

Kouadio
Kon
yves-Laurent

O.M
Annaba

~~any~~

Kanyt

COLLECTION
INTER
AFRICAIN DE
MATHÉMATIQUES



MATHÉMATIQUES - GUIDE PÉDAGOGIQUE

MATHÉMATIQUES

GUIDE PÉDAGOGIQUE

$a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $3 + 2 = 45$



2841 290444

Xany

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

4^e

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen,
92178 Vanves Cedex

SOMMAIRE

1	Tableau synoptique des programmes du 1 ^{er} cycle.....	3
2	COMMENTAIRES VALABLES POUR TOUT LE 1 ^{er} CYCLE.....	8
3	COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LA CLASSE DE QUATRIÈME....	10
	A. Activités Géométriques	12
	1. Les grandes axes en Activités Géométriques.....	12
	2. Faire des Activités Géométriques en classe de Quatrième.....	14
	3. Les définitions, propriétés, remarques, règles méthodes et vocabulaire..	15
	4. Les constructions géométriques.....	16
	5. L'apprentissage de la démonstration	17
	6. Quelques expressions utilisées.....	18
	B. Activités Numériques	19
	1. Les grands axes en Activités Numériques.....	19
	2. Faire des Activités Numériques en classe de 4 ^e	20
	3. Les définitions, les règles et les propriétés.....	21
	4. L'utilisation de la calculatrice.....	21
	5. L'apprentissage à la démonstration	22
4	PRÉSENTATION DES OUVRAGES-ÉLÈVES	24
	1. Découpage en chapitres.....	24
	2. Le manuel de l'élève.....	24
	3. Le livret d'activités	25
5	ANALYSE DES CHAPITRES	27
	1. Résoudre des problèmes de géométrie	27
	2. Symétries	33
	3. Distances	42
	4. Triangle	47
	5. Translations et vecteurs.....	56
	6. Projection et repérage.....	62
	7. Angle au centre – Polygones réguliers.....	70
	8. Solides de l'espace	73
	9. Droites et plans de l'espace.....	79
	10. Calcul littéral	85
	11. Nombres rationnels	88
	12. Équations – Inéquations	94
	13. Approximations décimales d'un nombre.....	97
	14. Résolution de problèmes.....	101
	15. Statistiques.....	107

ISBN 2-84-129044-1

© EDICEF 1996

Droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

En application de la loi du 11 mars 1957, il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement le présent ouvrage sans autorisation de l'éditeur ou du Centre Français de l'Exploitation du Droit de Copie (3, rue Hautefeuille, 75006 Paris). Cette reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

1 TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU PREMIER CYCLE

Les programmes du Premier Cycle établis en juin 1992, lors du quatrième séminaire d'harmonisation des programmes de mathématiques des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien, sont présentés ici dans un tableau synoptique afin de faire apparaître :

- d'une part, la cohérence des différents thèmes à un niveau donné ;
- d'autre part, l'évolution d'un thème d'un niveau à l'autre.

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

Sixième

- ◆ Cube - Pavé droit
- Observation et description
- Vocabulaire, propriétés
- Construction d'un patron
- Réalisation d'un solide
- Calcul de volumes, d'aires

- ◆ Cylindre
- Observation et description
- Vocabulaire, propriétés
- Construction d'un patron
- Réalisation d'un solide
- Calcul de volumes, d'aires

Cinquième

- ◆ Pyramide (*falcutatif*)
- ◆ Prisme droit (*dont la base est une des figures planes étudiées en 6^e ou 5^e*)
- Observation et description
- Vocabulaire, propriétés
- Construction d'un patron
- Réalisation d'un solide
- Calcul de volumes, d'aires (*pas de calcul de volume pour la pyramide*)

Quatrième

- ◆ La sphère
- Calcul de volumes, d'aires
- ◆ Cône de révolution (*falcutatif*)
- Observation et description
- Vocabulaire, propriétés
- Construction d'un patron
- Réalisation d'un solide
- Calcul d'aires

- ◆ Notions de plans et de droites de l'espace
- Positions relatives (en s'appuyant sur les solides connus)
- ◆ Perspective cavalière
- Règles élémentaires de la perspective cavalière
- Représentation de solides

Troisième

- ◆ Pyramide
- Observation et description
- Vocabulaire, propriétés
- Pyramide régulière
- Construction d'un patron
- Réalisation d'un solide
- Calcul de volumes, d'aires

- ◆ Cône de révolution
- Observation et description
- Vocabulaire, propriétés
- Construction d'un patron
- Réalisation d'un solide
- Calcul de volumes, d'aires

- ◆ Section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à celui de la base.
- Section
- Tronc de cône, de pyramide
- Calculs de volumes d'aires
- Propriétés de réduction

Sixième

- ◆ **Droites**
 - Droites ; points alignés ; demi-droites
 - Droites sécantes ; droites perpendiculaires
 - Droites parallèles
 - définition
 - propriétés
- ◆ **Segments**
 - Segment, support d'un segment
 - Longueur d'un segment ; mesure de cette longueur
 - Milieu d'un segment
 - Médiatrice d'un segment
 - définition

- ◆ **Angle**
 - Introduction de la notion d'angle
 - Vocabulaire
 - Mesure (en degrés)
 - Angles adjacents
 - Bissectrice d'un angle

- ◆ **Triangle**
 - Vocabulaire
 - Triangles particuliers
 - Droites particulières
 - hauteur
 - médiatrice d'un côté
 - bissectrice d'un angle
 - Périmètre, aire

- ◆ **Cercle**
 - Centre, rayon, diamètre, corde
 - Périmètre du cercle ; aire du disque

- ◆ **Parallélogramme**
 - Définition
 - Propriétés :
 - côtés opposés,
 - diagonales
 - Losange, rectangle, carré
 - Périmètre, aire

Cinquième

- ◆ **Distance de deux points**
 - Inégalité triangulaire,
 - Caractérisation du segment
 - Médiatrice d'un segment
 - caractérisation
 - régionnement du plan

- ◆ **Angle**
 - Angles complémentaires, angles supplémentaires
 - Angles opposés par le sommet
 - Angles formés par deux droites parallèles et une sécante
 - alternes-internes
 - alternes-externes
 - correspondants

- ◆ **Triangle**
 - Somme des angles d'un triangle
 - Caractérisation de triangles particuliers
 - Droites particulières :
 - médiatrices - centre du cercle circonscrit

- ◆ **Cercle**
 - Cercle circonscrit à un triangle rectangle
 - Régionnement du plan par un cercle : intérieur, extérieur

- ◆ **Polygone**
 - Caractérisation de parallélogrammes particuliers
 - Trapèze
- ◆ **Polygone régulier**
 - Définition
 - Triangle équilatéral et hexagone
 - Carré et octogone

Quatrième

- ◆ **Distance d'un point à une droite**
 - Définition
- ◆ **Distance de deux droites parallèles**
 - Définition
 - Caractérisation de la bissectrice d'un angle

- ◆ **Angle**
 - Angle au centre d'un cercle ; arc de cercle intercepté

- ◆ **Triangle**
 - Droite des milieux :
 - propriété directe
 - propriété réciproque
 - Droites particulières :
 - bissectrices - centre du cercle inscrit
 - hauteurs - orthocentre
 - médianes - centre de gravité
 - Triangle rectangle
 - propriété de Pythagore : (directe et réciproque)
 - propriété métrique déduite de l'aire

- ◆ **Cercle**
 - Positions relatives d'une droite et d'un cercle
 - Tangente
 - définition
 - tangentes passant par un point

- ◆ **Parallélogramme**
 - Parallélogramme et égalités vectorielles
 - cf « OUTIL VECTORIEL »
- ◆ **Polygone régulier**
 - Triangle équilatéral et hexagone
 - Carré et octogone
 - Pentagone

Troisième

- ◆ **Angle inscrit dans un cercle**
 - Définition, vocabulaire
 - Propriétés
 - angle inscrit et angle au centre associés
 - angles inscrits interceptant le même arc

- ◆ **Trigonométrie dans le triangle rectangle**
 - Rapports trigonométriques d'un angle aigu (sinus, cosinus, tangente)
 - Propriétés :
 - calculs dans le triangle rectangle
 - Rapports trigonométriques des angles
 - lecture de table
 - angles de 30°, 45°, 60°

- ◆ **Polygone régulier**

Sixième

- ◆ **Figures symétriques par rapport à une droite**
 - Programme de construction
 - Droites, segments, angles symétriques par rapport à une droite
- ◆ **Figures symétriques par rapport à un point**
 - Programme de construction
 - Droites, segments, angles symétriques par rapport à un point

APPLICATIONS DU PLAN

- ◆ **Repérage d'un point sur une droite**
 - En liaison avec la comparaison des nombres décimaux (arithmétiques) : demi-droite graduée
 - origine
 - unité
 - En liaison avec l'introduction des nombres décimaux relatifs : droite graduée
 - origine, unité
 - abscisse d'un point

Cinquième

- ◆ **Figures symétriques par rapport à une droite ou un point**
 - Symétrie,
 - du milieu d'un segment
 - de droites perpendiculaires
 - de droites parallèles
 - Construction de figures symétriques

- ◆ **Repérage d'un point sur une droite**
 - En liaison avec la comparaison des nombres décimaux relatifs
- ◆ **Repérage d'un point sur un quadrillage**
 - Vocabulaire :
 - noeud, maille
 - Notion de couple

Quatrième

- ◆ **Symétrie orthogonale - Symétrie centrale**
 - Définition
 - Propriétés
- ◆ **Translation**
 - Programme de construction
 - Translation et vecteur
 - Propriétés
 - conservation de l'alignement, des distances, des mesures angulaires
 - image d'une droite
 - Composée de deux translations
- ◆ **Projection**
 - Programme de construction
 - Projeté du milieu

- ◆ **Vecteur**
 - Notion de vecteur
 - égalité de vecteurs
 - représentant d'un vecteur d'origine donnée.
 - Addition des vecteurs
 - somme de deux vecteurs
 - propriété de Chasles
 - vecteur nul
 - opposé d'un vecteur
 - caractérisation vectorielle du milieu

- ◆ **Repérage**
 - Sur une droite graduée
 - repère d'une droite, axe, abscisse
 - Dans le plan
 - repère orthogonal, orthonormal
 - couple de coordonnées d'un point : abscisse, ordonnée

Troisième

- ◆ **Symétrie orthogonale - Symétrie centrale**
 - Images de figures simples par la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles ou perpendiculaires
- ◆ **Translation**
 - Propriétés de conservation :
 - du milieu
 - de l'orthogonalité
 - du parallélisme
- ◆ **Propriétés de Thalès**
 - Propriété directe
 - Propriété réciproque
 - Cas particulier du triangle

- ◆ **Multiplication d'un vecteur par un nombre réel**
 - Produit d'un vecteur par un nombre réel
 - définition
 - propriétés
 - Vecteurs colinéaires
 - définition
 - vecteurs directeurs d'une droite

- ◆ **Coordonnées d'un vecteur**
 - Définition
 - Coordonnées :
 - d'une somme de vecteurs
 - du produit d'un vecteur par un nombre réel
 - Condition de colinéarité de deux vecteurs
 - Calculs dans un repère orthonormal
 - condition d'orthogonalité
 - norme d'un vecteur
 - distance de deux points

- ◆ **Équations de droites**
 - Coordonnées d'un vecteur directeur
 - Coefficient directeur
 - coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
 - condition de parallélisme de deux droites
 - condition d'orthogonalité de deux droites (repère orthonormal)

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

Sixième

- ◆ **Arithmétique**
 - Ensemble \mathbb{N} des nombres entiers naturels
 - Multiples, diviseurs
 - Caractères de divisibilité :
 - par 10 ; 100 ; 1000... ;
 - par 2 ; 5
 - par 3 ; 9

- ◆ **Fraction**
 - Différentes écritures d'une fraction
 - simplification
 - écriture fractionnaire d'un nombre décimal
 - Somme ou différence de deux fractions de même dénominateur
 - Produit d'un nombre entier naturel par une fraction

- ◆ **Nombres décimaux (arithmétiques)**
 - Opérations
 - addition
 - soustraction
 - multiplication
 - division
 - Comparaison
 - Estimation d'un résultat

- ◆ **Nombres décimaux relatifs (facultatifs)**
 - Introduction :
 - ensemble \mathbb{D} des nombres décimaux relatifs
 - ensemble \mathbb{Z} des nombres entiers relatifs
 - Somme d'entiers relatifs

Cinquième

- ◆ **Arithmétique**
 - Division euclidienne
 - Nombres premiers
 - Décomposition en produit de facteurs premiers
 - Application à la recherche de multiples ou de diviseurs
 - Calcul du PPCM et du PGCD

- ◆ **Fraction**
 - Simplification (fraction irréductible)
 - Comparaison
 - comparaison à l'unité
 - encadrement par deux nombres décimaux de même ordre consécutifs
 - écriture du type : $\frac{a}{b} = n + \frac{c}{b}$ avec $\frac{c}{b} < 1$
 - Somme ou différence de deux fractions de dénominateurs différents
 - Produit de deux fractions

- ◆ **Nombres décimaux relatifs**
 - Introduction :
 - ensemble \mathbb{D} des nombres décimaux relatifs
 - ensemble \mathbb{Z} des nombres entiers relatifs
 - Addition
 - opposé d'un nombre décimal
 - Soustraction
 - Comparaison
 - Multiplication

- ◆ **Puissances**
 - Puissance à exposant entier naturel non nul d'un nombre décimal relatif
 - Calculs simples

Quatrième

- ◆ **Arithmétique**
 - Utilisation du PPCM et du PGCD

Fractions

- ◆ **Nombres décimaux**
 - Écriture sous la forme $a \cdot 10^n$ ($a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$)
 - Multiplication : $a \cdot 10^m \times b \cdot 10^n$

- ◆ **Nombres rationnels**
 - Introduction
 - ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels
 - Inverse d'un nombre rationnel non nul ; notation : $\frac{1}{a}$
 - Division
 - Encadrement (approximations décimales d'un nombre rationnel positif)

- ◆ **Puissances**
 - Puissances à exposant entier naturel d'un nombre rationnel non nul
 - Propriétés

Troisième

- ◆ **Nombres réels**
 - Introduction
 - ensemble \mathbb{R} des nombres réels
 - Radicaux
 - définition
 - propriétés
 - comparaison
 - opérations
 - Comparaison de nombres réels
 - Intervalles dans \mathbb{R}
 - Encadrement de :
 - somme
 - différence
 - produit
 - quotient
 - Usage de tables numériques

- ◆ **Puissances**
 - Puissances à exposant entier relatif d'un nombre réel
 - Propriété

- ◆ **Valeur absolue d'un nombre réel**
 - Définition
 - Propriétés immédiates

Sixième

- ◆ **Organisation des calculs**
 - Utilisation des propriétés de l'addition et de la multiplication
 - Règles de priorité des opérations ; utilisation des parenthèses
- ◆ **Initiation au calcul littéral**
 - En relation avec les calculs de périmètres, d'aires et de volumes

ORGANISATION DES CALCULS CALCUL LITTÉRAL

- ◆ **Situations de proportionnalité**
 - Tableau de proportionnalité
 - Coefficients de proportionnalité

- ◆ **Pourcentage - Échelle**
 - Utilisation
 - d'un pourcentage
 - d'une échelle

Cinquième

- ◆ **Initiation au calcul littéral**

- ◆ **Notion d'équation**
 - Équation du type : $a + x = b$ dans \mathbb{D}
 - Trouver x tel que : $ax = b$

- ◆ **Proportionnalité**
 - Calcul d'un coefficient :
 - vitesse
 - masse volumique
 - débit
 - Représentation graphique point par point d'un tableau de proportionnalité

- ◆ **Pourcentage - Échelle**
 - Calcul :
 - d'un pourcentage
 - d'une échelle

Quatrième

- ◆ **Calcul sur les expressions algébriques**
 - Développement, réduction
 - Factorisation
 - Produits remarquables : $(a + b)^2$; $(a - b)^2$; $(a + b)(a - b)$

- ◆ **Équations, Inéquations**
 - Équations du type : $ax + b = 0$ dans \mathbb{Q} résolution.
 - Inéquations des types : $ax + b < 0$ dans \mathbb{Q} ; $ax + b > 0$ dans \mathbb{Q} recherche de solutions.

Proportionnalité

Notion d'application linéaire

- ◆ **Statistiques**
 - Vocabulaire
 - Classification de données
 - Effectifs, fréquence (en %)
 - Moyenne
 - Diagrammes
 - à bandes
 - à bâtons
 - circulaires

Troisième

- ◆ **Monômes - Polynômes**
 - Notion de monôme :
 - degré
 - coefficient
 - Notion de polynôme
 - degré
 - addition
 - multiplication
 - Fractions rationnelles
 - condition d'existence d'une valeur numérique
 - simplification

- ◆ **Équations, Inéquations**
 - Équations et inéquations du 1^{er} degré à une inconnue dans \mathbb{R}
 - Équations et systèmes de deux équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 - Inéquations et systèmes d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- ◆ **Applications linéaires**
 - Définition
 - Propriétés de linéarité
 - Bijection
 - Sens de variation
 - Représentation graphique

- ◆ **Applications affines**
 - Définition
 - Sens de variation
 - Représentation graphique
 - Exemples d'applications affines par intervalles.

- ◆ **Statistiques**
 - Exemples de regroupement en classes (d'égales amplitudes)
 - Histogramme

Compléments facultatifs au programme

◆ Homothétie

L'homothétie pourra être introduite en classe de 3^e après les propriétés de Thalès.

On se limitera à :

- donner la définition (centre, rapport) ;
- mettre en évidence les propriétés élémentaires ;
- construire des figures simples.

◆ Rotation

On pourra faire, en classe de 3^e, une approche expérimentale de la rotation en liaison avec les polygones réguliers. On se limitera à :

- réaliser des programmes de construction ;
- mettre en évidence la conservation de la distance.

ORGANISATION DE DONNÉES

ORGANISATION DES CALCULS - CALCUL NUMÉRIQUE

2 COMMENTAIRES VALABLES POUR TOUT LE PREMIER CYCLE

Les nouveaux programmes du Premier Cycle, qui sont mis en place progressivement sont en conformité avec les décisions du 4^e Séminaire d'Harmonisation des Programmes de Mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien. Ils tiennent compte tant des progrès de la science (prise en compte des moyens modernes de calcul) que des recherches actuelles en didactique des mathématiques. Ce faisant, ils visent à corriger quelques dysfonctionnements des anciens programmes :

AMÉLIORER LES CONTINUITÉS

Les nouveaux programmes évitent de laisser se perdre des techniques acquises ou en cours d'acquisition :

- soit à l'École Primaire (calcul sur les fractions...)
- soit à un niveau donné du cycle (angles vus en classes de 6^e et 3^e mais non utilisés en classes de 5^e et 4^e, espace abordé seulement en 5^e...).

ASSURER UNE COHÉRENCE PAR THÈME ET PAR NIVEAU

Voir le tableau synoptique des programmes du premier cycle

PRÉSENTER UN CONCEPT SEULEMENT LORSQUE LA NÉCESSITÉ DE SON UTILISATION SE FAIT SENTIR

On ne comprend un concept qu'en le faisant fonctionner dans une situation donnée.

Les nouveaux programmes respectent ce principe. On évitera d'être plus ambitieux que les programmes.

PRÉSENTER PLUTÔT DES OUTILS QUE DES OBJETS D'ÉTUDE

D'où la nécessité de :

- **donner du sens aux concepts pour une meilleure appropriation par les élèves d'une notion qui leur semble utile.**

Par exemple, il est anormal que certains élèves confondent des formules de calcul d'aire et de périmètre ; cela dénote qu'ils ne maîtrisent pas la notion pourtant extrêmement simple de périmètre.

- **faire fonctionner ces outils implicitement avant toute formalisation lorsque c'est nécessaire.**

Par exemple, il semble plus important, au lieu de donner une définition des angles sur laquelle les professeurs discuteront sans arriver à se mettre d'accord, d'entraîner les élèves à voir sur des configurations des égalités angulaires par exemple, à justifier ou à en déduire d'autres propriétés, à les utiliser dans des problèmes.

PRATIQUER UN ENSEIGNEMENT EN SPIRALE ET ASSURER UNE PROGRESSIVITÉ DES ACQUIS

Plutôt que de présenter de façon exhaustive une notion en considérant que tout est dit, il vaut mieux au contraire revenir régulièrement dessus en renforçant et en enrichissant les acquis.

Évidemment, revenir à un « niveau n+1 » sur une notion présentée à un « niveau n » ne signifiera pas recommencer une seconde fois la présentation sous l'appellation rappel ou révision. Il s'agira de mettre en œuvre des savoirs et des savoir-faire déjà installés pour s'attaquer à des problèmes non traités au niveau précédent et dégager des propriétés supplémentaires.

Évaluer les savoirs et savoir-faire fondamentaux, s'assurer de leur maîtrise, les entretenir régulièrement, les réinvestir paraît fondamental.

INITIER LE PLUS TÔT POSSIBLE L'ÉLÈVE AU RAISONNEMENT

Certains anciens programmes semblaient inviter les professeurs à attendre la classe de 4^e pour commencer l'apprentissage de la démonstration. Cet apprentissage présente de nombreuses difficultés et peu d'élèves maîtrisent ce savoir-faire à l'entrée dans le second Cycle.

Désormais, le professeur saisira toutes les occasions, dès la classe de 6^e, pour faire raisonner les élèves.

Il veillera à la mise en place d'exercices visant à améliorer la capacité des élèves à émettre des conjectures, à argumenter, à justifier leurs réponses et à infirmer des propositions par des contre-exemples...

Il ne saurait être question d'exiger tout de suite un discours formel et rigoureux. Le professeur définira un niveau d'exigence raisonnable pour la classe considérée. Il saura taire des subtilités sans intérêt, pour s'attacher à l'essentiel.

Que l'élève donne du sens à la démonstration, qu'il éprouve le besoin de démontrer, qu'il soit capable d'organiser un raisonnement, est essentiel. La détermination de ce niveau d'exigence sera fonction des outils disponibles et du niveau des élèves.

La rigueur est par définition relative : elle dépend de la personne qui produit la démonstration et du destinataire.

René THOM (Médaille Fields de mathématiques) déclare :

« Si j'avais à choisir entre la rigueur et le sens, je choiserais sans hésiter le sens ».

Ainsi, en classe de 6^e, on ne considérera que les quadrilatères convexes : on tirera donc, à ce niveau, la subtilité liée à la caractérisation d'un parallélogramme par deux côtés opposés parallèles et de même longueur. L'outil vectoriel, introduit ultérieurement, apportera la seule réponse valable à cette subtilité : il ne sert à rien d'affirmer que ce quadrilatère n'est pas croisé puisqu'on ne dispose d'aucun argument (si ce n'est visuel) pour conclure de manière convaincante.

PRENDRE EN COMPTE LE CARACTÈRE D'OUTIL DES MATHÉMATIQUES

- Puiser dans la vie courante des situations où l'on utilise des mathématiques.
- Encourager les échanges interdisciplinaires.

EXPLOITER DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES L'ENVIRONNEMENT SOCIO-CULTUREL DE L'AFRIQUE ET DE L'OcéAN INDIEN

Toutes les études psychopédagogiques préconisent de sécuriser les jeunes élèves et de favoriser leur épanouissement en proposant des motivations d'activités dans leur environnement immédiat.

L'école ne doit pas couper l'élève de son milieu socio-culturel. Comme le propose le Professeur Paulus GERDES, tout professeur de mathématique se doit de montrer par des activités, que les artisans savent résoudre de façon originale les problèmes mathématiques qui leur sont posés dans la pratique de tous les jours. Ainsi tous les élèves seront fiers de leur culture.

RENDRE L'ÉLÈVE ACTIF

Ce point n'est certainement pas nouveau : il est souligné dans de nombreux programmes. Il est sans aucun doute le plus important. Nous ne citerons pas tous les travaux de spécialistes affirmant que l'élève doit **construire ses savoirs mathématiques**. Il y a semble-t-il consensus sur ce point ; la méthodologie préconisée paraît répondre à une des finalités de l'école : former des personnes autonomes, dotées d'un sens critique et capables d'initiative réfléchie. Encore ne faut-il pas se leurrer sur ce que l'on entend par activités dans la préparation d'une séquence d'apprentissage. Il s'agit d'activités de l'élève, non du professeur. C'est l'élève qui doit dans la mesure du possible, décider d'une stratégie pour résoudre un problème donné.

