

COURS HARMONISÉS **DE** **MATHÉMATIQUES** **GÉNÉRALES**

2^{ndes} G2&G3

PROGRAMME DES SECONDES G2 - G3
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES
VOLUME HORAIRE : 04 HEURES PAR SEMAINE

Chapitre 0 : IMPORTANCE DES MATHÉMATIQUES

1. Définition des mathématiques
2. Quelques branches des mathématiques
3. Les mathématiques et quelques domaines de la connaissance
 - 3.1. Mathématiques et les autres disciplines (*de la vie courante*)
 - 3.2. Les mathématiques ; comme outils des matières enseignées à l'enseignement technique
 - Français : contraction de texte ; dissertation
 - Anglais : feelings gaps ; flow chart
 - Comptabilité : principe de la comptabilité ; les amortissements ; l'enregistrement des factures
 - Economie générale ; cout moyen et marginal ; agrégats ; les indices
 - Economie et organisation des entreprises
 - Techniques commerciales : les taux ; proportions ;

Chapitre 1 : ACTIVITES NUMÉRIQUES

1. Rappel sur les ensembles
 - 1.1. Ensembles des entiers naturels $\mathbb{N}$
 - 1.2. Ensembles des entiers relatifs $\mathbb{Z}$
 - 1.3. Ensembles des décimaux $\mathbb{D}$
 - 1.4. Ensembles des nombres rationnels $\mathbb{Q}$
 - 1.5. Ensembles des nombres réels $\mathbb{R}$
 - 1.6. Différence entre un décimal ; un rationnel et un irrationnel
2. Calcul sur les quotients
3. Puissances entières
 - 3.1. Notation
 - 3.2. Propriétés
4. Identités remarquables (*s'arreter à la puissance trois*)
5. Racine carrée
 - 5.1. Notation
 - 5.2. Propriété
6. Valeur absolue
 - 6.1. Notation
 - 6.2. Propriété
7. Notion d'intervalles
 - 7.1. Définition

- 7.2. Signification et représentation graphique
- 7.3. Origine ; extrémité ; centre ; rayon et amplitude d'un intervalle borné
- 7.4. Résolution algébrique des équations : $|x - a| = r$; $|x - b| = |x - a|$; $|ax + b| = r$;
 $|x - a| \leq r$; $|x - a| \geq r$; $|ax + b| \leq r$ ($r \in \mathbb{R}$) (les seuls cas à traiter)
- 8. Ordre dans $\mathbb{R}$
 - 8.1. Inégalités
 - 8.2. Comparaison de deux réels
 - 8.3. Encadrements

Chapitre 2 : POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES (ou FRACTIONS RATIONNELLES)

- 1. Fonction polynôme
 - 1.1. Fonction monôme
 - 1.1.1. Définition (Forme générale)
 - 1.1.2. Exemple
 - 1.2. Fonction polynôme
 - 1.2.1. Forme générale
 - 1.2.2. Exemple
 - 1.3. Factorisation d'un polynôme du second degré
 - 1.3.1. Notion de zéro d'un polynôme du second degré
 - 1.3.1.1. Définition
 - 1.3.1.2. Exemple
 - 1.3.2. Factorisation d'un polynôme du second degré à partir d'un zéro
(*division euclidienne et méthode des coefficients indéterminés*)
sont à exposer
 - 1.3.3. Forme canonique d'un polynôme du second degré
 - 1.3.4. Le discriminant d'un polynôme du second degré
 - 1.3.5. Utilisation des identités remarquables
 - 1.3.6. Méthode des racines évidentes d'un polynôme du second degré
 - 1.4. Factorisation d'un polynôme de degré 3 connaissant au moins un zéro
 - 1.5. Etude de signe d'une fonction polynôme
 - 1.5.1. Etude de signe d'un polynôme du premier degré
 - 1.5.2. Etude de signe d'un polynôme du second degré
- 2. Fonction rationnelle (ou Fraction rationnelle)
 - 2.1. Définition
 - 2.2. Exemple
 - 2.3. Ensemble de définition
 - 2.4. Forme simplifiée d'une fraction rationnelle
 - 2.5. Ecriture d'une fraction rationnelle $f(x)$ sous la forme :
 - 2.5.1. $f(x) = \text{quotient} + \frac{\text{reste}}{\text{diviseur}}$ lorsque le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur

- 2.5.2. $f(x)$ sous une autre forme lorsque le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur et le dénominateur admet au moins un zéro.
- 2.6. Etude de signe d'une fraction rationnelle

Chapitre 3 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

1. Equations
 - 1.1. Equation de la forme $ax+b = 0$
 - 1.2. Equation produit
 - 1.3. Equation quotient (*notion de l'ensemble de validité à insister*)
 - 1.4. Equation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$
 - 1.5. Equation de degré 3 avec un zéro
2. Inéquations
 - 2.1. Inéquation du premier degré à une inconnue
 - 2.1.1. Présentation
 - 2.1.2. Dédution des solutions à partir du signe de $ax+b$
 - 2.1.3. Inéquation produit
 - 2.1.4. Inéquation rationnelle
 - 2.1.5. Inéquation simultanée du premier degré
 - 2.1.6. Inéquation valeur absolue $|f(x)| \leq |g(x)|$ ou $|f(x)| \geq |g(x)|$

$$d^0 f \leq 1 \text{ et } d^0 g \leq 1$$

Chapitre 4 : SYSTEMES LINÉAIRES ET PROGRAMMATION LINÉAIRE

1. Systèmes
 - 1.1. Système linéaire dans IR^2
 - 1.1.1. Equation $ax+by+c = 0$ (insister sur les cas où : $a = 0$ et $b \neq 0$; $a \neq 0$ et $b = 0$)
 - 1.1.2. Système d'équations linéaires à deux inconnues
 - 1.1.2.1. Présentation (*forme générale*)
 - 1.1.2.2. Méthodes de résolution (addition, substitution, comparaison, graphique) ; introduire aussi Cramer (*le déterminant du système doit être de degré 1*)
 - 1.1.3. Système de 3 équations linéaires à 3 inconnues
 - 1.1.3.1. Présentation (*forme générale*)
 - 1.1.3.2. Méthodes de résolution (les autres méthodes sont encore valables sauf graphique) ; introduire aussi Gauss
 - 1.2. Inéquation $ax + by + c \begin{cases} < 0 \\ \leq 0 \\ > 0 \\ \geq 0 \end{cases}$
 - 1.3. Résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires à deux inconnues
2. Programmation linéaire

- 2.1. Problème de maximisation
- 2.2. Problème de minimisation

NB : Les variables (*les inconnues*) doivent être précisées ; le système doit être donné

Chapitre 5 : STATISTIQUE A UNE VARIABLE

- 1. Vocabulaire statistique
- 2. Dépouillement et présentation des résultats : variable continue et variable discrète
- 3. Représentations graphiques
 - 3.1. Diagrammes circulaire, semi - circulaire, en bandes,
 - 3.2. Diagramme en bâtons
 - 3.3. Histogramme
 - 3.4. Graphiques (ou courbes) cumulatifs

Chapitre 6 : FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

- 1. Généralités
 - Définition de fonction ; modes de présentation d'une fonction ; ensemble de définition ; image et antécédent d'une fonction ; image directe ; image réciproque d'une fonction affine ; sens de variation (*méthode des inégalités*) ; tableau de variation
- 2. Etude de quelques fonctions
 - 2.1. Fonctions élémentaires : x^2 ; x^3 ; $\frac{1}{x}$; $\sqrt{x}$

Chapitre 7 : NOTIONS DE TRIGONOMETRIE

- 1. Cercle trigonométrique (*Orientation du plan*)
- 2. Mesure principale ; unité de mesure (*degrés ; radians ; grades*)
- 3. $\sin x$; $\cos x$; $\tan x$; des angles orientés
- 4. $\sin x$; $\cos x$; $\tan x$ des angles remarquables

**RÉPARTITION ET PROGRESSION DU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES
GÉNÉRALES**

Classe de Secondes G2 & G3.

SEANCES	CHAPITRES OU TITRES
2	Prise de contact Présentation du programme Chapitre 0 : Importance des mathématiques (4H)
10	Chapitre 1 : Activités numériques (20 H)
6	Chapitre 2 : Polynômes et Fractions rationnelles (12H)
6	Chapitre 3 : Equations et Inéquations (12 H)
8	Chapitre 4 : Systèmes linéaires et Programmation linéaire (16 H)
4	Chapitre 5 : Statistique à une variable (8 H)
5	Chapitre 6 ; Fonctions numériques d'une variable réelle (10 H)
3	Chapitre 7 : Notions de trigonométrie (6 H)

PRÉFACE

Si un poète tire son plaisir du seul fait d'écrire son œuvre, un auteur de manuel ne serait heureux que si son ouvrage est lu, compris et apprécié.

Les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans de nombreux secteurs de la vie économique et sociale notamment dans l'éducation, les assurances, les banques, ...

Ce présent support de cours est écrit pour renforcer les acquis antérieurs de ses utilisateurs et respecte le nouveau programme de mathématiques générales des classes de secondes G2 et G3.

Il vise un double objectif :

- D'une part, et surtout tenter de montrer aux apprenants, peu tournés vers les disciplines scientifiques, que la mathématique n'est pas une matière rebutante mais qu'elle fait partie de la vie de tous les jours au même titre que la philosophie, la comptabilité, les techniques commerciales, le français, ...
- D'autre part, donner aux apprenants les éléments mathématiques, conformes au programme en vigueur, qui leur seront utiles ultérieurement.

Mais faire les mathématiques, ne signifie pas seulement apprendre les formules ; c'est aussi savoir les utiliser. Aussi, une bonne assimilation des cours de mathématiques passe nécessairement par la résolution des situations problèmes conformes aux notions apprises en classe. Il est donc important de faire de nombreux exercices. A ce titre, le présent support propose de nombreux exercices d'application et des exercices d'approfondissement par chapitre qui faciliteront l'assimilation des notions étudiées.

Nom et Prénoms :
 ETABLISSEMENT :
 SECONDES : G2 & G3
 EFFECTIF :

FICHE N°
 DATE :
 DUREE DU CHAPITRE :
 NOMBRE DE LEÇONS :

- Mise en situation :

- Révisions :

- Motivation :

CHAPITRE 0 :
**IMPORTANCE
 DES MATHÉMATIQUES**

- **PRE-REQUIS**
 - Cours sur l'importance des mathématiques

- **MATERIELS**
 - Calculatrice
 - Matériels didactiques

Méthodes :	Techniques :
Supports :	

Micro - objectifs	Activités enseignant	Activités élèves	Durée

1. Définition des mathématiques

Les mathématiques sont la science et la connaissance. Autrement dit, c'est l'ensemble des connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à des objets divers tels que les nombres, les formes, les structures et les transformations.

D'après le mathématicien Ronald Brown, les mathématiques sont une science de la description (on dit aussi modélisation), de la démonstration, et du calcul. On peut les étudier pour elles-mêmes, pour les appliquer à d'autres sciences, ou comme un exercice de l'esprit. Les principes fondamentaux de cette discipline remontent à l'antiquité (arithmétique et géométrie) ou au XVII^e siècle (mécanique et stochastique), mais la recherche mathématique n'a jamais été aussi vivante qu'aujourd'hui. Chaque réponse à un problème donné suscite en effet de nouvelles questions, et les applications de cette recherche sont de plus en plus variées.

2. Quelques branches des mathématiques

Les principales branches des mathématiques sont :

- L'arithmétique (ou *théorie des nombres*) est sans doute la branche la plus ancienne des mathématiques. Le calcul arithmétique est enseigné à l'école primaire ; au secondaire (ppcm, pgcd et divisibilité).
- La géométrie est, à l'origine, une théorie de la mesure des longueurs, des aires, et des angles. Plus généralement, c'est la théorie du plan, de l'espace, et de toutes les formes qui peuvent se concevoir au-delà de notre espace à trois dimensions. En d'autres termes, c'est l'étude des figures comme les triangles et les parallélogrammes.
- La mécanique est la théorie des forces et des mouvements qu'elles induisent (*statique* et *dynamique*).
- La stochastique (prononcer "stokastique") est la théorie des phénomènes aléatoires. Elle s'appuie sur le *calcul des probabilités* pour modéliser les jeux de hasard.
- L'algèbre est la théorie générale des opérations qui apparaissent notamment en arithmétique et en géométrie. *On y trouve des équations, des inéquations, des structures, ...*
- L'analyse est la théorie générale des suites, séries et fonctions (réelles ou complexes).
- La combinatoire est la théorie des structures finies (ou plus généralement, *discrètes*) telles que les graphes, les mots, ou les permutations. Le dénombrement de telles structures est d'ailleurs le fondement du calcul des probabilités.
- La logique (mathématique) est la théorie du langage mathématique et des démonstrations.
- L'algorithmique (mathématique) est la théorie des méthodes de calcul.

3. Mathématiques et quelques domaines de la connaissance

3.1 - Mathématiques et les autres disciplines (vie courante)

L'interaction entre mathématiques et autres sciences est maintenant un sujet d'intérêt constant. L'articulation avec la physique est encore plus visible et remarquable.

C'est une illusion de penser que les élèves ne savent que ce qu'on leur enseigne à l'école. En arrivant au cours préparatoire, ils savent parler, dessiner et compter. Les mathématiques sont surtout une manière de classer et d'organiser leurs connaissances, et les livres les plus remarquables partent de connaissances communes pour développer le sens de la géométrie et celui du calcul.

Les programmes de mathématiques incitent au rapprochement avec les autres disciplines.

Actuellement on trouve des enseignements de mathématiques dans la plupart des formations universitaires ou d'écoles post-baccalauréat. C'est le cas en physique, en biologie, en économie, en gestion, en architecture, en ingénierie...

On remarquera la présence des mathématiques dans :

- L'art culinaire (la préparation de la sauce),
- Les opérations bancaires (les prêts bancaires),
- Le génie civil (la construction d'une maison ; d'une route),
- Le sport (comment choisir le meilleur angle de tir ?),
- Le code de la route (la traversée d'une route ; les figures sur les panneaux de signalisation ; le sens giratoire).

3.2 - Les mathématiques comme outils des matières enseignées (enseignement technique)

Les disciplines comme l'anglais, le français, la comptabilité, l'économie et organisation des entreprises, l'économie générale, la technique commerciale, ... n'évoluent pas loin des mathématiques.

En effet, l'anglais utilise les mathématiques pour les feelings gaps, le flow chart ; le français, pour la contraction de texte (il s'agit d'une réduction), la dissertation, (il s'agit du développement), le commentaire composé ; la comptabilité l'utilise pour le calcul des amortissements, le principe de la comptabilité, l'enregistrement des factures, ... ; l'économie générale l'utilise pour les calculs des coûts moyens et marginaux, les agrégats, les indices de prix, les élasticités- prix ; l'économie et l'organisation de l'entreprise l'utilise pour la gestion des stocks (stock de sécurité, stock d'alerte), la détermination de la variation de stock, le seuil de rentabilité, ... ; les techniques commerciales l'utilisent pour le calcul des taux, des proportions, ...

