

COLLECTION
UNIVERSITÉ
AFRICAINNE DE
MATHÉMATIQUES



2^e

Littéraire

MATHÉMATIQUES

GUIDE PÉDAGOGIQUE



EDICHI

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

2^eL

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen,
92178 Vanves Cedex

2013

53/00

510
TOU

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le premier sémi-naire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN	COMORES	GUINÉE	RÉP. DÉM. CONGO
BURKINA FASO	CONGO	MADAGASCAR	RWANDA
BURUNDI	COTE D'IVOIRE	MALI	SÉNÉGAL
CAMEROUN	DJIBOUTI	MAURITANIE	TCHAD
CENTRAFRIQUE	GABON	NIGER	TOGO

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

COMITÉ DE COORDINATION

Mamadou COULIBALY
Missa COULIBALY
Isidore KOFFI

Adou NIAMIEN
Denis OUEHI
Soma TRAORÉ

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997, à Niamey en 1998, à Nouakchott en 1999, à Ouagadougou en 2000 et à Cotonou en 2001.

ISBN 2 84 129779 9

© EDICEF 2001

Droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

En application de la loi du 11 mars 1957, il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement le présent ouvrage sans autorisation de l'éditeur ou du Centre Français de l'Exploitation du Droit de Copie (3, rue Hautefeuille, 75006 Paris). Cette reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

SOMMAIRE

1	TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE LITTÉRAIRE	5
---	--	---

2	MATHÉMATIQUES DANS LES SECTIONS LITTÉRAIRES ET ÉCONOMIQUES	7
2.1	Des difficultés didactiques	8
2.2	Les thèmes que l'on peut aborder	8
2.3	Catalogue pour choisir des curricula	10
2.4	Que choisir ?	10

3	COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE	11
3.1	Options académiques	11
3.2	Options pédagogiques	12
3.3	Aspect culturel	12
3.4	Utilisation du manuel	12

4	COMMENTAIRES SPÉCIFIQUES À LA CLASSE DE SECONDE L.....	13
4.1	Pourquoi une seconde littéraire ?	13
4.2	Articulation avec le collège	14
4.3	Activités des élèves.....	14
4.4	Présentation du manuel.....	14
4.5	Points méthodes.....	14
4.6	Points logiques	15
4.7	Travaux dirigés.....	15

5	ANALYSE DES CHAPITRES	17
5.1	Calcul numérique.....	17
5.2	Ordre et valeur absolue	28
5.3	Calcul littéral	37
5.4	Équations et inéquations	43
5.5	Systèmes linéaires	52
5.6	Fonctions	64
5.7	Étude de fonctions	72
5.8	Organisation des données.....	84

ALPHABET GREC

Majuscule	Minuscule	Appellation
A	α	alpha
B	β	bêta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ε	epsilon
Z	ζ	dzêta
H	η	êta
Θ	θ	thêta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	ksi
O	ο	omicron
Π	π	pi
P	ρ	rhô
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	φ	phi
X	χ	khi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	oméga

1 TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE LITTÉRAIRE

Les programmes du Second Cycle Littéraire ont été établis en juin 1992, lors du quatrième séminaire d'harmonisation des programmes de mathématiques des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien. Ils sont ici présentés dans un tableau synoptique afin de faire apparaître :

- la cohérence des différents thèmes à un niveau donné ;
- l'évolution d'un thème d'un niveau à l'autre.

	Seconde L	Première L	Terminale L
ALGÈBRE	LES NOMBRES		
	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Les nombres réels • Nombres rationnels • Nombres irrationnels ◆ Calculs dans \mathbb{R} • Sommes et produits • Quotients • Puissances • Racines carrées ◆ Proportionnalité • Tableaux de proportionnalité • Pourcentages • Échelles • Problèmes concrets ◆ Ordre et valeur absolue • Comparaison des nombres • Encadrement, approximations, ordre de grandeur • Valeur absolue, distance 		<ul style="list-style-type: none"> ◆ Divisibilité dans \mathbb{N} • Critères de divisibilité • Bases 10, 2 et 5 ◆ Décimales successives d'un nombre rationnel • Application aux suites ◆ Calculs sur les grands nombres • Utilisation d'une calculatrice
	CALCUL LITTÉRAL		
	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Développements et factorisations • Égalités remarquables • Applications aux calculs numériques ◆ Calculs simples sur les polynômes ◆ Simplifications de fractions rationnelles 		
	ÉQUATIONS		
	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Équations dans \mathbb{R} • Équations du type : $ax + b = 0$ • Équations du type : $x - a = r$ • Équations du type : $(ax + b)(cx + d) = 0$ • Équations du type : $\frac{ax + b}{cx + d} = 0$ • Problèmes concrets 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Équations dans \mathbb{R} • Équations du type : $\frac{ax + b}{cx + d} = 0$ • Problèmes concrets ◆ Équations du second degré • Forme canonique • Discriminant • Somme et produit des racines • Problèmes concrets 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Équations dans \mathbb{R} • Méthodes graphique et numérique • Équations faisant intervenir la ou \exp

Seconde L

INÉQUATIONS

- ◆ Inéquations dans \mathbb{R}
- Inéquations du type : $ax + b \leq 0$
- Inéquations du type : $|x - a| \leq r$
- Inéquations du type : $(ax + b)(cx + d) \leq 0$
- Inéquations du type : $\frac{ax + b}{cx + d} \leq 0$
- Problèmes concrets

SYSTEMES LINÉAIRES

- ◆ Systèmes linéaires
- Systèmes linéaires d'équations
- Systèmes linéaires d'inéquations
- Problèmes concrets

FONCTIONS

- ◆ Notion de fonction
- ◆ Ensemble de définition
- ◆ Représentation graphique
- ◆ Lecture graphique
- Image et antécédents d'un nombre réel
- Utilisations d'un graphique
- ◆ Variations d'une fonction
- Notion d'extremums
- Sens de variations d'une fonction

FONCTIONS USUELLES

- ◆ Fonctions affines
- ◆ Fonctions affines par intervalles
- Fonctions définies par intervalles
- Fonction valeur absolue
- Fonctions en escalier
- ◆ Fonctions élémentaires
- Fonction carré
- Fonction racine carrée
- Fonction inverse
- ◆ Utilisations des fonctions élémentaires
- Résolution graphique d'équations
- Résolution graphique d'inéquations

LIMITES - CONTINUITÉ

- ◆ Approche intuitive des notions de limite et de continuité

DÉRIVÉE

- ◆ Approche intuitive de la notion de nombre dérivé
- Interprétation géométrique
- Équation de la tangente en un point d'une courbe
- ◆ Fonctions dérivées
- ◆ Variations de fonctions
- Fonction polynôme du second degré
- Fonction homographique

Première L

- ◆ Inéquations du second degré
- Signe de $ax^2 + bx + c$
- Inéquations du type : $ax^2 + bx + c \leq 0$
- Problèmes concrets
- ◆ Inéquations dans \mathbb{R}
- Inéquations du type : $\frac{ax + b}{cx + d} \leq 0$
- Problèmes concrets

- ◆ Parité d'une fonction, éléments de symétrie d'une courbe
- ◆ Observations de courbes de fonctions périodiques
- ◆ Fonctions de la forme :
 - $x \mapsto f(x - a)$
 - $x \mapsto f(x) + b$
 - $x \mapsto |f(x)|$
 - $x \mapsto kf(x)$, où f est une fonction élémentaire

- ◆ Fonctions polynômes du second degré
- ◆ Fonctions homographiques

- ◆ Approche intuitive des notions de limite et de continuité

- ◆ Approche intuitive de la notion de nombre dérivé
- Interprétation géométrique
- Équation de la tangente en un point d'une courbe
- ◆ Fonctions dérivées
- ◆ Variations de fonctions
- Fonction polynôme du second degré
- Fonction homographique

Terminale L

- ◆ Inéquations dans \mathbb{R}
- Inéquations faisant intervenir la ou exp

- ◆ Systèmes linéaires
- Systèmes linéaires d'équations
- Systèmes linéaires d'inéquations
- Problèmes de programmation

- ◆ Fonctions ln et exp
- ◆ Fonctions simples faisant intervenir ln ou exp

- ◆ Limites
- Notions
- Opérations
- ◆ Notion d'asymptote

- ◆ Dérivées usuelles
- ◆ Dérivées de fonctions composées
- Dérivée de ln ou
- Dérivée de exp ou
- ◆ Utilisation des dérivées pour étudier :
 - Fonctions polynômes de degré supérieur à 2
 - Fonctions rationnelles du type $x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

♦ Notion de suite numérique

♦ Diverses déterminations d'une suite

• $u_n = f(n)$

• $u_{n+1} = g(u_n)$

♦ Représentations graphiques d'une suite

♦ Suites arithmétiques, suites géométriques

• Terme général

• Somme des n premiers termes

• Problèmes concrets

♦ Comportement d'une suite

• Sens de variation

• Convergence

♦ Applications

• Initiation au raisonnement par récurrence

• Approximation de nombres réels

par des suites rationnelles

• Étude de la suite : $n \mapsto 2^n$ • Étude de la fonction : $x \mapsto 2^x$

♦ Organisation de données

• Caractère quantitatif

• Caractère qualitatif

• Fréquence

• Effectif cumulé, fréquence cumulée

♦ Traitement de données

• Mode

• Moyenne

♦ Représentations graphiques

• Diagramme circulaire

• Diagramme semi-circulaire

• Diagramme à bandes

• Diagramme en bâtons

♦ Caractères qualitatif, quantitatif

• Caractéristiques de position

• Caractéristiques de dispersion

♦ Regroupement des modalités en classes

• Histogrammes

• Caractéristiques de position

• Caractéristiques de dispersion

♦ Exemples de séries chronologiques

♦ Quartiles et déciles d'une série à un caractère

♦ Étude conjointe de deux caractères

• Nuage de points

• Point moyen

• Ajustement linéaire

♦ Outils élémentaires de dénombrement

• Comptage

• Diagrammes

• Arbres de choix

• Tableaux

♦ Résolution de problèmes concrets

♦ Produit cartésien

♦ Ensemble E'

♦ Arrangements

♦ Permutations

♦ Combinaisons

♦ Notion de probabilité

$$P = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

2 MATHÉMATIQUES DANS LES SECTIONS LITTÉRAIRES ET ÉCONOMIQUES

D'après une communication de Monsieur PIEDNOIR, Inspecteur Général de France, lors du sixième séminaire HPM (Niamey, 1998).

Quelles mathématiques enseigner dans les sections non scientifiques ?

Le problème n'est pas résolu d'une façon stable dans les différents systèmes éducatifs. Plusieurs philosophies s'affrontent :

- (1) L'important pour l'élève d'une section non scientifique est de se former à la rigueur, au raisonnement déductif. Le contenu de l'enseignement est second. Les mathématiques forment un tout et il ne faut pas trop s'inquiéter des techniques mathématiques que les élèves manipulent éventuellement lors de leurs études supérieures.
- (2) Il est inutile de vouloir faire boire un âne qui n'a pas soif. Pour ces élèves, les mathématiques sont au mieux inutiles. D'autres disciplines peuvent former à la rigueur, au raisonnement. Éventuellement afin d'éviter l'illettrisme mathématique, entretenir les acquis antérieurs.
- (3) Les mathématiques font partie de la culture. En liaison avec la philosophie, il est intéressant de faire une certaine vulgarisation, de donner une idée de la place des mathématiques dans la culture.
- (4) L'économie, les sciences humaines utilisent des modèles, des techniques mathématiques spécifiques. Dès l'enseignement secondaire, mais surtout pour préparer les études ultérieures, il importe d'apporter à ces élèves une formation spécifique en mathématiques.

Pour la suite de cette note, on s'inspirera des points de vue (3) et (4).

2.1. DES DIFFICULTÉS DIDACTIQUES

De ses études dans les classes antérieures, l'élève s'orientant vers une section littéraire ou économique a souvent développé une allergie à la discipline, avec des discours définitifs du type : « je n'y comprend rien », « cela ne me servira à rien ». Les échecs antérieurs pèsent lourds. Cela veut dire que si on fait des mathématiques en section littéraire, il faut obtenir des élèves une certaine adhésion. Il y a donc nécessité, d'une certaine façon, de casser le jeu traditionnel, présenter du neuf, ce qui est une justification des choix faits précédemment.

Aborder des thèmes nouveaux ne suffit évidemment pas à engendrer intérêt et réussite. Il faut prendre en compte les échecs antérieurs, les savoir faire non acquis en les déterminant d'une façon précise à l'aide, par exemple, d'évaluation de début d'année. Mais pour y remédier, des séances de révisions sont inutiles. Elles remettent l'élève devant son échec, ce qui est loin d'être agréable. Du coup il coupe la communication. C'est à propos de l'étude de thèmes nouveaux que l'on peut progressivement procéder aux réinvestissements des concepts vus au collège. Mais l'élève perçoit mieux la nécessité de maîtriser certaines notions.

Trop souvent dans ses apprentissages mathématiques, l'élève est freiné par la lenteur avec laquelle il effectue certaines manipulations de base, en particulier le calcul algébrique. Le temps passé à mettre au point un calcul fait perdre de vue l'objectif poursuivi. Il s'agit d'un phénomène analogue à celui de l'illettrisme. Celui qui lit trop lentement mobilise ses énergies pour déchiffrer le texte et en perd le sens. La lecture devient un exercice pénible et à la limite inutile, car en cours de route on a perdu le sens du texte. Il faut donc dans les exercices traités, dans les activités faites, éviter une technicité importante et/ou mettre en place, quand cela est possible, des béquilles : recours systématique à la calculatrice, utilisation des touches « fonctions », des représentations graphiques, usage de l'ordinateur. Une formation n'a de sens que si on perçoit bien les relations qui existent entre les symboles que l'on manipule et les réalités qu'ils représentent. Quelles significations donnent ces élèves à %, $\sqrt{\quad}$, \Rightarrow , \Leftrightarrow , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f , proportion, projection etc.

2.2. LES THÈMES QUE L'ON PEUT ABORDER

2.2.1. Les mathématiques du citoyen

Il faut montrer qu'un certain nombre de concepts mathématiques sont utilisés dans la vie courante et que leur maîtrise est indispensable à tout individu qui veut maîtriser sa vie, avoir un regard critique sur l'information chiffrée qu'il reçoit. Parmi eux, deux objets sont à manipuler en priorité : la proportionnalité et la lecture graphique.

La proportionnalité, la manipulation des pourcentages recèlent de pièges dans lesquels tombent des individus qui peuvent par ailleurs être de haute culture. La lecture de la presse, l'écoute des médias, permettent, sur ce thème de se constituer un bêtisier dont l'analyse par les élèves peut être à la fois déculpabilisant et intéressant. À un autre niveau, l'interprétation des proportions représentant des fréquences empiriques, des probabilités, est l'occasion de montrer aux élèves qu'il ne faut pas se précipiter sur un chiffre mais qu'il est nécessaire de faire le va et vie ns entre celui-ci et la réalité qu'il est censé représenter.

Une lecture des graphiques existant dans les pages économiques des quotidiens, dans des publications spécialisées est une excellente introduction aux notions d'ordre, de croissance/décroissance d'une fonction, de continuité. Des exemples peuvent illustrer cela. Pour représenter graphiquement la répartition statistique des familles selon leur taille, faut-il utiliser un diagramme circulaire ou un diagramme semi-circulaire ? Comment réagit l'adulte ou l'élève devant un graphique représentant, année par année, le taux de croissance de l'économie ? En France, pour établir l'impôt sur le revenu des personnes physiques, on utilise des tranches. Beaucoup croient que le passage d'une tranche à l'autre fera baisser le revenu final disponible. Qu'en est-il ? D'autres exemples sont possibles.

2.2.2. Réflexion conceptuelle et historique sur la mathématique

La démarche mathématique est une des grandes conquêtes de l'esprit humain. Elle a aidé à mieux comprendre les choses, c'est l'aspect gratuit. Elle a été efficace, c'est l'aspect mathématique appliquée. On peut présenter cette aventure culturelle autour de deux pôles : la notion de modèle, le raisonnement déductif.

La géométrie euclidienne est le premier modèle que les enfants ont à appréhender. Il faut montrer comment on a remplacé des objets familiers par des abstractions, comment on a raisonné sur ces abstractions pour établir des relations entre les objets. L'efficacité de la démarche est facilement illustrable par des exemples issus de la vie courante, par des exemples historiques : comment les anciens ont déterminé le rayon de la terre, celui de la lune, la distance terre-lune, terre-soleil, leurs réussites, leurs échecs.

On peut montrer aussi comment une intuition commune peut être un obstacle à la mise en place d'un modèle adéquat : Archimède a bien refusé le modèle où la terre tourne autour du soleil.

Le calcul des probabilités est un modèle simple qui permet de rendre compte d'une réalité complexe. On met en place des axiomes, on fait des observations, on montre (ou l'on suggère selon les cas) comment un théorème rend compte d'une réalité observable : la convergence en probabilité, le théorème central limite. Là aussi, la dimension historique est à présenter, du chevalier de Méré à Mendel donc des jeux aux lois de l'hérédité.

En terminale, en lien avec la philosophie, il est possible d'aller plus loin.

De montrer par exemple, à l'aide de contradictions simples, que le concept d'ensemble n'est pas un concept premier, qu'il doit être exploité à l'aide d'axiomes sans toutefois aller jusqu'à développer l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel.

2.2.3. Des éléments de vulgarisation

Il est très difficile de vulgariser des champs mathématiques récents. Il est toutefois possible de parler d'un certain nombre de problèmes ayant un fondement historique : théorème de Fermat, résolution des équations algébriques par radicaux, quadrature du cercle, espace euclidien à n dimensions, géométries non euclidiennes etc. À l'aide d'exemples pris dans l'histoire, on peut rendre compte des rapports complexes entre mathématiques et mathématiques appliquées. Des développements théoriques purement gratuits trouvent une application parfois très longtemps après leur apparition. Inversement, des notions mathématiques utilisées sans fondement théorique suscitent chez les théoriciens des réflexions, d'où il sort qu'elles trouvent un statut mathématique correct et sont l'occasion de nouveaux développements théoriques.

L'apparition de nouveaux outils de calcul modifie l'approche des mathématiques. De vieilles théories retrouvent une nouvelle jeunesse car les calculs deviennent faisables. Des développements nouveaux sont nécessaires pour utiliser les nouveaux monstres. L'essentiel est de montrer aux jeunes que la mathématique n'est pas une science figée, qu'elle évolue, que de nouveaux problèmes apparaissent.

2.2.4. Préparation aux techniques mathématiques utilisées en sciences humaines et en économie

Ce point peut faire l'objet d'un développement important, au moins en option dans un certain nombre de filières non scientifiques. S'il est difficile à un élève de ces sections de faire des études d'économie mathématique, il est parfaitement possible de présenter des thèmes d'étude qui prépareront à la manipulation des objets mathématiques utiles dans ces sciences : économie d'abord et donc gestion, mais aussi sociologie, psychologie, géographie, voire histoire.

Le premier chapitre à étudier est celui des fonctions avec les quatre fonctions de base : linéaire, exponentielle, logarithme, puissance, utilisées dans de nombreux modèles : croissance à taux constant, fonction prix-demande, phénomène de saturation des marchés, etc.

Le second est l'étude graphique des fonctions empiriques les plus couramment utilisées : croissance, décroissance, extréma, limites (surtout infinies), continuité, notion de dérivée liée au taux d'accroissement. Par contre, l'intérêt d'études classiques de fonctions données par une expression algébrique plus ou moins farfelue est très limité. Sur le même registre, les suites arithmétiques et géométriques sont à étudier.

Le second chapitre doit préparer les futurs étudiants à bien comprendre l'algèbre linéaire et la statistique descriptive multidimensionnelle. Pour cela il faut saisir intuitivement la notion d'espace vectoriel, de sous-espace vectoriel, d'espace euclidien à k dimensions. La difficulté conceptuelle lors des études supérieures de toute nature (université, BTS, IUT) est réelle. L'étude de la géométrie dans l'espace est l'outil privilégié pour cette initiation : notion de droite, de plan, intersection, parallélisme, orthogonalité, projection orthogonale. Voir dans l'espace est un atout important pour comprendre l'algèbre linéaire.

Un troisième chapitre est l'étude du calcul des probabilités qu'il ne faut pas lier systématiquement à l'analyse combinatoire. Ces deux parties des mathématiques ont leurs difficultés propres. À les étudier ensemble on rend l'accès aux probabilités difficiles. Successivement, au fil des années, il est possible d'introduire dans le cas fini uniquement les notions d'espace probabilisé, de variable aléatoire, d'espérance, de variance, d'indépendance et peut être en travaux dirigés de démontrer la loi des grands nombres.

Certaines techniques mathématiques utilisées en statistiques, en gestion ont des bases théoriques très simples mais, nécessitent des calculs longs qui dans tous les cas pratiques se font sur ordinateur. Elles ont un intérêt pratique considérable et il est facile sur des exemples simples mais artificiels de montrer comment cela fonctionne. Ainsi en est-il de la classification automatique, de l'utilisation des graphes pour trouver un chemin de longueur minimale, etc.

2.3. CATALOGUE POUR CHOISIR DES CURRICULA

2.3.1. Quelques points d'histoire

- La première démonstration : les théorèmes d'Archimède
- Découverte la constante de Périclès (ou celui de Thales)
- La quadrature du cercle
- Le postulat d'Euclide
- La découverte de l'irrationalité
- L'abstraction : appelée « l'axiome »
- La recherche des dérivées de x
- Calcul des dimensions de l'espace

2.3.1.1 Analyse

- Les fonctions de base
- Étude graphique des fonctions algébriques
- Notion de continuité, de dérivée
- Formulation de fonctions utilisées pour décrire les phénomènes dynamiques

2.3.1.2 Géométrie

- L'histoire représentant l'espace : la méthode axiomatique depuis Euclide jusqu'à Hilbert et passant par Lobatchevsky
- La géométrie dans l'espace : droites, plans, relations d'orthogonalité, parallélisme, orthogonalité, projection, notion d'angle.

2.3.1.3 Statistique descriptive

- De lien avec la géométrie : notion de moyenne, d'écart type, de coefficient de corrélation
- Rapport entre indicateurs et stabilité à distance ou notion à mesure, introduction de la notion de mode, pertinence des regroupements en classes
- Exemple de classification automatique.

2.3.1.4 Calcul des probabilités

- La méthode simple dans le cas fini : l'espace probabiliste
- Dépendance, indépendance
- Notion de variable aléatoire, l'espérance, la variance en lien avec la statistique descriptive
- La loi des grands nombres
- Acquisition d'une sensibilité au hasard.

2.3.1.5 Problèmes géométriques et algorithmes

- Cercles : construction de tangente pour construire la spirale
- Astronomie : lien, le Zodiaque
- Archimède : courbe des arcs
- Pythagore : la longueur de la corde est connue.

2.4. QUE CHOISIR ?

Face à une profusion, il faut être sélectif. Il est bon de questionner sur un certain de ces aspects de l'histoire de l'enseignement des mathématiques : quel travail de distinction selon l'orientation future de l'élève et son de lui donner ce dont il a besoin et ce qu'il peut accueillir. Mais c'est l'idéal pour celui qui fait le programme par pour l'élève qui construit peu à peu son propre profil professionnel. Pour certains un programme se réalisera par mathématiques des critères et à quelques vulgarisations sont suffisant. À l'inverse, ceux qui sont attirés par l'économie devraient avoir 4 à 5 heures de mathématiques et un programme développant tout est la géométrie dans l'espace, l'analyse, la statistique descriptive, le calcul des probabilités. Pour ceux attirés par les sciences humaines, une réflexion en lien avec la philosophie est une évidence ainsi qu'à un niveau moyen élevé, le calcul des probabilités, la statistique descriptive pour les sciences historiques et quelques problèmes géométriques et algorithmes.

Enfin il n'est pas possible ni souhaitable de trop spécialiser des élèves avec uniquement la description de parti pris des compétences de programmation. Qu'il se remarquent, un élève bien formé pour être utile.

3 COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques (C.I.A.M.) est l'aboutissement d'une volonté, déjà ancienne, des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien de mettre en place un cadre commun pour Harmoniser les Programmes de Mathématiques (H.P.M.) et leur enseignement.

Cette harmonisation vise essentiellement à améliorer la qualité de l'enseignement, à le rendre accessible à un plus grand nombre d'élèves et à prendre en compte les résultats des dernières recherches en didactique des mathématiques. Elle a, dans un premier temps, débouché sur une rénovation des programmes et des méthodes. Elle s'est par la suite accompagnée d'une formation adéquate des professeurs puis concrétisée par la rédaction de manuels-élève, au coût réduit, et de guides pédagogiques, à l'usage exclusif des professeurs.

Les contenus des manuels du second cycle littéraire peuvent être couverts en **25 semaines**, si les volumes horaires suivants sont retenus :

Classe	2 ^{de} L	1 ^{re} L	T L ₁ Économique	T L ₂ Littéraire	T L ₃ Beaux arts
Horaire hebdomadaire	3 h	3 h	4 h	3 h	3 h
Total	75 h	75 h	100 h	75 h	75 h

À noter que tous les livres ont un index et que ceux de terminales se terminent par un chapitre « Problèmes de synthèse », dont la plupart sont extraits des différents baccalauréats africains.

3.1. Options académiques

Le choix des contenus tient compte des objectifs suivants :

- l'aptitude à mathématiser un problème ;
- les approches numériques qui facilitent la compréhension de certaines notions mathématiques ;
- les activités graphiques qui développent les qualités de soin et de précision, et permettent une interprétation de nombreux phénomènes scientifiques (mathématique, physique, économique) ou sociaux.

Le programme s'articule autour de quatre rubriques :

- activités numériques ;
- calcul littéral ;
- fonctions numériques ;
- organisations des données.

Activités numériques

Le programme offre l'occasion de contrôler / développer les aptitudes des élèves aux techniques de calculs, d'encadrement et d'approximations.

Calcul littéral

Cette rubrique vise autant la maîtrise d'une (relative) virtuosité dans certains calculs sur les polynômes (développement, réduction, factorisation) et les fractions rationnelles, que celle des différentes méthodes de résolution des équations et inéquations, des systèmes d'équations ou d'inéquations.

La résolution de problèmes concrets, qui permet de donner du sens à des techniques abstraites, reste (au moment de la mise en équation) un exercice difficile pour l'élève.

Fonctions numériques

Les notions de fonction, d'ensemble de définition et de représentation graphique sont des thèmes nouveaux et délicats, promis à un grand avenir dans les classes ultérieures !

Ici encore, un support concret est privilégié, tant au niveau de la découverte des concepts que de leur exploitation : les représentations graphiques.

Organisations des données

Les statistiques jouent un rôle important comme outil d'aide à la prise de décision dans un contexte donné. Il est cependant important de savoir qu'à chaque étape du traitement allant de données obser-

vées à des conclusions statistiques, un gain en signification a pour prix la perte d'une partie des informations. Le meilleur moyen pour les élèves de s'en convaincre est d'avoir eu l'occasion de mener, au moins une fois, une étude statistique complète, c'est-à-dire allant du relevé de données à l'élaboration d'une réponse à une question posée au départ.

3.2. Options pédagogiques

Utilisation de la calculatrice

La calculatrice est un outil qui, avec ou sans instructions officielles, connaît une large diffusion. Il est de l'intérêt des enseignants d'en tenir compte. S'il ne peut être encore question, vu les coûts, d'imposer son usage par des mentions dans les programmes officiels, les manuels-élève recensent les points de programmes ou les activités motivant son emploi et favorisant chez l'élève l'habitude d'une utilisation intelligente.

Apprentissage du raisonnement

- Les démonstrations de certaines propriétés et les résolutions d'exercices permettent de dégager de nombreuses **méthodes** qui enrichissent la boîte à outils de l'élève. Ces points méthodes sont repérés par l'avertisseur **M**.

- Les éléments de **logique** (notion de proposition, connecteurs, quantificateurs, méthodes de raisonnement : contraposition, absurde, récurrence) ne font pas l'objet d'un cours, mais sont introduits et réinvestis chaque fois que le besoin s'en fait sentir. La rubrique **L** a été créée à cet effet.

- Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes. Pour répondre à cette nécessité, des **travaux dirigés** sont proposés en fin de leçon. Outre un renforcement de l'apprentissage du raisonnement, ces travaux dirigés constituent soit un inventaire des exercices types de la leçon, soit un prolongement non exigible à certaines notions, soit encore une ouverture interdisciplinaire. Lorsqu'ils semblent un peu difficiles et montrent une propriété intéressante ou un type de raisonnement inédit, les solutions sont intégralement données ; sinon les solutions sont guidées par un questionnement.

3.3. Aspects culturels

Les notes historiques

Traitant d'événements ou de mathématiciens qui ont marqué l'évolution des mathématiques, les notes historiques doivent convaincre les élèves que les mathématiques se sont construites peu à peu, à travers recherches, tâtonnements et découvertes, et leur permettre de prendre contact avec quelques problèmes célèbres.

Contextualisation des contenus

Autant que faire se peut, les auteurs ont voulu prendre en compte l'environnement socioculturel africain, aussi bien pour lutter contre le désintérêt des élèves pour une discipline réputée importée, que pour les convaincre que cette réputation est fallacieuse (il y a des mathématiques dans la vie de l'Africain, comme dans celle de l'Indien ou de l'Asiatique) et leur donner le goût d'oeuvrer au développement de leur continent.

Les informations scientifiques

Il s'agit cette fois de convaincre les élèves et, si besoin est, leurs professeurs que les mathématiques sont en constante évolution, comme de rester en contact avec quelques récentes découvertes (rôle croissant, en particulier, de l'informatique).

3.4. Utilisation du manuel

Le manuel n'est pas un livre saint, mais un outil pédagogique précieux comme le tableau ou le rétro-projecteur, au service du professeur et de l'élève. En plus de ses fonctions classiques d'aide aux préparations de cours et de recueil d'exercices, il a de nombreuses autres fonctions avant, pendant et après le cours qu'il convient de préciser ici.

Utilisation du manuel	Le professeur	L'élève
<i>avant le cours</i>	<ul style="list-style-type: none"> • lit le programme • lit les instructions officielles • étudie la traduction des contenus du programme dans le manuel • choisit, en relation avec le manuel : <ul style="list-style-type: none"> – la présentation d'une notion – des démarches – des motivations – des activités – des traces écrites – des exercices à traiter en classe ou à la maison • repère les points précis d'utilisation du manuel pendant le cours 	<ul style="list-style-type: none"> • apprend la leçon précédente sur son livre et son cahier • prépare sur le cahier de recherche un tableau, une activité du livre, une figure, un organigramme, un exercice • étudie les pages de révisions
<i>pendant le cours</i>	<ul style="list-style-type: none"> • fait analyser, commenter, identifier des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel • fait reconnaître une démarche, une construction, une démonstration déjà vue par l'élève • fait lire une définition, une propriété • fait critiquer cette lecture par la classe • fait reconnaître, rechercher dans le livre, recopier sur le cahier de cours : <ul style="list-style-type: none"> – des définitions ou propriétés – des notations de symboles, des figures, des schémas • fait analyser des énoncés d'exercices 	<ul style="list-style-type: none"> • utilise le manuel selon les indications du professeur • exploite oralement ou sur le cahier de recherche des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel • recherche dans le manuel (utilisation de l'index, du sommaire) des définitions, propriétés, symboles, figures, schéma • analyse oralement des énoncés d'exercices • traite les exercices sur le cahier de recherche
<i>après le cours</i>		<ul style="list-style-type: none"> • relit le cours sur le cahier, le livre • traite les exercices

Il faut apprendre à l'élève à se servir du manuel où il trouvera les résultats essentiels, les méthodes de résolution de certains types de problèmes, des exercices d'entraînement et d'approfondissement qui lui permettront de contrôler ses acquis et de s'initier à la recherche.

Avant de proposer des exercices ou des travaux aux élèves, le professeur devra se poser les questions suivantes :

- font-ils partie des capacités requises dans cette classe ?
- constituent-ils des activités possibles en classe ou faut-il les réserver pour le travail à la maison ?
- leur contexte mathématique est-il compréhensible par un élève de ce niveau ?
- leur résolution relève-t-elle de l'entraînement, de l'approfondissement ? a-t-elle valeur de méthode ?

4 COMMENTAIRES SPÉCIFIQUES À LA CLASSE DE SECONDE L

La classe de seconde est une classe de transition, donc un cadre privilégié de synthèse et de réflexion sur les connaissances acquises par l'élève.

4.1. Pourquoi une seconde littéraire ?

Les ouvrages des séries littéraires complètent la Collection Inter Africaine de Mathématiques (C.I.A.M.), comme le recommande le séminaire HPM de 1992.

Imposer la norme des forts à tous est une forme de violence, a-t-on coutume de dire. Après les manuels du second cycle scientifique, il était impérieux de mettre à la disposition des élèves des classes littéraires un manuel qui prenne en compte leur spécificité, et qui réponde à l'attente des professeurs.

4.2. Articulation avec le collège

Ce programme de seconde littéraire prend appui sur les notions acquises au premier cycle. Il vise à consolider ces notions et à introduire de nouveaux concepts, notamment en analyse. De plus, ce programme complète et enrichit l'initiation au raisonnement entamé dès la classe de sixième, à travers les points méthodes, les points logiques et les travaux dirigés (extensions des exercices commentés du premier cycle).

4.3. Activités des élèves

Il n'est point besoin de répéter qu'il est très important de mettre l'élève en activité.

En continuité avec le premier cycle, on a voulu :

- faire précéder chaque notion ou propriété par une ou plusieurs activités de motivation ;
- mettre l'accent sur le raisonnement par la pratique des travaux dirigés.

4.4. Présentation du manuel

Organisation des chapitres

Chaque chapitre est découpé en leçons, chaque leçon en paragraphes et chaque paragraphe en sous-paragraphes.

Les leçons se terminent par des exercices de fixation des savoirs et les chapitres par des exercices d'entraînement et d'approfondissement, classés par thème.

Notation et vocabulaire

Dans la mesure du possible on a gardé les notations et le vocabulaire utilisés dans les manuels CIAM du premier cycle. Cependant pour les intervalles non bornés, on a repris la notation classique $]-\infty ; a]$ et $[b ; +\infty[$ au lieu de $] \leftarrow ; a]$ et $[b ; \rightarrow[$ qui sont les notations apparaissant dans le manuel de troisième.

Proposition de progression

3 heures hebdomadaires.

Semaine	Chapitres	Horaire
3	Calcul numérique	9 h
3	Calcul littéral	9 h
4	Fonctions	12 h
3	Ordre et valeur absolue	9 h
2	Équations et inéquations	6 h
2	Systèmes linéaires	6 h
4	Études de fonctions	12 h
4	Organisation des données	12 h
25	Total	75 h

4.5. Points méthodes

On relève dans le manuel de seconde littéraire les points méthodes suivants :

Activités numériques	Page	Calcul littéral	Page
Déterminer l'élément manquant d'un tableau de proportionnalité	13	Factoriser une expression littérale	43
Traduire une fraction en pourcentage	14	Démontrer que deux expressions sont égales	43
Déterminer k % d'une quantité	14	Écrire une somme algébrique de fractions rationnelles sous la forme d'une fraction rationnelle	48
Déterminer la valeur d'un objet après une réduction, une augmentation	14	Résoudre une équation se ramenant à une équation du 1 ^{er} degré	55, 57
Déterminer a % de b % d'une quantité	15	Étudier le signe de $ax + b$	59
Comparer deux nombres réels	23	Résoudre une inéquation se ramenant à une inéquation du 1 ^{er} degré	60
Encadrer une somme, un produit	27	Résoudre un problème conduisant à des équations ou à des inéquations	63
Encadrer une différence, un quotient	28	Résoudre un système d'inéquations	70, 72
Déterminer l'arrondi d'ordre n d'un nombre	29	Résoudre une inéquation du type : $ax + by + c < 0$	76
Fonctions numériques	Page	Organisations des données	Page
Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction	91	Calculer la moyenne d'une série	132
Déterminer graphiquement l'image, les antécédents d'un nombre	94		
Utiliser des courbes pour résoudre une équation, une inéquation	96		

4.6. Points logiques

On relève dans le manuel de seconde littéraire les points logiques suivants :

Points logiques	Pages
Inclusion	7
Raisonnement par l'absurde	24

4.7. Travaux dirigés

4.7.1. Objectifs généraux

- apprendre à chercher,
- faire fonctionner un outil,
- dégager des méthodes,
- donner un prolongement (non exigible) à certaines notions.

Apprendre à chercher

L'élève suit généralement deux étapes : la lecture de l'énoncé et la recherche d'une démarche.

Lecture de l'énoncé

Faite avec attention, elle permet à l'élève de bien distinguer :

- les données et contraintes (ce que l'on sait),
- les conclusions (ce que l'on cherche).

Recherche d'une démarche

L'élève dispose de connaissances minimales (définitions, propriétés). Il doit faire l'inventaire de celles qui ont un rapport avec les objets mathématiques entrant en jeu et sélectionner les plus opérationnelles.

Pour certains types de problèmes, la démarche est plus élaborée et donne lieu à des points méthodes :

- les problèmes de lieux,
- les problèmes de construction,
- les problèmes conduisant à une équation ou une inéquation.

Les problèmes de modélisation et les problèmes ouverts sont des cadres appropriés pour mettre un élève en situation de recherche.

Exemples

- Démontrer (pages 44, 48).
- Comparer des résultats (page 136).

Faire fonctionner un outil

Il s'agit d'outils déjà formalisés dans le cours :

- propriétés,
- méthodes de résolution de problèmes,
- principes de démonstration : utilisation d'un contre-exemple, raisonnement par l'absurde, implication, contraposition, équivalence.

Exemples

- Utiliser la proportionnalité (pages 15, 108).
- Utiliser une fonction pour résoudre un problème (page 93).
- Utiliser un graphique (pages 109, 112).
- Utiliser un raisonnement par l'absurde (page 23).

Dégager des méthodes

Certains travaux dirigés donnent l'occasion de rappeler ou de mettre en place des points méthodes.

Exemples

- Résoudre un système de trois équations à deux inconnues (page 72).
- Faire un changement d'inconnues (page 74).

Donner un prolongement à certaines notions

Certains travaux dirigés permettent de démontrer un résultat connu ou de donner un prolongement à une notion.

Exemple

- Utiliser une double proportionnalité (page 15).

4.7.2. Conduite d'une séance de travaux dirigés

Choix d'un problème

- Le professeur propose le travail dirigé adapté à l'objectif qu'il veut atteindre.
- Il précise alors aux élèves le temps de recherche, qui peut varier d'un travail dirigé à l'autre suivant la longueur ou la difficulté du problème.

Gestion de la classe

Après la phase de recherche, le professeur organise dans la classe un débat :

- les élèves sont invités à communiquer leurs idées, à partir desquelles on essaie de trouver une solution ;
- s'il n'y a aucune piste sérieuse, le professeur donne une, deux ou plusieurs indications suivant la réaction des élèves.

Rédaction d'une solution

Lorsqu'on a trouvé une solution, le professeur demande aux élèves de la rédiger.

Rédiger, en mathématiques, c'est mettre en évidence les grandes lignes et les articulations du raisonnement. Si cela s'est fait souvent à l'aide d'un schéma ou d'un organigramme au premier cycle, l'accent sera mis au second cycle sur une rédaction en français. En effet, c'est d'après ses rapports et ses projets que l'élève, cadre de demain, sera jugé par ses collègues et ses supérieurs hiérarchiques. Le professeur lui apprendra donc à être précis, concis et clair.

5 ANALYSE DES CHAPITRES

1. Calcul numérique

(pages 5 à 20 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- mettre en œuvre les propriétés des opérations dans \mathbb{R} , acquises au premier cycle ;
- pratiquer de manière performante le calcul mental, le calcul écrit ou à la calculatrice sur les nombres réels ;
- résoudre des problèmes concrets (proportionnalité, échelle, pourcentage).

