'est le cas en physique, en biologie, en économie, en gestion, en architecture, en ingénierie...

On remarquera la présence des mathématiques dans :

- La préparation de la sauce
- Les prêts bancaires
- La construction d'une maison
- Le sport (comment choisir le meilleur angle de tir ?)
- La traversée d'une route,...

3.2 - Les mathématiques comme outils des matières enseignées (enseignement technique)

Les disciplines comme l'anglais, le français, la comptabilité, l'économie et organisation des entreprises, l'économie générale, la technique commerciale, ... n'évoluent pas loin des mathématiques.

En effet, l'anglais utilise les mathématiques pour les feelings gaps, le flow chart ; le français, pour la contraction de texte (il s'agit d'une réduction), la dissertation, (il s'agit du développement), le commentaire composé ; la comptabilité l'utilise pour le calcul des amortissements, le principe de la comptabilité, l'enregistrement des factures, ... ; l'économie générale l'utilise pour les calculs des coûts moyens et marginaux, les agrégats, les indices de prix, les élasticités- prix ; l'économie et l'organisation de l'entreprise l'utilise pour la gestion des stocks (stock de sécurité, stock d'alerte), la détermination de la variation de stock, le seuil de rentabilité, ... ; les techniques commerciales l'utilisent pour le calcul des taux, des proportions, ...

Conclusion

En ces jours, aucune discipline ne peut évoluer sans les mathématiques et vice versa. Le monde est construit sur des calculs mathématiques aussi dirait – on du Dieu qu'il est le mathématicien par excellence. Un autre dira que **les mathématiques gouvernent le monde** : « tout se mathématise. »

**CHAPITRE 1 :
EQUATIONS ET INEQUATIONS**

De nombreux problèmes issus des diverses branches des mathématiques, des différentes sciences et du domaine technique conduisent à des équations et inéquations à une inconnue. Compte tenu des techniques de calcul nouvelles que nous avons apprises en seconde, nous pouvons aborder maintenant un plus large éventail de situations et apprendre à résoudre des équations et inéquations plus complexes.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours, l'apprenant doit être capable de :

- résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation ou inéquation du 1^{er} degré ;
- identifier une équation ou inéquation du second degré ;
- calculer le discriminant puis résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation ou inéquation du second degré ;
- calculer la somme et le produit des solutions d'une équation du second degré donnée sans la résoudre ;
- déterminer deux nombres réels dont on connaît la somme et le produit ;
- résoudre les équations ou inéquations bicarrées, irrationnelles ou avec valeurs absolues se ramenant au second degré ;
- résoudre une équation ou inéquation du 3^{ème} degré connaissant une solution évidente ;
- résoudre un système d'inéquations dans $\mathbb{R}$.

NB : Tous les exercices non corrigés de ce cours doivent être systématiquement cherchés par l'élève avant toute éventuelle correction.

1. EQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

1.1. Equation : $ax + b = 0$ (rappel)

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- 1) $-2x + 1 = 0$; 2) $3x + 4 = 0$; 3) $2(x + 1) = -3 + 2x$;
- 4) $4x + 12 = 2(2x + 3) + 6$; 5) $-3x - 2 = -5x + 6$.

1.3. Equation du second degré à une inconnue

1.3.1. Définition

C'est toute équation de la forme $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ où a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$ et x l'inconnue.

Exemples: $x^2 - 4x + 6 = 0$ avec $a = 1$; $b = -4$; $c = 6$
 $-x^2 + 9 = 0$ on a $a = \dots$; $b = \dots$; $c = \dots$
 $2x^2 + 5x = 0$ on a $a = \dots$; $b = \dots$; $c = \dots$

1.3.2. Résolution : Méthode générale

1.3.2.1. Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad ; \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Example

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1). $9x^2 - 4 = 0$; 2) $9x^2 - 12x + 4 = 0$; 3) $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

1.3.2.2. Méthode du discriminant

Soit (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) une équation du second degré.

On appelle discriminant de l'équation (E) le nombre réel noté Δ tel que : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Suivant la valeur de Δ , on distingue trois cas :

- si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ;$$
- si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution double x_0 telle que $x_0 = \frac{-b}{2a} ;$
- si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution.

NB : - Lorsque a et c sont de signes contraires, alors $\Delta > 0$.

- Lorsque a et c sont de signes contraires, alors l'équation admet deux solutions distinctes.

- Lorsque a et c sont de signes contraires, alors l'équation admet deux solutions de signes contraires.

REMARQUE

Résoudre une équation du second degré, c'est trouver les racines ou encore les zéros du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Exemple 1

Résoudre les équations suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

1) $-3x^2 - x + 4 = 0$; 2) $25x^2 - 90x + 81 = 0$; 3) $4x^2 + 3x + 9 = 0$.

Exemple 2

Soit (E) : $3x^2 - (1 + \sqrt{2})x - 5 = 0$.

Sans calculer le discriminant, répondre aux questions et justifier les réponses :

- 1- (E) admet-elle deux solutions distinctes ?
- 2- Le discriminant est-il strictement supérieur à zéro ?
- 3- Quels sont les signes de ces solutions ?

Exemple 3 : Quelques cas particuliers

Résoudre les équations suivantes :

1) $2x^2 + 5x = 0$; 2) $x^2 + 3 = 0$.

This image shows a blank sheet of primary-ruled paper. It features ten sets of horizontal lines, each consisting of a solid top line, a dashed middle line, and a solid bottom line. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, providing a guide for letter height and placement. There is no handwriting or other markings on the paper.

1.4. Somme et produit des solutions d'une équation du second degré à une inconnue

On peut calculer la somme et le produit des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ lorsque le discriminant est positif ou nul ($\Delta \geq 0$).

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarques

- Si $\Delta < 0$ alors pas question de calculer la somme S ou le produit P.
- Si a et c sont de signes contraires alors $P < 0$.

Example

Calculer si possible, la somme et le produit des racines de chacune des équations suivantes :

$$a) -3x^2 + 2x + 1 = 0 \quad ; \quad b) 2x^2 - 6x + 8 = 0 \quad ; \quad c) 4x^2 + 3x - 9 = 0.$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

- Calculer l'autre solution connaissant S ou P et une des solutions

Example

$$(E) : 3,4 x^2 - 8,10x + 4,7 = 0.$$

a) Vérifier que 1 est une solution de (E).

b) Sans calculer le discriminant trouver l'autre solution.

- Former une équation du second degré à une inconnue connaissant la somme S et le produit P

Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation $X \in \mathbb{R}, X^2 - SX + P = 0$.

Exemple

On donne la somme $S = 6$ et le produit $P = 8$.

- a. Former une équation du second degré.
- b. Résoudre cette équation.

1.5. Equation rationnelle de la forme $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ avec f et g des polynômes de degré au plus 2.

Exemple

Résoudre les équation suivantes : a) $\frac{2x^2 - 8}{x^2 - 3x + 2} = 0$; b) $\frac{x^2 - x - 4}{2x^2 - x - 3} = 2$; c) $\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = 0$.

[illegible]

1.6. Equation de degré 3

La résolution algébrique de l'équation de type $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec $a \neq 0$ passe obligatoirement par la factorisation du polynôme. Deux méthodes sont à retenir pour la résolution de cette équation type :

- méthode des coefficients indéterminés ;
- méthode de la division euclidienne.

Remarques

Pour utiliser l'une des deux méthodes, on cherchera d'abord un zéro ou une racine éventuelle ou encore évidente. Le canevas à suivre est le suivant :

- si α est un zéro du polynôme P , demander à calculer $P(\alpha)$;
- factoriser $P(x)$ en utilisant l'une des deux méthodes ;
- ...

Example

On donne $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

- 1- Calculer $P(1)$. Que peux-tu conclure ?
- 2- Mettre $P(x)$ sous la forme $P(x) = (x - 1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré 2 :
 - a- par la méthode de division euclidienne ;
 - b- par la méthode des coefficients indéterminés.
- 3- Donner la factorisation complète de $P(x)$.
- 4- Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

[illegible]

1.8. Autres types d'équations $|f(x)| = |g(x)|$ et $|f(x)| = ax + b$

1.8.1. Résolution de $|f(x)| = |g(x)|$

Pour résoudre une équation de type $|f(x)| = |g(x)|$, on peut procéder comme suit :

- i. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ ou } f(x) = -g(x)$
 ii. **ou résoudre** $|f(x)|^2 = |g(x)|^2$

Example

Résoudre : $|-3x + 5| = |2x - 3|$.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, typical of notebook or legal stationery. There are no margins, text, or other markings on the paper.

1.8.2. Résolution de $|f(x)| = ax + b$

$$|f(x)| = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} E_V = \mathbb{R} & (1) \\ ax + b \geq 0 & (2) \rightarrow S_1 \\ [f(x)]^2 = [ax + b]^2 & (3) \rightarrow S_2 \end{cases}$$

$$S = E_V \cap S_1 \cap S_2$$

Exemple

Résoudre l'équation suivante $|x + 5| = 2x + 3$.

2- INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

2.1. Inéquation du premier degré à une inconnue

2.1.1 . Présentation

C'est toute inéquation de la forme $ax + b < 0$ ou $ax + b \leq 0$ ou $ax + b > 0$ ou encore $ax + b \geq 0$, avec **a, b des réels et $a \neq 0$** .

2.1.2. Résolution

- **Méthode algébrique**

$$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } a > 0 \text{ alors } x \geq -\frac{b}{a} & \text{et } S = [-\frac{b}{a} ; +\infty[\\ \text{si } a < 0 \text{ alors } x \leq -\frac{b}{a} & \text{et } S =]-\infty ; -\frac{b}{a}] \end{cases}$$

- Méthode du tableau de signe

Soit $ax + b \geq 0$ une inéquation à résoudre.

On pose d'abord $ax + b = 0$ qui donne $x = \frac{-b}{a}$. On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

Example

En utilisant les deux méthodes, résoudre les inéquations suivantes :

a) $-3x - 5 \leq 0$; b) $4x + 1 > 0$

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple sets of horizontal dashed lines, each set consisting of three lines (two outer lines and one middle line), which are typical for teaching handwriting to young children. The lines are evenly spaced across the entire page.

2.2. Inéquation du second degré à une inconnue

2.2.1. Présentation

C'est toute inéquation de la forme $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$ avec $a \neq 0$.

2.2.2. Signe d'un polynôme du second degré

Pour étudier le signe d'un trinôme du second degré :

- | | | | | |
|-----------------|------------------|-------|-------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ |
| $ax^2 + bx + c$ | signe de « a » | | signe de « $-a$ » | |

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de « a »	0	signe de « a »

- | | | |
|-----------------|----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $ax^2 + bx + c$ | signe de « a » | |

a) $p(x) = 3x^2 + 4x - 7$; b) $Q(x) = 4x^2 - 20x + 25$; c) $R(x) = 3x^2 - 4x + 5$

[illegible]

2.2.3. Résolution d'une inéquation du second degré

Résoudre une inéquation du second degré en x , c'est dresser un tableau de signe et lire les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité est vérifiée.

Example

Résoudre :

a) $3x^2 + 4x - 7 \geq 0$

;

b) $-x^2 + 3x - 2 < 0$;

;

c) $4x^2 - 20x + 25 \leq 0$

;

d) $3x^2 - 4x + 5 \geq 0$

[illegible]

[illegible]

3. Equations et inéquations irrationnelles

- Equation du type $x \in \mathbb{R}, \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

1ère méthode

- Déterminer l'ensemble de validité : $E_V = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0 \text{ et } g(x) \geq 0\}$.
- Résoudre l'équation $x \in E_V, \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \iff \sqrt{f(x)}^2 = \sqrt{g(x)}^2 \rightarrow S_1$.
- Donner l'ensemble des solutions **S** ; **S** = **E_V** $\cap$ **S₁**.

2ème méthode : Méthode d'équivalence

$$\begin{aligned} \text{Résolution : } \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & (1) \rightarrow S_1 \\ \sqrt{f(x)}^2 = \sqrt{g(x)}^2 & (2) \rightarrow S_2 \end{cases} \\ & \quad \left(\text{ou} \begin{cases} g(x) \geq 0 & (1) \rightarrow S_1 \\ \sqrt{f(x)}^2 = \sqrt{g(x)}^2 & (2) \rightarrow S_2 \end{cases} \right) \end{aligned}$$

La solution est donnée par $S = S_1 \cap S_2$

Example

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1). \sqrt{2x-1} = \sqrt{x+3} \quad ; \quad 2). \sqrt{2x^2+5x-7} = \sqrt{x^2-x-2}$$

[illegible]

- Equation du type : $x \in \mathbb{R}, \sqrt{f(x)} = ax + b$

1ère méthode

- Déterminer l'ensemble de validité : $E_V = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0 \}$.
- Résoudre : $ax + b \geq 0$ (1) $\rightarrow \mathbf{S_1}$.
- Résoudre : $\sqrt{f(x)}^2 = (ax + b)^2$ (2) $\rightarrow \mathbf{S_2}$.
- **Donner l'ensemble solution $\mathbf{S}$, $\mathbf{S} = E_V \cap \mathbf{S_1} \cap \mathbf{S_2}$.**

2ème méthode : Méthode d'équivalence

$$\sqrt{f(x)} = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b \geq 0 & (1) \rightarrow \mathbf{S_1} \\ \sqrt{f(x)}^2 = (ax + b)^2 & (2) \rightarrow \mathbf{S_2} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donné par $S, \quad S = S_1 \cap S_2$.

$$(\text{ou } \sqrt{f(x)} = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & (1) \rightarrow \mathbf{S_1.} \\ ax + b \geq 0 & (2) \rightarrow \mathbf{S_2.} \\ \sqrt{f(x)}^2 = (ax + b)^2 & (3) \rightarrow \mathbf{S_3.} \end{cases})$$

L'ensemble des solutions est donné par $S, \quad S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

Example

$$1). \sqrt{x+2} = 3x-4 \quad ; \quad 2). \sqrt{x-1} = -x+3$$

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

- **Inéquation irrationnelle** du type : $x \in \mathbb{R}, \sqrt{f(x)} \leq ax + b$

1ère méthode

- Déterminer l'ensemble de validité : $E_V = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0\}$.
- Résoudre : $ax + b \geq 0$. $(1) \rightarrow \mathbf{S}_1$
- Résoudre : $\sqrt{f(x)}^2 \leq (ax + b)^2$. $(2) \rightarrow \mathbf{S}_2$
- **Donner l'ensemble solution $\mathbf{S}$, $\mathbf{S} = E_V \cap \mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2$.**

2ème méthode : méthode d'équivalence

$$\text{Résolution : } \sqrt{f(x)} \leq ax + b \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 & (1) \rightarrow \mathbf{S_1} \\ ax + b \geq 0 & (2) \rightarrow \mathbf{S_2} \\ \sqrt{f(x)}^2 \leq (ax + b)^2 & (3) \rightarrow \mathbf{S_3} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donné par $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

Example

Résoudre : a) $\sqrt{3-x} < x-1$; b) $\sqrt{-2x^2+5x+3} \leq 2x+1$

[illegible]

- Inéquation irrationnelle du type $x \in \mathbb{R}, \sqrt{f(x)} \geq k; k \in \mathbb{R}$

- Si $k < 0$ alors $S = \text{ensemble de validité}$.
- Si $k \geq 0$ alors résoudre $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ [\sqrt{f(x)}]^2 \geq k^2 \end{cases}$ (ou $[\sqrt{f(x)}]^2 \geq k^2$)

Example

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) \sqrt{2x^2 - 9x - 1} \geq 2 \quad ; \quad b) \sqrt{(x-3)(4-x)} \geq -1$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

4. Equations du second degré à une inconnue comportant un paramètre

Example

On donne l'équation suivante : (E): $x \in \mathbb{R}$, $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 2 = 0$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m , l'équation (E) est – elle :
 - a. Du premier degré ? Pour cette valeur de m , résoudre l'équation (E).
 - b. Du second degré ?
2. On s'intéresse au cas où l'équation (E) est du second degré.
 - 2.1. Calculer en fonction de m , le discriminant.
 - 2.2. Pour quelles valeurs de m , l'équation (E) admet :
 - a. Aucune solution ;
 - b. Une solution ;
 - c. Deux solutions distinctes.
3. Dans le cas où l'équation (E) admet deux solutions distinctes, calculer la somme S et le produit P de ces solutions en fonction de m .