Conclusion

En ces jours, aucune discipline ne peut évoluer sans les mathématiques et vice versa. Le monde est construit sur des calculs mathématiques aussi dirait - on de Dieu qu'il est le mathématicien par excellence. Un autre dira que **les mathématiques gouvernent le monde** : « Tout se mathématise. » Pour nous résumer ; reprenons les paroles de **Severinius BOECE** (450-528 ; Rome) : **Tout a été créé par les nombres qui étaient le modèle exemplaire dans l'esprit du créateur** ; in 2^{nde} SE. Collection CIAM ; Page 133

Vérification de l'atteinte des objectifs (évaluations)	Observations

- Clôture cognitive (récapitulation / synthèse)

- Clôture sociale / travail à faire :

- Remédiations :

Nom et Prénoms :

ETABLISSEMENT :

SECONDES : G2 & G3

EFFECTIF :

FICHE N°

DATE :

DUREE DU CHAPITRE :

NOMBRE DE LEÇONS :

- Mise en situation :

- Révisions :

- Motivation :

CHAPITRE 1 :
ACTIVITES NUMERIQUES

- **PRE-REQUIS**

- Cours de mathématiques (algèbre) de la classe de 3^{ème}.

- **MATERIELS**

- Calculatrice
- Matériels didactiques

Méthodes :	Techniques :
Supports :	

Micro - objectifs	Activités enseignant	Activités élèves	Durée

1. Rappels sur les ensembles.

1.1. Ensemble des entiers naturels

0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... sont les nombres entiers naturels. L'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{N}$ (comme naturel) (ici on se déplace de 1 en 1) exemple : $7 \in \mathbb{N}$ mais $-7 \notin \mathbb{N}$ et $3,8 \notin \mathbb{N}$.

1.2. Ensemble des entiers relatifs

... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... sont les nombres entiers relatifs. (ils sont négatifs, positifs ou nuls) L'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{Z}$. (ici on se déplace de -1 en -1 et de 1 en 1).

Exemple : $7 \in \mathbb{N}$ et $-7 \notin \mathbb{N}$ mais $-7 \in \mathbb{Z}$.

Remarque : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ se lit « $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ » c'est à dire que tout entier naturel est un entier relatif.

1.3. Ensemble des décimaux

Les nombres qui sont le quotient d'un entier relatif par une puissance de dix sont appelés nombres décimaux ou tout nombre de la forme $a \times 10^n$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$. L'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{D}$ (comme décimal).

Exemple : $13,85 \in \mathbb{D}$: 13 est la partie entière de 13,85 et 0,85 est la partie décimale de 13,85
 $-0,004 \in \mathbb{D}$: 0 est la partie entière de -0,004 et -0,004 est la partie décimale de -0,004

Par contre $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ car on ne peut pas se ramener à une puissance de dix au dénominateur.

De plus $\frac{1}{3} = 0,33333333...$ son écriture décimale ne s'arrête pas.

Pour reconnaître un nombre décimal écrit sous forme fractionnaire, vérifier si, écrit sous forme irréductible, le dénominateur est un produit de 2 et/ou de 5.

1.4. Ensemble des nombres rationnels

Les nombres rationnels sont les quotients $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier relatif non nul. L'écriture $\frac{a}{b}$ est appelée écriture fractionnaire. L'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{Q}$ (comme quotient)

Exemples : $\frac{1}{3}$; $\frac{-2}{5}$; 2 ; -7 ; 0 ; $\frac{22}{7}$.

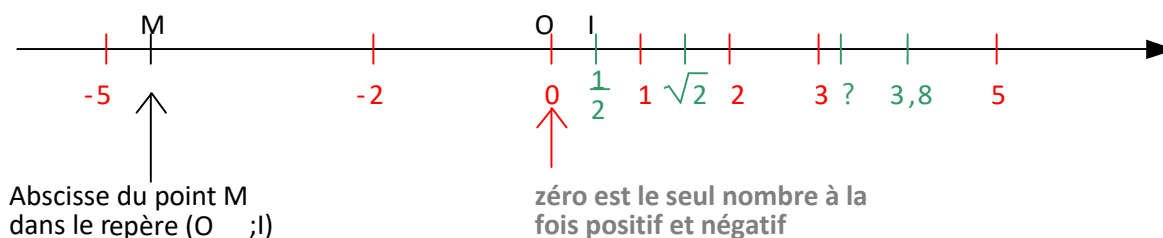
1.5. Ensemble des nombres réels

Ils existent des nombres qui n'appartiennent à aucun des ensembles que nous venons de voir.

On démontre par exemple que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$; $-\frac{\sqrt{3}}{5} \notin \mathbb{Q}$.

Ces nombres sont appelés **nombres irrationnels** (c'est - à - dire « qui ne sont pas rationnels ») ils appartiennent avec tous les nombres précédents à l'ensemble des **nombres réels** qui est noté $\mathbb{R}$ (comme réel)

L'ensemble des nombres réels est aussi l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée. (c'est à dire munie d'un repère (O ; I)). Cette droite, qui représente alors $\mathbb{R}$ est appelée **droite des réels** ou **droite numérique**.



Remarques

Les différents ensembles de nombres sont emboîtés ; on a donc $\mathbb{IN} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{ID} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{IR}$

Le signe * placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombres, prive celui-ci de zéro. Ainsi $\mathbb{IR}^*$ désigne les réels non nuls.

Le signe + ou - placé en bas à droite de la lettre désignant un ensemble de nombres, prive celui-ci des nombres négatifs ou positifs. Ainsi, $\mathbb{IR}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{IR}_-$ désigne l'ensemble des réels négatifs.

Exemple :

1. Citer quatre ensembles de votre choix, donner leur définition et si possible trois nombres éléments et non éléments.
2. On considère l'ensemble E défini par

$$E = \left\{ \frac{3}{4} ; -\frac{22}{7} ; 0 ; -\frac{80}{4} ; 11 ; 7,54 ; \frac{5}{6} ; \sqrt{3} \right\}$$

Déterminer les ensembles suivants :

A = ensemble des entiers naturels de E

B = ensemble des entiers relatifs de E

C = ensemble des nombres décimaux de E

F = ensemble des nombres rationnels de E

G = ensemble des nombres réels de E

1.6. Différence entre un décimal, un rationnel et un irrationnel

- Un décimal a sa partie décimale limitée (ou fixe)
- Un rationnel a sa partie décimale illimitée et périodique
- Un irrationnel a sa partie décimale illimitée et non périodique.

2. Calculs sur les quotients

Soient a et b deux nombres réels avec b non nul. Le quotient de a par b est l'unique nombre réel $\frac{a}{b}$.

Remarque : $\frac{a}{b}$ n'a de sens que si $b \neq 0$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{kc}{kd}$$

Activité

Effectuer les opérations suivantes :

a/ $\frac{3}{5} + \frac{7}{6}$

b/ $\frac{3}{5} \times \frac{7}{6}$

c/ $\frac{1}{\frac{3}{5}}$

d/ $\frac{\frac{-7}{2}}{\frac{3}{11}}$

Propriétés

Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que b et d ne soient pas nuls, on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} ; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} ; \quad \text{Si de plus } c \neq 0, \text{ alors } \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c} ; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc ; \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{kc}{kd}$$

Exemple

Effectuer les calculs suivants puis rend le résultat sous forme d'une fraction irréductible

$$\frac{-12}{5} + \frac{4}{3} ; \quad \frac{2}{9} - \frac{1}{6} ; \quad \frac{-3}{4} \times \frac{2}{3} ; \quad \frac{5}{10} \div \frac{-8}{10} ; \quad \frac{\frac{1}{3}}{4} \times \frac{2}{5} ; \quad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{20}}$$

3. Puissances entières**3.1. Notation**

a étant un nombre réel et n un entier naturel, alors on a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}} \text{ et se lit « } a \text{ exposant } n \text{ » ou « } a \text{ puissance } n \text{ »}$$

3.2. Propriétés

Pour tous réels non nuls a et b,

$$(1) a^m a^n = a^{m+n} ; \quad (2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} ; \quad (3) (a^m)^n = a^{mn} ; \quad (4) (ab)^n = a^n b^n ;$$

$$(5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} ; \quad (6) (-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Par convention, Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $a^0 = 1$

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $c^1 = c$

Exemple

1. Ecrire à l'aide des puissances entières de nombres premiers, les nombres suivants :

$$\frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6} ; \quad \frac{0,081 \times 0,36}{0,144}$$

2. Soit $A = 10^5 \times 81^2$

Mettre A sous la forme $A = 2^m \times 3^n \times 5^p$ où m, n et p sont des entiers relatifs à déterminer.

4. Les identités ou produits remarquables

Soit a et b deux réels quelconques.

- Identités du deuxième degré

A. Carré de la somme de deux nombres

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

B. Carré de la différence de deux nombres

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

C. Produit de la somme de deux nombres par leur différence

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

D. Carré de la somme de trois nombres

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

- Identités du troisième degré

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Exemple

1 - Développer les expressions suivantes : $(-x - 5)^2$; $(2 + x)^3$; $(3 - x)^3$; $(a + b + 2)^2$

2 - Factoriser les expressions suivantes : $(2 - x)(3 + x) + 3(4 - x^2)$;
 $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$; $x^3 - 64$; $8x^3 + 27$

5. Racine carrée5.1. Notation

a étant un nombre réel positif ou nul, la racine carrée de a est l'unique réel positif dont le carré est a .

Elle est notée $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Remarques

- Seuls les nombres réels positifs admettent des racines carrées.
- a étant un nombre réel positif, $(\sqrt{a})^2 = a$ et $(-\sqrt{a})^2 = a$.

5.2. Propriétés

$$\text{si } a \geq 0 \text{ et } b > 0 : \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad ; \quad \text{si } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 : \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad ;$$

$$\text{si } a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a| \quad ; \quad \text{si } a \geq 0, \sqrt{a^2} = a$$

Exemple 1

1. Calculer le nombre $B = -3\sqrt{27} + \sqrt{75} - 2\sqrt{108}$ et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un nombre entier relatif.

2. Montrer que pour tous nombres réels strictement positifs tels que $a < b$, on a :

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

Exemple 2

Par un simple calcul, montrer que $D = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{125} - 6\sqrt{45}$ est un nombre entier.

6. Valeur absolue d'un nombre réel**6.1. Notation**

Soit a un nombre réel. Le plus grand des deux nombres réels a et $-a$ est appelé valeur absolue de a . Elle **se note** $|a|$.

6.2. Propriétés

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre réel strictement positif r , on a :

- 1) $|a| \geq 0$; 2) $|a| \geq a$; 3) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; 4) $|a| = |-a|$;
- 5) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b$; 6) $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases}$; 7) $\sqrt{a^2} = |a|$;
- 8) $|ab| = |a||b|$; 9) si $b \neq 0$ alors $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$; 10) $|a| \geq r \Leftrightarrow a \leq -r \text{ ou } a \geq r$
- 11) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire) ; 12) $|a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$ (très utilisé).

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : $|2x+1| = 4$; $|x-3| = -4$;

$$|x-1| \leq 3 ; \quad |x-1| \geq 2$$

7. Notions d'intervalles**7.1. Définition**

C'est une distance d'un lieu à un autre. En d'autres termes, c'est un écart entre deux valeurs a et b avec $a < b$.

7.2. Signification et représentation graphique d'un intervalle

On considère a et b , deux nombres tels que $a < b$ et soit $x \in \mathbb{R}$:

Tous les cas possibles sont rassemblés dans ce tableau :

$\forall a; b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

Notation	Appellation	Signification	Représentation graphique
$[a; b]$	Intervalle fermé $a ; b$ (ou segment $a ; b$)	$a \leq x \leq b$	
$]a; b[$	Intervalle ouvert $a ; b$	$a < x < b$	
$[a; b[$	Intervalle semi-ouvert à droite en b (contenant a)	$a \leq x < b$	
$]a; b]$	Intervalle semi-ouvert à gauche en a (contenant b)	$a < x \leq b$	
$] -\infty ; a]$	Demi-droite fermé à droite en a	$x \leq a$	
$] -\infty ; a[$	Demi-droite ouvert à droite en a	$x < a$	
$[a ; +\infty[$	Demi-droite fermé à gauche en a	$x \geq a$	
$]a ; +\infty[$	Demi-droite ouvert à gauche en a	$x > a$	
$] -\infty ; +\infty[$	Ensemble des réels ou la droite	$x \in \mathbb{R}$	

Remarque 1

- $] -\infty ; 0] = \mathbb{R}_-$
- $] -\infty ; 0[= \mathbb{R}_-^*$
- $[0 ; +\infty[= \mathbb{R}_+$
- $]0 ; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$
- $] -\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[= \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

Remarque 2: Les crochets sont toujours ouverts en $-\infty$ ou en $+\infty$.

Exemple

1. Représenter sur une droite graduée : $[2 ; 16]$; $] -4 ; 6]$; $] -5 ; 0[$; $] -3 ; +\infty[$
2. Ecris sous forme d'intervalle : $0 \leq x \leq 5$; $-8 < x \leq 0$; $-1 < x < 4$;
 $x \geq 7$; $x < -4$

7.3- Origine - Extrémité - Centre - Rayon - Amplitude d'un intervalle borné

Soit un intervalle $[a ; b]$. On appelle :

- Origine de l'intervalle $[a ; b]$, le nombre réel a
- Extrémité de l'intervalle $[a ; b]$, le nombre réel b
- Centre de l'intervalle $[a ; b]$, le nombre réel $c = \frac{a+b}{2}$
- Rayon de l'intervalle $[a ; b]$, le nombre réel positif $r = \frac{b-a}{2}$
- Amplitude ou longueur de l'intervalle $[a ; b]$, le nombre réel positif $k = b - a$

Exemple

Soit l'intervalle $[-7 ; 1]$. Trouve son origine, son extrémité, son centre, son rayon, et son amplitude en remplissant le tableau suivant.

Intervalle	Origine	Extrémité	Centre	Rayon	Amplitude

- Opérations sur les intervalles (réunion et intersection)

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E.

On appelle intersection de A et B l'ensemble des éléments de E appartenant à A et à B.

C'est aussi l'ensemble des éléments communs à A et à B.

On note : $A \cap B$ et on lit "A inter B"

On appelle réunion de A et B l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B.

On note : $A \cup B$ et on lit "A union B".

Remarques

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.

Exemple

Soit $I = [3 ; +\infty[$; $J =]-\infty ; 3]$; $A =]-\infty ; -6[$; $M = [-4 ; +\infty[$;
 $B =]-\infty ; 12[$

Déterminer les intervalles suivants: $A \cap B$; $M \cap B$; $B \cup M$; $A \cap M$; $A \cup M$; $I \cap J$

7.4- Résolution algébrique des équations et inéquations

$$|x - a| = r \quad ; \quad |x - b| = |x - a| \quad ; \quad |ax + b| = r \quad ; \quad |x - a| \leq r \quad ; \quad |x - a| \geq r \quad ;$$

$$|ax + b| \leq r \quad (r \in \mathbb{R}) \quad ; \quad |ax + b| \geq r \quad (\text{les seuls cas à traiter})$$

- Propriétés

Soient a et b des réels et r un nombre réel positif. Pour tout nombre réel x, on a:

- $|x - a| = r \Leftrightarrow x = a - r$ ou $x = a + r$ soit $S = \{a - r ; a + r\}$.
- $|x - a| = |x - b| \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}$ et $S = \{\frac{a+b}{2}\}$
- $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$
- $|x - a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r$ ou $x \geq a + r$

Remarque : Lorsque $r < 0$ l'équation $|x - a| = r$ n'a pas de solution.