COMMENTAIRES

Les exposés théoriques sur \mathbb{R} devront être évités ; on privilégiera les formules et savoirs essentiels. L'accent devra être mis sur l'acquisition de l'aptitude à organiser des calculs, sur la culture de l'esprit critique (par exemple, l'appréciation de la pertinence d'un résultat).

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

savoir-faire

Les nombres réels

Calculs dans \mathbb{R}

- Propriétés de l'addition et de la multiplication dans \mathbb{R} .
- Définition du quotient de deux nombres réels.

- Propriétés des quotients :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} ; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c} ; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

- Égalité de deux quotients.
- Simplification d'un quotient.
- Définition de la puissance entière d'un nombre réel.
- Propriétés des puissances entières d'un nombre réel :

$$a^n \times b^n = (ab)^n ; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n ;$$

$$a^n \times a^p = a^{n+p} ; \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} ;$$

$$(a^n)^p = a^{np}.$$

- Notation scientifique d'un nombre décimal.
- Définition de la racine carrée d'un nombre réel positif.

- Identifier les éléments des ensembles de nombres : \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} .

- Calculer des sommes, produits, quotients de nombres réels.

- Pratiquer le calcul mental, écrit ou à l'aide de la calculatrice.

- Simplifier un quotient.
- Calculer un produit, un quotient de puissance de nombres réels.

- Écrire en notation scientifique un nombre décimal donné.

- Effectuer des calculs avec les racines carrées.

• Propriétés des racines carrées :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab};$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}.$$

Proportionnalité

- Définition d'un tableau de proportionnalité.
- Définition d'une échelle.

• Simplifier des expressions comportant des radicaux.

- Reconnaître un tableau de proportionnalité.
- Traduire une fraction en pourcentage.
- Déterminer un pourcentage d'une quantité.
- Déterminer la valeur d'un objet après une remise, après une augmentation.

EXERCICES DU MANUEL

☐ Exercices du cours

♦ Exercice n° 1.a p. 7

On remarque que : $\sqrt{64} = 8$; $-\sqrt{169} = -13$; $\frac{-\sqrt{25}}{6} = -\frac{5}{6}$ et $\frac{66}{11} = 6$.

	0	$-\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\sqrt{64}$	$\frac{66}{11}$	$-\sqrt{169}$	2	$-\sqrt{1,69}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{-\sqrt{25}}{6}$
N	×			×	×		×			
Z	×			×	×	×	×			
D	×			×	×	×	×	×	×	
Q	×		×	×	×	×	×	×	×	×
R	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

♦ Exercice n° 1.b p. 7

$-106,23 \in \mathbb{D}$; $\frac{72}{6} = 12$, donc : $\frac{72}{6} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{4\,900} = \sqrt{49 \times 100} = \sqrt{49} \times 10 = 70$, donc : $\sqrt{4\,900} \in \mathbb{N}$;
 $-2,8 \in \mathbb{D}$; $5,8 \times 10^4 = 58\,000$, donc : $5,8 \times 10^4 \in \mathbb{N}$; $\pi + \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

♦ Exercice n° 1.c p. 7

a) La graduation est de 0,01 en 0,01 ;
 donc : $x = 1,83$.

La graduation est de 5 en 5 ; donc : $x = 15$.

La graduation est de 0,01 en 0,01 ;
 donc : $x = -1,94$.

La graduation est de 0,25 en 0,25,
 donc : $x = 4,75$.

b) La graduation est de $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{3}$, donc : $x = \frac{8}{3}$.

La graduation est de $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{3}$, donc : $x = \frac{5}{3}$.

La graduation est de 0,000 5 en 0,000 5,
 donc : $x = 1,526 5$.

La graduation est de 0,005 en 0,005,
 donc : $x = -3,585$.

♦ Exercice n° 2.a p. 12

$$2 - \frac{5}{3} = \frac{6-5}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{7}{8} \times \frac{6}{13} = \frac{7}{4} \times \frac{3}{13} = \frac{21}{52}$$

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{16+15}{12} = \frac{31}{12}$$

$$3 : \frac{5}{2} = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

$$27 \times \frac{3}{4} = \frac{81}{4}$$

$$\frac{7}{4} : \frac{35}{26} = \frac{7}{4} \times \frac{26}{35} = \frac{1}{2} \times \frac{13}{5} = \frac{13}{10}$$

♦ Exercice n° 2.b p. 12

a) $p = -\frac{5}{8}$ et $q = -0,625$; $p - q = -\frac{5}{8} + 0,625 = -0,625 + 0,625 = 0$, donc : $p = q$.

b) $p = \frac{375}{57}$ et $q = \frac{75}{7}$;

$p - q = \frac{375}{57} - \frac{75}{7} = \frac{375 \times 7 - 75 \times 57}{57 \times 7} = \frac{2\,625 - 4\,275}{399} = -\frac{1\,620}{399}$; donc : $p \neq q$.

c) $p = \frac{105}{45}$ et $q = \frac{7}{3}$; $p = \frac{3 \times 5 \times 7}{5 \times 3 \times 3} = \frac{7}{3}$; donc : $p = q$.

♦ Exercice n° 2.c p. 12

$-\frac{245}{360} = -\frac{49}{72}$

$\frac{1\,024}{728} = \frac{128}{91}$

$\frac{2\,566}{820} = \frac{2 \times 1\,283}{2 \times 410} = \frac{1\,283}{410}$

$\frac{1\,468}{200} = \frac{4 \times 367}{4 \times 50} = \frac{367}{50}$

$\frac{49}{70} = \frac{7 \times 7}{7 \times 10} = \frac{7}{10}$

♦ Exercice n° 2.d p. 12

$3^2 \times 3^4 = 3^6$; $5^6 \times 5^{-2} = 5^4$; $\frac{2^2}{2^3} = 2^{-1}$; $\frac{7^6}{7^2} = 7^4$.

♦ Exercice n° 2.e p. 12

L'écriture décimale de $6,235 \times 10^{-3}$ est 0,006 235 ; l'écriture décimale de $3,586 \times 10^2$ est 358,6 ;
l'écriture décimale de $0,357 \times 10^{-2}$ est 0,003 57 ; l'écriture décimale de $5,48 \times 10^{-3} - 0,653$ est $-0,647\,52$.

♦ Exercice n° 2.f p. 12

L'écriture scientifique de $18,005 \times 10^{12}$ est $1,800\,5 \times 10^{13}$;

l'écriture scientifique de 64 095 500 est $6,409\,55 \times 10^7$;

l'écriture scientifique de $0,000\,9 \times 10^{-4}$ est 9×10^{-8} ; l'écriture scientifique de $0,002\,5 \times 0,4 \times 10^3$ est 1.

♦ Exercice n° 2.g p. 12

$\sqrt{0,25} = 0,5$; $\sqrt{4^9} = \sqrt{(2^2)^9} = \sqrt{(2^9)^2} = 2^9$; $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$; $\sqrt{175} = \sqrt{25 \times 7} = 5\sqrt{7}$.

♦ Exercice n° 3.a p. 16

1 h 20 min correspond à 80 min.

Le temps mis pour remplir un réservoir de 1 800 litres est :

2 400	1 800
80	x

$x = \frac{1\,800 \times 80}{2\,400} = 60$ min.

♦ Exercice n° 3.b p. 16

1. 500 m correspond à 50 000 cm ; l'échelle est : $\frac{1}{50\,000}$.

2. 30 km correspond à 3 000 000 cm ; la distance sur la carte est : $3\,000\,000 \times \frac{1}{50\,000} = 60$ cm.

7 km correspond à 700 000 cm ; la distance sur la carte est : $\frac{700\,000}{50\,000} = 14$ cm.

3.

Distance sur la carte	1 mm	5 cm
Distance réelle	50 m	2 500 m

♦ Exercice n° 3.c p. 16

On a :

60	35
100 %	x %

donc : $\frac{x}{100} = \frac{35}{60}$; $x = \frac{35 \times 100}{60} = 58,33$ %.

♦ Exercice n° 3.d p. 16

On a :

200 g	x
100 %	55 %

donc : $\frac{x}{55} = \frac{200}{100}$; $x = 55 \times 2 = 110$ g.

◆ Exercice n° 3.e p. 16

Notons x le prix normal ; le prix fidélité est : $x - \frac{20}{100}x = \frac{80}{100}x = \frac{4}{5}x$.

◆ Exercice n° 3.f p. 16

Le nouveau prix est : $3\,200 + \frac{10}{100} \times 3\,200 = 3\,520$ F.

□ Exercices d'apprentissage

◆ Exercice n° 1 p. 17

Fraction de la surface cultivée : $\frac{7}{15} + \frac{2}{5} = \frac{7}{15} + \frac{6}{15} = \frac{13}{15}$.

Fraction de la surface formée par les allées : $\frac{15}{15} - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$.

◆ Exercice n° 2 p. 17

Le nombre de filles dans cette classe est : $\frac{3}{5} \times 80 = 48$.

◆ Exercice n° 3 p. 17

Les $\frac{2}{3}$ de la moitié de 120 000 F font $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 120\,000 = 40\,000$ F.

◆ Exercice n° 4 p. 17

Fraction du litre de lait bu par Sali : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

◆ Exercice n° 5 p. 17

$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ entraîne $b = 2a$; $\frac{c}{a} = \frac{4}{3}$ entraîne $c = \frac{4a}{3}$; donc : $\frac{b}{c} = \frac{2a}{\frac{4a}{3}} = 2a \times \frac{3}{4a} = \frac{3}{2}$.

◆ Exercice n° 6 p. 17

1. Soit x un nombre donné. On a : $15x = (10 + 5)x = 10x + 5x$.

On en déduit la règle suivante :

« pour multiplier un nombre par 15, je multiplie ce nombre par 10 et j'ajoute au résultat obtenu la moitié de lui-même ».

2. On a : $101x = (100 + 1)x = 100x + x$.

• On en déduit la règle suivante :

« pour multiplier un nombre par 101, je multiplie ce nombre par 100 et j'ajoute au résultat obtenu le nombre initial ».

• On a : $999x = (1000 - 1)x = 1000x - x$.

On en déduit la règle suivante :

« pour multiplier un nombre par 999, je multiplie ce nombre par 1 000 et je retranche du résultat obtenu le nombre initial ».

• On a : $0,9x = \frac{1}{10}(10 - 1)x = \frac{1}{10}(10x - x)$.

On en déduit la règle suivante :

« pour multiplier un nombre par 0,9, je multiplie ce nombre par 10, je retranche du résultat obtenu le nombre initial, puis je divise le tout par 10 ».

◆ Exercice n° 7 p. 17

a) $[(4 \times 3) : 5] - 2 = (12 : 5) - 2 = \frac{2}{5} = 0,4$;

b) $(4 \times 3) : (5 - 2) = 12 : 3 = 4$ ou $4 \times [3 : (5 - 2)] = 4$.

c) $4 \times [(3 : 5) - 2] = 4 \times (\frac{3}{5} - 2) = 4 \times \frac{-7}{5} = -\frac{28}{5} = -5,6$.

◆ Exercice n° 8 p. 17

a) $1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$

b) $2,1 + \frac{5}{4} = \frac{21}{10} + \frac{5}{4} = \frac{84 + 50}{40} = \frac{67}{20}$

c) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12}$

d) $\frac{7}{9} - \frac{2}{3} = \frac{7-6}{9} = \frac{1}{9}$

e) $\frac{4}{7} - \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{24 - 105 + 14}{42} = -\frac{67}{42}$

f) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} + 3 = \frac{10 - 9 + 36}{12} = \frac{37}{12}$

◆ Exercice n° 9 p. 17

La valeur d'une année-lumière est : $300\ 000 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 94\ 608 \times 10^8$.

◆ Exercice n° 10 p. 17

a) $24,05 = 2\ 405 \times 10^{-2}$; b) $1\ 250\ 000 = 125 \times 10^4$; c) $0,007\ 9 = 79 \times 10^{-4}$; d) $0,368\ 01 = 36\ 801 \times 10^{-5}$.

◆ Exercice n° 11 p. 17

a) $0,001 = 10^{-3}$ b) $\frac{0,000\ 1}{0,01} = \frac{10^{-4}}{10^{-2}} = 10^{-2}$ c) $\frac{0,001}{0,000\ 1} = \frac{10^{-3}}{10^{-4}} = 10$ d) $\frac{1}{10\ 000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$.

◆ Exercice n° 12 p. 17

a) $10^3 + 10^2 + 10 + 10^{-2} + 10^{-4} = 1\ 110,010\ 1$ b) $\frac{0,000\ 013\ 2}{0,006} = \frac{132 \times 10^{-7}}{6 \times 10^{-3}} = 22 \times 10^{-4}$
 c) $\frac{1,495}{0,125} \times 10^{-3} \times \frac{2,5}{10^4} = \frac{1\ 495 \times 10^{-3}}{125 \times 10^{-3}} \times 10^{-3} \times \frac{25 \times 10^{-1}}{10^4} = 299 \times 10^{-8}$ d) $\frac{10 + 10^{-2}}{10^{-2}} = 1\ 001$.

◆ Exercice n° 13 p. 17

a) $15 \times \frac{3}{4} = \frac{45}{4}$ b) $\frac{10}{3} \times \frac{28}{45} = \frac{5 \times 2}{3} \times \frac{28}{5 \times 9} = \frac{56}{27}$
 c) $-0,4 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}$ d) $\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{15-7}{21} \times \frac{1+6}{4} = \frac{2}{3}$.

◆ Exercice n° 14 p. 17

a) $\frac{5}{\frac{10}{3}} = 5 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{2}$ b) $\frac{\frac{5}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}} = 7$ d) $\frac{\frac{3}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{30}{30} - \frac{25}{30}}{\frac{3}{12} + \frac{4}{12}} = \frac{-\frac{7}{30}}{\frac{7}{12}} = -\frac{2}{5}$.

◆ Exercice n° 15 p. 17

a) $2^5 \times 14^2 = 2^5 \times 2^2 \times 7^2 = 2^7 \times 7^2$ b) $6^5 \times 15^2 = 2^5 \times 3^5 \times 5^2 \times 3^2 = 2^5 \times 3^7 \times 5^2$
 c) $\frac{35^3}{21^2} = \frac{5^3 \times 7^3}{3^2 \times 7^2} = 3^{-2} \times 5^3 \times 7$ d) $\left(\frac{4}{3}\right)^8 \times \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \frac{2^{16}}{3^8} \times \frac{3^9}{2^{18}} = 2^{-2} \times 3$.

◆ Exercice n° 16 p. 17

$0,5 \times 10^6 = 5 \times 10^5$; $1,5 \times 10^9$; 3×10^9 .

◆ Exercice n° 17 p. 17

a) $701,28 = 7,012\ 8 \times 10^2$ b) $0,006\ 4 = 6,4 \times 10^{-3}$
 c) $106\ 000 = 1,06 \times 10^5$ d) $58\ 003 \times 10^{-6} = 5,800\ 3 \times 10^{-2}$.

◆ Exercice n° 18 p. 17

a) $2,5 \times 0,04 \times 10^6 = 10^5$ b) $0,04 \times 25\ 000 \times 0,007 = 7$
 c) $(1,5 \times 10^5) \times (2,2 \times 10^{-5}) = 3,3$ d) $(2,5 \times 10^{-3}) \times (6 \times 10^{-5}) = 1,5 \times 10^{-7}$.

◆ Exercice n° 19 p. 17

a) $16 \times 10^{-9} = 1,6 \times 10^{-8}$ b) 3×10^8
 c) $640 \times 10^6 = 6,4 \times 10^8$ d) $4,5 \times 10^9$.

◆ Exercice n° 20 p. 17

Soit d la distance parcourue par le rayon de soleil, v sa vitesse et t le temps.

On a : $d = v \times t$.

Donc : $t = \frac{150 \times 10^6}{3 \times 10^5} = 500\ \text{s}$; $t = 8\ \text{min et } 20\ \text{s}$.

◆ Exercice n° 21 p. 17

$T = \frac{1\ 000\ 000\ 000}{1\ 000\ 000} = 1\ 000\ \text{mois}$; soit 83 ans et 4 mois.

◆ Exercice n° 22 p. 18

Nombre de battements d'un cœur normal en une année : $365 \times 24 \times 60 \times 75 = 39\ 420\ 000$.

◆ Exercice n° 23 p. 18

a) $\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \times 3} = 4\sqrt{3}$

b) $\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}$

c) $\sqrt{200} = \sqrt{10^2 \times 2} = 10\sqrt{2}$

d) $\sqrt{98} = \sqrt{7^2 \times 2} = 7\sqrt{2}$

e) $\sqrt{192} = \sqrt{2^6 \times 3} = 8\sqrt{3}$

f) $\sqrt{242} = \sqrt{11^2 \times 2} = 11\sqrt{2}$

◆ Exercice n° 24 p. 18

a) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{45} - 3\sqrt{5} + \sqrt{20} = 3\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

c) $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63} = \sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 0$

d) $\sqrt{98} - \sqrt{18} + \sqrt{8} = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

◆ Exercice n° 25 p. 18

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{0,13} = \sqrt{0,65}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}}$

c) $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$

d) $(\sqrt{10})^3 = 10\sqrt{10} = \sqrt{1000}$

e) $\frac{5}{7} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \sqrt{\frac{25}{49}}$

f) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{25}{7}}$

◆ Exercice n° 26 p. 18

On a : $\sqrt{(1+6)^2} = \sqrt{7^2} = 7$; donc :

$1 + 5\sqrt{(1+6)^2} = 36$

; $\sqrt{1 + 5\sqrt{(1+6)^2}} = 6$;

$1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{(1+6)^2}} = 25$

; $\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{(1+6)^2}}} = 5$;

$1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{(1+6)^2}}} = 16$

; $\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{(1+6)^2}}}} = 4$;

$1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{(1+6)^2}}}} = 9$

; $\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{(1+6)^2}}}}} = 3$

◆ Exercice n° 27 p. 18

a) On a : $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$.

b) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$ entraîne $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$;

donc : $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

En remplaçant $\sqrt{2}$ par cette valeur dans le membre de droite on obtient :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

En répétant le même procédé on obtient :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + 1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}}$$

◆ Exercice n° 28 p. 18

On a : $(102\ 201)^2 = 10\ 445\ 044\ 401$.

1. $\sqrt{10\ 445\ 044\ 401} = 102\ 201$.

$\sqrt{1\ 044\ 504\ 440\ 1} = \sqrt{10\ 445\ 044\ 401 \times 10^{-4}} = 102\ 201 \times 10^{-2} = 1\ 022,01$.

2. $\sqrt{10\ 445\ 044\ 401} \times \sqrt{10} = \sqrt{10\ 445\ 044\ 401 \times 10} = \sqrt{104\ 450\ 444\ 010}$.

Il faut donc multiplier par $\sqrt{10}$.

◆ Exercice n° 29 p. 18

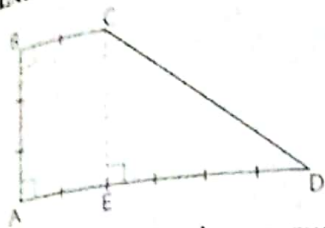
Soit x le poids de son ami.

On a : $\frac{x}{0,026} = \frac{82,5}{0,033}$

Donc : $x = \frac{0,026 \times 82,5}{0,033} = 65$ kg.

Poids (kg)	82,5	x
Quantité d'antibiotique (mg)	0,033	0,026

♦ Exercice n° 30 p. 18



• Calculons la distance CD.

Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle CDE rectangle en E :

$$CD^2 = CE^2 + ED^2 ;$$

$$CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} ;$$

$$CD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

• Le périmètre du champ, sur la carte, est donc : $AB + BC + CD + AD = 3 + 2 + 5 + 6 = 16$.

On en déduit l'échelle : $\frac{16}{3\ 200} = \frac{1}{200}$.

• Les dimensions réelles du champ sont donc :

$AB' = 3 \times 200 = 600$; $B'C' = 2 \times 200 = 400$; $C'D' = 5 \times 200 = 1\ 000$; $A'D' = 6 \times 200 = 1\ 200$.

On en déduit l'aire du champ : $S = \frac{A'B'(B'C'+A'D')}{2} = 480\ 000\ \text{m}^2$.

♦ Exercice n° 31 p. 18

a) Soit x la taxe.

On a : $\frac{x}{10\ 000} = \frac{9\ 660}{42\ 000}$;

donc : $x = \frac{9\ 660 \times 10\ 000}{42\ 000} = 2\ 300\ \text{F}$.

Prix hors taxe	42 000	10 000
Taxe	9 660	x

b) Soit y la taxe.

On a : $\frac{y}{35\ 000} = \frac{9\ 660}{42\ 000}$;

donc : $y = \frac{9\ 660 \times 35\ 000}{42\ 000} = 8\ 050\ \text{F}$.

Prix hors taxe	42 000	35 000
Taxe	9 660	y

Le prix, toutes taxes comprises, est donc : $35\ 000\ \text{F} + 8\ 050\ \text{F} = 43\ 050\ \text{F}$.

c) Soit t la taxe.

On a : $\frac{t}{34\ 500} = \frac{9\ 660}{42\ 000}$;

donc : $t = \frac{34\ 500 \times 9\ 660}{42\ 000} = 78\ 750\ \text{F}$.

Prix hors taxe	42 000	t
Taxe	9 660	34 500

d) Soit z la taxe.

On a : $\frac{z}{615\ 000 - z} = \frac{9\ 660}{42\ 000}$;

donc : $z = \frac{9\ 660 \times 615\ 000}{42\ 000 + 9\ 660} = 115\ 000\ \text{F}$.

Prix hors taxe	42 000	$615\ 000 - z$
Taxe	9 660	z

Le prix hors taxe est : $615\ 000\ \text{F} - 115\ 000\ \text{F} = 500\ 000\ \text{F}$.

♦ Exercice n° 32 p. 18

L'échelle de cette carte est : $\frac{18}{3\ 600\ 000} = \frac{1}{200\ 000}$.

♦ Exercice n° 33 p. 18

Soit d la distance sur la carte. On a : $\frac{d}{15} = \frac{1}{50}$; donc : $d = \frac{15}{50} = 0,3\ \text{cm}$.

♦ Exercice n° 34 p. 18

Soit e et e' les échelles respectives sur le premier et le second plan. Désignons par d la dimension de la façade sur le second plan et par D la dimension réelle de la façade.

On a : $e = \frac{36}{D} = \frac{1}{20}$; donc : $D = 36 \times 20$;

$e' = \frac{d}{D} = \frac{1}{50}$; donc : $d = \frac{D}{50} = \frac{36 \times 20}{50}$;

$d = 14,4\ \text{cm}$.

◆ Exercice n° 35 p. 18

			a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
Nombre de carreaux bleus	16	1	10	11	12	8	6	7	8	6
Pourcentage	100 %	6,25 %	62,5 %	68,75 %	75 %	50 %	37,50 %	43,75 %	50 %	37,50 %

◆ Exercice n° 36 p. 19

Le prix du poste est : $35\,000 + \frac{35\,000 \times 2}{100} = 35\,700$ F.

◆ Exercice n° 37 p. 19

Il y a 15 intervalles de 2,40 m chacun.

La longueur de la clôture est donc : $15 \times 2,40 = 36$ m.

Si la distance entre deux poteaux successifs était de 1,50 m, le nombre d'intervalles serait : $\frac{36}{1,5} = 24$.
Donc, il y aurait 25 poteaux .

◆ Exercice n° 38 p. 19

1^{re} formule : 110 000 F à 9 % produit un intérêt de 9 900 F et 90 000 F à 11 % produit un intérêt de 9 900 F. La 1^{re} formule produit donc un intérêt total de 19 800 F.

2^e formule : 200 000 F à 10 % produit un intérêt de 20 000 F.

Le placement le plus avantageux est donc : 200 000 F à 10 %.

◆ Exercice n° 39 p. 19

Soit x le prix de ce produit.

On a : $x + \frac{40x}{100} = 8\,400$; c'est-à-dire $\frac{140}{100}x = 8\,400$.

Donc : $x = \frac{8\,400 \times 100}{140} = 6\,000$ F.

◆ Exercice n° 40 p. 19

La remise est 3 000 F. Soit x le pourcentage correspondant.

On a : $\frac{x}{3\,000} = \frac{100}{15\,000}$;

donc : $x = \frac{100 \times 3\,000}{15\,000} = 20$ %.

15 000	3 000
100	x

◆ Exercice n° 41 p. 19

a) 10 % de 25 % correspond à 2,5 % ; b) $\frac{3}{5}$ de 60 % correspond à 36 % ;

c) $\frac{1}{3}$ de $\frac{12}{25}$ correspond à 16 % ; d) 25 % de 10 % correspond à 2,5 %.

◆ Exercice n° 42 p. 19

a) Quantité de lait journalier : 200 l. Masse de lait journalier : $200 \times 1,03$ kg = 206 kg.

Masse de crème obtenue : $m = \frac{206 \times 15}{100} = 30,90$ kg. Masse de beurre obtenu : $\frac{30,90 \times 25}{100} = 7,725$ kg.

b) Soit x le pourcentage de la masse de lait que représente celle du beurre.

On a : $\frac{x}{7,725} = \frac{100}{206}$;

donc : $x = \frac{7,725 \times 100}{206} = 3,75$ %.

masse	206	7,725
pourcentage	100	x

◆ Exercice n° 43 p. 19

Nombre d'électeurs : $\frac{25\,000 \times 60}{100} = 15\,000$.

Nombre de voix du parti A : $\frac{15\,000 \times 38}{100} = 5\,700$.

Nombre de voix du parti B : $\frac{15\,000 \times 32}{100} = 4\,800.$

Nombre de voix du parti C : $\frac{15\,000 \times 30}{100} = 4\,500.$

◆ Exercice n° 44 p. 19

Nombre d'habitants ayant un groupe sanguin de type AB : $\frac{16\,000\,000 \times 0,05}{100} = 8\,000.$

◆ Exercice n° 45 p. 19

Soit x le prix initial de la marchandise.

Son prix après la 1^{re} augmentation est : $x + \frac{15}{100}x = \frac{115}{100}x.$

Son prix après la 2^e augmentation est : $\frac{115}{100}x + \frac{15}{100} \times \frac{115}{100}x.$

L'augmentation totale est : $\frac{15 \times 115}{100} \times \frac{1}{100}x.$

Elle correspond à un pourcentage de 17,25%.

◆ Exercice n° 46 p. 19

Soit x le prix initial de la marchandise.

	après la 1 ^{re} remise	après la 2 ^e remise	prix de l'article
Salimata	$x - \frac{10}{100}x = \frac{9}{10}x$	$\frac{9}{10}x - \frac{9}{10}x \times \frac{20}{100} = \frac{72x}{100}$	$\frac{72x}{100}$
Aïssatou	$x - \frac{20x}{100} = \frac{8x}{10}$	$\frac{8x}{10} - \frac{8x}{10} \times \frac{5}{100} = \frac{76x}{100}$	$\frac{76x}{100}$
Gilberte	$x - \frac{25x}{100}$	pas de 2 ^e remise	$\frac{75x}{100}$

La moins chère est Salimata, ensuite vient Gilberte, puis Aïssatou.

◆ Exercice n° 47 p. 19

a) Soit p le prix d'un diamant de 0,693 g.

On a : $\frac{p}{0,480\,249} = \frac{50\,000}{0,202\,5}$; donc : $p = \frac{50\,000 \times 0,480\,249}{0,202\,5} = 118\,580\text{ F.}$

b) Soit m la masse d'un diamant de 30 000 F.

On a : $\frac{m^2}{30\,000} = \frac{0,202\,5}{50\,000}$;

donc : $m^2 = \frac{30\,000 \times 0,202\,5}{50\,000} = 0,121\,5$;

$m = \sqrt{0,121\,5} \text{ g} \approx 0,348\,6 \text{ g.}$

masse	0,45	0,693	m
carré de la masse	0,202 5	0,480 249	m^2
prix	50 000	p	30 000

☐ Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n° 48 p. 19

On a : $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$;

$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Donc : $S - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = 1.$

◆ Exercice n° 49 p. 19

a) $S = \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{3^7} = \frac{3^7 + 3^{12}}{3^{19}}$; $S \neq \frac{1}{3^{19}}$.

b) $S = \frac{1}{2^6 \times 3^3} + \frac{1}{3^3 \times 5^3} + \frac{1}{2^6 \times 5^3} = \frac{5^3 + 2^6 + 3^3}{2^6 \times 3^3 \times 5^3} = \frac{2^3 \times 3^3}{2^6 \times 3^3 \times 5^3} = \frac{1}{10^3}$.

c) $P = 2^{200} \times 3^{100} \times \frac{3^{50}}{2^{50}} \times \frac{1}{2^{149} \times 3^{149}} = 2 \times 3 = 6$.

◆ Exercice n° 50 p. 19

Nombre de billets de 1 000 F contenus dans 1 milliard : $\frac{1\ 000\ 000\ 000}{1\ 000} = 1\ 000\ 000$.

Hauteur des billets de 1 000 F : $1\ 000\ 000 \times 0,1\ \text{mm} = 100\ 000\ \text{mm}$.

◆ Exercice n° 51 p. 19

10 c → 8 or ; 16 or → 12 p ; 4 p → 1 m ; 6 m → 48 b.

On cherche le nombre de bananes : 5 c → ? b

On a : 6 m → 48 b.

Donc : 1 m → 8 b ;

4 p → 8 b ;

12 p → 24 b ;

16 or → 24 b ;

8 or → 12 b ;

10 c → 12 b ;

5 c → 6 b.

◆ Exercice n° 52 p. 19

Désignons par x le prix d'un objet.

a) vrai, car $x + \frac{200x}{100} = 3x$.

b) faux, car $x - \frac{100x}{100} = 0$.

c) vrai, car $x - \frac{50x}{100} = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$.

d) faux, car $x + \frac{50x}{100} = \frac{150x}{100} = 1,5x$.

◆ Exercice n° 53 p. 19

Soit x le prix d'une marchandise au début de l'année.

À la fin du 1^{er} mois, elle coûtera : $(1 + \frac{1}{100})x$.

À la fin du 2^e mois, elle coûtera : $(1 + \frac{1}{100})^2 x$.

.....
À la fin du 12^e mois, elle coûtera : $(1 + \frac{1}{100})^{12} x$.

Si le taux d'inflation annuel était de 12%, la marchandise coûterait : $(1 + \frac{12}{100})x$.

On doit comparer : $(1 + \frac{1}{100})^{12}$ et $1 + \frac{12}{100}$; c'est-à-dire : 1,01¹² et 1,12.

On a : 1,01¹² ≈ 1,126 825 ; donc : 1,01¹² ≠ 1,12.

◆ Exercice n° 54 p. 19

Le nombre de femmes qui portent une boucle d'oreille est : $800 \times \frac{7}{100} = 56$.

Il reste : $800 - 56 = 744$.

Le nombre de femmes qui portent deux boucles d'oreilles est : $\frac{744}{3} = 248$.

Le nombre de boucles d'oreilles dans ce village est : $248 \times 2 + 56 = 552$.

◆ Exercice n° 55 p. 20

4 % de 45 % = $\frac{4 \times 45}{10\ 000} = 1,8\ %$; 6 % de 55 % = $5 \times \frac{55}{10\ 000} = 3,3\ %$.

Le pourcentage de la population dépassant 80 ans est 5,1 %.

◆ Exercice n° 56 p. 20

Un salaire de 180 000 F augmenté de 4 % devient : $(1 + \frac{4}{100}) \times 180\ 000\ \text{F} = 187\ 200\ \text{F}$.

La mesure est avantageuse pour un salaire de 180 000 F.

Un salaire de 300 000 F augmenté de 4 % devient : $(1 + \frac{4}{100}) \times 300\ 000\ \text{F} = 312\ 000\ \text{F}$.

Après la retenue de 10% il devient : $(1 - \frac{10}{100}) \times 312\ 000\ \text{F} = 280\ 800\ \text{F}$.

La mesure n'est pas avantageuse pour un salaire de 300 000 F.

♦ Exercice n° 57 p. 20

L'aire du disque est : $5^2 \times \pi = 25\pi \text{ cm}^2$.

Soit d le diamètre du trou circulaire ; son aire est : $\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} d^2$.

Cette aire représente une diminution de 36 % de l'aire du disque : $\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{36}{100} \times 25\pi$.

Donc : $d^2 = 36 \text{ cm}^2$; $d = 6 \text{ cm}$.

♦ Exercice n° 58 p. 20

L'aire du rectangle est : $L \times \ell$.

La longueur augmente de 25 % et la largeur diminue de x %.

On a : $(L + \frac{25}{100} L)(\ell - \frac{x}{100} \ell) = L \times \ell$; donc : $\frac{125}{100} \times \frac{100 - x}{100} = 1$.

On trouve : $x = 20$. Il faut diminuer la largeur de 20%.

♦ Exercice n° 59 p. 20

Soit x le prix de l'article sans TVA.

Si la TVA est de 28 %, le prix de l'article est : $\frac{128}{100} x$.

Si la TVA est de 24 %, le prix de l'article est : $\frac{124}{100} x$.

La baisse est : $\frac{128}{100} - \frac{124}{100} = \frac{4}{100}$. Le pourcentage de baisse est : 4 %.

♦ Exercice n° 60 p. 20

1. • La masse de laine pour faire 25 mètres de tissu en 1,2 mètre de largeur est : $34 \times \frac{1,2}{0,8} = 51 \text{ kg}$.

• La masse de laine pour faire 10 mètres de tissu en 1,2 mètre de largeur est : $51 \times \frac{10}{25} = 20,4 \text{ kg}$.

2. • La masse de laine pour faire 25 mètres de tissu en 1,5 mètre de largeur est : $34 \times \frac{1,5}{0,8} = 63,75 \text{ kg}$.

• La longueur de tissu en 1,5 mètre de largeur que l'on peut faire avec 51 kg de laine est : $25 \times \frac{51}{63,75} = 20 \text{ mètres}$.

♦ Exercice n° 61 p. 20

1. • Le nombre de brocs de vin que 9 artisans boivent en 30 jours est : $12 \times \frac{30}{8} = 45$.

• Le nombre de brocs de vin que 24 artisans boivent en 30 jours est : $45 \times \frac{24}{9} = 120$.

2. • En 15 jours, les bœufs dont on cherche le nombre,

mangent $5 \times \frac{15}{10} = 7,5$ cens de foin.

• Le nombre de bœufs cherché est donc : $12 \times \frac{7,5}{3} = 30$.

♦ Exercice n° 62 p. 20

1. a) On a : $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Donc : $\Phi^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{5}) + 2}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \Phi + 1$.

	largeur	0,8	1,2
longueur			
	25	34	
	10		?

Annotations: $\times \frac{1,2}{0,8}$ (from 0,8 to 1,2), $\times \frac{10}{25}$ (from 25 to 10)

	largeur	0,8	1,5
longueur			
	25	34	$34 \times \frac{1,5}{0,8}$
	?		51

Annotations: $\times \frac{1,5}{0,8}$ (from 0,8 to 1,5), $\times \frac{51}{63,75}$ (from $34 \times \frac{1,5}{0,8}$ to 51)

	jours	8	30
artisans			
	9	12	
	24		?

Annotations: $\times \frac{30}{8}$ (from 8 to 30), $\times \frac{24}{9}$ (from 9 to 24)

	jours	15	10
bœufs			
	12	4	
	?	$5 \times \frac{15}{10}$	5

Annotations: $\times \frac{15}{10}$ (from 10 to 15), $\times \frac{7,5}{3}$ (from 5 to 7,5)

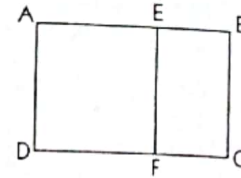
b) En multipliant chaque membre de l'égalité $\Phi^2 = \Phi + 1$ par $\frac{1}{\Phi}$, on obtient : $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$;
 donc : $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.

c) En multipliant chaque membre de l'égalité $\Phi^2 = \Phi + 1$ par Φ , on obtient : $\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$;
 en remplaçant Φ^2 par $\Phi + 1$, on obtient : $\Phi^3 = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$.

2. Désignons par Φ et Φ' les formats respectifs des rectangles ABCD et BCFE.

On a : $\Phi = \frac{AB}{BC}$;

$$\Phi' = \frac{BC}{CF} = \frac{BC}{AB - BC} = \frac{1}{\frac{AB}{BC} - 1} = \frac{1}{\Phi - 1} = \Phi.$$



2 Ordre et valeur absolue

(pages 21 à 38 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- renforcer les acquis du premier cycle dans le domaine des inégalités ;
- renforcer les outils de calcul sur les valeurs absolues ;
- résoudre les équations du type $|x - a| = r$;
- résoudre les inéquations du type $|x - a| < r$ et $|x - a| > r$.

COMMENTAIRES

Tout au long de ce chapitre, la pratique du calcul numérique continuera à être entretenue.

Le support graphique devra chaque fois venir en appui à des situations algébriques (équations, inéquations, etc.). On pourra renforcer le raisonnement par l'absurde que l'élève a découvert au 1^{er} cycle.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Ordre dans \mathbb{R}

- Définition des inéquations dans \mathbb{R} .
- Propriétés des inéquations dans \mathbb{R} .

Encadrement et Approximation

- Différents types d'intervalles de \mathbb{R} .
- Intersection et réunion d'intervalles.
- Encadrement d'un nombre réel.

- Valeurs approchées à α près ($\alpha \in \mathbb{R}$).
- Approximations décimales d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$).

- Ordre de grandeur d'un résultat.

savoir-faire

- Comparer deux nombres réels.
- Ranger des nombres réels.

- Déterminer le centre, l'amplitude d'un intervalle borné.
- Représenter graphiquement un intervalle, une réunion d'intervalles.
- Déterminer l'amplitude d'un encadrement.
- Encadrer une somme, une différence, un produit, un quotient.
- Déterminer :
 - une valeur approchée ;
 - une approximation décimale ;
 - un arrondi.
- Déterminer l'ordre de grandeur d'un résultat.

Valeur absolue

- Propriétés de la valeur absolue :

$$|a| \geq 0$$

$$|a| = 0 \text{ équivaut à } a = 0$$

$$|-a| = |a|$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|ab| = |a| \times |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

- Distance de deux nombres réels.

- Interpréter géométriquement $|x - a|$.
- Résoudre une équation du type $|x - a| = r$.
- Résoudre une inéquation du type $|x - a| < r$.
- Résoudre une inéquation du type $|x - a| > r$.

EXERCICES DU MANUEL

 Exercices du cours

♦ Exercice n° 1.a p. 24

$$a) 5 - \sqrt{3} < 5 + \sqrt{3} \quad b) -\frac{\pi}{\sqrt{17}} < -\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \quad c) \frac{1}{0,9} > 0,1 \quad d) \frac{1}{17} < \frac{1}{12\sqrt{2}}$$

♦ Exercice n° 1.b p. 24

On a : $a - b > 3$; donc : $a - b > 0$. On en déduit : $a > b$.

♦ Exercice n° 1.c p. 24

On a : $a - b < -2$; donc : $a - b < 0$. On en déduit : $a < b$.

♦ Exercice n° 1.d p. 24

On sait que : $a \geq -1$ et $b \geq 2$.

- On a : $a + b \geq 1$; donc : $a + b > 0$.
- On a : $2a \geq -2$ et $b \geq 2$; donc : $2a + b \geq 0$.
- On a : $a \geq -1$ et $3b \geq 6$; donc : $a + 3b \geq 5$; par suite : $a + 3b > 0$.