TRAITER LE PROGRAMME, TOUT LE PROGRAMME

3 COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LA CLASSE DE QUATRIÈME

Les commentaires généraux valables pour tout le Premier Cycle prennent bien sûr, comme en 6^e et 5^e, toute leur valeur en classe de 4^e. Il s'agira de les mettre en application en tenant compte du fait que les élèves sont depuis deux ans dans le premier cycle de l'enseignement secondaire et qu'en conséquence ils ont déjà acquis des méthodes de travail et des comportements propres à ce cycle.

Le programme de Quatrième est surtout conçu pour l'apprentissage de connaissances nouvelles, tout en s'appuyant fortement sur les connaissances acquises en 6^e et 5^e.

L'enseignement en 4^e reste bien entendu centré sur l'élève. Celui-ci est mis en activité tout au long des séquences d'apprentissage :

il construit des figures, il argumente, il justifie.

Il s'agira donc pour le professeur de mener sa classe de façon à :

- **consolider les savoirs et savoir-faire acquis en classes de 6^e et 5^e en les réinvestissant immédiatement dans des exercices :**

(pour éviter les déperditions de connaissances, sans pour autant perdre de temps dans la progression du programme sur ces connaissances normalement acquises en 6^e et 5^e.)

- **enrichir ces connaissances de façon à assurer la progressivité de leur acquisition ;**

- **utiliser ces nouveaux acquis dans des situations variées au travers de la résolution d'exercices qui donnent du sens à ces nouvelles connaissances en tenant compte dans la mesure du possible de l'environnement socio-culturel proche de l'élève.**

Le professeur entraînera les élèves à travailler sur différents types d'exercices : les exercices du cours et les exercices de fin de chapitre (exercices d'entraînement, d'approfondissement, de recherche).

Types d'exercices	Objectifs
Exercices d'application directe On les trouve dans le Manuel – partie cours – partie exercices d'entraînement	Faire fonctionner directement les définitions et les propriétés
Exercices de consolidation des acquis On les trouve dans le Manuel parmi les exercices d'approfondissement	Faire fonctionner les définitions et les propriétés dans des situations plus complexes
Exercices de recherche On les trouve dans : – le Manuel parmi les exercices de recherche – le Livret d'Activités dans la rubrique « Problèmes »	Faire découvrir par les élèves une méthode pour résoudre un problème complexe. Le professeur organisera la recherche de cette méthode en faisant travailler, de préférence, les élèves en groupes

- Certains exercices de recherche pourront être décomposés et présentés, à l'initiative du professeur en plusieurs exercices liés : la résolution des premiers facilitant celle des suivants.

Si un exercice de recherche est présenté sous forme d'une chaîne d'exercices liés, il devra faire l'objet d'un travail individuel de la part des élèves. S'il n'est pas décomposé, il est souhaitable de le traiter en groupes.

Parmi les exercices de recherche, nous appellerons « problèmes ouverts » ceux dont la solution n'est pas connue de la communauté des élèves. Ce sont des problèmes présentés par un énoncé court où n'apparaît, ni méthode de résolution, ni solution et qui se situent dans un domaine conceptuel familier de l'élève.

Pour résoudre de tels problèmes, on utilise une véritable démarche scientifique :

Faire des essais – conjecturer – tester – prouver.

C'est une approche inductive. L'organisation « d'un problème ouvert » étant lourde à gérer, on pourra néanmoins en proposer environ un par trimestre aux élèves pour bénéficier de la richesse de cette activité.

- **En activité géométrique**

L'accent sera plus particulièrement mis sur la compréhension de l'énoncé et sur l'acquisition de méthodes de recherche d'une démarche, plus spécifiquement pendant les séquences de résolution d'exercices et de problèmes (voir rubrique « Exercice commenté »).

- **En activités numériques, l'élève devra :**

- avoir des réflexes d'auto-contrôle ;

- choisir une écriture appropriée d'un nombre, pour l'utilisation souhaitée ;

- choisir une démarche performante pour effectuer un calcul numérique ;

- adopter une démarche expérimentale pour de nombreux exercices :

- effectuer plusieurs essais

- émettre une conjecture

- confirmer cette conjecture ou l'infirmier.

Pour confirmer une conjecture, il faut la justifier.

Pour infirmer une conjecture, il suffit de la prendre en défaut en exhibant un contre-exemple.

On insistera particulièrement sur le fait que les élèves ont la fâcheuse tendance à confirmer une conjecture par un seul exemple (parfois deux ou trois).

Le manuel de 4^e est constitué, comme ceux de 6^e et de 5^e, de deux parties : les Activités Géométriques et les Activités Numériques.

A. ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

La géométrie restant un domaine privilégié pour mettre les élèves en activité et leur apprendre à argumenter, les activités géométriques occupent encore en 4^e une place importante dans les programmes et s'articulent autour de quatre grands axes.

1. Les grands axes en activités géométriques

▣ CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

L'étude des configurations de l'espace, étudiées en 6^e et 5^e, est réinvestie et complétée par deux chapitres en 4^e :

– Chapitre 8 : Solide de l'espace

Dans ce chapitre est abordée la représentation d'un solide de l'espace. Trois règles permettent de réaliser, pour les prismes droits et les pyramides, une représentation dans le plan dite représentation en perspective.

Ces trois règles sont complétées par deux autres dans une initiation à la perspective cavalière pour le pavé droit.

Les solides de révolution permettent une représentation commune de la sphère et du cône, en liaison avec le cylindre.

– Chapitre 9 : Droites et plans de l'espace

Dans ce chapitre, on aborde les positions relatives des droites, des plans, des droites et plans de l'espace.

Les objectifs visés par l'étude des objets de l'espace à ce niveau d'enseignement sont :

– l'observation directe d'un solide afin d'acquérir le vocabulaire et de procéder à une description des positions relatives de droites, de plans, de droites et plans de l'espace.

– la construction de patrons et la réalisation de solides ;

– la représentation en perspective (et éventuellement en perspective cavalière) des solides étudiés ;

– l'interprétation des représentations dans le plan des solides étudiés ;

– la reconnaissance, sur une représentation dans le plan d'un solide, des positions relatives de droites et de plans ;

– la représentation, en dimensions réelles ou à une échelle donnée, des figures d'un plan et l'utilisation des propriétés du plan.

▣ CONFIGURATIONS DU PLAN

Les séquences d'apprentissage utilisant les configurations du plan devront toujours être pour l'élève l'occasion de conforter et d'enrichir les connaissances acquises dans les deux classes précédentes.

La distance de deux points est vue en 6^e et 5^e. Elle est prolongée par la distance d'un point à une droite et la distance de deux droites parallèles.

L'équidistance d'un point à deux droites permet de caractériser :

– l'axe médian (cas de deux droites parallèles) ;

– la bissectrice d'un angle (cas de deux droites sécantes).

Les propriétés concernant la position relative de deux cercles ne sont pas des savoirs exigibles. Par contre, les propriétés concernant la position relative d'une droite et d'un cercle le sont ; elles permettent de caractériser la tangente à un cercle et d'en déduire une méthode de construction, cette méthode utilisant les résultats sur la position relative de deux cercles.

L'étude des triangles et des triangles particuliers, vue en 6^e et 5^e est complétée par :

– la droite des milieux et la médiane ;

– les points particuliers : l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle inscrit dans un triangle (le centre du cercle circonscrit à un triangle ayant été vu en classe de 5^e) ;

– deux propriétés métriques du triangle rectangle (propriété de Pythagore et sa réciproque ; propriété déduite de l'aire).

La propriété de Pythagore sera revue et utilisée de manière plus performante en classe de 3^e avec l'introduction de la racine carrée d'un nombre.

La notion d'angles au centre est vue principalement dans le but de construire à l'aide du rapporteur d'autres polygones réguliers que ceux étudiés en classe de 5^e (hexagone et octogone).

La plupart des configurations du plan seront considérées comme définitivement acquises à la fin de la classe de 4^e et seront très utiles pour les classes supérieures.

▣ APPLICATIONS DU PLAN DANS LE PLAN

Tout en continuant de privilégier l'aspect « outil » des configurations du plan et de mettre en place des images mentales les plus riches possibles de façon à provoquer des associations immédiates d'idées, des réflexes à la lecture d'énoncés de problèmes ou à l'observation de dessins, on aborde, en 4^e, la notion d'application en s'appuyant sur les figures symétriques étudiées en 6^e et 5^e. Cette notion est immédiatement utilisée lors de l'introduction des deux nouvelles applications du plan dans le plan :

– la projection ;

– la translation.

La notion d'application permettra d'introduire et d'utiliser les tableaux de correspondance comme moyen simple pour compléter une figure par une légende, pour justifier des pas de démonstration ou pour construire.

Les tableaux de correspondance apportent un support au raisonnement et facilitent l'utilisation des propriétés.

La notion de translation est introduite par un programme de construction.

▣ OUTIL VECTORIEL ET REPÉRAGE

L'élève a été initié au repérage d'un point dans le plan lors de la représentation graphique de tableaux de proportionnalité en classe de 5^e.

En classe de 4^e, l'introduction de la projection sur une droite parallèlement à une autre droite permet de généraliser le repérage d'un point dans un plan, ainsi que le vocabulaire qui lui est lié.

Le vecteur est déterminé par un couple de points et, par l'intermédiaire de l'égalité de deux vecteurs, il est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur.

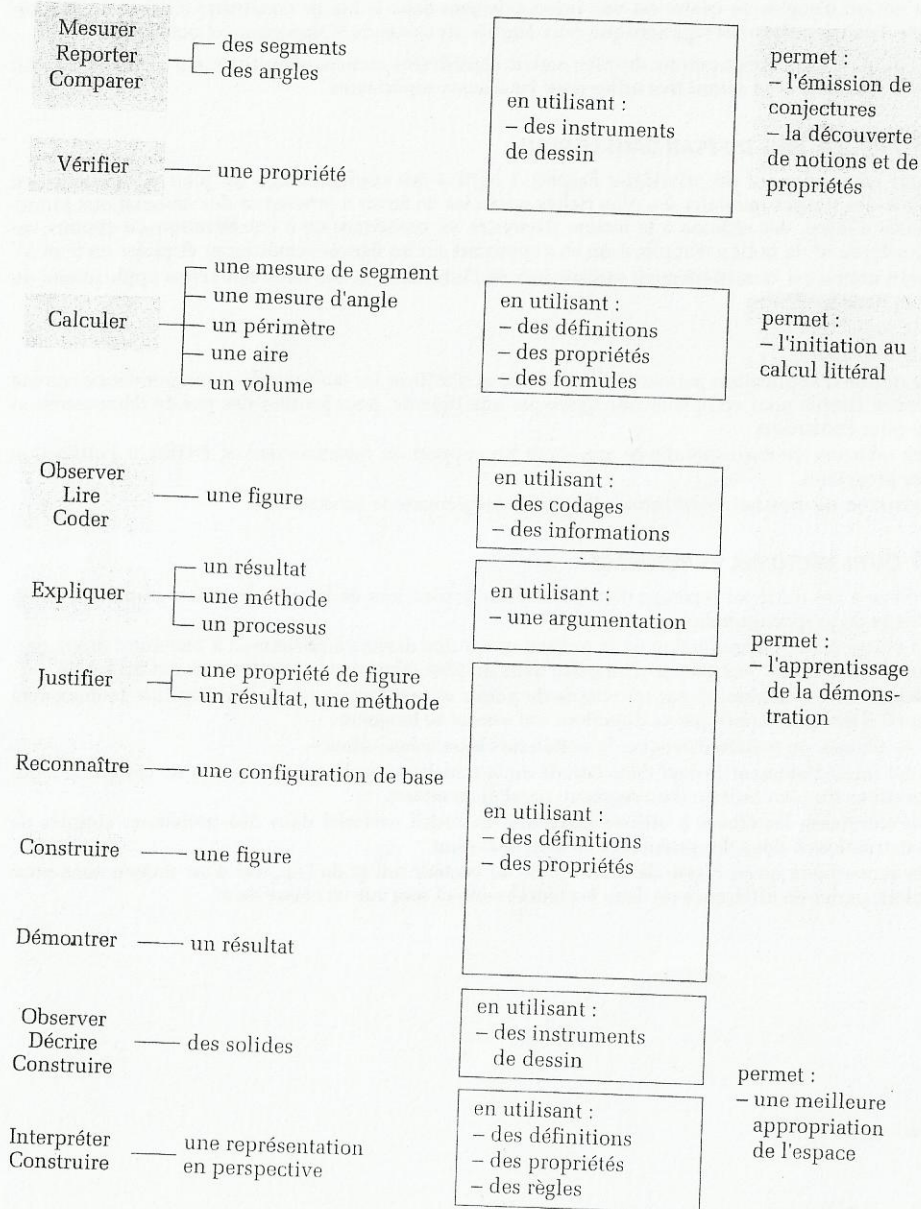
À ce niveau, on évitera d'évoquer la notion de classe d'équivalence.

Il est immédiatement investi dans l'étude de la translation et la caractérisation de certaines configurations du plan (milieu d'un segment, parallélogramme).

On entraînera les élèves à utiliser correctement l'outil vectoriel dans des problèmes simples de construction et dans des problèmes de démonstration.

On remarquera qu'en classe de 4^e, on parle de vecteur nul et de l'opposé d'un vecteur sans pour autant parler de différence de deux vecteurs ; celle-ci sera vue en classe de 3^e.

2. Faire des activités géométriques en classe de 4^e



3. Les définitions, propriétés, remarques, règles, méthodes et vocabulaire

L'une des difficultés majeures pour les élèves à tous les niveaux est d'arriver à produire une démonstration.

Le passage d'un énoncé en français à sa traduction en langage mathématique en est une étape indispensable. La maîtrise de cette étape permet de dégager les données et les conclusions d'un énoncé de problème.

L'utilisation de dessins codés et d'organigrammes de raisonnement aideront à cet apprentissage.

- La présentation d'un objet géométrique obéit aux préoccupations pédagogiques suivantes :
- faire fonctionner des outils implicitement, lorsque la formalisation de leur présentation est complexe ;
 - susciter une représentation mentale de l'objet ;
 - faciliter son utilisation (ce point est la principale préoccupation de la formulation d'une définition ou d'une propriété) ;
 - savoir faire fonctionner les propriétés qui traduisent une équivalence.

☐ PRÉSENTATION PAR UNE FIGURE ACCOMPAGNÉE DE VOCABULAIRE

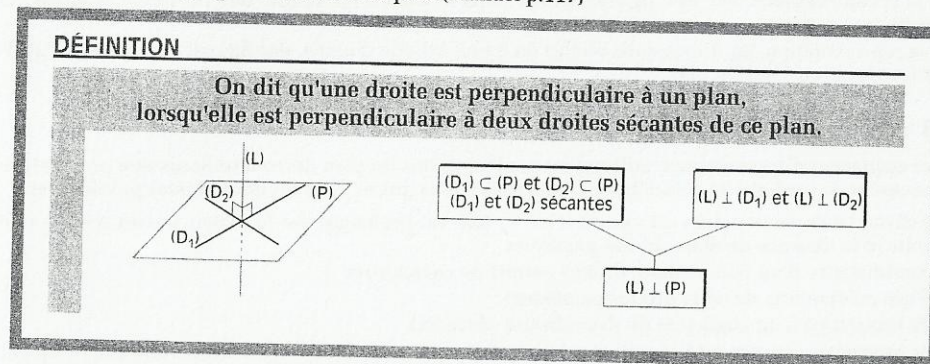
Cette présentation, fréquemment employée en 6^e pour des notions simples telles que droite, segment, triangle, quadrilatère..., doit permettre de reconnaître une configuration et de l'utiliser. Elle est de moins en moins utilisée au fur et à mesure que l'on peut procéder à des démonstrations. En classe de 4^e, elle est surtout employée en géométrie de l'espace et dans le chapitre translations-vecteurs.

☐ PRÉSENTATION PAR UNE DÉFINITION EXPLICITE

Cette définition doit être opératoire, c'est-à-dire qu'on peut l'utiliser directement pour construire des figures ou justifier des propriétés de figure. Sa formulation met en évidence deux parties afin de faciliter son utilisation dans un raisonnement déductif :

- La **description d'une situation** qui permet de reconnaître l'objet et qui correspond aux données dans un organigramme d'utilisation de cette définition.
- La **désignation de l'objet** qui correspond aux conclusions dans un tel organigramme.

Exemple : Droite perpendiculaire à un plan (Manuel p.117)



☐ FORMULATION DES PROPRIÉTÉS

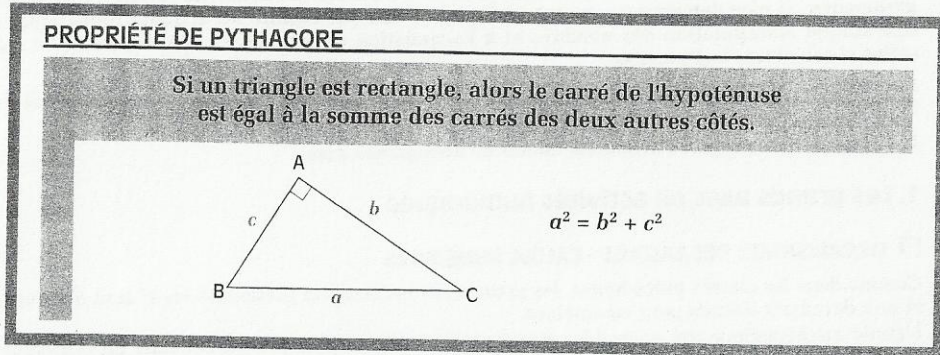
- Les remarques concernant les définitions explicites s'appliquent aux propriétés. Elles sont le plus souvent associées à :
 - une figure codée qui illustre cette propriété ;
 - une traduction mathématique sous forme d'organigramme qui explique l'utilisation de cette propriété.

La plupart des propriétés sont introduites par des activités où l'élève est amené à découvrir et à vérifier cette propriété. Lorsque la propriété n'est pas justifiée, il est explicitement mentionné :

« On admet la propriété suivante ».

Cependant, lorsque cela est possible, la justification d'une propriété est demandée à l'élève à travers une activité.

Exemple : Propriété de Pythagore (Manuel p.54)



REMARQUES, RÈGLES, MÉTHODES ET VOCABULAIRE

Le **vocabulaire** a le statut d'une définition et est en conséquence un savoir exigible (exemples : translation p.67 ; cône p. 108 ; droites coplanaires p. 122).

La rubrique « **Méthode** » est employée pour indiquer une démarche de résolution d'un problème donné ; dans cette rubrique, l'emploi du terme « on peut procéder comme suit » indique que la méthode énoncée n'est pas impérative (exemples : méthodes pour résoudre un problème p.10 et p.13 ; méthode pour construire la somme de deux vecteurs p. 71).

Une **remarque** a le statut d'une propriété ou d'une définition, mais n'est pas un savoir exigible (exemple : solides de révolution p.107).

Une **règle** ou une **formule** a le statut d'une propriété et est en tant que telle un savoir exigible des élèves (exemples : les règles de la présentation en perspective p.103 et en perspective cavalière p.105).

4. Les constructions géométriques

• On réserve en général le verbe **construire** à la réalisation d'une figure mettant en action une méthode plus ou moins élaborée suivant le stade de l'apprentissage. Ainsi, on dira : « tracer un triangle quelconque », mais, « construire un triangle de côtés 3 cm, 4 cm et 6 cm ».

Reproduire une figure, c'est réaliser une autre figure qui lui est superposable ; quant au verbe **dessiner**, on lui attribue un sens large.

Après avoir utilisé, en classe de 6^e, des définitions pour construire des configurations de base, permettant ainsi à l'élève de se familiariser avec le concept utilisé, on favorisera, en 5^e et 4^e, la recherche de méthodes de construction « économiques » ou performantes, ce qui permet de poursuivre l'initiation au raisonnement par la construction géométrique.

Le **dessin à main levée** revêt une très grande importance dans les activités géométriques.

En effet, cette pratique s'est poursuivie en classe de 5^e car, comme en classe de 6^e :

- d'une part, elle permet de développer l'habileté manuelle de l'élève ;
- d'autre part, elle lui laisse une plus grande autonomie vis à vis des instruments dont il ne maîtrise pas toujours l'utilisation et peut permettre une meilleure compréhension du concept représenté par la configuration tracée .

L'**esquisse d'une figure** est un dessin approximatif qui peut être tracée à main levée. Elle précède la construction d'une figure avec les instruments.

• Ainsi, « construire » une figure, c'est :

a) Tracer des configurations de base

- à l'aide d'instruments (en suivant une technique de construction) ;
- à main levée.

b) Réaliser la construction d'une figure

- décrite dans l'énoncé d'un exercice (cette figure étant le support d'un raisonnement, il est souhaitable de la coder par les données de l'exercice) ;
- obtenue par un programme de construction (cette activité favorise la compréhension d'un texte mathématique et la bonne exécution de consignes).

c) Résoudre un problème de construction de figure

- en expliquant la méthode utilisée après avoir réalisé la construction ;
- en recherchant une méthode pour réaliser cette construction.

5. L'apprentissage de la démonstration

Dès la classe de 6^e, les Activités Géométriques ont permis une véritable initiation au raisonnement par des exercices de construction, par la justification de propriétés de figures...

Cependant, il est essentiel que cette initiation au raisonnement se fasse par des exercices gradués de difficultés très progressives. Selon les cas, l'élève pourra travailler individuellement ou par groupe. Le mode d'intervention du professeur dépendra de l'objectif visé.

• En classe de 6^e, l'option choisie était de ne mettre en oeuvre que des raisonnements à un seul pas déductif pour justifier.

En classe de 5^e, la rubrique « Exercice commenté » a permis à l'élève de poursuivre cette initiation.

En classe de 4^e, un apprentissage de la démonstration doit se faire par la résolution de problèmes.

On pourra alors suivre les étapes suivantes :

Lecture de l'énoncé

- Mise en évidence
 - des données,
 - de la conclusion.
- Traduction de l'énoncé par une esquisse codée.

Recherche d'une démarche

- Réalisation à l'aide des instruments, de la figure codée par les données.
- Recherche des conséquences immédiates des données.
- Recherche de pistes conduisant à la conclusion.
- Sélection d'une définition ou d'une propriété pour justifier chaque étape du raisonnement.

Rédaction de cette solution

- Réalisation de la figure codée à l'aide des instruments.
- Mise en évidence des différentes étapes à justifier (utilisation possible d'organigrammes de déduction).
- Rédaction en français de la solution*trouvée.

• En 6^e et 5^e, les problèmes de construction ont largement contribué à l'initiation au raisonnement. On poursuivra cet effort en 4^e en apprenant progressivement à l'élève à suivre, lorsque cela est nécessaire, les étapes ci-dessous :

Lecture de l'énoncé

- Mise en évidence
 - des données,
 - des contraintes,
 - de l'objectif,
 - des instruments imposés.

Recherche d'une méthode de construction

- Faire une esquisse de la figure que l'on doit réaliser.
- Analyser cette esquisse afin de dégager une méthode de construction.

Rédaction de cette solution

- Réaliser la construction.
- Expliquer la méthode utilisée pour cette construction.
- S'assurer que la figure obtenue vérifie toutes les données et contraintes du problème.

• Les exercices commentés pourront faire l'objet, soit d'une simple lecture individuelle de la part des élèves, soit d'une utilisation pour un véritable travail de recherche en groupes ou de recherche collective en classe. Dans cette deuxième optique le professeur pourra, par exemple, donner seulement l'énoncé et des consignes pour organiser le travail des élèves.

Une fois cette préparation faite en classe et sans le support du manuel, l'étape de la rédaction d'une solution pourra soit :

- être rédigée collectivement ;
- être lue dans le manuel individuellement par les élèves ;
- être lue dans le manuel et commentée collectivement (éventuellement comparée aux autres solutions trouvées).

Dans ces exercices commentés, est privilégiée la phase « Recherche d'une démarche », car c'est la phase la plus motivante et la plus enrichissante pour l'élève. Toutefois, la phase « Rédaction de la solution », est rédigée systématiquement dans le but d'initier l'élève à la rédaction d'une solution. Comme en 5^e, cette rédaction peut être présentée sous forme d'un organigramme, chaque étape étant justifiée (ou en explicitant les différentes étapes de la démarche.). Aux organigrammes trop touffus (un seul organigramme pour toute une démonstration), on préférera un découpage en plusieurs sous-organigrammes (un pour chaque étape comme dans l'exercice commenté p. 11).