- Autres propriétés

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et r un nombre réel positif. Pour tout réel x , on a :

- $|ax + b| = r \Leftrightarrow ax + b = r$ ou $ax + b = -r$ soit $x = \frac{r-b}{a}$ ou $x = \frac{-r-b}{a}$
- On distingue deux cas dans la résolution de l'inéquation $|ax + b| \geq r$:

Si $r \leq 0$, alors l'inéquation $|ax + b| \geq r$ a pour solution $S = E_V$

Si $r > 0$, alors $|ax + b| \geq r \Leftrightarrow ax + b \geq r$ ou $-ax - b \geq r$. La résolution des deux dernières inéquations obtenues permet de donner les solutions.

- On distingue trois cas dans la résolution de l'inéquation $|ax + b| \leq r$

Si $r < 0$, alors l'inéquation $|ax + b| \leq r$ a pour solution $S = \emptyset$

Si $r = 0$, alors l'inéquation $|ax + b| \leq r$ a pour solution $S = \{-\frac{b}{a}\}$

Si $r > 0$, alors $|ax + b| \leq r \Leftrightarrow ax + b \leq r$ ou $-ax - b \leq r$. La résolution des deux dernières inéquations obtenues permet de donner les solutions.

Exemple

Résoudre algébriquement les équations et inéquations suivantes $|-3x + 4| = 1$; $|-3x + 4| = |2x - 1|$;

$$|x + 4| = |-x + 5| \quad ; \quad |x - 4| < -8 \quad ; \quad |3x + 9| \geq 3 \quad ; \quad |x - 4| > -7 \quad ;$$

$$|x - 1| \leq 3 \quad ; \quad |2x - 4| < 8$$

8. Ordre dans $\mathbb{R}$

8.1. Inégalités dans $\mathbb{R}$

▪ Définitions

Soit a et b deux nombres réels ;

- a est inférieur ou égal à b signifie que $b - a$ est un nombre réel positif ; on note : $b - a \geq 0$.
- a est strictement inférieur à b signifie que $b - a$ est un nombre strictement positif ; on note : $b - a > 0$.

NB : $\leq$ et $\geq$ sont les symboles des inégalités larges ; $<$ et $>$ sont les symboles des inégalités strictes

▪ Propriétés

Pour tous nombres réels a , b et c , on a :

- $a \leq a$
- $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$
- $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$ (seule cette propriété reste vraie pour les inégalités strictes)

- Autres propriétés

Soit a et b deux nombres réels

- si $a \leq b$ (respectivement $a < b$) alors $a - b \leq 0$ (resp. $a - b < 0$)
- si $a \geq b$ (respectivement $a > b$) alors $a - b \geq 0$ (resp. $a - b > 0$)
- si $a = b$ alors $a - b = 0$
- si $a \leq b$ (resp. $a < b$) alors $a + c \leq b + c$ (resp. $a + c < b + c$)
- si $a \geq b$ (resp. $a > b$) alors $a + c \geq b + c$ (resp. $a + c > b + c$)
- si $a \leq b$ (resp. $a < b$) alors $a - c \leq b - c$ (resp. $a - c < b - c$)
- si $a \geq b$ (resp. $a > b$) alors $a - c \geq b - c$ (resp. $a - c > b - c$)
- si $a \geq b$ et $k > 0$ alors $ka \geq kb$
- si $a \leq b$ et $k < 0$ alors $ka \geq kb$
- si $a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ ($a \geq 0$; $b \geq 0$)
- si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$)

8.2. Comparaison de deux nombres réels

Méthode

Pour comparer deux nombres réels, on peut :

- Les comparer à un nombre intermédiaire ;
- Etudier le signe de leur différence ;
- S'ils sont strictement positifs, comparer leurs carrés, leurs racines carrées ou leurs inverses.

Remarque

Il n'existe pas de règle pour soustraire ou diviser membre à membre des nombres.

Exemple de la remarque

$$\begin{cases} 1 \leq 5 \\ 2 \leq 4 \end{cases} \text{ mais } 2 - 1 \leq 4 - 5 \text{ et } \frac{2}{1} \leq \frac{4}{5} \text{ ne sont pas vraies.}$$

Exemple

1. Comparer : $-2 + 2\sqrt{3}$ et $-2 + 3\sqrt{3}$; $\frac{1999}{1998}$ et $\frac{1998}{1999}$; 2 et $\sqrt{3}$

2. Calculer $(-3 + \sqrt{2})^2$ puis comparer les nombres $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ et $-3 + \sqrt{2}$

8.3. Encadrements

✓ Encadrement d'une somme, d'une différence

Méthode

Pour encadrer une somme, on peut ajouter membre à membre les inégalités de même sens donnant l'encadrement de chaque terme de la somme.

Pour encadrer une différence, on peut :

- Encadrer le premier terme ;
- Encadrer l'opposé du second terme ;
- Ajouter membre à membre les inégalités de même sens ainsi obtenues.

Exemple

On donne $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ et $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

Donner les encadrements suivants $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$; $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; $3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

✓ Encadrement d'un produit, d'un quotient

Méthode

Pour encadrer un produit, on peut utiliser des encadrements où ne figurent que des nombres positifs et multiplier membre à membre les inégalités de même sens donnant l'encadrement de chaque facteur du produit.

Pour encadrer un quotient, on peut utiliser des encadrements où ne figurent que des nombres positifs et :

- Encadrer le numérateur ;
- Encadrer l'inverse du dénominateur ;
- Multiplier membre à membre les inégalités de même sens ainsi obtenues.

Exemple

On donne $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ et $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

Donner les encadrements suivants $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$; $-2\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Vérification de l'atteinte des objectifs (évaluations)	Observations

- Clôture cognitive (récapitulation / synthèse)

- Clôture sociale / travail à faire :

- Remédiations :

A VOUS DE JOUER ...

I. Questions de cours

A/ Répondre par Vrai ou Faux

- 1/ Pour tout réel a ; $\sqrt{a^2} = |a|$
- 2/ Pour tout réel a ; $\sqrt{a^2} = a$
- 3/ Pour tout réel *néglatif* a ; $\sqrt{a^2} = a$
- 4/ Le centre de l'intervalle $[a ; b]$ est $\frac{a+b}{2}$
- 5/ Le rayon de l'intervalle $[a ; b]$ est $\frac{a-b}{2}$

B/ QCM

Choisir la bonne réponse sans la justifier ; une seule proposition est correcte

1/ L'ensemble des entiers relatifs se note :

A / IN ; B / ID ; C / IR ; D / Z

2/ $(a + b)^2 =$

A/ $a^2 + 2ab - b^2$; B / $a^2 + b^2$; C/ $a+b$; D/ $a^2 + 2ab + b^2$

3/ L'ensemble des solutions de l'équation $|x + 3| = 9$ est :

A/ IR ; B / $\{-7\}$; C / $\{-12 ; 6\}$; D/ $[-12 ; 6]$

II. EXERCICES

1-Calculer les nombres suivants en présentant les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} ; \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} ; \frac{2}{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} ; \frac{\frac{3}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}} ; \frac{4 - \frac{2}{3}}{4}$$

2) Ecrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombres premiers

$$\frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6} ; \frac{0,081 \times 0,36 \times 2560}{0,144 \times 2,16 \times 64}$$

3) Ecrire les nombres suivants sous une forme plus simple (radicaux seulement au numérateur, les nombres écrits sous ces radicaux étant les plus petits possibles) :

$$\sqrt{72} ; \sqrt{1080} ; \sqrt{54} - \sqrt{24} - \sqrt{150} ; \sqrt{20} - 2\sqrt{125} + \sqrt{180} ; -\frac{14}{\sqrt{7}}$$

4) Démontrer les égalités suivantes : $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{4,5}$; $\sqrt{\sqrt{2} - 1} \times \sqrt{\sqrt{2} + 1} = 1$

5) Comparer les nombres réels suivants : $2 + \sqrt{5}$ et $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$; $\sqrt{2} - \sqrt{7}$ et $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$

6) Calculer $(\sqrt{2} - \sqrt{7})^2$ et donner le signe de $\sqrt{2} - \sqrt{7}$ et puis comparer $\sqrt{2} - \sqrt{7}$ et $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$

7) Soit a, b, c, d quatre nombres réels tels que : $b \neq 0, d \neq 0$ et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Sous réserve d'existence des différents quotients, démontrer les égalités suivantes :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} ; \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} ; \quad \frac{2a-3c}{5a+4c} = \frac{2b-3d}{5b+4d} ; \quad \frac{-a+2b}{3a+5b} = \frac{-c+2d}{3c+5d} ;$$

$$\frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{c^2+d^2}{d^2} ; \quad \frac{a^2-c^2}{a^2+2c^2} = \frac{b^2-d^2}{b^2+2d^2} .$$

8) Calculer les expressions suivantes :

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} ; \quad B = -\frac{1}{3}\left(2 - \frac{3}{5}\right) + \frac{2}{3}\left[-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\right] ; \quad C = \frac{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}}{1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{5}}$$

$$F = [2^{20} + 5^{32}]^0 (2^6 5^3)^2$$

9) Mettre sous forme de a^p , $a, p \in \mathbb{Z}$

$$A = 12^2 \cdot 27^{-2} \cdot 45^2 \cdot 25^{-1} \cdot 8^{-1} ; \quad B = 16^{-3} \cdot 125^4 \cdot 100^{-2} \cdot 54^3 \cdot 45^4 \cdot 64^{-2}$$

10) Développer les expressions suivantes :

$$A = (2x - 1)^3 ; \quad B = (x + 2y)^3 ; \quad C = (1 - 3y)^2(1 + y) ; \quad D = (2x + 1 - y + z)^2$$

11) Factoriser : $A = (5 - x)(7 + x) + 3(25 - x^2)$; $B = 25 - 9x^2 - (3x + 5)^2$;

$$C = 8x^3 - 125 ; \quad D = (3x^2 + 2x - 3)^2 - (3x^2 - 2x - 21)^2 ;$$

$$E = (x + 2)(x - 1) - 16(x + 2) ; \quad F = 1 + 64y^3$$

12) résoudre les équations suivantes : a) $|4x + 3| = 2$; b) $|-x - 1| = -5$

13) Voici quatre façons de décrire une même propriété :

$$x \in [2; 6] \text{ en terme d'intervalle}$$

$$2 \leq x \leq 6 \text{ en termes d'encadrement}$$

$$|x - 4| \leq 2 \text{ en termes de valeur absolue}$$

Traduire de chaque façon les propriétés suivantes :

- a) $x \in [2; 3]$; b) $x \in]1; 5[$; c) $-6 \leq x \leq -2$; d) $-5 < 2x < 5$; e) $|x + 2| \leq 2$;
f) $|3 - x| < 4$

14) Représenter géométriquement et écrire sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalle l'ensemble des nombres réels x vérifiant :

a) $|x - 1| \leq 3$; b) $|2x - 1| \leq 2$

c) $|2x - 1| < -2$; d) $|x| > 1$; e) $|x - 2| \geq -\frac{1}{2}$.

15) Ecrire sous forme d'intervalle lorsque cela est possible (vous ferez le graphique)

$A = [-15; 9[\cap [-2; 5[$; $B = [-7; 5] \cup [-1; 8]$; $C = ([-1; 2] \cup]2; 7[\cap [1; 3])$;

$D = (]-1; 2[\cap [0; 3[\cap]-5; 1[) \cup]1; 3]$; $E = ([1; 4[\cup]5; 8] \cap [-1; 2] \cup [3; 6[\cup]7; 9])$

16) Utiliser une valeur absolue pour écrire une condition équivalente à :

$x \in [-7; 2]$; $x \in]1; 6[$; $x \in]-\infty; 3[\cup]2; +\infty[$.

Nom et Prénoms :

ETABLISSEMENT :

SECONDES : G2 & G3

EFFECTIF :

FICHE N°

DATE :

DUREE DU CHAPITRE :

NOMBRE DE LEÇONS :

- Mise en situation :

- Révisions :

- Motivation :

CHAPITRE 2 : POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES
--

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, chaque apprenant en utilisant les acquis de ce cours, doit être capable de :

- identifier un monôme, un polynôme, une fraction rationnelle
- vérifier qu'un réel donné est un zéro d'un polynôme donné,
- factoriser un polynôme connaissant un de ses zéros en utilisant la division euclidienne ou la méthode des coefficients indéterminés,
- écrire la forme canonique d'un polynôme du second degré et la factoriser si possible,
- étudier le signe d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle donnée,
- déterminer la condition d'existence d'une fonction rationnelle et écrire sa décomposition en éléments simples et la simplifier si possible.

- **PRE-REQUIS**

- Cours de mathématiques (algèbre) de la classe de 3^{ème}.

- **MATERIELS**

- Calculatrice
- Matériels didactiques

Méthodes :	Techniques :
Supports :	

Micro - objectifs	Activités enseignant	Activités élèves	Durée

1. Fonction polynôme

1.1. Fonction monôme

1.1.1. Définition (forme générale)

Soit a un réel non nul et n un entier naturel.

- Toute fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = ax^n$ est appelé monôme de coefficient a et de degré n .

1.1.2. Exemple

3 est un monôme de degré 0 ; $3x$ est un monôme du 1^{er} degré ; $4x^7$ est un monôme de degré 7

1.2. Fonction polynôme

1.2.1. Définition (forme générale)

On appelle polynôme toute somme algébrique de monômes.

De façon générale un polynôme peut s'écrire $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des nombres réels tels que $a_n \neq 0$.

Le degré d'une fonction polynôme est égal au degré de son monôme de degré le plus élevé. Ainsi le degré de P est égal à n et on écrira $\deg P = n$.

1.2.2. Exemple

-3 est une fonction polynôme de degré 0 ; $3x + 5$ est un polynôme du 1^{er} degré
 $-4x^2 + x + 3$ est un polynôme de degré 2 ; $4x^7 + x^4 + x^2 + x + 3$ est un polynôme de degré 7

1.3- Factorisation d'un polynôme du second degré

1.3.1. Notion de zéro d'un polynôme du second degré

1.3.1.1. Définition

On appelle polynôme du second degré, tout polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$.

On appelle zéro ou racine d'un polynôme P du second degré, le réel α qui annule ce polynôme ; c'est - à- dire $P(\alpha) = 0$.

1.3.1.2. Exemple

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ est un polynôme du second degré ; -1 est un zéro de $f(x)$ car $f(-1) = 0$.

1.3.2. Factorisation d'un polynôme du second degré à partir d'un zéro

Si $p(x)$ admet un zéro α alors $p(x)$ est factorisable ou divisible par $(x - \alpha)$.

Dans ce cas $p(x)$ peut s'écrire sous la forme $p(x) = (x - \alpha)q(x)$ avec $d^\circ p = 1 + d^\circ q$

$$\Rightarrow d^\circ q = d^\circ p - 1$$

Exemple : $p(x) = -3x^2 + 5x - 2$

1. Calculer $p(1)$; $p(-1)$ et $p(2)$
2. Conclure à partir du résultat de 1
3. Factoriser $p(x)$ en utilisant :
 - a. La méthode de la division euclidienne.
 - b. La méthode des coefficients indéterminés.