♦ Exercice n° 2.a p. 30

$$a)]-2; 2[; \quad b)]-3; 1[; \quad c)]-2; +\infty[; \quad d)]-\infty; 3[.$$

♦ Exercice n° 2.b p. 30

Intervalle	Réprésentation
$[1; 0]$	
$]2; 5]$	
$] -3; 1[$	
$] -\infty; 3]$	
$]2,5; +\infty[$	

◆ Exercice n° 2.c p. 30

	Réprésentation de I	Réprésentation de J	$I \cap J$	$I \cup J$
a)			$[-1; 1[$	$]-\infty; 2]$
b)			$[2; 4[$	$]-\infty; +\infty[$
c)			$]0; 3]$	$[-3; 6[$
d)			$]-1; 0[$	$[-2; 2]$

◆ Exercice n° 2.d p. 30

- a) $4,6 < a + b < 4,8$ $3,85 < ab < 4,32$ $-2,5 < a - b < -2,3$ $0,30 < \frac{a}{b} < 0,34$.
- b) $\frac{15}{56} < a + b < \frac{13}{42}$ $\frac{1}{56} < ab < \frac{1}{42}$ $-\frac{1}{24} < a - b < 0$ $\frac{3}{4} < \frac{a}{b} < 1$.

◆ Exercice n° 2.e p. 30

- a) $9,162\ 2 < 6 + \sqrt{10} < 9,162\ 3$ b) $6,324\ 4 < 2\sqrt{10} < 6,324\ 6$ c) $1,581\ 0 < \frac{\sqrt{10}}{2} < 1,581\ 5$
- d) $-3,162\ 3 < -\sqrt{10} < -3,162\ 2$ e) $7,837\ 7 < 11 - \sqrt{10} < 7,837\ 8$ f) $0,316\ 22 < \frac{1}{\sqrt{10}} < 0,316\ 23$.

◆ Exercice n° 2.f p. 30

La valeur approchée de $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}$ à 10^{-3} près par excès est 0,164.

◆ Exercice n° 2.g p. 30

L'arrondi d'ordre 3 du nombre $(3,11 + \sqrt{24,3} \times 5) \times (7,31 \times 3,14 - 0,17)$ est :
 632,409 [F] ; 632,427 [F] ; 632,411 [V] ; 632,483 [F].

◆ Exercice n° 3.a p. 34

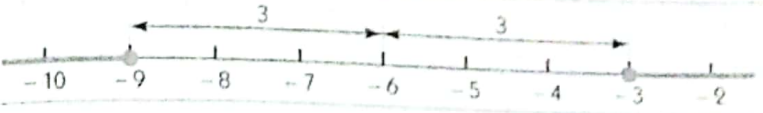
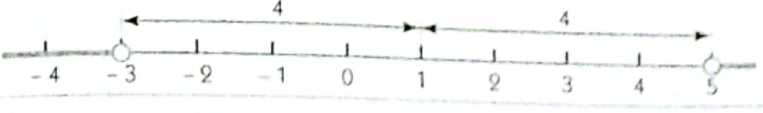
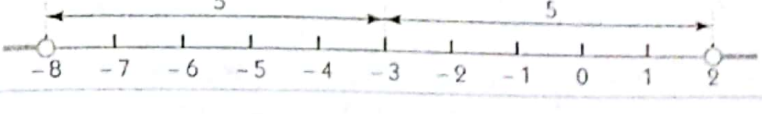
La valeur absolue d'un nombre réel positif est son opposé.	F
La valeur absolue d'un nombre réel négatif est son opposé.	V
La valeur absolue d'une somme est égale à la somme des valeurs absolues.	F
$ -a = a $	V
$ a \geq a$	V
$ a-b = b-a $	V

◆ Exercice n° 3.b p. 34

	Équation	Interprétation graphique	Solution
a)	$ x-2 =2$		$]0; 4[$
b)	$ x+6 =3$		$]-9; -3[$

◆ Exercice n° 3.c p. 34

	Inéquation	Interprétation graphique	Solution
a)	$ x-2 \leq 2$		$[0; 4]$

b)	$ x + 6 \geq 3$		$]-\infty; -9] \cup]-3; +\infty[$
c)	$ x - 1 > 4$		$]-\infty; -3[\cup]5; +\infty[$
d)	$ x + 3 > 5$		$]-\infty; -8[\cup]2; +\infty[$

Exercices d'apprentissage

◆ Exercice n° 1 p. 35

a) $\frac{15}{11} < \frac{151}{110}$ b) $\frac{1\,999}{2\,000} < \frac{1\,999}{1\,998}$ c) $2\sqrt{30} < 11$ d) $\frac{990}{231} < \frac{99}{23}$ e) $2 - 8\sqrt{11} < 2 - 10\sqrt{7}$.

◆ Exercice n° 2 p. 35

a) $0,556 < 0,56 < 0,566 < 0,65 < 0,656 < 0,66$ b) $\frac{1}{1,06} < 0,99 < 1 < 1,01 < \frac{1}{0,99}$
c) $\frac{25}{28} < \frac{26}{28} < \frac{27}{28} < 1 < \frac{28}{27} < \frac{28}{26} < \frac{28}{25}$ d) $\frac{105}{605} < \frac{107}{605} < \frac{112}{610} < \frac{112}{605} < \frac{112}{600}$.

◆ Exercice n° 3 p. 35

• On montre que les seuls nombres positifs sont : $10 - 3\sqrt{11}$ et $51 - 10\sqrt{26}$.

• Comparons ces deux nombres.

La calculatrice donne : $10 - 3\sqrt{11} \approx 0,050\,125\,63$ et $51 - 10\sqrt{26} \approx 0,009\,804\,86$;

donc : $51 - 10\sqrt{26} < 10 - 3\sqrt{11}$.

◆ Exercice n° 4 p. 35

a) On a : $0,978\,21 < 0,978\,22$;

donc : $\sqrt{0,978\,21} < \sqrt{0,978\,22}$;

$$-\sqrt{0,978\,21} > -\sqrt{0,978\,22} ;$$

$$1,001 - \sqrt{0,978\,21} > 1,001 - \sqrt{0,978\,22} ;$$

$$x > y.$$

b) On a : $0,000\,126 < 0,000\,127$;

donc : $\sqrt{0,000\,126} < \sqrt{0,000\,127}$;

$$3 + \sqrt{0,000\,126} < 3 + \sqrt{0,000\,127} ;$$

$$x < y.$$

◆ Exercice n° 5 p. 35

1. Parmi les nombres $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{10}$ et $\frac{2}{3}$, ceux qui sont inférieurs à $\frac{7}{9}$ sont : $\frac{7}{10}$ et $\frac{2}{3}$.

2. Parmi les nombres $-\frac{7}{8}$, $-\frac{8}{9}$, $-\frac{7}{10}$ et $-\frac{2}{3}$, ceux qui sont inférieurs à $-\frac{7}{9}$ sont : $-\frac{8}{9}$ et $-\frac{7}{8}$.

◆ Exercice n° 6 p. 35

a) On a : $x^2 = \frac{3}{4} = \frac{3 \times 9 \times 25}{900} = \frac{675}{900}$;

$$y^2 = \frac{5}{9} = \frac{4 \times 5 \times 25}{900} = \frac{500}{900} ;$$

$$z^2 = \frac{15}{25} = \frac{15 \times 4 \times 9}{900} = \frac{540}{900} .$$

Donc : $x^2 > z^2 > y^2$; on en déduit : $x > z > y$.

b) On a : $x \approx 1,732$; $y \approx 1,618\,03$; $z \approx 1,854\,101$; donc : $z > x > y$.

◆ Exercice n° 7 p. 35

1. On a : $x \in \mathbb{N}$ et $-x \geq -3,9$; donc : $x \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq 3,9$;

Les nombres entiers cherchés sont : 0, 1, 2 et 3.

2. On a : $x \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{1}{x} \geq 0,125$; donc : $x \in \mathbb{N}$ et $0 < x \leq \frac{1}{0,125}$, c'est-à-dire : $x \in \mathbb{N}$ et $0 < x \leq 8$.
Les nombres entiers cherchés sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

◆ Exercice n° 8 p. 35

1.

$b \backslash a$	1	2	3	4	5
1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$
2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{10}$
3	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{15}$
4	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$
5	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{2}{5}$

2. La plus grande valeur de $\frac{a+b}{ab}$ est : 2 ;

la plus petite valeur de $\frac{a+b}{ab}$ est : $\frac{2}{5}$.

◆ Exercice n° 9 p. 35

On sait que : $x > 2$.

a) On a : $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$; donc : $\frac{1}{x} \in]-\infty ; \frac{1}{2}[$

b) On a : $x^2 > 4$; donc : $x^2 \in]4 ; +\infty[$

c) On a : $1-x < -1$ donc : $1-x \in]-\infty ; -1[$

d) On a : $\frac{3}{x+4} < \frac{1}{2}$; donc : $\frac{3}{x+4} \in]-\infty ; \frac{1}{2}[$.

◆ Exercice n° 10 p. 35

a) On a : $\frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x} = \frac{(1-x)(1+x)}{x}$.

Or : pour tout $x \in]0 ; 1[$, $1-x > 0$ et $1+x > 0$; donc : $\frac{1}{x} - x > 0$; c'est-à-dire : $x < \frac{1}{x}$.

b) De manière analogue, on montre que : pour tout $x \in]0 ; 1[$, $x^2 < x$.

c) Pour tout $x \in]0 ; 1[$, $x^2 < x$; donc : $\sqrt{x^2} < \sqrt{x}$; c'est-à-dire : $x < \sqrt{x}$. L'inégalité donnée est fausse.

d) D'après b) : pour tout $x \in]0 ; 1[$, $x^2 < x$; donc : $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$ (1).

D'après a) : pour tout $x \in]0 ; 1[$, $x < \frac{1}{x}$ (2).

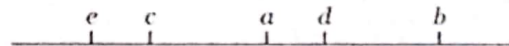
De (1) et (2), on déduit que : pour tout $x \in]0 ; 1[$, $x < \frac{1}{x^2}$.

◆ Exercice n° 11 p. 35

• On a : $d > a$ et $b > d$; donc : $b > a$.

• On a : $d > a$, $a > c$ et $c > e$; donc : $d > e$.

• On a : $a > c$ et $c > e$; donc : $a > e$



◆ Exercice n° 12 p. 35

a) V b) F c) V d) F

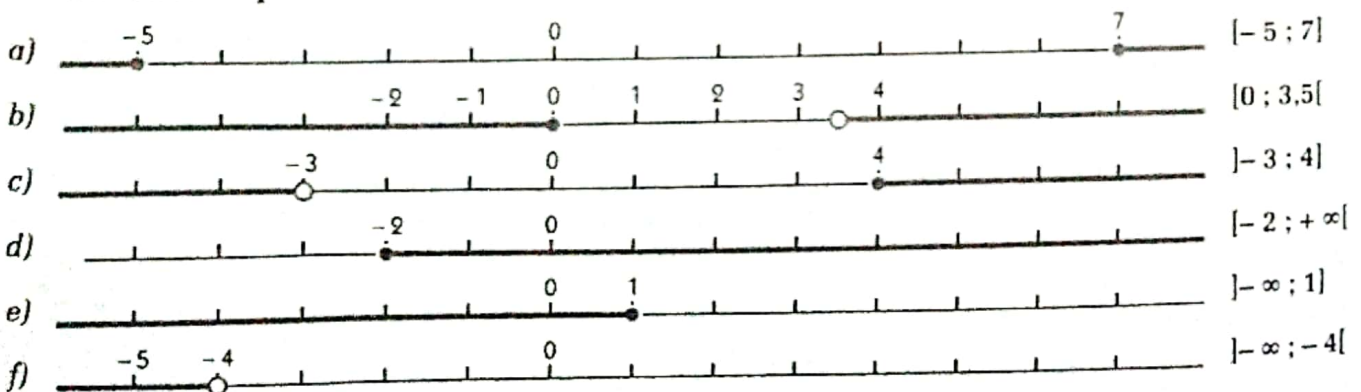
◆ Exercice n° 13 p. 35

On a : $\frac{155}{210} \in]\frac{15}{21} ; \frac{16}{21}[$ et $\frac{156}{210} \in]\frac{15}{21} ; \frac{16}{21}[$.

◆ Exercice n° 14 p. 35

On a : $\frac{4}{5} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$.

◆ Exercice n° 15 p. 35



◆ Exercice n° 16 p. 35

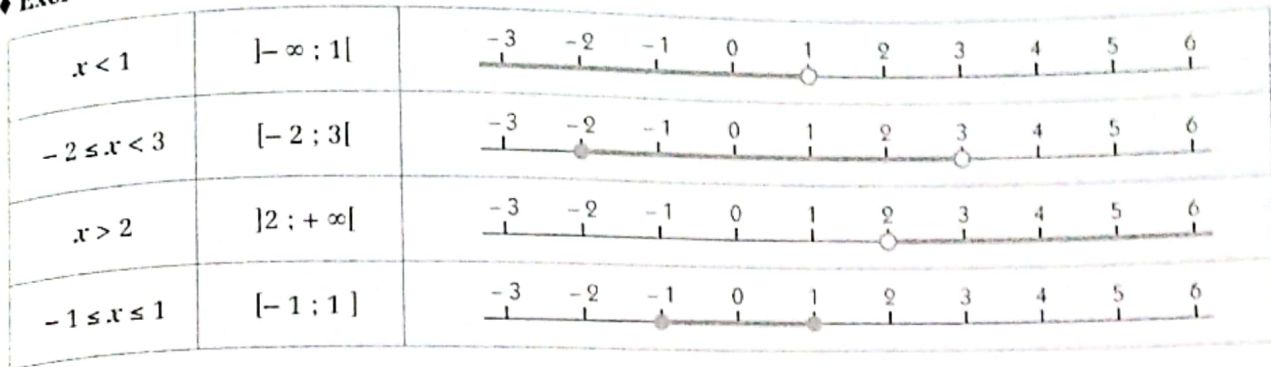
a) $-2 \leq x \leq 1$
e) $x > 2$

b) $1 < x \leq 3$
f) $x \geq -1$

c) $-1 < x \leq 2$
g) $x \leq 0$

d) $-3 \leq x < 0$
h) $x < -3$

◆ Exercice n° 17 p. 36



◆ Exercice n° 18 p. 36

Désignons par c le centre de l'intervalle et par A son amplitude ; on a :

a) $c = \frac{-5 + 3}{2} = -1$; $A = 3 - (-5) = 8$

b) $c = 5$; $A = 10$

c) $c = \frac{-2 - 1}{2} = -1,5$; $A = -1 - (-2) = 1$

d) $c = \frac{4 + 9}{2} = 6,5$; $A = 9 - 4 = 5$.

◆ Exercice n° 19 p. 36

On a : $\frac{1}{2} \leq \frac{12}{x} \leq \frac{3}{5}$ équivaut à $20 \leq x \leq 24$.

Les entiers naturels x tels que $\frac{1}{2} \leq \frac{12}{x} \leq \frac{3}{5}$ sont : 20, 21, 22, 23 et 24.

◆ Exercice n° 20 p. 36

	Réprésentation de I	Réprésentation de J	$I \cap J$	$I \cup J$
a)			$]-1 ; 1[$	$]-2 ; +\infty[$
b)			$]0 ; 2]$	$]-\infty ; 5]$
c)			$]-1 ; 4]$	$]-4 ; 6[$
d)			$]0 ; 2]$	$]-3 ; 3]$

◆ Exercice n° 21 p. 36

a) $18,2 < x < 18,3$

b) $2,995 < x < 2,996$.

◆ Exercice n° 22 p. 36

a) $x - 2 \in]-2 ; 2]$

c) $x^2 \in]0 ; 16]$

b) $\sqrt{x} \in]0 ; 2]$

d) $\frac{1}{x} \in]\frac{1}{4} ; +\infty[$.

◆ Exercice n° 23 p. 36

a) V b) F c) V d) F

◆ Exercice n° 24 p. 36

Soit L la longueur et ℓ la largeur du rectangle.

• On a : $72,8 \leq 2(L + \ell) \leq 73,2$; donc : $36,4 \leq L + \ell \leq 36,6$.

De plus : $14,1 \leq \ell \leq 14,2$; donc : $-14,2 \leq -\ell \leq -14,1$.

En faisant la somme membre à membre, on obtient : $22,2 \leq L \leq 22,5$.

• On a : $14,1 \leq \ell \leq 14,2$ et $22,2 \leq L \leq 22,5$.

En faisant le produit membre à membre, on obtient : $313,02 < L \times \ell < 319,50$.

◆ Exercice n° 25 p. 36

Soit h la hauteur du triangle et b sa base.

On a : $51 \leq \frac{bh}{2} \leq 52$; donc : $102 \leq bh \leq 104$.

De plus : $7,9 \leq b \leq 8,1$; donc : $\frac{1}{8,1} < \frac{1}{b} < \frac{1}{7,9}$.

En faisant le produit membre à membre, on obtient : $\frac{102}{8,1} < h < \frac{104}{7,9}$; c'est-à-dire : $12,59 < h < 13,16$.

◆ Exercice n° 26 p. 36

Soit r le rayon et h la hauteur du tube à essai.

Le volume de l'acide versé dans le tube est : $v = \pi r^2 h$.

On a : $2,4 \leq 2r \leq 2,5$; donc : $1,2 \leq r \leq 1,25$ et $1,44 \leq r^2 \leq 1,56$.

$\begin{cases} 1,44 \leq r^2 \leq 1,56 \\ 6,2 \leq h \leq 6,3. \end{cases}$

En faisant le produit membre à membre, on obtient : $1,44 \times 6,2 \leq r^2 h \leq 1,56 \times 6,3$.

En multipliant chaque membre par π , on obtient : $3,14 \times 1,44 \times 6,2 \leq \pi r^2 h \leq 3,14 \times 1,56 \times 6,3$.

Donc : $28,03 \leq v \leq 30,85$.

◆ Exercice n° 27 p. 36

On donne : $14,02 \leq L \leq 14,04$; $9,75 \leq \ell \leq 9,77$ et $8,55 \leq h \leq 8,57$.

Soit v le volume du pavé droit : $v = L \times \ell \times h$.

On a : $14,02 \times 9,75 \times 8,55 \leq v \leq 14,04 \times 9,77 \times 8,57$; donc : $1\ 168,74 \leq v \leq 1\ 175,55$.

◆ Exercice n° 28 p. 36

L'aire d'un disque de rayon r est : $A = \pi r^2$. On a : $A = 907,46 \text{ cm}^2$.

◆ Exercice n° 29 p. 36

a) L'arrondi d'ordre 3 de $\frac{250}{11}$ est 22,727

b) L'arrondi d'ordre 3 de $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ est 3,354

c) L'arrondi d'ordre 3 de $\frac{5\sqrt{3}-4}{30}$ est 0,155

d) L'arrondi d'ordre 3 de $\pi(\sqrt{3}-1)^2$ est 1,684.

◆ Exercice n° 30 p. 36

a) V b) F c) F d) F

◆ Exercice n° 31 p. 37

$|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

$|1,73-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1,73$

$|2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$

$\left| \frac{2-\sqrt{8}}{2} \right| = \frac{\sqrt{8}-2}{2}$

$|\pi-3,2| = 3,2-\pi$

$|5-\sqrt{17}| = 5-\sqrt{17}$.

◆ Exercice n° 32 p. 37

x est à égale distance de a et b signifie que $x = \frac{a+b}{2}$.

a) $x = -\frac{5}{2}$ b) $x = -\frac{5}{2}$ c) $x = \frac{3}{2}$ d) $x = \frac{4}{15}$.

◆ Exercice n° 33 p. 37

x	-8	-3	-1	0	4	6	10
$ x-4 $	12	7	5	4	0	2	6

◆ Exercice n° 34 p. 37

La distance de 1 à $\frac{48}{49}$ est : $\left| 1 - \frac{48}{49} \right| = \frac{49}{49} - \frac{48}{49} = \frac{1}{49}$;

la distance de 1 à $\frac{49}{48}$ est : $\left| 1 - \frac{49}{48} \right| = \frac{49-48}{48} = \frac{1}{48}$;

or : $49 > 48$; donc : $\frac{1}{49} < \frac{1}{48}$.

Donc, 1 est plus proche de $\frac{48}{49}$ que de $\frac{49}{48}$.

◆ Exercice n° 35 p. 37

- a) $S = \{3; 9\}$ b) $S = \{-7; 3\}$ c) $S = \{2; 4\}$
 d) $S = \{-8; 0\}$ e) $S = \{0; 2\}$ f) $S = \{-5; -1\}$

◆ Exercice n° 36 p. 37

- a) $S = \{3; 9\}$ b) $S = \{-7; 3\}$ c) $S = \{2; 4\}$
 d) $S = \{-8; 0\}$ e) $S = \{0; 2\}$ f) $S = \{-5; -1\}$

◆ Exercice n° 37 p. 37

- a) $S =]-\infty; 1.5[\cup]5.5; +\infty[$ b) $S =]-\infty; -8.5[\cup]-2.5; +\infty[$
 c) $S =]-\infty; 1.25[\cup]3.25; +\infty[$ d) $S =]-\infty; -8[\cup]0; +\infty[$
 e) $S =]-\infty; -1[\cup]5; +\infty[$ f) $S =]-\infty; -10[\cup]0; +\infty[$
 g) $S =]-\infty; 0.5[\cup]2.5; +\infty[$ h) $S =]-\infty; -5.25[\cup]-1.25; +\infty[$

□ Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n° 38 p. 37

1. On a : $1,000\ 006 = 1 + 6 \times 10^{-6}$; $1,000\ 005 = 1 + 5 \times 10^{-6}$; $1,000\ 007 = 1 + 7 \times 10^{-6}$;
 2. On a : $(1,000\ 006)^2 = (1 + 6 \times 10^{-6})^2 = 1 + 12 \times 10^{-6} + 36 \times 10^{-12}$;
 $(1,000\ 005) \times (1,000\ 007) = (1 + 5 \times 10^{-6})(1 + 7 \times 10^{-6}) = 1 + 12 \times 10^{-6} + 35 \times 10^{-12}$;
 donc : $(1,000\ 006)^2 < (1,000\ 005) \times (1,000\ 007)$.

◆ Exercice n° 39 p. 37

On sait que : $0 < a < 1$; donc : $1 - a > 0$.

1. On a : $\frac{1}{1-a} - (1+a) = \frac{a^2}{1-a}$.

Or : pour tout $a \in]0; 1[$, $1 - a > 0$; donc : $\frac{1}{1-a} > 1 + a$.

2. D'après 1. : $1 + 0,000\ 000\ 000\ 1 > \frac{1}{1 - 0,000\ 000\ 000\ 1}$;

c'est-à-dire : $1,000\ 000\ 000\ 1 > \frac{1}{0,999\ 999\ 999\ 9}$.

◆ Exercice n° 40 p. 37

On a : $a - b = 1 + 2 + 3 + \dots + 1\ 999 - 1\ 999 \times 2\ 000$

Or : $1 < 2\ 000$;

$2 < 2\ 000$;

$1\ 998 < 2\ 000$;

$1\ 999 < 2\ 000$.

En faisant la somme membre à membre, on obtient : $1 + 2 + 3 + \dots + 1\ 998 + 1\ 999 < 1\ 999 \times 2\ 000$.
 Donc : $a - b < 0$ ou $a < b$.

◆ Exercice n° 41 p. 37

1. On a : $0 < a < b$; donc : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

$$-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b} ;$$

$$1 - \frac{1}{a} < 1 - \frac{1}{b} ;$$

$$\frac{a-1}{a} < \frac{b-1}{b} .$$

2. a) On a : $0 < 4 < 5$; d'après 1 : $\frac{4-1}{4} < \frac{5-1}{5}$; c'est-à-dire : $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$.

b) On a : $0 < 21 < 43$; d'après 1 : $\frac{21-1}{21} < \frac{43-1}{43}$; c'est-à-dire : $\frac{20}{21} < \frac{42}{43}$.

c) Comparons $\frac{531}{532}$ et $\frac{546}{547}$.

On a : $532 < 547$; d'après 1 : $\frac{532-1}{532} < \frac{547-1}{547}$; c'est-à-dire : $\frac{531}{532} < \frac{546}{547}$.

On en déduit : $\frac{5,31}{5,32} < \frac{5,46}{5,47}$.

d) On montre de même que : $\frac{987,654\ 321}{987,654\ 322} < \frac{987,654\ 322}{987,654\ 323}$.

◆ Exercice n° 42 p. 37

Pour tout entier naturel n , $101 < n^2 < 1\ 001$ équivaut à $11 \leq n \leq 100$.

Donc, il y a 90 carrés parfaits entre 101 et 1 001.

◆ Exercice n° 43 p. 37

Ce nombre connu est π .

◆ Exercice n° 44 p. 37

$\alpha \approx 1,732\ 050\ \underline{926}$, or $\sqrt{3} = 1,732\ 050\ \underline{808}$.

◆ Exercice n° 45 p. 37

1. $V_A = 25 \pi h$; $V_B = 12,25 \pi h$; $V_C = 6,25 \pi h$.

2. On a : $2V_B = 24,5 \pi h$; donc : $V_A > 2V_B$.

On a : $4V_C = 25 \pi h$; donc : $V_A = 4V_C$.

◆ Exercice n° 46 p. 37

Chacun des 100 termes de la somme S est compris entre 25 et 124 :

$$25 \leq 25 \leq 124 ;$$

$$25 \leq 26 \leq 124 ;$$

$$25 \leq 123 \leq 124 ;$$

$$25 \leq 124 \leq 124 .$$

En faisant la somme membre à membre, on obtient : $25 \times 100 \leq S \leq 124 \times 100$;
c'est-à-dire : $2\ 500 \leq S \leq 12\ 400$.

◆ Exercice n° 47 p. 38

On a : $\ell \leq L$; donc : $\ell \times \ell \leq \ell \times L$ et $\ell \times L \leq L \times L$; c'est-à-dire : $\ell^2 \leq \ell \times L$ et $\ell \times L \leq L^2$.

On en déduit que : $\ell^2 \leq \ell \times L \leq L^2$; ou : $\ell^2 \leq 144 \leq L^2$.

Par suite : $\ell \leq 12 \leq L$.

◆ Exercice n° 48 p. 38

Soit v la vitesse du cycliste, t la durée du parcours et d la distance parcourue.

On a : $20 \leq v \leq 25$ et $t = \frac{d}{v}$; donc : $\frac{50}{25} \leq t \leq \frac{50}{20}$; c'est-à-dire : $2 \leq t \leq 2,5$.

L'heure d'arrivée est : $T = t + 8$.

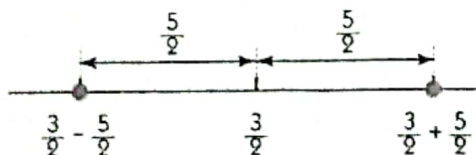
On a : $10 \leq T \leq 10,5$.

L'heure d'arrivée est comprise entre 10 h et 10 h30 min.

◆ Exercice n° 49 p. 38

1. On a : $|2x - 3| = 2 \left| x - \frac{3}{2} \right|$; donc : $|2x - 3| = 5$ équivaut à $\left| x - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{2}$.

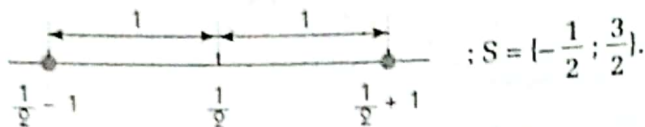
2.



$$S = \left[-1 ; 4 \right]$$

◆ Exercice n° 50 p. 38

a) $|2x - 1| = 2$ équivaut à $|x - \frac{1}{2}| = 1$.



b) $S = [-5; 1]$

c) $S = [-1; 3]$

d) $S = [-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$

e) $S = [-1; 5]$

f) $S = [-\frac{15}{4}; -\frac{5}{4}]$

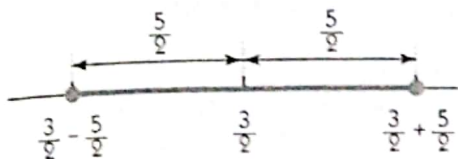
g) $S = [0; 5]$

h) $S = [-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}]$

◆ Exercice n° 51 p. 38

1. On : $|2x - 3| = 2|x - \frac{3}{2}|$; donc : $|2x - 3| \leq 5$ équivaut à $|x - \frac{3}{2}| \leq \frac{5}{2}$.

2.



$S = [-1; 4]$

◆ Exercice n° 52 p. 38

a) $S = [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

b) $S =]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$

c) $S = [-1; 3]$

d) $S =]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

e) $S = [-1; 5[$

f) $S =]-\infty; -\frac{15}{4}[\cup]-\frac{5}{4}; +\infty[$

g) $S =]0; 5[$

h) $S =]-\infty; -\frac{5}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$

◆ Exercice n° 53 p. 38

Soit ℓ la largeur du rectangle et L sa longueur. On a : $\ell \geq 20$; donc : $L \geq 20$ et $\ell \times L \geq 400$.
Si $\ell \times L = 350$, alors $350 \geq 400$; ce qui est impossible.

3 Calcul littéral

(pages 39 à 52 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- faire le point des techniques de développement et de factorisation d'expressions littérales ;
- consolider les notions de polynômes et de fractions rationnelles vues en classe de troisième ;
- traduire certaines phrases en formules mathématiques.

COMMENTAIRES

On évitera les exposés trop théoriques et les exercices trop techniques.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Développements et factorisation

- Propriétés de distributivité :
 $a(b + c) = ab + ac$
 $a(b - c) = ab - ac.$
- Égalité remarquables :
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $((a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$

Polynômes et fractions rationnelles

- Définition d'un polynôme.
- Égalité de deux polynômes.
- Racine d'un polynôme.
- Définition d'une fraction rationnelle.

savoir-faire

- Calculer une somme algébrique comportant ou non des parenthèses.
- Utiliser les égalités remarquables pour développer ou factoriser des expressions algébriques.
- Appliquer le calcul littéral au calcul numérique :
 - pratiquer le calcul mental
 - développer des expressions comprenant des radicaux
 - rendre rationnel un dénominateur.
- Traduire une phrase en une formule.
- Développer, réduire et ordonner un polynôme.
- Vérifier qu'un nombre donné est racine (ou non) d'un polynôme donné.
- Factoriser un polynôme (de degré ≤ 3) dont on connaît une racine.
- Déterminer la forme canonique d'un polynôme du type $x^2 + bx + c.$
- Déterminer les conditions d'existence d'une valeur numérique d'une fraction rationnelle.
- Écrire une somme algébrique de fractions rationnelles sous la forme d'une fraction rationnelle.
- Simplifier une fraction rationnelle.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice 1.a p. 44

- a) $(x - 6)(x + 2) - (x - 2)^2$ est la somme des termes $(x - 6)(x + 2)$ et $-(x - 2)^2$;
- b) $4x + 3(2 - x)$ est la somme des termes $4x$ et $3(2 - x)$;
- c) $(3x + 1)(2x + 4)$ est le produit des facteurs $(3x + 1)$ et $(2x + 4)$;
- d) $-2(x - 1)(x + 3)$ est le produit des facteurs -2 , $(x - 1)$ et $(x + 3)$;
- e) $(x + 5)^2$ est le produit des facteurs $(x + 5)$ et $(x + 5)$;
- f) $(x - 1)(x + 2) - 3x + x^2$ est la somme des termes $(x - 1)(x + 2)$, $-3x$ et x^2 .

◆ Exercice 1.b p. 44

- a) $(3x + 2)^2 - (x + 1)(5x + 7) = 4x^2 - 3$
- c) $(7x - 1)(1 + 2x) - x(5x - 3) = 9x^2 + 8x - 1$
- e) $(4x + 3)^2 - (2x + 5)^2 = 12x^2 + 4x - 16$

- b) $(3x - 4)(x + 2) + (2 - x)(4x + 5) = -x^2 + 5x + 2$
- d) $(x + \frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3}x + 1)(x + 2) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + \frac{22}{9}$
- f) $(x + 3)^2 - (2x - 1)(2x + 1) = -3x^2 + 6x + 10.$

◆ Exercice 1.c p. 44

- a), b), c) et f) sont factorisées ; d) et e) ne sont pas factorisées.

◆ Exercice 1.d p. 44

a) $(2x - 4)(3x + 2) + x^2 - 2x = (x - 2)(7x + 4)$

c) $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$

e) $4x^2 - 16x - 9 = (2x - 4)^2 - 25 = (2x - 9)(2x + 1)$

b) $(x - 1)(x + 2) - (2x + 4)^2 = -3(x + 2)(x + 3)$

d) $(2x - 3)^2 - (5x + 1)^2 = -(3x + 4)(7x - 2)$

f) $9x^3 - 16x = x(3x - 4)(3x + 4)$

◆ Exercice 1.e p. 44

a) $36 \times 0.27 + 36 \times 0.3 = 36 \times (0.27 + 0.3) = 36 \times 1 = 36$

b) $64 \times 56 = (60 + 4)(60 - 4) = 60^2 - 4^2 = 3600 - 16 = 3584$

c) $102^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 4 \times 100 + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$

d) $41^2 - 39^2 = (41 - 39)(41 + 39) = 2 \times 80 = 160$

◆ Exercice 2.a p. 49

a) $P(-1) = 0$; donc : -1 est une racine de $P(x)$.

b) $P(x) = (x + 1)(x - 3)$.

◆ Exercice 2.b p. 49

a) $P(x) = (x + 3)^2 - 4$ b) $P(x) = (x + 1)(x + 5)$.

◆ Exercice 2.c p. 49

$A(x)$ existe si et seulement si $x \neq -1$

$B(x)$ existe si et seulement si $x \neq 2$

$C(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$

$D(x)$ existe pour tout x de \mathbb{R} .

◆ Exercice 2.d p. 49

$A(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$; pour tout $x \neq 0$, $A(x) = \frac{x + 1}{x}$

$B(x)$ existe si et seulement si $x \neq -1$; pour tout $x \neq -1$, $B(x) = \frac{x - 1}{3}$.

◆ Exercice 2.e p. 49

Pour tout $x \neq -1$, $A(x) = \frac{3x^2 + 2x - 3}{x + 1}$;

pour tout $x \neq 1$, $B(x) = \frac{2x - 7}{x - 1}$;

pour tout $x \neq 2$ et $x \neq -2$, $C(x) = \frac{12}{x^2 - 4}$;

pour tout $x \neq 0$ et $x \neq 3$, $D(x) = \frac{4x^2 - 15x + 3}{x(x - 3)}$;

pour tout $x \neq 2$ et $x \neq -2$, $E(x) = \frac{-x + 6}{x^2 - 4}$;

pour tout $x \neq -5$, $F(x) = -\frac{2x + 8}{x + 5}$.

☐ Exercices d'apprentissage

◆ Exercice 1 p. 50

a) $(2x - 1)(-x + 5) = -2x^2 + 11x - 5$

c) $(x^2 - x + 4)(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 6x - 8$

b) $(x - 3)(x + 1) - 3(x - 4) = x^2 - 5x + 9$

d) $(x + 2)(x - 3)(x + 4) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

◆ Exercice 2 p. 50

a) $(x - 1)^2 - (2x + 3)^2 = -3x^2 - 14x - 8$

c) $(x - 2)(x + 2) - (x + 1)^2 = -2x - 5$

b) $(3x + 1)(3x - 1) = 9x^2 - 1$

d) $(x^2 - 5x + 4)(x^2 + 5x - 4) = x^4 - 25x^2 + 40x - 16$

◆ Exercice 3 p. 50

a) $(3x - 7)^2 - (3x - 7)(2x - 1) = (3x - 7)(x - 6)$

c) $(4x - 1)^2 - 4x + 1 = 2(4x - 1)(2x - 1)$

b) $(2x - 5)(x + 1) + x(5 - 2x) = 2x - 5$

d) $(x - 11)^2 + (33 - 3x)(x + 2) = -(x - 11)(2x + 17)$

◆ Exercice 4 p. 50

a) $9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$

c) $16x^2 - 1 = (4x - 1)(4x + 1)$

b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2$

d) $9(x - 3)^2 - (4x + 3)^2 = -(x + 12)(7x - 6)$

◆ Exercice 5 p. 50

a) $(5x + 3)^2 - 4(x + 1)^2 = (3x + 1)(7x + 5)$

c) $(x - 1)^3 + x^2 - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 2)$

b) $x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$

d) $(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1 = x^2$

◆ Exercice 6 p. 50

1. On a : $(x + 1)^2 - (x + 1) = x^2 + 2x + 1 - x - 1 = x^2 + x$.

2. On a : $x^2 + (x + 1)^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 1$

et $\frac{(2x + 1)^2 + 1}{2} = \frac{4x^2 + 4x + 1 + 1}{2} = 2x^2 + 2x + 1$.

◆ Exercice 7 p. 50

• On a : $1\,000\,001^2 - 999\,999^2 = (1\,000\,001 + 999\,999)(1\,000\,001 - 999\,999) = 2\,000\,000 \times 2 = 2\,000^2$.

Donc : $999\,999^2 + 2\,000^2 = 1\,000\,001^2$.

• On montre de même que : $99\,999\,999^2 + 20\,000^2 = 1\,000\,000\,001^2$.

◆ Exercice 8 p. 50

a) $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$

b) $(1 + \sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5}$

c) $(2\sqrt{3} - 5)^2 = 37 - 20\sqrt{5}$

d) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = -3$.

◆ Exercice 9 p. 50

a) $\frac{4}{\sqrt{7} - 2} = \frac{4\sqrt{7} + 8}{3}$

b) $\frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$

d) $\frac{2}{2\sqrt{3} + \sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{7}}{5}$

e) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

f) $\frac{1}{3 + 2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} - 3}{11}$.

◆ Exercice 10 p. 50

$A = \frac{271^2 - 129^2}{442^2 - 158^2} = \frac{(271 - 129)(271 + 129)}{(442 - 158)(442 + 158)} = \frac{142 \times 400}{284 \times 600} = \frac{1}{3}$;

$B = \frac{1\,000^2}{(252 - 248)(252 + 248)} = \frac{1\,000^2}{4 \times 500} = 500$.

◆ Exercice 11 p. 50

x	-2	-1	0	1	2
A(x)	3	1	1	3	7
B(x)	2	0	0	2	6
C(x)	0	-4	-6	-6	-4
D(x)	3	0	-1	0	3

• -2, -1, 0, 1, 2 ne sont pas racines de A(x) ;

• -1 et 0 sont racines de B(x) ;

• 2 est une racine de C(x) ;

• -1 et 1 sont racine de D(x).

◆ Exercice 12 p. 50

a) $P(2) = 0$; donc : 2 est racine de P(x)

b) $P(x) = (x - 2)(3x + 1)$.

◆ Exercice 13 p. 50

1. $P(x) = x + 4$

2. $P(x) = (x - 3)^2$

3. $P(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$.

◆ Exercice 14 p. 50

a) $P(x) = (x - 2)^2 + 1$

b) $P(x) = (x + 1)^2 + 2$

c) $P(x) = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$

d) $P(x) = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

◆ Exercice 15 p. 50

A(x) existe si et seulement $x \neq 0$

C(x) existe si et seulement $x \neq -2$

B(x) existe si et seulement $x \neq 1$

D(x) existe pour tout x de \mathbb{R} .

◆ Exercice 16 p. 51

Pour tout $x \neq 0$, $A(x) = \frac{6x^2 - 15x + 1}{3x}$

pour tout $x \neq -2$, $B(x) = \frac{x - 8}{x + 2}$

pour tout $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $C(x) = \frac{4x - 5}{x^2 - x}$

pour tout $x \neq 1$ et $x \neq -1$, $D(x) = \frac{-2x + 6}{x^2 - 1}$.

♦ Exercice 17 p. 51
 Pour tout $x \neq 1$, $A(x) = \frac{5x-3}{2}$

pour tout $x \neq 0$, $B(x) = \frac{-4(3x+7)}{x}$.

♦ Exercice 18 p. 51

Information	Résultat
choisir un nombre	a
soustraire 3	$a - 3$
multiplier par 2	$2a - 6$
ajouter 8	$2a + 2$
diviser par 2	$a + 1$
soustraire a	1

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 19 p. 51

- On a : $(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} = a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = a^2 + ab + b^2$.
- Pour tous nombres réels a et b , $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ (somme de deux carrés.)