Dans cette optique, le chapitre 1 comporte trois exercices commentés du type de ceux abordés en classe de 5^e ; ils ont pour objectif essentiel d'induire une méthode de résolution d'un problème qui a pour objet, soit une démonstration, soit une construction.

6. Quelques expressions utilisées

- En classes de 6^e et de 5^e, on emploie le terme « **Justifie que** » au sens de « **Démontre que** », c'est-à-dire que l'on attend de l'élève qu'il apporte une preuve à chaque pas de son raisonnement déductif, sous forme d'une définition, d'une propriété, d'une remarque, d'une formule, d'une règle, ou d'un mot de vocabulaire.

L'emploi de « Justifie que » a été préféré à « Démontre que » dans les classes de 6^e et 5^e, mais dès la classe de 4^e, on emploiera systématiquement le terme « Démontre que » dès que le raisonnement nécessite plus d'un pas de démonstration.

Le terme « **Donnée** » continue d'être employé en lieu et place du terme « Hypothèse » qui peut prêter à équivoque, car dans le langage courant « Hypothèse » est un fait qui n'est pas certain (faire une hypothèse, c'est émettre une conjecture qui peut se révéler vraie ou bien fausse), alors qu'une donnée est un fait certain.

- Le terme « **Explique pourquoi** » est employé lorsque l'on ne peut apporter une justification parce que l'on n'a pas les outils nécessaires pour le faire, mais son emploi veut dire néanmoins que l'on attend que l'élève argumente de façon à conclure, même si cette conclusion n'est pas rigoureusement étayée.

- On emploie en activités géométriques « **Vérifie que** » lorsque que l'on veut se convaincre d'un résultat en utilisant, non pas des définitions, propriétés... mais par exemple des instruments (mesurer des segments, des distances, des angles ; contrôler le parallélisme de droites ou contrôler que deux droites sont perpendiculaires...).

Attention, cette vérification peut toutefois devenir une preuve lorsqu'elle est exhaustive (démonstration par épuisement des cas).

La vérification peut aussi conduire à contrario à une preuve dans le cas où on exhibe un contre-exemple qui permet d'infirmer une conjecture.

L'utilisation des termes « Explique pourquoi » et « Vérifie que » sera de moins en moins fréquent de la 6^e à la 3^e au fur et à mesure que les outils nécessaires pour démontrer seront mis en place.

- Dans la partie Cours du manuel est fréquemment utilisée la phrase « **On admet la propriété suivante** » ; ceci veut dire que :

- soit, on n'a pas les outils nécessaires pour la justifier (démontrer) ;

- soit, on ne veut pas la justifier (bien qu'en ayant les moyens) pour des raisons diverses (évidence, démonstration trop longue, sans intérêt ou peu riche...).

On l'utilise souvent après une activité qui amène à une vérification et non à une justification.

Le professeur ne manquera pas de faire remarquer aux élèves toute l'importance de cette phrase qui précède une propriété qui n'a pas été justifiée.

- Les expressions « **signifie que** » et « **équivalent à** » ont le même sens pour l'élève du 1^{er} cycle. Toutefois « signifie que » est réservée à une définition ou à un mot de vocabulaire, alors que « équivalent à » est exclusivement employée dans une propriété et apparaît pour la 1^{re} fois au niveau de la classe de 4^e (Chapitre 5 : Translation et vecteurs) et indique sans équivoque que la propriété énoncée comprend une propriété directe et sa réciproque.

B. ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

Si la géométrie reste un domaine privilégié pour mettre les élèves en activité et leur apprendre à argumenter, il n'en demeure pas moins vrai qu'il ne faut pas réduire les activités numériques à une simple manipulation des nombres et à l'acquisition de techniques opératoires, bien que celles-ci soient très importantes.

Les activités numériques sont aussi l'occasion de développer les facultés de raisonnement de l'élève.

Les activités numériques s'articulent autour de trois grands axes.

1. Les grands axes en activités numériques

ORGANISATION DES CALCULS - CALCUL NUMÉRIQUE

Comme dans les classes précédentes, les notions sur les nombres présentées en 4^e sont des outils et non des objets d'étude pour eux-mêmes.

L'étude mathématique des ensembles structurés de nombres n'est pas du domaine de l'enseignement de base ; elle se fera plus tard.

Il s'agit toujours d'enrichir la notion de nombre en faisant manipuler intuitivement des propriétés qui apparaissent naturellement au fur et à mesure que de nouveaux problèmes se posent et qui seront pleinement utilisées en 4^e dans le calcul littéral.

L'introduction des nombres rationnels se fait de manière naturelle par « symétrisation des fractions » sur une droite graduée. Elle constitue, avec la comparaison, les quatre opérations sur ces nombres, la puissance entière d'un nombre rationnel et les approximations décimales d'un nombre rationnel, les notions nouvelles abordées en 4^e.

ORGANISATION DES CALCULS - CALCUL LITTÉRAL

L'entraînement au calcul littéral se fait effectivement à partir de la 4^e, bien que les élèves fassent du calcul littéral depuis bien longtemps lorsqu'ils utilisent des formules.

Aussi, c'est pour cette raison que l'introduction des expressions littérales se fait naturellement avec les outils déjà utilisés dans les classes précédentes : organisation d'un calcul, formules de périmètre, d'aire et de volume.

Les principales propriétés sur le calcul littéral seront admises, mais visualisées à l'aide d'un support géométrique pour mieux fixer les savoirs indispensables à tout élève de 4^e.

ORGANISATION DE DONNÉES

Dans cette rubrique, la seule vraie nouveauté est l'introduction à la Statistique et à son vocabulaire de base par l'intermédiaire de l'étude pratique d'une collecte d'informations que l'on :

- organise (tableau des effectifs et tableau des fréquences) ;

- traite (calcul de la moyenne) ;

- représente (diagramme semi-circulaire, à bandes, en bâtons).

La notion d'équation a été abordée en classe de 5^e. En classe de 4^e, la résolution complète des principaux types d'équations du premier degré à une inconnue est systématisée au chapitre 12. Par contre, on n'aborde dans ce chapitre que la notion d'inéquations, les transformations sur les inéquations et la recherche de quelques solutions.

Dans le chapitre 14, on réinvestit la notion de proportionnalité dans des problèmes. On traite aussi du problème, toujours délicat pour les élèves, du partage proportionnel.

Les problèmes de dénombrement, déjà abordés en 5^e et bien que non explicites dans le programme, permettent d'utiliser deux méthodes de dénombrement : l'arbre de choix et le diagramme.

Les problèmes de dénombrement étant toujours au stade de l'initiation, on évitera toute étude systématique.

2. Faire des activités numériques en classe de 4^e

Comparer	— des nombres		
Transformer	— l'écriture d'un nombre	en utilisant : – des définitions – des propriétés – des règles	permet : – la mise en place des nombres – la maîtrise de techniques opératoires
Calculer	— une somme, une différence, un produit, une puissance, un quotient		
	Utiliser		
Estimer	— une somme, un produit		
Organiser	— un calcul	en utilisant : – des techniques	
Contrôler	— un résultat		
Traduire	— une situation	en utilisant : – des informations	
Transformer	— une équation — une inéquation	en utilisant : – des définitions – des propriétés – des règles	permet : – la mise en place des équations et des inéquations
Vérifier	— une égalité — une inégalité		
Résoudre	— une équation		
Exprimer	— en fonction de...	en utilisant : – des informations	permet : – la mise en place de la notion d'application – l'initiation au repérage dans le plan – l'apprentissage de la lecture de graphiques
Observer Lire Construire	— un tableau — un graphique	en utilisant : – des définitions – des propriétés – des règles	
Calculer Utiliser	— un coefficient de proportionnalité		
Expliquer	— un résultat, une méthode	en utilisant : – une argumentation	
Justifier	— un résultat, une méthode	en utilisant : – des définitions – des propriétés – des règles	permet : – l'apprentissage de la démonstration
Démontrer	— un résultat		
Dénombrer	— des objets	en utilisant : – un comptage direct – un arbre de choix – un diagramme	
Organiser Traiter	— des données	en utilisant : – des tableaux – des diagrammes	permet : – la mise en place de l'outil statistique

3. Les définitions, les règles et les propriétés

Le même point de vue qu'en *Activités Géométriques* dicte la présentation des définitions, des règles et des propriétés. Le but est de les faire fonctionner pour que l'élève se les approprie le plus rapidement possible de manière performante à travers des exercices simples, puis des problèmes qui leur donnent du sens.

Dans certains cas, une représentation graphique, un schéma de calcul, un diagramme, une figure géométrique seront d'une grande utilité pour l'appropriation d'une notion ; il n'y a donc pas lieu de se priver d'un support visuel, en précisant toutefois qu'il ne tient pas lieu d'une démonstration.

4. L'utilisation de la calculatrice

La calculatrice est sans doute encore un accessoire dont le prix peut paraître trop élevé à des familles. Ces commentaires ne peuvent donc pas en faire un outil indispensable et obligatoire pour l'élève du Premier Cycle.

Il n'empêche qu'on trouve des machines de toutes sortes (calculatrices scientifiques ou programmables...) à des prix de plus en plus bas sur les étals des marchés. La calculatrice s'impose donc lentement mais sûrement ; elle a droit de cité au Lycée et au Baccalauréat ; le Collège ne peut pas l'ignorer.

Ainsi, il serait souhaitable qu'en classe de 4^e, le professeur continue, sinon initie les élèves à l'utilisation de la calculatrice pour :

- le calcul du produit d'un nombre et d'une puissance de dix ;
- le produit de deux ou plusieurs nombres décimaux ayant plusieurs chiffres dans la partie décimale ;
- au calcul de la moyenne en statistique.

Cela pourra aider les élèves à préparer leur entrée dans le Second Cycle.

L'ENSEIGNANT SE DOIT DE RECHERCHER UNE STRATÉGIE POUR QUE L'ÉLÈVE UTILISE UNE CALCULATRICE À BON ESCIENT

Il faudra que le professeur fasse bien attention à ne pas induire des réflexes d'utilisation systématique de la calculatrice pour des calculs trop simples et il ne devra donner la consigne de son utilisation que dans des cas propices auxquels il aura préalablement réfléchi. En tout état de cause, l'utilisation de la calculatrice devra être strictement réglementée. Les effets pervers de son emploi pourront être corrigés par l'utilisation à bon escient du calcul rapide et du calcul mental.


IDÉES D'EMPLOI DE LA CALCULATRICE

• La calculatrice est un outil privilégié pour la motivation, la mise en place, le renforcement de nombreuses notions numériques :

- priorité des opérations ;
- diverses écritures d'un nombre décimal : notation scientifique... ;
- calcul approché : troncature, arrondi...

• La calculatrice est une aide technique permettant :

- à l'élève :
 - d'avoir une attitude active ;
 - de mieux se concentrer sur le problème posé ;
 - de faire rapidement de nombreux essais pour arriver à des conjectures.
- à l'enseignant :
 - de proposer l'étude de situations concrètes sans crainte que l'élève soit rebuté par la difficulté des calculs.



Utilisation de la calculatrice

Entrer un nombre de la forme $a \times 10^p$ dans une calculatrice scientifique.
Avec sa calculatrice scientifique, la jeune Chidzoh veut entrer le nombre $7,35 \times 10^{23}$.

<p>TOUCHES</p> <p style="text-align: center;">7 , 3 5 EE 2 3</p>	<p>AFFICHAGE</p> <p style="text-align: center;">7.35 23</p>
--	---

Dans certaines calculatrices, la touche (EE) est remplacée par (Exp)

Pour entrer le nombre 625×10^{-8} , on appuie sur les touches :

<p>TOUCHES</p> <p style="text-align: center;">6 2 5 EE 8 +/-</p>	<p>AFFICHAGE</p> <p style="text-align: center;">625 -08</p>
--	---

Si l'on appuie ensuite sur une touche d'opération (+, -, ×, ÷) ou sur la touche (=), on obtient à l'affichage la notation scientifique de ce nombre :

<p>a)</p> <p style="text-align: center;">27 -12</p>	<p>AFFICHAGE</p> <p style="text-align: center;">6.25 -06</p>
<p>b)</p> <p style="text-align: center;">934.6 05</p>	<p>AFFICHAGE</p> <p style="text-align: center;">6.25 -06</p>

• Quels sont les nombres qui ont été introduits dans la calculatrice lorsqu'on obtient à l'affichage :

CALCULATRICE ET CALCUL MENTAL NE SONT PAS INCOMPATIBLES

En effet, on peut noter :

- la nécessité de contrôle des résultats par le calcul mental
 - estimation du résultat ;
 - contrôle du dernier chiffre, du nombre de chiffres après la virgule ...
- l'analogie entre l'utilisation de la calculatrice et le calcul mental
 - nécessité d'analyser et d'organiser les calculs ;
 - bonne motivation pour utiliser les propriétés des opérations.

La rubrique « Calcul rapide » du chapitre 10 p.140 pourra être utilisée dans un premier temps pour montrer le mécanisme d'utilisation des produits remarquables dans certains calculs numériques, puis dans un second temps pour faire faire du calcul mental aux élèves.

Le professeur pourra trouver d'autres exemples très intéressants où interviennent les produits remarquables et le développement d'un produit (cf commentaires chapitre 10) ; ils permettront à l'élève de faire un lien utile et intéressant entre le calcul numérique et le calcul littéral.

En outre, ces petites « astuces » de calcul permettront de donner un côté ludique aux mathématiques, mais aussi pourront donner envie à l'élève de se mettre en valeur dans son milieu en jouant au magicien des nombres.

On pourra toutefois noter la nécessité d'apprendre « par cœur » les carrés des nombres entiers jusqu'à 20 pour faciliter certains calculs.

5. L'apprentissage à la démonstration

La géométrie n'a pas l'apanage du raisonnement. En classe de 4^e, les Activités Numériques permettent de continuer l'initiation au raisonnement par des activités de gestion de calcul numérique et de calcul littéral, d'organisation de données (proportionnalité, dénombrement, statistiques), et surtout par l'utilisation des équations et des inéquations pour résoudre des problèmes.

Cette dernière utilisation est très importante, car elle permet d'inculquer aux élèves, au même titre qu'un problème de géométrie, une véritable démarche scientifique (explicitation de ce que l'on connaît et de ce que l'on cherche, mathématisation du problème, recherche de la solution mathématique et vérification, validation de la solution trouvée par rapport aux données initiales du problème).

D'une manière générale, on proposera à l'élève des situations où il pourra :

• observer des données

- Exemples : - tableaux de correspondance,
- tableaux de proportionnalité,
- tableaux d'effectifs et tableaux de fréquences.

• utiliser un support visuel

- Exemples : - schéma de calcul (initiation au calcul littéral p.130 -131),
- rangement de nombres sur une droite graduée (solutions d'une inéquation),
- utilisation d'une représentation graphique (méthodes de calcul du PGCD et du PPCM p.147),
- utilisation d'un diagramme pour dénombrer ou pour représenter une série statistique (diagrammes semi-circulaires, à bandes, en bâtons),
- utilisation d'un arbre pour dénombrer.

• pratiquer un auto-contrôle de ses résultats

Exemples :

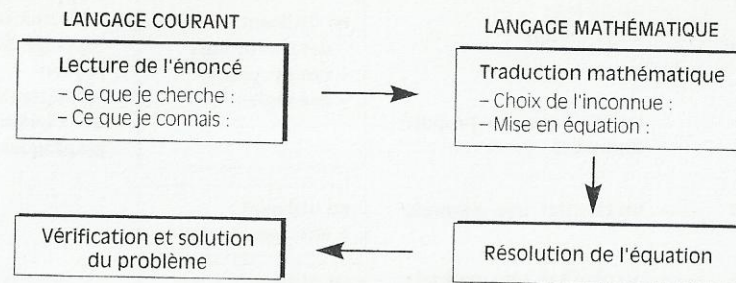
Déceler une erreur par :

- une estimation,
- le contrôle du dernier chiffre,
- le contrôle du nombre de chiffres après la virgule,
- la preuve par 9,
- un ordre de grandeur,
- la validation de la solution d'une équation ou des solutions d'une inéquation.

• explorer des situations par épuisement des cas

Exemple : dénombrement par un comptage exhaustif des cas possibles (ex. n° 4 et 5 p.205).

La résolution de problèmes concrets utilisant des équations peut constituer une première approche de mathématisation d'une situation. On pourra démarrer sur le modèle suivant :



Le professeur pourra insister sur la vérification, la validation et l'explicitation littérale de la solution du problème. Trop d'élèves se contentant d'encadrer la solution trouvée, sans avoir au préalable vérifié les calculs (littéraux ou numériques) et sans avoir confronté le résultat trouvé avec les données, ceci pouvant permettre de déceler des erreurs éventuelles (nombre incompatible avec les données du problème : hors de l'intervalle de définition, ordre de grandeur, ...).

4 PRÉSENTATION DES OUVRAGES-ÉLÈVES

L'élève de 4^e dispose de deux ouvrages complémentaires :

- Un Manuel
- Un Livret d'Activités .

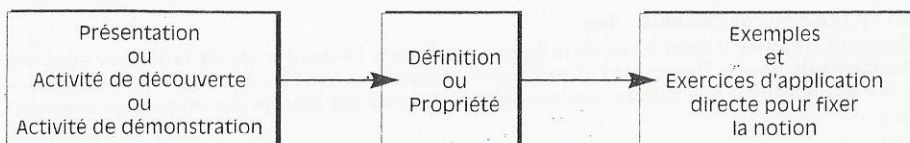
1. Découpage en chapitre des ouvrages-élèves

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES		ACTIVITÉS NUMÉRIQUES	
CH 1 : Résoudre des problèmes de géométrie	3 H	CH 10 : Calcul littéral	6 H
CH 2 : Symétries	6 H	CH 11 : Nombres rationnels	4 H
CH 3 : Distances	4 H	CH 12 : Équations - Inéquations	6 H
CH 4 : Triangle	8 H	CH 13 : Approximations décimales d'un nombre	4 H
CH 5 : Translations et vecteurs	7 H	CH 14 : Résolution de problèmes	6 H
CH 6 : Projection et repérage	4 H	CH 15 : Statistiques	4 H
CH 7 : Angles au centre - Polygones réguliers	3 H		Total 30 H
CH 8 : Solides de l'espace	4 H		
CH 9 : Droites et plans de l'espace	6 H		
	Total 45 H		

La répartition horaire indiquée est une estimation pour un volume horaire annuel de 100 heures, dont 75 heures de cours et 25 heures d'évaluation et de correction. Elle est donnée à titre indicatif.

2. Le manuel de l'élève

• Dans le manuel de l'élève, chacun des chapitres est divisé en leçons et chaque leçon en paragraphes. Les notions nouvelles sont introduites en général, selon le schéma suivant :



Les caractères gras attirent l'attention sur les mots nouveaux ou importants dans le texte.

Les définitions et les propriétés sont en général présentées dans un « blason » créant une unité entre les différentes parties qui le constituent :

- la partie à mémoriser étant sur fond coloré ;
- une figure illustrant la définition ou la propriété ;
- une traduction mathématique mettant en évidence son utilisation.

Le manuel est destiné aux élèves. C'est pour cette raison que le tutoiement qui est un langage direct, est utilisé pour permettre à l'élève de se sentir réellement concerné.

Le professeur doit apprendre à l'élève à connaître son manuel et à s'en servir correctement.

Après le cours, l'élève fera le point sur la leçon du jour.

Pour cela, à chaque paragraphe :

- il s'assurera qu'il connaît bien les définitions et les propriétés après les avoir relevées dans un cahier, puis mémorisées ;
- il fera ensuite les exercices d'application directe du paragraphe.

Deux cas peuvent se présenter :

- l'élève maîtrise la notion : il peut alors faire quelques exercices de fin de chapitre (de préférence ceux proposés par le professeur) ;
- l'élève ne maîtrise pas la notion : il doit reprendre les activités ou la présentation de la notion dans le manuel avant de traiter les exercices d'application.

Ainsi, le professeur apprendra progressivement à l'élève à mieux organiser son travail personnel.

La première page d'un chapitre est illustrée par un flash. Ce qui contribue à situer le thème du chapitre ou à initier l'élève à la culture mathématique.

Exemple : Illustration de la 1^{re} page d'un chapitre (Manuel p.193)

*Un problème de Ben Ezra
(X^e siècle)*

« Et si on dit : un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait trois entrées, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea équitablement les fruits avec le premier et lui en donna 2 de plus, puis il partagea équitablement avec le deuxième et lui en donna 2 de plus, enfin il partagea avec le troisième, lui en donna 2 de plus, et il sortit en ayant seulement un fruit. Combien de fruits a-t-il cueillis ? »

3. Le livret d'activités

Le Livret d'Activités pourra être utilisé en classe et à la maison, au gré du professeur, afin de rendre possible une pédagogie active, même dans une classe à effectif élevé.

Il est d'une aide appréciable pour le professeur et les élèves ; il peut remplacer avantageusement le cahier de trace écrite.

Ce livret d'activités est présenté selon la structure du manuel ; il vient en complément de celui-ci. En ce sens, il est lié au manuel et en est indissociable, sans toutefois en faire un outil indispensable.

Son utilisation tient compte de cette structure. Lorsque le livret n'est pas utilisé en classe, le professeur peut néanmoins proposer son utilisation à titre de consolidation des connaissances et de banque d'exercices supplémentaires.

Le livret d'activités :

- permet de **donner du sens** aux définitions, propriétés, règles et formules ;
- permet un **gain de temps** appréciable dans la présentation de certaines notions ;
- favorise l'**activité de l'élève**, son **autonomie** et sa « **débrouillardise** » ;
- favorise une **pédagogie active de la part du professeur** ;
- introduit en **douceur une notion nouvelle** sans formalisme excessif ;
- permet de **garder bien en vue des résultats** intéressants ou à retenir ;
- permet de faire un **lien avec des problèmes de la vie courante** ;
- permet de **mettre en garde** contre des erreurs classiques et prévisibles ;
- permet de **attirer l'attention de l'élève** sur des cas de figures non classiques.

Chacun des chapitres est divisé en leçons et chaque leçon en trois parties :

• activité

Dans cette partie, après avoir présenté une activité, le professeur laissera les élèves :

- réaliser les constructions qui s'y trouvent ;
- faire les manipulations qui sont demandées ;
- découvrir les définitions ou les propriétés.

Ensuite le professeur fera, avec les élèves, le bilan de cette activité.

• définition ou propriété

Dans cette partie, l'élève remplira le cadre prévu pour la définition ou la propriété.

• exercices d'application

Ici, l'élève s'exercera à appliquer la définition ou la propriété précédemment dégagée.

À la fin de chaque chapitre, dans la rubrique PROBLÈMES sont proposés un ou des problèmes faisant la synthèse de plusieurs notions vues dans le chapitre.

Ce type de problèmes correspond aux exercices d'approfondissement ou aux exercices de recherche du manuel.

Le professeur sera vigilant à propos de la gestion du temps. Néanmoins, il laissera une durée suffisante pour la recherche personnelle de l'élève.

Il pourra intervenir individuellement ou collectivement, à bon escient.

5 ANALYSE DES CHAPITRES

Chacun des 15 chapitres est analysé selon la structure suivante :

objectifs ; commentaires ; savoirs et savoir-faire ; exercices.

Selon les exercices, on trouvera une résolution complète, des indications pour une résolution, une analyse du problème et une méthode de recherche d'une démarche, des résultats, des commentaires.

1. Résoudre des problèmes de géométrie

(pages 7 à 16 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

L'objet de ce chapitre est l'apprentissage de la résolution de problèmes.

De ce fait, il vise essentiellement à apprendre à l'élève :

- à utiliser des outils mathématiques :
 - pour reconnaître une configuration plane ;
 - pour construire une figure géométrique ;
 - pour justifier le passage d'une étape à une autre dans un raisonnement ou dans une méthode de construction.
- à traduire un énoncé.
- à rechercher des stratégies.

COMMENTAIRES

Ce chapitre est constitué uniquement d'exercices commentés qui traitent deux types de problèmes de géométrie, les problèmes induisant une démonstration et les problèmes de construction.

Il a pour but de dégager une certaine démarche pour ces deux types de problèmes.

En classe de 4^e, l'accent est encore mis sur les deux premières étapes de la résolution d'un problème :

- lecture de l'énoncé ;
- recherche d'une démarche.