1.3.3. Forme canonique d'un polynôme du second degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, un polynôme du second degré. La forme canonique de $P(x)$ est $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]$.

Remarque

On peut utiliser la forme canonique pour factoriser un polynôme du second degré lorsque $b^2 - 4ac \geq 0$.

Exemples

Donner la forme canonique puis si possible factoriser les polynômes du second degré suivants :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 6x + 9 \quad ; \quad P(x) = 5x^2 - 4x - 1 \quad ;$$

$$Q(x) = -4x^2 + 4x - 1 \quad ; \quad R(x) = 2x^2 + 3x + 5.$$

1.3.4. Le discriminant

Soit $ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) un polynôme du second degré.

On appelle discriminant du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$), le nombre réel Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est non factorisable ;
- Si $\Delta > 0$ alors $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et la factorisation est :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
- Si $\Delta = 0$ alors $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ et la factorisation est : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

Exemple: En utilisant le discriminant, factoriser lorsque cela est possible les fonctions suivantes :

1. $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$

2. $g(x) = -x^2 + 4x - 6$

3. $h(x) = 4x^2 - 28x + 49$

1.3.5. Utilisation des identités remarquables

Exemple

En utilisant les identités remarquables, factoriser les polynômes suivants :

$$C = (x - 1)^2 + (6x + 4)(x - 1) + (3x + 2)^2 \quad ; \quad D = 9(x + 2)^2 - 25(5x - 1)^2$$

1.4. Factorisation d'un polynôme de degré 3 connaissant au moins un zéro

Soit α un réel ; p un polynôme ; α est un zéro de p si et seulement si $p(\alpha) = 0$

Conséquence

Si $p(x)$ admet un zéro α alors $p(x)$ peut se mettre sous forme

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) \text{ avec } q \text{ un polynôme de degré 2.}$$

On peut déterminer $q(x)$ par la méthode de la division euclidienne ou par la méthode des coefficients indéterminés.

Exemple : $T(x) = -2x^3 - 5x^2 + x + 6$

1. a) Calculer $T(1)$ et $T(-1)$
b) Que peut-on conclure ?
2. Factoriser $T(x)$ en utilisant :
a. La méthode de la division euclidienne.
b. La méthode des coefficients indéterminés.

1.5. Etude de signe d'un polynôme

1.5.1. Etude de signe d'un polynôme du premier degré

Soit $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$. Etudions le signe de $f(x)$.

$$\text{Posons } ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de « $-a$ »		Signe de « a »

Suivi de commentaire

Exemple : Etudier le signe de :

a. $f(x) = -2x + 5$

b. $g(x) = 3x + 1$

c. $h(x) = \left(\frac{1}{3}x + 2\right)(2x + 3)$

1.5.2. Etude de signe d'un polynôme du second degré

Pour étudier le signe d'un trinôme du 2^e degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ on calcule le discriminant. Trois cas peuvent se présenter :

✚ Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ a le signe de « a »

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de « a »	

Suivi de commentaire

✚ Si $\Delta = 0$ alors $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ et $ax^2 + bx + c$ a le signe de « a » sauf pour la racine double

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de « a »	$\emptyset$	Signe de « a »

Suivi de commentaire

✚ Si $\Delta > 0$ alors $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $ax^2 + bx + c$ a le signe de « a » à l'extérieur des racines et le signe de « $-a$ » à l'intérieur des racines. Supposons x_1 la plus petite racine

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	Signe de « a »	$\emptyset$	Signe de « $-a$ »	$\emptyset$	Signe de « a »

Suivi de commentaire

Exemple : Etudier le signe de :

1. $f(x) = x^2 + 3x + 7$

2. $g(x) = -3x^2 + 4x - 1$

3. $h(x) = 4x^2 - 12x + 9$

2. Fraction rationnelle

2.1. Définition

On appelle **fraction rationnelle**, toute fonction numérique de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes.

2.2. Exemple

$x \mapsto \frac{x^2+2}{x-1}$; $x \mapsto \frac{1}{3x+2}$; $x \mapsto \frac{-x+3}{x+4}$ sont des fractions rationnelles.

2.3. Ensemble de définition

Soit f la fraction rationnelle définie par $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. La condition d'existence de f est donnée par :

f existe si et seulement si $Q(x) \neq 0$.

La **condition d'existence de f** nous permettra de déterminer l'ensemble de définition de f . Cet ensemble est souvent noté $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$.

Exemple

- Déterminer la condition d'existence de $f : x \mapsto \frac{x^2+2}{x-1}$
- En déduire l'ensemble de définition de f .

2.4. Forme simplifiée d'une fraction rationnelle

Exemple

- Soit $p(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$. Mettre $p(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré sachant que $p(2) = 0$.
- On donne les fonctions rationnelles suivantes :

$$f(x) = \frac{2x^3+x^2-13x+6}{x^2-5x+6} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1}$$

a. Déterminer D_f et D_g .

b. Montrer que pour tout x élément de D_f , $f(x) = \frac{(2x-1)(x+3)}{x-3}$

c. Montrer que pour tout x élément de D_g , $g(x) = \frac{2}{x+1}$

2.5. Ecriture d'une fraction rationnelle sous la forme :

$$2.5.1. \quad f(x) = \text{quotient} + \frac{\text{reste}}{\text{diviseur}} \quad (\text{lorsque le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur})$$

Dans ce cas, on utilise la méthode de la division euclidienne ou la méthode des coefficients indéterminés.

Exemple

On donne la fraction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

1/ Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2/ Déterminer les nombres réels a , b et c tels que pour tout x élément de D_f :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$

2.5.2. $f(x)$ sous une autre forme lorsque le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

Dans ce cas, on factorise si possible le dénominateur et on utilise la seule méthode des coefficients indéterminés.

Exemple

1. Mettre $g(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ sous la forme $g(x) = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$

2. Soit $h(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$. Déterminer a , b et c tels que $h(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}$

2.6. Etude de signe d'une fraction rationnelle

Exemple : Etudier suivant les valeurs de x , le signe de :

$$f(x) = -\frac{3}{x - 2} \quad ; \quad g(x) = \frac{2x + 3}{1 + x} \quad ; \quad h(x) = \frac{-3x^2 + x - 3}{2x^2 - 3x - 5}$$

Vérification de l'atteinte des objectifs (évaluations)	Observations

- Clôture cognitive (récapitulation / synthèse)

- Clôture sociale / travail à faire :

- Remédiations :

A VOUS DE JOUER...

I. Questions de cours

A / Répondre par Vrai ou Faux

1/ La forme générale d'un monôme est : ax^n

2/ La forme canonique du polynôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est : $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right]$

3/ Le discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est : $\Delta = b^2 - 4ac$

B / QCM

Choisir la bonne réponse sans la justifier ; une seule proposition est correcte.

1/ On considère le polynôme $Q(x) = 2x^2 + \frac{31}{3}x - 20$

A/ $Q\left(\frac{3}{2}\right) = 17$; B/ $Q\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{31}{3}$; C/ $Q\left(\frac{3}{2}\right) = -17$; D/ $Q\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

2/ On considère le polynôme $Q(x) = 2x^2 + \frac{31}{3}x - 20$; son discriminant est :

A / $\frac{2401}{9}$; B/ -81 ; C / 100 ; D/ 0

3/ / On considère le polynôme $Q(x) = 2x^2 - x$. La forme canonique de Q est :

A/ $2 \left[\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{8} \right]$; B/ $-2 \left[\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{8} \right]$; C/ $2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16}$; D/ $2 \left[\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right]$

II. EXERCICES

1 - Déterminer l'ensemble de définition de : $f(x) = (x^2 - 4)(x + 2)$; $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

2 - Déterminer l'ensemble de définition et le signe de : a) $f(x) = \frac{2x+3}{x(x+1)}$; b) $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-9}$
 c) $f(x) = \frac{-x^2+3x-2}{x^2+x+1}$; d) $f(x) = \frac{2x-3}{4x^2+7}$; e) $f(x) = \frac{x+2}{x^3-1}$; f) $f(x) = \frac{-1+x}{x^3+x}$

3- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{4x^2-2x+3}{x+2}$.

Ecrire f sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.

4- Soit $f(x) = \frac{2x+13}{(x-1)(x+2)}$. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

5- Déterminer le degré des polynômes suivants : $f(x) = -\frac{5}{2}x + 3$;
 $f(x) = 3x^2 + x - 4$; $f(x) = (x+1)(x-3)(5-x)$; $f(x) = (2x^3 + x^2 - x + 1)^2$

6 - On considère le polynôme A tel que $A(x) = ax^2 + bx + c$.

A quelles conditions $A(x)$ est-il un polynôme du :

a. premier degré

b. second degré

7 - Vérifier que chacun des polynômes suivants est divisible par $(x+2)$ et déterminer le quotient.

$F(x) = x^2 - x - 6$; $F(x) = 7x^2 + 15x + 2$; $F(x) = x^3 - 3x + 2$; $F(x) = x^5 + 2x^4 + x + 2$

8- Soit le polynôme $f(x)$ tel que $f(x) = -4x^3 - 10x^2 + 2x + 12$

a- Montrer que $f(x)$ est divisible par $(x-1)$ et par $(x+2)$.

b - Factoriser $f(x)$.

9- Soit $g(x) = -4x^3 - 6x^2 + 22x + 12$

1- Calculer $g(-3)$ et $g(2)$ puis factoriser $g(x)$.

2- Étudier le signe de $g(x)$.

10- Pour chaque polynôme $p(x)$ déterminer s'il est divisible par $(x+1)$. Si oui, déterminer le quotient $Q(x)$:

1) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$

2) $P(x) = x^3 + x^2 - 1$

11- Soit $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

Existe-t-il un polynôme $Q(x)$ tel que $p(x) = (x-2).Q(x)$?

12- Dans chacun des cas suivants on désigne par f la fonction polynôme.

- a) Vérifier que $f(\alpha) = 0$;
- b) Trouver un polynôme $Q(x)$ tel que $f(x) = (x - \alpha)Q(x)$.
- i- $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$; $\alpha = 2$
 - ii- $f(x) = 3x^3 - 11x^2 + 11x - 2$; $\alpha = 2$
 - iii- $f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 5x - 6$; $\alpha = -3$
 - iv- $f(x) = -x^3 + 5x^2 + 2x - 10$; $\alpha = 5$
 - v- $f(x) = 2x^3 + x^2 + 12$; $\alpha = -2$

13 -Déterminer les réels a et b pour que $p(x)$ soit divisible par l'expression fixée, puis factoriser $p(x)$.

- a- $p(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 4$ par $(x-2)$
- b- $p(x) = x^3 + ax - 8 + b$ par $(x+1)(x-3)$

14 -Soit $p(x) = 8x^3 + 15x^2 - 122x + 15$

- a- Vérifier que 3 est un zéro de $p(x)$.
- b- Factoriser $p(x)$ par $(x-3)$.
- c- Résoudre $p(x) = 0$.
- d- En déduire une factorisation de $p(x)$ puis étudier le signe de $p(x)$.

15-a) Existe-t-il des nombres réels a, b, c et d tels que pour tout nombre réel x :

$$ax^3 + 2x^2 - bx + 7 = cx^2 + 3x + d \quad ?$$

- b) Existe-t-il des nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel,
- $$a(x^2 - 2x - 3) + b(x^2 + 4x - 1) = 0 \quad ?$$

16.a / Déterminer la forme canonique des fonctions polynômes du second degré suivants :

$$f(x) = x^2 - 6x + 11 ; f(x) = x^2 + 5x - 1 ; f(x) = 3x^2 + 6x - 4 ; f(x) = 2x^2 + 2x + 4 ; f(x) = -2x^2 - 6x + 1$$

b/ Calculer le discriminant de chacune des fonctions précédentes

c/ Utiliser le discriminant pour trouver si cela est possible, le zéro de chacune des fonctions précédentes.

17. Etudier le signe de :

$$f(x) = 2x-3 \quad ; \quad f(x) = 2-4x \quad ; \quad f(x) = (x-1)(x+2) \quad ; \quad f(x) = (x+1)(3x-x) \quad ; \quad f(x) = -4(x-3)(x+2)$$

$$f(x) = 5(2x)(2x+1) \quad ; \quad f(x) = 4x^2-x-3 \quad ; \quad f(x) = x^2+2x+1 \quad ; \quad f(x) = x^2-2x-4 \quad ; \quad f(x) = -x^2+3x-2$$

$$f(x) = \frac{6}{x+2} \quad ; \quad f(x) = 1 + \frac{-3}{x+5} \quad ; \quad f(x) = \frac{3x+5}{x-2} \quad ; \quad f(x) = \frac{2x+3}{1+x^2} \quad ; \quad f(x) = \frac{-2(x^2+x-2)}{3+x^2}$$

$$f(m) = (m-3)(m+3) \quad ; \quad f(m) = m^2-4 \quad ; \quad f(m) = \frac{m-2}{(m+3)(m-1)} \quad ; \quad f(m) = \frac{-3m^2+4m-1}{-m^2+6m-11}$$

18- Soit $f(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 7x - 15}{(x-2)(x+3)}$

a. calculer $A(-3)$ avec $A(x) = -x^3 + x^2 + 7x - 15$

b. factoriser $A(x)$.

c. Quel est l'ensemble de définition de f .

d. Etudier le signe de $f(x)$ puis simplifier $f(x)$

e. Montrer qu'il existe 3 réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

19- a) Mettre $g(x) = \frac{2}{x^2-1}$ sous la forme $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

b) Mettre $h(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$ sous la forme $h(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

20-a. Trouver le polynôme du 1^{er} degré $f(x)$ telle que $f(3) = 7$ et $f(-4) = 2$

b. Trouver le polynôme du 2^e degré $A(x)$ telle que : $A(0) = 0$; $A(-2) = 3$ et $A(5) = 1$

Nom et Prénoms :

ETABLISSEMENT :

SECONDES : G2 & G3

EFFECTIF :

FICHE N°

DATE :

DUREE DU CHAPITRE :

NOMBRE DE LEÇONS :

- Mise en situation :

- Révisions :

- Motivation :

CHAPITRE 3 : EQUATIONS ET INEQUATIONS

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours l'apprenant doit être capable :

- résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation ou inéquation du 1^{er} degré.
- Identifier une équation ou inéquation du second degré
- calculer le discriminant puis résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation ou inéquation du second degré.
- calculer la somme et le produit des solutions d'une équation du second degré donnée sans la résoudre.
- déterminer deux nombres réels dont on connaît la somme et le produit,
- résoudre les inéquations avec valeurs absolues se ramenant au premier degré.
- résoudre une équation du 3^{ème} degré connaissant une solution évidente.

- **PRE-REQUIS**

- Cours de mathématiques (algèbre) de la classe de 3^{ème}.