♦ Exercice 20 p. 51

- Pour tous nombres réels x et y positifs, $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy}$.
- Pour tous nombres réels x et y positifs, $x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$; c'est-à-dire : $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

♦ Exercice 21 p. 51

- Le produit d'un nombre réel et de son opposé :
- peut être strictement positif ... F
 - est égal à 1 ... F
 - est inférieur à 0 ... V
 - peut être nul ... V
 - est inférieur à -1 ... F

♦ Exercice 22 p. 51

- Pour tous nombres entiers n et p , on a : $(2n) + (2p) = 2(n+p)$; donc, la somme de deux nombres entiers pairs est un nombre entier pair.
- Pour tous nombres entiers n et p , on a : $(2n+1) + (2p+1) = 2(n+p+1)$; donc, la somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

♦ Exercice 23 p. 51

En effet, pour tout nombre entier n : $n + (n+1) = 2n+1$.

♦ Exercice 24 p. 51

Pour tout nombre entier supérieur à 1, on a : $\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = \frac{-1}{(n-1)}$; donc : $\frac{n+1}{n} < \frac{n}{n-1}$.

♦ Exercice 25 p. 51

- $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$; donc : $(a+b)^2 \geq 4ab$.
- $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$; donc : $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

2. On a :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq 2ab; \\ a^2 + c^2 &\geq 2ac; \\ b^2 + c^2 &\geq 2bc. \end{aligned}$$

En faisant la somme membre à membre, on obtient : $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$;
 donc : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

◆ Exercice 26 p. 51

Simplifions l'expression : $A = \frac{15}{4} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{15^2}\right)$. On a :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} ;$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} ;$$

$$\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} ;$$

$$\left(1 - \frac{1}{15^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{15}\right) \left(1 + \frac{1}{15}\right) = \frac{14}{15} \times \frac{16}{15} .$$

En faisant le produit membre à membre, on obtient : $A = \frac{15}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{16}{15} = 2$.

◆ Exercice 27 p. 51

1. $65^2 - 56^2 = (65 - 56)(65 + 56) = 9 \times 121 = 3^2 \times 11^2$.

2. On a : $5\ 656^2 = 56^2(10^4 + 2 \times 10^2 + 1) = 56^2 \times 101^2$.

$$6\ 565^2 = (6\ 500 + 65)^2 = 6\ 500^2 + 2 \times 6\ 500 \times 65 + 65^2 = 65^2(10^4 + 2 \times 10^2 + 1) \\ = 65^2(10^2 + 1)^2 = 65^2 \times 101^2 ;$$

Donc : $6\ 565^2 - 5\ 656^2 = (65^2 - 56^2) \times 101^2 = 33^2 \times 101^2 ;$

$$\sqrt{6\ 565^2 - 5\ 656^2} = \sqrt{33^2 \times 101^2} = 33 \times 101 = 3\ 333.$$

◆ Exercice 28 p. 51

1. On a :

$$6^2 - 5^2 = (6 + 5)(6 - 5) = 11 \times 1 = 11 ;$$

$$56^2 - 45^2 = (56 + 45)(56 - 45) = 101 \times 11 = 1\ 111 ;$$

$$556^2 - 445^2 = (556 + 445)(556 - 445) = 1\ 001 \times 111 = 111\ 111 ;$$

$$5\ 556^2 - 4\ 445^2 = (5\ 556 + 4\ 445)(5\ 556 - 4\ 445) = 10\ 001 \times 1\ 111 = 11\ 111\ 111.$$

Plus généralement, on a : $\underbrace{55\dots56^2}_{(n-1) \text{ termes}} - \underbrace{44\dots45^2}_{(n-1) \text{ termes}} = \underbrace{11\dots1}_{2n \text{ termes}}$.

◆ Exercice 29 p. 51

a) On a : $(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = x^6 - 1$.

b) D'après a) : pour tout $x \neq 1$, $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{x^6 - 1}{x - 1}$.

$$\bullet A = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{63}{32} \qquad B = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{364}{243} .$$

◆ Exercice 30 p. 51

• Pour tout entier naturel n , $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$; $n - 1$, n et $n + 1$ sont des entiers consécutifs.
 • $n - 1$, n et $n + 1$ étant des entiers consécutifs, l'un d'entre eux est un multiple de 3 ; donc : $n^3 - n$ est divisible par 3.

◆ Exercice 31 p. 51

a) $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$ et $n(n + 3) + 2 = n^2 + 3n + 2$; donc : $(n + 1)(n + 2) = n(n + 3) + 2$.

b) $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n[n(n + 3) + 2](n + 3) + 1 \\ = [n^2(n + 3) + 2n](n + 3) + 1 \\ = n^2(n + 3)^2 + 2n(n + 3) + 1 \\ = [n(n + 3) + 1]^2 .$

◆ Exercice 32 p. 51

a) Les vérifications sont immédiates.

b) Conjecture : $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = [n(n + 3) + 1]^2$.

c) Cette conjecture a été démontrée dans l'exercice n° 31.

◆ Exercice 33 p. 51

a) Les vérifications sont immédiates.

b) Conjecture : pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} < \frac{2}{2n+1} < \frac{1}{n}$.

c) Démonstration de la conjecture :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+1} = \frac{-1}{(n+1)(2n+1)}; \text{ donc : } \frac{1}{n+1} < \frac{2}{2n+1};$$

$$\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(2n+1)}; \text{ donc : } \frac{2}{2n+1} < \frac{1}{n}.$$

◆ Exercice 34 p. 52

a) On a : $(x^2 + 2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = x^4 + 4$.

Donc : $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

b) $2\,000^4 + 4 = (2\,000^2 - 2 \times 2\,000 + 2)(2\,000^2 + 2 \times 2\,000 + 2) = 3\,996\,002 \times 4\,004\,002$;

$2\,001^4 + 4 = (2\,001^2 - 2 \times 2\,001 + 2)(2\,001^2 + 2 \times 2\,001 + 2) = 4\,000\,001 \times 4\,008\,005$.

◆ Exercice 35 p. 52

1. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$.

2. $P(x) = (x^2 + 1)^2$.

3. Il suffit de prendre : $p = x^2 - 1$; $q = 2x$ et $x^2 + 1 = 101$;

on a : $x^2 + 1 = 101$; donc : $x = 10$, $p = 99$ et $q = 20$.

◆ Exercice 36 p. 52

Soit x le contenu initial du sac,

• Le 1^{er} prélèvement est : $\frac{1}{3}x$; il reste dans le sac : $x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$.

• Le 2^e prélèvement est : $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}x$; il reste : $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x$.

Donc, le sac contient la moitié de son contenu initial.

◆ Exercice 37 p. 52

• Le périmètre de la partie coloriée est égal au périmètre du cercle de rayon $\frac{x}{2}$, c'est-à-dire πx .

• L'aire de cette partie est égale à la différence des aires du carré de côté x et du cercle de rayon $\frac{x}{2}$;

c'est-à-dire : $x^2 - \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)x^2$.

◆ Exercice 38 p. 52

Le volume du cube est : $v_1 = x^3 \text{ cm}^3$.

Le volume de la sphère est : $v_2 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^3 \text{ cm}^3 = \frac{\pi}{6} x^3 \text{ cm}^3$.

On a : $v_1 > v_2$.

4 Équations et inéquations

(pages 53 à 68 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- familiariser l'élève à la résolution de certains types d'équations et d'inéquations ;
- rendre l'élève apte à mathématiser une situation concrète.

COMMENTAIRES

Ce chapitre développe chez l'élève l'esprit critique :

- réflexe d'auto-contrôle.

– vérification de la pertinence des résultats obtenus.
Il donne également une bonne occasion d'introduire les notions de « proposition vraie » et de « proposition fautive ».

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Équations dans \mathbb{R}

- Règles de transformation d'une équation.
- Produit de facteurs nul.
- Quotient nul.

Inéquations dans \mathbb{R}

- Règles de transformation d'une inéquation.
- Signe de $ax + b$ ($a \neq 0$).

savoir-faire

- Vérifier si un nombre réel est solution d'une équation.
- Résoudre une équation du type $ax + b = 0$.
- Résoudre une équation du type $(ax + b)(cx + d) = 0$.
- Résoudre une équation du type $\frac{ax + b}{cx + d} = 0$.
- Vérifier si un nombre réel est solution ou non d'une inéquation.
- Résoudre une inéquation du type $ax + b \leq 0$.
- Résoudre une inéquation du type $(ax + b)(cx + d) \leq 0$.
- Résoudre une inéquation du type $\frac{ax + b}{cx + d} \leq 0$.
- Résoudre un système d'inéquations dans \mathbb{R} .
- Représenter sur une droite graduée l'ensemble des solutions d'une inéquation ou d'un système d'inéquations.
- Résoudre des problèmes conduisant à des équations, des inéquations ou des systèmes d'inéquations dans \mathbb{R} .

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice 1.a p. 57

$$\begin{array}{llll} a) x = \frac{2}{3} & b) x = \frac{3}{2} & c) x = 3 & d) x = 3 \\ e) x = -\frac{5}{6} & f) x = \frac{1}{4} & g) x = -2 & h) x = \frac{44}{3} \end{array}$$

◆ Exercice 1.b p. 57

$$a) x = \frac{2}{5} \quad b) x = 4 \quad c) x = \frac{22}{9} \quad d) \text{ Tout nombre réel est solution.}$$

◆ Exercice 1.c p. 57

$$\begin{array}{lll} a) (x + 2)(4x + 1) = 0 & b) (x - 5)(x + 5) = 0 & c) -9(x - 1) = 0 \\ x = -2 \text{ ou } x = -\frac{1}{4} & x = 5 \text{ ou } x = -5 & x = 1. \end{array}$$

◆ Exercice 1.d p. 57

$$\begin{array}{llll} a) 3(6x - 1) = 0 & b) (2x + 5)^2 = 0 & c) (x - 3)^2 = 0 & d) x(x - 3)(x + 3) = 0 \\ x = \frac{1}{6} & x = -\frac{5}{2} & x = 3 & x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = -3. \end{array}$$

◆ Exercice 1.e p. 57

$$\begin{array}{ll} a) x \neq 2 \text{ et } 5x + 2 = 0; \text{ donc : } x = -\frac{2}{5} & b) x \neq 0 \text{ et } 2x - 1 = x; \text{ donc : } x = 1 \\ c) x \neq -1 \text{ et } -3x + 4 = 0; \text{ donc : } x = \frac{4}{3} & d) x \neq -2 \text{ et } (x - 3)(x + 3) = 0; \text{ donc : } x = 3 \text{ ou } x = -3. \end{array}$$

◆ Exercice 1.f p. 57

a) $x \neq -3, x \neq -4$ et $(x+4)^2 = (x+3)^2$;

donc : $x = -\frac{7}{2}$

◆ Exercice 2.a p. 62

$\frac{x-7}{2} \leq \frac{3}{4} - 2x$ équivaut à $x \leq 3,1$.

Donc, les nombres suivants sont solutions de l'inéquation : $-5 ; \frac{9}{11} ; 1 ; 0,75 ; -\frac{13}{6} ; \frac{1}{3} ; -20 ; 0 ; -10$.

◆ Exercice 2.b p. 62

a) $S =]4 ; +\infty[$

b) $S =]-\infty ; -\frac{2}{3}]$

c) $S =]-\infty ; \frac{5}{2}[$

d) $S =]-\infty ; -12[$.

◆ Exercice 2.c p. 62

a) Signe de $x-3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	0	$+$

b) Signe de $4x-6$

x	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
$4x-6$	$-$	0	$+$

c) Signe de $x+2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

d) Signe de $1-3x$

x	$-\infty$	$1/3$	$+\infty$
$1-3x$	$+$	0	$-$

◆ Exercice 2.d p. 62

a) Résolution de $(x-2)(x+3) \leq 0$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$(x-2)(x+3)$	$+$	0	$-$	0

$S = [-3 ; 2]$.

c) $(x-3)^2 - (x+2)^2 > 0$ équivaut à $-5(2x-1) > 0$. Donc : $S =]-\infty ; 12[$.

◆ Exercice 2.e p. 62

a) Signe de $(x-5)(3x+4)$

On fait un tableau de signes ; on en déduit :

si $x \in]-\infty ; -\frac{4}{3}] \cup [5 ; +\infty[$, $(x-5)(3x+4) \geq 0$;

si $x \in]-\frac{4}{3} ; 5]$, $(x-5)(3x+4) \leq 0$.

c) Signe de $-\frac{x}{\sqrt{2}}(x+2)$

On fait un tableau de signes ; on en déduit :

si $x \in [-2 ; 0]$, $-\frac{x}{\sqrt{2}}(x+2) \geq 0$;

si $x \in]-\infty ; -2] \cup [0 ; +\infty[$, $-\frac{x}{\sqrt{2}}(x+2) \leq 0$.

e) Signe de $\frac{(x+4)(3-2x)}{7x^2}$

Pour tout $x \neq 0$, $7x^2 > 0$; donc :

$\frac{(x+4)(3-2x)}{7x^2}$ est du signe de $(x+4)(3-2x)$.

On fait un tableau de signes ; on en déduit :

b) $x \neq 1, x \neq -1$ et

$(2x-1)(x+1) + (-2x+5)(x-1) = 4-2x$;

donc : $x = 1$.

b) Résolution de $-2(4x-3)(\frac{x}{2}+1) \geq 0$

x	$-\infty$	-2	$3/4$	$+\infty$
$4x-3$	$-$	$-$	0	$+$
$x/2+1$	$-$	0	$+$	$+$
$(4x-3)(x/2+1)$	$+$	0	$-$	0

$S = [-2 ; \frac{3}{4}]$.

b) Signe de $(2-4x)(2x+3)$

On fait un tableau de signes ; on en déduit :

si $x \in]-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}]$, $(2-4x)(2x+3) \geq 0$;

si $x \in]-\infty ; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{2} ; +\infty[$, $(2-4x)(2x+3) \leq 0$.

d) Signe de $3x(x-\frac{1}{2})(1-2x)$

On a : $3x(x-\frac{1}{2})(1-2x) = -6x(x-\frac{1}{2})^2$

Donc : si $x \geq 0$, $3x(x-\frac{1}{2})(1-2x) \leq 0$;

si $x \leq 0$, $3x(x-\frac{1}{2})(1-2x) \geq 0$.

f) Signe de $2x^2+1$

On a : pour tout nombre réel x , $2x^2 \geq 0$;

donc : $2x^2+1 \geq 0$.

$$\text{si } x \in]-4; \frac{3}{2}[\text{, } \frac{(x+4)(x-2a)}{2a^2} > 0$$

$$\text{si } x \in]-\infty; -4[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[\text{, } \frac{(x+4)(x-2a)}{2a^2} < 0$$

◆ Exercice 2.f p. 62

$$a) \frac{1}{x-3} < \frac{1}{x+2} \text{, } x \neq 3 \text{ et } x \neq -2$$

$$\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} < 0 \text{ équivaut à } \frac{5}{(x-3)(x+2)} < 0$$

$$S =]-2; 3[$$

$$b) \frac{3}{x+1} < \frac{4}{x+2} \text{, } x \neq -1 \text{ et } x \neq -2$$

$$\frac{3}{x+1} - \frac{4}{x+2} < 0 \text{ équivaut à } \frac{-x+2}{(x+1)(x+2)} < 0$$

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
$-x+2$	+	+	-	0	-
$x+1$	-	-	0	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$\frac{N}{D}$	+	-	+	0	-

$$S =]-2; -1[\cup]2; +\infty[$$

$$c) \frac{1}{x-1} \geq \frac{2}{x+1} \text{ équivaut à } \frac{-x+3}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$-x+3$	+	+	-	0	-
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$\frac{N}{D}$	+	-	+	0	-

$$S =]-\infty; -1[\cup]1; 3]$$

◆ Exercice 2.g p. 62

$$a) \begin{cases} 3x+4 \leq 7 \\ 20-5x \geq 0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq 4 \end{cases}$$



$$S =]-\infty; 1]$$

$$c) \frac{2x+1}{3} \geq \frac{x-2}{2} \text{ équivaut à } x \geq -8$$

$$S =]-8; +\infty[$$

$$d) \frac{2x}{x^2-9} > 0 \text{, } x \neq -3 \text{ et } x \neq 3$$

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$x+3$	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
$\frac{N}{D}$	-	+	0	-	+

$$S =]-3; 0[\cup]3; +\infty[$$

$$f) \frac{1}{2-x} < 2+x \text{ équivaut à } \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{2-x} < 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$x-\sqrt{3}$	-	-	0	+	+
$x+\sqrt{3}$	-	0	+	+	+
$2-x$	+	+	+	0	-
$\frac{N}{D}$	+	0	-	0	+

$$S =]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[\cup]2; +\infty[$$

b) L'inéquation $(x-1)(x+3) \leq 0$ a pour solution $S_1 =]-3; 1]$.

L'inéquation $3-2x \geq 0$ a pour solution :

$$S_2 =]-\infty; \frac{3}{2}]$$



L'ensemble S des solutions du système est l'intersection de S_1 et S_2 ; c'est-à-dire $]-3; 1]$.

Exercices d'apprentissage

ÉQUATIONS

◆ Exercice n° 1 p. 66

a) $x = -5$
e) $x = -1$

b) $x = 3$
f) $x = -4$

c) $x = 0,25$
g) $x = 12$

d) $x = -6$
h) $x = -3.$

◆ Exercice n° 2 p. 66

a) $x = \frac{8}{3}$
e) $x = \frac{1}{2}$

b) $x = \frac{3}{7}$
f) $x = \frac{4}{5}$

c) $x = -1$
g) $x = \frac{3}{5}$

d) $x = -\frac{1}{2}$
h) $x = -2.$

◆ Exercice n° 3 p. 66

a) $x = \frac{2}{3}$

b) $x = -\frac{1}{2}$

c) $x = \frac{10}{7}$

d) $x = 25.$

◆ Exercice n° 4 p. 66

a) $x = 5$ ou $x = -3$
d) $x = -4$ ou $x = 5$

b) $x = 1$ ou $x = 4$
e) $x = \frac{5}{2}$ ou $x = 12$

c) $x = -\frac{5}{3}$ ou $x = 4$
f) $x = 0$ ou $x = 1.$

◆ Exercice n° 5 p. 66

a) $x = 0$
d) $x = -3$ ou $x = \frac{2}{3}$

b) $x = 5$ ou $x = \frac{3}{2}$
e) $x = -1$ ou $x = -\frac{1}{3}$

c) $x = 9$ ou $x = \frac{9}{5}$
f) $x = -2$ ou $x = 6.$

◆ Exercice n° 6 p. 66

a) $x = -1$ ou $x = 4$

b) $x = 2$ ou $x = \frac{3}{2}.$

◆ Exercice n° 7 p. 66

a) $x = \frac{3}{4}$ ou $x = -\frac{3}{5}$
c) $x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = 2$

b) $x = -3$ ou $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = -4$
d) $x = 0$ ou $x = 2.$

◆ Exercice n° 8 p. 66

a) $x = -2$

b) $x = 4$

c) $x = 1$

d) $x = -2.$

◆ Exercice n° 9 p. 66

a) $x = -\frac{2}{3}$

b) $x = -\frac{6}{5}$

c) $x = 1$

d) $x = -\frac{1}{2}.$

◆ Exercice n° 10 p. 66

a) $x = -\frac{9}{4}$

b) $x = 4$

c) $x = \frac{1}{2}.$

◆ Exercice n° 11 p. 66

a) $x^2 = x$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 1.$

b) $x^3 = x$ équivaut à $x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 1.$

c) $x = \frac{1}{x}$ équivaut à $x = -1$ ou $x = 1.$

◆ Exercice n° 12 p. 66

Soit x le prix hors taxe. $x + \frac{5}{100}x = 6\,825$ équivaut à $\frac{105}{100}x = 6\,825$; donc : $x = 6\,500$ F.

◆ Exercice n° 13 p. 66

Soit x la part du plus petit et y celle du plus grand. On a : $\begin{cases} \frac{x}{8} = \frac{y}{15} = k & (1) \\ x + y = 2\,070 & (2) \end{cases}$

D'après (1), $x = 8k$ et $y = 15k$. D'après (2), $23k = 2\,070$; donc : $k = 90$.

On en déduit que : $x = 720$ F et $y = 1\,350$ F.

◆ Exercice n° 14 p. 66

Soit b ce nombre. On a : $b + \frac{1}{b} = 2$.

Donc : $b^2 - 2b + 1 = 0$ ou $(b - 1)^2 = 0$;
on en déduit que : $b = 1$.

◆ Exercice n° 15 p. 66

a) Soit l la largeur et L la longueur de ce rectangle.

On a : $2(L + l) = L \times l$;

c'est-à-dire : $L \times l - 2L - 2l = 0$.

Pour $L = 4$ et $l = 3$, $12 - 8 - 6 = -2$;

donc 4 et 3 ne sont pas solutions.

b) Si $L = 2l$ et $L \times l - 2L - 2l = 0$, on a : $2l^2 - 6l = 0$;
donc : $l = 3$ et $L = 6$.

◆ Exercice n° 16 p. 66

L'aire du terrain A est : x^2 .

L'aire du terrain B est : $(x + 20)^2$.

$\mathcal{A}_1(A + C) = \mathcal{A}_2(B)$ équivaut à $x^2 + 1\,400 = (x + 20)^2$;
donc : $x = 25$.

◆ Exercice n° 17 p. 66

Soit x la longueur du côté du carré.

L'aire du carré est : x^2 .

L'aire du rectangle est : $(x + 3)(x + 5)$.

◆ Exercice n° 21 p. 67

Soit n le nombre de litres d'essence.

Quantité d'essence consommée : $\frac{2}{5}n + \frac{1}{3}n = \frac{11}{15}n$.

Quantité d'essence restant : $n - \frac{11}{15}n = 8$; on en déduit : $n = 30$.

◆ Exercice n° 22 p. 67

a) $S =]-\infty ; 3]$

b) $S =]4 ; +\infty[$

c) $S = [0,5 ; +\infty[$

d) $S =]-\infty ; -5[$

e) $S =]-5 ; +\infty[$

f) $S =]4 ; +\infty[$

g) $S =]-\infty ; 2]$

h) $S =]-7 ; +\infty[$.

◆ Exercice n° 23 p. 67

a) $S = [-3 ; +\infty[$

b) $S =]-\infty ; 2[$

c) $S = [1 ; +\infty[$

d) $S =]-\frac{1}{2} ; +\infty[$

e) $S =]-\infty ; -2[$

f) $S = \mathbb{R}$

g) $S = \emptyset$

h) $S =]-\infty ; -\frac{1}{2}]$.

◆ Exercice n° 24 p. 67

a) $S =]-\infty ; \frac{2}{3}]$

b) $S =]-\infty ; -\frac{1}{2}[$

c) $S = [\frac{10}{7} ; +\infty[$

d) $S =]-\infty ; 25[$.

◆ Exercice n° 25 p. 67

Pour chaque question, on fait un tableau de signes ; on obtient :

a) $S =]-\infty ; -3] \cup]5 ; +\infty[$

b) $S =]1 ; 4[$

c) $S =]-\frac{5}{3} ; 4]$

d) $S =]-\infty ; -4] \cup]5 ; +\infty[$

e) $S =]-\infty ; \frac{5}{2}] \cup [12 ; +\infty[$

f) $S =]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$.

◆ Exercice n° 26 p. 67

a) $(x - 5)(2x - 3) \geq 0$

$S =]-\infty ; \frac{3}{2}] \cup]5 ; +\infty[$

c) $-4(x + 3)(3x - 2) \geq 0$

$S =]-3 ; \frac{2}{3}]$

b) $(2x + 1)(x - 2)(x + 2) < 0$

$S =]-\infty ; -2[\cup]-\frac{1}{2} ; 2[$

d) $(2x - 11)(8x + 3) \leq 0$

$S = [-\frac{3}{8} ; \frac{11}{2}]$

$(x + 3)(x + 5) = x^2 + 79$

équivaut à $x^2 + 8x + 15 = x^2 + 79$; donc : $x = 8$.

◆ Exercice n° 18 p. 66

Soit x ce nombre. On a : $\frac{31 + x}{27 + x} = 2$.

Donc : $31 + x = 54 + 2x$; c'est-à-dire : $x = -23$.

◆ Exercice n° 19 p. 66

Soit x l'âge du fils, aujourd'hui.

	aujourd'hui	dans 6 ans
Âge du père	$x + 27$	$x + 33$
Âge du fils	x	$x + 6$

Quand l'âge du père sera le double de celui du fils, on aura : $x + 33 = 2(x + 6)$.

On en déduit : $x = 21$ et $x + 27 = 48$.

Le fils a 21 ans et le père a 48 ans.

◆ Exercice n° 20 p. 67

Gnamien rembourse S et il lui reste à rembourser

$\frac{2}{3}S$; donc : $S + \frac{2}{3}S = 100\,000$.

On en déduit : $S = 60\,000$ francs.

$$e) -5\left(\frac{1}{2}x - 1\right) > 0$$

$$S = \emptyset$$

♦ Exercice n° 27 p. 67

$$a) S =]0; +\infty[$$

$$d) (x+2)(-x+6) < 0$$

$$S =]-\infty; -2[\cup]6; +\infty[$$

♦ Exercice n° 28 p. 67

$$a) (x+1)(-x+4) \geq 0$$

$$S = [-1; 4]$$

♦ Exercice n° 29 p. 67

$$a) (4x-3)(5x+3) > 0$$

$$S =]-\infty; -\frac{3}{5}[\cup]\frac{3}{4}; +\infty[$$

♦ Exercice n° 30 p. 67

$$a) S =]-2; 4[$$

$$c) S =]-\infty; 1] \cup]2; +\infty[$$

♦ Exercice n° 31 p. 67

$$a) S =]-\infty; -\frac{2}{3}] \cup]2; +\infty[$$

$$c) S =]\frac{1}{2}; 1]$$

♦ Exercice n° 32 p. 67

$$a) \frac{4x+9}{7(3x+5)} \geq 0$$

$$S =]-\infty; -\frac{9}{4}] \cup]-\frac{5}{3}; +\infty[$$

$$b) \frac{16}{x+4} < 0$$

$$S =]-\infty; -4[$$

$$c) \frac{2x-1}{(x-3)(x-2)} \leq 0$$

$$S =]-\infty; \frac{1}{2}] \cup]2; 3[.$$

♦ Exercice n° 33 p. 67

Le périmètre du rectangle est : $7 + 2x$. Le périmètre du triangle est : $3x$.
Le périmètre du rectangle est plus petit que celui du triangle si : $7 + 2x < 3x$; c'est-à-dire : $x > 7$.

♦ Exercice n° 34 p. 67

$$a) \begin{cases} x \geq -3 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = [-3; \frac{1}{2}[$$

$$b) \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ (2-x)(2+x) \geq 0 \end{cases}$$

$$(2-x)(2+x) \geq 0 \text{ équivaut à } x \in [-2; 2]$$

$$S = [-2; \frac{1}{2}[$$

$$c) \frac{x}{x-1} \leq 0 \text{ équivaut à } x \in [0; 1[$$

$$x+2 > 0 \text{ équivaut à } x \in]-2; +\infty[$$

$$S = [0; 1[.$$

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 35 p. 67

$$a) -x(x+1) \geq 0 \text{ équivaut à } x \in [-1; 0]$$

$$x^2 - \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$$

$$x^2 - \frac{1}{4} \leq 0 \text{ équivaut à } x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$$

$$S = [-\frac{1}{2}; 0]$$



b) $-x^2(x^2 - 4) \geq 0$ équivaut à $x \in [-2; 2]$

$\frac{x+2}{x-2} > 0$ équivaut à $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

$S = [-2; 2] \cap (]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[) = \emptyset$



c) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \leq \frac{2}{x^2-1}$ équivaut à $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$\frac{x+2}{x-3} < 1$ équivaut à $x \in]-\infty; 3[$

$S = (]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[) \cap]-\infty; 3[$

$S =]-\infty; -1[\cup]1; 3[$



d) $(x+1)(x-1) \leq 3$ équivaut à $x \in [-2; 2]$

$\frac{x+1}{x-1} < 1$ équivaut à $x \in]-\infty; 1[$

$S = [-2; 2] \cap]-\infty; 1[= [-2; 1[$



◆ Exercice n° 36 p. 68

Soit x la hauteur de chute.

La hauteur du rebond est : $\frac{2}{3}x$.

On a : $\frac{2}{3}x = 72$; donc : $x = \frac{72 \times 3}{2} = 108$ cm.

◆ Exercice n° 37 p. 68

Soit x la contenance du réservoir. Quand les $\frac{5}{6}$ sont consommés, le réservoir contient :

$x - \frac{5}{6}x = \frac{1}{6}x$.

S'il ajoute 28 l, le réservoir est plein au $\frac{3}{4}$;

donc : $\frac{1}{6}x + 28 = \frac{3}{4}x$.

On en déduit : $x = 48$ l.

◆ Exercice n° 39 p. 68

Soit x la largeur du livre.

La longueur du livre est $\frac{4}{3}x$.

L'épaisseur étant de 2 cm, le ficellement en croix permet d'avoir $2 \times 4 = 8$ cm en épaisseur.

Avec 7 cm pour le nœud, il faut retirer :

$7 + 8 = 15$ cm de 99 cm ; $99 - 15 = 84$ cm.

Le ficellement en croix fait intervenir deux fois la longueur et deux fois la largeur.

On a : $2x + 2(\frac{4}{3}x) = 84$; donc : $x = 18$ cm.

◆ Exercice n° 41 p. 68

Soit x la somme qu'il possède.

1^{re} année : $y = (x - 100\ 000) + \frac{1}{3}(x - 100\ 000)$; $y = \frac{4}{3}(x - 100\ 000)$

2^e année, en posant : $z = \frac{4}{3}(y - 100\ 000)$;

$z = \frac{16}{9}(x - \frac{700\ 000}{4})$

3^e année, en posant : $t = \frac{4}{3}(z - 100\ 000)$;

$t = \frac{64}{27}(x - \frac{3\ 700\ 000}{16})$

On a : $t = 2x$; donc : $x = 1\ 480\ 000$ F.

◆ Exercice n° 38 p. 68

Soit x la capacité de la citerne avant les prélèvements, y son contenu.

• On enlève $\frac{1}{5}$ du contenu : $y - \frac{1}{5}y = \frac{4}{5}y$

• Puis encore $\frac{1}{5}$ du reste :

$\frac{4}{5}y - \frac{1}{5}(\frac{4}{5}y) = \frac{4}{5}y - \frac{4}{25}y = \frac{16}{25}y$

• Elle contient encore $\frac{1}{5}x$.

On a : $\frac{16}{25}y = \frac{1}{5}x$; donc : $y = \frac{5}{16}x$.

Donc, la citerne contenait $\frac{5}{16}$ de sa capacité.

◆ Exercice n° 40 p. 68

Soit x le salaire de ce fonctionnaire.

Il dépense, pour se loger : $\frac{1}{4}x$.

Il dépense, pour se nourrir : $\frac{1}{3}x$.

Dépense totale : $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = \frac{7}{12}x$.

Somme restante : $x - \frac{7}{12}x = \frac{5}{12}x$.

On a : $\frac{5}{12}x = 50\ 000$; donc : $x = 120\ 000$ F.

◆ Exercice n° 42 p. 68

Soit n le nombre d'années.
 Dans n années, l'âge de chaque individu va augmenter de n années.

$$37 + n = (8 + n) + (10 + n) + (13 + n)$$

$$= 31 + 3n$$

donc : $n = 3$.

◆ Exercice n° 43 p. 68

Soit x la somme que possédait la dame au début de sa promenade.

Après le premier mendiant, il lui reste :

$$y = x - \left(\frac{1}{2}x + 100\right) = \frac{1}{2}x - 100$$

Après le deuxième mendiant, il lui reste :

$$z = y - \left(\frac{1}{2}y + 200\right) = \frac{1}{2}y - 200 = \frac{x}{4} - 250$$

Après le troisième mendiant, il lui reste :

$$t = z - \left(\frac{1}{2}z + 300\right) = \frac{1}{2}z - 300 = \frac{x}{8} - 425$$

On a : $\frac{x}{8} - 425 = 100$; donc : $x = 4\,200$ F.

◆ Exercice n° 46 p. 68

Soit x la part du premier, y celle du deuxième, z celle du troisième et t celle du quatrième.

On a : $x + y + z + t = 45\,000$.

- On augmente la part du premier : $x + 2\,000$
- On réduit celle du deuxième : $y - 2\,000$
- On double celle du troisième : $2z$
- On diminue de moitié celle du quatrième : $t - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}t$.

Chacun d'eux a la même somme, c'est-à-dire : $x + 2\,000 = y - 2\,000 = 2z = \frac{1}{2}t$.

$$x + 2\,000 = y - 2\,000 \Rightarrow y = x + 4\,000$$

$$x + 2\,000 = 2z \Rightarrow z = \frac{x}{2} + 1\,000$$

$$x + 2\,000 = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 2x + 4\,000$$

$$\text{On a : } x + (x + 4\,000) + \left(\frac{x}{2} + 1\,000\right) + (2x + 4\,000) = 45\,000 ;$$

on en déduit : $x = 8\,000$ F, $y = 12\,000$ F, $z = 5\,000$ F, $t = 20\,000$ F.

◆ Exercice n° 47 p. 68

x est la largeur du chemin, $x > 0$ et $x < 12$.

L'aire de la partie restante est :

$$(30 - x)(12 - x) = x^2 - 42x + 360$$

On doit avoir : $x^2 - 42x + 360 > 280$;

c'est-à-dire : $x^2 - 42x + 80 > 0$;

ou : $(x - 2)(x - 40) > 0$.

On a : $x - 40 < 0$;

donc : $x - 2 < 0$ et $0 < x < 2$.

◆ Exercice n° 48 p. 68

Soit a le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

On a : $a = bq + r$ et $a + 12 = (b + 4)q + r$.

Donc : $a + 12 = bq + 4q + r = a + 4q$.

On en déduit : $4q = 12$ et $q = 3$.

◆ Exercice n° 44 p. 68

Soit x le montant de la fortune du père.

• Part du premier fils : $\frac{1}{2}x - 300\,000$

• Part du deuxième fils : $\frac{1}{3}x - 100\,000$

• Part du troisième fils : $\frac{1}{4}x$

• Part du quatrième fils : $\frac{1}{5}x + 60\,000$

On a :

$$\left(\frac{1}{2}x - 300\,000\right) + \left(\frac{1}{3}x - 100\,000\right) + \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{5}x + 60\,000\right) = x$$

1. On en déduit : $x = 1\,200\,000$ F.

2. Chacun a reçu : $300\,000$ F.

◆ Exercice n° 45 p. 68

Soit n le nombre d'années cherché.

Dans n années, le père aura $(45 + n)$ ans et le fils aura $(5 + n)$ ans.

On aura : $45 + n = 6 \times (5 + n)$; donc : $n = 3$.

◆ Exercice n° 49 p. 68

Soit x le prix avant les deux augmentations.

Après la 1^{re} augmentation, le prix devient :

$$x + \frac{10}{100}x = \frac{11}{10}x$$

Après la 2^e augmentation, le prix devient :

$$\frac{11}{10}x + \frac{20}{100} \times \frac{11}{10}x = \frac{12}{10} \times \frac{11}{10}x$$

$$\text{On a : } \frac{12}{10} \times \frac{11}{10}x = 105\,600 ;$$

donc : $x = 80\,000$ F.

5 Systèmes linéaires

(page 69 à 86 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

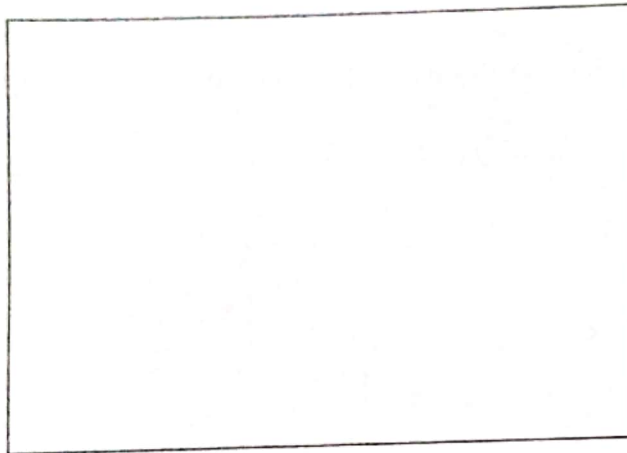
- entretenir et renforcer les acquis du premier cycle concernant les méthodes de résolution des systèmes d'équations et d'inéquations linéaires,
- résoudre des problèmes concrets conduisant à un système d'équations ou d'inéquations.

COMMENTAIRES

Ce chapitre ne comporte aucun savoir nouveau ; il pourra donc être traité sous forme d'exercices résolus. On évitera de résoudre des systèmes comportant des paramètres. La résolution par la méthode des déterminants est hors programme.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs



savoir-faire

- Résoudre un système de deux équations linéaires dans \mathbb{R}^2 :
 - graphiquement
 - par substitution
 - par combinaison
- Résoudre un système de trois équations linéaires dans \mathbb{R}^2 .
- Résoudre graphiquement une inéquation linéaire dans \mathbb{R}^2 .
- Résoudre graphiquement un système de deux inéquations linéaires dans \mathbb{R}^2 .
- Résoudre un problème concret conduisant à un système d'équations ou d'inéquations.

EXERCICES DU MANUEL

☐ Exercices de cours

◆ Exercice 1.a p. 74

a) Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Désignons par :

(\mathcal{D}) la droite d'équation : $2x + 4y - 14 = 0$;

(\mathcal{D}') la droite d'équation : $5x + 10y - 35 = 0$.

On a : $2x + 4y - 14 = 0$ équivaut à $x + 2y - 7 = 0$;

$5x + 10y - 35 = 0$ équivaut à $x + 2y - 7 = 0$.

Les droites (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') ont la même équation ; donc, elles sont confondues.

On en déduit que le système $\begin{cases} 2x + 4y - 14 = 0 \\ 5x + 10y - 35 = 0 \end{cases}$

admet une infinité de solutions ;

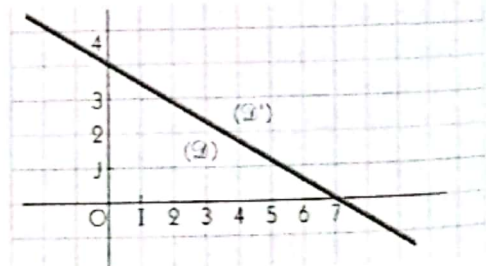
ce sont les couples $(7 - 2\lambda ; \lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Désignons par :

(\mathcal{D}) la droite d'équation : $2x + y = 0$;

(\mathcal{D}') la droite d'équation : $-x - \frac{1}{2}y = 1$.



Les droites (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') semblent être strictement parallèles

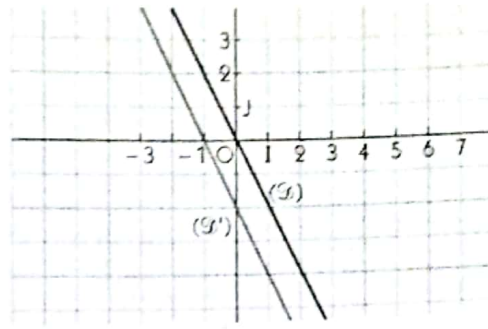
Démontrons ce résultat.

- (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') ont le même coefficient directeur -2 , donc elles sont parallèles.

- de plus, le point O appartient à (\mathcal{D}) , mais ce point n'appartient pas à (\mathcal{D}') .

Donc, (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') sont strictement parallèles.

On en déduit que le système $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$ n'a pas de solution.



◆ Exercice 1.b p. 74

a) $\begin{cases} -6x + 4y = 11 & (1) \\ 10x - 2y = 5 & (2) \end{cases}$

• À partir de l'équation (2), on obtient : $y = 5x - \frac{5}{2}$.

• Dans l'équation (1), on remplace y par son expression en fonction de x ; on obtient : $14x - 10 = 11$.