NB : Le paragraphe 4 ne fera pas l'objet d'une évaluation

[illegible]

A VOUS DE JOUER...

Exercice 1 (QCM)

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1/ L'équation $-2x^2 - 2x + 4 = 0$ a pour solutions :

A. -1 et 1 B. 1 et -2 C. 1 et 4 D. 0 et 3

2/ L'équation $-2x^2 - 2x + 4 = 0$ a pour discriminant :

A. 36 ; B. 20 C. 26 D. -36

3/ Le nombre des racines de l'équation $2x^2 - 2x + 4 = 0$ est :

A. 0 B. 1 C. 2 D. une infinité

4/ L'équation $2x^2 - 2x + 4 = 0$ a respectivement pour somme et produit :

A. 0 et 4 B. 1 et 2 C. -1 et 2 D. 1 et -2

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes :

1) a) $-2x^2 + 3x - 1 = 0$

b) $-2x^2 + 3x - 1 > 0$

2) a) $-3x^2 + 4x + 7 = 0$

b) $-3x^2 + 4x + 7 \leq 0$

3) a) $x^2 + x + 3 = 0$

b) $x^2 + x + 3 > 0$

4) a) $4x^2 - 28x + 49 = 0$

b) $4x^2 - 28x + 49 > 0$

5) $q \in \mathbb{R}, -q^4 - 3q^2 + 4 = 0$

6) $\sqrt{2}x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 1 = 0$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes : 1) $\sqrt{x+2} = 3x - 4$; 2) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-4}$;
 $\sqrt{x-1} = \sqrt{-x+3}$.

Exercice 4 : Résoudre :

1) $x \in \mathbb{R}; \frac{x(x+1)}{x-1} = 2x$ 2) $x \in \mathbb{R}; \frac{x(x+1)}{x-1} \leq 2x$

Exercice 5

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 8x - 64$$

1) Calculer $P(8)$. Que peut - on conclure ?

2) a - Mettre $P(x)$ sous la forme $P(x) = (x - 8)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme du second degré.

b - Factoriser $Q(x)$ puis $P(x)$.

- c - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- 3) a- Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .
b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$.
- 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{P(x)}{x+1} \leq 0$.

Exercice 6 : Résoudre :

- a) $\sqrt{x+3} = \sqrt{7-2x}$
b) $\sqrt{x^2-2x+2} = \sqrt{-2x^2-2x+4}$
c) $\sqrt{x-9} = x+11$
d) $\sqrt{x-1} = -3$

Exercice 7

Résoudre les inéquations suivantes : $\sqrt{2x+1} \leq x+3$; $\sqrt{2x-2} \geq -4$; $\sqrt{-3x-1} \geq 3$.

Exercice 8 : Etudier le signe de :

- a) $f(x) = 2x - 3$
b) $g(x) = -2x^2 + 3x - 1$
c) $h(x) = -x^2 + x - 7$
d) $p(x) = 4x^2 - 28x + 49$

Exercice 9 : Résoudre :

- 1) $x \in \mathbb{Z}$, $-2x^2 + x + 2 > 0$
2) $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$
3) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2-x-6}{x^2+3x-4} \leq 0$
4) $x \in \mathbb{N}$, $\frac{2x^2-7x+6}{-x^2+2x} \geq 0$
5) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{3}{x^2+2x-3} < \frac{2}{x^2-x-2}$
6) $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq x^2 \leq 5$
7) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x^2 \leq 9 \\ -x(x-5) \geq 0 \end{cases}$

CHAPITRE 2 :
**SYSTEMES LINEAIRES ET PROGRAMMATION
 LINEAIRE**

Dans ce chapitre nous nous proposons de conjuguer études numérique et graphique pour résoudre des systèmes d'équations et d'inéquations du premier degré à deux inconnues réelles. On révisera les méthodes vues en classe de seconde. On apprendra à mettre en équations un problème concret ou historique, issu de l'économie ou de la géométrie et à trouver le maximum et le minimum d'une fonction.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, chaque apprenant, doit être capable, en exploitant les acquis de ce cours, de :

- résoudre des systèmes d'équations à deux inconnues suivant la méthode exigée ;
- résoudre un système de plus de deux équations à plus de deux inconnues de manière guidée ;
- résoudre tout système d'inéquations à deux inconnues en suivant les propriétés apprises ;
- résoudre graphiquement une inéquation, un système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R}^2$;
- déterminer les intrants qui permettront à l'entrepreneur de maximiser les

bénéfices ou de minimiser les coûts de production en tenant compte des contraintes de l'entreprise.

1. Systèmes linéaires

1.1. Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

1.1.1. Equation du type $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$, $ax + by + c = 0$

Il existe deux méthodes pour résoudre une telle équation :

- la méthode algébrique

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-ax - c}{b}, \quad a \neq 0. \text{ D'où l'ensemble solution est } S = \left\{ \left(x ; \frac{-ax - c}{b} \right), x \in \mathbb{R} \right\}$$

- la méthode graphique

Elle consiste à représenter la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans le plan muni d'un repère.

Exemple

Résoudre par les méthodes algébrique et graphique l'équation suivante : $-2x + y + 3 = 0$, où x et y sont des nombres réels.

- Résolution par la méthode de déterminant ou de CRAMER

Le déterminant est noté D ou $\det$.

Elle consiste à calculer les trois déterminants :

- le déterminant du système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ noté $D_S = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$;
 - le déterminant lié à x noté $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$;
 - le déterminant lié à y noté $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$.
- Si $D_S \neq 0$ alors le système admet une unique solution $(x_0 ; y_0)$ telle que $x_0 = \frac{D_x}{D_S}$ et $y_0 = \frac{D_y}{D_S}$, donc $S = \{ (x_0 ; y_0) \}$.
- Si $D_S = 0$ et $D_x \neq 0$ (ou $D_y \neq 0$) le système n'admet pas de solution, alors $S = \emptyset$.
- Si $D_S = 0$, $D_x = 0$ et $D_y = 0$ alors le système admet une infinité de solutions donnée par l'une des équations : $ax + by = c$. $S = \left\{ \left(\frac{-by - c}{a} ; y \right), y \in \mathbb{R} \right\}$.

Remarque

Si $D_S \neq 0$ alors le système est dit de CRAMER.

Example 1

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les systèmes suivants : a) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$

[illegible]

Example 2

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} -2x + m^2y = m \\ x - my = 1 - m \end{cases} \quad ; \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel}$$

1. Calculer les déterminants D_S ; D_x et D_y .

Elle consiste à tirer l'une des inconnues et à la remplacer dans les deux autres équations restantes. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues que l'on sait résoudre.

Example

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 10 \\ 2x - 3y + 8z = 16 \\ -3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$
[illegible]

- Méthode de GAUSS (ou de pivot de GAUSS)

- On fixe par exemple la ligne L_1 comme pivot (on s'assure que toutes les inconnues de cette ligne soient non nulles) et on élimine x dans les lignes L_2 et L_3 par rapport à L_1 . Puis on obtient de nouvelles lignes L_2' et L_3' .
- On fixe la ligne L_2' et on élimine y dans L_3' par rapport à L_2' . Puis on obtient une nouvelle ligne L_3'' .

Ainsi le système final prend la forme d'un triangle. On dit qu'on a triangularisé ou échelonné ce système.

Example

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 10 \\ 2x - 3y + 8z = 16 \\ -3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$
[illegible]

1.2.1. Résolution graphique d'une inéquation linéaire $ax + by + c > 0$ dans $\mathbb{R}^2$ (Régionnement du plan)

Example

a) $x \leq 1$; b) $y > -2$; c) $-x + 2y - 1 > 0$; d) $2x - y + 3 \leq 0$.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple sets of horizontal dashed lines, each set consisting of three lines (top, middle, bottom) that define writing rows. The lines are evenly spaced across the entire page, providing a guide for letter height and placement. There are no margins, text, or other markings present.

1.2.2. Résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires à deux inconnues

Soit le système (S) de la forme
$$\begin{cases} ax + by + c \geq 0 \\ a'x + b'y + c' \leq 0 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système :

- on trace d'abord les droites (d1) et (d2) d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$;
- chacune des droites partage le plan en deux demi-plans ;
- on choisit un point quelconque dans l'un des demi-plans obtenus et on remplace ses coordonnées dans l'inéquation donnée ;
- on hachure la partie non-solution ;
- la solution S est la partie du plan non hachurée y compris les bords.

Example

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 2y + 3x \leq 14 \\ y - x \leq 2 \\ y + 6x \leq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

[illegible]

2. Programmation linéaire

La programmation linéaire consiste à maximiser ou à minimiser une fonction linéaire par rapport à ses variables sous des contraintes linéaires. Elle comprend deux parties :

- *la fonction économique* (fonction objectif ou, fonction à maximiser ou fonction à minimiser) ;

Exemple de fonction à maximiser : la production, le bénéfice, le profit, le solde, la recette, la vente, le chiffre d'affaires, le revenu, la rente...

Exemple de fonction à minimiser : les coûts, les dépenses, les achats, la perte, le salaire, le temps...

- les contraintes : ce sont les inégalités traduisant par exemple les disponibilités.

- Etapes de la résolution

- On représente graphiquement le système d'inéquations (domaine des contraintes).
- On trace la fonction économique (en posant fonction économique égale à 0).
- On déplace la droite fonction économique parallèlement à elle – même sur le domaine des contraintes.
- Dans le cas de maximisation, le dernier point obtenu est le point maximum.
- Dans le cas de minimisation, le premier point obtenu est le point minimum.

2.1. Problème de maximisation

Exemple

Un atelier de confection fabrique en série deux modèles de chemises de luxe :

- Une chemise du premier modèle nécessite 1 m de tissu ; 4 heures de travail et rapporte 24 F
- Une chemise du deuxième modèle exige (nécessite) 1,5 m de tissu ; 2 heures de travail et rapporte 16 F. On suppose que l'atelier dispose quotidiennement de 150 m de tissu et de 400 heures de travail et qui peut vendre toute sa fabrication. On cherche à calculer le nombre de chemises de chaque modèle qu'il faut fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal.

1. Compléter à l'aide des données de l'énoncé le tableau suivant :

	Mètre de tissu	Heures de travail	Bénéfice
1 ^{er} modèle			
2 ^e modèle			
Maximum			

2. On note x et y les nombres respectifs de chemises du premier modèle et du deuxième modèle fabriqués en un jour (quotidiennement).
- a) De quel signe sont les nombres x et y ?
 - b) Par quelle inéquation traduit on le fait que l'atelier dispose de 150 m de tissu par jour ?
 - c) Par quelle inéquation traduit on le fait que l'atelier dispose de 400 heures de travail par jour ?

3. Donner l'expression du bénéfice total en fonction de x et y .

4. a) Résoudre graphiquement le système (S) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ 2x + y \leq 200 \end{cases}$.

b) Montrer que le système des contraintes (S_1) du problème est équivalent au système (S).

c) Déterminer graphiquement le nombre de chemises de chaque modèle permettant de maximiser le bénéfice.

5. Déterminer le bénéfice maximal.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple sets of horizontal lines designed to guide handwriting. Each set consists of three lines: a solid top line, a dashed middle line, and a solid bottom line. These sets are repeated vertically down the entire page, providing a template for practicing letter formation and alignment. The paper is otherwise blank, with no margins or additional markings.

2.2. Problème de minimisation

L'office du tourisme d'une ville décide de renouveler les mobiliers d'un jardin public. Pour cela il est nécessaire d'acheter au moins 600 tables de pique-nique, 1200 bancs publics et 900 poubelles. Les deux fournisseurs contactés proposent chacun un type de lot

	Tables	Bancs	Poubelles	Coût d'un lot en F
Lot A	10	30	30	200 000
Lot B	20	20	10	100 000

On désigne par x et y les nombres respectifs de lots A et de lots B à acheter pour que la dépense soit minimale.

1. Montrer que le système des contraintes est équivalent à
$$\begin{cases} x + 2y \geq 60 \\ 3x + 2y \geq 120 \\ 3x + y \geq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$
2. Exprimer en fonction de x et y la dépense Z occasionnée par l'achat de x lots A et y lots B.
3. a) Déterminer graphiquement le nombre de lots de chaque type à acheter pour obtenir une dépense minimale Z_m .
b) Calculer la dépense minimale Z_m

[illegible]

[illegible]

REMARQUES

- Les expressions : **a en stock, dispose, ne dispose que, ...sont limités à, au plus, ne peut offrir que, au maximum, sont (est) disponibles, à la limite de, ne peut produire que, ne ...plus de, ne pas dépasser,.....** expriment le maximum et le symbole à utiliser est $\leq$;
- Les expressions : **au moins, au minimum, ne ...moins de, peut dépasser, ...** expriment le minimum et le symbole à utiliser est $\geq$.

A VOUS DE JOUER ...

Exercice 1

A/ Répondre par Vrai ou Faux

- 1/ La méthode de Cramer permet de résoudre une équation de la forme $(x; y) \in \mathbb{R}^2$;
 $ax + by + c = 0$
- 2/ La méthode de Cramer permet de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues

B/ QCM

Choisir la bonne réponse sans la justifier ; une seule proposition est correcte.