- **MATERIELS**

- Calculatrice
- Matériels didactiques

Méthodes :	Techniques :
Supports :	

Micro - objectifs	Activités enseignant	Activités élèves	Durée

1. Equations dans $\mathbb{R}$.

1.1. Equation : $ax + b = 0$ (ou du premier degré)

Soit à résoudre l'équation $ax + b = 0$

Si $a \neq 0$ alors la solution de cette équation est $S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$

Si $a = 0$ et $b = 0$ alors la solution est $\mathbb{R}$

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors la solution est l'ensemble vide

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- 1) $-2x + 1 = 0$; 2) $3x + 4 = 0$; 3) $0x + 3 = 0$; 4) $-3x - 2 = -5x + 6$
 5) $1 - 2(x - 2) = 5 - 2x$

1.2. Equations produit du type $A(x).B(x) = 0$

Si $A(x)B(x) = 0$ alors $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $x(2 - x) = 0$; b) $(5x - 3)(-2x + 7) = 0$; c) $(1 - 5x)(3x - 7) = 0$
 d) $2(1 - x) = 0$; e) $-3x(1 + x) = 0$

1.3. Equation quotient (*notion de l'ensemble de validité à insister*)

Soient a et b des nombres réels. On a : $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0, b \neq 0$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a/ } \frac{(x-1)(x+2)}{-x+3} &= 0 & ; & & \text{b/ } \frac{(x-1)(x+2)}{(-x+3)(x-1)} &= 0 & ; & & \text{c/ } \frac{x+2}{(x+1)(2x-3)} &= 0 \\ \text{d/ } \frac{x^2-x+4}{2x^2-x-3} &= 2 \end{aligned}$$

1.4. Equations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ (ou équations du second degré)**Exemples**

Résoudre :

a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

b) $x^2 - 16 = 0$

c) $-3x^2 + 7x = 0$

d) $-5x^2 = 7x - 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{ . (rappel)}$$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution ;
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
 $S = \{x ; x''\}$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une racine double $x' = x'' = \frac{-b}{2a}$ $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$

Remarque 1

Pour résoudre une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, on peut utiliser si possible :

- Une forme factorisée de l'expression $ax^2 + bx + c$;
- Une forme canonique de l'expression $ax^2 + bx + c$;
- Le discriminant de l'expression $ax^2 + bx + c$;
- Des identités remarquables de l'expression.

Remarque 2

Résoudre une équation du second degré, c'est trouver les racines ou les solutions ou encore les zéros du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1). $9x^2 - 4 = 0$;

2). $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

3). $4x^2 - 4x + 1 = 0$

- Méthode du discriminant Δ Exemple

Résoudre les équations suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

$$-3x^2 - x + 4 = 0 \quad ; \quad -x^2 + 5x + 6 = 0 \quad ; \quad 4x^2 + 3x - 9 = 0$$

- Méthode de la forme canoniqueExemple

Résoudre les équations suivantes par la méthode de la forme canonique :

$$-3x^2 - x + 4 = 0 \quad ; \quad -x^2 + 5x + 5 = -1 \quad ; \quad 4x^2 + 3x - 9 = 0$$

1.5. Equations de degré 3 connaissant un zéro

La résolution des équations de type $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec $a \neq 0$ passe si possible par la factorisation du polynôme. Deux méthodes sont à retenir pour la résolution de ces équations type :

- Méthode des coefficients indéterminés
- Méthode de la division euclidienne

Remarque

Pour utiliser l'une des deux méthodes, on fera usage d'un zéro ou d'une racine éventuelle ou encore d'une racine évidente ;

Exemple

On donne $E(x) = -3x^3 - x^2 + 3x + 1$

- 1- Calculer $E(-1)$. Que peux-tu conclure ?
- 2- Mettre $E(x)$ sous la forme $E(x) = (x + 1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré 2 :
 - a. de la division euclidienne.
 - b. des coefficients indéterminés.
- 3- Donner la factorisation complète de $E(x)$.
- 4- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $E(x) = 0$.

2. Inéquations dans $\mathbb{R}$ 2.1. Inéquation du premier degré à une inconnue2.1.1. Présentation

C'est toute inéquation de la forme $ax + b < 0$ ou $ax + b \leq 0$ ou $ax + b > 0$ ou encore $ax + b \geq 0$, avec a, b des réels et $a \neq 0$.

2.1.2. Dédution des solutions à partir du signe de $ax + b$

On pose d'abord $ax + b = 0$ qui donne $x = \frac{-b}{a}$. On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

Par lecture du tableau de signe, on déduit la solution notée souvent S.

Exemple

Résoudre de deux façons différentes, les inéquations suivantes :

$$-3x - 5 \leq 0 \quad \text{et} \quad 4x + 1 > 0$$

2.2. Inéquation produit

Exemple

Résoudre les inéquations suivantes : $x \in \mathbb{R}$, $(-x + 4)(2x + 4) > 0$;
 $2x(x^2 + 2) < 0$; $(5x^2 - 3x - 2)(4x^2 - 3x + 2) \leq 0$

2.3. Inéquation rationnelle : $\frac{A}{B} \begin{pmatrix} < \\ > \\ \leq \\ \geq \end{pmatrix} 0$

Résoudre les inéquations suivantes : $\frac{-3x-4}{x-1} > 0$; $\frac{x+6}{2x-3} \leq 1$; $\frac{(2x+1)(-x+2)}{(3x+3)(x+4)} \leq 0$;
 $\frac{(2x+1)(-x+2)}{(3x+3)(x+4)} > 0$

2.4. Inéquation avec valeur absolue $|f(x)| \leq |g(x)|$ ou $|f(x)| \geq |g(x)|$

$$(d^0 f \leq 1 \text{ et } d^0 g \leq 1)$$

$$|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \leq g^2(x)$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \leq 0$$

Remarque

L'inéquation $|f(x)| \geq |g(x)|$ se résout aussi de la même manière.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : a/ $|2x + 3| \leq |-x + 1|$; b/ $|x - 3| > |x + 1|$.

Vérification de l'atteinte des objectifs (évaluations)	Observations

- Clôture cognitive (récapitulation / synthèse) :
- Clôture sociale / travail à faire :
- Remédiations :

A VOUS DE JOUER ...

I. Questions de cours

A/ Répondre par Vrai ou Faux

1/ L'équation $-2x^2 - 2x + 4 = 0$ a pour solutions -2 et 1.

2/ L'ensemble solution de $-2x^2 - 2x + 4 \leq 0$ est : $[-2 ; 1]$

3/ L'ensemble de validité de $\frac{3-x}{-2x^2-2x+4} = 0$ est : $E_V =] - \infty ; -1[\cup] - 1 ; 2[\cup] 2 ; +\infty[$

B/ QCM

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1/ L'équation $-2x^2 - 2x + 4 = 0$ a pour solutions :

A. -1 et 1 B. 1 et -2 C. 1 et 4 D. 0 et 3

2/ L'équation $-2x^2 - 2x + 4 = 0$ a pour discriminant :

A. 36 ; B. 20 C. 26 D. -36

3/ Le nombre des racines de l'équation $2x^2 - 2x + 4 = 0$ est :

A. 0 B. 1 C. 2 D. une infinité

II. EXERCICES

Exercice 1 : Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) a) $-2x^2 + 3x - 1 = 0$

b) $-2x^2 + 3x - 1 > 0$

2) a) $-3x^2 + 4x + 7 = 0$

b) $-3x^2 + 4x + 7 \leq 0$

3) a) $x^2 + x + 3 = 0$

b) $x^2 + x + 3 > 0$

4) a) $4x^2 - 28x + 49 = 0$

b) $4x^2 - 28x + 49 > 0$

Exercice 2

Résoudre dans IIR les équations suivantes en précisant chaque ensemble de validité

a/ $x \in IR ; -2x^2 + 3x = 0$; b/ $x \in IR ; -2x^2 + 3x + 5 = 0$; c/ $x \in IR ; x^3 - 3x^2 = 0$

d/ $x \in IN ; x^3 - 3x^2 = 0$; e/ $x \in IR ; (2x^2 - 1)^2 = (x - 3)^2$; f/ $x \in IR ; |2x - 1| = -1$

g/ $x \in IR ; |2x - 1| = 3$; h/ $x \in IR ; |-x + 2| = 5$; i/ $x \in IR ; |-x + 2| = |3x + 1|$

Exercice 3 : Résoudre :

$$1) x \in \mathbb{R} ; \frac{x(x+1)}{x-1} = 2x \quad 2) x \in \mathbb{R} ; \frac{3x^2-5x+2}{x+1} = 0 \quad 3) x \in \mathbb{R} ; \frac{x(x+1)}{x-1} \leq 2x$$

Exercice 4

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 8x - 64$$

- 1) Calculer $P(8)$. Que peut-on conclure ?
- 2) a - Mettre $P(x)$ sous la forme $P(x) = (x - 8)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme du second degré.
 b - Factoriser $Q(x)$ puis $P(x)$.
 c - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- 3) a- Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .
 b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$.
- 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'in
- 5) équation $\frac{P(x)}{x+1} \leq 0$.

Exercice 5 : Etudier le signe de :

$$a) f(x) = 2x - 3 ; b) g(x) = -2x^2 + 3x - 1 ; c) h(x) = -x^2 + x - 7 ; d) p(x) = 4x^2 - 28x + 49$$

Nom et Prénoms :

FICHE N°

ETABLISSEMENT :

DATE :

SECONDES : G2 & G3

DUREE DU CHAPITRE :

EFFECTIF :

NOMBRE DE LEÇONS :

- Mise en situation :

- Révisions :

- Motivation :

CHAPITRE 4 : SYSTEMES LINEAIRES ET PROGRAMMATION LINEAIRE

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, chaque apprenant, doit être capable, en exploitant les acquis de ce cours, de :

- résoudre des systèmes d'équations à deux inconnues suivant la méthode exigée ;
- résoudre un système de plus de deux équations à plus de deux inconnues de manière guidée ;
- résoudre graphiquement une inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R}^2$;
- résoudre tout système d'inéquations à deux inconnues en suivant les propriétés apprises ;
- déterminer les intrants qui permettront à l'entrepreneur de maximiser les bénéfices ou de minimiser les coûts de production en tenant compte des contraintes de l'entreprise.

- **PRE-REQUIS**

- Cours de mathématiques (algèbre) de la classe de 3^{ème}.

- **MATERIELS**

- Calculatrice
- Matériels didactiques

Méthodes :	Techniques :
Supports :	

Micro - objectifs	Activités enseignant	Activités élèves	Durée

1. Systèmes linéaires

1.1. Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

1.1.1. Equation du type $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $ax + by + c = 0$

Il existe deux méthodes pour résoudre une telle équation :

- la méthode algébrique

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-by - c}{a}, \quad a \neq 0. \text{ D'où l'ensemble solution est } S = \left\{ \left(\frac{-by - c}{a}; y \right), y \in \mathbb{R} \right\} \text{ ou } S = \left\{ \left(x; \frac{-ax - c}{b} \right), x \in \mathbb{R} \right\}$$

- la méthode graphique

Elle consiste à représenter la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans le plan muni d'un repère.

Exemple

Résoudre par les méthodes algébrique et graphique l'équation suivante : $-2x + y + 3 = 0$, où x et y sont des nombres réels.

1.1.2. Système deux équations linéaires à deux inconnues

1.1.2.1. Présentation (forme générale)

On appelle **système d'équations du premier degré à deux inconnues x et y** , tout système se présentant sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, a', b' sont des nombres réels et, x et y des inconnues.

1.1.2.2. Méthodes de résolution

- Résolution par substitution

On tire une inconnue dans l'une des équations et on la remplace dans l'autre.

On résout ainsi l'équation à une seule inconnue obtenue. Puis on détermine l'autre inconnue.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système suivant
$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

- Résolution par addition ou combinaison

On effectue une combinaison linéaire des deux équations en éliminant l'une des inconnues puis une combinaison linéaire éliminant l'autre inconnue.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système suivant
$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

- Résolution par comparaison

On tire la même inconnue dans les deux équations puis on les égale pour trouver x et y ou y et x .

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système suivant
$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

- Résolution graphique

On pose (D1) : $ax + by + c = 0$ puis (D2) : $a'x + b'y + c' = 0$. On représente graphiquement les droites (D1) et (D2).

- La solution est le point d'intersection des deux droites (si les deux droites se coupent);
- La solution est l'ensemble vide (si les deux droites sont parallèles);
- La solution est l'une des droites si les deux droites sont confondues.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les systèmes suivants : $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$.

- Résolution par la méthode de déterminant ou de CRAMER

Elle consiste à calculer les trois déterminants :

- le déterminant du système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ noté $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$
- le déterminant lié à x noté $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$
- le déterminant lié à y noté $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

- Si $D \neq 0$ alors $x = \frac{D_x}{D} = x_0$ et $y = \frac{D_y}{D} = y_0$ donc $S = \{ (x_0 ; y_0) \}$
- Si $D = 0$ et $D_x \neq 0$ (ou $D_y \neq 0$) alors $S = \emptyset$

- si $D = 0$, $D_x = 0$ et $D_y = 0$ alors le système admet une infinité de solutions donnée par l'une des équations $S = \left\{ \left(\frac{-by-c}{a} ; y \right), y \in \mathbb{R} \right\}$.

Remarque

- Si $D \neq 0$ alors le système est dit de CRAMER et admet une unique solution.
- $D = \det(S)$; $D_x = \det(x)$; $D_y = \det(y)$.

Exemple

1. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les systèmes suivants a) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -x + 2y = \frac{1}{5} \\ 3x - 6y = 2 \end{cases}$;
- c) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$
2. On donne (S) $\begin{cases} x + my = 4 \\ x + y = 7 \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$
- Calculer $\det(S)$; $\det(x)$; $\det(y)$.
 - Pour quelles valeurs de m , le système admet une solution unique ?
 - Pour quelles valeurs de m , le système admet une infinité de solutions ?
 - Pour quelles valeurs de m , le système n'admet pas de solutions ?

1.1.3 -Système de trois équations linéaires à trois inconnues**1.1.3.1. Présentation**

C'est le système de type $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$ où

$a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$ des réels et x, y, z sont des inconnues.

1.1.3.2- Méthodes de résolution**- Méthode de substitution**

Elle consiste à tirer l'une des inconnues et à la remplacer dans les deux autres équations restantes. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues que l'on sait résoudre.

Exemple

Résoudre le système suivant $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = -7 \end{cases}$ Rép: $S = \{(-3; 4; 2)\}$

- Méthode de GAUSS (ou de pivot de GAUSS)

- On fixe la ligne L_1 (on s'assure que toutes les inconnues de cette ligne soient non nulles) et on élimine x dans les lignes L_2 et L_3 par rapport à L_1 . Puis on obtient de nouvelles lignes L_2' et L_3' .
- On fixe la ligne L_2' et on élimine y dans L_3' par rapport à L_2' . Puis on obtient une nouvelle ligne L_3'' .

Ainsi le système final prend la forme d'un triangle. On dit qu'on a triangularisé ou échelonné ce système.

Exemple

$$\text{Résoudre le système suivant } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = -7 \end{cases} \quad \text{Rép: } S = \{(-3; 4; 2)\}$$

1.2. Résolution graphique d'une inéquation linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Elle se résout graphiquement à partir du tracé de la droite (D) d'équation : $ax + by + c = 0$ et on procède par le régionnement du plan.