Donc : $x = \frac{3}{2}$.

• On détermine alors la valeur de y : $y = 5 \times \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5$.

• On vérifie que le couple $(\frac{3}{2}; 5)$ est solution des équations (1) et (2).

Donc, le système a une solution unique : $(\frac{3}{2}; 5)$.

b) Le système a une infinité de solutions : les couples $(\lambda; 4\lambda - 8)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Le système a une solution unique : $(-3; 4)$.

d) Le système n'a pas de solution.

◆ Exercice 1.c p. 74

a) Le système a une solution unique : $(2; 3)$

c) Le système a une solution unique : $(-5; -2)$

b) Le système a une solution unique : $(14; 6)$

d) Le système n'a pas de solution.

◆ Exercice 1.d p. 74

a) Le système $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$

a pour solution unique le couple $(3; 2)$.

$(3; 2)$ vérifie l'équation $3x - 2y - 5 = 0$.

Donc $(3; 2)$ est l'unique solution du système

$$\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \\ 3x - 2y - 5 = 0. \end{cases}$$

b) Le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ a pour solution unique le couple $(\frac{11}{5}; \frac{4}{5})$.

Or : $-2 \times \frac{11}{5} + 3 \times \frac{4}{5} = -2$.

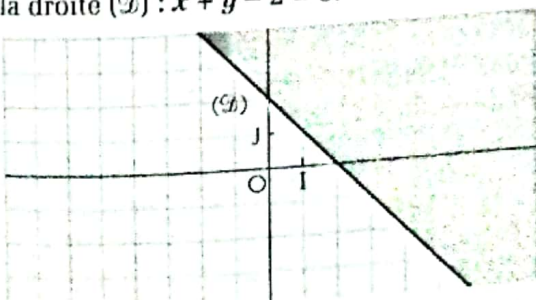
Donc, le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$

n'a pas de solution.

◆ Exercice 2.a p. 78

a) $x + y - 2 > 0$

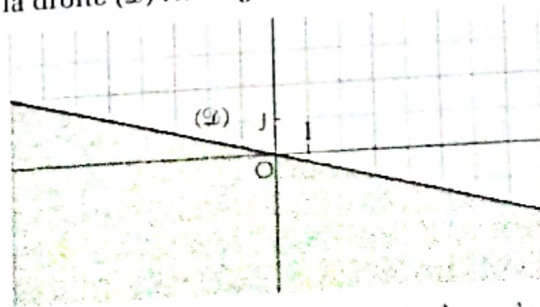
Soit la droite $(\mathcal{D}) : x + y - 2 = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (\mathcal{D}) exclue.

b) $x + 4y < 0$

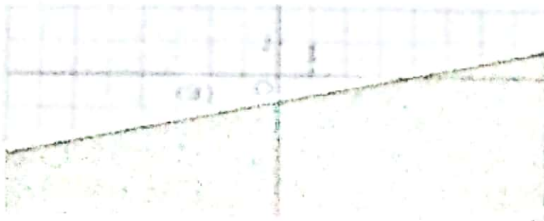
Soit la droite $(\mathcal{D}) : x + 4y = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (\mathcal{D}) exclue.

c) $x > 5y + 4$

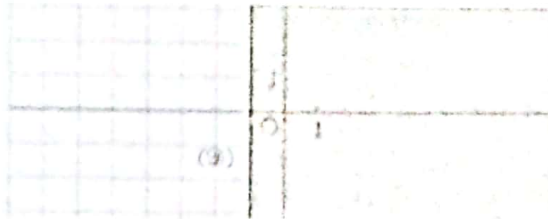
Soit la droite (D) : $x - 5y - 4 = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (D) exclue.

e) $4x + 4 \geq 0$

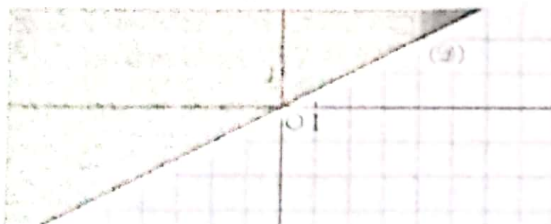
Soit la droite (D) : $x + 1 = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (D) incluse.

g) $x \leq 2y$

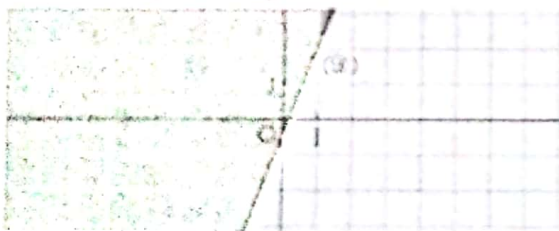
Soit la droite (D) : $x - 2y = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (D) incluse.

i) $5x - 2y \leq 1$

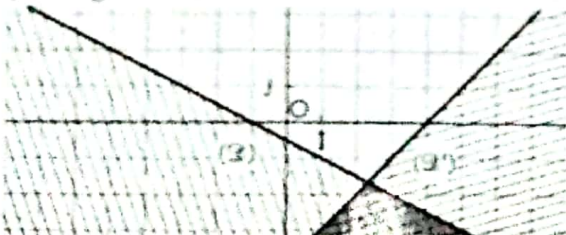
Soit la droite (D) : $5x - 2y - 1 = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (D) incluse.

◆ Exercice 2.b p. 78

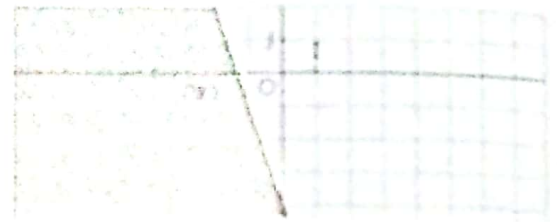
a) Soit les droites (D) : $x + 2y + 1 = 0$
et (D') : $x - y - 4 = 0$.



L'ensemble des solutions est la partie grisée du plan.

d) $y + 4 < -3x$

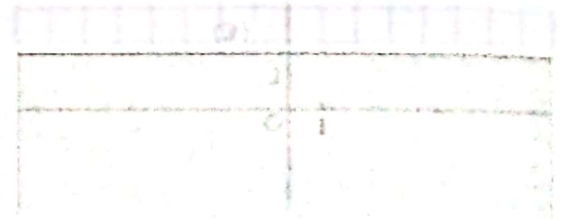
Soit la droite (D) : $3x + y + 4 = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (D) exclue.

f) $2y - 3 < 0$

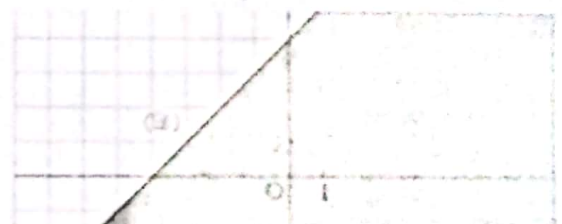
Soit la droite (D) : $2y - 3 = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (D) exclue.

h) $x - y + 4 \geq 0$

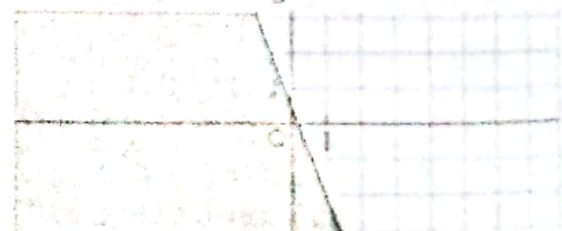
Soit la droite (D) : $x - y + 4 = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (D) incluse.

j) $5x + 2y \leq 1$

Soit la droite (D) : $5x + 2y - 1 = 0$.

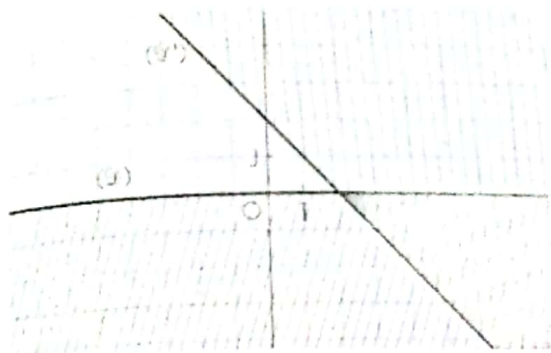


L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (D) incluse.

b) Soit les droites (D) : $-x + 4y + 2 = 0$
et (D') : $3x - 12y - 12 = 0$.



c) Soit les droites $(\mathcal{D}) : y = 0$
 et $(\mathcal{D}') : x + y - 2 = 0$.



L'ensemble des solutions est la partie grisée du plan.

◆ Exercice 3.a p.82

On résume les informations dans le tableau ci-contre.
 Désignons par : x la note obtenue en Mathématiques ;
 y la note obtenue en Français.

Coefficient de Mathématiques	2	1
Coefficient de Français	3	4
Moyenne	13,20	13,60

On a :
$$\begin{cases} \frac{2x + 3y}{5} = 13,20 \\ \frac{x + 4y}{5} = 13,60 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 66 \\ x + 4y = 68. \end{cases}$$

On trouve : $x = 12$ et $y = 14$.

◆ Exercice 3.b p.82

Désignons par : x la somme placée au taux de 2 % ;
 y la somme placée au taux de 5 %.

On a :
$$\begin{cases} x + y = 200\ 000 \\ \frac{2}{100}x + \frac{5}{100}y = 8\ 500 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} x + y = 200\ 000 \\ 2x + 5y = 850\ 000. \end{cases}$$

On trouve : $x = 50\ 000$ F CFA et $y = 150\ 000$ F CFA.

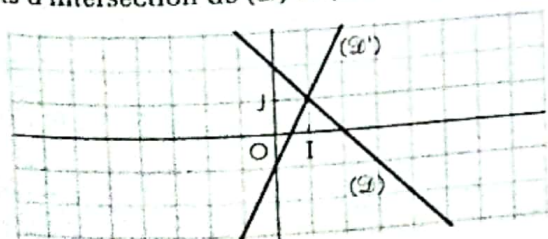
☐ Exercices d'apprentissage

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

◆ Exercice n° 1 p. 83

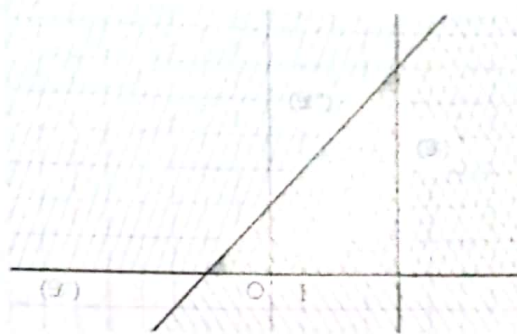
a) Soit les droites $(\mathcal{D}) : y + x = 2$;
 et $(\mathcal{D}') : y = 2x - 1$.

Les solutions du système sont les coordonnées des points d'intersection de (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') .



(\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') sont sécantes.
 Le système a une solution unique : $(1 ; 1)$.

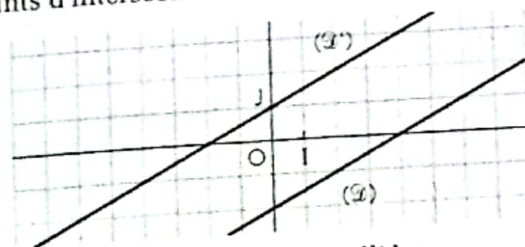
d) Soit les droites $(\mathcal{D}) : x - 4 = 0$;
 et $(\mathcal{D}') : x - y + 2 = 0$.



L'ensemble des solutions est la partie grisée du plan.

b) Soit les droites $(\mathcal{D}) : x - 2y = 4$;
 et $(\mathcal{D}') : -2x + 4y = 4$.

Les solutions du système sont les coordonnées des points d'intersection de (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') .



(\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') sont strictement parallèles.
 Le système n'a pas de solution.

◆ Exercice n° 2 p. 83

a) Le système a une solution unique : $(\frac{7}{4}; \frac{3}{4})$

c) Le système a une solution unique : $(0; 3)$

e) Le système n'a pas de solution

b) Le système a une solution unique : $(\frac{205}{39}; \frac{53}{39})$

d) Le système a une solution unique : $(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$

f) Le système a une solution unique : $(-5; -3)$

◆ Exercice n° 3 p. 83

a) Le système a une solution unique : $(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$

c) Le système a une solution unique : $(\frac{7}{2}; \frac{15}{4})$

e) Le système a une solution unique : $(-\frac{131}{9}; \frac{38}{9})$

b) Le système a une solution unique : $(6; 1)$

d) Les nombres solutions sont de la forme $(2\lambda - 2; \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

f) Le système a une solution unique : $(-\frac{7}{4}; \frac{7}{6})$

◆ Exercice n° 4 p. 83

a) Le système n'a pas de solution

c) Le système a une solution unique : $(\frac{16}{7}; -\frac{9}{7})$

b) Le système a une solution unique : $(\frac{10}{7}; \frac{26}{7})$

d) Le système a une solution unique : $(\frac{5}{4}; \frac{9}{8})$

◆ Exercice n° 5 p. 83

Soit les points $A(2; 1)$ et $B(0; 2)$.

La figure est la représentation des droites (IA) et (AB) :

c'est-à-dire une interprétation graphique du système : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

◆ Exercice n° 6 p. 83

La figure est l'interprétation graphique du système : $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

◆ Exercice n° 7 p. 83

Le système $\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ a pour solution : $(1; 2)$.

SYSTÈMES D'INÉQUATIONS

◆ Exercice n° 8 p. 83

1. Les couples $(0; -1)$ et $(3; 4)$ ne sont pas solutions du système ; les couples $(2; 20)$ et $(-1; 1)$ sont solutions du système.

2. Les couples d'abscisse 2 solutions du système vérifient l'inéquation : $8 - y \leq -3$; c'est-à-dire : $y \geq 11$. On peut choisir les couples : $(2; 11)$ et $(2; 12)$.

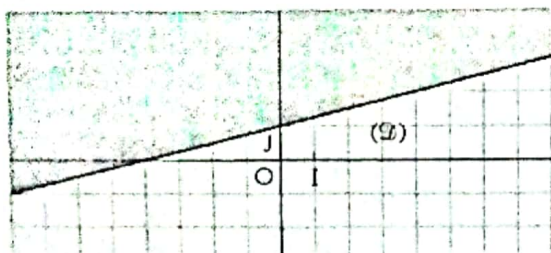
3. Les couples d'ordonnée -5 solutions du système vérifient l'inéquation : $4x + 5 \leq -3$; c'est-à-dire : $x \leq -2$.

On peut choisir les couples : $(-2; -5)$, $(-3; -5)$ et $(-4; -5)$.

◆ Exercice n° 9 p. 83

a) $-x + 4y \geq 4$

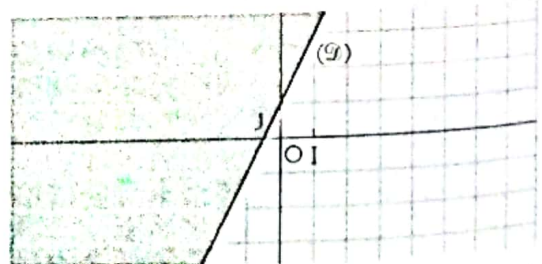
Soit la droite (D) : $-x + 4y - 4 = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (D) inclus.

b) $2x - y \leq -1$

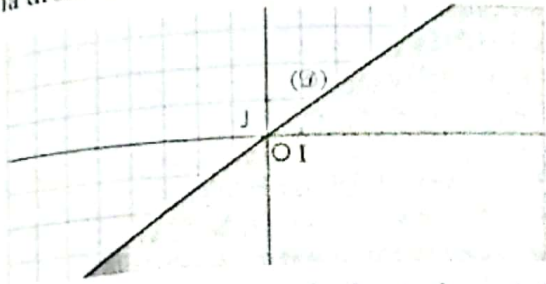
Soit la droite (D) : $2x - y + 1 = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (D) inclus.

c) $2x - 3y > 0$

Soit la droite $(\mathcal{D}) : 2x - 3y = 0$.



L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (\mathcal{D}) exclue.

◆ Exercice n° 10 p. 83

La figure est une interprétation graphique de l'inéquation : $3x + 2y \geq 6$.

◆ Exercice n° 12 p. 84

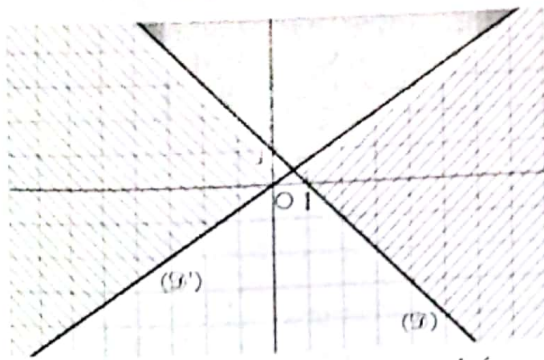
1. Les couples $(1 ; 2)$ et $(0 ; 3)$ sont solutions du système d'inéquations ;
les couples $(1 ; 0)$ et $(2 ; -1)$ ne sont pas solutions du système d'inéquations.

2. Un couple $(3 ; y)$ est solution du système d'inéquations si et seulement si $\begin{cases} -3 + y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$;
c'est-à-dire : $\begin{cases} y \geq 3 \\ y \leq 1. \end{cases}$

On ne peut pas trouver de couple solution de l'inéquation d'abscisse 3.

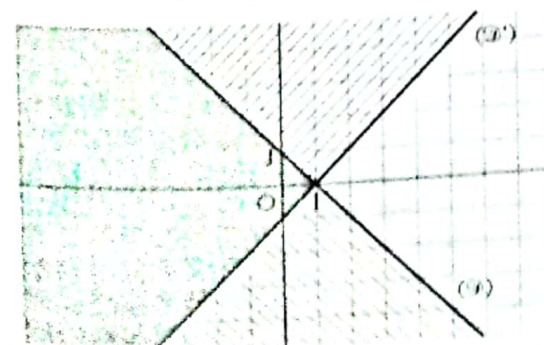
◆ Exercice n° 13 p. 84

a) Soit les droites $(\mathcal{D}) : x + y - 1 = 0$;
et $(\mathcal{D}') : 2x - 3y = 0$.



L'ensemble des solutions est la partie grisée, bords non compris.

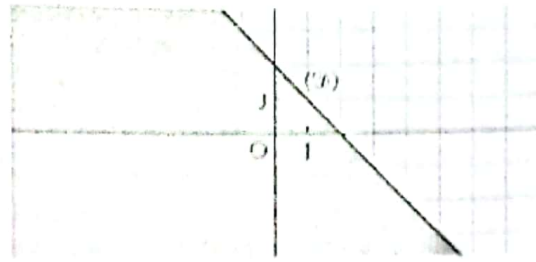
c) Soit les droites $(\mathcal{D}) : x + y - 1 = 0$;
et $(\mathcal{D}') : x - y - 1 = 0$.



L'ensemble des solutions est la partie grisée, bords compris.

d) $x + y < 2$

Soit la droite $(\mathcal{D}) : x + y - 2 = 0$.

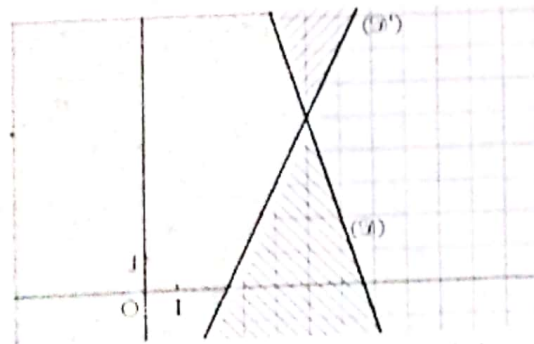


L'ensemble des solutions est le demi-plan grisé, (\mathcal{D}) exclue.

◆ Exercice n° 11 p. 83

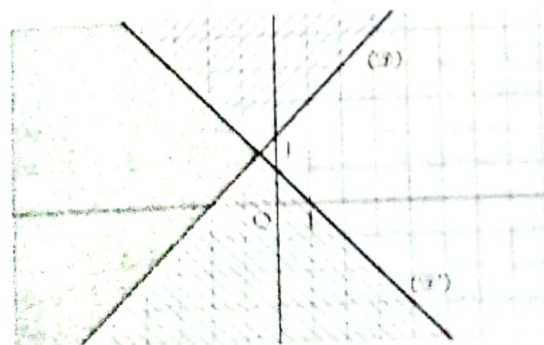
La figure est une interprétation graphique de l'inéquation : $2x - y > 0$.

b) Soit les droites $(\mathcal{D}) : 3x + y - 20 = 0$;
et $(\mathcal{D}') : 2x - y - 5 = 0$.



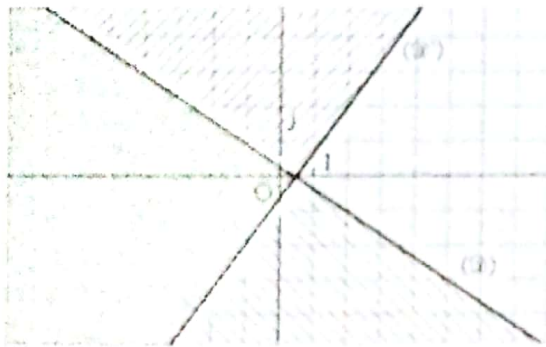
L'ensemble des solutions est la partie grisée, bords non compris.

d) Soit les droites $(\mathcal{D}) : x - y + 2 = 0$;
et $(\mathcal{D}') : x + y - 1 = 0$.



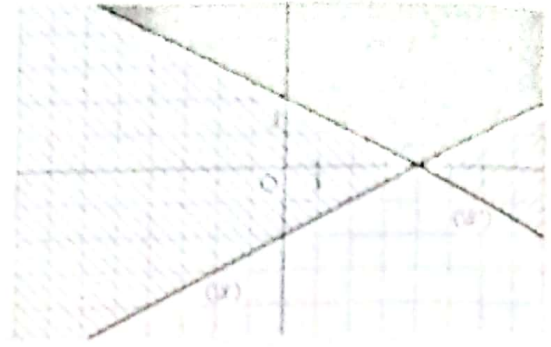
L'ensemble des solutions est la partie grisée, bords compris.

e) Soit les droites $(D) : 2x + 3y - 1 = 0$;
 et $(D') : 4x - 3y - 2 = 0$.



L'ensemble des solutions est la partie grisée, bords non compris.

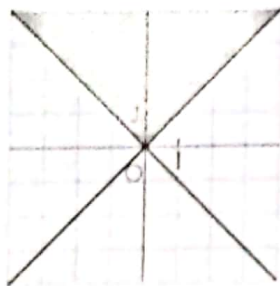
f) Soit les droites $(D) : -x + 2y + 4 = 0$;
 et $(D') : 7x + 14y - 28 = 0$.



L'ensemble des solutions est la partie grisée, bords non compris.

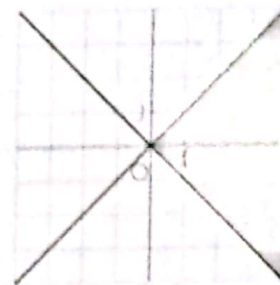
◆ Exercice n° 14 p. 84

a)



Le système d'inéquations est : $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$

b)



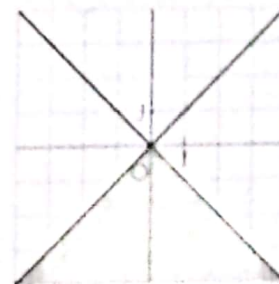
Le système d'inéquations est : $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$

c)



Le système d'inéquations est : $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$

d)



Le système d'inéquations est : $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

◆ Exercice n° 15 p. 84

Soit x et y ces deux nombres ($x \geq y$).

On a : $\begin{cases} x + y = 89 \\ x - y = 9 \end{cases}$

On obtient : $x = 49$ et $y = 40$.

◆ Exercice n° 17 p. 84

Soit x et y ces deux nombres.

On a : $\begin{cases} x + y = 856 \\ x = 3y \end{cases}$

On obtient : $x = 642$ et $y = 214$.

◆ Exercice n° 16 p. 84

Soit x et y ces deux nombres ($x > y$).

On a : $\begin{cases} 3x - 2y = 20 \\ 2x + 3y = 61 \end{cases}$

On obtient : $x = 14$ et $y = 11$.

◆ Exercice n° 18 p. 84

Soit x le dividende et y le diviseur.

On a : $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x - y = 38 \end{cases}$

On obtient : $x = 56$ et $y = 18$.

♦ Exercice n° 19 p. 84

Soit x le poids d'un pot de sorgho et y celui d'un pot de maïs concassé.

$$\text{On a : } \begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 2x + 5y = 9. \end{cases}$$

On obtient : $x = \frac{6}{8} = 0,75$ et $y = \frac{3}{2} = 1,5$.

Le poids d'un pot de sorgho est 0,75 kg et celui d'un pot de maïs concassé est 1,5 kg.

♦ Exercice n° 20 p. 84

Soit x le nombre de crayons bleus et y le nombre de crayons rouges.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y = 10 \\ x + 3 = 2(y + 2) \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} x + y = 10 \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

On obtient : $x = 7$ et $y = 3$.

Il y a 7 crayons bleus et 3 crayons rouges.

♦ Exercice n° 21 p. 84

Soit x le nombre de pièces de 100 F et y le nombre de pièces de 25 F.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y = 240 \\ 100x + 25y = 19500 \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} x + y = 240 \\ 4x + y = 780. \end{cases}$$

On obtient : $x = 180$ et $y = 60$.

Il y a 180 pièces de 100 F et 60 pièces de 25 F.

♦ Exercice n° 22 p. 84

Soit x le nombre de lièvres et y le nombre de perdrix.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y = 10 \\ 4x + 2y = 26 \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + y = 13. \end{cases}$$

On obtient : $x = 3$ et $y = 7$.

Boukari a tué 3 lièvres et 7 perdrix.

♦ Exercice n° 23 p. 84

1. Soit x l'argent de poche de Fredy et y celui de Lauraine.

La dépense de Fredy est : $\frac{1}{3}x$; celle de Lauraine est : $\frac{4}{5}y$.

$$\text{On a : } \begin{cases} x = 3y \\ \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}y = 900 \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} x = 3y \\ 5x + 12y = 13\,500. \end{cases}$$

On obtient : $x = 1\,500$ et $y = 500$.

Au départ, Fredy avait 1 500 F et Lauraine 500 F.

2. Fredy a dépensé 500 F et Lauraine 400 F.

♦ Exercice n° 24 p. 84

Soit x le nombre de sacs de maïs et y le nombre de sacs de riz.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + 1 = \frac{25}{100}(x + y) \\ x - 1 = \frac{20}{100}(x + y) \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} 3x - y = -4 \\ 4x - y = 5. \end{cases}$$

On obtient : $x = 9$ et $y = 31$.

Le magasin contient 9 sacs de maïs et 31 sacs de riz.

♦ Exercice n° 25 p. 84

Soit L la longueur et l la largeur du terrain rectangulaire.

$$\text{On a : } \begin{cases} L + l = 112 \\ (L - 3)(l + 3) = L \times l + 15 \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} L + l = 112 \\ L - l = 8. \end{cases}$$

On obtient : $L = 60$ et $l = 52$.

◆ Exercice n° 26 p. 84

Soit x la somme prêtée à Séry et y la somme prêtée à Rita.

$$\text{On a : } \begin{cases} \frac{20}{100}x + \frac{15}{100}y = 7\,500 \\ x + y = 40\,000 \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} x + y = 40\,000 \\ 20x + 15y = 750\,000. \end{cases}$$

On obtient : $x = 30\,000$ F et $y = 10\,000$ F.

◆ Exercice n° 27 p. 84

Soit L la longueur et l la largeur du champ rectangulaire.

$$\text{On a : } \begin{cases} 2(L + l) = 122 \\ (L - 7)(l + 2) = L \times l \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} L + l = 61 \\ 2L - 7l = 14. \end{cases}$$

On obtient : $L = 49$ et $l = 12$.

◆ Exercice n° 28 p. 84

Soit x le nombre de pièces de 100 F et y le nombre de mendiants.

- Au départ, la dame généreuse,
 - elle possède la somme de : $100x$;
 - elle distribue aux mendiants la somme de : $300y$;
 - il lui reste alors : $100x - 300y = 500$.
- Si elle avait 2 pièces de 100 F supplémentaires,
 - elle posséderait la somme de : $100(x + 2)$;
 - elle distribuerait la somme de : $400y$;
 - il ne lui resterait rien : $100(x + 2) = 400y$.

$$\text{• On a : } \begin{cases} 100x - 300y = 500 \\ 100(x + 2) = 400y \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} x - 3y = 5 \\ x - 4y = -2. \end{cases}$$

• On obtient : $x = 26$ et $y = 7$.

◆ Exercice n° 29 p. 84

Soit x le nombre de garçons et y le nombre de filles.

$$\text{On a : } \begin{cases} x - 1 = y \\ x = 2(y - 1) \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = -2. \end{cases}$$

On obtient : $x = 4$ et $y = 3$.

La famille Ouédraogo compte 7 enfants.

◆ Exercice n° 30 p. 84

Soit x le nombre de garçons et y le nombre de filles.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y = 10 \\ y = 2(x - 1) \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

On obtient : $x = 4$ et $y = 6$.

La famille compte 4 garçons et 6 filles.

◆ Exercice n° 31 p. 84

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

- Lorsque le cinquième des adultes quitte la salle, il reste $\frac{4}{5}x$ d'adultes.

Ceci correspondant à 2 adultes pour 3 enfants, donc : $\frac{y}{3} = \frac{4}{10}x$; c'est - à - dire : $6x - 5y = 0$.

- Lorsque 44 enfants quittent la salle, il reste $(y - 44)$ enfants.

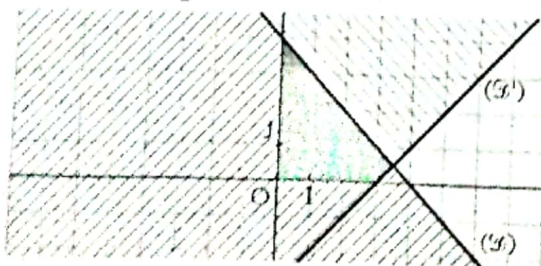
Ceci correspondant à 2 enfants pour 5 adultes, donc : $\frac{y - 44}{2} = \frac{4}{25}x$; c'est-à-dire : $8x - 25y = -1\,100$.

$$\text{On a : } \begin{cases} 6x - 5y = 0 \\ 8x - 25y = -1\,100. \end{cases}$$

On obtient : $x = 50$ et $y = 60$.

Il y a 50 adultes et 60 enfants.

◆ Exercice n° 32 p. 84



Le plan est muni du repère (O, I, J) .

On construit les droites $(D) : x + y = 4$

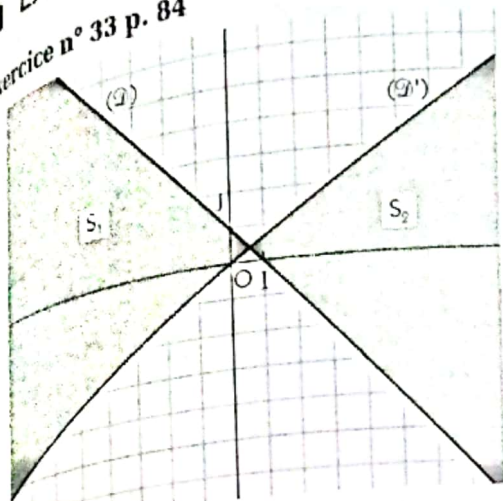
et $(D') : x - y = 3$.

Les solutions du système sont les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels non nuls, coordonnées des points de la partie grisée du plan.

On obtient 3 solutions : $(1 ; 1)$, $(1 ; 2)$, $(2 ; 1)$.

Exercices d'approfondissement

Exercice n° 33 p. 84



Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit S_1 l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ 2x - 3y > 0 \end{cases}$$

S_2 l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ 2x - 3y < 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système initial est la réunion de S_1 et S_2 .

Soit les droites (D) : $x + y - 1 = 0$;

et (D') : $2x - 3y = 0$.

L'ensemble des solutions est la partie grisée, bords non compris.

Exercice n° 34 p. 84

1. Le système $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 5x + 2y = 53 \end{cases}$ a une solution unique : (9 ; 4).

2. Posons : $X = x^2$ et $Y = y^2$. On a : $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ 5x^2 + 2y^2 = 53 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2X - 3Y = 6 \\ 5X + 2Y = 53 \end{cases}$.

On obtient, d'après 1. : $X = 9$ et $Y = 4$. On en déduit que : $x = 3$ ou $x = -3$; $y = 2$ ou $y = -2$.

Le système a 4 solutions : (3 ; 2), (3 ; -2), (-3 ; 2) et (-3 ; -2).

Exercice n° 35 p. 84

1. Le système $\begin{cases} 4x - 5y = 3 \\ 3x + y = \frac{7}{20} \end{cases}$ a une solution unique : $(\frac{1}{4} ; -\frac{2}{5})$.

2. Posons : $X = \frac{1}{x+1}$ et $Y = \frac{1}{y-3}$ avec $x \neq -1$; $y \neq 3$.

On a : $\begin{cases} \frac{4}{x+1} - \frac{5}{y-3} = 3 \\ \frac{3}{x+1} + \frac{1}{y-3} = \frac{7}{20} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 4X - 5Y = 3 \\ 3X + Y = \frac{7}{20} \end{cases}$.

On obtient, d'après 1. : $X = \frac{1}{4}$ et $Y = -\frac{2}{5}$. On en déduit que : $x = 3$ et $y = 12$.

Le système a une solution unique : $(3 ; \frac{1}{2})$.

Exercice n° 36 p. 84

Soit x et y ces deux nombres entiers ($x > y$).

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y = 42 \\ x - y = 16 \end{cases}$$

On obtient : $x = 29$ et $y = 13$.

Exercice n° 38 p. 84

Soit x le côté du grand carré et y le côté du petit carré.

$$\text{On a : } \begin{cases} 4(x - y) = 40 \\ x^2 - y^2 = 500 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

On obtient : $x = 30$ et $y = 20$.

Exercice n° 39 p. 84

Soit x le prix d'un jean et y le prix d'une chemise avant la solde.

$$\text{Le prix d'un jean pendant la solde est : } x - \frac{30}{100}x = \frac{70}{100}x = \frac{7}{10}x.$$

Exercice n° 37 p. 84

Soit ab ce nombre.

$$\text{On a : } \begin{cases} a + b = 13 \\ ba = ab + 27 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a + b = 13 \\ a - b = -3 \end{cases}$$

On obtient : $a = 5$ et $b = 8$. Le nombre cherché est : 58.

Le prix d'une chemise pendant la solde est : $y - \frac{10}{100}y = \frac{90}{100}y = \frac{9}{10}y$.

1. Pour 4 jeans et 8 chemises, on a : $4x + 8y = 140\ 000$ équivaut à $x + 2y = 35\ 000$.

Pour 2 jeans et 5 chemises, on a : $2 \times \frac{7}{10}x + 5 \times \frac{9}{10}y = 66\ 000$ équivaut à $14x + 45y = 660\ 000$.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + 2y = 35\ 000 \\ 14x + 45y = 660\ 000 \end{cases}$$

On obtient : $x = 15\ 000$ et $y = 10\ 000$.

Avant le solde, un jean coûtait 15 000 F et une chemise 10 000 F.

2. Pendant la solde, un jean coûte : $\frac{7}{10} \times 15\ 000 = 10\ 500$ F et une chemise $\frac{9}{10} \times 10\ 000 = 9\ 000$ F.

◆ Exercice n° 40 p. 84

Soit x le prix d'achat du velours et y celui de la soie.

Le prix de vente du velours est : $x + \frac{15}{100}x = \frac{23}{20}x$;

le prix de vente de la soie est : $y + \frac{10}{100}y = \frac{11}{10}y$.

$$\text{On a : } \begin{cases} \frac{23}{20}x + \frac{11}{10}y = 1\ 860\ 000 \\ x + y + 210\ 000 = 1\ 860\ 000 \end{cases} \quad \text{équivaut à } \begin{cases} 23x + 22y = 37\ 200\ 000 \\ x + y = 1\ 650\ 000. \end{cases}$$

On obtient : $x = 900\ 000$ F et $y = 750\ 000$ F.

◆ Exercice n° 41 p. 84

Soit x le coefficient en Français et y celui en Mathématiques.

La moyenne de Oré est : $13 = \frac{12x + 15y + 8}{x + y + 1}$; donc : $x - 2y = -5$.

La moyenne de Touadéra est : $14 = \frac{17x + 12y + 13}{x + y + 1}$; donc : $-3x + 2y = -1$.

$$\text{On a : } \begin{cases} x - 2y = -5 \\ -3x + 2y = -1 \end{cases}$$

On obtient : $x = 3$ et $y = 4$.

Le coefficient en Français est 3 et celui en Mathématiques est 4.

◆ Exercice n° 42 p. 84

Soit x l'âge de l'orateur et y l'âge de Diop.

On a le tableau ci-contre.

$$\text{On a : } \begin{cases} x - y = y - \frac{x}{2} \\ x + (x - y) + x = 108 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 3x - y = 108 \end{cases}$$

On obtient : $x = 48$ et $y = 36$.

L'orateur a 48 ans et Diop a 36 ans.

	passé	présent	futur
Orateur	y	x	$x + (x - y)$
Diop	$\frac{x}{2}$	y	x

◆ Exercice n° 43 p. 84

Soit x la vitesse du premier cycliste et y celle du second.

Les deux cyclistes roulent en sens contraires.

En 10 secondes, le 1^{er} cycliste parcourt $10x$ mètres.

Le second cycliste, roulant en sens contraire, parcourt d'une rencontre à l'autre le reste de la piste, c'est-à-dire : $(170 - 10x)$ mètres ; cette dernière distance est égale à $10y$ mètres.

Donc : $170 - 10x = 10y$; c'est-à-dire : $x + y = 17$.

Les deux cyclistes roulent dans le même sens.

En 170 secondes, le 1^{er} cycliste parcourt $170x$ mètres, et le second $170y$ mètres.

Si le 1^{er} cycliste roule plus vite que le second, il fait entre deux rencontres, un tour de piste de plus que le second ; donc : $170x - 170y = 170$, c'est-à-dire : $x - y = 1$.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

On obtient : $x = 9$ m/s et $y = 8$ m/s.

◆ Exercice n° 44 p. 84

Soit x le nombre de lots « ménage » et y le nombre de lots « repas ».

Le tableau ci-contre résume la situation.

$$\text{On a : } \begin{cases} 9x + 2y = 3\,200 \\ 6x + 12y = 4\,800 \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} 9x + 2y = 3\,200 \\ x + 2y = 800 \end{cases}$$

On obtient : $x = 300$ et $y = 250$.

Pour épuiser le stock, il faut vendre 300 lots « ménage » et 250 lots « repas ».

	torchons	serviettes	quantité
Ménage	9	6	x
Repas	2	12	y
quantité	3 200	4 800	

◆ Exercice n° 45 p. 84

Soit x le nombre de réfrigérateurs et y le nombre de machines à laver.

$$1. \text{ On a : } \begin{cases} 2x + 2,5y = 240 \\ 0,6x + 0,4y = 51 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 4x + 5y = 480 \\ 3x + 2y = 255 \end{cases}$$

On obtient : $x = 45$ et $y = 60$.

2. Les contraintes suivantes traduisent l'énoncé :

$$\begin{cases} 2x + 2,5y \leq 250 \\ 0,6x + 0,4y \leq 60 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 4x + 5y \leq 500 \\ 3x + 2y \leq 300 \end{cases}$$

a) Pour $y = 80$, le système devient : $\begin{cases} 4x + 400 \leq 500 \\ 3x + 160 \leq 300 \end{cases}$; c'est-à-dire : $x \leq 25$.

b) L'usine peut alors fabriquer au maximum 25 réfrigérateurs.