La rédaction d'une solution se fera dans les cas simples. Cependant dans la plupart des cas, on se contentera d'organiser la démonstration, chaque étape devant être justifiée. On pourra à cet effet utiliser :

- soit une succession d'étapes bien explicitées ;
- soit un organigramme.

Il faudra faire prendre conscience à l'élève que l'organigramme vient après avoir cherché et trouvé une solution, même si ce travail de recherche ne figure qu'au brouillon.

Pour aider l'élève dans la recherche d'une démarche, le professeur pourra lui inculquer certaines pratiques.

Dans un problème de démonstration

• Faire une esquisse à main levée de la figure décrite dans l'énoncé avant de la réaliser avec des instruments de dessin. (Éviter les cas particuliers, notamment dans les problèmes faisant intervenir des triangles non spécifiques, ces cas particuliers pouvant induire des erreurs de raisonnement).

• Utiliser, par exemple, un codage en couleur pour les données explicites (exemple : ABC est un triangle et $AB = AC$) et un codage au crayon pour les conséquences immédiates des données

(exemple : ABC est un triangle isocèle en A, donc $AB = AC$ ou bien $\widehat{B} = \widehat{C}$). Il est préférable qu'à ce niveau ces conséquences soient justifiées avant leur utilisation.

• Réaliser une figure avec les conventions précédentes, pour chacune des questions posées. Le professeur fera prendre conscience à l'élève que la conclusion d'une question antérieure ou toute propriété déjà justifiée devient une donnée pour cette nouvelle question.

• Rendre « plus parlante » une figure codée en la complétant par une légende portant sur des informations ou des données ayant un codage qui « alourdirait » la figure (exemples : parallélisme de deux droites ; figures symétriques par rapport à un point ; ...).

Dans un problème de construction

Faire l'analyse d'une esquisse de la figure sur laquelle sera marquée par exemple :

- en couleur, les données du problème ;
- en gras noir, les éléments à construire ;
- en traits fins ou en pointillés, les autres éléments.

L'objet de ce chapitre étant l'apprentissage de la résolution de problèmes, les exercices qui y figurent ne font intervenir que des savoirs et savoir-faire des classes de 6^e et 5^e. Toutefois il ne faudra en aucun cas considérer ce chapitre comme un chapitre de révision des connaissances acquises dans les deux classes précédentes.

Il est conseillé au professeur de faire, en début d'année, un test de géométrie afin de se rendre compte du niveau de maîtrise des connaissances de base de ses élèves. Chaque élève devra, avec l'aide du professeur, organiser la révision de ses connaissances de base.

Lors des chapitres suivants, on pourra par contre faire référence à ces exercices commentés pour des problèmes de démonstration ou des problèmes de construction géométrique.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Démontrer, construire

• Vocabulaire

- Figure codée.
- Esquisse.
- Démontrer.
- Etapes dans un raisonnement.

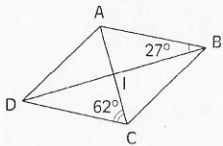
savoir-faire

- Construire et coder une figure pour traduire l'énoncé d'un problème.
- Interpréter une figure codée de l'énoncé d'un problème.
- Dégager les données et la (ou les) conclusion(s) de l'énoncé d'un problème.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice n°2 p.14



Données

- ABCD est un parallélogramme de centre I.
- $\widehat{AIB} = 27^\circ$.
- $\widehat{ICD} = 62^\circ$.

Problème posé

ABCD est-il un losange ?

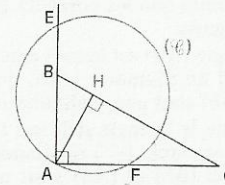
Démonstration

ABCD est un parallélogramme, il me suffit donc de démontrer que ses diagonales ont des supports perpendiculaires.

• ABCD est un parallélogramme, donc (AD) et (CB) sont parallèles, par conséquent : $\widehat{DCA} = \widehat{CAB} = 62^\circ$ (angles alternes-internes déterminés par deux droites parallèles et une sécante.)

• Dans le triangle AIB : $\widehat{AIB} = 180^\circ - 62^\circ - 27^\circ = 91^\circ$ (somme des mesures des angles d'un triangle). Le triangle AIB n'est pas rectangle en I, donc les droites (AC) et (BD) ne sont pas perpendiculaires. ABCD n'est pas un losange, puisque les supports de ses diagonales ne sont pas perpendiculaires.

◆ Exercice n°5 p.14



Données

- ABC est un triangle rectangle en A.
- La hauteur qui passe par A coupe (BC) en H.
- Le cercle (C) de centre H passant par A coupe (AB) en E et (AC) en F.

Conclusion

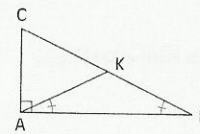
Les points E, H et F sont alignés.

Démonstration

ABC est un triangle rectangle en A, donc le triangle EAF est aussi rectangle en A, d'où [EF] est un diamètre de (C).

Or, le point H est le centre du cercle (C), donc les points E, H et F sont alignés.

◆ Exercice n°6 p.14



Données

- ABC est un triangle rectangle en A.
- $K \in [BC]$.
- $\widehat{BAK} = \widehat{ABC}$.

Conclusion

K est le milieu de [BC].

Démonstration

• $\widehat{BAK} = \widehat{ABC}$, donc BAK est isocèle en K, d'où : $KB = KA$ (1).

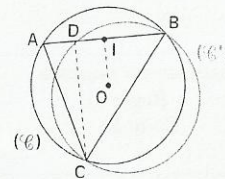
• AKC est un triangle isocèle en K car $\widehat{KAC} = \widehat{ACK}$ (\widehat{KAC} et \widehat{ACK} ont le même complémentaire). Donc : $KA = KC$ (2).

• Des égalités (1) et (2), je déduis : $KB = KC$.

Or : $K \in [BC]$,

donc : K est le milieu de [BC].

◆ Exercice n°7 p.14



Données

- (C) est un cercle de centre O.
- A, B et C appartiennent à (C).
- Le point I est le milieu de [AB].
- (C') est le cercle de diamètre [AB].
- (C') recoupe (AB) en D.

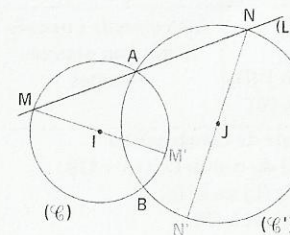
Démonstration

• Le triangle DCB, inscrit dans le cercle (C) de diamètre [BC], est rectangle en D, donc : $(CD) \perp (AB)$.

• Le point O est le centre du cercle (C) et le point I est le milieu de [AB], donc (OI) est la médiatrice de [AB], par conséquent : $(OI) \perp (AB)$.

• Les droites (CD) et (OI) sont perpendiculaires à la droite (AB), donc : $(CD) \parallel (OI)$.

◆ Exercice n°8 p.14



Données

- (C) est un cercle de centre I.
- (C') est un cercle de centre J.
- (C) et (C') se coupent en A et B.
- (L) passe par A.
- (L) coupe (C) en M et (C') en N.
- [MM'] est un diamètre de (C).
- [NN'] est un diamètre de (C').

Conclusion

A, M' et N' sont alignés.

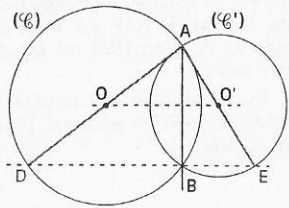
Démonstration

• Le triangle MAM' est rectangle en A, car [MM'] est un diamètre de (C) et A appartient à (C), donc : $(AM') \perp (MN)$.

• Le triangle NAN' est rectangle en A, car [NN'] est un diamètre de (C') et A appartient à (C'), donc : $(AN') \perp (MN)$.

• Par conséquent, (AM') et (AN') sont des noms d'une même droite perpendiculaire en A à (MN).

◆ Exercice n°9 p.14



Données

- (C) est un cercle de centre O.
- (C') est un cercle de centre O'.
- (C) et (C') se coupent en A et B.
- D symétrique de A par rapport à O.
- E symétrique de A par rapport à O'.

Conclusion

- D, B et E sont alignés.
- (OO') // (DE).

Démonstration

- Je démontre que les points D, B et E sont alignés.

– Le triangle ABD est inscrit dans le cercle (C) de diamètre [AD], donc (DB) et (AB) sont perpendiculaires.
– De même le triangle ABE est inscrit dans le cercle (C') de diamètre [AE], donc (BE) et (AB) sont perpendiculaires.

Par conséquent, D, B et E sont alignés sur la perpendiculaire à (AB) passant par B.

- Je démontre que (OO') est parallèle à (DE).
- (OO') est perpendiculaire à (AB), car (OO') est la médiatrice de [AB].
- Les droites (DE) et (OO') sont perpendiculaires à la droite (AB), donc elles sont parallèles.

◆ Exercice n°10 p.15

Recherche d'une méthode de construction

Il faut remarquer que la bissectrice d'un angle de 60° partage cet angle en deux angles de 30° et que la bissectrice d'un angle de 30° partage cet angle en deux angles de 15°. Par conséquent, il suffit de construire un angle de 60°, puis un angle de 30°, puis un angle de 15° (à l'aide de la bissectrice d'un angle).

◆ Exercice n°11 p.15

Données Une droite (D) Un point H appartenant à (D) Un point A n'appartenant pas à (D)	Contraintes M est un point appartenant à (D) MH = MA	Instruments imposés Règle Compas
Esquisse 	Recherche d'une méthode de construction	
<ul style="list-style-type: none"> • MH = MA, donc M appartient à la médiatrice (L) de [AH]. • M appartient à (D). 		
<ul style="list-style-type: none"> • Par conséquent, M est le point d'intersection de (L) et (D). 		

◆ Exercice n°12 p.15

Données Une droite (D) Un segment [AB] (D) non perpendiculaire à (AB)	Contraintes (C) est un cercle Le centre O du cercle (C) appartient à (D) Les points A et B appartiennent à (C)	Instruments imposés Règle non graduée Compas
Esquisse 	Recherche d'une méthode de construction	
<ul style="list-style-type: none"> • A et B appartenant au cercle (C) de centre O, OA = OB. Donc, O appartient à la médiatrice (L) de [AB]. • Le centre O du cercle (C) appartient à (D). • Par conséquent, O est le point d'intersection de (D) et (L). 		
Programme de construction		
<ul style="list-style-type: none"> – Construire la médiatrice (L) de [AB]. – Marquer O, point d'intersection de (D) et (L). – Tracer le cercle (C) de centre O et de rayon OA. 		

◆ Exercice n°13 p.15

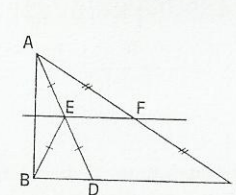
Données Un cercle (C) de centre O Les points A et B	Contraintes M et N sont deux points appartenant à (C) MA = MB ; NA = NB	Instruments imposés Règle non graduée Compas
Esquisse 	Recherche d'une méthode de construction	
<ul style="list-style-type: none"> • M appartient à la médiatrice (L) de [AB], car : MA = MB. • N appartient à la médiatrice (L) de [AB], car : NA = NB. 		
<ul style="list-style-type: none"> • Puisque les points M et N appartiennent à (C) et à (L), ce sont les points d'intersection de (C) et (L). 		
Programme de construction		
<ul style="list-style-type: none"> – Construire la médiatrice (L) de [AB]. – Marquer M et N, points d'intersection de (L) et (C). 		

◆ Exercice n°14 p.15

Données (D) ⊥ (L) A ∉ (D) ; A ∉ (L)	Contraintes M est un point de (D) N est un point de (L) A milieu de [MN]	Instruments imposés Compas
Esquisse 	Recherche d'une méthode de construction	
<ul style="list-style-type: none"> • Le triangle OMN est rectangle en O. • Le point A, est le milieu de l'hypoténuse [MN] de ce triangle rectangle, donc les points M et N appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon OA. 		
<ul style="list-style-type: none"> • Par conséquent : – M est le point d'intersection de (D) et (C) ; – N est le point d'intersection de (L) et (C). 		

▣ Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n°15 p.15-16



Données

- Un triangle ABC.
- D ∈ [BC].
- F est le milieu de [AC].
- E est le milieu de [AD].
- EA = EB.

Conclusion

(EF) est la médiatrice de [AB].

Démonstration

Étapes :

- ⑤ ① ③ ② ⑥ ④

Justifications :

- 9 12 7 11 8 10

Commentaire

Il existe un autre ordre. Étapes : 5 ; 1 ; 2 ; 6 ; 3 ; 4 ; Justifications : 9 ; 12 ; 11 ; 7 ; 8 ; 10.

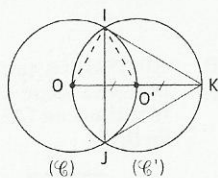
◆ Exercice n°16 p.16

Données

- (C), cercle de centre O et de rayon OO'.
- (C'), cercle de centre O' et de rayon OO'.
- (C) et (C') se coupent en I et J.
- K symétrique de O par rapport à O'.

Conclusion

IJK est équilatéral.



Démonstration

- (OO') est la médiatrice de $[IJ]$ et K appartient à (OO') , donc : $KI = KJ$. IKJ est isocèle en K .
- IOO' est équilatéral, car $OI = OJ = OO'$, donc : $\widehat{IOK} = \widehat{IOO'} = 60^\circ$.
- IOK est rectangle en I , car il est inscrit dans le cercle (\mathcal{C}) de diamètre $[OK]$.
- Dans IOK , \widehat{IOK} et \widehat{IKO} sont complémentaires, donc : $\widehat{IKO} = 30^\circ$.
- (OO') est un axe de symétrie de IKJ , donc : $\widehat{JKO} = \widehat{IKO} = 30^\circ$.
par suite : $\widehat{IKJ} = \widehat{JKO} + \widehat{IKO} = 60^\circ$.
- Le triangle IKJ est isocèle et a un angle de mesure 60° , donc il est équilatéral.

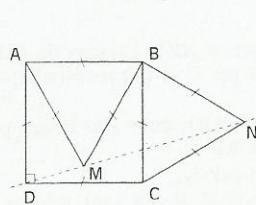
◆ Exercice n°17 p.16

<i>Donnée</i> AB = 5 L'unité de longueur est le cm.	<i>Contraintes</i> AEBF est un losange Aire AEBF = 15	<i>Instruments imposés</i> Aucun
<i>Esquisse</i> 	Recherche d'une méthode de construction <ul style="list-style-type: none"> • O est le centre du losange. • Je connais AB et je dois calculer la longueur de [EF]. • $\mathcal{A}_{AEBF} = 2,5 \times EF = 15$, donc : $EF = 15 : 2,5 = 6$. 	

◆ Exercice n°18 p.16

<i>Données</i> Trois points non alignés M, N et P	<i>Contraintes</i> MNPQ est un quadrilatère Les médiatrices de $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$ et $[QM]$ sont concourantes	<i>Instruments imposés</i> Règle Compas
<i>Esquisse</i> 	Recherche d'une méthode de construction <ul style="list-style-type: none"> • La médiatrice (D_1) de $[MN]$ et la médiatrice (D_2) de $[NP]$ sont sécantes au point O, centre du cercle (\mathcal{C}), circonscrit au triangle MNP. • Un point Q quelconque appartenant à (\mathcal{C}) est tel que les médiatrices de $[PQ]$ et $[QM]$ passent par O, donc les médiatrices des quatre côtés du quadrilatère MNPQ sont concourantes en O. 	

◆ Exercice n°19 p.16



Données

- ABCD est un carré.
- M est un point intérieur au carré.
- N est un point extérieur au carré.
- AMB est un triangle équilatéral.
- BNC est un triangle équilatéral.

Conclusion

D, M et N sont alignés.

Recherche d'une démarche

- Je code la figure par l'égalité des longueurs. La figure codée me suggère de démontrer que \widehat{DMN} est plat.
- J'ai des triangles équilatéraux et des triangles isocèles, j'en déduis la mesure des angles que je reporte au crayon sur la figure codée.

• J'établis ensuite les 3 étapes d'une démonstration :

- (1) mes $\widehat{AMB} = 60^\circ$; (2) mes $\widehat{BMN} = 45^\circ$; (3) mes $\widehat{AMD} = 75^\circ$.

2. Symétries

(pages 17 à 32 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre complète le chapitre 1.

L'objet de ce chapitre est l'apprentissage de la résolution de problèmes en utilisant l'outil SYMETRIES. Une mise en place de l'utilisation pratique du tableau de correspondance d'une application constitue un préalable.

De ce fait, ce chapitre vise essentiellement à :

- présenter la notion d'application et les tableaux de correspondances ;
- présenter les propriétés des symétries avec le vocabulaire des applications ;
- utiliser l'outil « Symétries » (utilisation des tableaux de correspondance) pour démontrer et construire.

COMMENTAIRES

En classes de 6^e et 5^e, deux applications dans le plan ont été étudiées, la symétrie centrale et la symétrie orthogonale. Cependant, elles ont été étudiées seulement par leurs effets sur les figures, d'où le vocabulaire de figures symétriques par rapport à un point et par rapport à une droite.

En classe de 4^e, l'introduction de la notion d'application permet de présenter les symétries sous cet aspect. Le tableau de correspondance sera utilisée conjointement aux figures. Il apporte une lecture rapide et plus simple de la figure en remplaçant avantageusement un codage qui serait trop « lourd ». Il permet en outre une meilleure exploitation des propriétés de ces symétries.

Le professeur s'abstiendra d'approfondir la notion d'application ; il se limitera à la notion d'images et aux notations $S_{(D)}$; S_O ; $f(M) = M'$.

Malgré l'introduction de la notation $f(M) = M'$ pour exprimer que M' est l'image de M par l'application f , on évitera à ce niveau d'écrire, par exemple, $S_{(D)}(M) = M'$ pour exprimer que « M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (D) », on lui préférera le tableau de correspondance.

Les propriétés des symétries ayant été déjà vues en 6^e et 5^e, le professeur entraînera les élèves à dresser des tableaux de correspondance et à les utiliser pour démontrer et construire.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

savoir-faire

Notion d'application

• **Définition**

On appelle application du plan dans le plan toute correspondance qui, à chaque point du plan associe un point du plan et un seul.

• **Remarque**

La symétrie centrale et la symétrie orthogonale sont des applications du plan dans le plan.

• **Vocabulaire**

- Application du plan.
- Image d'un point.
- Tableau de correspondance.

• **Notations**

$S_{(D)}$; S_O ; $f(M) = M'$

- Dresser un tableau de correspondance d'une symétrie à partir de l'énoncé d'un problème ou d'une figure codée.
- Compléter une figure à partir d'un tableau de correspondance d'une symétrie.

Propriétés des symétries – Utilisation des symétries

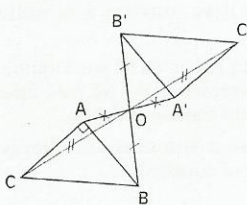
- **Propriétés**
- Par une symétrie (centrale ou orthogonale) :
 - Des points alignés ont pour image des points alignés.
 - Un segment a pour image un segment de même longueur.
 - Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.
 - Une droite a pour image une droite.
 - Deux droites parallèles ont pour image deux droites parallèles
 - Un cercle a pour image un cercle de même rayon.
 - Un angle a pour image un angle de même mesure.
 - Deux droites perpendiculaires ont pour image deux droites perpendiculaires.
 - Si un point appartient à deux lignes alors son image appartient aux images de ces deux lignes.

- Utiliser un tableau de correspondance d'une symétrie pour exploiter des propriétés de cette symétrie.
- Utiliser les propriétés des symétries pour démontrer et pour construire.
- À partir de l'énoncé d'un problème et dans des cas très simples, mettre en évidence une symétrie et l'utiliser pour démontrer ou pour construire.

EXERCICES DU MANUEL

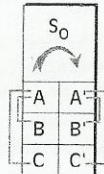
Exercices du cours

◆ Exercice 3.a p.22



Je sais que :

- $AB = AC$
- $(AB) \perp (AC)$



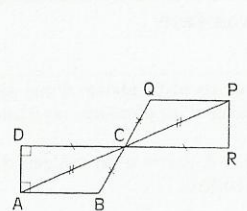
Donc :

- $A'B' = A'C'$
- $(A'B') \perp (A'C')$

Car :

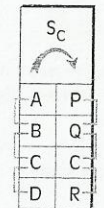
- Un segment a pour image un segment de même longueur.
- Deux droites perpendiculaires ont pour image deux droites perpendiculaires.

◆ Exercice 3.b p.22



Je sais que :

- $(AB) \parallel (DC)$
- $(AD) \perp (DC)$
- (AD) sécante à (BC)



Donc :

- $(PQ) \parallel (CR)$
- $(PR) \perp (RC)$
- (PR) sécante à (QC)

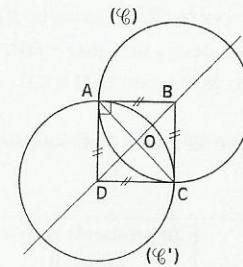
Car :

- Deux droites parallèles ont pour image deux droites parallèles.
- Deux droites perpendiculaires ont pour image deux droites perpendiculaires.
- Deux droites sécantes ont pour image deux droites sécantes.

Par conséquent PQCR est un trapèze rectangle.

Exercices d'entraînement

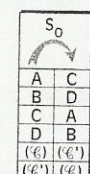
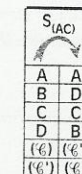
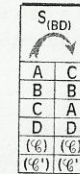
◆ Exercice n°3 p.29



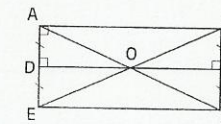
$BA = BC$ et $DA = DC$, donc (BD) est la médiatrice de $[AC]$.

$AD = AB$ et $CD = CB$, donc (AC) est la médiatrice de $[BD]$.

$ABCD$ est un carré de centre O , donc O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.

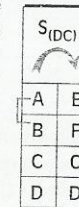


◆ Exercice n°10 p.29



- a) • $ABCD$ est un rectangle, donc (DC) est perpendiculaire à (AE) et à (BF) .
- A et E sont symétriques par rapport à D , B et F sont symétriques par rapport à C , donc D et C sont les milieux respectifs de $[AE]$ et $[BF]$.
- (DC) médiatrice de $[AE]$ et $[BF]$.

Donc, j'ai le tableau de correspondance suivant :



Donc, l'image de la droite (AB) par $S_{(DC)}$ est la droite (EF) , car par une symétrie orthogonale l'image d'une droite est une droite.

- $ABCD$ est un rectangle, donc : $(AB) \parallel (DC)$ (1).
- Par conséquent : $(EF) \parallel (DC)$ (2).
- De (1) et (2), je déduis : $(AB) \parallel (EF)$.

• (AE) et (BF) sont toutes deux perpendiculaires à (DC) , donc (AE) et (BF) sont parallèles. Donc, $ABFE$ est un rectangle, car $ABFE$ est un parallélogramme qui a un angle droit (l'angle \hat{A}).

b) Je désigne par O , le centre du rectangle $ABFE$.

Je sais que :

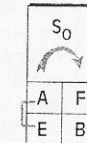
Les points D et C sont les milieux respectifs de $[AE]$ et $[FB]$.

Donc :

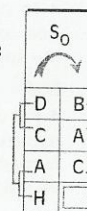
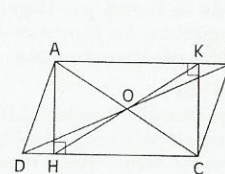
C a pour image D dans la symétrie de centre O .

Car :

L'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image de ce segment. Par conséquent le point O appartient à (DC) .



◆ Exercice n°11 p.29



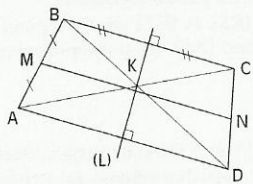
• Puisque (AH) est perpendiculaire à (DC) , l'image de (AH) par S_O est donc la droite passant par C et perpendiculaire à (BA) , c'est-à-dire la droite (CK) .

• H appartient aux droites (DC) et (AH) , donc son image par S_O appartient aux droites (BA) et (CK) .

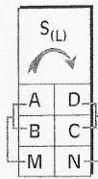
Par conséquent, K est l'image de H par S_O .

• Donc, O est le milieu de $[HK]$, donc O , H et K sont alignés.

◆ Exercice n°15 p.30

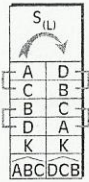


a) Je sais que :
• M est le milieu de [AB].



Donc :
• N est le milieu de [CD].

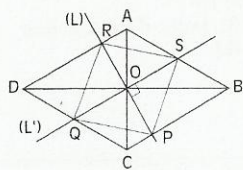
Car :
• L'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image de ce segment.



b) K, point d'intersection de (AC) et (BD). K est sa propre image par $S_{(L)}$, donc : K appartient à (L).