- 3/ Le système d'équations linéaires $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 8 \end{cases}$; a pour solution :
 A/ ID ; B/ $\mathbb{R}^2$; C/ $\{9; -1\}$; D/ $\{(9; -1)\}$
- 4/ Le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x - 2y = 20 \end{cases}$; a pour solution :
 A/ $\mathbb{R}$; B/ $\mathbb{R}^2$; C/ $\{(5; 0)\}$; D/ $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y = 10\}$
- 5/ Le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x + y - 3z = 10 \\ -y + z = 8 \\ 3z = 12 \end{cases}$
 A / $\{13; -4; 4\}$; B / $\mathbb{R}$; C/ $\mathbb{R}^2$; D / $\{(13; -4; 4)\}$

Exercice 2

Résoudre :

- 1) $\begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ 6x + 6y = -8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2y = -9 \\ -7x + y = 10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 2x + \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 3x = 2 \\ 9x - 3y = -6 \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} 3x + 2y - 2 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x - 2y + 7z = 20 \\ 3x - y + 3z = 10 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2y - 3x = 4 \\ 2x + y = -3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ 2x + y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \\ 5x - 3y + 2z = 6 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} -2x + y + 4z = 7 \\ 4x - 5y - 6z = -5 \\ 3x - 4y + z = 13 \end{cases}$ (S = $\{(2; -1; 3)\}$)
- 11) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -x + 2y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$ (S = $\{(1; 2; 3)\}$) 12) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$ S = $\{(-1; -1)\}$;
- 13) $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 1 \\ x + z = -8 \end{cases}$ S = $\{(-2; 7; -6)\}$

Exercice 3

- 1) Trouver deux nombres dont la somme est égale à 3 et le produit égal à 2.
- 2) Trouver deux nombres dont la somme est égale à 6 et le produit est égal à 8.

Exercice 4

On se propose de résoudre par la méthode de CRAMER le système $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 3 - 2m \end{cases}$

1. Montrer que les déterminants du système, lié à x et lié à y sont respectivement
2. $D = m^2 - 1$; $D_x = 3m - 3$; $D_y = -2m^2 + 3m - 1$
3. Pour quelles valeurs de m le système admet :
 - a. 0 couple solution ?
 - b. Une infinité de couples solutions ?
 - c. Un couple solution ?

On suppose que $m = 3$. Donner le couple solution correspondant.

Exercice 5

Résoudre graphiquement :

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x - y \geq -2 \\ x - y < 1 \end{cases} & 2) \begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases} & 3) \begin{cases} 2x + y + 2 \geq 0 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \end{cases} & 4) \begin{cases} 3x + 5 \geq 0 \\ 2x - 8 < 0 \end{cases} \\
 5) \begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 < 0 \end{cases} & 6) \begin{cases} y - 3x \leq 1 \\ 2y + 3x \leq 16 \\ 3x + 7y \geq -21 \end{cases} & 7) \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y - 1 \leq 3 \end{cases} \\
 8) \begin{cases} -3 \leq -x + 6 \leq 3 \\ -2 \leq y - 3 \leq 2 \end{cases} & 9) \begin{cases} x \geq 200 \\ y \geq 300 \\ x + y \geq 1000 \\ 2x + y \leq 2100 \\ 5x + 4y \leq 6600 \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 6

Un atelier produit deux types de pièces, A et B, à l'aide de deux machines M_1 et M_2 . Chaque pièce en cours de fabrication doit passer successivement sur les deux machines dans un ordre indifférent.

Durée de passage d'une pièce de type A

-dans la machine M_1 : 30 minutes

-dans la machine M_2 : 40 minutes

Bénéfice sur une pièce de type A : 400F ;

Durée de passage d'une pièce de type B

-dans la machine M_1 : 20 minutes

-dans la machines M_2 : 10 minutes

Bénéfice sur une pièce de type B : 200F

La machines M_1 est disponible 3000 minutes par mois, la machine M_2 2000 minutes.

1/ Soient x une pièce de type A et y une pièce de type B. Montrer que le système de

contraintes de l'énoncé est
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 300 \\ 4x + y \leq 200 \end{cases}$$

2/ Tracer les droites $(D_1): x = 0$; $(D_2): y = 0$; $(D_3): 3x + 2y = 300$; $(D_4): 4x + y = 200$.

En déduire la région solution du système de contraintes précédent.

3/ On note par F la fonction bénéfice. Ecrire F en fonction de x et y .

4/ Déterminer graphiquement le nombre de pièces de type A et de pièces de type B que l'on doit fabriquer par mois pour avoir un bénéfice maximal.

Exercice 7

Un artisan fabrique deux types d'objets A et B. La réalisation d'un objet A demande 30f de matières premières et 125f de main d'œuvre ; celle de l'objet B demande 70f de matières premières et 75f de main d'œuvre. Pour une bonne gestion de l'entreprise, les dépenses journalières en matières premières et en main d'œuvre ne doivent pas dépasser respectivement 560f et 1250f. Les profits réalisés sont de 1250f pour l'objet A et 45f pour l'objet B.

On désignant par x le nombre d'objet A et par y le nombre d'objet B fabriqués par jour :

- 1) Calculer en fonction de x et de y , la dépense journalière en matière première et la dépense journalière en main d'œuvre.
- 2) Résoudre graphiquement le système suivant :
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 30x + 70y \leq 560 \\ 125x + 75y \leq 1250 \end{cases}$$
- 3) a) Calculer en fonction de x et y le profit journalier P réalisé.
b) Sachant que le système des contraintes du problème est celui de la question 2), déterminer graphiquement le nombre d'objets A et B que l'entreprise doit produire pour réaliser un profit maximum.

Exercice 8

Un collège commande à un libraire au moins 1600 feutres, 1800 stylos et 1550 crayons. Le libraire propose deux sortes de lots (A et B) définis comme :

	Feutres	Stylos	Crayons
Lot A	2	1	1
Lot B	1	3	2

- 1- On notera x le nombre de lots A et y celui de lots B. Montrer que le système

$$\text{des contraintes est } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 1600 \\ x + 3y \geq 1800 \\ x + 2y \geq 1550 \end{cases}$$

- 2- Représenter graphiquement ces contraintes.
- 3- Le libraire vend 800f chacun des lots A et B. Exprimer en fonction de x et y le prix P à payer par le collège.
- 4 -Déterminer graphiquement le prix minimal à payer par le collège.

Les mathématiques doivent leur évolution récente aux nombreux développements et généralisations de la notion de fonction et à ses utilisations dans des domaines variés. L'objet de ce chapitre consiste à outiller suffisamment l'apprenant sur l'étude des fonctions numériques notamment, l'ensemble de définition, la parité, les éléments de symétrie.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, l'apprenant doit être capable, en exploitant les acquis de ce cours, de :

- déterminer l'ensemble de définition d'une fonction donnée en se référant aux propriétés ;
- étudier la parité d'une fonction donnée ;
- montrer qu'une droite donnée est un axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction donnée ;
- montrer qu'un point donné est un centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction donnée ;
- étudier la parité d'une fonction donnée sur la base des propriétés ;
- déduire le tracé d'une courbe d'une fonction donnée à partir d'une autre.

1. Définition d'une fonction

On appelle fonction de A vers B toute relation qui à tout élément de A associe zéro ou un élément de B.

2. Les différents modes de définition d'une fonction

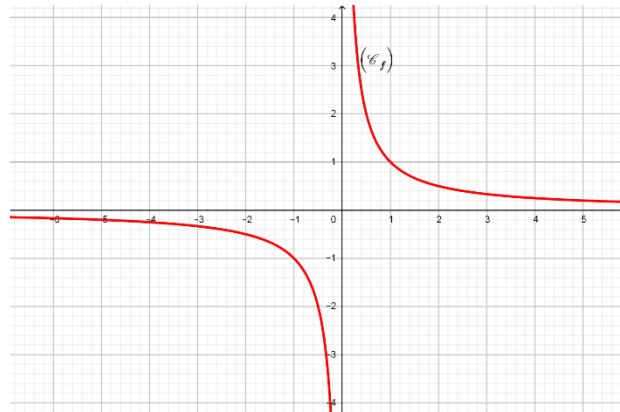
Une fonction peut être définie par :

- Une expression explicite :

Exemple : $f(x) = 2x^2 + 1$; $g(x) = \frac{x+2}{-x^2+5}$; $h(x) = \frac{2x-3}{-x+1}$; $j(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x-1}$

- Une représentation graphique :

Exemple



- Un tableau de valeurs :

Exemple

x	-3	-2	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	3
$f(x)$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	8

3. Ensemble de définition d'une fonction

3.1 Définition

L'ensemble de définition, c'est l'ensemble des valeurs de l'ensemble de départ pour lesquelles la fonction existe ou est définie ou encore a un sens. L'ensemble de définition d'une fonction f est noté D_f .

3.2. Recherche de l'ensemble de définition

3.2.1. Cas d'une fonction polynôme

- ❖ Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction polynôme n'est pas précisé, alors l'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}$.

Exemple :

$f(x) = -4$; $g(x) = 3x^5 + 47x^3 - x - 107$. Déterminer les ensembles de définition D_f et D_g .

- ❖ L'ensemble de définition d'une fonction polynôme, lorsque l'ensemble de départ est précisé est l'ensemble de départ.

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x) = \text{fonction polynôme}$$

$$D_f = A$$

Exemple :

$$f : [-3; 3[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + x - 9. \text{ Déterminer l'ensemble } D_f \text{ de } f.$$

3.2.2. Cas d'une fonction rationnelle

- Une fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômes.

Soit f une fonction rationnelle.

- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes : $Df = \{x \in \mathbb{R} / q(x) \neq 0\}$.

- $f: A \rightarrow B$

$$x \mapsto f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ avec } p(x) \text{ et } q(x) \text{ des polynômes : } Df = \{x \in A / q(x) \neq 0\}$$

Exemple 1:

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{1-x} ; \quad f_2(x) = \frac{1+x}{-3x^2+4x-1} ; \quad f_3(x) = \frac{5-x}{x^2+5} ; \quad f_4(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}$$

Exemple 2 : Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f définie par

$$f : [0; 3[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x-4}{3x^2+x-4}.$$

3.2.3. Cas d'une fonction irrationnelle

$$f(x) = \sqrt{A(x)} \quad : \quad D_f = \{x \in D_A / A(x) \geq 0\}$$

On peut établir le tableau de signe de $A(x)$ avant de donner D_f .

Exemple :

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{2-x}$; $h(x) = \sqrt{x^2-16}$.

4. Parité d'une fonction

4.1. Fonction paire

f est une fonction paire si et seulement si, $\forall x \in D_f$; $-x \in D_f$ **et** $f(-x) = f(x)$.

Conséquence graphique

Lorsqu'une fonction f est paire, alors sa courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (OJ) d'équation $x = 0$.

4.2. Fonction impaire

f est une fonction impaire si et seulement si, $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ **et** $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence graphique

Lorsqu'une fonction f est impaire, alors sa courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

NB : Etudier la parité d'une fonction, c'est dire si la fonction est paire ou impaire ou n'est ni paire ni impaire.

Exemple :

1. $f(x) = -\frac{2x^4}{x^2+1}$

- a. Montrer que f est paire.
- b. Donner la conséquence graphique de ce résultat.

4. $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - 6x + 5 .$$

Etudier la parité de P .

Remarques

- L'ensemble de définition d'une fonction paire ou impaire est un ensemble centré en zéro.
- $\mathbb{R}$ est un ensemble symétrique par rapport à zéro. On peut aussi citer $[-2 ; 2]$.

5. Les éléments de symétrie

5.1. Axe de symétrie $(\Delta) : x = a$

La droite (Δ) d'équation $x = a$ est axe de symétrie à (C_f) si et seulement si :

Méthode 1 :

$$\forall x \in D_f ; (2a - x) \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x)$$

Méthode 2 :

La nouvelle fonction g définie par $g(x) = f(x + a)$ est paire
(Méthode de changement de variable)

5.2. Centre de symétrie $I(a ; b)$

Le point $I(a ; b)$ est centre de symétrie à (C_f) si et seulement si :

Méthode 1 :

$$\forall x \in D_f ; (2a - x) \in D_f \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b$$

Méthode 2 :

La nouvelle fonction g définie par $g(x) = f(x + a) - b$ est impaire

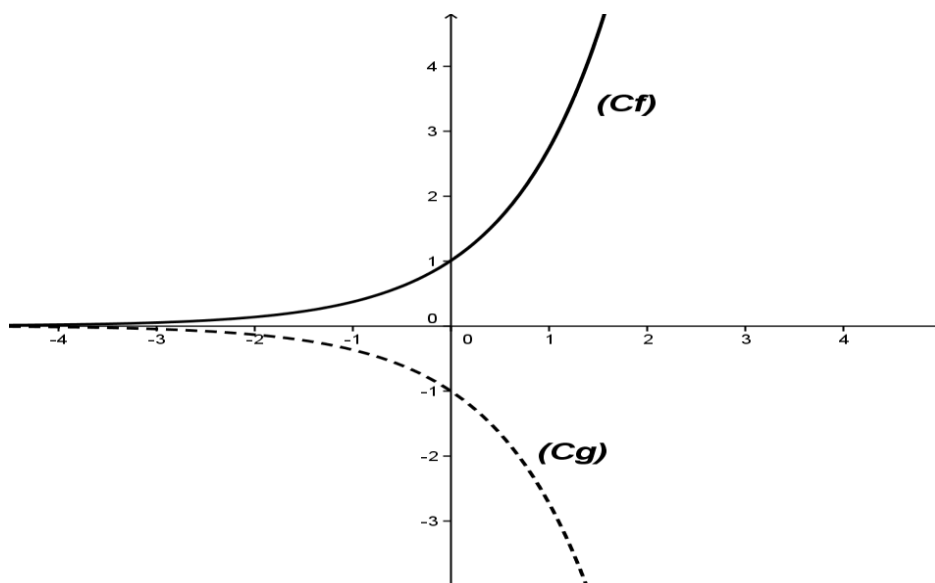
1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Montrer que la courbe de f admet la droite $(\Delta) : x = 3$ comme axe de symétrie.