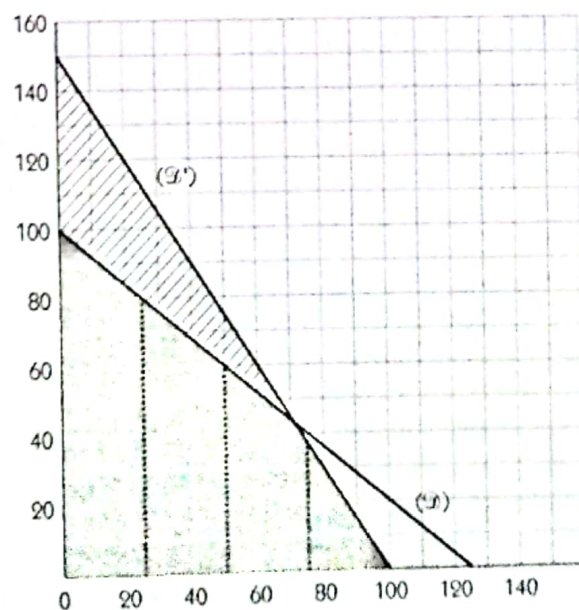
3. On doit résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases} 4x + 5y \leq 500 \\ 3x + 2y \leq 300 \\ x \text{ est multiple de } 25. \end{cases}$

Soit les droites $(\mathcal{D}) : 4x + 5y = 500$ et $(\mathcal{D}') : 3x + 2y = 300$.

Les solutions du système sont les coordonnées $(x ; y)$ des points de la partie grisée du plan telles que x est un multiple de 25.

On obtient les solutions suivantes :

$(25 ; 0), (25 ; 1), (25 ; 2), \dots, (25 ; 79), (25 ; 80),$
 $(50 ; 0), (50 ; 1), (50 ; 2), \dots, (50 ; 59), (50 ; 60),$
 $(75 ; 0), (75 ; 1), (75 ; 2), \dots, (75 ; 36), (75 ; 37),$
 $(100 ; 0).$



6 Fonctions

(pages 87 à 106 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- mettre en place les premières notions sur les fonctions (ensemble de définition, sens de variation, représentation graphique) ;
- montrer quelques utilisations d'une représentation graphique (lectures graphiques, résolutions graphiques d'une équation ou d'une inéquation) ;
- donner la notion de suite numérique.

COMMENTAIRES

La notion de fonction sera introduite à l'aide d'exemples et par la suite, on travaillera sur les fonctions numériques d'une variable réelle présentées sous la forme : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$.

Les lectures graphiques sont d'une importance capitale ; elles seront abordées sous forme d'exercices résolus.

On ne fera pas une étude approfondie des suites numériques.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Généralités sur les fonctions

- Définition d'une fonction numérique.
- Vocabulaire :
 - ensemble de départ ;
 - ensemble d'arrivée ;
 - image, antécédent d'un nombre réel.
- Ensemble de définition d'une fonction.
- Représentation graphique d'une fonction.
- Fonctions égales sur un ensemble.

Variations d'une fonction

- Sens de variation d'une fonction :
 - fonction croissante, strictement croissante ;
 - fonction décroissante, strictement décroissante ;
 - fonction constante.
- Extremum d'une fonction :
 - maximum ;
 - minimum.

savoir-faire

- Déterminer, par le calcul, l'image d'un nombre réel par une fonction.
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f dans le cas où :
 - f est un polynôme ;
 - f est une fraction rationnelle ;
 - f est de la forme : $x \mapsto \sqrt{ax + b}$.
- Reconnaître qu'une courbe est la représentation graphique d'une fonction.
- Vérifier, par le calcul, si un point appartient ou non à la représentation graphique d'une fonction.
- Donner une représentation graphique point par point d'une fonction donnée, sur un intervalle de \mathbb{R} .
- Démontrer que deux fonctions sont égales sur un intervalle.
- Dresser le tableau de variation d'une fonction.
- Interpréter le tableau de variation d'une fonction.
- Étudier le sens de variation de fonctions simples.
- Déterminer graphiquement le sens de variation d'une fonction.

Lectures graphiques

Suites numériques

- Définition d'une suite numérique.

- Déterminer graphiquement un extremum.
- Déterminer graphiquement :
 - l'image d'un nombre réel par une fonction ;
 - les antécédents d'un nombre réel par une fonction ;
 - l'ensemble de définition d'une fonction ;
 - l'ensemble des solutions d'une équation ou d'une inéquation.
- Calculer des termes d'une suite numérique.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 93

a) $f(-1) = \frac{1}{8}$; $f(0) = \frac{1}{5}$; $f(1) = \frac{1}{4}$; $f(2) = \frac{1}{5}$.

b) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2 + 4}$.

♦ Exercice 1.b p. 93

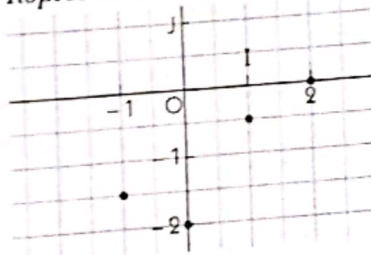
a) $D_f = \{-1 ; 0 ; 1 ; 2\}$.

Table des valeurs

x	-1	0	1	2
f(x)	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0

b) On a : $-3 \notin D_f$; donc : A \notin (\in).
 $f(2) = 0$ et $f(2) \neq -0,8$; donc : B \notin (\in).

Représentation graphique



♦ Exercice 1.c p. 93

a) $D = \mathbb{R}$; b) $D =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$; c) $D =]-\infty ; -4[\cup]-4 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$; d) $D = [-1 ; +\infty[$.

♦ Exercice 1.d p. 93

Le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident est $[-3 ; +\infty[$.

♦ Exercice 2.b p. 96

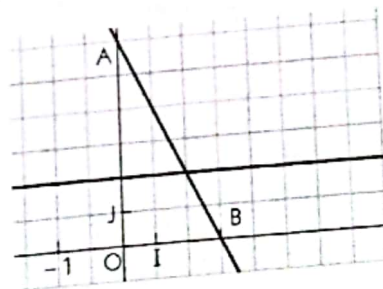
A(0 ; 6) et B(3 ; 0).

a) L'équation $f(x) = 2$ a pour solution 2.

b) L'inéquation $f(x) < 2$ a pour ensemble de solutions $]2 ; +\infty[$.

♦ Exercice 2.a p. 96

a) Les nombres 0 et 3 ont pour image le nombre 1.
 b) 0 a pour antécédents les nombres -1 et 1.



♦ Exercice 3.a p. 100

$x \in [-2 ; 6]$ équivaut à $-2 \leq x$ et $x \leq 6$.
 f est croissante sur $[-2 ; 6]$; donc pour tout $x \in [-2 ; 6]$, on a : $f(-2) \leq f(x)$ et $f(x) \leq f(6)$.
 Donc : $f(-2)$ est un minimum de f sur $[-2 ; 6]$;
 $f(6)$ est un maximum de f sur $[-2 ; 6]$.

♦ Exercice 3.b p. 100

$x \in [-5 ; 3]$ équivaut à $-5 \leq x$ et $x \leq 3$.
 f est décroissante sur $[-5 ; 3]$; donc pour tout $x \in [-5 ; 3]$, on a : $f(-5) \geq f(x)$ et $f(x) \geq f(3)$.
 Donc : $f(3)$ est un minimum de f sur $[-5 ; 3]$;
 $f(-5)$ est un maximum de f sur $[-5 ; 3]$.

◆ Exercice 3.c p. 100

f est croissante sur \mathbb{R} ; donc :
pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq f(1)$;
on en déduit que : pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 0$.
De même, pour tout $x \leq 1$, $f(x) \leq 0$.

◆ Exercice 3.e p. 100

$x \in [2; 8]$ équivaut à $2 \leq x$ et $x \leq 8$.
 f est strictement croissante sur $[2; 8]$; donc :
pour tout $x \in [2; 8]$, $f(2) < f(x)$ et $f(x) < f(8)$.
On en déduit que :
pour tout $x \in [2; 8]$, $f(2) < f(x) < f(8)$.

◆ Exercice 4.a p. 101

$$u_0 = 0 \times (0 - 2) = 0$$

$$u_1 = 1 \times (1 - 2) = -1$$

$$u_2 = 2 \times (2 - 2) = 0$$

$$u_3 = 3 \times (3 - 2) = 3$$

$$u_4 = 4 \times (4 - 2) = 8.$$

◆ Exercice 3.d p. 100

$x \in [2; 8]$ équivaut à $2 \leq x$ et $x \leq 8$.
 f est décroissante sur $[2; 8]$, donc :
pour tout $x \in [2; 8]$, $f(2) \geq f(x)$ et $f(x) \geq f(8)$;
On en déduit que :
pour tout $x \in [2; 8]$, $f(8) \leq f(x) \leq f(2)$.

◆ Exercice 3.f p. 100

a) f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
b) g est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

◆ Exercice 4.b p. 101

$$u_1 = 1 + \frac{1}{u_0} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = 1 + \frac{1}{u_1} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$u_3 = 1 + \frac{1}{u_2} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

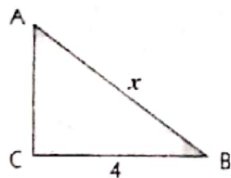
▭ Exercices d'apprentissage

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

◆ Exercice 1 p. 102

a) C'est une fonction. b) C'est une fonction. c) Ce n'est pas une fonction.

◆ Exercice 2 p. 102



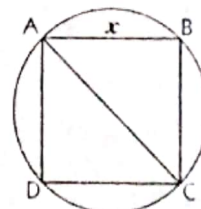
1. On a : $AC^2 + CB^2 = AB^2$
 $AC^2 + 4^2 = x^2$
 $AC^2 = x^2 - 4^2$ (donc $x > 4$).
 $AC = \sqrt{x^2 - 16}$.

2. a) On a : $\mathcal{A}(x) = \frac{AC \times CB}{2}$
 $\mathcal{A}(x) = 2\sqrt{x^2 - 16}$ ($x > 4$).

b) On a : $\mathcal{A}(x) = 2\sqrt{x^2 - 16}$ ($x > 4$).

Donc, \mathcal{A} a pour ensemble de définition $]4; +\infty[$.

◆ Exercice 3 p. 102



1. On a : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2x^2$ ($x > 0$);
donc : $AC = x\sqrt{2}$.

2. a) $AC = x\sqrt{2}$;
donc le rayon du cercle est $r = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

On a : $\mathcal{A}(x) = r^2\pi = \frac{\pi x^2}{2}$.

b) \mathcal{A} a pour ensemble de définition $]0; +\infty[$.

c) $\mathcal{A}(2) = 2\pi$; donc : $\mathcal{A}(2) \approx 6,28 \text{ cm}^2$.

d) $\mathcal{A}(x) = 8\pi$ équivaut à $8\pi = \frac{\pi x^2}{2}$; donc : $x = 4$.
Le côté du carré doit être 4 cm.

◆ Exercice 4 p. 102

a) Soit x le prix du kilogramme de café en janvier 2000.

• Le prix, après l'augmentation, en février 2000 est : $x + \frac{10}{100}x = \frac{110}{100}x$;

• le prix, après la baisse, en mars 2000 est : $\frac{110}{100}x - \frac{10}{100}\left(\frac{110}{100}x\right) = \frac{99}{100}x$.

b) Le café n'est pas revenu à son prix de janvier 2000.

◆ Exercice 5 p. 102

a) Soit x le prix initial de la robe.

• Le prix, après la première augmentation, est : $x + \frac{10}{100}x = \frac{110}{100}x$;

• le prix, après la deuxième augmentation, est : $\frac{110}{100}x + \frac{20}{100}\left(\frac{110}{100}x\right) = \frac{132}{100}x$.

b) L'augmentation finale est de 32 %.

◆ Exercice 6 p. 102

Soit L et l les dimensions du rectangle. L'aire du rectangle est : $\mathcal{A} = L \times l$.

• Si on augmente L et diminue l l'aire du nouveau rectangle est :

$$\mathcal{A}' = \left(L + \frac{10}{100}L\right) \times \left(l - \frac{10}{100}l\right) = \left(\frac{110}{100}L\right) \times \left(\frac{90}{100}l\right) = \frac{99}{100}L \times l = \frac{99}{100}\mathcal{A}.$$

• Si on diminue L et augmente l l'aire du nouveau rectangle est :

$$\mathcal{A}' = \left(L - \frac{10}{100}L\right) \times \left(l + \frac{10}{100}l\right) = \left(\frac{90}{100}L\right) \times \left(\frac{110}{100}l\right) = \frac{99}{100}L \times l = \frac{99}{100}\mathcal{A}.$$

◆ Exercice 7 p. 102

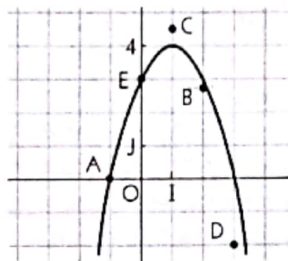
x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{10}$

◆ Exercice 8 p. 102

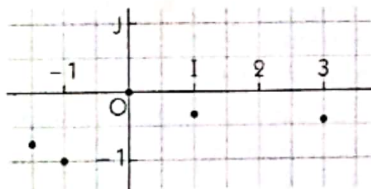
a) Voir courbe ci-contre. On a : $A(-1; 0) \in (\mathcal{C})$; $E(0; 0) \in (\mathcal{C})$.

b) $M\left(\frac{3}{2}; y\right) \in (\mathcal{C})$ équivaut à $y = f\left(\frac{3}{2}\right)$.

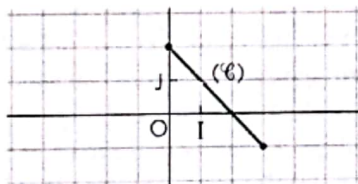
Donc : $y = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{3}{2} + 3 = \frac{15}{4}$.



◆ Exercice 9 p. 102



◆ Exercice 10 p. 102



◆ Exercice 11 p. 102

1. $A(6; 2) \in (\mathcal{C})$ équivaut à $2 = f(6)$.

On a : $2 = \frac{a}{6}$; c'est-à-dire $a = 12$.

Donc : $f(x) = \frac{12}{x}$.

x	2	3	4	6
$f(x)$	6	4	3	2

◆ Exercice 12 p. 103

Hormis le cercle et le cœur, les 4 autres courbes sont des représentations graphiques de fonctions.

◆ Exercice 13 p. 103

a) $D_f = \mathbb{R}$; b) $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$;

c) $D_f = [2; +\infty[$; d) $D_f =]0; +\infty[$.

◆ Exercice 14 p. 103

a) et b) f et g sont égales sur \mathbb{R} .

c) f et g ne sont pas égales sur \mathbb{R} .

◆ Exercice 15 p. 103

1. $f(-3) = 3$; $f(-1) = 0$; $f(0) = -1$; $f\left(\frac{5}{3}\right) = -1$; $f(4) = 0$.

2. Les antécédents du nombre -1 par f sont les éléments de $[0; 3]$.

Les antécédents du nombre 0 par f sont les nombres -1 et 4 .

Les antécédents du nombre 2 par f sont les nombres -4 et -2 .

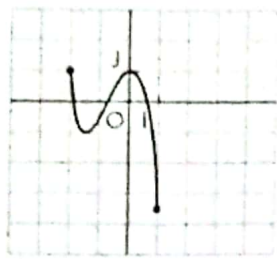
◆ Exercice 16 p. 103

1. À 8 h le paysan est à 7 km de son domicile. À 12 h 10 mn le paysan est à 12 km de son domicile. À 15 h le paysan est à 2 km de son domicile.

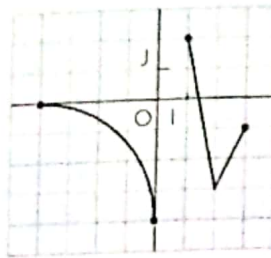
2. À 8 h le paysan arrive à la rizière, puis il part du champ à 13 h.

3. Le paysan est à 2 km de son domicile, à 7 h lors du trajet « domicile-champ », puis à 17 h lors du trajet « champ-domicile ».

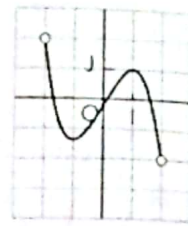
◆ Exercice 17 p. 103



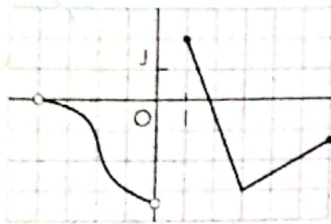
$$D_f = [-2; 1]$$



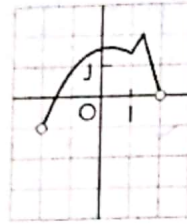
$$D_f = [-4; 0] \cup [1; 3]$$



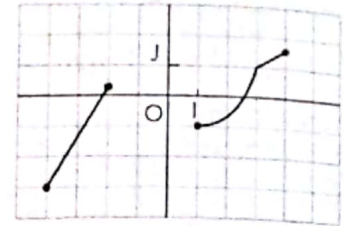
$$D_f =]-2; 2[$$



$$D_f =]-4; 0[\cup [1; 6]$$



$$D_f =]-2; 2[$$



$$D_f = [-4; -2] \cup [1; 4]$$

◆ Exercice 18 p. 104

1. La vitesse du véhicule au bout de 1 h est 90 km/h ; au bout de 2 h est 90 km/h ; au bout de 2 h 15 mn est 90 km/h ; au bout de 4 h 10 mn est 0 km/h.
2. À 0 km/h le véhicule est immobile.
3. La durée du trajet est 5 h 30 mn.

◆ Exercice 19 p. 104

Seules les courbes a) et d) représentent une situation de proportionnalité.

◆ Exercice 20 p. 104

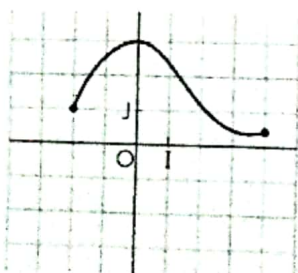
1. Au bout de 1 h Amadou est à 20 km du village A, tandis que Zié est à 10 km du village A.
Au bout de 2 h Amadou est à 10 km du village A, tandis que Zié est à 20 km du village A.
Au bout de 2 h 15 mn Amadou est à 10 km du village A, tandis que Zié est à 20 km du village A.
Au bout de 4 h Amadou est à 0 km du village A, tandis que Zié est à 30 km du village A.
2. Amadou arrive au village A à 3 h 30 mn, tandis que Zié arrive au village B à 4 h.
3. Amadou et Zié se croisent au bout de 1 h 30 mn à 15 km du village A.

VARIATIONS D'UNE FONCTION

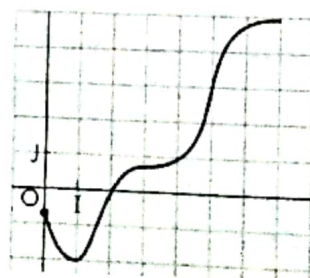
◆ Exercice 21 p. 104

	a)	b)	c)	d)
Minimum	-2	-2	0	-2
Maximum	2	0	3	2

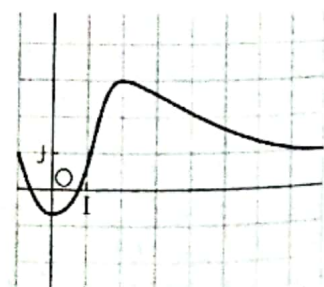
◆ Exercice 22 p. 104



◆ Exercice 23 p. 104



◆ Exercice 24 p. 104



◆ Exercice 25 p. 104

a)

Année de naissance	1950	1960	1980	1990
Âge (en l'an 2010)	60	50	30	20

b) La fonction f est croissante sur $[1950 ; 1990]$.

◆ Exercice 26 p. 104

a)

x	-2	1
$f(x)$	-2	3

b)

x	-4	-2,5	-2	4
$f(x)$	-5	3	-1	1

c)

x	-3	0,5	4
$f(x)$	-2	2	-2

d)

x	0	0	1
$f(x)$	0	-2	1

◆ Exercice 27 p. 104



◆ Exercice 28 p. 105

a) $f(x) = 3 - 2x$.

f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

b) $f(x) = x^2 + 4$.

Soit a et b deux nombres réels négatifs tels que : $a < b$.

On veut comparer : $a^2 + 4$ et $b^2 + 4$.

On sait que : si $a < b \leq 0$, alors $a^2 > b^2$;

donc : $a^2 + 4 > b^2 + 4$.

La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

x	$-\infty$	0
$f(x)$		4

c) $f(x) = \sqrt{x-2}$.

Soit a et b deux nombres réels de $[2 ; +\infty[$ tels que : $a < b$.

On veut comparer : $\sqrt{a-2}$ et $\sqrt{b-2}$.

On sait que : si $2 \leq a < b$, alors $0 \leq a-2 < b-2$;

donc : $\sqrt{a-2} < \sqrt{b-2}$.

La fonction f est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

x	2	$+\infty$
$f(x)$	0	

d) $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$.

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs tels que : $a < b$.

On veut comparer : $1 - \frac{2}{a}$ et $1 - \frac{2}{b}$.

On sait que : si $a < b < 0$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; donc : $-\frac{2}{a} < -\frac{2}{b}$ et $1 - \frac{2}{a} < 1 - \frac{2}{b}$.

La fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$		

SUITES NUMÉRIQUES

◆ Exercice 29 p. 105

a) $-7 ; -1 ; 5 ; 11 ; 17 ; 23 ; 29$.

b) $-116 ; 18 ; -14 ; 12 ; -1 ; 2 ; -4$.

c) $0,1 ; 0,101 ; 0,101001 ; 0,1010010001 ; 0,101001000100001 ; 0,101001000100001000001$.

d) $4,05 ; 1,35 ; 0,45 ; 0,15 ; 0,05 ; 0,016 ; 0,005$.

◆ Exercice 30 p. 105

- a) $u_0 = -7$; $u_4 = 5$; $u_{10} = 23$.
 b) $u_n = 3n - 7$.

◆ Exercice 31 p. 105

- a) $u_0 = -4$; $u_1 = -5$; $u_2 = -7$; $u_3 = -11$.
 b) $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

▢ Exercices d'approfondissement

◆ Exercice 32 p. 105

$$f(x) = x^2 + 6x + 2 = (x + 3)^2 - 7.$$

Sens de variation

La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -3]$ et strictement croissante sur $[-3 ; +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$			

◆ Exercice 33 p. 105

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 1 = -2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}\right].$$

Sens de variation

Posons : $g(x) = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}$.

On montre, que la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty ; \frac{5}{4}]$ et strictement croissante sur $[\frac{5}{4} ; +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$f(x)$			

Donc, la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty ; \frac{5}{4}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{5}{4} ; +\infty[$.

◆ Exercice 34 p. 105

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 13x - 9.$$

1. a) $f(-5) = 26$; $f(-3) = 6$; $f(0) = -9$; $f(1) = 16$.

b) On a : $-5 < -3$ et $f(-5) > f(-3)$; $0 < 1$ et $f(0) < f(1)$.

Donc, la fonction f n'est ni croissante, ni décroissante sur $[-5 ; 1]$.

2. On a : $f(1) = 1$ et $f(2) = \frac{1}{4}$; donc $1 < 2$ et $f(1) > f(2)$.

On en déduit que g n'est pas croissante sur $]0 ; +\infty[$.

◆ Exercice 35 p. 105

1. $D_f = [0 ; 24[$.

2. Lorsqu'il est 7 h à Dakar, il est 10 h à Antananarivo.

Lorsqu'il est 21 h à Dakar, il est 0 h (minuit) à Antananarivo.

Lorsqu'il est minuit (0 h) à Dakar, il est 3 h à Antananarivo.

3. Lorsqu'il est 1 h à Antananarivo, il est 22 h à Dakar.

Lorsqu'il est 13 h à Antananarivo, il est 10 h à Dakar.

Lorsqu'il est 0 h (minuit) à Antananarivo, il est 21 h à Dakar.

4. Lorsqu'il est 19 h à Antananarivo, au moment où part Andrialala, il est 16 h à Dakar.

Après une durée de 8 h de voyage sur le total des 18 h prévues, il est 0 h (minuit) à Dakar ; donc Andrialala arrive à $(18 - 8)$ c'est-à-dire 10 h à Dakar (heure locale).

5. À Dakar, les plages horaires en dehors des heures réservées aux travaux de son séminaire sont : entre 18 h et 24 h, entre 0 h et 8 h, entre 12 h et 14 h.

Posons : $A = [0 ; 8[\cup]12 ; 14[\cup]18 ; 24[$;

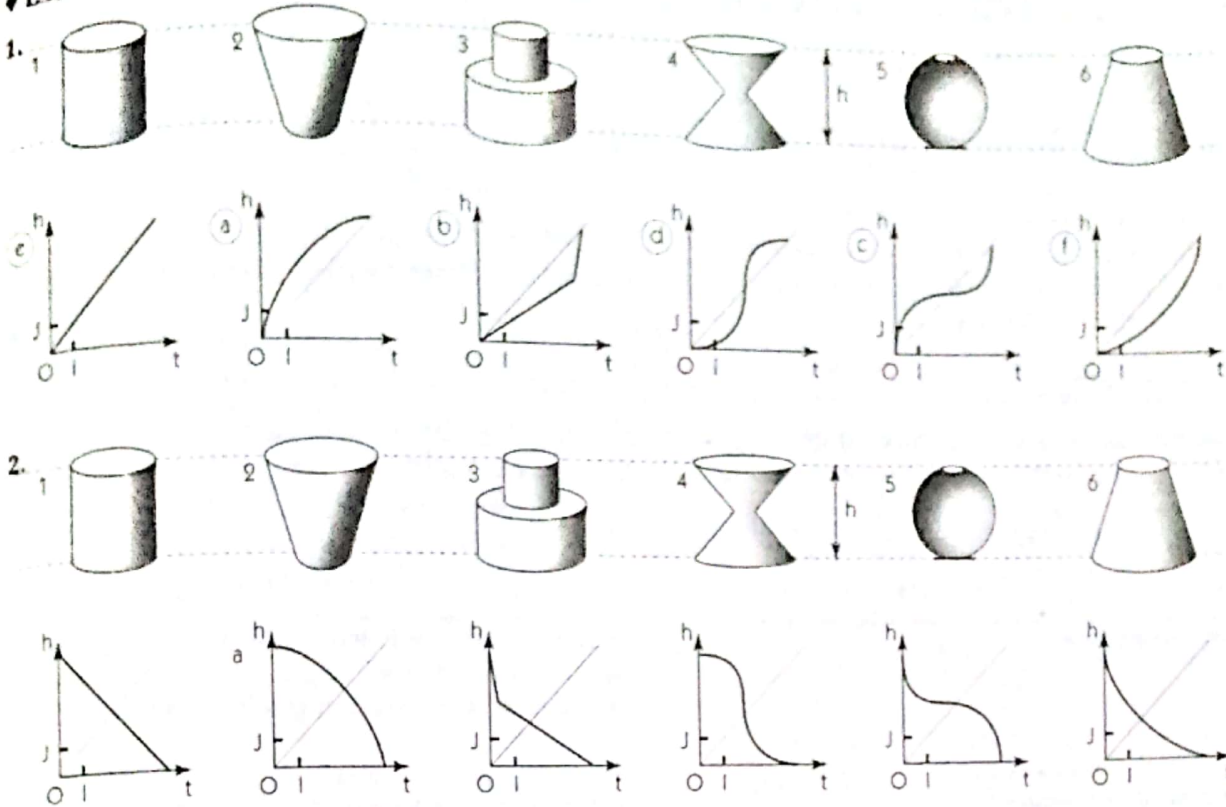
posons : $B = [5 ; 9] \cup]12 ; 15]$.

$S = A \cap B$.

Antananarivo	Dakar
de 8 h à 12 h	de 5 h à 9 h
de 15 h à 18 h	de 12 h à 15 h

Donc, Andrialala peut téléphoner à son épouse, heures de Dakar, entre 5 h et 8 h ou entre 12 h et 14 h.

◆ Exercice 36 p. 106



◆ Exercice 37 p. 106

On a : $|-x| = |x|$; donc : $f(-x) = f(x)$. On en déduit que c'est la courbe b).

◆ Exercice 38 p. 106

1. On a : $f(a) - f(b) = \frac{b-a}{(a-1)(b-1)}$.

2. Soit a et b deux nombres réels de $[0 ; 1[$ tels que : $a < b$. On a : $a-1 < 0$, $b-1 < 0$ et $b-a > 0$.

Donc : $\frac{b-a}{(a-1)(b-1)} > 0$; c'est-à-dire : $f(a) > f(b)$. La fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 1[$.

◆ Exercice 39 p. 106

1. La fonction f est strictement croissante sur $[-7 ; -3]$ et $[1 ; 7]$, strictement décroissante sur $[-3 ; 1]$.

2. $a) -6$ et -4 appartiennent à $[-7 ; -3]$ et f est strictement croissante sur $[-7 ; -3]$; donc : $f(-6) < f(-4)$.

b) $f(-2) > f(1)$. c) $f(4) < f(5)$.

3. 5 est le maximum de f sur $[-7 ; 7]$; -2 est le minimum de f sur $[-7 ; 7]$.

4. a) Vraie ; b) On ne peut conclure ; c) Vraie ; d) Faux ; e) Vraie.

◆ Exercice 40 p. 106

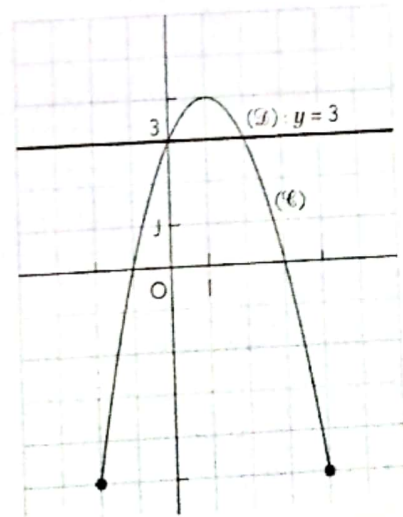
1.

x	-2	1	4
$f(x)$	-5	4	-5

2. L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions : -1 et 3 .

3. Pour tout $x \in [-2 ; -1]$, $f(x) \leq 0$.

4. La lecture graphique donne pour ensemble des solutions : $[0 ; 2]$.



7 Étude de Fonctions

(page 107 à 124 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- consolider les acquis sur les fonctions affines et les fonctions affines par intervalles,
- étudier les fonctions élémentaires et les utiliser dans des problèmes simples (résolutions d'équations, d'inéquations, de systèmes).

COMMENTAIRES

Les notions de fonctions affines et de fonctions affines par intervalles ne sont pas nouvelles pour l'élève, elles pourront donc être traitées sous formes d'activités ou de travaux dirigés.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Fonction affine

- Sens de variation d'une fonction affine.
- Fonctions linéaires.

Fonctions affines par intervalles

- Définition.

- Fonction valeur absolue.
- Fonction en escalier.

Fonctions élémentaires

- Fonction $x \mapsto ax^2$ ($a \neq 0$)
- Fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)
- Fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
- Vocabulaire : parabole ; hyperbole.

savoir-faire

- Déterminer une fonction affine définie par deux nombres réels et leurs images.
- Tracer la représentation graphique d'une fonction affine.
- Déterminer le sens de variation d'une fonction affine :
 - définie par une formule explicite
 - définie par deux nombres réels et leurs images
- Dresser le tableau de variation d'une fonction affine.
- Justifier qu'une fonction est une fonction affine par intervalles.
- Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction affine par intervalles.
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction affine par intervalles.
- Tracer la représentation graphique d'une fonction affine par intervalles.
- Tracer la représentation graphique de la fonction valeur absolue.
- Étudier les variations d'une fonction élémentaire.
- Tracer la représentation graphique d'une fonction élémentaire.
- f étant une fonction élémentaire et k un nombre réel :
 - résoudre une équation de la forme $f(x) = k$;
 - résoudre une inéquation de la forme $f(x) < k$.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice 1.a p. 109

On a :

x	-1	3
$f(x)$	-1	4

f conserve l'ordre ; donc f est croissante sur \mathbb{R} .

- On en déduit que : $f(0) < f(5)$ et $f(328) > f(-51)$.
- Le minimum de f sur $[0 ; 5]$ est $f(0)$.
- Le maximum de f sur $[0 ; 5]$ est $f(5)$.

♦ Exercice 1.b p. 109

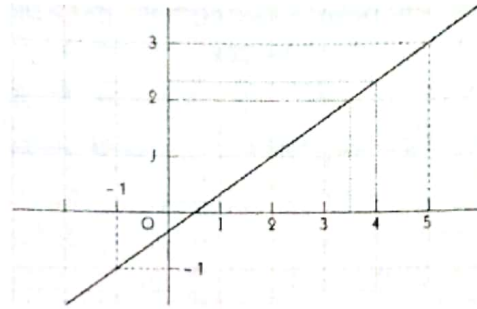
1. Voir figure ci-contre.

2. On a :

x	-1	5
$f(x)$	-1	3

f conserve l'ordre ; donc f est croissante sur \mathbb{R} .

3. On a : $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.



♦ Exercice 1.c p. 109

a) On obtient le tableau ci-dessous.

nombre de km parcourus	100	150	200	350
prix de location en F CFA	55 000	62 500	70 000	92 500

♦ Exercice 1.d p. 109

1. On a :

x (°C)	0	100
y (°F)	32	212

Donc : $y = 1,8x + 32$.

♦ Exercice 2.a p. 113

1. On a :

x	-3	-1	0	3
$f(x)$	-5	-4	-1	7

2. On construit la représentation graphique de f à l'aide de la table de valeurs ci-dessous.

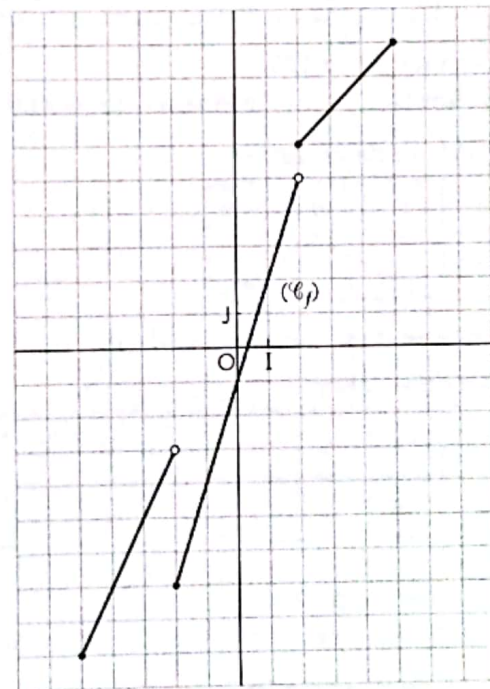
x	-5	-3	-2	0	2	3	5
y	-9	-5	-7	-1	6	7	9

b) Désignons par x le nombre de kilomètres parcourus en une journée.

Le prix de la location journalière est : $150x + 40 000$.

2. a) Si $x = 25^\circ\text{C}$, alors $y = 77^\circ\text{F}$.

b) Si $y = 100^\circ\text{F}$, alors $x \approx 37,7^\circ\text{C}$.



♦ Exercice 2.b p. 113

1. Si $x \in [-3 ; -1]$; $f(x) = 2x + 4$;

si $x \in [-1 ; 1]$; $f(x) = 2$;

si $x \in [1 ; 3]$; $f(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$;

si $x \in [3 ; 5]$; $f(x) = 3x - 12$.

2. On a :

x	-2	0	2	4
$f(x)$	0	2	$-\frac{1}{2}$	0

♦ Exercice 2.d p. 113

1. Fonction correspondant au trajet de Folourgo

Si $x \in [0 ; 2]$, $f(x) = -\frac{15}{2}x + 30$; si $x \in [2 ; 3]$, $f(x) = -5x + 25$; si $x \in [3 ; 3,5]$, $f(x) = -20x + 70$.

Fonction correspondant au trajet de Germain

Si $x \in [0; 0.5]$, $g(x) = 20x$; si $x \in [0.5; 1]$, $g(x) = 10$; si $x \in [1; 2]$, $g(x) = 10x$;

si $x \in [2; 3]$, $g(x) = 20$; si $x \in [3; 4]$, $g(x) = 10x - 10$.

2. D'après le graphique, Folourgo et Germain se rencontrent pour x appartenant à l'intervalle $[1; 2]$.

Pour tout x de $[1; 2]$, $f(x) = g(x)$ équivaut à $-\frac{15}{2}x + 30 = 10x$.

$$x = \frac{12}{7} \text{ h.}$$

Ils se croisent à environ 17 km du village.

◆ Exercice 3.a p.120

1. La fonction f est strictement croissante sur $[0; 2]$ et strictement décroissante sur $[-2; 0]$.

2. Tableau de variation

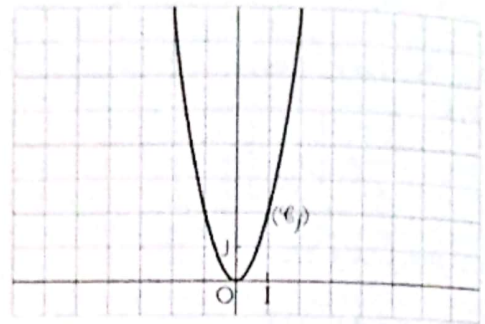
x	-2	0	2
$f(x)$	8	0	8

f admet en 0 un minimum égal à 0 .

Table de valeurs

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8

Représentation graphique



◆ Exercice 3.b p.120

1. La fonction f est strictement décroissante sur $[0; 4]$ et strictement croissante sur $[-4; 0]$.

2. Tableau de variation

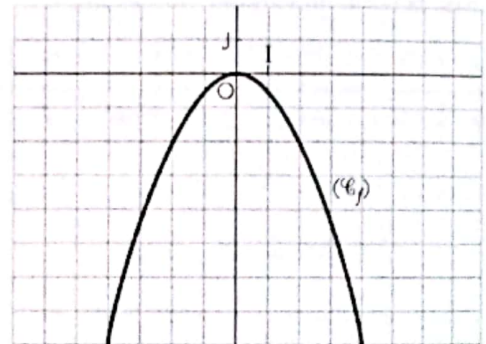
x	-4	0	4
$f(x)$	-8	0	-8

f admet en 0 un maximum égal à 0 .

Table de valeurs

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$	-8	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8

Représentation graphique



◆ Exercice 3.c p.120

1. La fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et sur $] -\infty; 0[$.

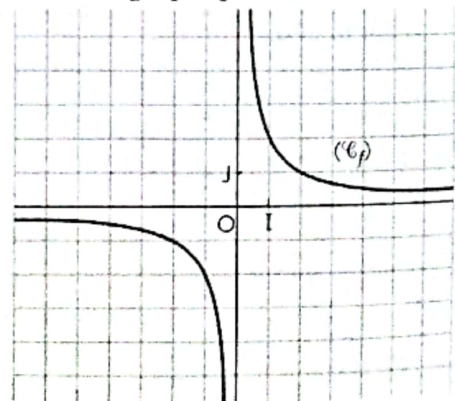
2. Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Table de valeurs

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	-1	-2	-4	$+\infty$	4	2	1

Représentation graphique



◆ Exercice 3.d p.120

1. La fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$.

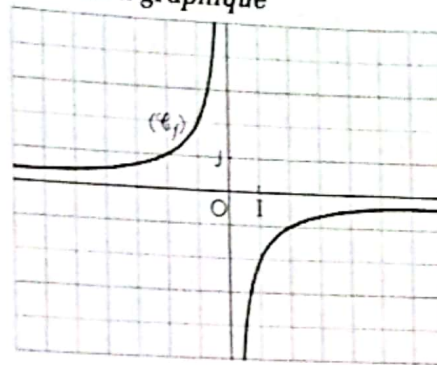
2. Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗		↗

Table de valeurs

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	1	2	4		-4	-2	-1

Représentation graphique



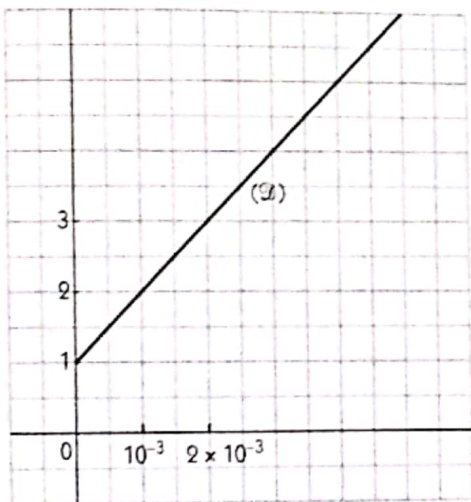
☐ Exercices d'apprentissage

FONCTIONS AFFINES

◆ Exercice n° 1 p. 121

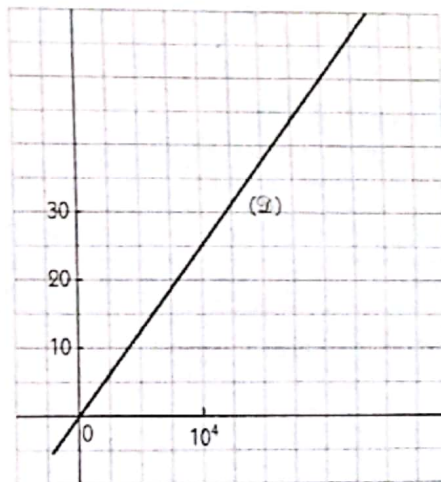
a) $f(x) = 10^3 x + 1$.