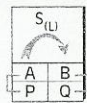
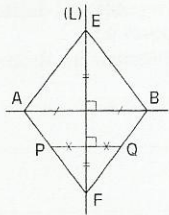
c) • (AD) // (BC) (car elles sont perpendiculaires à (L)).
• AB = DC (tableau de correspondance).
• (AB) et (DC) sécantes (car \widehat{ABC} étant obtus, \widehat{DCB} est obtus).
Par conséquent, ABCD est un trapèze isocèle.

◆ Exercice n°19 p.30



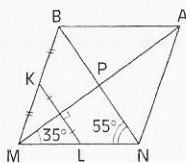
• P est le point d'intersection des droites (BC) et (L), son image par S_O est le point d'intersection des droites (AD) et (L), donc R est le symétrique de P par rapport à O.
• De même, en considérant les images par S_O des droites (L') et (AB), je démontre que Q est le symétrique de S par rapport à O.
Donc, [PR] et [SQ] ont le même milieu O et par suite PQRS est un parallélogramme.
• Les diagonales [RP] et [QS] du parallélogramme PQRS ont des supports (L) et (L') perpendiculaires, donc PQRS est un losange.

◆ Exercice n°21 p.30



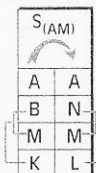
a) AEBF est un losange, car AE = EB = BF = FA (propriétés des médiatrices).
b) Les points A, P et F sont alignés et les points B, Q et F sont leurs images respectives par $S_{(L)}$, donc Q, B et F sont alignés.
• (PQ) et (AB) sont perpendiculaires à (L), donc : (PQ) // (AB).
• L'image de [AP] par $S_{(L)}$ est [BQ], donc : AP = BQ.
• Les droites (AP) et (BQ) sont sécantes en F.
Par conséquent, ABQP est un trapèze isocèle.

◆ Exercice n°23 p.30



a) • Le quadrilatère ABMN est un parallélogramme de centre P.
• Mes $\widehat{MPN} = 180^\circ - (35^\circ + 55^\circ) = 90^\circ$.
donc : (BN) \perp (AM).
• Par conséquent, le parallélogramme ABMN est un losange.
b) ABMN est un losange, donc (AM) est la médiatrice de [BN].

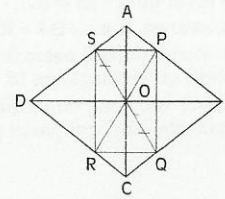
Je sais que :
• K est le milieu de [BM].



Donc :
• Le point L, image de K par $S_{(AM)}$ est le milieu de [NM].
Car :
• L'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image de ce segment.

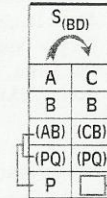
Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n°24 p.30



a) • ABCD est un losange, les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
• (PQ) parallèle à (AC), donc (PQ) perpendiculaire à (BD).

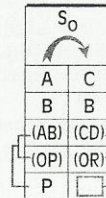
Je sais que :
• P est le point d'intersection de (AB) et (PQ).



Donc :
• L'image de P par $S_{(BD)}$ est le point d'intersection de (CB) et (PQ), donc Q.
Car :
• Si un point appartient à deux lignes, alors son image appartient aux images de ces deux lignes.

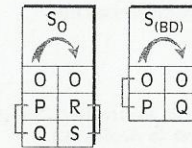
b) ABCD est un losange de centre O.

Je sais que :
• P appartient aux droites (AB) et (OP).



Donc :
• L'image de P par S_O appartient aux droites (CD) et (OR), donc R est le symétrique de P par rapport à O.
Car :
• Si un point appartient à deux lignes, alors son image appartient aux images de ces deux lignes.

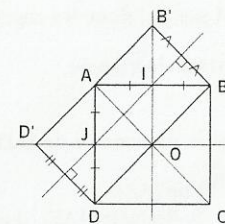
c)



• Le point O appartient à (BD), [OQ] est l'image par $S_{(BD)}$ du segment [OP], donc OP = OQ.
• Le point O est le milieu de [PR], donc OP = OR.
Par conséquent, Q appartient au cercle de diamètre [PR], donc le triangle PQR est rectangle en Q.

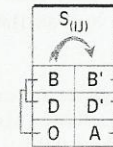
d) PQRS est un rectangle, car [PR] et [SQ] ont même milieu O et mes $\widehat{Q} = 90^\circ$.

◆ Exercice n°25 p.30



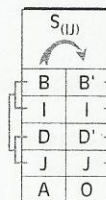
a) Dans un carré les diagonales et les médiatrices des côtés sont les axes de symétrie, donc AIOJ est un carré et (IJ) est la médiatrice de [AO].

Je sais que :
O est le milieu de [BD].
Donc :
A est le milieu de [B'D].



Car :
• Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.

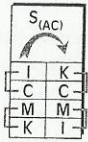
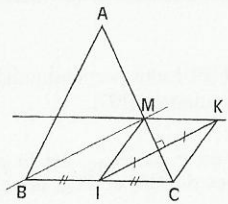
b)



Je sais que :
Les droites (BI) et (DJ) se coupent en A.
Donc :
• Les droites (B'I) et (D'J) se coupent en O.

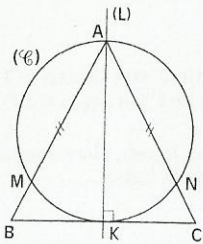
Car :
• Si un point appartient à deux lignes, alors son image appartient aux images de ces deux lignes.

◆ Exercice n°26 p.31



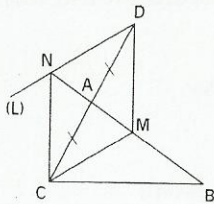
- a) • (IC) et (MK) sont parallèles, donc (KC) et (MI) sont parallèles. Par conséquent MKCI est un parallélogramme.
 • (MC) est la médiatrice de [KI], donc MKCI est un losange, car les diagonales de MKCI sont perpendiculaires.
 b) • Le point I est le milieu de [BC], donc : $IB = IC$.
 • Le quadrilatère MKCI est un losange, donc : $IM = IC$.
 Donc le cercle de centre I et de diamètre [BC] passe le point M, par conséquent le triangle BMC est rectangle en M.
 Par suite, les droites (BM) et (AC) sont perpendiculaires ; donc, (BM) est la hauteur du triangle ABC qui passe par B.

◆ Exercice n°31 p.31



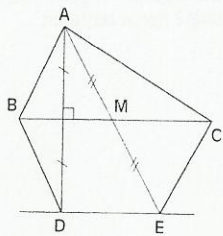
- a) • (\mathcal{C}) est le cercle de diamètre [AK], donc (L) est un axe de symétrie de (\mathcal{C}) .
 • Le triangle ABC est isocèle en A, donc A appartient à (L).
 • Par $S_{(L)}$, (AB) a pour image (AC) et (\mathcal{C}) est sa propre image.
 • M est un point commun à (\mathcal{C}) et (AB), son image par $S_{(L)}$ est donc un point commun à (\mathcal{C}) et (AC). Le symétrique de M par rapport à (L) ne peut donc être que A ou N, comme A appartient à (L) et que M n'appartient pas à (L), l'image de M par $S_{(L)}$ est N.
 b) Les points C et N sont les images respectives de B et M par $S_{(L)}$, donc : (L) est perpendiculaire aux droites (BC) et (MN) qui sont donc parallèles. $MB = NC$
 De plus les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A, je déduis alors des deux points précédents que MNCB est un trapèze isocèle.

◆ Exercice n°32 p.31

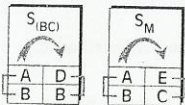


- Je désigne par S_A la symétrie de centre A.
 • D est l'image de C par S_A , donc l'image de la droite (CM) par S_A est la droite passant par D et parallèle à (CM), c'est la droite (L).
 • Puisque A est un point de (AB), (AB) est sa propre image par S_A .
 • Puisque M est un point commun aux droites (CM) et (AB), l'image de M par S_A est un point commun à leurs images (AB) et (L).
 Donc, l'image de M par S_A est N.
 • D et N sont les images respectives de C et M par S_A , donc les segments [CD] et [MN] ont tous deux pour milieu A.
 Par conséquent, le quadrilatère MCND est un parallélogramme.

◆ Exercice n°33 p.31



- a) • D est l'image de A par $S_{(BC)}$ donc (BC) est la médiatrice de [AD]. M appartient à (BC), donc : $MA = MD$
 • E est l'image de A par S_M , donc M est le milieu de [AE].
 Par conséquent, le point D appartient au cercle de diamètre [AE], donc le triangle ADE est rectangle en D.
 • (BC) et (DE) sont perpendiculaires à (AB), donc (BC) // (DE).
 b) J'ai les deux tableaux de correspondance suivants :

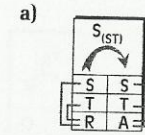
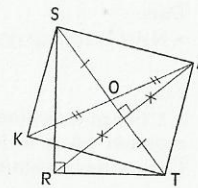


- J'ai :
 $AB = DB$ et $AB = EC$, donc $EC = DB$.
 $(AB) // (EC)$.
 Or : A, B et D ne sont pas alignés,
 donc : (BD) et (CE) sont sécantes.

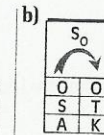
M milieu de [BC].

- Le quadrilatère BCED est donc un trapèze isocèle.

◆ Exercice n°34 p.31



L'image de STR est STA.



ASKT est un parallélogramme.
 De plus (RS) et (RT) sont perpendiculaires, donc (AS) est perpendiculaire à (AT).

c) Les triangles STR, STA et STK sont respectivement rectangles en R, A et K appartiennent au cercle de diamètre [ST].

◆ Exercice n°35 p.31

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction	Programme de construction
<p>Je mets les données en couleur ou en gras.</p>	<p>M appartient à (AB), donc N appartient à (A'B). Or, N appartient à (AC), donc N est le point d'intersection des droites (A'B) et (AC).</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Construire le symétrique A' de A par rapport à (BC). - Marquer N, point d'intersection de (AC) et (A'B). - Tracer la perpendiculaire (L) à (BC) passant par N. - Marquer M, point d'intersection de (AB) et (L).

◆ Exercice n°36 p.31

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction
<p>Je mets les données en couleur ou en gras.</p>	<p>Je désigne par A' et B', les images respectives de A et B par la symétrie SI de centre I.</p> <p>Les points A et B appartiennent respectivement aux droites (AB') et (A'B) et sont symétriques par rapport à I. Donc, les droites (D) et (L) sont respectivement les droites (AB') et (A'B).</p>

◆ Exercice n°37 p.31

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction
<p>Je mets les données en couleur ou en gras.</p>	<p>Je désigne par P', le symétrique de P par rapport à (D). Je marque deux points A et B de la droite (D).</p> <p>Donc : • $AP = AP'$ et $BP = BP'$. Les cercles de centre respectifs A et B, de rayons respectifs AP et BP se recoupent en P'.</p>

◆ Exercice n°38 p.32

<p style="text-align: center;">Esquisse</p> <p style="font-size: small;"><i>Je mets les données en couleur ou en gras.</i></p>	<p style="text-align: center;">Recherche d'une méthode de construction</p> <p>Puisque je ne dois utiliser que la règle non graduée pour construire M', je vais construire M' comme point d'intersection de deux droites. E est le point d'intersection de (MB) et (DC).</p> <ul style="list-style-type: none"> • E appartient à (CD), donc F appartient à (AB). De plus le point O est le milieu de [EF], donc F appartient à (OE). Par conséquent, F est le point d'intersection de (OE) et (AB). • Le point O est le milieu de [MM'], donc M' appartient à (OM) ; M appartient à (EB), donc M' appartient à (FD). Par conséquent, M' est le point d'intersection de (OM) et de (FD). <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-top: 10px; text-align: center;"> S_0 <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>C</td></tr> <tr><td>B</td><td>D</td></tr> <tr><td>C</td><td>A</td></tr> <tr><td>D</td><td>B</td></tr> <tr><td>E</td><td>F</td></tr> <tr><td>M</td><td>M'</td></tr> </table> </div>	A	C	B	D	C	A	D	B	E	F	M	M'
A	C												
B	D												
C	A												
D	B												
E	F												
M	M'												

◆ Exercice n°39 p.32

<p style="text-align: center;">Esquisse</p> <p style="font-size: small;"><i>Je mets les données en couleur ou en gras.</i></p>	<p style="text-align: center;">Recherche d'une méthode de construction</p> <p>Je sais que l'image, par une symétrie centrale S_I, d'un cercle de centre O est un cercle de même rayon et de centre O_1, image de O par S_I.</p> <ul style="list-style-type: none"> - A appartient à (C), donc B est un point d'intersection de (C') et (C₁). - Le point I est le milieu de [AB], donc A appartient à (IB). La droite (IB) coupe donc (C) en I et en A. <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-top: 10px; text-align: center;"> S_I <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td></tr> <tr><td>(C)</td><td>(C₁)</td></tr> </table> </div>	A	B	(C)	(C ₁)
A	B				
(C)	(C ₁)				
<p style="text-align: center;">Programme de construction</p> <ul style="list-style-type: none"> - Construire le cercle (C₁) symétrique de (C) par rapport à I. - Marquer B, l'autre point d'intersection de (C₁) et (C'). - Tracer la droite (IB). - Marquer A, point d'intersection de (IB) et (C). 	<p style="text-align: center;">Construction</p>				

Commentaire

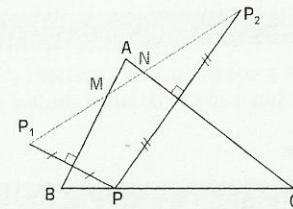
On peut aussi construire le cercle (C₂) symétrique de (C') par rapport à I, marquer le point A, intersection de (C) et (C₂), puis tracer (IA) et marquer le point B, intersection de (IA) et (C').

Exercices de recherche

◆ Exercice n°40 p.32

	<p>Je marque un point M sur (AB) et un point N sur (AC).</p> <p>Je désigne par P₁ et P₂ les symétriques respectifs de P par rapport à (AB) et (AC) et par \mathcal{P} le périmètre du triangle MNP :</p> $\mathcal{P} = PM + MN + NP = P_1M + MN + NP_2.$
--	--

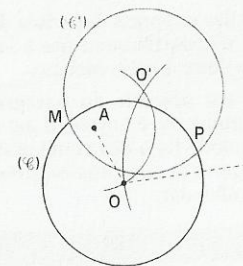
• Si P₁, P₂, M et N ne sont pas alignés, on a :
 $P_1M + MN + NP_2 > P_1M + MP_2 > P_1P_2$
 donc : $\mathcal{P} > P_1P_2$.



• Si P₁, P₂, M et N sont alignés, alors M et N sont les points d'intersection respectifs de (AB) et (AC) avec (P₁P₂).
 Donc : $\mathcal{P} = P_1M + MN + NP_2 = P_1P_2$.

Par conséquent, le périmètre du triangle MNP est minimum lorsque M est le point d'intersection des droites (P₁P₂) et (AB) et N est le point d'intersection des droites (P₁P₂) et (AC).

◆ Exercice n°41 p.32



• Je sais construire en utilisant le compas l'image O' de O par $S_{(AB)}$ comme deuxième point d'intersection des cercles de centres respectifs A et B passant par O. (Cf exercice n° 37).

• L'image de (C) par $S_{(AB)}$ est le cercle (C') de centre O' et de même rayon.

• Les points d'intersection M et P des cercles (C) et (C') vérifient donc : $OM = O'M$ et $OP = O'P$.

Les points P et M appartiennent donc à la médiatrice de [OO'], donc ils appartiennent à la droite (AB).

Par conséquent les points M et P sont les deux points d'intersection de la droite (AB) avec le cercle (C).

3. Distances

(pages 33 à 44 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Ce chapitre vise essentiellement à définir la distance d'un point à une droite et à l'utiliser :
- dans la caractérisation des axes de symétrie de deux droites (dans le cas de deux droites parallèles, on s'intéresse uniquement à l'axe médian) ;
 - dans l'étude des positions relatives d'une droite et d'un cercle.

COMMENTAIRES

En classes de 6^e et 5^e, nous avons vu la distance de deux points. En classe de 4^e, ce chapitre complète cette notion par la distance d'un point à une droite et par la distance de deux droites parallèles.

Notons que chaque point de la bissectrice d'un angle est équidistant des supports des côtés de cet angle, mais il existe d'autres points équidistants de ces droites, qui n'appartiennent pas à la bissectrice de l'angle, d'où la nécessité de parler des axes de symétrie de deux droites sécantes.

Le paragraphe « Position relative d'un cercle et d'une droite » est précédé du paragraphe « Position relative de deux cercles ». Cette étude n'est pas au programme du 1^{er} cycle, donc n'est pas un savoir exigible. Cependant, elle présente un vocabulaire commode lié à des configurations de base intéressantes. Aussi le tableau récapitulatif des propriétés, outre le vocabulaire, présente des illustrations de situations qui pourront être commentées par le professeur.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Distances et droites

- **Définitions**
- On appelle distance du point S à la droite (L) la distance SH. (H est le point d'intersection de (L) et de la droite perpendiculaire à (L) passant par le point S.)
- On appelle distance des droites parallèles (D) et (L) la distance AB, ((L) est parallèle à (D), A est un point de (L) et B un point de (D) tels que (AB) ⊥ (L).)

Points équidistants de deux droites

- **Définition**
- Une droite perpendiculaire à deux droites parallèles (D₁) et (D₂) coupe ces droites respectivement en A et B. On appelle axe médian des deux droites parallèles (D₁) et (D₂) la médiatrice de [AB].
- **Propriétés**
- Si un point appartient à l'axe médian de deux droites parallèles, alors il est équidistant de ces deux droites.
- Si un point est équidistant de deux droites parallèles, alors il appartient à l'axe médian de ces deux droites.
- Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est équidistant des supports des côtés de cet angle.

savoir-faire

- Déterminer et mesurer la distance d'un point à une droite.
- Construire un point à une distance donnée d'une droite donnée.
- Construire une droite à une distance donnée d'un point donné.
- Déterminer la distance de deux droites parallèles.
- Construire une droite parallèle à une droite donnée à une distance donnée de cette droite.

- Déterminer et tracer l'axe médian de deux droites parallèles.
- Etant donné deux droites sécantes, construire un point à une distance donnée de ces deux droites.

- Si un point appartient à l'un des axes de symétrie de deux droites sécantes non perpendiculaires, alors il est équidistant de ces deux droites.
- Si un point est équidistant de deux droites sécantes, alors il appartient à l'un des axes de symétrie de ces deux droites.

Cercles et droites

- **Propriétés**
- (C) est un cercle de centre O et de rayon r ; H est le point d'une droite (D) tel que (OH) ⊥ (D).
- Si OH < r, alors (C) et (D) ont deux points communs.
- Si (C) et (D) ont deux points communs, alors OH < r.
- Si OH = r, alors (C) et (D) ont un point commun et un seul.
- Si (C) et (D) ont un point commun et un seul, alors OH = r.
- Si OH > r, alors (C) et (D) n'ont aucun point commun.
- Si (C) et (D) n'ont aucun point commun, alors OH > r.

• Vocabulaire

- Cercles disjoints, cercles sécants, cercles tangents intérieurement, cercles tangents extérieurement.
- Droite et cercle sécants, tangents, disjoints.

• Définition

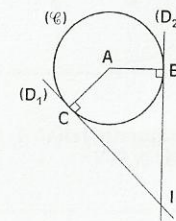
- (C) est un cercle de centre O, H un point de (C).
- On appelle tangente en H au cercle (C), la droite perpendiculaire en H à (OH). H est le point de contact de (D) et (C).

- Construire par un point donné la tangente à un cercle, en un point de ce cercle.
- Construire par un point donné les tangentes à un cercle donné.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 2.d p.38



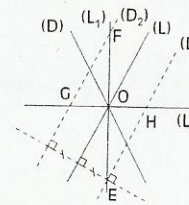
Programme de construction

- Tracer le cercle (C) de centre A et de rayon 3,6 cm.
- Marquer deux points B et C du cercle (C) (B et C non situés sur un diamètre).
- Tracer la droite (D₁) perpendiculaire en B à (AB) et la droite (D₂) perpendiculaire en C à (AC).
- Marquer I, point d'intersection de (D₁) et (D₂).

Commentaire

On peut tracer deux autres droites (L₁) et (L₂) qui vérifient les données du problème.

♦ Exercice 2.e p.38



Programme de construction

- Tracer la droite (L₁), un des axes de symétrie des droites (D) et (L).
 - Tracer une droite (D₁) parallèle à (L) tel que la distance de (D₁) à (L) est 2.
 - Marquer E, point d'intersection de (D₁) et (L₁).
- Les autres points qui sont situés à 2 cm de (D) et de (L) sont les points F, G et H. Le point F est le point d'intersection de (L₁) et (D₂), symétrique de (D₁) par rapport à (L) (F est aussi le symétrique de E par rapport à O).

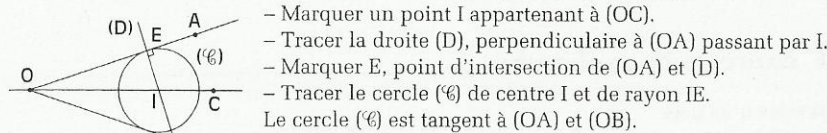
Les points G et H sont les points d'intersection respectifs de (D_2) et (D_1) avec la droite (L_2) , l'autre axe de symétrie des droites (D) et (L) .

Commentaire

Autre solution : 1) Tracer (D_1) . 2) Tracer une droite (D'_1) parallèle à (D) telle que la distance de (D'_1) à (D) est 2. 3) Marquer E, point d'intersection de (D_1) et (D'_1) .

♦ Exercice 3.c p.41

Programme de construction



- Marquer un point I appartenant à (OC) .
 - Tracer la droite (D) , perpendiculaire à (OA) passant par I.
 - Marquer E, point d'intersection de (OA) et (D) .
 - Tracer le cercle (\mathcal{C}) de centre I et de rayon IE.
- Le cercle (\mathcal{C}) est tangent à (OA) et (OB) .

Commentaire

Le cercle (\mathcal{C}) n'est pas unique, il dépend du point I choisi.

♦ Exercice 3.d p.41

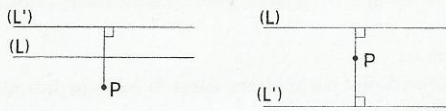
À l'aide de l'équerre, tracer (D) et (D') , respectivement perpendiculaires à (L) en T et à (L') en T'. Le point O, intersection de (D) et (D') est le centre du cercle (\mathcal{C}) .

Exercices d'entraînement

♦ Exercice n°4 p.42

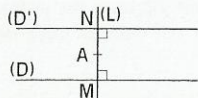
a) Distance de B à (AD) : $BA = 32$. b) Distance de C à (AD) : $BA = 32$. Distance de C à (AB) : CB . Selon le cas de figure : $CB = 40 - x$ ou $CB = 40 + x$, avec $x^2 + 32^2 = 72^2$.

♦ Exercice n°9 p.42



La distance des droites (L) et (L') est 15 mm dans le cas où (L) et (L') sont situées d'un même côté par rapport au point P et 65 mm dans le cas où (L) et (L') sont situées de part et d'autre du point P.

♦ Exercice n°10 p.42



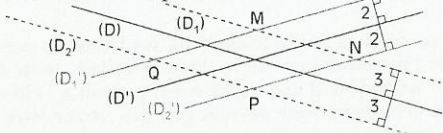
Programme de construction

- Tracer une perpendiculaire (L) , commune à (D) et (D') .
- Marquer M, point d'intersection de (L) et (D) et N, point d'intersection de (L) et (D') .
- Marquer le milieu A du segment $[MN]$.

Commentaire

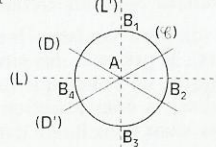
Les points A sont situés sur l'axe médian des droites (D) et (D') .

♦ Exercice n°13 p.42



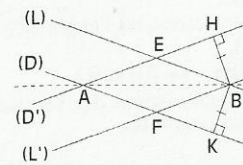
(D) est l'axe médian des droites parallèles (D_1) et (D_2) .
 (D') est l'axe médian des droites parallèles (D'_1) et (D'_2) .
 M, N, P et Q sont situés à 3 cm de (D) et à 2 cm de (D') .