[illegible]

- [illegible]

6.1. $g(x) = -f(x)$

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in (C_f) \Leftrightarrow M' \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \in (C_g)$$

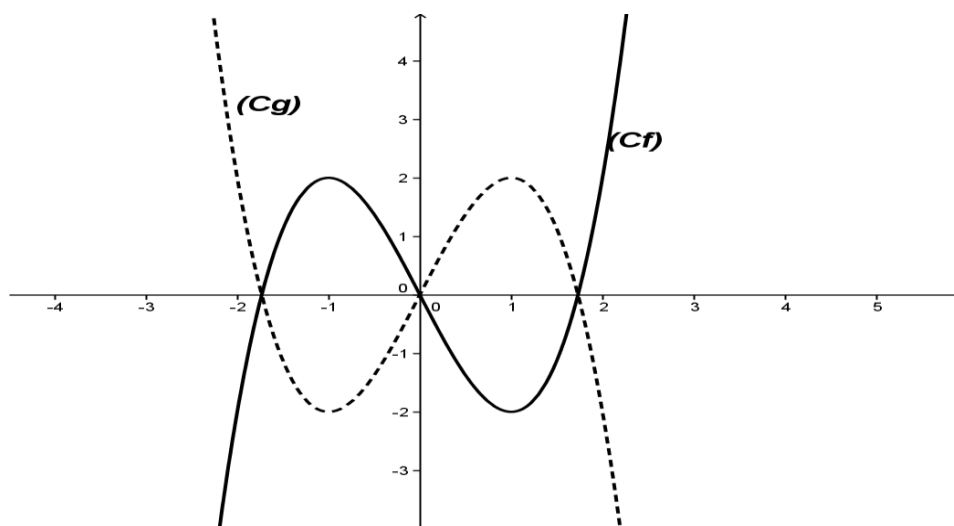


6.2. $g(x) = f(-x)$

Pour tracer (C_g) , on prend la symétrie orthogonale d'axe (OJ) de tous les points de (C_f) .

$$(C_g) = S_{(OJ)}(C_f)$$

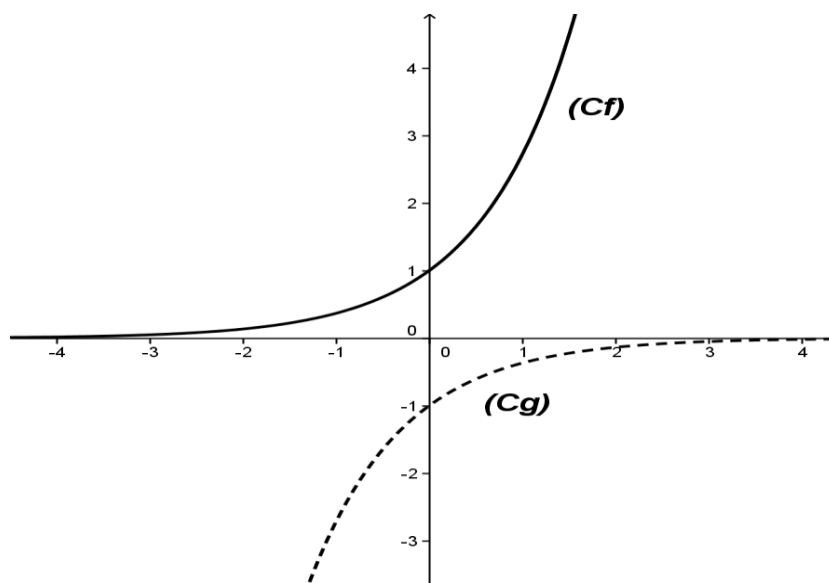
$$M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in (C_f) \Leftrightarrow M' \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} \in (C_g)$$



6.3. $g(x) = -f(-x)$

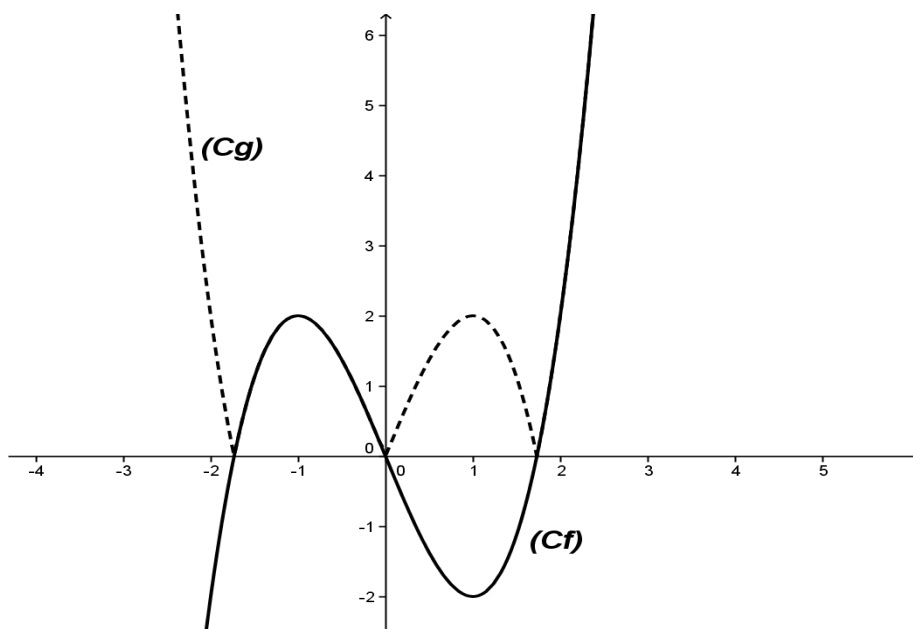
Pour tracer (C_g) , on prend la symétrie centrale du point O de tous les points de (C_f) . $(C_g) = S_O(C_f)$

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in (C_f) \Leftrightarrow M' \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \in (C_g)$$



6.4. $g(x) = |f(x)|$

Pour tracer (C_g) , on conserve la partie de (C_f) qui est située au dessus de (OI) et on prend la symétrie orthogonale d'axe (OI) de la partie de (C_f) située en dessous de (OI) . Soit (C_1) la partie de (C_f) située au dessus de (OI) et (C_2) la partie de (C_f) située en dessous de (OI) . $(C_g) = (C_1) \cup S_{(OI)}(C_2)$



A VOUS DE JOUER...

Exercice 1 : QCM

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

- 1) Une fonction f d'ensemble de définition D_f est paire si et seulement si :
 - A) $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(x) = -f(x)$;
 - B) $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $-f(x) = f(-x)$.
 - C) $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$;
 - D) Aucune réponse.
- 2) Le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie à (C_f) si et seulement si :
 - A) $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(a - x) + f(x) = 2b$.
 - B) $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(x + 2a) + f(x) = 2b$.
 - C) $\forall x \in D_f, (a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
 - D) $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
- 3) L'ensemble de définition de la fonction f définie de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ est :
 - A) $]0 ; +\infty[$;
 - B) $\{-1 ; 1\}$;
 - C) $]0 ; +\infty[\setminus\{1\}$;
 - D) $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.
- 4) La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie à (C_f) si et seulement si :
 - A) $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 0$.
 - B) $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2a$.
 - C) $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
 - D) $\forall x \in D_f, (a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.

Exercice 2 : Soient les fonctions suivantes :

$$f : [0 ; 10] \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-3} \quad \quad \quad x \mapsto \sqrt{1-x^2} \quad \quad \quad x \mapsto \frac{2}{x(x^2-2)}.$$

- 1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $[0 ; 3[\cup]3 ; 10]$.
- 2) Montrer que l'ensemble de définition de g est $[-1 ; 1]$
- 3) Montrer que l'ensemble de définition de h est $\mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : Etudier la parité des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : [0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^3}{x^2+1} \quad \quad \quad x \mapsto x^2 \quad \quad \quad x \mapsto 3x^4 - 5x^2 + 2.$$

Exercice 4 : Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}$; $g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$.

- 1) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de (C_f) .
- 2) Montrer que le point $\Omega(1 ; 3)$ est un centre de symétrie de (C_g) .

CHAPITRE 4 : LIMITE ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Les mathématiques doivent leur évolution récente aux nombreux développements et généralisations de la notion de fonction et à ses utilisations dans des domaines variés.

L'objet de ce chapitre consiste à compléter les savoirs et savoir-faire de l'apprenant sur l'étude des fonctions numériques notamment, le calcul des limites d'une fonction donnée, la détermination des asymptotes éventuelles, l'étude de la continuité d'une fonction.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

A la fin de ce chapitre, chacun des apprenants, en exploitant les acquis de ce cours, devra être capable de :

- déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition d'une fonction ;
- écrire les équations d'éventuelles asymptotes à une courbe représentative ;
- étudier la continuité d'une fonction donnée en un point x_0 ou sur un intervalle donné.

1. LIMITES D'UNE FONCTION

Activité

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Calculer $f(10^7)$; $f(10^8)$; $f(10^9)$; $f(10^{-7})$; $f(10^{-8})$; $f(10^{-9})$.
- Que devient $f(x)$ lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?
- Etudier le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus petites.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features ten sets of horizontal lines across the page. Each set consists of a solid top line, a dashed middle line, and a solid bottom line, providing a guide for letter height and placement. The paper is otherwise blank, with no text or other markings.

1.1. Notion de limite d'une fonction

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f , a et l des nombres réels.

Le réel l est la limite de f en a ou encore l est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a signifie que lorsque x se rapproche de plus en plus de a , $f(x)$ se rapproche aussi proche que l'on veut de l .

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et on lit : « la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est égale à l ».

Propriété

Lorsqu'une fonction f est définie en a et admet une limite en a , alors on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Exemple : On donne $f(x) = 2x - 1$.

Calculer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features ten sets of horizontal lines across the page. Each set consists of a solid top line, a dashed middle line, and a solid bottom line, providing a guide for letter height and placement in handwriting practice. The paper is otherwise blank, with no margins or additional markings.

1.2. Théorème de l'unicité

Lorsqu'une fonction f admet une limite en a , alors cette limite est unique.

1.3. Limite d'une fonction à l'infini

1.3.1. Limite d'une fonction polynôme

Règle n°1 : La limite d'une constante est cette même constante.

Exemple : $f(x) = -6$. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Limites usuelles ou référentielles ou encore remarquables

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\text{NB : } \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = a \times \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = a \times \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n$$

Règle n°2 : A l' infini, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme du plus haut degré.

Exemple : Etudier le comportement de ces fonctions en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$f(x) = -2x ; \quad g(x) = -4x^2 + 2x + 7 ; \quad h(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 2.$$

1.3.2. Limite d'une fonction rationnelle

Limites référentielles

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x} = 0;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

Règle n°3 : A l' infini, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du rapport des monômes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : Calculer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de :

i. $f(x) = \frac{x+3}{7-2x};$

ii. $g(x) = \frac{-4x^2-8x+5}{3+x};$

iii. $h(x) = \frac{2x^2-x+3}{1-x^2};$

iv. $p(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+2} ;$

1.4.2. Limite en un réel x_0 d'une fonction rationnelle

1.4.2.1. Cas où $x_0 \in D_f$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemple : Soient $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$; $g(x) = \frac{5}{x^2-3x+3}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$.

1.4.2.2. Cas où $x_0 \notin D_f$ et est une borne de D_f « $\frac{\text{réel non nul}}{0}$ »

Dans ce cas, il faut étudier le signe du dénominateur et calculer la limite au voisinage de x_0 c'est-à-dire la limite à gauche de x_0 (ou limite quand x tend vers x_0 par valeur négative ou par valeur inférieure) et on note :

$$\lim_{x \xrightarrow{x < x_0} x_0} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \xrightarrow{x < x_0} x_0} f(x)$$

et la limite à droite de x_0 (ou limite quand x tend vers x_0 par valeur positive ou par valeur supérieure) et on note

$$\lim_{x \xrightarrow{x > x_0} x_0} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \xrightarrow{x > x_0} x_0} f(x)$$

Exemple 1 :

On donne : $f(x) = \frac{x^2+x}{1-x}$ et $g(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

[illegible]

1.4.2.3. Cas des formes indéterminées « $\frac{0}{0}$ »

Ici il faut **impérativement** simplifier la fonction rationnelle par $\ll x - x_0 \gg$ avant de calculer la limite en x_0 .

Exemple 1 : Soient $f(x) = \frac{1-x}{x^2-1}$; $g(x) = \frac{x^2+x-2}{-x^2+4x+12}$.

Calculer la limite de $f(x)$ en $x_0 = 1$ et de $g(x)$ en $x_0 = -2$.

[illegible]

Exemple : Soit $h(x) = \frac{1+x}{x+3}$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -3} h(x)$

b) Montrer que la courbe de h (C_h) admet une asymptote verticale dont on précisera l'équation.

[illegible]

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f (C_f) si et seulement si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ avec $a \neq 0$.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-2}$.

a. Mettre $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

b. Montrer que la courbe (C_f) de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 3$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2.2. Continuité d'une fonction sur un intervalle**- Définition**

On dit que f est continue sur un intervalle J lorsqu'elle est continue en tout point d'abscisse x_0 de J .

- Propriétés

- ✓ Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
- ✓ Toute fonction rationnelle est continue en tout point d'un intervalle sur lequel elle est définie.

A VOUS DE JOUER ...

Exercice 1 : (QCM)

On donne la fonction numérique définie par $u(x) = \frac{-2x^2 - x + 2}{x+1}$.

Pour chaque question, choisir l'unique bonne réponse parmi les propositions données.

1/ L'ensemble de définition de la fonction u est :

- A) $D_u = \mathbb{R}$ B) $D_u = \mathbb{R} - \{1\}$ C) $D_u = \mathbb{R} - \{-1\}$ D) $D_u = \{-1\}$.

2/ $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x)$ vaut : A) $-\infty$ B) $+\infty$ C) -2 D) 0 .

3/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ vaut : A) $-\infty$ B) $+\infty$ C) -2 D) 0 .

4/ La courbe (C_u) admet comme asymptote verticale, la droite d'équation :

- A) $(D): y = -1$ B) $(D): x = -1$ C) $(D): x = 1$ D) $(D): y = 1$.

5/ La courbe (C_u) n'admet pas d'asymptote :

- A) verticale B) oblique C) horizontale D) Aucune réponse.

6/ La courbe (C_u) admet comme asymptote oblique, la droite d'équation :

- A) $(D): y = -2x$ B) $(D): y = -2x + 1$ C) $(D): y = -2x - 1$ D) $(D): x = 2y$.

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.

1/ Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $] -\infty ; -1[\cup] -1 ; +\infty[$.

2/ Calculer :

a / les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f .

b / $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

3/ Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes dont on précisera pour chacune, sa nature et son équation.

Exercice 3 : Répondre aux mêmes questions comme dans l'exercice 2 pour chacune des fonctions numériques suivantes : $g(x) = \frac{-x+3}{x^2+2x+1}$ et $h(x) = \frac{x^2-2x+2}{2x+2}$.

Exercice 4

Calculer les limites de chacune des fonctions suivantes à gauche et à droite pour les valeurs indiquées :

$$f(x) = \frac{5+2x}{x+3} \text{ en } -3 \quad ; \quad g(x) = \frac{x-2}{-3x^2+x+4} \text{ en } -1;$$

$$p(x) = \left(\frac{1-x}{x+3}\right)^2 \text{ en } -3 \quad ; \quad h(x) = \left(\frac{1+x}{x+3}\right)^3 \text{ en } -3.$$

**CHAPITRE 5 :
DERIVATION D'UNE FONCTION**

Les mathématiques doivent leur évolution récente aux nombreux développements et généralisations de la notion de fonction et à ses utilisations dans des domaines variés.

L'objet de ce chapitre consiste à compléter les acquis de l'apprenant sur l'étude des fonctions numériques notamment, la dérivabilité, l'équation de la tangente en x_0 , application de la dérivée.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, chaque apprenant devra être capable, en exploitant les acquis de ce cours, de :

- dériver une fonction donnée sur la base des formules ;
- montrer qu'une fonction est dérivable en un point ;
- écrire l'équation de la tangente à une courbe en un point x_0 connaissant sa fonction ;
- donner le sens de variation d'une fonction à partir d'un tableau de variation.

1- Dérivabilité d'une fonction en x_0

La fonction f , définie en x_0 , est dérivable en x_0 si et seulement si

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Elle est alors notée $f'(x_0)$.

L'expression $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est appelée taux de variation de f en x_0 .

$f'(x_0)$ est le nombre dérivé de f en x_0 .

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) au point d'abscisse x_0 à (C_f) .

$f'(x_0)$ est la pente de la tangente (T) au point d'abscisse x_0 à (C_f) .

$f'(x_0)$ est la limite du taux de variation de f en x_0 .