$f(10^{-3}) = 2$; $f(2 \times 10^{-3}) = 3$.



b) $f(x) = 25 \times 10^{-4} x$.

$f(0) = 0$; $f(10^4) = 25$.



◆ Exercice n° 2 p. 121

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$

c) $f(x) = -3x + 4$.

◆ Exercice n° 3 p. 121

a) $f(x) = \frac{5}{2}x$

b) $f(x) = -3x$

c) $f(x) = -\frac{3}{4}x$.

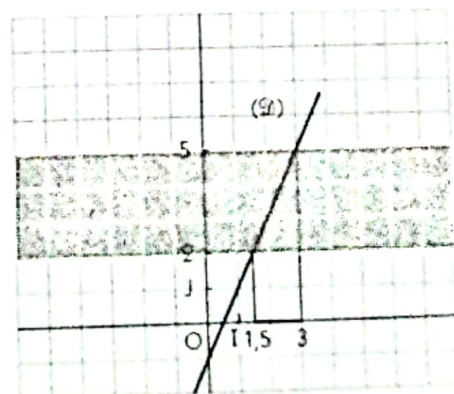
◆ Exercice n° 4 p. 121

1. Représentation graphique de f

x	0	1
$f(x)$	-1	1

3. Résolution des inéquations : $2 < f(x) < 5$

- Par lecture graphique, on trouve : $S :]1,5 ; 3[$.
- On vérifie par le calcul.



◆ Exercice n° 5 p. 121

1. Soit x le nombre de km parcourus par Paul, et $f(x)$ le prix à payer.

On a : $f(x) = ax + 20\,000$.

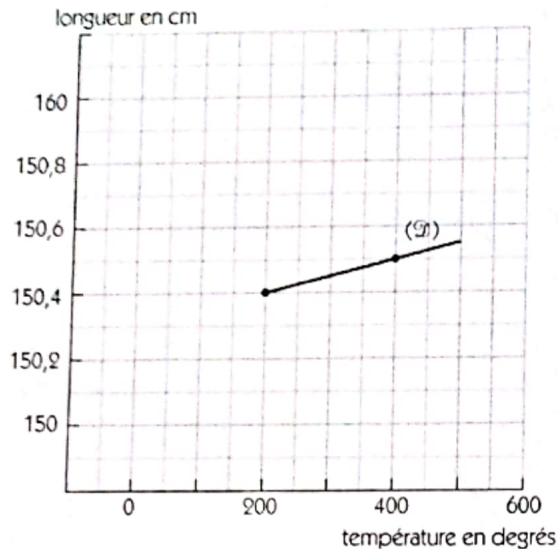
La distance, en km, parcourue par Jean est : $x + 50$; il paie : $f(x) + 4\,500$.

On a : $f(x) + 4\,500 = a(x + 50) + 20\,000$; donc : $a = 90$.

Le prix de location, en fonction de x , est : $f(x) = 90x + 20\,000$.

2. Le prix de la location de Jean est : $f(250) = 42\,500$ F CFA.

◆ Exercice n° 6 p. 121



◆ Exercice n° 7 p. 121

a)

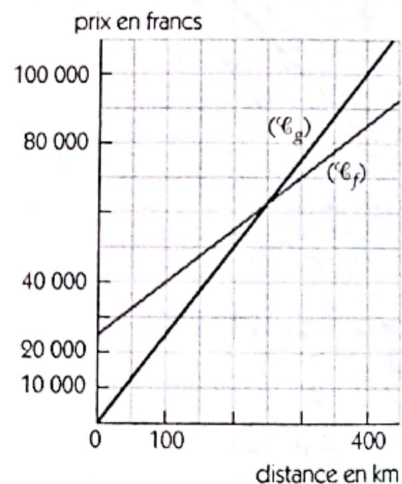
Location	Départ	Prix au km	Prix à payer pour 100 km	Total
tarif A	25 000	150	15 000	40 000
tarif B	0	250	25 000	25 000

Le tarif B est le plus avantageux.

c) Le choix du tarif est sans importance pour le parcours d'une distance de 250 km.

b) Tarif A : $f(x) = 150x + 25\,000$.

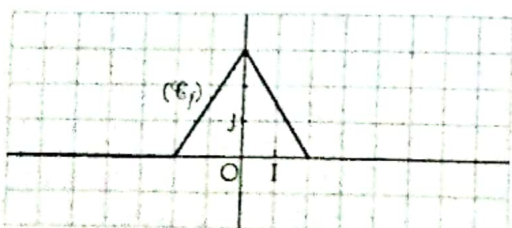
Tarif B : $g(x) = 250x$.



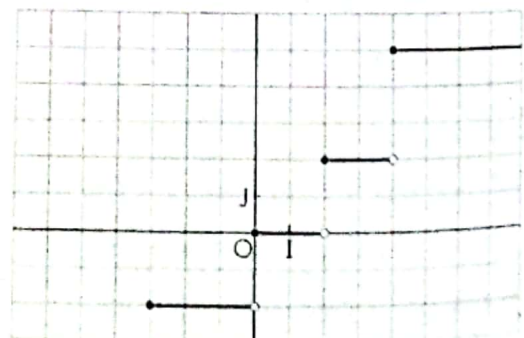
FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES

◆ Exercice n° 8 p. 121

x	-2	0	2
y	0	3	0



◆ Exercice n° 9 p. 122

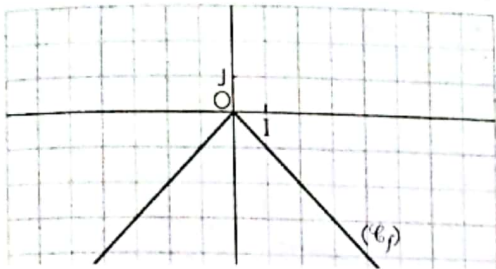


◆ Exercice n° 10 p. 122

1. Si $x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) = -x$;
 si $x \in]-\infty ; 0]$, $f(x) = x$.

f est donc une fonction affine par intervalles.

2.

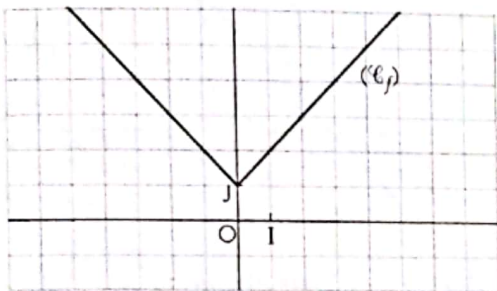


◆ Exercice n° 12 p. 122

1. Si $x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) = x + 1$;
 si $x \in]-\infty ; 0]$, $f(x) = -x + 1$.

f est donc une fonction affine par intervalles.

2.

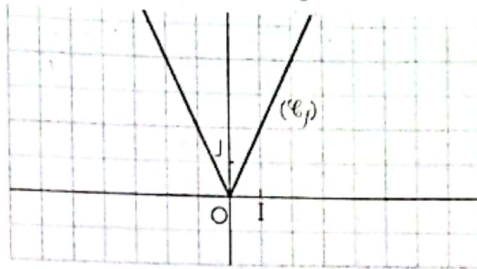


◆ Exercice n° 11 p. 122

1. Si $x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) = 2x$;
 si $x \in]-\infty ; 0]$, $f(x) = -2x$.

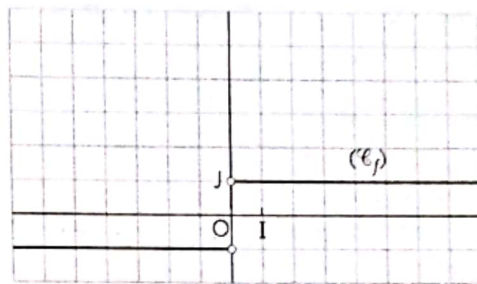
f est donc une fonction affine par intervalles.

2.



◆ Exercice n° 13 p. 122

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
 2. Si $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = 1$;
 si $x \in]-\infty ; 0]$, $f(x) = -1$.



◆ Exercice n° 14 p. 122

1. $\mathcal{D}_f =]-3 ; +\infty[$.
 2. Si $x \in]-3 ; 0]$, $f(x) = x + 3$;
 si $x \in [0 ; 3]$, $f(x) = 3$;
 si $x \in [3 ; +\infty[$, $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$.

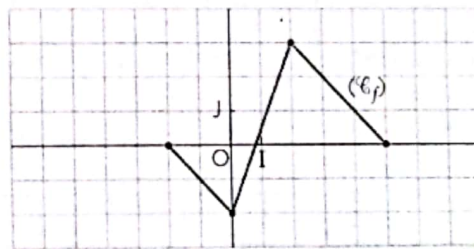
◆ Exercice n° 16 p. 122

1. On a, ci-contre, la représentation graphique de f .

2. Si $x \in [-2 ; 0]$, $f(x) = -x - 2$;
 si $x \in [0 ; 2]$, $f(x) = \frac{5}{2}x - 2$;
 si $x \in [2 ; 5]$, $f(x) = -x + 5$.

◆ Exercice n° 15 p. 122

1. $\mathcal{D}_f =]-\infty ; 5]$.
 2. Si $x \in]-\infty ; 0]$, $f(x) = -2$;
 si $x \in [0 ; 2]$, $f(x) = 1$;
 si $x \in [2 ; 5]$, $f(x) = 3$.



FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

◆ Exercice n° 17 p. 122

La fonction f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

◆ Exercice n° 18 p. 122

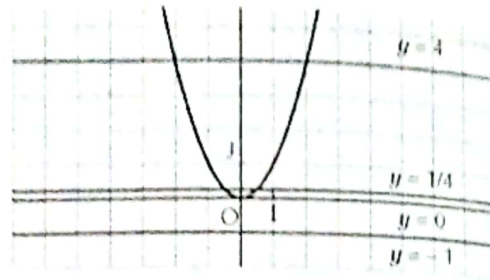
1. L'hyperbole a pour équation : $y = -\frac{2}{x}$.
 2. Les points C et D appartiennent à l'hyperbole ; le point B n'y appartient pas.

◆ Exercice n° 19 p. 122

1. Soit un point $M(x ; y)$, on a : $xy = -3$.
 $M_1(1 ; -3)$, $M_2(-1 ; 3)$, $M_3(3 ; -1)$, $M_4(-3 ; 1)$, $M_5(2 ; -\frac{3}{2})$, $M_6(-2 ; \frac{3}{2})$.
 2. $xy = -3$ entraîne $y = -\frac{3}{x}$; donc : $f(x) = -\frac{3}{x}$.

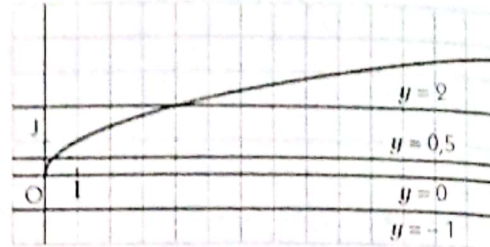
◆ Exercice n° 20 p. 122

- a) $x^2 = 4$ équivaut à $x = 2$ ou $x = -2$.
 b) $x^2 = 0$ équivaut à $x = 0$.
 c) L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution.
 d) $x^2 = \frac{1}{4}$ équivaut à $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.



◆ Exercice n° 21 p. 122

- a) $\sqrt{x} = 2$ équivaut à $x = 4$.
 b) $\sqrt{x} = 0$ équivaut à $x = 0$.
 c) L'équation $\sqrt{x} = -1$ n'a pas de solution.
 d) $\sqrt{x} = 0,5$ équivaut à $x = 0,25$.

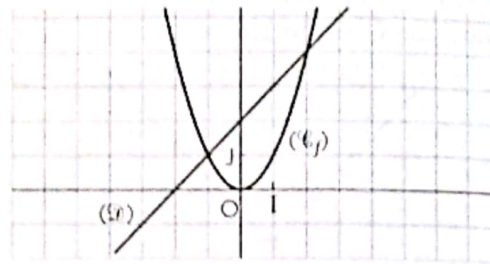


◆ Exercice n° 22 p. 122

1. On a, ci-contre, la représentation graphique de f et \mathcal{D} .

2. Par lecture graphique, on trouve :

- a) $x = -1$ ou $x = 2$.
 b) $S =]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$.



◆ Exercice n° 23 p. 123

1. $f(x) = \frac{4}{x}$.

Variation de f

$\mathcal{D}_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

Soit a et b deux nombres réels tels que : $a < b$.

Si a et b sont éléments de $]-\infty ; 0[$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; alors $\frac{4}{a} > \frac{4}{b}$.

La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

Si a et b sont éléments de $]0 ; +\infty[$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; alors $\frac{4}{a} > \frac{4}{b}$.

La fonction f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. Représentations graphiques

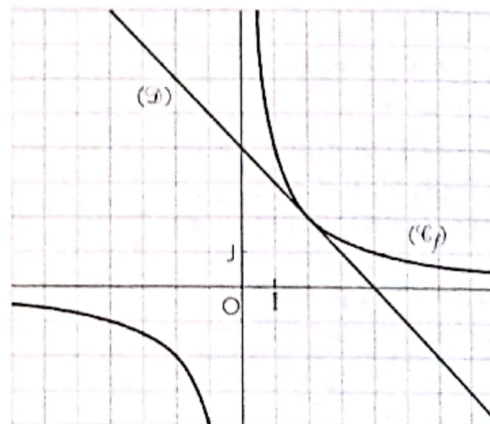


Table de valeurs

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	-1	-2	-4	-8		8	4	2	1

3. Résolution de l'équation

- Par lecture graphique, on trouve : $x = 2$.
 - En effet, $x^2 - 4x + 4 = 0$ équivaut à $(x - 2)^2 = 0$.
- Donc : $x = 2$.

◆ Exercice n° 24 p. 123

1. $f(x) = \frac{5}{x}$.

Variation de f

$\mathcal{D}_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

Table de valeurs

x	-5	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	-1	$-\frac{5}{2}$	-5	-10		10	5	$\frac{5}{2}$	1

3. Détermination de $(\mathcal{H}) \cap (\mathcal{D})$

- Par lecture graphique, on trouve : $x = -1$ ou $x = 1$.
- On vérifie par le calcul.

◆ Exercice n° 25 p. 123

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = x \end{cases}$$

On trace sur un même graphique la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = x$ et l'hyperbole (\mathcal{H}) d'équation $y = \frac{1}{x}$.

On obtient : $x = -1$ ou $x = 1$.

◆ Exercice n° 26 p. 123

a) $S =]-\infty ; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3} ; +\infty[.$

b) $S =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[.$

c) $S = \emptyset.$

d) $S =]-\frac{2}{3} ; \frac{2}{3}[.$

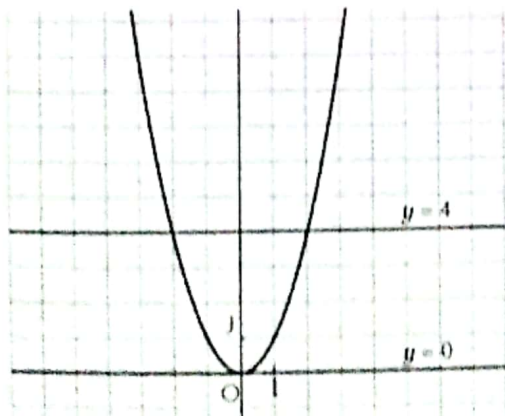
◆ Exercice n° 27 p. 123

a) $S =]0 ; \frac{1}{2}[.$

b) $S =]-1 ; 0[.$

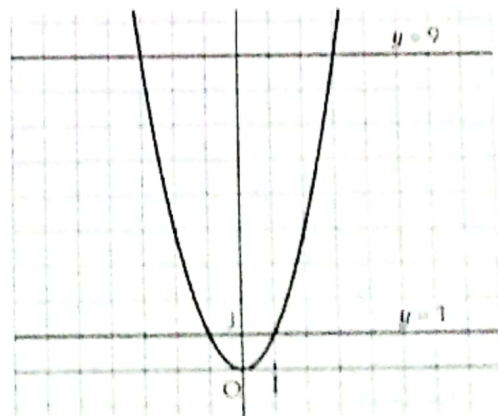
◆ Exercice n° 28 p. 123

a) On utilise la parabole d'équation $y = x^2$.



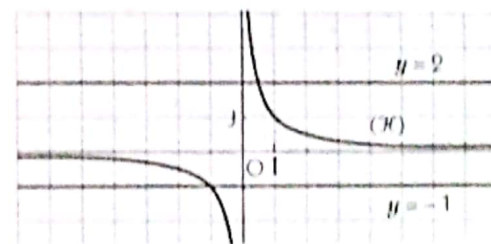
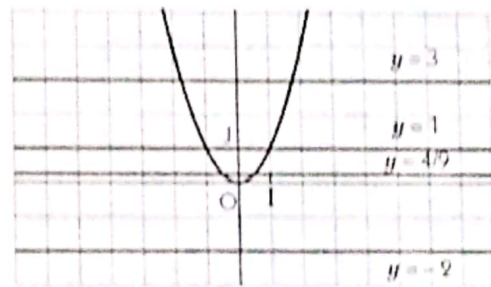
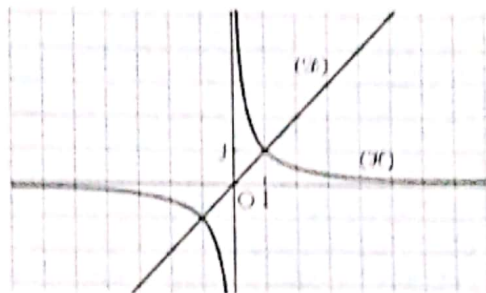
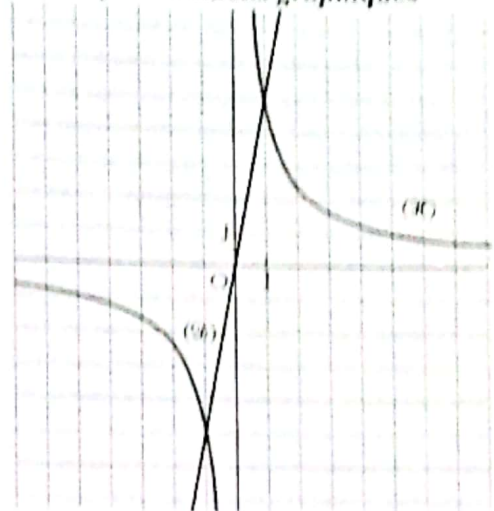
$$S =]-2 ; 0[\cup]0 ; 2[.$$

b) On utilise la parabole d'équation $y = x^2$.

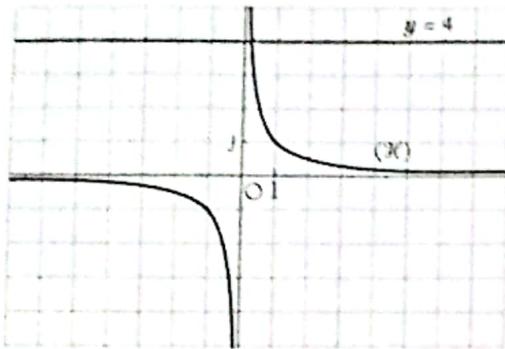


$$S =]-3 ; -1[\cup]1 ; 3[.$$

2. Représentations graphiques

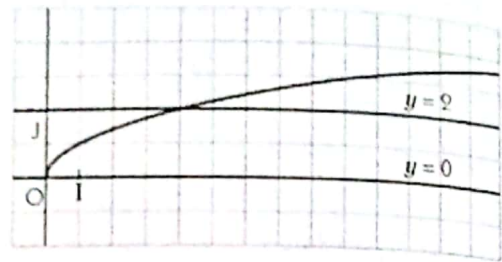


c) On utilise l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.



$$S =]\frac{1}{4}; +\infty[.$$

d) On utilise la représentation graphique de la fonction racine carrée.



$$S = [0; 4].$$

Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n° 29 p. 123

1. $f(x) = |x| - 1$.

Si $x \in]-\infty; 0]$, $f(x) = -x - 1$;

si $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = x - 1$.

Donc, f est une fonction affine par intervalles.

Table de valeurs

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	3	1	-1	1	3

3. Par lecture graphique, on trouve :

a) $x = -3$ ou $x = 3$.

b) $S =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

◆ Exercice n° 30 p. 123

1. $f(x) = x|x|$.

Si $x \in]-\infty; 0]$, $f(x) = -x^2$;

si $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = x^2$.

2. Sens de variation

La fonction f est croissante sur $]-\infty; 0[$
et sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗		

2. Représentation graphique de f

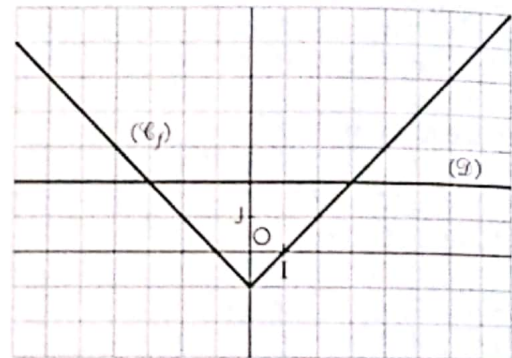
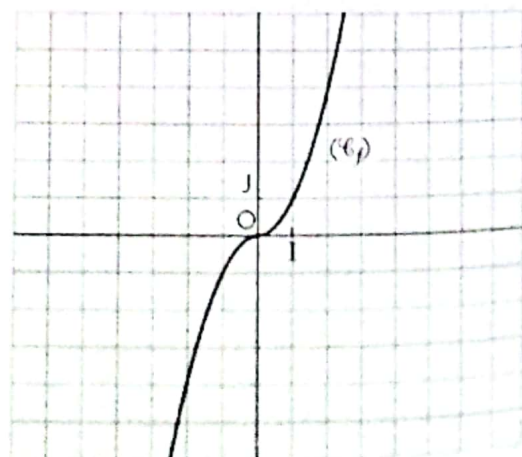


Table de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-1	0	1	4

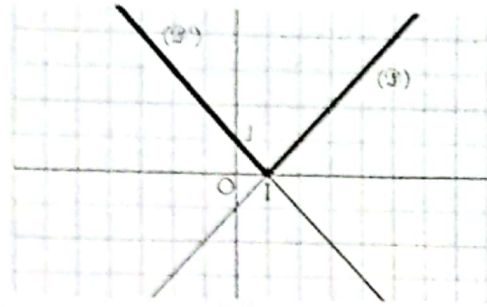
3. Représentation graphique de f



♦ Exercice n° 31 p. 123
 a. Voir figure ci-contre.

2. $D_f =]x-1[$
 Si $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) = -x+1$;
 si $x \in]1; +\infty[$, $f(x) = x-1$.

3. On trace les droites d'équations $y = 2x - 3$ et $y = -2x + 3$.
 On met en gras la partie située au dessous de (O1);
 la courbe en gras est celle de la fonction f .



♦ Exercice n° 32 p. 123

1. $f(x) = \frac{2}{x}$.

Sens de variation de f

$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

La fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0[$
 et sur $]0; +\infty[$.

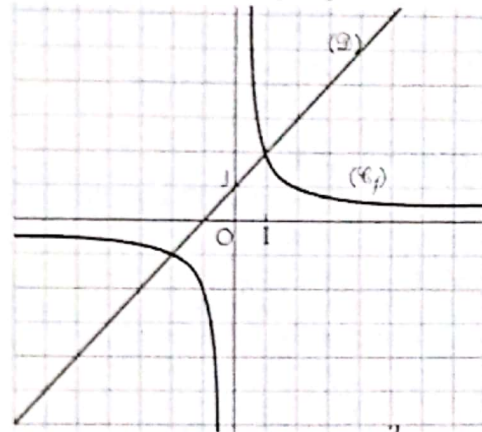
Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘		↘

Table de valeurs

x	$-\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{1}$	0	1	$\frac{2}{2}$
$f(x)$	-1	$-\frac{2}{2}$		$\frac{2}{2}$	1

2. Représentations graphiques



3. $\begin{cases} xy = 2 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = x + 1 \end{cases}$.

On obtient : $x = -2$ ou $x = 1$.

♦ Exercice n° 33 p. 123

1. $f(x) = \frac{3}{x}$.

Sens de variation de f

$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

La fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0[$
 et sur $]0; +\infty[$.

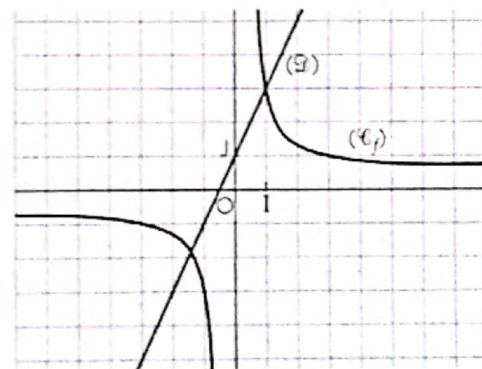
Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘		↘

Table de valeurs

x	$-\frac{3}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{1}$	0	1	$\frac{3}{2}$	3
$f(x)$	-1	$-1,5$	-3		3	$1,5$	1

2. Représentations graphiques



3. $\begin{cases} xy = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = 2x + 1 \end{cases}$.

On obtient : $x = -1,5$ ou $x = 1$.

♦ Exercice n° 34 p. 123

1.

	Formule 1	Formule 2	Formule 3
10 cassettes	39 000 F	32 000 F	30 000 F
20 cassettes	54 000 F	52 000 F	60 000 F
30 cassettes	69 000 F	72 000 F	90 000 F

Pour la location de 10 cassettes, la formule 3 est la plus économique.

Pour la location de 20 cassettes, la formule 2 est la plus économique.

Pour la location de 30 cassettes, la formule 1 est la plus économique.

2. a) Somme annuelle en fonction de x

Formule 1 : $y = 1\,500x + 24\,000$.

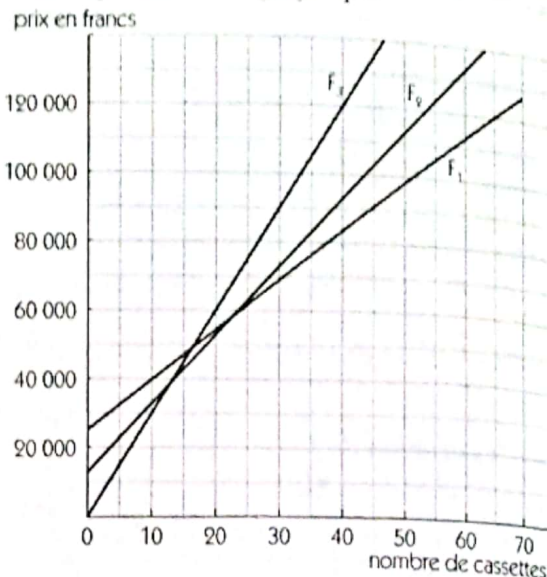
Formule 2 : $y = 2\,000x + 12\,000$.

Formule 3 : $y = 3\,000x$.

3. Par lecture graphique, on trouve les résultats suivants :

- si $0 \leq x < 12$, la formule 3 est la plus économique ;
- si $12 < x < 24$, la formule 2 est la plus économique ;
- si $x > 24$, la formule 1 est la plus économique.

b) Représentation graphique



◆ Exercice n° 35 p. 123

1. Sur les 90 km, il parcourt 45 km à 30 km/h et 45 km à 20 km/h.

Sur la première partie, le temps est :

$$t = \frac{45}{30} = 1,5 \text{ ; soit } 1 \text{ h } 30 \text{ min.}$$

Sur la deuxième partie, le temps est :

$$t = \frac{45}{20} = 2,25 \text{ ; soit } 2 \text{ h } 15 \text{ min.}$$

Le cycliste a donc mis 3h 45 min.

La représentation graphique de la fonction qui à t fait correspondre la distance parcourue est la réunion d'un segment et d'une demi-droite. Pour la représenter, on utilise la table de valeurs ci-dessous.

t	0	1,5	3,75
$d(t)$	0	45	90

2. Si $t \in [0 ; 1,5[$, $d(t) = 30t$;

si $t \in [1,5 ; 3,75[$, $d(t) = 20t + 15$.

3. La vitesse moyenne sur les 90 km est : $v = \frac{90}{3,75} = 24 \text{ km/h}$.

Soit O l'origine du repère et A le point de coordonnées (3,75 ; 90).

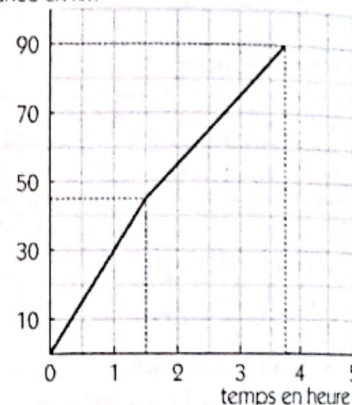
La vitesse moyenne est le coefficient directeur de la droite (OA).

4. À 25 km/h, le temps mis pour parcourir les 90 km est : $t = \frac{90}{25} = 3,6 \text{ h}$.

Pour parcourir la 1^{re} étape, le temps mis est : $t = 1,5 \text{ h}$.

Pour parcourir la 2^e étape, le temps mis est : $t = 3,6 - 1,5 = 2,1 \text{ h}$; la vitesse est : $v = \frac{45}{2,1} = 21,43 \text{ km/h}$.

distance en km



◆ Exercice n° 36 p. 124

1. 50 photocopies coûtent 2 500 F ; donc 1 photocopie coûte 50 F.

2. Le tirage de la 51^e photocopie coûtera : $\frac{4\,000}{100} = 40 \text{ F}$.

3. On détermine l'équation de la droite qui donne le prix en fonction du nombre de copies.

On a : $f(50) = 2\,500$ et $f(100) = 4\,000$.

La résolution du système d'équations $\begin{cases} 50a + b = 2\,500 \\ 100a + b = 4\,000 \end{cases}$ donne : $a = 30$ et $b = 1\,000$.

On obtient : $f(x) = 30x + 1\,000$.

Le prix de 70 copies est 3 100 F, donc le prix d'une copie est : $\frac{3\,100}{70} = 44,2 \text{ F}$.

4. Soit f la fonction qui donne le coût des photocopies en fonction du nombre d'exemplaires tirés.

Si $x \in [0 ; 50]$, $f(x) = 50x$;

si $x \in [50 ; 100]$, $f(x) = 30x + 1\,000$.

5. Pour x grand, on a : $\frac{f(x)}{x} = 30 + \frac{1\,000}{x}$.

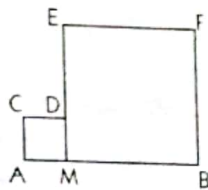
Le coût moyen d'un grand nombre de photocopies est donc : 30 F.

♦ Exercice n° 37 p. 124

1. 1^{er} cas : $AM \leq BM$

$AM \leq BM$ équivaut à $0 \leq x \leq 2$.

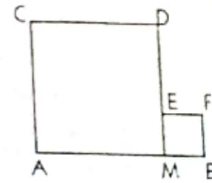
$$f(x) = -2x + 16.$$



2^e cas : $AM \geq BM$

$AM \geq BM$ équivaut à $x \geq 2$.

$$f(x) = 2x + 8.$$



La fonction f est donc définie de la façon suivante :

• si $x \in [0 ; 2]$, $f(x) = -2x + 16$;

• si $x \in [2 ; +\infty[$, $f(x) = 2x + 8$.

2. Voir figure ci-contre

3. On a : $g(x) = 8x$.

Représentons la fonction g sur le même graphique que f .

4. Les courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) se coupent pour $x \in [0 ; 2]$.

Sur cet intervalle, $f(x) = g(x)$ équivaut à $-2x + 16 = 8x$

$$\text{Donc : } x = 1,6.$$

Représentation graphique



♦ Exercice n° 38 p. 124

1. $(\mathcal{D}) : y = -1$.

On a : $Q(x ; -1)$, $H(x ; 0)$ et $M(x ; y)$.

OQM est un triangle rectangle en O ; d'après le théorème de Pythagore : $OM^2 + OQ^2 = MQ^2$.

On a : $OQ^2 = x^2 + 1$; $OM^2 = x^2 + y^2$; $MQ^2 = (y + 1)^2$.

$OM^2 + OQ^2 = MQ^2$ équivaut à $x^2 + y^2 + x^2 + 1 = y^2 + 2y + 1$; donc : $y = x^2$.

Donc : M appartient à la parabole (\mathcal{P}) d'équation : $y = x^2$.

Commentaire

On peut également utiliser « le produit scalaire ».

$(OQ) \perp (OM)$ équivaut à $x^2 - y = 0$.

2. Soit H_1 le point de (OI) d'abscisse x_1 .

• On trace la droite (Δ) , perpendiculaire à (OI) passant par H_1 .

Soit Q_1 le point d'intersection de (Δ) et (\mathcal{D}) .

• On place le point M_1 de (Δ) tel que OQ_1M_1 soit un triangle rectangle en O.

D'après la question 1, le point M_1 appartient à (\mathcal{P}) .

8 Organisation des données

(pages 125 à 142 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- mettre en place les outils élémentaires du dénombrement ;
- apprendre à organiser, traiter des données ;
- interpréter et/ou utiliser des diagrammes, des tableaux, etc.

COMMENTAIRES

L'utilisation de situations concrètes pour la mise en place des différentes notions est plus motivante pour l'élève.

Pour les calculs statistiques, l'utilisation de la calculatrice est fortement conseillée.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
<p>Dénombrement</p> <ul style="list-style-type: none">• Cardinal d'un ensemble fini.• Cardinal de la réunion de deux ensembles finis. <p>Statistiques</p> <ul style="list-style-type: none">• Vocabulaire des statistiques :<ul style="list-style-type: none">- population, caractère, modalité ;- caractère quantitatif ;- caractère qualitatif ;- effectif, fréquence.• Effectifs cumulés, fréquences cumulées.• Mode.• Moyenne.• Représentations graphiques :<ul style="list-style-type: none">- diagramme circulaire ;- diagramme semi-circulaire ;- diagramme à bandes ;- diagramme en bâtons.	<ul style="list-style-type: none">• Dénombrer à l'aide de :<ul style="list-style-type: none">- un comptage ;- un diagramme ;- un arbre de choix ;- un tableau.• Calculer des fréquences.• Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées.• Reconnaître un mode.• Calculer la moyenne d'une série statistique.• Construire à partir d'un tableau statistique :<ul style="list-style-type: none">- diagramme circulaire ;- diagramme semi-circulaire ;- diagramme à bandes ;- diagramme en bâtons.• Lire et interpréter un diagramme.• Extraire d'un diagramme un tableau statistique.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 130

Un rectangle de largeur l et de longueur L sera noté : $l \times L$.

Les deux tableaux ci-dessous recensent tous les rectangles, selon leurs dimensions et leurs positions

Rectangles	Position	Nombre
1 x 1		9
1 x 2		12
1 x 3		6
total 1		27

Rectangles	Position	Nombre
2 x 2		4
2 x 3		4
3 x 3		1
total 2		9

Donc, la figure contient 36 rectangles.

◆ Exercice 1.b p. 130

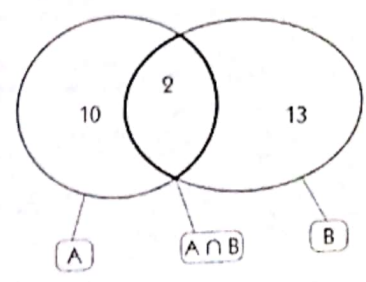
Désignons par A l'ensemble des élèves qui pratiquent l'anglais et par B l'ensemble des élèves qui pratiquent l'allemand.

a) On a : $Card(A \cap B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cup B)$
 $= 12 + 15 - 25 = 2.$

Donc, 2 élèves pratiquent les deux langues.

b) On a : $12 - 2 = 10$; donc 10 élèves pratiquent uniquement l'anglais ;
 $15 - 2 = 13$; donc 13 élèves pratiquent uniquement l'allemand.

c) On a : $10 + 13 = 23$; donc 23 élèves pratiquent une seule langue.



◆ Exercice 1.c p. 130

Pour construire cet arbre dont chaque niveau correspond au choix d'une des 4 personnes, on peut se demander, pour chaque personne, si on la choisit (oui) ou non.

Chaque branche comportant 3 « oui » et 1 « non » est associée à une délégation.

Il y a autant de délégations que de chemins dans l'arbre, c'est-à-dire 4 délégations possibles.

choix de A	choix de B	choix de C	choix de D	Délégation
oui	oui	oui	non	A, B et C
oui	oui	non	oui	A, B et D
oui	non	oui	oui	A, C et D
non	oui	oui	oui	B, C et D

♦ Exercice 1.d p. 130

Élèves	nés en 1975	nés en 1976	nés en 1977	Total
Filles	3	12	5	20
Garçons	2	15	6	23
Total	5	27	11	43

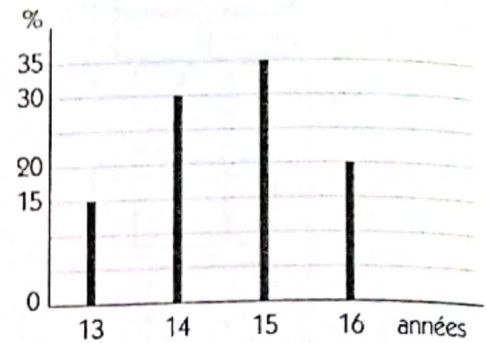
Il y a 43 élèves dans cette classe.

♦ Exercice 2.a p. 137

a) et b) Ci-dessous le tableau des effectifs et fréquences.

Modalités	13	14	15	16
Effectif	3	6	7	4
Fréquence	15 %	30 %	35 %	20 %

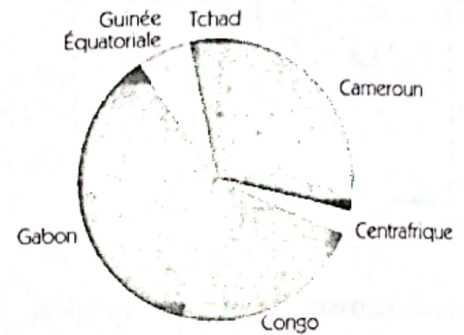
c) Ci-contre le diagramme en bâtons des fréquences.



♦ Exercice 2.b p. 137

a) Le mode est : Gabon.

b) Ci-contre le diagramme circulaire des effectifs.