♦ Exercice n°14 p.42



(L) et (L') sont les deux axes de symétrie de (D) et (D') .
 (\mathcal{C}) est le cercle de centre A et de rayon 3 cm.
 B_1, B_2, B_3 et B_4 sont équidistants de (D) et (D') et situés à 3 cm de A.

♦ Exercice n°17 p.43



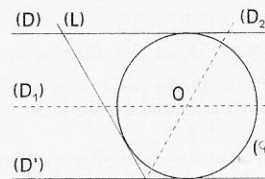
• Le point d'intersection B de (L) et (L') est équidistant de (D) et (D') .
 Donc, (AB) est un axe de symétrie de (D) et (D') .
 De même, (AB) est un axe de symétrie de (L) et (L') .
 Donc, (AB) est un axe de symétrie de la figure.

• $AEBF$ est un parallélogramme, car les supports des côtés sont deux à deux parallèles.
 Démontrons que $AE = AF$.

$$S_{AEBF} = 2 \times S_{AEB} = 2 \times \frac{(AE \times BH)}{2} = AE \times BH \quad \text{et} \quad S_{AEBF} = S_{AEB} + S_{AFB} = \frac{(AE \times BH)}{2} + \frac{(AF \times BK)}{2}$$

J'en déduis que $AE = AF$ et par conséquent que $AEBF$ est un losange.

♦ Exercice n°19 p.43

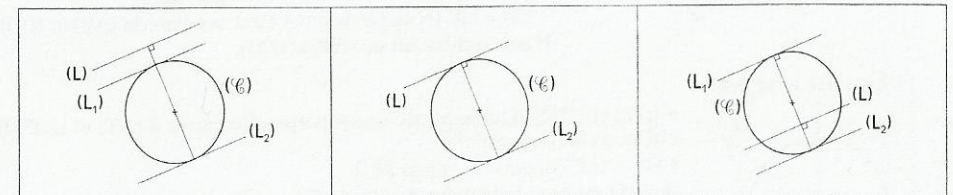


Le centre O du cercle (\mathcal{C}) est équidistant des droites (D) et (D') d'une part et équidistant des droites (D') et (L) d'autre part (ou (D) et (L)).
 O est donc le point d'intersection de D_1 (axe médian des droites (D) et (D')) et D_2 (un des axes de symétrie des droites (D') et (L)).
 Le rayon du cercle (\mathcal{C}) est la moitié de la distance de (D) à (D') .

Commentaire

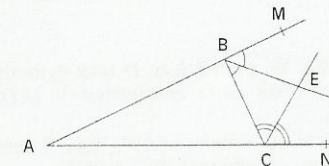
Il existe un autre cercle (\mathcal{C}') tangent à ces trois droites, son centre O' est le point d'intersection de (D_1) et (D_3) (l'autre axe de symétrie des droites (D') et (L)).

♦ Exercice n°24 p.43



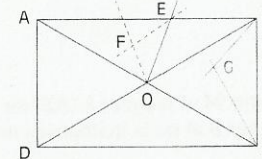
Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n°27 p.43



- E est équidistant de (AB) et (BC) .
 - E est équidistant de (BC) et (AC) .
 Donc, E est équidistant de (AB) et (AC) et par conséquent E appartient à la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} .

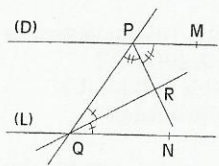
♦ Exercice n°28 p.43



J'applique le résultat de l'exercice n° 27 au point F et au point G, donc :

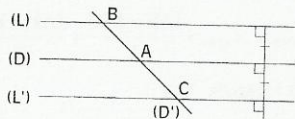
- Le point F appartient à la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} .
 - Le point G appartient à la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} .
- Par conséquent, les points A, F et G sont alignés.

◆ Exercice n°29 p.43



- Le point R appartient à la bissectrice de l'angle \widehat{MPQ} , donc R est équidistant de (D) et (PQ).
 - Le point R appartient à la bissectrice de l'angle \widehat{NQP} , donc R est équidistant de (PQ) et (L).
 - Par conséquent, R est équidistant de (D) et (L).
- Donc le point R appartient à l'axe médian des droites (D) et (L), car les droites (D) et (L) sont parallèles.

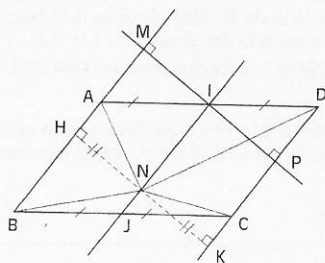
◆ Exercice n°31 p.44



L'axe médian (D) est un axe de symétrie des deux droites parallèles (L) et (L').

Le point A appartenant à (D) est donc le centre d'une symétrie telle que (L) a pour image (L'), donc le point C est la symétrique de B par rapport à A, d'où A est le milieu de [BC].

◆ Exercice n°33 p.44

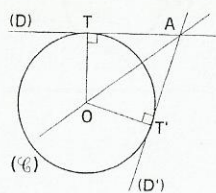


- Les triangles IAM et IDP sont superposables, car $AI = DI$ I milieu de [AD], $\widehat{MAI} = \widehat{PDI}$ (angles alternes-internes) et $\widehat{AIM} = \widehat{DIP}$ (angles opposés par le sommet), donc $MI = PI$ et par conséquent I est équidistant de (AB) et (CD). Même démonstration pour le point J.

Les points I et J sont équidistants des deux droites parallèles (AB) et (DC), donc I et J appartiennent à l'axe médian de ces deux droites, par suite (IJ) est l'axe médian de (AB) et (CD).

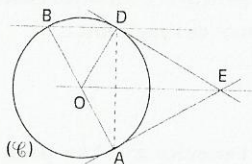
- Les triangles NAB et NCD ont des aires égales, car :
- $AB = CD$ (ABCD est un parallélogramme) ;
- $NH = NK$ (N appartenant à l'axe médian de (AB) et (CD), N est équidistant de (AB) et (CD).

◆ Exercice n°34 p.44



- (OT) et (OT') sont respectivement perpendiculaires à (AT) et (AT') (définition de la tangente) ;
 - $OT = OT'$ (rayons du cercle (C)).
- Donc O est équidistant des droites (AT) et (AT'), il appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{TAT'}$, par suite (AO) est la bissectrice de $\widehat{TAT'}$.
La droite (AO) est donc un axe de symétrie des droites (D) et (D') et est aussi un axe de symétrie de (C), par conséquent, dans la symétrie par rapport à (AO), T' est l'image de T.

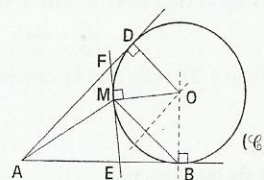
◆ Exercice n°36 p.44



- D'après l'exercice n° 34, les points A et D sont symétriques par rapport à (OE), donc (OE) est la médiatrice de [AD], par conséquent $(OE) \perp (AD)$.
 - D est un point du cercle de diamètre [AB], donc le triangle ABD est rectangle en D, par conséquent $(BD) \perp (AD)$.
- Les droites (OE) et (BD) sont parallèles, car elles sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AD).

◆ Exercice n°38 p.44

- Construction du cercle (C) de centre O et de rayon r, passant par M et tangent à (AB) en B.
- O est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par B et de la médiatrice de [MB] ;
 $r = OB = OM$.



- Construction de la tangente à (C) au point M.
 - Tracer la droite perpendiculaire à (OM) au point M.
 - Périmètre du triangle AEF.
- $\mathcal{P}_{AEF} = AE + EF + FA$, or $EF = EM + MF$, $EM = EB$ et $MF = FD$, donc, $\mathcal{P}_{AEF} = AE + (EB + FD) + FA$.
 $\mathcal{P}_{AEF} = (AE + EB) + (AF + FD)$, $\mathcal{P}_{AEF} = AB + AD$.
Or, $AD = AB$, donc $\mathcal{P}_{AEF} = 2 \times AB = 160$.

▣ Exercice de recherche

◆ Exercice n°39 p.44

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AIC} + \mathcal{A}_{CIB} + \mathcal{A}_{BIA} = \frac{1}{2} r b + \frac{1}{2} r a + \frac{1}{2} r c = \frac{1}{2} r (a + b + c)$$

4. Triangle

(pages 45 à 64 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- établir la propriété de la « droite des milieux » ;
- introduire la médiane d'un triangle, quatrième droite particulière après la hauteur introduite en 6^e, la médiatrice et la bissectrice introduites en 5^e ;
- mettre en évidence l'existence du point de concours des droites particulières d'un triangle et de leurs propriétés ;
- calculer des éléments métriques dans un triangle (longueur du segment joignant les milieux de deux côtés, longueur des côtés du triangle rectangle, etc...) et à utiliser ces calculs pour des démonstrations.

COMMENTAIRES

Les propriétés des parallélogrammes étudiées en 5^e interviennent fréquemment dans les activités et les exercices de ce chapitre. Le professeur pourra faire établir par chaque élève un fichier - méthode : « Comment démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme ». Ce travail préliminaire facilitera certaines démonstrations.

Ce chapitre renferme beaucoup de connaissances de base sur le triangle (et les triangles particuliers). Il présente des situations très riches pour l'apprentissage de la démonstration. Dans cette optique, on notera que toutes les propriétés sont précédées d'une activité qui permet à l'élève de réaliser la démonstration de cette propriété. Ces démonstrations ne sont pas des savoir-faire exigés, mais constituent des références pour l'apprentissage de la démonstration.

On devra s'assurer que les élèves ne confondent pas « médiatrice » et « médiane ».

Suivant le contexte, le mot médiane (resp. hauteur) désignera une droite, un segment ou une longueur.

La propriété de Pythagore ne devra être utilisée que dans le cas où les données ne posent pas de problèmes de radicaux, exemples : (5 ; 12 ; 13) ; (0,3 ; 0,4 ; 0,5) ; ...

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Droites des milieux

• Propriétés

Dans un triangle :

- si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au support du troisième côté.
- la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

- Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au support d'un autre côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

Droites particulières d'un triangle

• Propriété

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Le point de concours des hauteurs d'un triangle est l'orthocentre de ce triangle.

• Définition

On appelle cercle inscrit dans un triangle le cercle intérieur à ce triangle et tangent aux supports des côtés.

• Propriété

Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes. Le point de concours des bissectrices d'un triangle est le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

• Définition

On appelle médiane d'un triangle la droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

• Propriétés

- Chaque médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.
- Les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Le point de concours des médianes d'un triangle est le centre de gravité de ce triangle.

• Remarque

Le centre de gravité d'un triangle est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.

Droites particulières d'un triangle isocèle

• Propriétés

- Un axe de symétrie d'un triangle isocèle est à la fois la médiatrice de sa base, la bissectrice, la hauteur et la médiane passant par son sommet principal.
- Dans un triangle équilatéral, le centre de gravité est à la fois l'orthocentre du triangle, le centre du cercle circonscrit au triangle et le centre du cercle inscrit dans le triangle.

– Dans un triangle :

- ※ Si une droite est à la fois bissectrice et hauteur, alors ce triangle est isocèle.

savoir-faire

- Utiliser ces deux propriétés pour démontrer que :

- deux droites sont parallèles ;
- un point est milieu d'un côté d'un triangle ;

- Utiliser ces deux propriétés pour calculer la longueur d'un segment.

- Construire, reconnaître, dans un triangle donné :

- l'orthocentre ;
- le centre du cercle inscrit ;
- le centre de gravité.

- Démontrer que :

- des droites sont concourantes (en utilisant l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle inscrit) ;
- deux droites sont perpendiculaires (en utilisant l'orthocentre).

- Démontrer que :

- un triangle est isocèle ;
- deux droites sont perpendiculaires ;
- un point est le milieu d'un segment.

Droites particulières d'un triangle isocèle (suite)

- ※ Si une droite est à la fois bissectrice et médiane, alors ce triangle est isocèle.
- ※ Si une droite est à la fois hauteur et médiane, alors ce triangle est isocèle.

Propriétés métriques du triangle rectangle

- Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

- Si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

- Dans un triangle rectangle, le produit des côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse et de la hauteur passant par le sommet de l'angle droit.

- Calculer, en utilisant la propriété de Pythagore, la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la longueur des deux autres côtés.

- Démontrer qu'un triangle est rectangle en utilisant la réciproque de la propriété de Pythagore.

- Calculer la longueur de la hauteur issue du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant la longueur des côtés du triangle.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices de cours

◆ Exercice 1.b p.47

- $AC'BC$ et $B'ABC$ sont des parallélogrammes, donc : $AC' = BC = B'A$.
- Par conséquent A est le milieu de $[C'B']$.
- Même démonstration pour les points B et C.

◆ Exercice 2.d p.49

- Les angles \hat{M} , \hat{B} et \hat{P} sont droits, donc le quadrilatère MBPI est un rectangle.
- $MI = IP$ (rayons de (\mathcal{C})).
- Par conséquent, MIPB est un carré.

◆ Exercice 2.f p.50

Dans le parallélogramme $AB'A'C'$, la diagonale (AA') coupe $[B'C']$ en son milieu, donc (AA') est en même temps la médiane du triangle ABC qui passe par le sommet A et la médiane du triangle $A'B'C'$ qui passe par le sommet A' .

Même démonstration pour les deux autres médianes (BB') et (CC') .

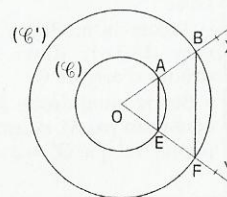
◆ Exercice 2.g p.51

- E milieu de $[BG]$, donc : $BG = 2 GE$.
- G est le centre de gravité du triangle ABC , donc : $BG = \frac{2}{3} BB'$ ou $BG = 2 GB'$.
- Par conséquent : $GE = GB'$, donc G est le milieu de $[EB']$.

- De même, $GF = GC'$, donc G est le milieu de $[FC']$.
- Les diagonales de $B'C'EF$ se coupent en leur milieu G, donc $B'C'EF$ est un parallélogramme

Exercices d'entraînement

◆ Exercice n°1 p.59

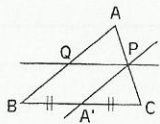


- A est le milieu de $[OB]$ et E est le milieu de $[OF]$, $[AE]$ est le segment qui joint les milieux de deux côtés du triangle OBF , donc : $FB = 2 AE$.

De plus, (AE) est parallèle à (BF) .

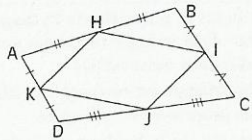
- Le quadrilatère AEFB est un trapèze, car il a deux côtés à supports parallèles et deux côtés à supports sécants.

◆ Exercice n°2 p.59



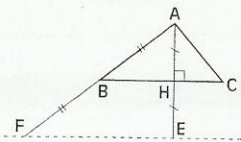
En appliquant la propriété :
« Si une droite parallèle au support d'un côté passe par le milieu d'un autre côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté », je démontre successivement que : P est le milieu de [AC] et Q le milieu de [AB].

◆ Exercice n°3 p.59



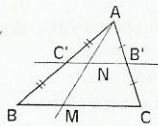
En appliquant aux triangles ABC et ACD, la propriété :
« La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté ; la longueur du segment qui joint ces milieux est égal à la moitié de la longueur du troisième côté », je démontre que : (HI) // (KJ) et HI = KJ, donc HIJK est un parallélogramme.

◆ Exercice n°4 p.59



• D'après les propriétés des symétries centrales et orthogonales :
– B est le milieu du segment [AF] ;
– H est le milieu du segment [AE].
Donc, (BH) est parallèle à (EF).
Or (BC) et (BH) désignent la même droite, donc : (EF) // (BC).

◆ Exercice n°5 p.59



La propriété utilisée :
Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au support d'un autre côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

◆ Exercice n°8 p.59

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction
<p>Je mets les données en couleur ou en gras.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • L'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection de ses hauteurs. • La droite (BH) est la hauteur qui passe par B, donc : (BH) ⊥ (AC). • La droite (AH) est la hauteur qui passe par A, donc : (AH) ⊥ (BC). <p>Il suffit donc de tracer successivement la droite perpendiculaire à (BH) qui passe par A et la droite perpendiculaire à (AH) qui passe par B et de marquer le point d'intersection de ces deux droites.</p>

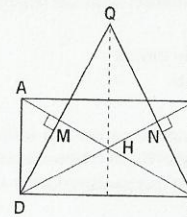
◆ Exercice n°9 p.59

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction	Programme de construction
<p>Je mets les données en couleur ou en gras.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Le centre de gravité d'un triangle est située au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet, donc au $\frac{1}{3}$ de chaque médiane à partir de la base. <p>Il suffit donc de placer le milieu M de [AB], puis de construire sur la droite (MG) le point C tel que GC = 2 GM.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Construire le milieu M de [AB]. – Tracer la médiane (MG) ; elle définit deux demi-droites d'origine G. – Sur la demi-droite [GX] ne contenant pas M, construire le point C tel que GC = 2 × GM.

◆ Exercice n°10 p.59-60

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction	Programme de construction
<p>Je mets les données en couleur ou en gras.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Le centre du cercle inscrit dans un triangle est le point d'intersection des bissectrices du triangle. • La droite (AO) est la bissectrice de l'angle \widehat{BAC}. • La droite (BO) est la bissectrice de l'angle \widehat{ABC}. <p>Il suffit donc de construire successivement le 2° côté des angles \widehat{BAC} et \widehat{ABC}.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Tracer la demi-droite [AX] telle que : mes \widehat{BAO} = mes \widehat{OAX}. – Tracer la demi-droite [BY] telle que : mes \widehat{OBA} = mes \widehat{OBY}. – Marquer C, point d'intersection des demi-droites [AX] et [BY].

◆ Exercice n°11 p.60



• Dans le triangle QCD :
– (CM) et (DN) sont deux hauteurs ;
– leur point d'intersection H est l'orthocentre du triangle.
Donc (QH) est la troisième hauteur de ce triangle, par conséquent : (QH) ⊥ (DC).
• ABCD est un rectangle, donc : (DC) ⊥ (AD).
Par conséquent (QH) est parallèle à (AD), car les droites (QH) et (DC) sont perpendiculaires toutes deux à (DC).
• On a : (QH) // (AD) et (AD) // (BC), donc : (QH) // (BC).

◆ Exercice n°12 p.60

• mes \widehat{B} = mes \widehat{C} = 70° et mes \widehat{A} = 40°.
• Le point T est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, car les droites (BT) et (CT) sont les bissectrices respectives des angles \widehat{B} et \widehat{C} .
• La droite (AT) est la bissectrice relative au sommet principal du triangle isocèle, elle est aussi la hauteur passant par A, car le triangle ABC est isocèle, par conséquent : (AT) ⊥ (BC).

◆ Exercice n°13 p.60

La médiatrice de [AB] coupe (D) en C ; CA = CB et ABC est isocèle.

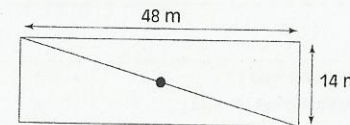
◆ Exercice n°14 p.60

Vraies : 1 ; 2 et 4.
Fausses : 3 et 5.

◆ Exercice n°15 p.60

Vraies : 1 et 4.
Fausses : 2 ; 3 et 5.

◆ Exercice n°16 p.60



$$48^2 + 14^2 = 2500 = 50^2.$$

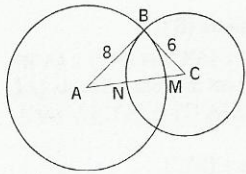
Le mât du drapeau sera placé à 25 mètres de chaque coin de la cour.

◆ Exercice n°17 p.60

• $BC^2 = EB^2 + EC^2 = 16 + 9 = 25$, donc BC = 5 ;
par conséquent, $\mathcal{A}_{ABCD} = 5^2 = 25$.
• $\mathcal{A}_{BCE} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$.
Or, $\mathcal{A}_{\text{grisée}} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{BCE}$,
donc : $\mathcal{A}_{\text{grisée}} = 25 - 6 = 19$.

◆ Exercice n°20 p.61

• La propriété de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B permet d'écrire :
 $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 64 + 36 = 100$, donc : AC = 10.



- $AM = AB = 8$ (rayons du cercle de centre A).
- $MC = AC - AM = 2$
- $NC = CB = 6$ (rayons du cercle de centre B).
- $MN = NC - MC = 4$.

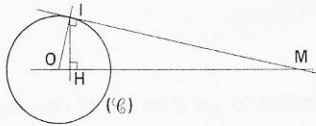
◆ Exercice n°21 p.61

- $OA^2 = 6,5^2 = 42,25$.
- $OB^2 + BA^2 = 2,5^2 + 6^2 = 6,25 + 36 = 42,25$.
- Donc : $OA^2 = OB^2 + BA^2$.

Par conséquent, la réciproque de la propriété de Pythagore montre que le triangle ABO est rectangle en B.

La définition de la tangente montre que (AB) est tangente à (C) en B.

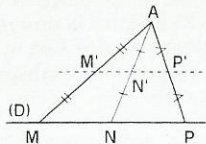
◆ Exercice n°23 p.61



- Le triangle IMO est un rectangle en I. D'après la propriété de Pythagore : $IO^2 + IM^2 = OM^2$, donc : $5^2 + IM^2 = 13^2$; $IM^2 = 144$, $IM = 12$.
- D'après la propriété « des aires » : $IH \times OM = IM \times IO$, par conséquent : $IH = \frac{5 \times 12}{13} \approx 4,61$.

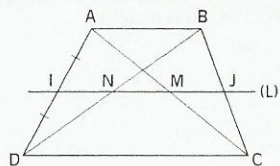
▢ Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n°25 p.61



- M' est le milieu de $[AM]$, N' est le milieu de $[AN]$, donc la droite $(M'N')$ est parallèle au support (MN) du troisième côté du triangle AMN .
 - M' est le milieu de $[AM]$, P' est le milieu de $[AP]$, donc la droite $(M'P')$ est parallèle au support (MN) du troisième côté du triangle AMP .
- Puisqu'il ne passe qu'une seule droite parallèle à (MN) par le point M' , donc $(M'N')$ et $(M'P')$ sont deux noms de la même droite, par suite les points M' , N' et P' sont alignés.

◆ Exercice n°26 p.61-62



1) Dans chacun des triangles ADC et ADB , la droite (L) est parallèle au support du côté commun au triangle et au trapèze et passe par le milieu I du côté $[AD]$, donc (L) passe par le milieu du 3^e côté de ces triangles.

Par suite : N est le milieu de $[BD]$ et M est le milieu de $[AC]$.

Dans le triangle BCD , la droite (L) passe par le milieu N du côté $[BD]$ et est parallèle au support du côté $[DC]$, donc elle passe par le milieu du 3^e côté, par conséquent J est le milieu de $[BC]$.

2) • Dans les triangles DAB et CAB ,

j'ai : $IN = \frac{1}{2} \times AB$ et $JM = \frac{1}{2} \times AB$.

Donc : $IN = JM$.

3) $\frac{1}{2} (DC - AB) = \frac{1}{2} (2 \times NJ - 2 \times MJ) = \frac{1}{2} (2 \times MN) = MN$.

• Dans les triangles ADC et BDC ,

j'ai : $IM = \frac{1}{2} \times DC$ et $JN = \frac{1}{2} \times DC$.

Donc : $IM = JN$.

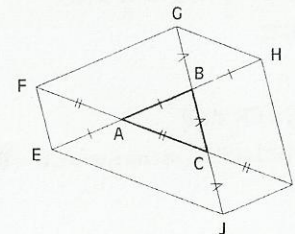
◆ Exercice n°22 p.61

- $BC = 5$ (application de la propriété de Pythagore dans le triangle ABC).
- $BC \times AH = AB \times AC$ (application de la propriété « des aires »), donc : $AH = 2,4$.

◆ Exercice n°27 p.62

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction
<p>Je mets les données en couleur ou en gras.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Je sais que dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au support d'un autre côté, alors elle passe par le milieu du 3^e côté. <p>Par conséquent, pour construire les milieux respectifs J et K des côtés $[AC]$ et $[BC]$, il me suffit de construire respectivement les droites parallèles à (BC) et à (AC) qui passe par I.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Les droites (BJ) et (AK) sont deux médianes du triangle ABC, elle se coupe en G, centre de gravité du triangle, donc la 3^e médiane de ce triangle est la droite (GI).
Programme de construction	Construction
<ul style="list-style-type: none"> - Construire le milieu I de $[AB]$. - Tracer la droite (L) parallèle à (AC) qui passe par I. - Marquer K, point d'intersection de (L) et (BC). - Tracer la droite (L') parallèle à (BC) qui passe par I. - Marquer J, point d'intersection de (L') et (AC). - Marquer G, point d'intersection de (AK) et de (BJ). - Tracer la droite (GI). 	