Exemple

Résoudre graphiquement les inéquations suivantes : $-x + 2y - 1 > 0$; $2x - y + 3 \leq 0$

1.3. Résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires à deux inconnues

Soit le système (S) de la forme $\begin{cases} ax + by + c \geq 0 \\ a'x + b'y + c' \leq 0 \end{cases}$

Pour résoudre un tel système :

- On trace d'abord les droites (D1) et (D2) d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$;
- Chacune des droites partage le plan en deux demi-plans ;
- On choisit un point quelconque dans l'un des demi-plans obtenus et on remplace ses coordonnées dans l'inéquation donnée ;
- On hachure la partie non-solution ;
- La solution S est la partie du plan non hachurée.

Exemple

Résoudre graphiquement les inéquations et systèmes suivants :

$$1- \begin{cases} -x + y \leq 2 \\ 2x + y \leq 4 \\ x + 2y \geq -2 \end{cases}$$

$$2- \begin{cases} 2y + 3x \leq 14 \\ y - x \leq 2 \\ y + 6x \leq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

2. Programmation linéaire

On appelle programme linéaire tout problème de maximisation ou de minimisation d'une fonction linéaire par rapport à ses variables sous des contraintes linéaires ou de signe. Elle comprend deux parties :

- La *fonction économique* (fonction objectif)

Exemples de fonction à maximiser : la production, le bénéfice, le profit, le solde, la recette, la vente, le chiffre d'affaires, le revenu, la rente...

Exemples de fonction à minimiser : les coûts, les dépenses, les achats, la perte, le salaire, le temps...

- Les contraintes : ce sont les inégalités traduisant par exemple les disponibilités.

- **Etapes de la résolution**

- On représente graphiquement le système d'inéquations (domaine des contraintes),
- On trace la fonction économique (en posant fonction économique égale à 0)
- On déplace la droite fonction économique parallèlement à elle – même sur le domaine des contraintes,
- Dans le cas de maximisation, le dernier point obtenu est le point maximum,
- Dans le cas de minimisation, le premier point obtenu est le point minimum.

2.1. **Problème de maximisation**

Exemple

Un atelier de confection fabrique en série deux modèles de chemises de luxe :

- Une chemise du premier modèle nécessite 1 m de tissu ; 4 heures de travail et rapporte 24 F
- Une chemise du deuxième modèle exige (nécessite) 1,5 m de tissu ; 2 heures de travail et rapporte 16 F. On suppose que l'atelier dispose quotidiennement de 150 m de tissu et de 400 heures de travail et qui peut vendre toute sa fabrication. On cherche à calculer le nombre de chemises de chaque modèle qu'il faut fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal.

1. Compléter à l'aide des données de l'énoncé le tableau suivant :

	Mètre de tissu	Heures de travail	Bénéfice
1 ^{er} modèle			
2 ^e modèle			
Maximum			

2. On note x et y les nombres respectifs de chemises du premier modèle et du deuxième modèle fabriqués en un jour (quotidiennement).
 - a) De quel signe sont les nombres x et y ? Justifier.
 - b) Déterminer le nombre total de mètres de tissu utilisé en fonction de x et y .
 - c) Par quelle inéquation traduit on le fait que l'atelier dispose de 150 m de tissu par jour ?
 - d) Déterminer le nombre total d'heures de travail utilisées en fonction de x et y .
 - e) Par quelle inéquation traduit on le fait que l'atelier dispose de 400 heures de travail par jour ?
3. Donner l'expression du bénéfice total en fonction de x et y .

4. a) Résoudre graphiquement le système (S)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ 2x + y \leq 200 \end{cases}$$

- b) Montrer que le système des contraintes (S_1) du problème est équivalent au système (S).
- c) Déterminer graphiquement le nombre de chemises de chaque modèle permettant de maximiser le bénéfice.
5. Déterminer le bénéfice maximal.

2.2. Problème de minimisation

Exemple

L'office du tourisme d'une ville décide de renouveler les mobiliers d'un jardin public. Pour cela il est nécessaire d'acheter au moins 600 tables de pique-nique, 1200 bancs publics et 900 poubelles. Les deux fournisseurs contactés proposent chacun un type de lot

	Tables	Bancs	Poubelles	Coût d'un lot en F
Lot A	10	30	30	200 000
Lot B	20	20	10	100 000

On désigne par x et y les nombres respectifs de lots A et de lots B à acheter pour que la dépense soit minimale.

- De quel signe sont les nombres x et y ? Justifier.
- Déterminer le nombre total de tables achetées en fonction de x et y .
 - Par quelle inéquation traduit – on le fait que l'office doit acheter au moins 600 tables ?
 - Déterminer le nombre total de bancs achetés en fonction de x et y .
 - Par quelle inéquation traduit – on le fait que l'office doit acheter au moins 1200 bancs ?
 - Déterminer le nombre total de poubelles achetées en fonction de x et y .
 - Par quelle inéquation traduit – on le fait que l'office doit acheter au moins 900 poubelles ?
- Montrer que le système des contraintes est équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y \geq 60 \\ 3x + 2y \geq 120 \\ 3x + y \geq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$
- Exprimer en fonction de x et y la dépense Z occasionnée par l'achat de x lots A et y lots B.
- Déterminer graphiquement le nombre de lots de chaque type à acheter pour obtenir une dépense minimale Z_m .
 - Calculer la dépense minimale Z_m

REMARQUES

- Les expressions **a en stock, dispose, ne dispose que, ...sont limités à, au plus, ne peut offrir que, au maximum, sont (est) disponibles, à la limite de, ne peut produire que, ne ...plus de, ne pas dépasser,** expriment le maximum et le symbole à utiliser est $\leq$
- Les expressions **au moins, au minimum, ne ...moins de, peut dépasser, excède, ...** expriment le minimum et le symbole à utiliser est $\geq$

Vérification de l'atteinte des objectifs (évaluations)	Observations

- Clôture cognitive (récapitulation / synthèse)
- Clôture sociale / travail à faire :
- Remédiations :

A VOUS DE JOUER ...

I. Questions de cours

A/ Répondre par Vrai ou Faux

- 1/ La méthode de Cramer permet de résoudre une équation de la forme $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$;
 $ax + by + c = 0$
- 2/ La méthode de Cramer permet de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues

B/ QCM

Choisir la bonne réponse sans la justifier ; une seule proposition est correcte.

- 3/ Le système d'équations linéaires $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 8 \end{cases}$; a pour solution :

A/ $\mathbb{R}$; B/ $\mathbb{R}^2$; C/ $\{9; -1\}$; D/ $\{(9; -1)\}$

- 4/ Le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x - 2y = 20 \end{cases}$; a pour solution :

A/ $\mathbb{R}$; B/ $\mathbb{R}^2$; C/ $\{(5; 0)\}$; D/ $\{(x ; 2x - 10); x \in \mathbb{R}\}$

- 5/ Le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x + y - 3z = 10 \\ -y + z = 8 \\ 3z = 12 \end{cases}$

A / $\{13; -4; 4\}$; B / $\mathbb{R}$; C/ $\mathbb{R}^2$; D / $\{(13; -4; 4)\}$

II. EXERCICES

A/ SYSTEMES D'EQUATIONS

Résoudre :

$$1) \begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ 6x + 6y = -8 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 2y = -9 \\ -7x + y = 10 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 2x + \frac{3}{2}y = 3 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} y - 3x = 2 \\ 9x - 3y = -6 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 3x + 2y - 2 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 4x - 2y + 7z = 20 \\ 3x - y + 3z = 10 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{cases} \quad 7) \begin{cases} 2y - 3x = 4 \\ 2x + y = -3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ 2x + y - 2z + 6 = 0 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \\ 5x - 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} -2x + y + 4z = 7 \\ 4x - 5y - 6z = -5 \\ 3x - 4y + z = 13 \end{cases} \quad (S = \{(2; -1; 3)\}) ; \quad 11) \begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -x + 2y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases} \quad (S = \{(1; 2; 3)\})$$

$$12) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = -1 \\ x + y = -2 \end{cases} \quad S = \{(-1; -1)\} ; \quad 13) \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 1 \\ x + z = -8 \end{cases} \quad S = \{(-2; 7; -6)\}.$$

B/ SYSTEMES D'INEQUATIONS

$$1) \begin{cases} x - y \geq -2 \\ x - y < 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x + y + 2 \geq 0 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x + 5 \geq 0 \\ 2x - 8 < 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y - 3x \leq 1 \\ 2y + 3x \leq 16 \\ 3x + 7y \geq -21 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x \geq 200 \\ y \geq 300 \\ x + y \geq 1000 \\ 2x + y \leq 2100 \\ 5x + 4y \leq 6600 \end{cases}$$

C/ PROGRAMMATION LINEAIREExercice 1

Un atelier produit deux types de pièces, A et B, à l'aide de deux machines M_1 et M_2 . Chaque pièce en cours de fabrication doit passer successivement sur les deux machines dans un ordre indifférent.

Durée de passage d'une pièce de type A

- dans la machine M_1 : 30 minutes

- dans la machine M_2 : 40 minutes
Bénéfice sur une pièce de type A : 400F ;

Durée de passage d'une pièce de type B

- dans la machine M_1 : 20 minutes
- dans la machines M_2 : 10 minutes
Bénéfice sur une pièce de type B : 200F

La machines M_1 est disponible 3000 minutes par mois, la machine M_2 2000 minutes.
Soient x le nombre de pièces de type A et y le nombre de pièces de type B fabriquées par mois.

1. De quel signe sont les nombres x et y ? Justifier.
2. a) Déterminer la durée totale de passage des pièces fabriquées par mois dans la machine M_1 en fonction de x et y .
b) Par quelle inéquation traduit - on le fait que la machine M_1 est disponible 3000 minutes par mois ?
c) Déterminer la durée totale de passage des pièces fabriquées par mois dans la machine M_2 en fonction de x et y .
d) Par quelle inéquation traduit - on le fait que la machine M_2 est disponible 2000 minutes par mois ?

3. Montrer que le système des contraintes est équivalent à
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 300 \\ 4x + y \leq 200 \end{cases}$$

4. a) Tracer les droites $(D_1): x = 0$; $(D_2): y = 0$; $(D_3): 3x + 2y = 300$;
 $(D_4): 4x + y = 200$.

b) En déduire la région solution du système de contraintes précédent.

5. On note par F la fonction bénéfice. Ecrire F en fonction de x et y .

6. Déterminer graphiquement le nombre de pièces de type A et de pièces de type B que l'on doit fabriquer par mois pour avoir un bénéfice maximal.

Exercice 2

Un artisan fabrique deux types d'objets A et B. La réalisation d'un objet A demande 30f de matières premières et 125f de main d'œuvre ; celle de l'objet B demande 70f de matières premières et 75f de main d'œuvre. Pour une bonne gestion de l'entreprise, les dépenses journalières en matières premières et en main d'œuvre ne doivent pas dépasser respectivement 560f et 1250f. Les profits réalisés sont de 1250f pour l'objet A et 45f pour l'objet B.

On désigne par x le nombre d'objets A et par y le nombre d'objets B fabriqués par jour.

1. De quel signe sont les nombres x et y ? Justifier.
2. a) Déterminer, en fonction de x et y , la dépense totale journalière en matières premières.
b) Par quelle inéquation traduit - on le fait que les dépenses journalières en matières premières ne doivent pas dépasser 560 F ?

- c) Déterminer, en fonction de x et y , la dépense totale journalière en main d'œuvre.
 d) Par quelle inéquation traduit - on le fait que les dépenses journalières en main d'œuvre ne doivent pas dépasser 1250 F ?

3. a) Montrer que le système des contraintes du problème correspond à

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 30x + 70y \leq 560 \\ 125x + 75y \leq 1250 \end{cases}$$

b) Représenter graphiquement le système des contraintes.

4.a) Exprimer le profit journalier P réalisé en fonction de x et y .

b) Déterminer le nombre d'objets A et B que l'entreprise doit produire pour réaliser un profit maximum.

Exercice 3

Un collège commande à un libraire au moins 1600 feutres, 1800 stylos et 1550 crayons. Le libraire propose deux sortes de lots (A et B) définis comme :

	Feutres	Stylos	Crayons
Lot A	2	1	1
Lot B	1	3	2

On notera x le nombre de lots A et y celui de lots B.

1. De quel signe sont les nombres x et y ?

2. a) Déterminer le nombre total de feutres en fonction de x et y .

b) Par quelle inéquation traduit - on le fait que le collège commande au moins 1600 feutres ?

c) Déterminer le nombre total de stylos en fonction de x et y .

d) Par quelle inéquation traduit - on le fait que le collège commande au moins 1800 stylos ?

e) Déterminer le nombre total de crayons en fonction de x et y .

f) Par quelle inéquation traduit - on le fait que le collège commande au moins 1550 crayons ?

3. a) Montrer que le système des contraintes est

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 1600 \\ x + 3y \geq 1800 \\ x + 2y \geq 1550 \end{cases}$$

b) Représenter graphiquement ces contraintes.

4. Le libraire vend 800f chacun des lots A et B. Exprimer en fonction de x et y le prix P à payer par le collège.

5. Déterminer graphiquement le prix minimal à payer par le collège.

Nom et Prénoms :
 ETABLISSEMENT :
 SECONDES : G2 & G3
 EFFECTIF :

FICHE N°
 DATE :
 DUREE DU CHAPITRE :
 NOMBRE DE LEÇONS :

- Mise en situation :

- Révisions :

- Motivation :

CHAPITRE 5 : STATISTIQUE A UNE VARIABLE
--

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours ; l'apprenant doit être capable de :

- utiliser convenablement les concepts statistiques
- représenter graphiquement les effectifs ou les fréquences d'un caractère qualitatif, quantitatif discret ou continu
- représenter les courbes cumulatives
- réaliser le dépouillement à partir d'une série des données collectées.

• PRE-REQUIS

- Cours de statistique de la classe de 3^{ème}.

• MATERIELS

- Calculatrice
- Matériels didactiques

Méthodes :	Techniques :
Supports :	

Micro - objectifs	Activités enseignant	Activités élèves	Durée

Introduction

La statistique est une science qui étudie, élabore les méthodes de collectes, de traitement et d'analyse quantitative et qualitative des données pour la prise de décision. Les résultats de la statistique sont appelés des « *statistiques* ». Les statistiques désignent aussi les données chiffrées ou autres renseignements en grand nombre sur lesquels on applique la statistique.

1. Le vocabulaire statistique ou la terminologie de base

1.1. La population statistique ou univers statistique ou la collectivité statistique ou encore l'ensemble statistique

C'est l'ensemble sur lequel porte l'étude statistique.

Exemple :

- ✓ L'ensemble des élèves d'un lycée technique.
- ✓ L'ensemble des salariés d'une entreprise.
- ✓ L'ensemble des entreprises qui exercent dans un secteur d'activité.

1.2. Unité statistique ou Individu statistique

C'est un élément de la population statistique.

Exemple : Un élève du lycée technique est un individu.

1.3. Le Caractère Statistique

C'est une propriété qui décrit l'unité statistique.

Le caractère peut être qualitatif ou quantitatif.

1.3.1. Caractère quantitatif

C'est un caractère mesurable ou quantifiable.

Exemple : L'âge, le poids, la taille, la note de mathématiques générales, le salaire, le nombre d'enfants ; le temps ; ...

1.3.2. Caractère qualitatif

C'est un caractère non mesurable.

Exemple : Le sexe, la religion, la situation matrimoniale, la couleur de la peau ; ...

1.4. Modalité statistique

C'est la valeur prise par chaque caractère pour un individu donné.