♦ Exercice 2.c p. 137

1.	Temps (en mn)	5	12	15	32	45	50
	Effectif	10	21	16	13	8	20
	Effectifs cumulés	10	31	47	60	68	88
	Fréquence	11,36 %	23,87 %	18,18 %	14,77 %	9,09 %	22,73 %
	Fréquences cumulées	11,36 %	35,23 %	53,41 %	68,18 %	77,27 %	100 %

2. On a : 53,41 %. 3. On a : 46,59 %.

☐ Exercices d'apprentissage

DENOMBREMENT

♦ Exercice 1 p. 138

La figure contient 19 rectangles.

♦ Exercice 2 p. 138

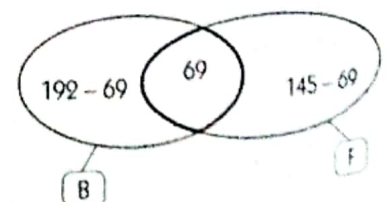
La figure contient 27 triangles.

♦ Exercice 3 p. 138

Sur le diagramme ci-contre, B et F représentent respectivement les ensembles des élèves pratiquant le basket-ball et le football.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \text{Card}(B \cup F) &= \text{Card}(B) + \text{Card}(F) - \text{Card}(B \cap F) \\ &= 192 + 145 - 69 = 268. \end{aligned}$$

Donc, l'effectif de ce lycée est : 268 élèves.



♦ Exercice 4 p. 138

Le tableau ci-contre représente la répartition des élèves de la classe.
Donc, l'effectif de cette classe est : 40 élèves.

Élèves	étudient l'anglais	n'étudient pas l'anglais	Total
Filles	20	8	28
Garçons	8	4	12
Total	28	12	40

♦ Exercice 5 p. 138

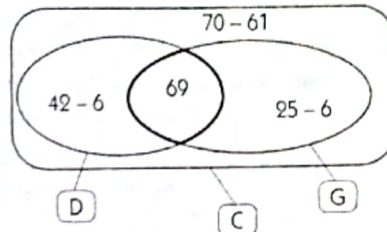
Sur le diagramme ci-contre, C représente l'ensemble des adhérents du club, D et G les sous-ensembles de ces adhérents ayant cotisé respectivement pour la danse et pour la gymnastique.

Le nombre d'adhérents ayant cotisé pour la danse ou pour la gymnastique est :

$$\text{Card}(D \cup G) = \text{Card}(D) + \text{Card}(G) - \text{Card}(D \cap G)$$

$$= 42 + 25 - 6 = 61.$$

Donc : 70 - 61, c'est-à-dire 9 adhérents n'ont cotisé ni pour la danse ni pour la gymnastique.



♦ Exercice 6 p. 138

Sur le diagramme ci-contre, V représente l'ensemble des 1000 vélos sortant de l'usine, C et G les sous-ensembles des vélos ayant un défaut de chaîne et de guidon respectivement.

1. Le nombre de vélos présentant au moins un des deux défauts est :

$$\text{Card}(C \cup G) = \text{Card}(C) + \text{Card}(G) - \text{Card}(C \cap G)$$

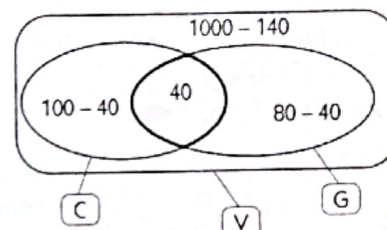
$$= 100 + 80 - 40 = 140.$$

2. Le nombre de vélos présentant uniquement un défaut de guidon est :

$$\text{Card}(G) - \text{Card}(C \cap G) = 80 - 40 = 40.$$

3. Le nombre de vélos ne présentant aucun des deux défauts est :

$$\text{Card}(V) - \text{Card}(C \cup G) = 1000 - 140 = 860.$$



♦ Exercice 7 p. 138

On convient de choisir dans l'ordre : les routes qui relient A à B, les routes qui relient B à C, les routes qui relient C à D. On construit ainsi un arbre de choix à trois niveaux.

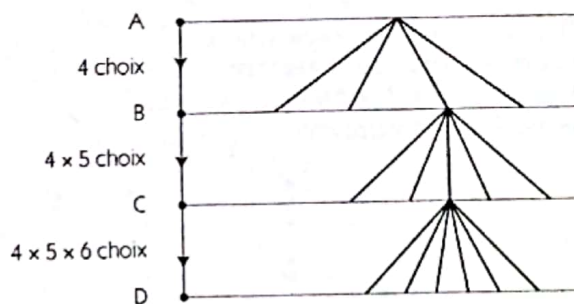
On obtient :

• 4 choix possibles pour aller de A à B, donc 4 branches ;

• pour chacune de ces 4 branches, 5 choix possibles pour aller de B à C, donc 4×5 , c'est-à-dire 20 branches ;

• pour chacune de ces 20 branches, 6 choix possibles pour aller de C à D, donc $4 \times 5 \times 6$, c'est-à-dire 120 branches.

Donc, il y a 120 façons pour aller de A à D.



♦ Exercice 8 p. 138

Pour systématiser cette recherche, on peut se demander, pour chaque pièce, si on la prend ou non.

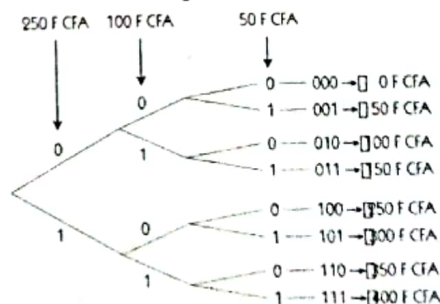
On convient de noter respectivement 0 et 1 les réponses NON et OUI à cette question.

On construit ainsi un arbre dont chaque niveau correspond à une pièce de monnaie.

À chaque branche de cet arbre est associée une somme d'argent et l'ensemble des branches permet de déterminer toutes les sommes possibles.

Par exemple, à la branche 011 est associé $100 + 50$, c'est-à-dire la somme de 150 F CFA ;

Les 8 sommes possibles que l'on peut constituer avec ces pièces sont représentées sur l'arbre.

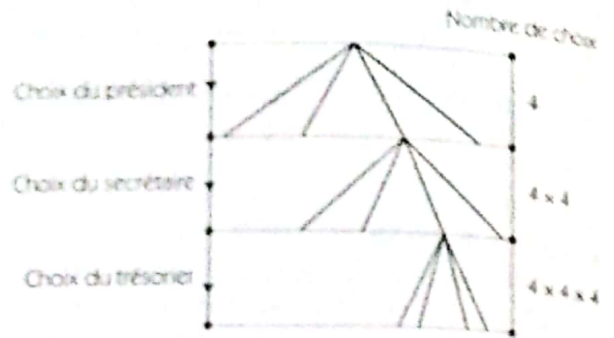


◆ Exercice 9 p. 138

On convient de choisir dans l'ordre : le président, le secrétaire, le trésorier. On construit ainsi un arbre de choix à trois niveaux. De plus, une même personne peut être choisie une fois, deux fois ou trois fois. Il y a donc 4 choix possibles à chaque niveau.

Remarque

La détermination du nombre des façons d'attribuer les trois fonctions avec les 4 personnes de l'assemblée peut se résumer par le schéma suivant.



Composition	Président	puis	Secrétaire	puis	Trésorier	Nombre de façons
Nombre de choix possibles	4	x	4	x	4	64

◆ Exercice 10 p. 138

On peut faire un arbre comme dans l'exercice n° 9, ou résumer par le schéma suivant.

Tirage	Première boule	puis	Deuxième boule	puis	Troisième boule	Nombre de façons
Nombre de choix possibles	10	x	10	x	10	1 000

◆ Exercice 11 p. 138

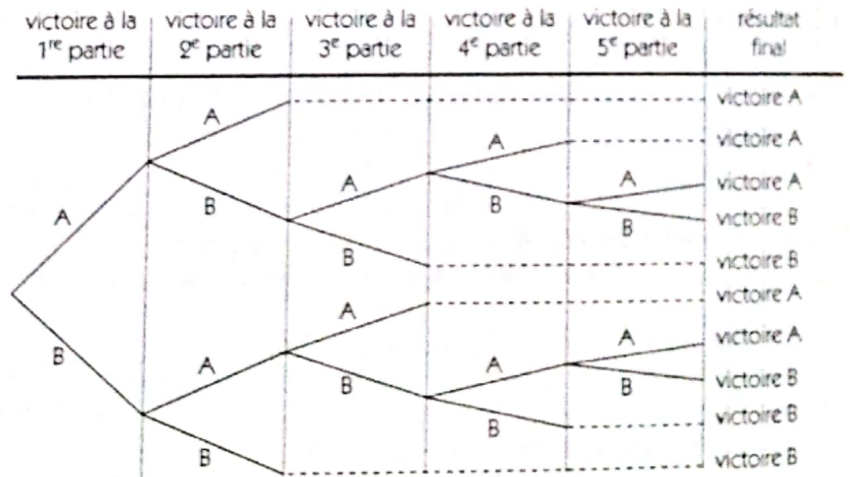
On peut faire un arbre comme dans l'exercice n° 9, ou résumer par le schéma suivant.

Tirage	Première question	puis	Deuxième question	puis	Troisième question	puis	Quatrième question	Nombre de façons
Nombre de choix possibles	3	x	3	x	3	x	3	81

◆ Exercice 12 p. 138

Pour déterminer le nombre de déroulements de parties possibles, on peut utiliser un arbre de choix.

Il y a autant de déroulements du tournoi que de chemins dans l'arbre, c'est-à-dire 10 déroulements possibles du tournoi.



◆ Exercice 13 p. 138

	1 ^{er} tirage			
2 ^e tirage		1	2	3
1		(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)
2		(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)
3		(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)

◆ Exercice 14 p. 138

1. Les sommes de toutes les situations sont représentées dans le tableau ci-dessous.
Donc, il y a 11 sommes possibles.

1 ^{er} de	1	2	3	4	5	6
2 ^e de	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. Le tableau ci-dessous présente le nombre de lancers possibles pour lesquels la somme est 8, 9, 10.

Somme	8	9	10	Total
Nombre de lancers	5	4	3	12

◆ Exercice 15 p. 138

1. On obtient le tableau ci-dessous.

Résultats	Admis	Refusés	Totaux	
Série	A	60	20	80
C	35	5	40	
D	70	30	100	
Totaux	165	55	220	

2. Le tableau ci-dessous donne la répartition des résultats et le pourcentage de succès par série.
La série C a le meilleur pourcentage de succès.

Résultats	Admis	Refusés	Totaux	Pourcentage de succès	
Série	A	60	20	80	75 %
C	35	5	40	87,5 %	
D	70	30	100	70 %	

STATISTIQUES

◆ Exercice 16 p. 139

- a) Le caractère étudié est : la série du bac ;
il est qualitatif.
b) Les modalités sont : A, B, C et D.

c) On a :

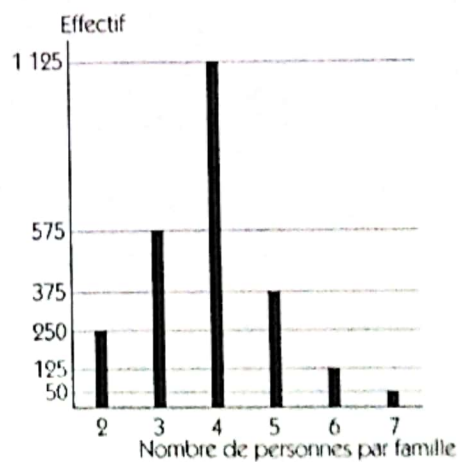
Modalités	A	B	C	D	Total
Effectif	20	10	7	13	50

◆ Exercice 17 p. 139

1.

Nombre de personnes par famille	2	3	4	5	6	7
Fréquence en pourcentage	10 %	23 %	45 %	15 %	5 %	2 %
Effectif	250	575	1 125	375	125	50

2.



◆ Exercice 18 p. 139

Avec l'oubli des 2 points, le total des points de la classe est : $10,6 \times 40 = 424$.
En réalité, le total des points de la classe est : $424 + 2 = 426$;
donc, la moyenne de la classe est : $\frac{426}{40} = 10,65$.

♦ Exercice 19 p. 139

La moyenne que Zana a obtenue est : $\frac{14 \times 4 + 8 \times 5 + 12 \times 1 + 16 \times 3}{4 + 5 + 1 + 3} = \frac{156}{13} = 12.$

♦ Exercice 20 p. 139

1. Soit x l'effectif de la classe.

Le total des points de la classe, avec les deux notes extrêmes à savoir 0 et 20, est : $11,5x$.

Le total des points de la classe, sans les deux notes extrêmes à savoir 0 et 20, est : $11,5x - 20$;

donc, la moyenne devient : $\frac{11,5x - 20}{x - 2}$.

2. Le total des points de la classe, sans la note la plus élevée à savoir 20, est : $11,5x - 20$;

donc, la moyenne devient : $\frac{11,5x - 20}{x - 1}$.

On a : $\frac{11,5x - 20}{x - 1} = 11,16 \Leftrightarrow x = 26.$

Donc, la classe compte 26 élèves.

♦ Exercice 21 p. 139

1. L'élève doit obtenir la note la plus élevée à savoir 20 à l'issue du dixième devoir ;

donc, la meilleure moyenne qu'il peut espérer obtenir est : $\frac{11,75 \times 9 + 20}{10} = 12,575.$

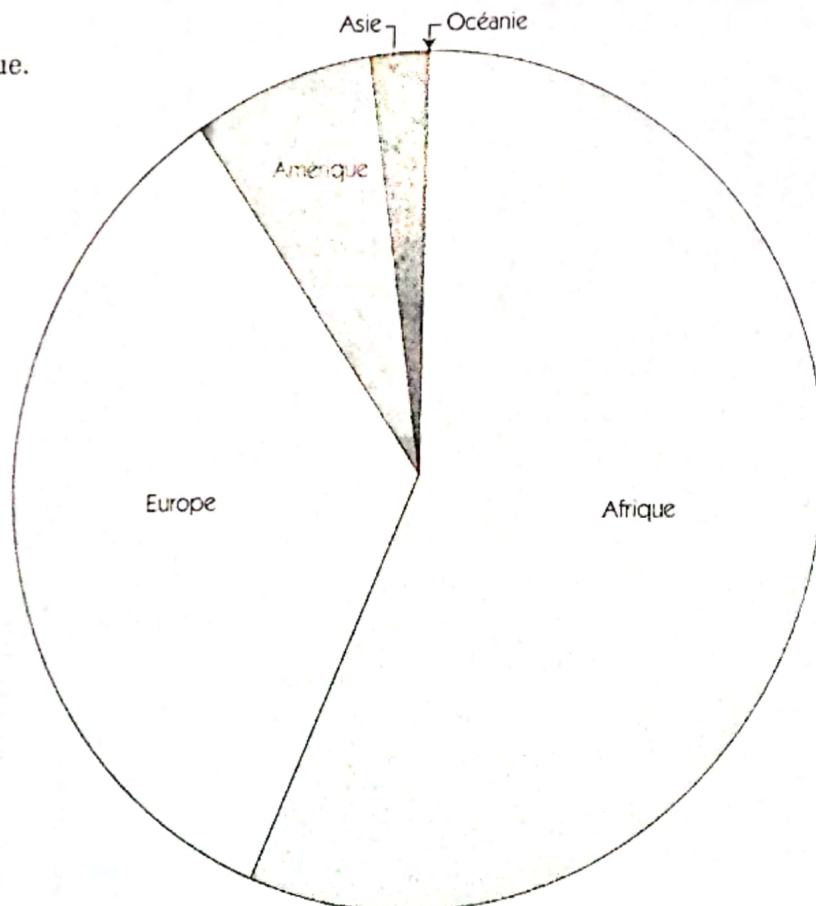
2. L'élève doit obtenir la note la plus petite à savoir 0 à l'issue du dixième devoir ;

donc, la plus petite moyenne qu'il peut obtenir est : $\frac{11,75 \times 9 + 0}{10} = 10,575.$

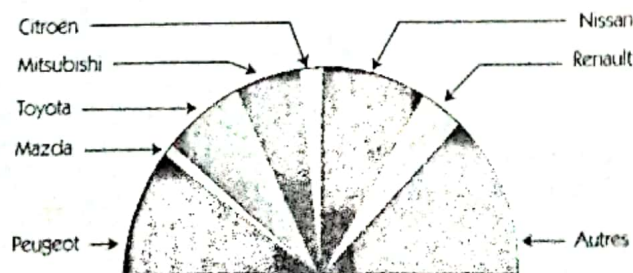
♦ Exercice 22 p. 139

1. Le mode est : Afrique.

2.



♦ Exercice 23 p. 139



◆ Exercice 24 p. 139

1. Le nombre de familles de cette ville est :

$$\frac{18\,000 \times 100}{75} = 24\,000 \text{ familles.}$$

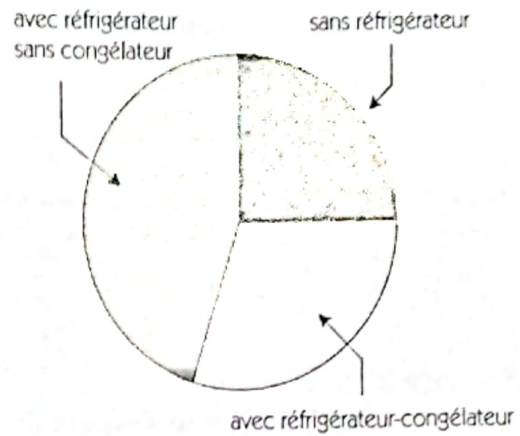
2. On a :

	Nombre de familles
Sans réfrigérateur	6 000
Avec réfrigérateur-congélateur	7 200
Avec réfrigérateur sans congélateur	10 800

3. Le pourcentage de familles qui possèdent un réfrigérateur-congélateur dans cette ville est :

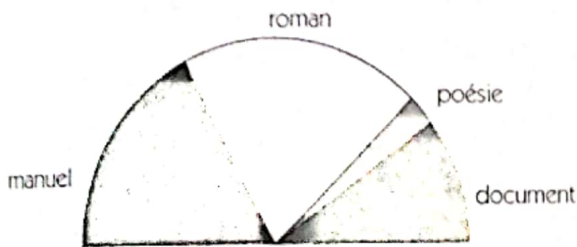
$$\frac{7\,200 \times 100}{24\,000} = 30\%.$$

4.

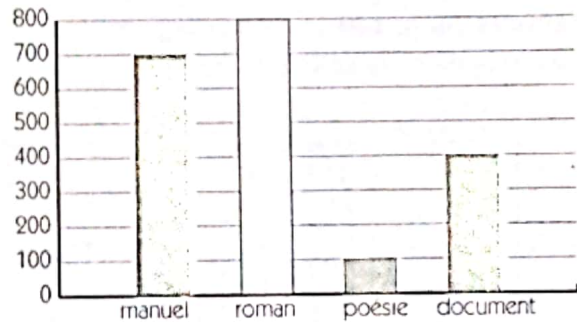


◆ Exercice 25 p. 139

1.

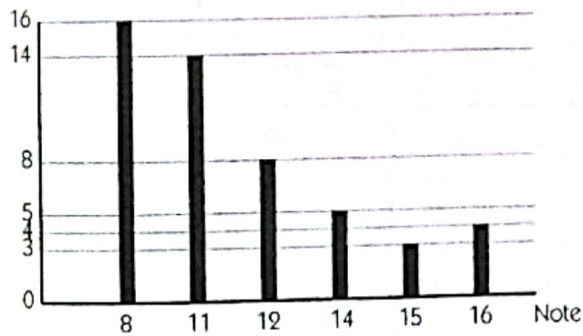


2. Effectif



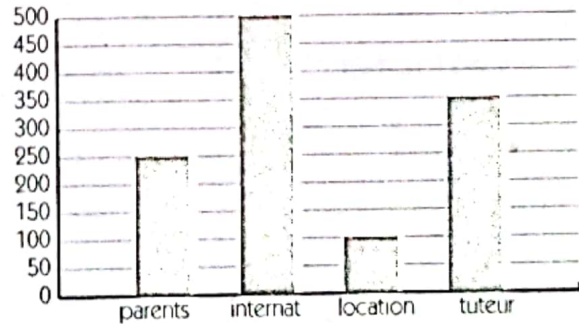
◆ Exercice 26 p. 139

Effectif



◆ Exercice 27 p. 139

Effectif



◆ Exercice 28 p. 139

1. On a :

Modalités	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectif	5	6	9	4	2	5	3	2
Fréquence en pourcentage	13,89 %	16,67 %	25 %	11,12 %	5,55 %	13,89 %	8,33 %	5,55 %
Effectifs cumulés	5	11	20	24	26	31	34	36

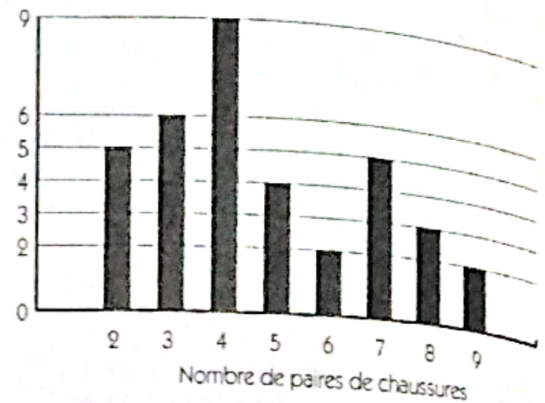
2. a) 5 élèves ont moins de 3 paires.
- b) 12 élèves ont plus de 5 paires.
- c) 20 élèves ont au plus 4 paires.
- d) 31 élèves ont au moins 3 paires.

4. La moyenne de la série est :

$$\frac{2 \times 5 + 3 \times 6 + \dots + 8 \times 3 + 9 \times 2}{36} = \frac{173}{36} = 4,8.$$

Donc, la moyenne de paires de chaussures est :
4 paires par défaut, 5 paires par excès.

3. Effectif



◆ Exercice 29 p. 140

1. Le salaire journalier le plus fréquent dans cette exploitation agricole est : 1 200 F CFA.

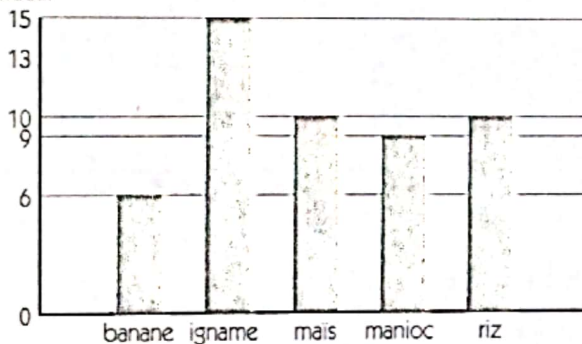
2. La moyenne de la série est : $\frac{900 \times 4 + 1\,000 \times 20 + \dots + 1\,500 \times 21 + 1\,600 \times 10}{500} = 1\,232,4$.

Le salaire journalier moyen d'un ouvrier est : 1 230 F CFA par défaut, 1 235 F CFA par excès.

◆ Exercice 30 p. 140

1. Le mode de cette série est : Igbame.

2. Effectif



◆ Exercice 31 p. 140

1.

Modalités	6 000	8 500	11 500	19 000	22 500	25 000	30 000	35 000
Effectif	25	16	38	25	45	35	29	37
Fréquence en pourcentage	10 %	6,4 %	15,2 %	10 %	18 %	14 %	11,6 %	14,8 %
Effectifs cumulés	25	41	79	104	149	184	213	250

2. 25 pagnes ont été vendus à moins de 8 500 F CFA.
146 pagnes ont été vendus à plus de 19 000 F CFA.
149 pagnes ont été vendus à au plus 22 500 F CFA.
209 pagnes ont été vendus à au moins 11 500 F CFA.

3. La moyenne de la série est :

$$\frac{6\,000 \times 25 + 8\,500 \times 16 + \dots + 30\,000 \times 29 + 35\,000 \times 37}{250} = 21\,002.$$

Le prix moyen de vente est : 21 000 F CFA.

♦ Exercice 32 p. 140

1. Modalités	ananas	bissap	citron	gingembre	orange	passion
fréquence en pourcentage	16 %	21 %	15 %	25 %	13 %	10 %
Effectif	32	42	30	50	26	20

♦ Exercice 33 p. 140

1. Modalités	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif	7	10	5	6	4	5	2	3
Effectifs cumulés	7	17	22	28	32	37	39	42

2. La moyenne de la série est :

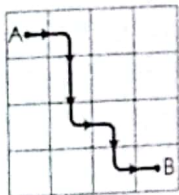
$$\frac{0 \times 7 + 1 \times 10 + \dots + 6 \times 2 + 7 \times 3}{42} = 2,67.$$

Donc, le nombre moyen d'absents durant le trimestre est : 3 absents par excès.

☐ Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 34 p. 141

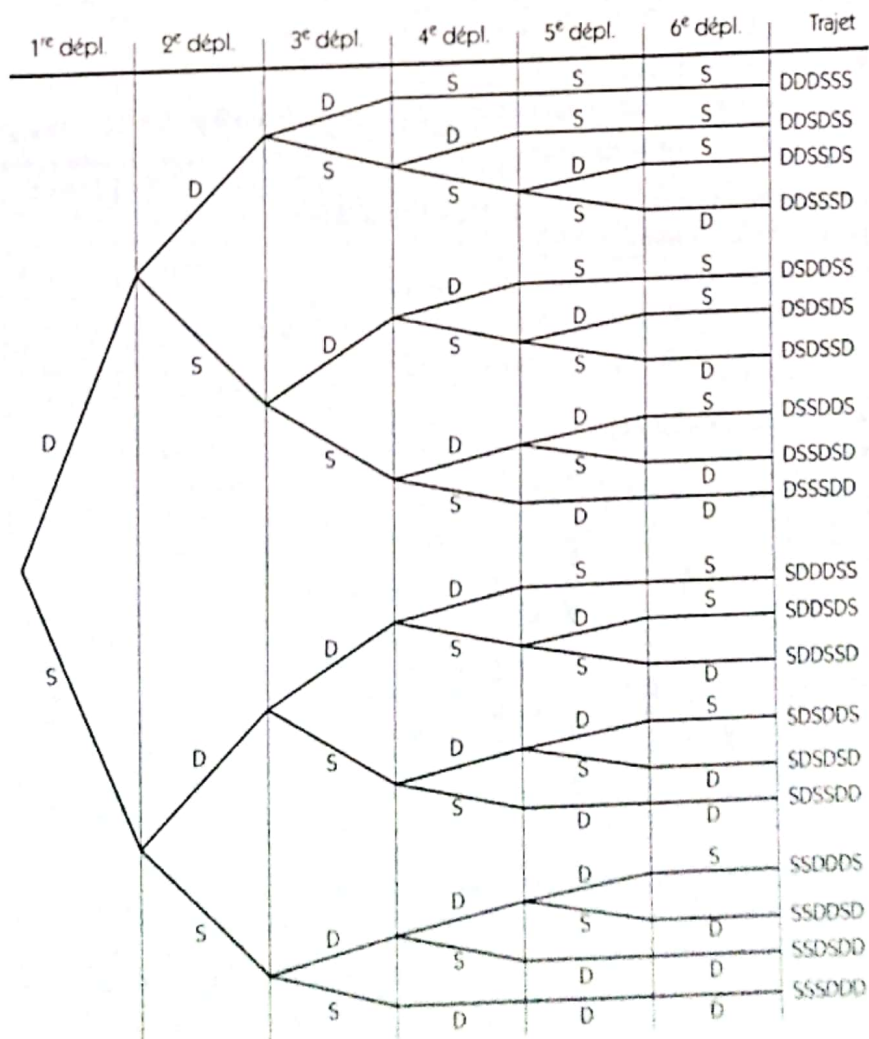
Soit le trajet suivant tracé sur la figure ci-dessous.



Pour chaque trajet (T) de la case A à la case B, la fourmi doit se déplacer 3 fois vers la droite (D) et 3 fois vers le bas (S) comme le montre l'exemple tracé sur la figure ci-dessous : T = D S S D S D. Chaque trajet est composé de 6 déplacements élémentaires dans l'ordre, l'un après l'autre, comportant 3 fois D et 3 fois S.

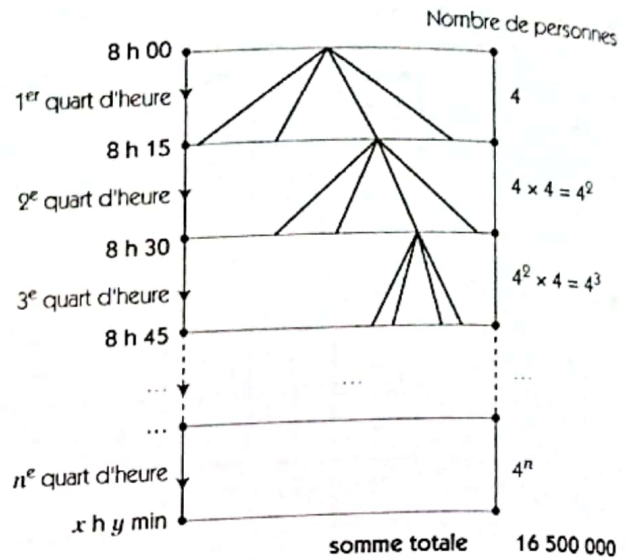
On construit ainsi un arbre de choix dont chaque niveau correspond à un déplacement élémentaire.

À chaque branche de cet arbre est associée un trajet et l'ensemble des branches permet de déterminer tous les trajets possibles. Donc, il y a 20 trajets possibles pour aller de la case A à la case B.



◆ **Exercice 35 p. 141**

On convient de numérotter les quarts d'heure successifs l'un après l'autre jusqu'au numéro n où la nouvelle est connue de tout le pays.
On construit ainsi un arbre de choix à n niveaux.



La présentation de la propagation de la nouvelle, quart d'heure après quart d'heure, peut se résumer par le tableau ci-contre.

$$\text{On a : } 16\,500\,000 = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^n ;$$

$$4 \times 16\,500\,000 = 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^n + 4^{n+1} ;$$

$$\text{donc : } 4 \times 16\,500\,000 - 16\,500\,000 = 4^{n+1} - 4.$$

On en déduit que : $4^n = 12\,375\,001$.

Une calculatrice permet d'établir que :

$$4^{11} < 12\,375\,001 < 4^{12} ; \text{ donc : } n = 12 \text{ par excès.}$$

Donc, la nouvelle est connue de tout le pays à :

$$8 \text{ h } + \frac{1}{4} \text{ h } \times 12 = 11 \text{ h.}$$

Rang du quart d'heure	1	2	3	4	...	n
Nombre de personnes informées	4	4^2	4^3	4^4	...	4^n
Nombre cumulé de personnes informées	4	20	84	340	...	16 500 000

◆ **Exercice 36 p. 141**

Par rapport au nombre total des employés, le pourcentage des hommes gagnant plus 100 000 F est :

$$\frac{40}{100} \times 75 \%, \text{ c'est-à-dire } 30 \%.$$

Le tableau ci-contre donne la répartition des employés de la société.

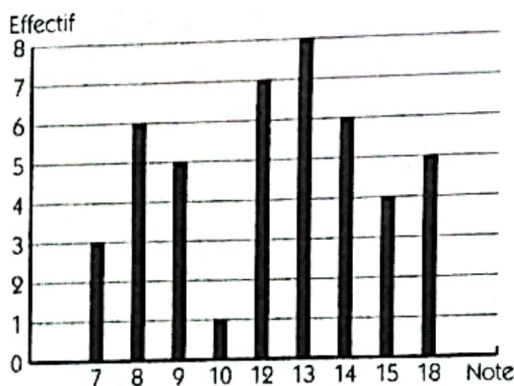
Par rapport au nombre total des femmes, le pourcentage des femmes gagnant au plus 100 000 F par mois est :

$$\frac{45}{60} \times 100 \%, \text{ c'est-à-dire } 75 \%.$$

	Salaire de plus de 100 000 F	Salaire de moins de 100 000 F	Total
Femmes	15 %	45 %	60 %
Hommes	30 %	10 %	40 %
Total	45 %	55 %	100 %

◆ **Exercice 37 p. 141**

1.



a) 15 élèves ont une note inférieure ou égale à 10.

b) 66,7 % des élèves ont une note strictement supérieure à 10.

3. La moyenne des notes obtenues par les élèves de cette classe est :

$$\frac{7 \times 3 + 8 \times 6 + \dots + 15 \times 4 + 18 \times 5}{45} = 12,13.$$

2.

Note	7	8	9	10	12
Effectifs cumulés	3	9	14	15	22
Fréquences cumulées	6,6 %	20 %	31,1 %	33,3 %	48,9 %

Note	13	14	15	18
Effectifs cumulés	30	36	40	45
Fréquences cumulées	66,6 %	80 %	88,9 %	100 %

◆ Exercice 38 p. 141

1. La moyenne des notes obtenues par Kouadio sera :
2. Soit x la note sur 20 que doit obtenir Mariam.
La moyenne des notes obtenues par Mariam sera ;
on en déduit que : $x = 15$.
Donc, Mariam doit obtenir 15 sur 20.

$$\frac{12 + 8 + 9 + 17 + 12 + 14}{6} = \frac{72}{6} = 12.$$

$$\frac{12 + 13 + 13 + 10 + 15 + x}{6} = \frac{63 + x}{6} = 13 ;$$

◆ Exercice 39 p. 141

Soit x le nombre de devoirs effectués à ce jour par l'élève.

La moyenne des notes obtenues sera : $\frac{12,5x + 16}{x + 1} = 13$; donc : $x = 6$.

Le nombre de devoirs effectués à ce jour par l'élève est : 6.

◆ Exercice 40 p. 141

1. La moyenne de la série est :

$$\frac{80 \times 25 + 100 \times 12 + 120 \times 5 + 180 \times 4 + 240 \times 3}{49} = 106,9387755 ;$$

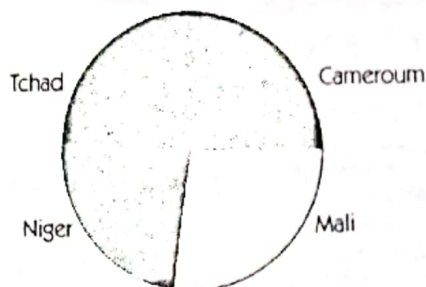
Le salaire moyen des employés de cette entreprise est :

$1\ 000\ \text{F CFA} \times 106,9387755 = 106\ 938,7755\ \text{F CFA}$; c'est-à-dire 106 935 CFA par défaut ou 106 940 CFA par excès.

2. Le salaire moyen des employés de cette entreprise est le salaire qu'aurait chaque employé si on répartissait de façon égale la masse salariale aux employés.

Donc, pour que le salaire moyen calculé précédemment reste inchangé, il faut verser ce salaire moyen calculé précédemment au nouvel engagé.

◆ Exercice 41 p. 141



◆ Exercice 42 p. 141

1. a) Le client a le choix entre 5 variétés de jus, chacune de ces variétés étant dans 4 types de pots.
Donc 5×4 , c'est-à-dire 20 choix s'offrent à un client désirant acheter un pot de jus de fruits de marque AKADI.

- b) 4 choix s'offrent à un client désirant acheter un pot de jus de citron de marque AKADI.

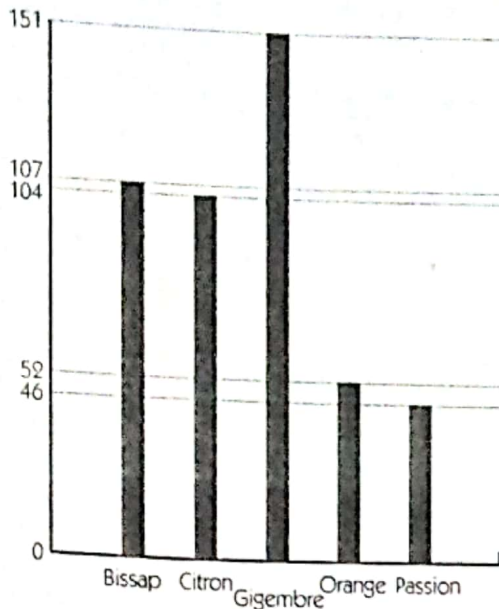
Tableau A

Variété de jus	Nombre de pots
Bissap	107
Citron	104
Gingembre	151
Orange	52
Passion	46

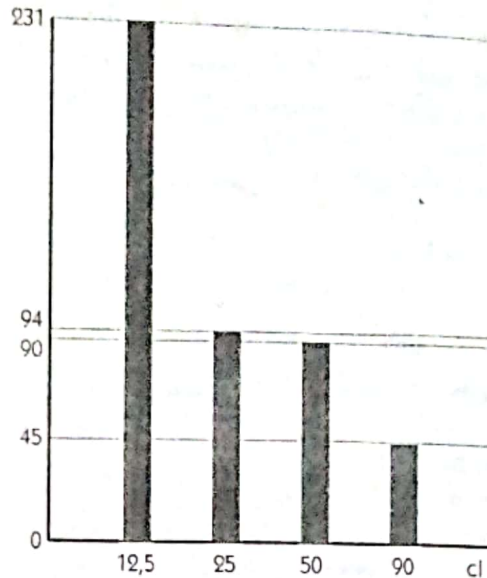
Tableau B

Variété du pot	Nombre de pots
12,5 cl	231
25 cl	94
50 cl	90
90 cl	45

b) Effectif



Effectif



c) La quantité totale, en centilitres, de jus produit est :
 $12,5 \times 231 + 25 \times 94 + 50 \times 90 + 90 \times 45 = 13\,787,5$ cl.

2. Madame Powoloton doit livrer le lendemain, une quantité de jus égale en centilitres à la quantité totale, en la distribuant équitablement dans un nombre de pots égal à celui des pots produits habituellement en une journée.

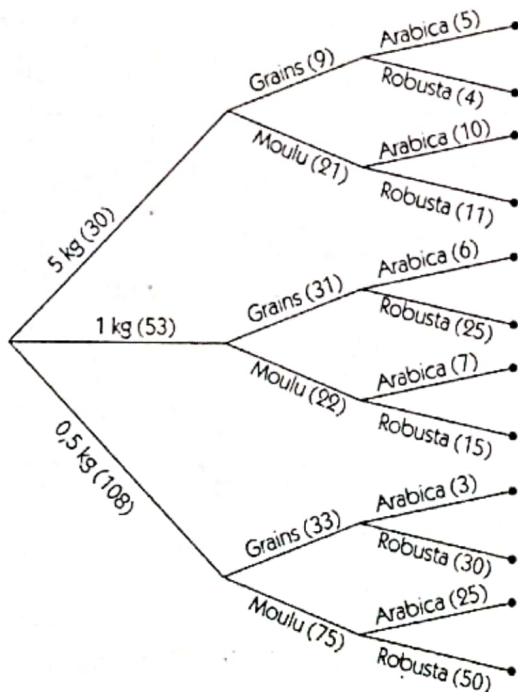
Donc, la quantité commune en centilitres de jus est la moyenne en centilitres des jus produits habituellement en une journée ; c'est-à-dire : $\frac{13\,787,5}{460}$ cl $\approx 29,973$ cl ; soit 30 cl par excès.

◆ Exercice 43 p. 142

1. a) Le nombre de sachets de café moulu de la commande est : $10 + 7 + 25 + 11 + 15 + 50 = 118$.

b) Le nombre de sachets de café en grains de la commande est : $5 + 6 + 3 + 4 + 25 + 30 = 73$.

2.



3. a)

Caractère : variété

Variété du café	Nombre de sachets
arabica	56
robusta	135

Caractère : quantité

poids du café	Nombre de sachets
5 kg	30
1 kg	53
0,5 kg	108

Caractère : état

Variété du café	Nombre de sachets
grains	73
moulu	118

b) Le caractère « variété » est qualitatif.

Le caractère « quantité » est quantitatif.

La quantité moyenne en kg est : $\frac{5 \times 30 + 1 \times 53 + 0,5 \times 108}{191} = 1,346$.

Le caractère « état » est qualitatif.



9 782841 297795

R.C.I. NO



Biblio CAEB-Nati

4304

594179.2

594179.2