◆ Exercice n°29 p.62



Dans FCG , $[AB]$ joint les milieux des côtés $[CF]$ et $[CG]$, donc : $FG = 2 \times AB$.

La symétrie centrale de centre C montre que : $IJ = AB$.

De même, je démontre que :

- $HI = 2 \times BC$ et $EF = BC$;

- $JE = 2 \times AC$ et $GH = AC$.

Donc :

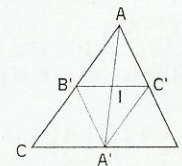
$\mathcal{P}_2 = EF + FG + GH + HI + IJ + JE$,

$\mathcal{P}_2 = BC + 2 \times AB + AC + 2 \times BC + AB + 2 \times AC$,

$\mathcal{P}_2 = 3 \times (AB + BC + CA)$.

Par conséquent : $\mathcal{P}_2 = 3 \times \mathcal{P}_1$.

◆ Exercice n°30 p.62



• $(A'C')$ joint les milieux des côtés $[BC]$ et $[BA]$, $(A'C')$ est donc parallèle à (AC) .

• $(A'B')$ joint les milieux des côtés $[AC]$ et $[BA]$, $(A'B')$ est donc parallèle à (BC) .

Donc, $AB'A'C'$ est un parallélogramme : ses diagonales $[AA']$ et $[B'C']$ ont le même milieu I .

◆ Exercice n°31 p.62

• $\mathcal{A}_{ACKH} = CA \times CK$,

$\mathcal{A}_{BCK} = \frac{1}{2} \times CA \times CK$,

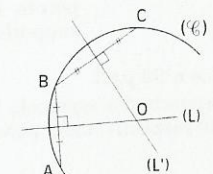
donc : $\mathcal{A}_{ACKH} = \frac{1}{2} \times \mathcal{A}_{BCK}$.

◆ Exercice n°32 p.62

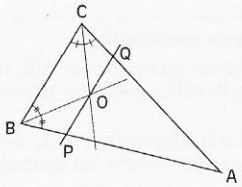
Programme de construction

- Tracer une corde $[AB]$.
- Construire la médiatrice (L) de $[AB]$.
- Tracer une corde $[BC]$.
- Construire la médiatrice (L') de $[BC]$.
- Marquer O , point d'intersection de (L) et (L') .

Construction

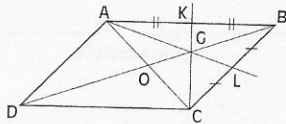


◆ Exercice n°33 p.62



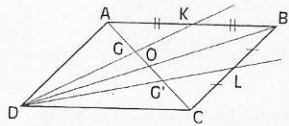
- mes $\widehat{OPA} = \text{mes } \widehat{B}$ (angles correspondants).
 - mes $\widehat{OPB} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{OPA}$, donc : mes $\widehat{OPB} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{B}$.
 - mes $\widehat{PBO} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{B}$, car (BO) est la bissectrice de l'angle \widehat{B} .
 - mes $\widehat{BOP} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{PBO} - \text{mes } \widehat{OPB}$.
- Donc : mes $\widehat{BOP} = 180^\circ - \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{B} - (180^\circ - \text{mes } \widehat{B}) = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{B}$.
- Le triangle BOP est donc isocèle en P.
De même, le triangle COQ est isocèle en Q.

◆ Exercice n°34 p.62



- a) Le point G est le centre de gravité du triangle ABC, car il appartient aux médianes (AL) et (CK) de ce triangle. Le point G appartient aussi à la troisième médiane (BO) de ce triangle, donc les points G, B, et O sont alignés.
- b) $BG = \frac{2}{3} \times BO = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times BD = \frac{1}{3} \times BD$.

◆ Exercice n°35 p.62

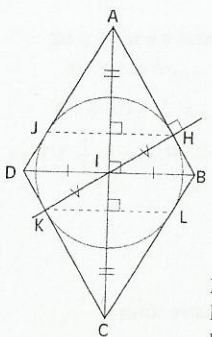


- Le point G est le centre de gravité du triangle ABD, donc : $AG = \frac{2}{3} \times AO$.
 - Le point G' est le centre de gravité du triangle BDC, donc : $CG' = \frac{2}{3} \times CO = \frac{2}{3} \times AO$, (car $CO = AO$).
 - $GG' = AC - AG - CG' = 2 \times AO - \frac{4}{3} \times AO = \frac{2}{3} \times AO$.
- Par conséquent : $AG = GG' = G'C$.

◆ Exercice n°36 p.62-63

- $S_{ABC} = \frac{1}{2} \times BH \times AC$ ou $S_{ABC} = \frac{1}{2} \times CK \times AB$, donc : $BH \times AC = CK \times AB$.
- La propriété de Pythagore appliquée aux triangles rectangles HBC et KBC montre que $CK = BH$. Par conséquent, $AC = AB$, donc ABC est isocèle en A.

◆ Exercice n°37 p.63



La droite perpendiculaire à la droite (AB) qui passe par I coupe (AB) en H. L'image de H par la symétrie S_1 est le point J.

Les images respectives de H et K par la symétrie orthogonale $S_{(Al)}$ sont J et L.

Je sais que :
(AB) \perp (IH) et H \in (AB).
donc :
(CD) \perp (IK) et K \in (CD).

Je sais que :
(AB) \perp (IH) et H \in (AB).
(CD) \perp (IK) et K \in (CD).
donc :
(AD) \perp (IJ) et J \in (AD).
(CB) \perp (IL) et L \in (CB).

Par conséquent : $IH = IJ = IK = IL$.

Le cercle de centre I et de rayon IH passe par les points H, J, K et L. En ces points, il est tangent respectivement aux droites (AB), (AD), (DC) et (CB), supports des côtés du losange.

◆ Exercice n°38 p.63

- a) Les supports des segments [A'B'], [B'C'] et [C'A'] qui joignent les milieux des côtés du triangle CAB, sont respectivement parallèles aux droites (AB), (BC) et (CA).

- Les triangles FB'C' et EB'C' sont inscrits dans le cercle de diamètre [B'C'], donc les angles $\widehat{C'EB'}$ et $\widehat{C'FB'}$ sont droits. Par conséquent : (EB') \perp (A'C') et (FC') \perp (A'B'), donc (EB') est perpendiculaire à (AC) en B' milieu de [AC]. (EB') est la médiatrice de [AC]. (EB') est perpendiculaire à (AC) en B' milieu de [AC] car : (EB') \perp (A'C') et (A'C') \parallel (AC). Par conséquent, (EB') est la médiatrice de [AC].
- b) La droite (A'O) est donc médiatrice de [BC] et perpendiculaire à (B'C').

◆ Exercice n°39 p.63

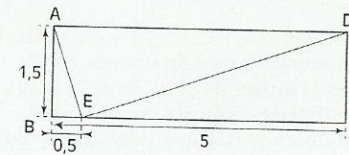
- a) Les supports des segments [A'B'], [B'C'] et [C'A'] qui joignent les milieux des côtés du triangle CAB, sont respectivement parallèles aux droites (AB), (BC) et (CA). La droite (A'O) est la médiatrice de [BC], car elle passe par deux points équidistants de B et de C. En particulier, (A'O) et (BC) sont perpendiculaires, or (BC) et (B'C') sont parallèles, donc (A'O) et (B'C') sont perpendiculaires, par conséquent (A'O) est la hauteur du triangle A'B'C' qui passe par A'. De même, (B'O) est la hauteur du triangle A'B'C' qui passe par B'. Donc, le point O est l'orthocentre du triangle A'B'C'.
- b) Aux exercices 2.f et n° 30, on démontre que la médiane (A'A) passe par le milieu de [B'C'], donc que la médiane relative au sommet A du triangle ABC est la médiane relative au sommet A' du triangle A'B'C'. De même, (B'B) et (C'C) sont des médianes communes à ces triangles qui ont évidemment le même centre de gravité.

◆ Exercice n°41 p.63

On veut calculer BM.

- $AB = \frac{15,7}{3,14} = 5$. Le triangle AMB est un triangle rectangle en M, car il est inscrit dans un cercle de diamètre [AB]. La propriété de Pythagore permet d'écrire : $AB^2 = AM^2 + MB^2$. Donc : $25 = 9 + MB^2$; par conséquent : $MB = 4$.

◆ Exercice n°42 p.63



- $AD = BC = 5$, donc $AD^2 = 25$.
- $AE^2 + ED^2 = (AB^2 + BE^2) + (EC^2 + CD^2)$, $AE^2 + ED^2 = (2,25 + 0,25) + (20,25 + 2,25) = 25$ (d'après la propriété de Pythagore appliquée aux triangles rectangles ABE et ECD).
- D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle AED est rectangle en E, car : $AD^2 = AE^2 + ED^2 = 25$.

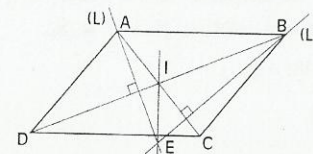
◆ Exercice n°48 p.64

- Les droites (AM) et (BN) sont sécantes. Je désigne par C leur point d'intersection.
- Les triangles ABM et ABN sont inscrits dans le cercle de diamètre [AB], ils sont donc rectangles respectivement en M et N, par conséquent : (BM) \perp (AC) et (AN) \perp (BC). Par suite, (BM) et (AN) sont des hauteurs du triangle ABC et leur intersection P est l'orthocentre.
- (PQ) est la troisième hauteur du triangle ABC passant par C.

◆ Exercice n°49 p.64

- L'intersection des droites (AF) et (BE) est l'orthocentre du triangle ABP (Cf : ex 2.b et ex n° 48).

◆ Exercice n°50 p.64



- Les droites (L) et (L') sont les hauteurs du triangle AIB qui passent respectivement par les points A et B, leur point d'intersection E est l'orthocentre de ce triangle.
- La droite (EI), qui passe par l'orthocentre I (troisième sommet du triangle AIB) est donc la troisième hauteur de ce triangle, par conséquent : (EI) \perp (AB).

□ Exercice de recherche

◆ Exercice n°51 p.64

Deux ordres sont possibles : 2 ; 5 ; 10 ; 8 ; 6 ; 4 ; 1 ; 9 ; 3 ; 7 ou 8 ; 6 ; 4 ; 2 ; 5 ; 10 ; 1 ; 9 ; 3 ; 7.

5. Translations et vecteurs

(pages 65 à 80 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- introduire la translation ;
- construire l'image d'une figure simple par une translation ;
- introduire les vecteurs du plan et initier les élèves à les utiliser.

COMMENTAIRES

- La translation est introduite par un programme de construction.
- En ce qui concerne l'introduction du vecteur, il n'est pas question d'évoquer les classes d'équivalence des bipoints du plan. Cependant, la présentation du vecteur repose implicitement sur cette notion.

Un vecteur est **déterminé** par un couple de points et est **représenté** dans le plan par un « segment fléché ».

Dans ce chapitre, il s'agit plus d'utiliser l'égalité de deux vecteurs et ses traductions géométriques que de définir rigoureusement un vecteur. Le vecteur sera caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur; on se limitera à cette présentation qui permet une bonne utilisation de l'outil VECTEUR.

La caractérisation vectorielle du parallélogramme et du milieu d'un segment permet déjà à ce niveau l'apprentissage de cet outil.

La somme de deux vecteurs est définie par l'égalité de Chasles.

On énoncera la règle permettant de regrouper (et déplacer) des termes d'une somme sans utiliser le vocabulaire technique (associativité, commutativité).

Le vecteur nul et l'opposé d'un vecteur seront définis et la notation $-\vec{AB}$ sera introduite, mais on ne parlera pas de la différence de deux vecteurs, ceci devant être vu en classe de 3^e.

On réservera l'introduction des coordonnées d'un vecteur à la classe de 3^e.

- Les translations, applications du plan dans le plan, sont utilisées pour introduire la notion de vecteur. Elles seront ensuite caractérisées vectoriellement.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

savoir-faire

Translation

• Vocabulaire

- Direction d'une droite.
- Sens d'un couple de points.
- Translation qui applique un point sur un point.

- Reconnaître la direction d'une droite et les deux sens liés à cette direction.
- Construire l'image d'un point par une translation.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

savoir-faire

Vecteurs

• Définition

- Des vecteurs qui ont la même direction, le même sens et la même longueur sont égaux.

• Égalité de Chasles

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Le vecteur \vec{AC} est appelé somme des vecteurs \vec{AB} et \vec{BC} .

• Vecteur nul, vecteurs opposés

- A et B sont des points du plan : $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$.
Le vecteur \vec{AA} est appelé vecteur nul, il est noté \vec{O} .

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{BA} sont dits opposés, on note : $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

• Propriétés

- A, B, C et D sont quatre points non alignés.
ABCD est un parallélogramme équivaut à $\vec{AB} = \vec{DC}$.

- A, B, C et D sont des points du plan.

[AC] et [BD] ont même milieu équivaut à $\vec{AB} = \vec{DC}$.

- A, B et I sont trois points du plan.

I est le milieu de [AB] équivaut à $\vec{AI} = \vec{IB}$.

- A, B et I sont trois points du plan.

I est le milieu de [AB] équivaut à $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{O}$.

• Propriété

Pour calculer une somme de plusieurs vecteurs, on peut déplacer et regrouper certains vecteurs.

- Reconnaître des vecteurs égaux.

- Utiliser l'égalité de vecteurs pour démontrer :
 - qu'un quadrilatère est un parallélogramme ;
 - que deux segments ont même longueur ;
 - que deux droites sont parallèles ;
 - qu'un point est le milieu d'un segment.

- Construire la somme de deux vecteurs.

- Utiliser l'égalité de Chasles.

- Calculer de manière performante la somme de plusieurs vecteurs.

- Reconnaître le vecteur nul.

- Reconnaître l'opposé d'un vecteur.

- Utiliser les caractérisations vectorielles du milieu d'un segment.

Translations et vecteurs

• Vocabulaire et notation

Translation de vecteur \vec{AB} est notée $t_{\vec{AB}}$.

• Propriété

- A, B, M, M' sont des points du plan. L'image de M par $t_{\vec{AB}}$ est M' équivaut à $\vec{MM'} = \vec{AB}$.

• Propriétés

Par une translation :

- Des points alignés ont pour image des points alignés.
- Une droite a pour image une droite de même direction.

- Un segment a pour image un segment de même longueur.

- Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.

- Deux droites parallèles ont pour image deux droites parallèles

- Un cercle a pour image un cercle de même rayon.

- Un angle a pour image un angle de même mesure.

- Deux droites perpendiculaires ont pour image deux droites perpendiculaires.

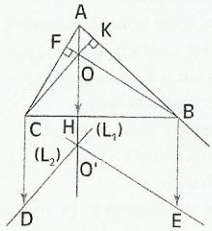
- Si un point appartient à deux lignes alors son image appartient aux images de ces deux lignes.

- Construire l'image d'une figure par une translation.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice 3.a p.76



- D est l'image de C par $t_{\overline{AH}}$ donc l'image de (CK) par $t_{\overline{AH}}$ est la droite (L_1) parallèle à (CK) qui passe par D.
- E est l'image de B par $t_{\overline{AH}}$ donc l'image de (BF) par $t_{\overline{AH}}$ est la droite (L_2) parallèle à (BF) qui passe par E.
- H est l'image de A par $t_{\overline{AH}}$ l'image de (AH) par $t_{\overline{AH}}$ est donc la droite (AH).
- Les hauteurs (AH), (BF) et (CK) du triangle ABC sont concourantes au point O, orthocentre du triangle ABC, leurs images respectives (AH), (L_2) et (L_1) par $t_{\overline{AH}}$ sont donc concourantes au point O', image de O par $t_{\overline{AH}}$.

Exercices d'entraînement

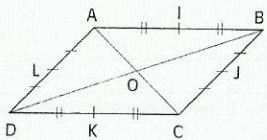
◆ Exercice n°4 p.76

$$\overline{AK} = \overline{KD}, \overline{DK} = \overline{KA}, \overline{BK} = \overline{KC}, \overline{CK} = \overline{KB}, \overline{AB} = \overline{CD}, \overline{BA} = \overline{DC}, \overline{AC} = \overline{BD}, \overline{DB} = \overline{CA}.$$

Commentaire

Dans cet exercice, on ne demande aux élèves que les égalités concernant l'égalité de deux vecteurs, on exclura les égalités de Chasles.

◆ Exercice n°8 p.77

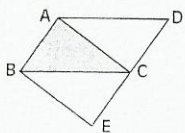


L'application de la propriété relative à la droite des milieux appliquée aux triangles ABC, BCD, CAD, DAB permet de justifier que :
 $(OI) \parallel (BC)$, $(OJ) \parallel (AB)$, $(IJ) \parallel (AC)$, $(OJ) \parallel (DC)$, $(OK) \parallel (BC)$,
 $(JK) \parallel (BD)$, $(OK) \parallel (AD)$, $(OL) \parallel (DC)$, $(LK) \parallel (AC)$, $(OL) \parallel (AB)$,
 $(OI) \parallel (AD)$, $(IL) \parallel (DB)$.

Donc, les quadrilatères AIJO, IBJO, IJCO, OKJB, OKCJ, ODKJ, OCKL, OKDL, OKLA, ODLI, OLAI, OLIB sont des parallélogrammes.

J'ai alors les égalités suivantes : $\overline{DL} = \overline{LA} = \overline{KO} = \overline{OI} = \overline{OJ} = \overline{JB}$;
 $\overline{AI} = \overline{IB} = \overline{LO} = \overline{OJ} = \overline{DK} = \overline{KC}$ et $\overline{IJ} = \overline{AO} = \overline{OC} = \overline{LK}$.

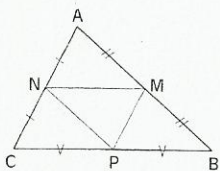
◆ Exercice n°9 p.77



Les points A, B et C ne sont pas alignés, les égalités $\overline{AD} = \overline{BC}$ et $\overline{BE} = \overline{AC}$ prouvent que ADCB et BECA sont des parallélogrammes, donc : $\overline{AB} = \overline{DC}$ et $\overline{AB} = \overline{CE}$.

Par conséquent : $\overline{DC} = \overline{CE}$, donc C est le milieu de [DE].

◆ Exercice n°10 p.77



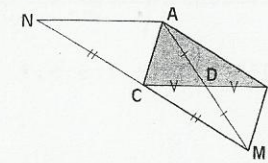
La propriété de la droite des milieux dans le triangle ABC prouve que : $(CB) \parallel (NM)$ et $(AB) \parallel (PN)$.

Par conséquent, BPNM et PCNM sont des parallélogrammes,

donc : $\overline{BP} = \overline{MN}$ et $\overline{PC} = \overline{MN}$.

Par conséquent : $\overline{BP} = \overline{PC} = \overline{MN}$.

◆ Exercice n°11 p.77



• Les segments [AM] et [BC] ont le même milieu D, mais A, B et C ne sont pas alignés, donc ABMC est un parallélogramme,

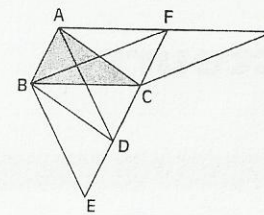
par conséquent : $\overline{BM} = \overline{AC}$ et $\overline{AB} = \overline{CM}$. ①

• Le point C est le milieu de [NM], donc : $\overline{NC} = \overline{CM}$. ②

De ① et ② on tire : $\overline{NC} = \overline{AB}$.

Par conséquent, ANCB est un parallélogramme. Par suite : $\overline{AN} = \overline{BC}$.

◆ Exercice n°14 p.77



a) Le point D vérifie : $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB}$,

donc : $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AB} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Par conséquent, ACDB est un parallélogramme.

b) $\overline{BE} = \overline{AC} + \overline{AB}$ équivaut à $\overline{BE} = \overline{AD}$.

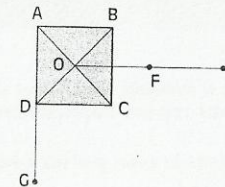
Donc, BEDA est un parallélogramme, car A, B et D ne sont pas alignés.

c) Je construis d'abord le point F tel que AFCB est un parallélogramme, donc : $\overline{AF} = \overline{BC}$.

Par conséquent : $\overline{BF} = \overline{BA} + \overline{AF} = \overline{BA} + \overline{BC}$.

$\overline{CK} = \overline{BA} + \overline{BC}$ équivaut à $\overline{CK} = \overline{BF}$, CKFB est donc un parallélogramme.

◆ Exercice n°15 p.78



a) ABCD est un carré, donc : $\overline{AB} = \overline{DC}$.

J'introduis le point F tel que : $\overline{OF} = \overline{AB}$.

E est le point tel que F est le milieu de [OE].

b) ABCD est un carré, donc : $\overline{BC} = \overline{AD}$.

G est le point tel que D est le milieu de [AG].

◆ Exercice n°18 p.78

a) ABCD est un parallélogramme, donc : $\overline{CD} = \overline{BA}$.

Par conséquent : $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \overline{O}$.

c) $\overline{AD} = \overline{BC}$.

donc : $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

b) $\overline{CB} = \overline{DA}$.

donc : $\overline{AD} + \overline{CB} = \overline{AD} + \overline{DA} = \overline{O}$.

d) $\overline{AB} + \overline{DA} = \overline{DA} + \overline{AB} = \overline{DB}$.

◆ Exercice n°21 p.78

• J'ai : $\overline{NR} = \overline{NM} + \overline{NP}$,

donc : $\overline{MR} = \overline{NP}$.

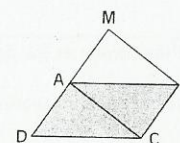
Les points P, M et N ne sont pas alignés, donc NMRP est un parallélogramme.

• J'ai : $\overline{PS} = \overline{PM} + \overline{PN}$.

Donc : $\overline{RS} = \overline{RM} + \overline{MS}$,

par conséquent M est le milieu de [SR].

◆ Exercice n°22 p.78



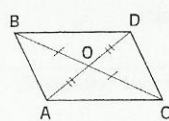
• $\overline{AM} + \overline{AD} = \overline{O}$ équivaut à $\overline{DA} = \overline{AM}$ (1).

• DABC est un parallélogramme, donc : $\overline{DA} = \overline{CB}$ (2).

Je déduis des égalités (1) et (2) que : $\overline{AM} = \overline{CB}$.

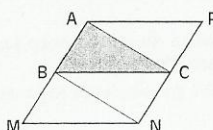
Donc, ACBM est un parallélogramme, car A, B et C sont non alignés.

◆ Exercice n°23 p.78



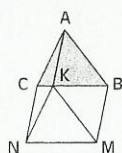
• O est le milieu de [AD], car : $\vec{AO} = \vec{OD}$.
 Donc les segments [BC] et [AD] ont même milieu O.
 • De plus les points A, B et C ne sont pas alignés, donc ABCD est un parallélogramme. Donc $\vec{AB} = \vec{CD}$.
 Par conséquent : $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{CD} + \vec{AC} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$.

◆ Exercice n°25 p.78



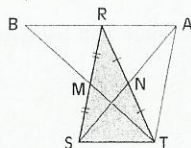
a) $\vec{CN} = \vec{AB}$, $\vec{BM} = \vec{AB}$ et $\vec{PC} = \vec{AB}$,
 donc : $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{MP} = \vec{PC} + \vec{CN} + \vec{MP} = \vec{PN} + \vec{MP} = \vec{MN}$.
 b) $\vec{CN} = \vec{AB}$ et $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$,
 donc : $\vec{AC} = \vec{CN} + \vec{BC}$.
 (On peut aussi considérer les parallélogrammes APCB et BCNM.)

◆ Exercice n°29 p.78



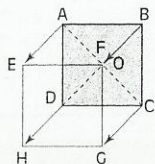
a) J'ai : $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{BA} + \vec{AK} + \vec{AB} = \vec{BK} + \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{BK} = \vec{AK}$ (1).
 b) • Les droites (KB) et (AB) sont sécantes en B, donc A, K et B ne sont pas alignés. Je déduis alors de (1) que AKMB est un parallélogramme.
 • Je démontre de même que AKNC est un parallélogramme.
 Donc, j'ai les deux égalités : $\vec{MK} = \vec{BA}$ et $\vec{KN} = \vec{AC}$.
 Par conséquent : $\vec{MK} + \vec{KN} = \vec{BA} + \vec{AC}$; $\vec{MN} = \vec{BC}$.