Remarque : Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

- ✓ Toute fonction polynôme est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
- ✓ Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

2. Equation de la Tangente (T) au point d'abscisse x_0 à (C_f)

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exemple : $f(x) = 2x - 3$

1. Montrer que f est dérivable au point d'abscisse $x_0 = -2$.
2. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = -2$ à (C_f) .

3. Fonction dérivée

- La fonction dérivée de f est notée f' .
- La dérivée seconde de f est notée f'' ou $f^{(2)}$.
- La dérivée n - ième de f est notée $f^{(n)}$.

3.1. Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
$c, c \in \mathbb{R}$	0
x	1
$x^n, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3.2. Dérivées et opérations sur les fonctions

Fonction	Dérivée
$f = U^n$	$f' = nU^{n-1}U'$

4. Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction sur un intervalle

Etudier le sens de variation d'une fonction f revient à étudier le signe de la dérivée f' sur D_f . En effet :

- si $f'(x) > 0$ sur un intervalle I_1 alors f est strictement croissante sur I_1 ;
- si $f'(x) < 0$ sur un intervalle I_2 alors f est strictement décroissante sur I_2 ;
- si $f'(x) = 0$ sur un intervalle I_3 alors f est constante sur I_3 .

NB : A partir du sens de variation et des limites d'une fonction, on dresse un tableau de synthèse appelé tableau de variation de cette fonction.

Exemple

On donne la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

- 1) Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = 3x(x - 2)$.
- 3) Etudier le signe de $f'(x)$.
- 4) En déduire le sens de variation de f .
- 5)a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b) Dresser le tableau de variation de f .

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

5. Application de la dérivée

En économie, pour un produit donné, q étant la quantité produite, on désigne par :

$\mathcal{C}(q)$ ou CT le coût de production ;

$\mathcal{C}$ la fonction coût ;

$C_m(q)$ ou C_m le coût marginal au niveau q ($C_m(q) = C'(q)$);

$C_M(q)$ ou C_M le coût unitaire ou le coût moyen ($C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$) ;

La production est optimale lorsque $C_m = C_M$.

Example

L'entreprise YIYA fabrique et vend un produit A. La fonction de coûts prévisionnels est

$$CT = 5Q^2 + 7Q + 20$$

1. Calculer la fonction de coûts moyens (C_M).
2. Calculer la fonction de coûts marginaux (C_m).
3. Dédurre le volume de la production optimale.

Réponses : 1) $C_M = \frac{CT}{\theta}$ 2) $C_m = 10Q + 7$ 3) $C_m = C_M$

[illegible]

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

A VOUS DE JOUER...

Exercice 1 : QCM

- 1) L'équation de la tangente (T) au point d'abscisse x_0 à (C_f) est :

A) $y = f(x_0)(x - x_0) + f'(x_0).$

B) $y = f(x_0)(x_0 - x) - f'(x_0).$

C) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

D) $y = f'(x_0)(x_0 - x) - f(x_0)$.

- 2) Le coefficient directeur de la tangente (T) d'équation $4y + 8x + 1 = 0$ à (C_f) est :

A) 2 ; B) -2 ; C) 4 ; D) 8.

- 3) On donne $f(x) = (2x + 3)^{2022}$. $f'(x) =$

A) $(2x + 3)^{2021}$ B) $2022(2x + 3)^{2021}$ C) $4044(x + 3)^{2021}$ D) $4044(2x + 3)^{2021}$

- 4) Soit $f(x) = \frac{2}{x}$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 1$ est :

A) -2

B) 2

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{-1}{2}$

Exercice 2 : Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes définies par :

1) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 5x + 8$;

2) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$;

3) $f(x) = \frac{2}{5x+3}$;

4) $f(x) = (2x^2 + 7)^8$;

5) $f(x) = \frac{x^2+5x+7}{x-1}$;

6) $f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 7}$.

Exercice 3 : Déterminer le nombre dérivé de f en $x_0 = 1$ des fonctions définies par :

1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$;

2) $f(x) = \frac{2}{5x+3}$;

3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

Exercice 4 : Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$.

4) Etudier le signe de $f'(x)$.

5) En déduire le sens de variation de f .

6) Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 5 : Soit $f(x) = x^2 - x + 2$.

Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = 0$ à (C_f) .

Les mathématiques doivent leur évolution récente aux nombreux développements et généralisations de la notion de fonction et à ses utilisations dans des domaines variés.

L'objet de ce chapitre consiste à initier l'apprenant au tracé des fonctions numériques notamment les variations et les études graphiques.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, chacun des apprenants, après avoir exploité les acquis de ce cours, devra être capable de :

- énumérer dans l'ordre les éléments du plan d'étude d'une fonction en se référant au cours ;
- étudier les variations d'une fonction donnée (polynôme ou rationnelle) ;
- tracer une fonction donnée en se référant à son tableau de variation ;
- déterminer graphiquement le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = m$.

NB : L'interprétation d'une courbe ne fera pas l'objet d'une évaluation.

1. Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier et représenter graphiquement une fonction il faut :

1.1. Variations de la fonction

* ensemble de définition de la fonction * dérivée de la fonction * signe de la dérivée de la fonction * sens de variation de la fonction	}	Sens de variation de la fonction
---	---	---

*Limites aux bornes de l'ensemble de définition de f .

*Tableau de variation de f .

1.2. Tracé de la courbe de la fonction

- Les droites particulières (asymptotes, tangentes).
- Les éventuels extrémums.
- Points remarquables (points d'intersection de la courbe avec les axes).

- Intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses (OI): $y = 0$ $((Cf) \cap (OI))$
On pose $y = 0$ et on tire x en résolvant l'équation $f(x) = 0$.

- Intersection de la courbe de f avec l'axe des ordonnées (OJ) : $x = 0$ $(Cf) \cap (OJ)$

On pose $x = 0$ et on calcule $y = f(0)$.

- Tableau de valeurs.
- Tracé de la courbe.

2- ETUDE DE QUELQUES FONCTIONS

Handwriting practice lines consisting of multiple horizontal dashed lines for text entry.

[illegible]

2.2. Fonctions rationnelles

2.2.1- Etude de la fonction de type : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (fonction homographique)

Sa courbe est appelée une hyperbole.

Example :

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{-2x+3}{x-1}$.

- 1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f .

- 3) Montrer que la dérivée f' de f est donnée par $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ et en déduire le sens de variation de f .

- 4) Dresser le tableau de variation de f .

- 5) Tracer la courbe représentative de f après avoir tracé les asymptotes dans le même repère.

- 6) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

2.2.4 - Etude de la fonction de type : $\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$, ($a \neq 0$; $d \neq 0$)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3x+3}$ et (C) sa courbe représentative.

- 1) Expliquer pourquoi l'ensemble de définition de f $D_f = \mathbb{R}$.

- 2)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- b) Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{3x(x+2)}{(x^2+3x+3)^2}$.

- c) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.

- d) Etablir le tableau de variation de f .

- 3)a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote à (C).

- b) Etudier la position relative de (C) et (D).

- 4) Tracer (C) et son asymptote.

Handwriting practice lines consisting of multiple sets of three horizontal dashed lines for tracing and writing practice.

Compléments sur l'étude des fonctions

1. La courbe (C_f) passe par $A(x_A; y_A)$ si et seulement si $f(x_A) = y_A$
2. La tangente au point A à (C_f) est parallèle à la droite (D) de coefficient directeur m si et seulement si $f'(x_A) = m$
3. La tangente au point A à (C_f) est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $f'(x_A) = 0$
4. La tangente au point A à (C_f) est perpendiculaire à la droite (D) de coefficient directeur m $((D): y = mx + b)$ si et seulement si $f'(x_A) \times m = -1$.
5. La courbe (C_f) est tangente à l'axe des abscisses si et seulement si $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f(x_0) = 0 \end{cases}$
6. La courbe (C_f) admet au point $A(x_A; y_A)$ une tangente de coefficient directeur m si et seulement si $\begin{cases} f'(x_A) = m \\ f(x_A) = y_A \end{cases}$
7. Pour trouver le point M où la tangente à la courbe au point M a pour coefficient directeur m on résout l'équation $f'(x) = m$.
8. Soit f une fonction polynôme du second degré. Pour trouver le point M où la tangente à la courbe au point M a pour équation $y = mx + b$, on résout l'équation :
 - a) $f'(x) = m$
 - b) L'équation du second degré $f(x) = mx + b$ admet la racine double c'est-à-dire $\Delta = 0$.
9. Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$, il suffit de trouver le nombre de points d'intersections de la courbe (C_f) avec les droites parallèles à l'axe des abscisses.

A VOUS DE JOUER ...

Exercice 1 QCM

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1/ Le point $A(-1; 3)$ appartient à la courbe (C) de f si:

- A. $f(-1) = 3$ B. $f'(-1) = 0$ C. $f(-1) = 0$ D. $f'(-1) = 3$

- 2/ La courbe d'une fonction polynôme du second degré est appelée :
 A. *parabole* B. *hyperbole* C. *cercle* D. *droite*
- 3/ La courbe de la fonction rationnelle $\frac{2x-1}{x+2}$ est appelée :
 A. *parabole* B. *hyperbole* C. *cercle* D. *droite*
- 4/ La fonction f définie par $f(x) = x^2 - 5$ est croissante sur :
 A. $\mathbb{R}$ B. $[0 ; +\infty[$; C. $] - \infty ; 0]$ D. $[-5 ; +\infty[$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 + 5x - 8$

- Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Vérifier que la dérivée de f est $f'(x) = 5(2x + 1)$.
- Etablir le tableau de signe de la dérivée de f .
- En déduire le tableau de variation de f .
- Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes de coordonnées.
- Tracer (C_f) dans un repère.

Exercice 3

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 12x + a$, où a est un nombre réel.

- Déterminer a pour que la courbe de f passe par le point $A(0 ; 2)$.
- On admet pour la suite que $f(x) = -x^3 + 12x + 2$.
 - Justifier que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$.
 - Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - Montrer que $f'(x) = -3(x - 2)(x + 2)$, f' étant la dérivée de f .
 - Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .
 - Etablir le tableau de variation de f puis tracer sa courbe représentative.

Exercice 4

On donne la fonction g définie par $g(x) = \frac{-2x-3}{x+2}$.

- Montrer que l'ensemble de définition de g est $D_g =] - \infty ; -2[\cup] - 2 ; +\infty[$.
- Déterminer deux nombres réels a et b tels que $g(x) = a + \frac{b}{x+2}$.
- a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'équation de l'asymptote horizontale à la courbe représentative de g .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x)$. En déduire l'équation de l'asymptote verticale à la courbe représentative de g .

4. a) Montrer que la dérivée g' de g est donnée par $g'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$.

- En déduire le sens de variation de g .
5. Dresser le tableau de variation de g .

6. Montrer que le point $Q(-2 ; -2)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de g .
7. Tracer la courbe représentative de g après avoir tracé les asymptotes dans le même repère.
8. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = m, m \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit la fonction $h(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de h est $D_h =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.
- 2.a. Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$.
3. Etudier le sens de variations de h .
4. Compléter l'étude par le tableau de variation de h .
5. Déterminer les réels $a ; b$ et c tels que $h(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.
- 6.a. Montrer que (C_h) admet une asymptote oblique (D) dont on précisera l'équation.
- b. Etudier la position relative de (C_h) par rapport à l'asymptote (D) .
7. Justifier que (C_h) possède une deuxième asymptote dont on précisera la nature et l'équation.
8. Montrer que le point I d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de (C_h) .
9. Tracer les deux asymptotes et (C_h) dans un repère orthonormé.
10. Résoudre graphiquement l'équation $h(x) = m, m \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1 ; +\infty[$ dont le tableau de variation incomplet est le suivant :

x	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		○	
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$

Utiliser le tableau de variation de f pour :

- 1.a) Donner $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et en déduire l'équation de l'asymptote verticale de (C_f) .
- b) Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $f(3)$ et $f'(3)$.
- 2) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
- 3) Compléter le tableau de variation de f .
- 4) Donner l'esquisse (allure) de la courbe dans un repère.

Exercice 7

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$.

3. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Déduire l'équation de l'asymptote horizontale de (C).

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. Déduire les équations des asymptotes verticales de (C).

4. Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$ puis étudier son signe.

5. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

6. Construire les asymptotes et la courbe (C).

Exercice 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Montrer que $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

2. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b. Montrer que $f'(x) = \frac{-4(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

c. Etudier le signe de $f'(x)$.

d. Etablir le tableau de variation de f .

3. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à (C). Etudier la position relative de (C) et (D).

b. Justifier que (C) possède deux asymptotes verticales dont on donnera les équations.

c. Préciser le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

4. Tracer les asymptotes et la courbe (C).

CHAPITRE 7 :
STATISTIQUE A UNE VARIABLE

La statistique qui était essentiellement descriptive à l'origine a évolué à partir du XVI^e siècle vers l'analyse des données essentiellement grâce à l'astronomie. La statistique est une science qui étudie, élabore les méthodes de collectes, de traitement et d'analyse quantitative et qualitative des données pour la prise de décision. Les résultats de la statistique sont appelés des « *statistiques* ». Les statistiques désignent aussi les données chiffrées ou autres renseignements en grand nombre sur lesquels on applique la statistique. Nous allons étudier dans ce chapitre, le vocabulaire statistique (rappels), l'enquête et le dépouillement, les tableaux statistiques et la description numérique des séries statistiques à une variable.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

A la fin de ce chapitre, tout apprenant ayant exploité les acquis, devra être capable de :

- utiliser convenablement les concepts statistiques ;
- représenter graphiquement les effectifs ou les fréquences d'un caractère qualitatif, quantitatif discret ou continu ;
- représenter les courbes cumulatives ;
- réaliser le dépouillement à partir d'une série des données collectées ;
- calculer et interpréter les caractéristiques de tendance centrale et de dispersion à partir d'une série statistique.

1. Le vocabulaire statistique ou la terminologie de base

1.1. La Population statistique ou Univers statistique ou la collectivité statistique ou encore l'ensemble statistique

C'est l'ensemble sur lequel porte l'étude statistique.

Exemple :

- ✓ L'ensemble des élèves d'un lycée technique.
- ✓ L'ensemble des salariés d'une entreprise.
- ✓ L'ensemble des entreprises qui exercent dans un secteur d'activité.

1.2. Unité statistique ou Individu statistique

C'est un élément de la population statistique.

Exemple : Si on considère la population des élèves du lycée technique alors un élève de ce lycée est un individu statistique.

1.3. Le Caractère Statistique

C'est une propriété qui décrit l'unité statistique.

Le caractère peut être qualitatif ou quantitatif.

Exemple : L'âge, le sexe, le poids, la religion, la nationalité, la taille, la note des élèves, la situation matrimoniale, le salaire, le nombre d'enfants d'une famille, le temps, la couleur de la peau, etc.

1.3.1. Caractère quantitatif

C'est un caractère mesurable ou quantifiable.

Exemple : L'âge, le poids, la taille, la note de mathématiques générales, le salaire, le nombre d'enfants d'une famille, le temps de parcours des élèves de la maison à l'école, etc.

1.3.2. Caractère qualitatif

C'est un caractère non mesurable.