Exemple : le sexe a deux modalités : masculin, féminin.

1.5. Variable statistique

Ce sont les valeurs qu'on attribue aux caractères quantitatifs.

Exemple : La taille, le poids, l'âge ; ...

1.5.1. Variables discrètes ou discontinues

Elles ont des modalités sous forme de points (ou sous forme de valeurs isolées).

Exemple : 1,50 ; 1,60 ; ...

1.5.2. Variables continues

Elles ont des modalités sous forme d'intervalle.

1.6. Classe

C'est un groupe d'individus pour lequel le caractère prend la même valeur.

Les classes sont des intervalles de la forme $a - b$ ou bien $[a ; b[$ ou encore $a \leq x < b$ en statistique.

- Le centre de la classe $[a ; b[$ est noté C_i ou x_i ; $C_i = \frac{a+b}{2}$.
- Amplitude de la classe $[a ; b[$ est notée k_i ; $k_i = b - a$.
- Densité (d_i) d'une classe est le quotient de l'effectif de la classe sur l'amplitude de cette classe.

$$d_i = \frac{n_i}{k_i}$$

1.7. Effectif ou la taille de la population

C'est le nombre noté n_i d'individus d'une classe ou d'une modalité. Il est noté n_i .

L'effectif total n ou N est le nombre total d'individus.

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_p = \sum_{i=1}^p n_i \quad \text{où}$$

$$\sum_{i=1}^p n_i = \text{somme des } n_i, i \text{ allant de } 1 \text{ à } p.$$

- L'Effectif cumulé, noté N_i , est obtenu en additionnant successivement les effectifs de toutes les modalités ou de toutes les classes. On distingue :
 - ✓ le cumul croissant ou ascendant noté $N_i \nearrow$ (ou ECC) et
 - ✓ le cumul décroissant ou descendant noté $N_i \searrow$ (ou ECD).

Exemple : Répartition d'un groupe d'élèves du LETP - Mango selon l'âge.

Age	16	17	18	19	20	21	22	Total
Nombre d'élèves	2	1	5	6	3	2	1	20

Compléter le tableau par les ECC (ou $N_i \nearrow$) et les ECD (ou $N_i \searrow$).

1.8. Fréquence

C'est le quotient de l'effectif d'une modalité donnée (ou d'une classe donnée) par l'effectif total. Elle est notée f_i et est exprimée en valeur ou en % .

- Exprimée en valeur, $f_i = \frac{n_i}{n}$ avec $0 \leq f_i \leq 1$
- Exprimée en pourcentage, $f_i (\%) = \frac{n_i}{n} \times 100$ avec $0 \leq f_i (\%) \leq 100$

La Fréquence totale, notée f ou F est $f = \sum_{i=1}^k f_i$.

- ✓ si la fréquence est exprimée en valeur alors $f = 1$
- ✓ si la fréquence est exprimée en % alors $f = 100$

La Fréquence cumulée notée F_i est obtenue en additionnant successivement les fréquences correspondant à toutes les modalités ou à toutes les classes. On distingue $F_i \nearrow$; $F_i \searrow$

$$F_i \nearrow (\%) = \frac{N_i \nearrow}{n} \times 100$$

1.9. Distribution statistique ou série statistique

C'est un tableau de données statistiques regroupant le caractère, ses modalités ou ses classes et ses effectifs (ou ses fréquences).

1.10. Echantillon

C'est un sous ensemble représentatif de la population statistique.

Exemple : Un groupe d'élèves du LETP – L.

1.11. Recensement

C'est une enquête sur toute la population concernée.

Exemple : Répartition d'un groupe d'élèves du LETP – L selon l'âge.

Age	16	17	18	19	20	21	22	Total
Nombre d'élèves	2	1	5	6	3	2	1	20

- 1- Préciser la population étudiée, l'unité statistique, le caractère considéré et sa nature.
- 2- Déterminer la proportion d'élèves ayant 20 ans.
- 3- Déterminer le nombre d'élèves ayant au moins 20 ans.
- 4- Déterminer le nombre d'élèves ayant au plus 18 ans.
- 5- Calculer les fréquences de cette série (en pourcentage).
- 6- Déterminer la proportion d'élèves ayant moins de 18 ans.

2. Enquête et dépouillement statistique**2.1. Enquête statistique**

C'est une opération technique qui consiste à collecter les informations ou données statistiques.

Elle se fait par le biais de questionnaire. Il existe 2 types d'enquête :

- Le **sondage** ou l'**échantillonnage** ou encore l'**enquête partielle** qui est l'enquête sur une partie représentative de la population ;
- Le **recensement** ou l'**enquête exhaustive** est l'enquête sur toute la population concernée. Ici on collecte les informations recherchées auprès de tous les individus de la population.

2.2. Dépouillement statistique**2.2.1. Dépouillement d'un caractère qualitatif**

Exemple : Répartition des élèves d'une classe de seconde G_2 selon le sexe :

H F F F H H F F H F F F H H H F F F F F F H avec F = femme ; H = homme.

Dépouiller ces résultats dans un tableau statistique.

2.2.2. Dépouillement d'un caractère quantitatif discret

Exemple

L'âge d'un groupe d'élèves d'une classe de seconde G2 à l'IT NDE est donné comme suit :

19	20	20	17	21
20	17	21	19	22
19	20	20	18	20

Dépouiller ces résultats dans un tableau statistique.

3. Tableaux statistiques et représentations graphiques

La collecte des données ne constitue qu'une étape préliminaire de l'analyse statistique. Sur la base des données collectées, l'on produit des tableaux et graphiques qui permettent aux gestionnaires de mieux visualiser les informations et de préparer à la prise de décision.

3.1. Tableaux statistiques

Ce sont des tableaux dans lesquels sont consignées les informations statistiques permettant de décrire un phénomène concret en un lieu précis et à une date bien déterminée.

Exemple : Confère tableau de répartition des élèves de LETP - L selon l'âge (exemple 1).

3.2. Représentations graphiques

Les représentations graphiques permettent généralement de visualiser la structure de la répartition des données d'une série statistique. Elles diffèrent selon ce que l'on désire montrer et selon la nature des variables (qualitative, quantitative discrète ou continue).

3.2.1. Cas d'un caractère qualitatif

Pour représenter graphiquement un caractère qualitatif, on utilise fréquemment des diagrammes circulaire (ou à secteurs), semi-circulaire, à bandes (ou en tuyaux d'orgue).

Exemple :

Répartition de 20 élèves d'une classe de seconde selon la profession de leurs pères.

Profession	A	B	C	D	Total
n_i	3	8	7	2	20

Représenter par :

- le diagramme à bandes ou en tuyaux d'orgue.
- le diagramme circulaire.
- le diagramme semi-circulaire.

3.2.2. Cas d'un caractère quantitatif discret

Pour représenter graphiquement un caractère quantitatif discret, on utilise fréquemment un diagramme en bâtons.

Exemple : Répartition d'un groupe d'élèves de la seconde G2 selon l'âge.

Age	16	17	18	19	20	21	22	Total
n_i	2	1	5	6	3	2	1	20

Représenter graphiquement le diagramme en bâton.

Vérification de l'atteinte des objectifs (évaluations)	Observations

- Clôture cognitive (récapitulation / synthèse)
- Clôture sociale / travail à faire :
- Remédiations :

A VOUS DE JOUER ...

I/ Questions de cours

A/ Répondre par Vrai ou Faux.

- 1/ Une variable statistique est dite quantitative lorsque ses modalités ne sont pas mesurables.
- 2/ Une variable statistique est dite qualitative lorsque ses modalités ne sont pas mesurables.
- 3/ L'effectif de la population est supérieur à l'effectif de l'échantillon.
- 4/ L'effectif de la population est inférieur à l'effectif de l'échantillon.
- 5/ Le diagramme circulaire peut être représenté en utilisant les fréquences ou les effectifs simples.
- 6/ La somme en pourcentage des fréquences simples est inférieure à 100.
- 7/ La somme en pourcentage des fréquences simples est supérieure à 100.
- 8/ La somme en pourcentage des fréquences simples est égale à 100.

B/

- 1/ Définis les termes statistiques suivants : Fréquence ; Population statistique ; Recensement ; Echantillon ; Caractère statistique ; Individu statistique ; Modalité statistique.

- 2/ Donner la nature des caractères suivants :

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| a/ l'état matrimonial ; | b/ le salaire mensuel ; |
| c/ le chiffre d'affaires ; | d/ la taille |
| e/ la tension artérielle ; | f/ la couleur des yeux ; |
| g/ la marque de véhicule ; | h/ le poids ; |
| i/ la durée de vie ; | j/ la catégorie socioprofessionnelle. |
| k/ la profession d'une personne ; | |

- 3/ A quand remonte le dernier Recensement Général de la Population au TOGO ?

C/ QCM

Choisis la réponse sans justifier ; une seule proposition est correcte.

On considère le tableau statistique suivant :

x_i	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
n_i	2	3	4	6	1	1	2	2	3	4

- 1/ Le nombre total des individus de cette série est :

A/ 18 ; B/ 28 ; C/ 12 ; D/ 21

- 2/ La fréquence de C est :

A/ 14,28 % ; B/ 28,14% ; C/ 50,28% ; D / 100%

II/ Exercices

Exercice 1 :

Dans un centre de transfusion sanguine, les résultats prélevés auprès de 40 patients selon leur groupe sont les suivants :

A	A	A	AB	B	A	B	AB
O	O	A	AB	O	A	O	A
AB	B	O	O	B	B	O	A
AB	AB	AB	A	A	A	A	A
B	A	B	O	AB	AB	B	AB

- 1- Faire le dépouillement de ces résultats dans un tableau statistique.
- 2- Calculer la fréquence pour chaque modalité.
- 3- Dessiner le diagramme à bande (diagramme à colonnes ou à tuyaux d'orgues).
- 4- Dessiner le diagramme circulaire.

Exercice 2 : Les résultats consignés dans le tableau ci-dessous représentent la répartition de 1000 individus selon le sport pratiqué au sein d'un club sportif.

Ces résultats sont obtenus à la suite d'une enquête statistique effectuée auprès de ces individus.

Activités sportives	Marche	Saut en hauteur	Lancer de poids	Natation	Escrime
Fréquence simple en %	15	f_2	30	40	10

- 1- Définir les mots soulignés.
- 2- Donner la proportion f_2 des individus qui pratiquent le saut en hauteur.
- 3- Faire le diagramme circulaire.
- 4- Dessiner le graphique à bande (ou à tuyaux d'orgue).
- 5- Quel est l'effectif n_4 de ceux qui pratiquent la natation.

Exercice 3 : Après un examen de mathématiques, l'enseignant dresse un tableau des notes obtenues par les élèves d'une classe de seconde :

Notes	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15	17	18	19
Effectif	4	1	3	4	1	2	4	2	4	4	1	3	1

- 1- Quel est l'effectif total de cette série ?
- 2- Compléter le tableau par l'effectif cumulé croissant (ECC) et l'effectif cumulé décroissant (ECD).
- 3- Combien d'élèves ont au moins 10 comme note ?
- 4- Combien d'élèves ont au plus 12 comme note ?

- 5- Combien d'élèves ont plus de 13 comme note ?
- 6- Combien d'élèves ont moins de 9 comme note ?

Exercice 4 : Soit la répartition des entreprises de Lomé selon le chiffre d'affaire (CA).

CA	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20
Effectif	3	7	8	5	2

- 1- Calculer la fréquence de chaque modalité.
- 2- Calculer :
 - L'effectif cumulé croissant (ECC).
 - L'effectif cumulé décroissant (ECD).
 - La fréquence cumulée croissante (FCC)
 - La fréquence cumulée décroissante (FCD).

Exercice 5 :

Soit ci-dessous la répartition d'un groupe d'élèves selon l'âge.

Age	15	16	17	18	19
Effectif	20	10	50	60	30

- 1- Quel est l'effectif total des élèves du groupe ?
- 2- Quelle est la proportion des élèves ayant 15 ans ?
- 3- Quel est le nombre des élèves ayant moins de 18 ans ?
- 4- Déterminer les fréquences.
- 5- Déterminer : ECC ; ECD ; FCC ; FCD.
- 6- Dessiner le diagramme en bâtons.

Nom et Prénoms :

ETABLISSEMENT :

SECONDES : G2 & G3

EFFECTIF :

FICHE N°

DATE :

DUREE DU CHAPITRE :

NOMBRE DE LEÇONS :

- Mise en situation :

- Révisions :

- Motivation :

CHAPITRE 6 : FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours ; l'apprenant doit être capable de :

- Identifier une fonction et la courbe représentative d'une fonction,
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction usuelle donnée,
- Représenter une courbe d'une fonction donnée,
- Déterminer l'image directe ou l'image réciproque d'un ensemble par une fonction donnée graphiquement et algébriquement.

- **PRE-REQUIS**

- Cours sur l'application affine de la classe de 3^{ème}.

- **MATERIELS**

- Calculatrice
- Matériels didactiques

Méthodes :	Techniques :
Supports :	

Micro - objectifs	Activités enseignant	Activités élèves	Durée

1. Généralités

1.1. Définition d'une fonction et vocabulaire

On appelle fonction f définie de A vers B , toute relation qui, à chaque élément de A , associe un ou zéro élément de B .

On dit que f est la fonction de A vers B , qui à x associe $f(x)$; A est l'ensemble de départ, B l'ensemble d'arrivée ; x la variable est appelée antécédent, $f(x)$ est l'image de x par f .

On note : $f: A \rightarrow B$

$$x \mapsto f(x)$$

- Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une fonction f est un ensemble de nombres réels, on dit f est une fonction numérique.
- Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction numérique f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle.

NB : On appelle **application** ou fonction applicative, toute fonction dont l'ensemble de définition est égal à l'ensemble de départ.