Exemple : Le sexe, la religion, la situation matrimoniale, la couleur de la peau, le temps qu'il fait (nuageux, ensoleillé, pluvieux, orageux ...), etc.

1.4. Modalité statistique

C'est la valeur prise par chaque caractère pour un individu donné.

Exemple : Le sexe a deux modalités : masculin, féminin.

L'âge peut prendre plusieurs valeurs : 15 ans, 16 ans, 17 ans ...

1.5. Variable statistique

Ce sont les valeurs qu'on attribue aux caractères quantitatifs.

Exemple : La taille, le poids, l'âge ; ...

1.5.1. Variables discrètes ou discontinues

Elles ont des modalités sous forme de points (ou sous forme de valeurs isolées).

Exemple : Le nombre d'enfants par ménage : 2 ; 3 ; 4 ; ...

La taille des élèves d'un lycée : 1,50m ; 1,60m ; ...

1.5.2. Variables continues

Elles ont des modalités sous forme d'intervalles appelés classes.

Exemple : La taille en mètre des élèves d'un lycée : $[1,50 ; 1,60[$; $[1,60 ; 1,70[$; ...

1.6. Classe

C'est un groupe d'individus pour lequel le caractère prend la même valeur.

Les classes sont des intervalles de la forme $a - b$ ou bien $[a ; b[$ ou encore $a \leq x < b$.

- Le centre de la classe $[a ; b[$ est noté c_i ou x_i ; $c_i = \frac{a+b}{2}$.
- L'amplitude de la classe $[a ; b[$ est notée k_i ; $k_i = b - a$.
- La densité (d_i) d'une classe est le quotient de l'effectif de la classe par l'amplitude de cette classe.

$$d_i = \frac{n_i}{k_i}$$

1.7. Effectif

C'est le nombre d'individus d'une modalité ou d'une classe. Il est noté n_i .

L'effectif total n ou N est le nombre total d'individus.

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_p = \sum_{i=1}^p n_i \quad \text{où}$$

$$\sum_{i=1}^p n_i = \text{somme des } n_i, i \text{ allant de } 1 \text{ à } p.$$

- L'Effectif cumulé, noté N_i d'une modalité x_i (ou d'une classe donnée) est obtenu en additionnant successivement les effectifs de toutes les modalités ou de toutes les classes qui lui sont inférieurs ou supérieurs. On distingue :
 - ✓ l'effectif cumulé croissant ou ascendant noté $N_i \nearrow$ (ECC) et
 - ✓ l'effectif cumulé décroissant ou descendant noté $N_i \searrow$ (ECD).

1.8. Fréquence

C'est le quotient de l'effectif d'une modalité donnée (ou d'une classe donnée) par l'effectif total. Elle est notée f_i et est exprimée en valeur ou en pourcentage (%).

- Exprimée en valeur, $f_i = \frac{n_i}{n}$ avec $0 \leq f_i \leq 1$.
- Exprimée en pourcentage, $f_i (\%) = \frac{n_i}{n} \times 100$ avec $0 \leq f_i (\%) \leq 100$.

La Fréquence totale, notée f ou F est $f = \sum_{i=1}^k f_i$.

- ✓ Si la fréquence est exprimée en valeur alors $f = 1$.
- ✓ Si la fréquence est exprimée en % alors $f = 100$.

La Fréquence cumulée notée F_i d'une modalité x_i (ou d'une classe donnée) est obtenue en additionnant successivement les fréquences correspondant à toutes les modalités ou à toutes les classes qui lui sont inférieures ou supérieures. On distingue $F_i \nearrow$; $F_i \searrow$.

$$F_i \nearrow (\%) = \frac{N_i \nearrow}{n} \times 100.$$

1.9. Distribution statistique ou série statistique

C'est un tableau de données statistiques regroupant le caractère, ses modalités ou ses classes et ses effectifs (ou ses fréquences).

1.10. Echantillon

C'est un sous ensemble représentatif de la population statistique.

Exemple : Un groupe d'élèves du LETP - L (une classe des élèves de 1G2 et 1G3 du lycée).

1.11. Recensement

C'est une enquête sur toute la population concernée.

Exemple 1 : Répartition d'un groupe d'élèves du LETP - L selon l'âge.

Age	16	17	18	19	20	21	22	Total
Nombre d'élèves	2	1	5	6	3	2	1	20

- 1- Préciser la population étudiée, l'unité statistique, le caractère considéré et sa nature.
- 2- Déterminer la proportion d'élèves ayant 20 ans.
- 3- Déterminer le nombre d'élèves ayant au moins 20 ans.
- 4- Déterminer le nombre d'élèves ayant au plus 18 ans.
- 5- Calculer les fréquences de chaque modalité de cette série (en pourcentage).
- 6- Déterminer la proportion d'élèves ayant moins de 18 ans.

[illegible]

Exemple 2

Le devoir n°1 de mathématiques générales d'un groupe d'élèves du CND sacré - cœur a donné les résultats suivants :

Notes	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	Total
ni	3	7	8	5	2	25

- 1- Déterminer la population statistique, le caractère étudié et sa nature.
- 2- Calculer le nombre d'élèves ayant moins de 12.
- 3- Calculer le nombre d'élèves ayant au moins 4.
- 4- Déterminer le nombre d'élèves ayant plus de 12 sachant que 3 élèves ont 12.
- 5- Déterminer le nombre d'élèves ayant au plus 12 sachant que 3 élèves ont 12.
- 6- Déterminer le nombre d'élèves ayant une note comprise entre 4 et 16.

2. Enquête et dépouillement statistique

2.1. Enquête statistique

C'est une opération technique qui consiste à collecter les informations ou données statistiques.

Elle se fait par le biais de questionnaire. Il existe 2 types d'enquête :

- Le **sondage** ou l'**échantillonnage** ou encore l'**enquête partielle** qui est l'enquête sur une partie représentative de la population.
- Le **recensement** ou l'**enquête exhaustive** est l'enquête sur toute la population concernée. Ici on collecte les informations recherchées auprès de tous les individus de la population.

2.2. Dépouillement statistique

2.2.1. Dépouillement d'un caractère qualitatif

Exemple : Répartition d'un groupe d'élèves d'une classe de première G_3 selon le sexe :

H F F F H H F F H F F F H H H F F F F F H avec F = femme ; H = homme.

Dépouiller ces résultats dans un tableau statistique.

2.2.2. Dépouillement d'un caractère quantitatif

2.2.2.1. Dépouillement d'un caractère quantitatif discret

Example

L'âge d'un groupe d'élèves de la classe de première G2 à l'IT NDE est donné comme suit :

19	20	20	17	21
20	17	21	19	22
19	20	20	18	20

Dépouiller ces résultats dans un tableau statistique.

[illegible]

2.2.1.1. Dépouillement d'un caractère quantitatif continu

Example

Voici le relevé du temps (en minutes) mis par les employés d'une entreprise de leur résidence au service :

8	25	15	12	16	5	40	25	28
34	45	5	10	16	25	15	12	5
70	40	12	25	8	25	30	46	18
8	6	18	48	35	42	16	16	25
12	28	44	58	22	15	72	44	10

Dépouiller les résultats obtenus en précisant le temps en classe d'amplitude 10 (la première classe est $[0; 10[$).

This image shows a full page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a template for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

3. Tableaux statistiques et représentations graphiques

La collecte des données ne constitue qu’une étape préliminaire de l’analyse statistique. Sur la base des données collectées, l’on produit des tableaux et graphiques qui permettent aux gestionnaires de mieux visualiser les informations et de préparer à la prise de décision.

3.1. Tableaux statistiques

Ce sont des tableaux dans lesquels sont consignées les informations statistiques permettant de décrire un phénomène concret en un lieu précis et à une date bien déterminée.

Exemple : Confère tableau de répartition des élèves de LETP - L selon l'âge (exemple 1).

3.2. Représentations graphiques

Les représentations graphiques permettent généralement de visualiser la structure de la répartition des données d'une série statistique. Elles diffèrent selon ce que l'on désire montrer et selon la nature des variables (qualitative, quantitative discrète ou continue).

b. Lorsque les amplitudes sont inégales :

Dans ce cas, on doit impérativement corriger les effectifs ou les fréquences avant de tracer l'histogramme. On peut procéder comme suit :

- calculer la densité d_i de chaque classe $d_i = \frac{\text{effectif } (n_i) \text{ de la classe}}{\text{amplitude } (k_i) \text{ de la classe}} = \frac{n_i}{k_i}$ dans une première colonne ;
- calculer l'effectif corrigé $n'_i = d_i \times k$ dans une deuxième colonne (k est la plus petite des amplitudes calculées) ;
- tracer l'histogramme, en portant sur l'axe des abscisses les classes et sur l'axe des ordonnées les $n'_i = d_i \times k$ (hauteur de chaque rectangle).

Exemple : Le tableau statistique suivant représente l'âge des individus d'un groupement agricole au Togo en 1985.

Age	16-19	19-25	25-34	Total
n_i	3	14	33	50

Tracer l'histogramme de cette série.

4. Description numérique des séries (variables) à une dimension

Les tableaux et les graphiques statistiques permettent de visualiser les distributions statistiques.

Pour prendre une décision économique, les images fournies par ce tableau statistique doivent être soumises à un traitement préliminaire. Le traitement le plus simple consiste à calculer les caractéristiques numériques des variables. Ces caractéristiques sont de plusieurs ordres :

- Les caractéristiques de tendance centrale ou de position (la moyenne arithmétique, la médiane, le mode et les quartiles) ;
- Les caractéristiques de variation ou de dispersion (l'étendue, l'écart - type, la variance et le coefficient de variation).

4.1. Les caractéristiques de tendance centrale ou de position

4.1.1. Le Mode ou la dominante

4.1.1.1. Définition

Le mode est la valeur de la variable qui correspond à l'effectif le plus élevé ou qui correspond à la fréquence la plus élevée.

Autrement dit c'est la valeur de la variable la plus observée ou la plus dominante. Il est noté M_o .

4.1.1.2. Détermination du mode dans le cas d'une variable discrète

Exemple

Répartition d'un groupe d'élèves du CND Sacré – Cœur selon l'âge.

Age	16	17	18	19	20	21	22	Total
Nombre d'élèves	2	1	5	6	3	2	1	20

- a. Déterminer le mode.
- b. Interpréter le résultat.

4.1.1.3. Détermination du Mode dans le cas d'une variable continue à amplitudes égales

Dans ce cas il faut :

- déterminer la classe modale qui correspond à l'effectif le plus élevé ou la fréquence la plus élevée ;
- déterminer le mode qui est le centre de la classe modale $[a ; b]$: $M_o = \frac{a+b}{2}$.

Exemple : Répartition des clients d'un magasin selon l'âge.

Age	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	Total
Nombre clients	40	55	30	15	10	150

- Déterminer le mode.
- Interpréter le résultat.

4.1.1.4. Détermination du mode dans le cas d'une variable continue à amplitudes inégales

Dans ce cas, il faut :

- corriger les effectifs ou les fréquences ;
- déterminer la classe modale qui correspond à l'effectif corrigé le plus élevé ou à la fréquence corrigée la plus élevée ;
- déterminer le mode qui est le centre de la classe modale $[a ; b]$: $M_o = \frac{a+b}{2}$.

NB : *effectif corrigé* = $\frac{\text{effectif de la classe} \times \text{la plus petite des amplitudes}}{\text{amplitude de la classe}}$

$$n'_i = \frac{n_i \times k}{d_i} = d_i \times k, \text{ avec } k \text{ la plus petite amplitude.}$$

Exemple

Répartition d'un groupe d'entreprises au Togo selon le chiffre d'affaires (CA) en million de francs CFA.

CA	0-2	2-6	6-10	10-12	12-14	Total
n_i	2	6	12	8	2	30

- Déterminer la classe modale.
- Déterminer le mode.
- Interpréter le résultat précédent.

Remarque : Les effectifs corrigés sont utilisés uniquement pour :

- calculer le mode ;
- tracer l'histogramme.

4.1.2. La Moyenne arithmétique

Définition

La moyenne d'une série statistique d'effectif total n ou N est le nombre réel noté $\bar{X}$, défini par :

- moyenne simple : $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$;
- moyenne pondérée : $\bar{X} = \frac{\sum X_i n_i}{n} = \frac{X_1 n_1 + X_2 n_2 + \dots + X_k n_k}{n}$ ou $\bar{X} = \frac{\sum X_i f_i}{f}$.

NB : Pour une série regroupée en classes, les X_i sont les centres des classes.

Exemple 1

4.1.3. La Médiane ou la moyenne de position

4.1.3.1-Définition

On appelle médiane tout nombre réel qui partage la série en deux parties d'effectifs égaux. Elle est notée M_e .

4.1.3.2-Détermination de la médiane dans le cas de données non pondérées (ou données simples)

Dans ce cas, il faut préalablement ranger la série statistique.

• **Cas d'un nombre impair d'observations**

Exemple : Soit la note de mathématiques générales de 7 élèves : 1 ; 8 ; 10 ; 2 ; 14 ; 15 ; 13.

Déterminer la médiane de cette série.

• **Cas d'un nombre pair d'observations**

Exemple: Soit la note de Math généré de 6 élèves : 1 ; 8 ; 10 ; 2 ; 14 ; 15.

Déterminer la médiane de cette série.

Remarque : Dans ce cas, la médiane n'est pas une valeur de la série statistique.

4.1.3.3- Détermination de la Médiane dans le cas d'une variable discrète.

Dans ce cas, la médiane est la valeur de la variable qui correspond au 1^{er} effectif cumulé croissant directement supérieur à la moitié de l'effectif total.

[illegible]

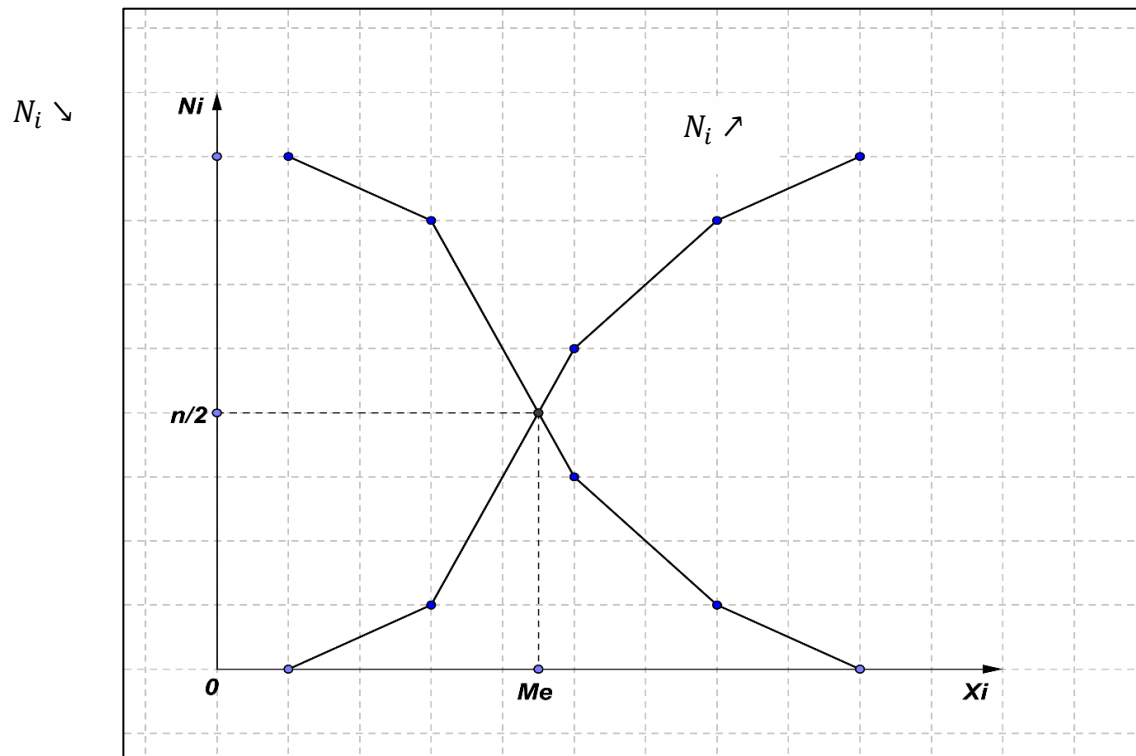
Exemple 2 : Reprendre les mêmes questions que précédemment avec le tableau suivant :

<i>CA</i>	4-6	6-8	8-10	10-12	Total
Proportion de PME ($f_i\%$)	12,5	50	25	12,5	100

[illegible]

4.1.3.5-Détermination graphique de la médiane

On peut déterminer graphiquement la médiane (M_e) à partir des courbes cumulatives.



4.1.4-Les Quartiles

Le Calcul des quartiles est similaire à celui de la médiane. Les quartiles sont les valeurs de la variable (Q_1, Q_2, Q_3) qui divisent la série en 4 parties égales.

Ecart interquartile (E_Q ou I_Q)

C'est la différence entre le quartile supérieur et le quartile inférieur. $E_Q = Q_3 - Q_1$

Exemple

Répartition d'un groupe d'employés d'une entreprise de Dapaong selon le salaire mensuel (en milliers de francs CFA).

Salaire mensuel	160-165	165-170	170-175	175-180	180-185	Total
n_i	3	12	21	10	4	50

a) Calculer et interpréter le premier quartile (Q_1), le deuxième quartile (Q_2) et le 3^{ème} quartile (Q_3).

b) Calculer l'écart interquartile.

[illegible]

4.2. Les Caractéristiques de dispersion ou de variation

4.2.1. Etendue ou intervalle de variation

C'est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de la série.

$$e = X_{max} - X_{min}$$

4.2.2. Variance

C'est la moyenne du carré des écarts entre la variable et sa moyenne. Elle est notée V_X .

- Dans le cas de données simples :

$$V_X = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

- Dans le cas de données pondérées :

$$V_X = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} \quad ou \quad V_X = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 f_i}{f}$$

NB : Formule simplifiée de la variance

Pour des besoins de calculs, on a recours à une formule simplifiée de la variance.

La variance d'une variable est la différence entre la moyenne des carrés de la variable et le carré de la moyenne de la variable.

- Dans le cas de données simples : $V_X = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$

- Dans le cas de données pondérées :

$$V_X = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{X})^2 \quad \text{ou} \quad V_X = \frac{\sum x_i^2 f_i}{f} - (\bar{X})^2$$

4.2.3. Ecart - type

C'est la racine carrée de la variance. Il est noté σ_X .

$$\sigma_X = \sqrt{V_X}$$

Interprétation

Prenons par exemple la répartition des entreprises selon le chiffre d'affaires (CA) en millions de francs.

Si $\sigma_X = 0,5$ on dit que le CA varierait de 500 000 F d'une entreprise à l'autre.

4.2.4. Coefficient de variation

C'est le rapport entre l'écart-type et la moyenne. Il est noté $Cv_{(X)}$ ou Cv_X .

$$Cv_X(\%) = \frac{\sigma_X}{\bar{X}} \times 100$$

Interprétation

- Si $Cv_X \leq 33,33\%$ alors on dit que la population étudiée est homogène.
- Si $Cv_X > 33,33\%$ alors on dit que la population étudiée est hétérogène.

Exemple 1 : Répartition d'un groupe d'entreprises de Kara selon le chiffre d'affaires (CA) en millions de francs CFA.

CA	2-6	6-8	8-10	10-12	Total
n_i	4	6	8	2	20

- Calculer l'étendue, la variance.
- Calculer et interpréter l'écart - type et le coefficient de variation.

Exemple 2 : Reprendre les mêmes questions que précédemment avec le tableau suivant :

CA	2-6	6-8	8-10	10-12	Total
Proportion d'entreprises ($f_i\%$)	20	30	40	10	100

A VOUS DE JOUER...

Exercice 1 : Questions de cours

A/ Définir les termes suivants :

Population ; individu statistique ; caractère statistique ; modalité statistique ; fréquence ; effectif.

B/ Donner la nature des caractères suivants :

L'état matrimonial ; le salaire mensuel ; le chiffre d'affaires ; la tension artérielle ; la taille ; la couleur des yeux ; la marque de véhicule ; le poids ; la durée de vie ; la catégorie socioprofessionnelle ; la profession d'une personne.

C/QCM

Choisir la bonne réponse parmi les quatre propositions :

1) Soit la note de Math-Géné. de 8 élèves : 10 ; 7 ; 5 ; 18 ; 17 ; 8 ; 2 ; 12.

Sa médiane est :

A) 9 B) 10 C) 12 D) 18.

2) La fréquence totale en pourcentage est :

A) 1 B) 100 C) 10 D) 1000.

Exercice 2 : Dans un centre de transfusion sanguine, les résultats prélevés auprès de 40 patients selon leur groupage (A ; B ; AB ; O) sont les suivants :

A	A	A	AB	B	A	B	AB
O	O	A	AB	O	A	O	A
AB	B	O	O	B	B	O	A
AB	AB	AB	A	A	A	A	A
B	A	B	O	AB	AB	B	AB

- 1- Faire le dépouillement de ces résultats dans un tableau statistique.
- 2- Calculer la fréquence pour chaque modalité.
- 3- Dessiner le diagramme à bande (diagramme à colonnes ou à tuyaux d'orgues).
- 4- Dessiner le diagramme circulaire.

Exercice 3 : Les résultats consignés dans le tableau ci-dessous représentent la répartition de 1000 individus selon le sport pratiqué au sein d'un club sportif.

Ces résultats sont obtenus à la suite d'une enquête statistique effectuée auprès de ces individus.

Activités sportives	Marche	Saut en hauteur	Lancer de poids	Natation	Escrime
Fréquence simple en %	15		30	40	10

- 1- Définir les mots soulignés.
- 2- Faire le diagramme circulaire.
- 3- Dessiner le graphique à bandes (ou à tuyaux d'orgue).
- 4- Donner la proportion f_2 des individus qui pratiquent le saut en hauteur.
- 5- Quel est l'effectif n_4 de ceux qui pratiquent la natation.

Exercice 4 : Après un devoir de mathématiques, l'enseignant dresse un tableau des notes obtenues par les élèves d'une classe de première :

Notes	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15	17	18	19
Effectif	4	1	3	4	1	2	4	2	4	4	1	3	1

- 1- Quel est l'effectif total de cette série ?
- 2- Compléter le tableau par l'effectif cumulé croissant (ECC) et l'effectif cumulé décroissant (ECD).
- 3- Combien d'élèves ont au moins 10 ?
- 4- Combien d'élèves ont au plus 12 ?
- 5- Combien d'élèves ont plus de 13 ?
- 6- Combien d'élèves ont moins de 9 ?
- 7- Calculer la moyenne $\bar{X}$ de cette série.

Exercice 5 : Soit la répartition des entreprises commerciales de Lomé selon le chiffre d'affaires (CA).

CA	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20
Effectif	3	7	8	5	2

- 1- Calculer la fréquence de chaque modalité.
- 2- Compléter le tableau par :
 - a) les effectifs cumulés croissants (ECC).
 - b) les effectifs cumulés décroissants (ECD).
 - c) les fréquences cumulées croissantes (FCC) en pourcentage.
 - d) les fréquences cumulées décroissantes (FCD) en pourcentage.
- 3- Quelle est la classe modale ?
- 4- Calculer le mode (M_0) de cette série.
- 5- Calculer le chiffre d'affaires moyen $\bar{X}$.
- 6- Tracer l'histogramme de cette série.

Exercice 6 :

Soit ci-dessous la répartition d'un groupe d'élèves selon l'âge.

Age	15	16	17	18	19
Effectif	20	10	50	60	30

- 1- Quel est l'effectif total des élèves du groupe ?
- 2- Quelle est la proportion des élèves ayant 15 ans ?
- 3- Quel est le nombre des élèves ayant moins de 18 ans ?
- 4- Déterminer la fréquence de chaque modalité.
- 5- Déterminer : ECC ; ECD ; FCC(%) ; FCD(%).
- 6- Quel est l'âge modal (M_o) de cette série ?
- 7- Quel est l'âge moyen $\bar{X}$ de cette série ?
- 8- Dessiner le diagramme en bâtons de cette série.

Exercice 7 : Soit une série de notes de Math-Géné des élèves de la première G_2 du LETP-Attégou.

10	8	6	17	16	12
4	15	14	1	7	7
6	14	10	10	14	19
3	10	19	12	2	6
17	4	9	13	5	2

- 1-
 - a- Effectuer le dépouillement dans un tableau statistique.
 - b- Déterminer le mode (M_o) et la moyenne $\bar{X}$ de x cette série.
- 2-
 - a- Effectuer un nouveau dépouillement en considérant 5 classes d'égale amplitude 4. La première classe étant : $[0 ; 4[$.
 - b- Tracer l'histogramme de cette nouvelle série.
 - c- Calculer le mode (M_o) et la moyenne $\bar{X}$ de cette série.

Exercice 8 :

Le tableau suivant représente le relevé des tailles d'un groupe d'élèves.

Taille (Cm)	Effectif	Fréquence	Fréquences cumulées
160 - 170	54		18
170 - 180			77
180 - 190			95
190 - 200			100

- 1- Compléter le tableau.
- 2- Déterminer l'amplitude de chaque classe.
- 3- Déterminer la classe modale et calculer la taille modale.
- 4- Déterminer les centres de classes.
- 5- Calculer la taille moyenne $\bar{X}$.
- 6- Tracer l'histogramme de cette série.
- 7- Déterminer :
 - la variance : $V(X)$;
 - l'écart type : $\sigma(X)$;
 - le coefficient de variation $CV(X)$.

Exercice 9 :

La répartition des salaires des employés d'une entreprise est donnée dans le tableau suivant :

Salaire	Centre de classe	f_i %	n_i %	N_i ↑
3000 - 3800		5		
3800 - 4200		8,5		
4200 - 4600		23,75		
4600 - ?		25		
? - ?	5400			
5800 - 7000		6,75		400

- 1- Recopier et compléter le tableau.
- 2- Tracer l'histogramme de cette série.
- 3- Combien d'employés ont un salaire inférieur à 4 600 F
- 4- Calculer la moyenne, la médiane et le mode de cette série.

Exercice 10 :

Le tableau suivant représente le relevé de taille. Compléter le tableau et calculer la moyenne.

Taille (cm)	n_i	f_i	F_i ↑
160 - 170	54		0,18
170 - 180			0,77
180 - 190			0,95
190 - 200			1
Total			-

Exercice 11 :

On donne la distribution suivante où x et y sont des réels.

Classe	$0 - x$	$x - 20$	$20 - 40$	$40 - 70$	$70 - y$
Effectif	16	30	18	10	6

- 1- Sachant que la médiane est égale à 18, calculer x .
- 2- Calculer y sachant que $x = 10$ et la moyenne de la série 26,625.

Exercice 12 :

Age	16 - 19	19 - 25	25 - 34	Total
Effectif	x	14	y	50

Le tableau ci-dessus représente l'âge des individus d'un groupement agricole.

- 1- Sachant que l'âge moyen des 50 individus est de 26,68 ans, déterminer x et y .
- 2- Dans la suite on pose $x = 3$ et $y = 33$. Tracer l'histogramme de cette série.

Exercice 13 : Soit le bénéfice des entreprises de Lomé en millions de francs.

Bénéfice	20 - 40	40 - 80	80 - 100	100 - 160
Effectif	20	80	60	60

- 1- Compléter le tableau par les effectifs cumulés croissants et décroissants.
- 2- Calculer et interpréter : la moyenne, la médiane, le mode de cette série.
- 3- Calculer et interpréter le 1^{er} quartile et le 3^e quartile de cette série.
- 4- Tracer l'histogramme de cette série.

CHAPITRE 8 :
LES SUITES NUMERIQUES

Ce chapitre vise chez l'apprenant l'approfondissement des connaissances antérieures sur les suites numériques, la découverte de nouveaux termes et l'acquisition de nouvelles connaissances.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours, chaque apprenant en exploitant les acquis de ce cours, devrait être capable de :

- calculer les termes d'une suite définie par une formule explicite ou une relation de récurrence ;
- établir le sens de variation d'une suite donnée ;
- reconnaître ou montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique ;
- calculer le terme d'indice n d'une suite arithmétique ou géométrique ;
- calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique ;
- utiliser les suites numériques pour résoudre des problèmes concrets : placement de capitaux.

1. Généralités

1.1. Définition

Une suite numérique est une application définie de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

- La suite numérique V est notée (V) ou bien (V_n) ou encore $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Le terme général de la suite (V_n) est noté V_n , un terme quelconque est noté V_i (i est l'indice du terme V_i).
- Les termes consécutifs sont les termes qui se suivent
- Le terme de base ou terme de départ ou encore le terme initial est le premier terme (par exemple V_0)
- Le nombre de termes (ou le rang de la suite) est la différence entre l'indice du premier terme et l'indice du dernier terme augmenté de 1 (c'est la différence des indices extrêmes +1).

1.1.1. Suite définie par une formule explicite

Une suite peut être définie par une formule explicite (claire) lorsque son terme général V_n dépend de n .

Example : $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u_n = n + 2$$

$$n \mapsto v_n = \frac{2n+3}{n^2+1}$$

Calculer les trois premiers termes de chaque suite.

[illegible]

1.1.2. Suite définie par une formule implicite ou récurrente

Une suite peut être définie par une formule implicite ou récurrente lorsque son terme général dépend terme précédent.

Example : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n + 2 \end{cases} \quad ; \quad (V_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_1 = 4 \\ V_{n+1} - 2V_n + 3V_{n-1} = 0 \end{cases}$

Calculer les trois premiers termes de chaque suite.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

1.2. Sens de variation ou monotonie d'une suite (U_n)

Etudier le sens de variation de la suite (U_n) revient à chercher le signe de $U_{n+1} - U_n$.

En effet :

- ✓ Si $U_{n+1} - U_n > 0$ alors la suite (U_n) la suite est strictement croissante ;
- ✓ Si $U_{n+1} - U_n < 0$ alors la suite U_n est strictement décroissante ;
- ✓ Si $U_{n+1} - U_n = 0$ alors la suite (U_n) est constante ou stationnaire.