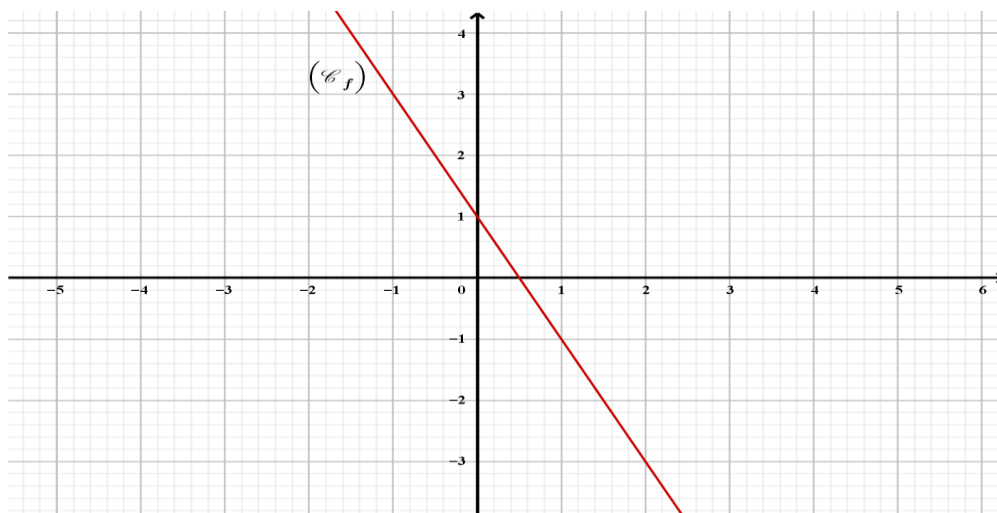
1.2. Modes de présentation d'une fonction

Une fonction est définie de trois façons :

- Par une formule explicite (expression algébrique) :

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -2x^2 + 3x$$
- Par une représentation graphique



- Par un tableau de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$F(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

1.3. Ensemble de définition d'une fonction numérique

- On appelle ensemble de définition de f et on note D_f l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f dans B . On écrit : $D_f = \{x \in A / f(x) \text{ existe}\}$.
- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$: $D_f = \{x \in A / Q(x) \neq 0\}$
- $f(x) = \sqrt{g(x)}$: $D_f = \{x \in A / g(x) \geq 0\}$

Exemple

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$1/ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -4x^2 + x + 3$$

$$2/p: [-10; 10] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -4x^2 + x + 3$$

$$3/ g:]-100; 100] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^7 - 2x^2 + 1$$

$$4/ h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{x^2 - x - 6}$$

$$5/ u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$$

1.4. Image et antécédent d'un réel par une fonction

Exemple

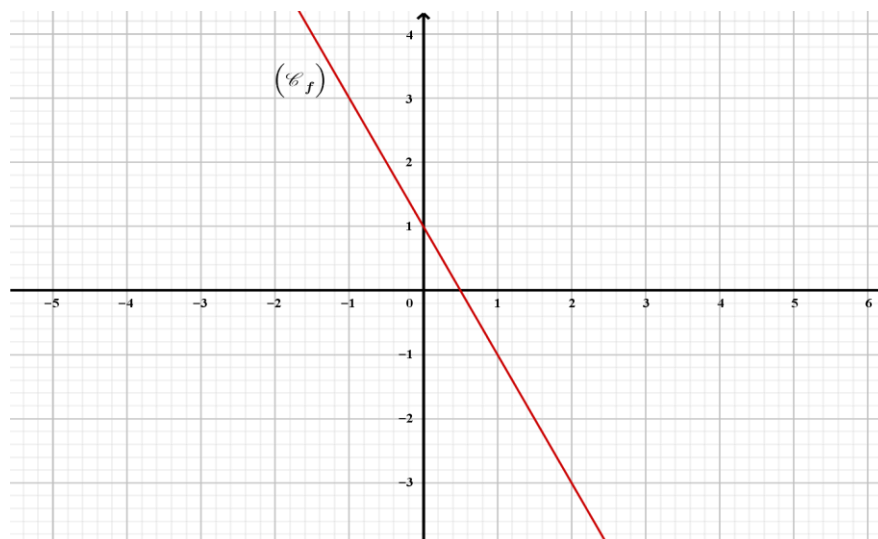
On donne la fonction numérique f définie par : $f(x) = -2x + 3$.

- Déterminer les images de -2 ; -1 ; 0 ; 3 et 5 par f .
- Déterminer les antécédents par f de $-\frac{1}{2}$; -1 ; 0 ; 1 et 2 .

1.5. Image directe et image réciproque d'un ensemble par une fonction affine

Exemple

On donne la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par sa représentation graphique ci - dessous.



1. Déterminer l'image directe par f des ensembles suivants : $[-1,5; -1]$; $]0; 1[$; $[-1; 2[$
2. Déterminer l'image réciproque par f des ensembles suivants : $[-3; -1]$; $] -1; 1[$; $[1; 4[$.

1.6. Sens de variation

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle K .

On dit que f est une fonction :

- Croissante sur K (resp. strictement croissante sur K) lorsque, pour tous éléments a et b de K ,
 $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ (resp. $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$)

x	a	b
$f(x)$	α	β

- décroissante sur K (resp. strictement décroissante sur K) lorsque pour tous éléments a et b de K , $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ (resp. $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$)

x	a	b
$f(x)$	α	β

- constante sur K lorsque, pour tous éléments a et b de K , $f(a) = f(b)$

x	a	b
$f(x)$	$\alpha \longrightarrow \beta$	

Remarques

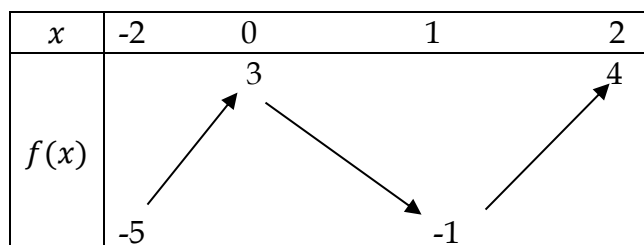
- ✓ On dit que f est une fonction monotone sur K lorsqu'elle est croissante ou décroissante sur K .
- ✓ On dit que f est une fonction strictement monotone sur K lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur K .
- ✓ Lorsqu'on arrive à déterminer si une fonction f est croissante, décroissante ou constante par le procédé ci-dessus, on dit qu'on a étudié le sens de variation de la fonction f .
- ✓ Lorsque f est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$, alors :
 - si $a < 0$, alors f est strictement décroissante ;
 - si $a > 0$, alors f est strictement croissante ;
 - si $a = 0$, alors f est constante.

1.7. Tableau de variation

Le tableau de variation d'une fonction f indique son ensemble de définition et le sens de variation de f .

Exemple 1

x	-2	0	1	2
$f(x)$	-5	3	-1	4



Le tableau de variation ci-dessus montre que f est :

- définie sur l'intervalle $[-2; 2]$
- croissante sur $[-2; 0]$ et sur $[1; 2]$.
- décroissante sur $[0; 1]$

2. Étude et représentation de quelques fonctions élémentaires : x^2 ; x^3 ; $\frac{1}{x}$; $\sqrt{x}$

2.1. Fonction carrée

On donne la fonction $f: x \mapsto x^2$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Donner le tableau de valeurs de f .
- Tracer la courbe de f .

2.2. Fonction inverse

On donne la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{x}$

- Déterminer l'ensemble de définition de g .
- Donner le tableau de valeurs de g .
- Tracer la courbe de g .

2.3. Fonction racine carrée

On donne la fonction $h: x \mapsto \sqrt{x}$

- Déterminer l'ensemble de définition de h .
- Donner le tableau de valeurs de h .
- Tracer la courbe de h .

2.4. Fonction cube

On donne la fonction $u: x \mapsto x^3$

- Déterminer l'ensemble de définition de u .
- Donner le tableau de valeurs de u .
- Tracer la courbe de u .

A VOUS DE JOUER...**I. Questions de cours**

A/Répondre vrai ou Faux

- 1/ Toute fonction rationnelle a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$
- 2/ Toute fonction polynôme a pour ensemble de définition l'ensemble de départ
- 3/ Une fonction polynôme peut avoir pour ensemble de définition $\mathbb{R}$
- 4/ Une fonction monotone sur un intervalle I est croissante et décroissante
- 5/ Une fonction monotone sur un intervalle I est croissante ou décroissante
- 6/ Le tableau de variation d'une fonction donne l'esquisse ou l'allure de la courbe
- 7/ La fonction numérique $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$
- 8/ La fonction numérique $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$
- 9/ La courbe représentative de la fonction numérique $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'appelle une parabole
- 10/ La courbe représentative de la fonction numérique $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'appelle une hyperbole
- 11/ La courbe représentative de la fonction numérique $x \mapsto x^2$ s'appelle une parabole
- 12/ La courbe représentative de la fonction numérique $x \mapsto x^2$ s'appelle une hyperbole

B/ QCM

Choisis la bonne réponse sans justifier ; une seule proposition est correcte

1/ On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 1$

L'image de 0 est :

A/ 0 ; B/ 1 ; C/ -1 ; D/ 1

2/ On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$

L'image de -3 est :

A/ 10 ; B/ 11 ; C/ -10 ; D/ 4

3/ On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$

L'antécédent de 10 est :

A/ 0 ; B/ -1 ; C/ $\mathbb{R}$; D/ -3 ou 3

4/ On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x^2 + 1$. L'antécédent de 17 est :

A/ $\mathbb{R}$; B/ -1 ; C/ -4 ou 4 ; D/ -2 ou 2

II- Exercices

1) Déterminer l'ensemble de définition de :

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 11x - 5}{2x^2 - 3x - 5} ; f(x) = \frac{-4}{2x^2 - x - 1} ; f(x) = x(x - 1) ; F(x) = \frac{x}{x-1} ; F(x) = \sqrt{x^2 + 2} ;$$

$$F(x) = \sqrt{x + 5} ; F(x) = \sqrt{1 - x} ; F(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} ; F(x) = \sqrt{4 + x^2} ;$$

$$F(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{2x + 1} ; F(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} ; F(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} ; F(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x}} ; F(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}.$$

2) Supposons que chacune de ces fonctions précédentes aient comme ensemble de départ $[0 ; +\infty[$. Déterminer dans ce cas l'ensemble de définition.

3) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions rationnelles suivantes :

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{3x + 1} ; \quad \text{b) } g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x(x+1)} ; \quad \text{c) } f(x) = \frac{x-3}{2x^2 + x - 3} ; \quad \text{d) } f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - x^2}.$$

Nom et Prénoms :

ETABLISSEMENT :

SECONDES : G2 & G3

EFFECTIF :

FICHE N°

DATE :

DUREE DU CHAPITRE :

NOMBRE DE LEÇONS :

- Mise en situation :

- Révisions :

- Motivation :

CHAPITRE 7 : NOTIONS DE TRIGONOMETRIE

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours ; l'apprenant doit être capable de :

- représenter un cercle trigonométrique ;
- placer les points images des angles orientés sur le cercle trigonométrique ;
- utiliser la relation de proportionnalité pour passer des degrés au radians et vice versa ;
- utiliser la relation fondamentale de la trigonométrie pour effectuer quelques démonstrations.

- **PRE-REQUIS**

- Cours sur les fonctions numériques de la classe de 3^{ème}.

- **MATERIELS**

- Calculatrice
- Matériels didactiques

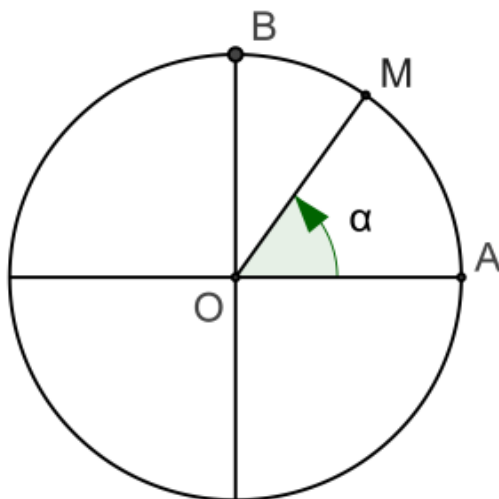
Méthodes :	Techniques :
Supports :	

Micro - objectifs	Activités enseignant	Activités élèves	Durée

1. Cercle trigonométrique

Définitions

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, A, B) , on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens positif.



Sens de parcours d'un cercle.

Il y a deux sens de parcours d'un cercle. Par convention le sens positif ou direct ou trigonométrique est le sens contraire au sens de déplacement de l'aiguille d'une montre.

2. Mesure principale d'un angle orienté

La mesure en radian d'un angle $\widehat{AOM}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1. On la notera $\text{mes } \widehat{AOM}$.

A tout point M du cercle trigonométrique, on associe le nombre α , mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Réciproquement, à tout nombre réel α de l'intervalle $]-\pi; \pi]$, est associé le point M du cercle trigonométrique tel que α soit la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Le point M est appelé image de α sur le cercle trigonométrique.

Conversion de degré en radian ou en grade

$$\frac{\text{degré}}{180} = \frac{\text{radian}}{\pi} = \frac{\text{grade}}{200}$$

Tableau de correspondance des mesures en radian et en degré

Mesures en degré	180	90	60	45	30	0	x
Mesures en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	y

C'est un tableau de proportionnalité : $y = \frac{\pi}{180}x$

Cette relation permet de calculer x en fonction de y ou y en fonction de x , donc de convertir les degrés en radian et les radians en degré.

NB : On a aussi la correspondance : $180^\circ \longrightarrow \pi \text{ radian}$
 $180^\circ \longrightarrow 200 \text{ grades.}$

Exemple 1

Compléter le tableau suivant de correspondance :

Degrés	60	75	36				
Radians				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{7}$

Exemple 2

Placer sur le cercle trigonométrique des angles suivants :

$$\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; \pi; -\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}.$$

Définitions

- On appelle angle orienté tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls.
- Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté. Il existe un unique réel $\alpha \in]-\pi; \pi]$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$.

La valeur α est appelée mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

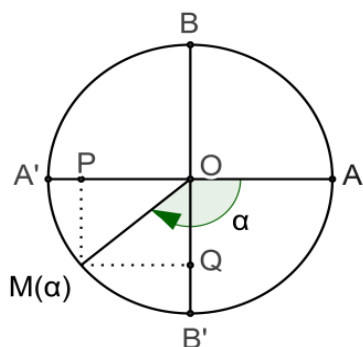
3. Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

Définition

Un angle orienté de mesure $(\vec{u}, \vec{v})$ de mesure principale α étant donné, soit M l'image de α sur le cercle trigonométrique.

Soient P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AA') et (BB').

Le cosinus et le sinus de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ ou de sa mesure principale α sont définis par :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos \alpha = \overline{OP} \quad \text{et} \quad \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \sin \alpha = \overline{OQ}.$$


Soit un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ non droit de mesure principale α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$).

La tangente de cet angle orienté ou de sa mesure principale est définie par $\tan(\vec{u}, \vec{v}) = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Propriété

- Pour tout nombre réel α dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, on a :
 $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- De plus si $\alpha \neq \pi$, on a : $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

Remarque

$$\begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos x \\ \sin(x + 2\pi) = \sin x \end{cases}$$

Sinus ; cosinus et tangente des angles remarquables

Mesure principale	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N'EXISTE PAS

Vérification de l'atteinte des objectifs (évaluations)	Observations

- Clôture cognitive (récapitulation / synthèse)

- Clôture sociale / travail à faire :

- Remédiations :

A VOUS DE JOUER...

I - Questions de cours

A/ Répondre par Vrai ou Faux.

- 1/ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 2/ $\cos^2 x = 3 - \sin^2 x$ 3/ $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
 4/ $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ 5/ Le cosinus d'un nombre est compris entre -1 et +1.
 6/ Le sinus d'un nombre peut dépasser 1,5.

B/ QCM

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1) En trigonométrie, π radian équivaut à :

- A) 360° ; B) 90° ; C) 190° ; D) Aucune réponse.

2) $1 + \tan^2 x$ est égal à :

- A) $1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$; B) $\frac{1}{\cos^2 x}$; C) $(1 + \tan x)^2$; D) $1 + \frac{1}{\cos^2 x}$.

II - Exercices

Exercice 1

En partant de la relation trigonométrique $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Démontrer que : a) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; b) $1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

Exercice 2

Montrer que $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

En se servant de 1) démontrer que :

- a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 b) $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$
 c) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$

Exercice 3

Compléter les tableaux suivants :

x en degrés	210	5	198	315	72	40
y en radians						

x en degrés						
y en radians	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{5}$	$\frac{14\pi}{9}$	$\frac{8\pi}{5}$