Remarque : Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, alors pour étudier le sens de variation de cette suite ; on pourra aussi comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

En effet,

- si $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ alors la suite (U_n) est strictement croissante ;
- si $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ alors la suite (U_n) est strictement décroissante ;
- si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ alors la suite (U_n) est constante ou stationnaire.

2.1.3. Expression du terme général d'une suite arithmétique

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_p et de raison r .

Le terme général de la suite (U_n) en fonction de n est $U_n = U_p + (n - p)r$.

Si le premier terme est U_0 alors on a $U_n = U_0 + nr$.

2.1.4. Relation entre trois termes consécutifs $(U_{n-1}; U_n; U_{n+1})$ d'une suite arithmétique

$$U_1 - U_0 = U_2 - U_1 \Rightarrow 2U_1 = U_0 + U_2 \Rightarrow U_1 = \frac{U_0 + U_2}{2}$$

$$U_{n-1} + U_{n+1} = 2U_n \Rightarrow U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$$

2.1.5. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétiques (U_n)

Soit S_n cette somme. $S_n = U_a + U_{a+1} + U_{a+2} + \dots + U_n$.

Par définition,

$$S_n = \left[\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \right] \times (\text{nombre de termes})$$

$$S_n = \left[\frac{U_a + U_n}{2} \right] (n - a + 1)$$

$$\text{Cas particulier : } S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad \text{et} \quad S' = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

Exemple

Soit $(U_n) : U_n = 5n - 2$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison r .

2. Calculer le dixième terme de (U_n) .

3. On donne $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ et $S' = U_1 + U_2 + \dots + U_{99}$

a) Calculer S_n en fonction de n .

b) Calculer S' .

7) A partir de quel mois de quelle année, la production annuelle est-elle supérieure à 5 900 livres ?

[illegible]

2.2. Suites géométriques (V_n) de raison q ($q \in]-1; +\infty[- \{0\}$)

2.2.1. Définition

La suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$ ou

bien $V_{n+1} = qV_n$.

2.2.2. Monotonie d'une suite géométrique ($q > 0$)

- Si $q \in]0 ; 1[$ alors la suite (V_n) est strictement décroissante.
- Si $q > 1$ alors la suite (V_n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (V_n) est constante.

2.2.3. Expression du terme général d'une suite géométrique

Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme V_p et de raison q .

Le terme général de la suite (V_n) est donné par $V_n = V_p \cdot q^{n-p}$.

Si le premier terme est V_0 , alors on a $V_n = V_0 q^n$.

2.2.4. Relation entre trois termes consécutifs $V_{n-1}; V_n; V_{n+1}$ d'une suite géométrique

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow V_1^2 = V_0 \times V_2.$$

$$\text{Donc } V_n^2 = V_{n-1} \times V_{n+1}.$$

2.2.5. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit S_n cette somme.

$$S_n = V_a + V_{a+1} + V_{a+2} + \dots + V_n$$

Par définition

$$S_n = V_a \left[\frac{1-q^{n-a+1}}{1-q} \right], \text{ avec } q \neq 1$$

$$S_n = (\text{1er terme}) \left[\frac{1 - (\text{Raison})^{\text{nbre de termes}}}{1 - \text{Raison}} \right]; \text{ avec raison } \neq 1.$$

✓ Si $q = 1$ alors $S_n = V_a \times (n - a + 1)$

$$S_n = \text{1er terme} \times \text{nombre de termes}.$$

Cas particuliers :- $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ **donc** $S_n = V_0 \left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right], \text{ avec } q \neq 1$

Si $q = 1$ alors $S_n = V_0 (n + 1).$

- $S'_n = V_2 + V_3 + \dots + V_n$ **donc** $S'_n = V_2 \left[\frac{1-q^{n-1}}{1-q} \right]; \text{ avec } q \neq 1.$

Si $q = 1$ alors $S'_n = V_2 (n - 1).$

Exemple

On donne $V_n = 7^n, n \geq 2.$

1) Calculer le 1^{er} terme et le 10^{ème} terme.

This image shows a full page of a document template designed for handwriting practice. It features approximately 30 horizontal black lines spaced evenly across the page. The lines are thin and consistent in weight, providing a guide for letter height and placement. There are no margins, text, or other markings present on the page.

A VOUS DE JOUER ...

Exercice 1 : QCM

1) On considère la suite U définie par son terme général $U_n = -2n + 3$.

U est une suite arithmétique de raison :

- A) -2 B) 2 C) 1 D) 3 .

2) On considère la suite U définie par son terme général $U_n = -3n + 2$.

U est une suite :

- A) strictement croissante B) strictement décroissante C) constante D) stationnaire.

3) On considère la suite U définie par son terme général $U_n = 2^{n+2}$.

U est une suite géométrique de raison :

- A) 4 B) 2 C) -2 D) $\frac{1}{2}$

4) On considère la suite U définie par son terme général $U_n = 3 \times 2^{n+2}$.

La suite U est :

- A) croissante B) stationnaire C) décroissante D) constante.

Exercice 2

Soit (U_n) une suite numérique définie par $U_0 = 6$ et pour tout entier naturel n ,

$$U_n = \frac{1}{3}U_{n-1} - 2.$$

- 1- Calculer les trois premiers termes de cette suite.
- 2- Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n , $V_n = U_n + 3$.
 - a- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b- Exprimer V_n en fonction de n .
 - c- Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.
 - d- Exprimer U_n en fonction de n .
 - e- Calculer $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$.

Exercice 3

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 3$.

- 1- Calculer U_1 , U_2 et U_3
- 2- On pose $V_n = U_n - 4$ pour $n \in \mathbb{N}$
 - a- Montrer que la suite (V_n) est géométrique dont on précisera le 1^{er} terme et la raison q .
 - b- Exprimer V_n en fonction de n .
 - c- Exprimer U_n en fonction de n .
- 3- On pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$.
 - a- Calculer S_n en fonction de n .
 - b- Calculer S'_n en fonction de n .

Exercice 4

- 1- On donne la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = U_n - 5 \end{cases}$
 - a- Calculer U_1 , U_2 , U_3 et U_4 .
 - b- Vérifier que (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = -5$.
 - c- En déduire l'expression de U_n en fonction de n .
 - d- Calculer la somme : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{99}$.
- 2- (V_n) est une suite géométrique de raison positive q telle que : $V_0 \times V_3 = 128$; $V_0 + V_3 = 36$.
 - a- Calculer V_0 et V_3 .
 - b- Sachant que $V_n = V_0 \times q^n$, calculer la raison de la suite (V_n) .
- 5- Quelle est alors la valeur de cette voiture en cette année 2017 ?

Exercice 5

- A. Soit (U_n) la suite réelle définie par U_0 fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1,05U_{n-1} + 1000$ et soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n + 20\,000$.
 1. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.
 2. Calculer V_n en fonction de V_0 et n . En déduire U_n en fonction de U_0 et n .
- B. En février 1995 la population électorale d'une commune était de 20 000 électeurs. Chaque année cette population électorale augmente de 5% et de plus, 1000 électeurs supplémentaires viennent s'y établir définitivement.
 1. Préciser la population électorale en février 2000 dans cette commune.
 2. Etant donné que le taux d'abstention est de 20%, déterminer le nombre de votants dans cette commune en 2000.

Exercice 6

Le salaire de l'un des cadres fonctionnaires d'une société financière de la place subit une

augmentation de 25.000F chaque année. En 2021, son salaire est de 420 000F

1. Quel était son salaire en 2020 ? en 2019 ?
2. Quel sera son salaire en 2022 ? en 2023 ?
3. On suppose que son salaire en année 2021 + n est $U_n = 420\,000 + 25\,000 * n$ (où n est un entier naturel).
 - a- Calculer U_1 et U_2 puis interpréter les résultats.
 - b- Calculer son salaire en 2030.
 - c- En quelle année le salaire sera égal à 845 000F.

Exercice 7

Dans une petite ville, les services de Pôle Emploi ont relevé le nombre de demandeurs d'emploi chaque année.

Après observations, ils constatent que chaque année 102 nouveaux demandeurs d'emploi s'inscrivent tandis que 30% des anciens demandeurs trouvent un emploi et sont retirés des listes.

Au 1^{er} janvier 2015, le nombre de demandeurs d'emploi était de 490. On note U_n le nombre de demandeurs d'emploi au 1^{er} janvier 2015 + n . Ainsi $U_0 = 490$.

Dans tout l'exercice, les valeurs sont arrondies à l'unité.

- 1-
 - a- Montrer que le nombre de demandeurs d'emploi au 1^{er} janvier 2016 est $U_1 = 445$.
 - b- Calculer le nombre de demandeur d'emploi au 1^{er} janvier 2017.
- 2- Justifier que l'on peut modéliser la situation précédente par la relation, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,7U_n + 102$.
- 3- On désigne par (V_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 340$.
 - a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et V_0 .
 - b- Pour tout entier naturel n , exprimer V_n en fonction de n puis en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (0,7)^n 150 + 340$.
- 4- Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au 1^{er} janvier 2020.
- 5- Le directeur de l'agence pourra-t-il atteindre son objectif de diminuer le nombre de demandeurs d'emploi de 30% par rapport au 1^{er} janvier 2015 ? Si oui, indiquer à quelle date.

Ce chapitre vise à apporter à l'apprenant, les connaissances nécessaires à l'étude trigonométrique.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

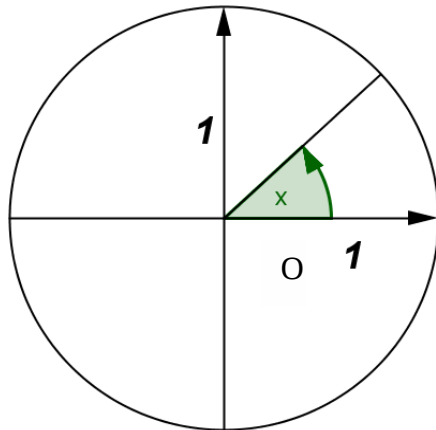
Au terme de ce chapitre, chaque apprenant, ayant exploité les acquis, devrait être capable de :

- placer l'image d'un angle orienté sur le cercle trigonométrique connaissant une mesure en radian de cet angle ;
- calculer le sinus, le cosinus et la tangente d'un nombre réel ;
- transformer des expressions à partir des formules trigonométriques ;
- citer des valeurs remarquables des lignes trigonométriques en se référant au tableau des valeurs ;
- résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques de la forme $\cos x = m$ ou $\sin x = m$; ($m \in \mathbb{R}$).

1. Le cercle trigonométrique

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens positif.



NB :

- La longueur d'un cercle est de 2π .
- Les unités de mesure d'un angle sont : degré(D) ; radian(R) ; grade(G).

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 180^\circ \rightarrow \pi \text{ radian} \\ 180^\circ \rightarrow 200 \text{ grades} \end{cases}$$

- La mesure d'un angle principal appartient à $] -\pi; \pi]$.
- Si x est une mesure d'un angle orienté alors toutes ses autres mesures sont $x + 2k\pi$; ($k \in \mathbb{Z}$).

2. Sinus, cosinus, et tangente des angles orientés

2.1. Définition

- On appelle sinus de x , noté $\sin x$, l'ordonnée d'un point M sur le cercle trigonométrique.

La fonction sin est :

$$\begin{aligned} \sin : \quad \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \sin x. \end{aligned}$$

Graphiquement sinus ($\sin x$) se lit sur l'axe des ordonnées ($[-1; 1]$).

- On appelle cosinus de x , noté $\cos x$, l'abscisse d'un point M sur le cercle trigonométrique.

La fonction cos est :

$$\begin{aligned} \cos : \quad \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \cos x. \end{aligned}$$

Graphiquement $\cos x$ se lit sur l'axe des abscisses ($[-1; 1]$).

- On appelle tangente de x notée $\tan x$, le nombre réel noté $\tan x$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ lorsque $\cos x \neq 0$. La fonction $\tan$ est :

$$\begin{aligned} \tan : \quad \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \end{aligned}$$

Quelques valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
-----	---	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	------------------	------------------	------------------	-------

$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

2.2. Propriétés

Pour tout réel x , on a :

$$P_1) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$P_2) \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ et } -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$P_3) \quad \cos(-x) = \cos x \quad (\text{la fonction cosinus est paire})$$

$$\text{et } \sin(-x) = -\sin x \quad (\text{la fonction sinus est impaire})$$

$$P_4) \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x \text{ et } \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π).

$$P_5) \quad \text{Si } \cos x \neq 0 \text{ alors } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2.3. Formules d'addition

Pour tous réels a et b ,

$$(1): \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(2): \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(3): \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$(4): \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Exemple

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

En posant $b = a$, alors la première (1), la troisième (3) et la cinquième (5) formule d'addition deviennent :

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

3.1. Equation : $\cos x = m ; (m \in \mathbb{R})$

1^{er} cas : si $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, alors $S_{(E)} = \emptyset$

2^{ème} cas : si $m \in [-1; 1]$, alors il existe $\alpha \in]-\pi; \pi]$ tel que $\cos \alpha = m$. D'où :

$$\begin{aligned} \cos x = m &\Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \\ &\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ S_{(E)} &= \{\alpha + 2k\pi \ ; \ -\alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Exemple 1 : Résoudre (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \frac{1}{2}$.

[illegible]

A VOUS DE JOUER...

Exercice 1 : QCM

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1) Une solution de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ est :

A) $\frac{\pi}{2}$; B) $\frac{\pi}{3}$; C) $\frac{\pi}{4}$; D) $\frac{\pi}{6}$.

2) En trigonométrie, π radian équivaut à :

A) 360° ; B) 90° ; C) 190° ; D) Aucune réponse.

3) En trigonométrie, l'expression $\cos 2x$ est égale à :

A) $1 + \tan^2 x$; B) $\frac{1}{\cos^2 x}$; C) $2\cos^2 x - 1$ ou $1 - 2\sin^2 x$; D) $\sin^2 x + \cos^2 x$.

4) $1 + \tan^2 x$ est égal à :

A) $1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$; ; B) $\frac{1}{\cos^2 x}$; C) $(1 + \tan x)^2$; D) $1 + \frac{1}{\cos^2 x}$.

5) On donne $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) + \sin(x)$. Une expression simple de A est :

A) $A = 0$; B) $A = \cos(x)$; C) $A = 2 \sin(x)$; D) $A = \cos(x) + \sin(x)$.

Exercice 2 :

- a- Calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ sachant que $3x = x + 2x$.
- b- Calculer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.
- c- Vérifier que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ puis calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 3

1. Ecrire plus simplement :

$$A = \sin^2 x + \frac{1}{1+\tan^2 x} \quad ; \quad B = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \quad ; \quad C = \cos^3 x + \cos x \sin^2 x.$$

2. Démontrer que :

- a. $\cos^4 x - \sin^4 x = 2 \cos^2 x - 1$.
- b. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.
- c. $(\cos x + \sin x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a. $\cos 4x + \frac{1}{2} = 0$
- b. $\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
- c. $\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
- d. $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- e. $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$
- f. $\cos(\pi - x) = -\frac{1}{2}$