◆ Exercice n°34 p.79

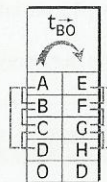


a) • Les segments [SA] et [RT] ont pour milieu commun N.
 • Les points R, S et T sont non alignés.
 Donc, RATS est un parallélogramme et par suite : $\vec{ST} = \vec{RA}$.
 A est donc l'image de R par la translation de vecteur \vec{ST} .
 b) De même, RBST est un parallélogramme, donc : $\vec{RB} = \vec{TS}$.
 Par conséquent : $\vec{RA} + \vec{RB} = \vec{ST} + \vec{TS} = \vec{0}$.

◆ Exercice n°37 p.79



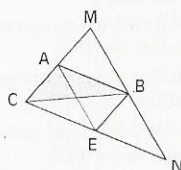
a) F est l'image de B par $t_{\vec{BO}}$, donc F et O désignent le même point.
 b) On sait que :
 • ABCD est un carré
 c'est-à-dire
 $AB = BC = CD = DA$
 et
 $(AB) \perp (BC)$
 • le centre de ABCD est O



donc :
 • $EF = FG = GH = HE$
 et
 $(EF) \perp (FG)$
 par suite
 EFGH est un carré
 • le centre de EFGH est D

▢ Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n°38 p.79

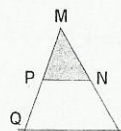


b) $\vec{BN} = \vec{MB}$ et $\vec{AE} = \vec{MB}$.
 donc $\vec{BN} = \vec{AE}$.
 Par conséquent, BNEA est un parallélogramme, donc : $(AB) \parallel (EN)$.
 • $\vec{AM} = \vec{CA}$ et $\vec{MB} = \vec{AE}$.
 donc : $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{CA} + \vec{AE}$, $\vec{AB} = \vec{CE}$.

Donc, les droites (AB) et (CE) ont même direction : $(AB) \parallel (CE)$.

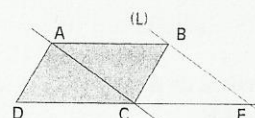
c) Je déduis des égalités $\vec{AB} = \vec{EN} = \vec{CE}$ (question b) que E est le milieu de [CN].

◆ Exercice n°39 p.79



• P est le milieu de [MQ], car : $\vec{MP} = \vec{PQ}$.
 • M, Q et R ne sont pas alignés, car les droites (MP) et (MN) sont sécantes en M.
 • Dans le triangle MQR, la droite (PN) passe par le milieu P de [MQ] et est parallèle au support du côté [QR], donc elle coupe [MR] en son milieu.
 Par conséquent, N est le milieu de [MR], donc : $\vec{MN} = \vec{NR}$.

◆ Exercice n°40 p.79-80



a) ABCD est un parallélogramme, donc : $\vec{AB} = \vec{DC}$.
 Par conséquent C est l'image de D par $t_{\vec{AB}}$.
 L'image de (DC) par $t_{\vec{AB}}$ est donc la droite de même direction et qui passe par C, par suite (DC) est sa propre image par $t_{\vec{AB}}$.

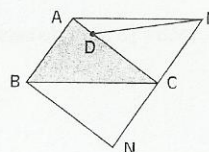
• B est l'image de D par $t_{\vec{DB}}$ donc l'image de (DC) par $t_{\vec{DB}}$ est la droite de même direction qui passe par B, c'est donc la droite (AB).

b) Le point C est le point d'intersection de (DC) et (AC), donc j'ai le tableau de correspondance suivant :

	$t_{\vec{AB}}$	
A	B	
C	E	
D	C	

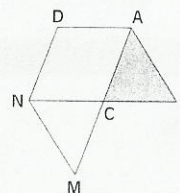
Donc : $\vec{AB} = \vec{CE} = \vec{DC}$.
 Par conséquent C est le milieu de [DE].

◆ Exercice n°41 p.80



a) $\vec{AM} = \vec{AD} + \vec{DM} = \vec{AD} + \vec{DA} + \vec{BC} = \vec{BC}$ (1).
 b) • Les points A, B et C ne sont pas alignés, je déduis de (1) que ABCM est un parallélogramme, donc : $\vec{AB} = \vec{MC}$.
 • D'autre part : $\vec{CN} = \vec{CD} + \vec{DN} = \vec{CD} + \vec{DC} + \vec{AB} = \vec{AB}$.
 Par conséquent : $\vec{MC} = \vec{CN}$,
 donc C est le milieu de [MN].

◆ Exercice n°43 p.80



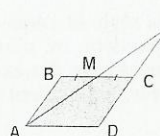
b) • D est l'image de A par $t_{\vec{BC}}$, donc : $\vec{AD} = \vec{BC}$ (1).
 • Le point C est le milieu de [BN], donc : $\vec{BC} = \vec{CN}$ (2).
 De (1) et (2), on tire : $\vec{CN} = \vec{AD}$,
 donc [DC] et [NA] ont même milieu, par conséquent : $\vec{DN} = \vec{AC}$.
 • Le point C est aussi le milieu de [AM], donc : $\vec{AC} = \vec{CM}$.
 De $\vec{DN} = \vec{AC}$ et $\vec{AC} = \vec{CM}$, je déduis : $\vec{DN} = \vec{CM}$.
 Donc, [CN] et [DM] ont même milieu et par conséquent : $\vec{CD} = \vec{MN}$.

c) • En utilisant les égalités établies en b), j'ai : $\vec{DC} + \vec{CN} = \vec{DN} = \vec{AC}$.

• [NB] et [AM] ont même milieu C, donc : $\vec{NA} = \vec{MB}$.

Par conséquent : $\vec{MB} = \vec{NA} = \vec{ND} + \vec{DA}$.

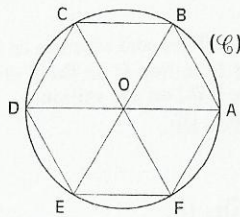
◆ Exercice n°44 p.80



• ABCD est un parallélogramme, donc : $\vec{AB} = \vec{DC}$.
 Le point E est l'image de C par la translation de vecteur \vec{DC} ,
 donc : $\vec{CE} = \vec{DC}$. Par conséquent : $\vec{AB} = \vec{CE}$ (1).
 • M est le milieu de [BC], donc : $\vec{BM} = \vec{MC}$ (2).

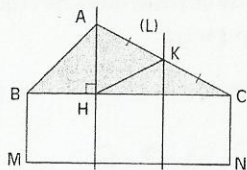
Des égalités (1) et (2), je déduis : $\vec{AB} + \vec{BM} = \vec{CE} + \vec{MC}$ (3).
L'égalité (3) peut s'écrire : $\vec{AM} = \vec{ME}$, donc M est le milieu de [AE].

◆ Exercice n°46 p.80



a) r désigne le rayon du cercle (C).
J'ai : $AB = BC = CD = DE = EF = FA = r$ et $OA = OC = r$.
En particulier : $AB = BC = CO = OB$.
Donc OABC est un losange.
b) • OABC est un losange, donc : $\vec{OC} = \vec{AB}$.
Par conséquent : $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$.
• Je démontre comme en a) que ODEF est un losange, donc : $\vec{OF} = \vec{DE}$.
Par conséquent : $\vec{OD} + \vec{OF} = \vec{OD} + \vec{DE} = \vec{OE}$.

◆ Exercice n°47 p.80



a) • M et N sont les images respectives de B et C par t_(L),
donc : $\vec{BM} = \vec{AH}$, $\vec{CN} = \vec{AH}$ et $\vec{BM} = \vec{CN}$.
• Les droites (AH) et (BM) ont donc même direction, comme (AH) est perpendiculaire à (BC), donc (BM) est perpendiculaire à (BC).
Je déduis des deux points précédents que BCMN est un parallélogramme qui a un angle droit en B, BCMN est donc un rectangle.

b) • J'ai le tableau de correspondance suivant :

t _(L)	
H	K
(AH)	(L)

Donc, (L) et (AH) ont même direction, or (AH) est perpendiculaire à (BC), donc la droite (L) est la perpendiculaire à (BC) passant par K.

• Le triangle AHC est rectangle en H, donc H appartient au cercle de diamètre [AC] et de centre K.
Par conséquent, KH = KC et K appartient à la médiatrice de [HC].
Je déduis des deux points précédents que (L) est la médiatrice de [HC].

6. Projection et repérage

(pages 81 à 90 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- introduire la projection sur une droite parallèlement à une autre droite ;
- établir la propriété de la conservation du milieu par les projections ;
- mettre en place un repérage dans le plan en utilisant les projections.

COMMENTAIRES

La projection est introduite par un programme de construction.

La propriété du projeté du milieu d'un segment permet de justifier la méthode de partage d'un segment en segments de même longueur (la droite des milieux dans un triangle, qui en est un cas particulier, donne aussi une méthode de démonstration).

L'utilisation d'axes obliques permet de réinvestir les constructions, avec la règle et l'équerre, de droites parallèles à une droite donnée et passant par un point donné. Cependant, on n'insistera pas trop sur l'utilisation des axes obliques. On privilégiera plutôt les repérages avec des axes perpendiculaires, ce qui correspond aux représentations habituellement utilisées, notamment en statistiques.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

savoir-faire

Projection

• Définition

(D) et (L) sont deux droites sécantes.
On appelle projection sur (D) parallèlement à (L) l'application qui, à chaque point M du plan associe M', point commun à (D) et à la droite parallèle à (L) passant par M.

Le point M' est appelé le projeté de M.

• Vocabulaire

- Projection sur parallèlement à
- Projeté ; projeté orthogonal.
- Projection orthogonale sur ...
- Repère orthogonal, repère orthonormé (ou orthonormal).

• Propriétés

- Le projeté d'un segment est un segment ou un point.
- Lorsque le projeté d'un segment est un segment, le projeté du milieu du segment est le milieu du projeté de ce segment.

- Construire le projeté (le projeté orthogonal) d'un point.
- Construire le projeté (le projeté orthogonal) d'un segment.
- Trouver un (ou des) point(s) dont le projeté est connu.
- Utiliser la conservation du milieu pour justifier qu'un point est le milieu d'un segment.
- Partager un segment en plusieurs segments de même longueur.

Repérage dans le plan

• Vocabulaire

- Repère du plan.
- Origine du repère.
- Abscisse, ordonnée, couple de coordonnées d'un point du plan muni d'un repère.

• Notations

- Repère (O, I, J) du plan.
- (x ; y) est le couple de coordonnées du point M (x ; y).

• Définitions

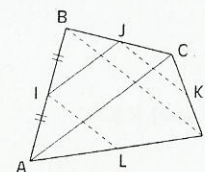
- (O, I, J) est un repère.
- Lorsque (OI) ⊥ (OJ), on dit que le repère est orthogonal.
- Lorsque (OI) ⊥ (OJ) et OI = OJ, on dit que le repère est orthonormé (ou orthonormal).

- Placer un point de coordonnées données dans un plan muni d'un repère.
- Déterminer les coordonnées d'un point du plan muni d'un repère.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice 1.e p.85



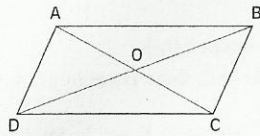
Je désigne par p₁ la projection sur (BC) parallèlement à (AC), p₂ la projection sur (AD) parallèlement à (BD) et p₃ la projection sur (CD) parallèlement à (BD). J'ai les trois tableaux de correspondance suivants :

p ₁	p ₂	p ₃																		
<table border="1"> <tr><td>A</td><td>C</td></tr> <tr><td>B</td><td>B</td></tr> <tr><td>I</td><td>J</td></tr> </table>	A	C	B	B	I	J	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>A</td></tr> <tr><td>B</td><td>D</td></tr> <tr><td>I</td><td>L</td></tr> </table>	A	A	B	D	I	L	<table border="1"> <tr><td>B</td><td>D</td></tr> <tr><td>C</td><td>C</td></tr> <tr><td>J</td><td>K</td></tr> </table>	B	D	C	C	J	K
A	C																			
B	B																			
I	J																			
A	A																			
B	D																			
I	L																			
B	D																			
C	C																			
J	K																			

- (BC) et la droite parallèle à (AC) qui passe par I, se coupent en J, milieu de [BC].
- (AD) et la droite parallèle à (BD) qui passe par I, se coupent en L, milieu de [AD].
- (CD) et la droite parallèle à (BD) qui passe par J, se coupent en K, milieu de [CD].

Exercices d'entraînement

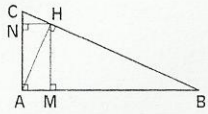
◆ Exercice n°2 p.87



1^{er} cas. Les points B et C doivent appartenir à (L), donc (L) est la droite (BC), B étant le projeté de A, je peux donc prendre la droite (AB) pour (L'). Les points B et C sont bien les images respectives de A et D par la projection sur (BC) parallèlement à (AB). (Faire une table de correspondance.)

2^e cas. Les points O et C doivent appartenir à (L), donc (L) est la droite (AC), B a pour projeté C, je peux donc prendre la droite (BC) pour (L'). Les points C et O sont bien les images respectives de B et O par la projection sur (AC) parallèlement à (BC). (Faire une table de correspondance.)

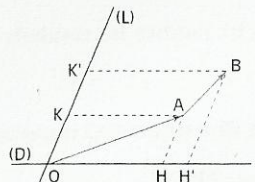
◆ Exercice n°8 p.87



- (NH) ⊥ (NA) ;
- (NA) ⊥ (AM) ;
- (AM) ⊥ (HM).

Donc, AMHN est un rectangle, car un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle.

◆ Exercice n°11 p.87



a) A n'appartient ni à (D) ni à (L), donc : (AK) // (HO) et (OK) // (HA). O, H, A ne sont pas alignés, donc OHAK est un parallélogramme, par conséquent : $\vec{OK} = \vec{HA}$. (Faire une table de correspondance.)

Donc : $\vec{OA} = \vec{OH} + \vec{HA} = \vec{OH} + \vec{OK}$.

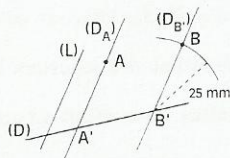
b) Je démontre de même que : $\vec{OB} = \vec{OH}' + \vec{OK}'$.

AHOK est un parallélogramme, donc : $\vec{AO} = \vec{AH} + \vec{AK} = \vec{KO} + \vec{HO}$.

Par conséquent : $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = (\vec{KO} + \vec{HO}) + (\vec{OH}' + \vec{OK}')$,

donc : $\vec{AB} = \vec{HO} + \vec{OH}' + \vec{KO} + \vec{OK}' = \vec{HH}' + \vec{KK}'$.

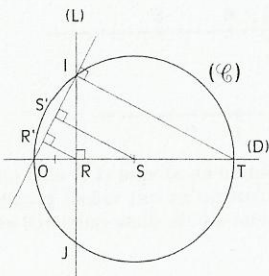
◆ Exercice n°13 p.87



Programme de construction

- Tracer les droites (D_A) et (D_B) parallèles à (L) passant respectivement par A et B'.
- Marquer A', point d'intersection de (D_A) et de (D).
- Marquer B, l'un des deux points d'intersection de (D_B) et du cercle de centre B' et de rayon 25 mm.

◆ Exercice n°14 p.88



a) Je désigne par p la projection orthogonale sur (OI).

• Les points O et I appartiennent à (OI), donc sont leurs propres images par p.

• Le point I appartient au cercle de diamètre [OP], donc le point I est l'image de T par p et (OI) ⊥ (IT).

b) La droite (D) est sécante à (OI), j'ai le tableau de correspondance suivant :

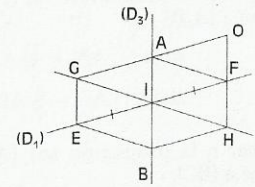
p	
O	O
T	I
S	S'
R	R'

Les points R et S sont les milieux respectifs des segments [OS] et [OT], donc R' et S' sont les milieux respectifs des segments [OS'] et [OI].

Donc : $OI = 2 \times OS'$ et $OS' = 2 \times OR'$.

Par conséquent : $OI = 2 \times OS' = 4 \times OR'$.

◆ Exercice n°15 p.88



a) • (AG) // (EI) et (AI) // (GE). E, G, I ne sont pas alignés, donc EGAI est un parallélogramme.

• De même : (FH) // (BI) et (IF) // (BH).

I, H, F ne sont pas alignés, donc BIFH est un parallélogramme.

b) Je désigne par p la projection sur (D₂) parallèlement à (D₃) et par q la projection sur (D₃) parallèlement à (D₁).

J'ai les deux tableaux de correspondance suivants :

p	
E	G
F	H
I	I

• Le point I est le milieu de [EF], donc I est le milieu de [GH].

q	
G	A
H	B
I	I

• Le point I est le milieu de [GH], donc I est le milieu de [AB].

• Les segments [EF], [GH] et [AB] ont pour milieu I, donc EGFH, EAFB et GAHB sont des parallélogrammes.

c) • BIFH est un parallélogramme ; donc : $\vec{IB} = \vec{FH}$.
I est le milieu de [AB] ; donc : $\vec{IB} = \vec{AI}$.

Par conséquent : $\vec{FH} = \vec{AI}$.

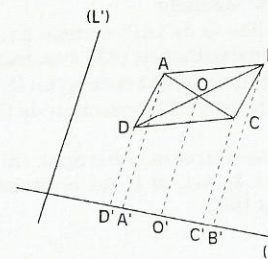
et AIHF est un parallélogramme.

• AIFH est un parallélogramme ; donc : $\vec{IH} = \vec{AF}$.
EAFB est un parallélogramme ; donc : $\vec{AF} = \vec{EB}$.

Par conséquent : $\vec{IH} = \vec{EB}$.

et EIHB est un parallélogramme.

◆ Exercice n°16 p.88



Je désigne par p la projection sur (L) parallèlement à (L').

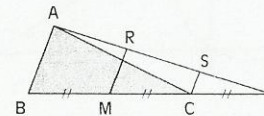
• Les droites (AC) et (BD) sont sécantes à (L'), j'ai donc le tableau de correspondance suivant :

p	
A	A'
C	C'
B	B'
D	D'
O	O'

• Le point O est le milieu des segments [AC] et [BD], donc son image O' par p est le milieu des segments projetés [A'C'] et [B'D'].

Par conséquent : $A'B' = D'C'$.

◆ Exercice n°18 p.88



Je désigne par p la projection sur (AN) parallèlement à (AB).

• Les droites (AB) et (BC) sont sécantes en B.

p	
B	A
C	S
M	R
N	N

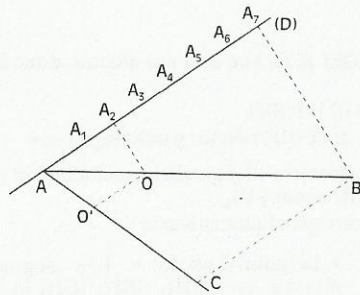
Les points M et C sont les milieux respectifs des segments [BC] et [MN], donc R et S sont les milieux respectifs des segments [AS] et [RN].

Donc : $AR = RS$ et $RS = SN$.

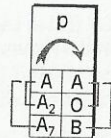
◆ Exercice n°19 p.88

• (D) est une droite passant par A ne contenant pas B.

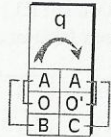
Les points A₁, A₂, A₃, A₄, A₅, A₆ et A₇ sont des points de (D) tels que [AA₁], [A₁A₂], [A₂A₃], [A₃A₄], [A₄A₅], [A₅A₆] et [A₆A₇] sont des segments consécutifs de même longueur.



• Les points B, A, A₇ ne sont pas alignés.
Je désigne par p la projection sur (AB) parallèlement à (A₇B).



on a : $AA_2 = \frac{2}{7} AA_7$
donc : $AO = \frac{2}{7} AB$



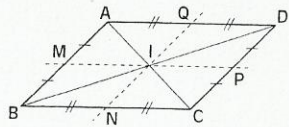
Je désigne par q la projection sur (AC) parallèlement à (BC).

donc : $AO' = \frac{2}{7} AC$

◆ Exercice n°23 p.88-89

Dans le repère (D, C, A), on a : A (0 ; 1), B (1 ; 1), C (1 ; 0), D (0 ; 0) et O ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$).

◆ Exercice n°26 p.89



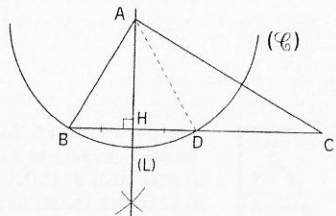
- a) Dans le repère (B, C, A) : A (0 ; 1), B (0 ; 0), C (1 ; 0), D (1 ; 1), I ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$), M (0 ; $\frac{1}{2}$), N ($\frac{1}{2}$; 0), P (1 ; $\frac{1}{2}$), Q ($\frac{1}{2}$; 1).
b) Dans le repère (B, N, M) : A (0 ; 2), B (0 ; 0), C (2 ; 0), D (2 ; 2), I (1 ; 1), M (0 ; 1), N (1 ; 0), P (2 ; 1), Q (1 ; 2).
c) Dans le repère (I ; P ; Q) : A (-1 ; 1), B (-1 ; -1), C (1 ; -1), D (1 ; 1), I (0 ; 0), M (-1 ; 0), N (0 ; -1), P (1 ; 0), Q (0 ; 1).

▣ Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n°27 p.89

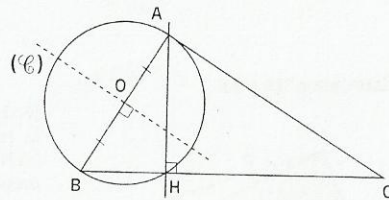
1^{re} méthode

- Tracer le cercle (C) de centre A et passant par B.
 - Marquer D, l'autre point d'intersection de (C) et (BC).
 - Construire la médiatrice (L) de [BD].
 - Marquer H, point d'intersection de (L) et (BC).
- La droite (L) passe par A et est perpendiculaire à (BC), H est donc le projeté orthogonal de A sur (BC).

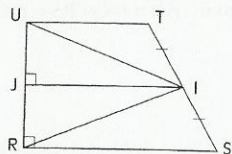


2^e méthode

- Construire le milieu O de [AB] comme point d'intersection de la médiatrice de [AB] avec (AB).
 - Tracer le cercle (C) de centre O et de rayon OA.
 - Marquer H, l'autre point d'intersection de (C) et (BC).
- Le cercle (C) a pour diamètre [AB], donc (BH) est perpendiculaire à (AH) et H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

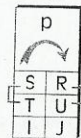


◆ Exercice n°28 p.89



Je désigne par p la projection orthogonale sur (RU).

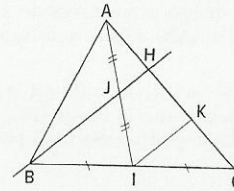
• (UT) ⊥ (UR)
(RS) ⊥ (UR),
donc, j'ai le tableau de correspondance suivant :



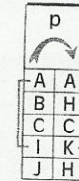
Le point I est le milieu de [TS], donc J est le milieu de [UR].

• Les droites (IJ) et (UR) sont perpendiculaires et J est le milieu de [UR], donc, (IJ) est la médiatrice de [UR].
Par conséquent, le triangle RIU est isocèle de sommet I, car : IR = IU.

◆ Exercice n°29 p.89

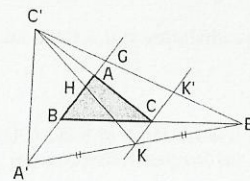


p désigne la projection sur (AC) parallèlement à (BJ).



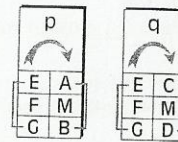
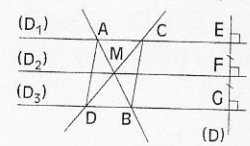
- Le point J est le milieu de [AI], donc H est le milieu de [AK].
- I est le milieu de [BC], par suite K est le milieu de [HC].
- Par conséquent, AH = HK et HK = KC, donc, AC = AK + KC = AH + HK + KC = 3AH ou AH = 1/3 AC.

◆ Exercice n°30 p.89



- a) • Dans le triangle B'BA' :
- K est le milieu de [A'B'] ;
- C est le milieu de [BB'] ;
Donc, (KC) est parallèle à (BA') c'est-à-dire à (AB).
• Dans le triangle C'CK, la droite (AB) passe par le milieu A de [CC'] et est parallèle à (KC), elle coupe donc [C'K] en son milieu, par conséquent H est le milieu de [C'K].
b) Pour démontrer que C'G = GK' = K'B', j'utilise les résultats de l'exercice n° 29.

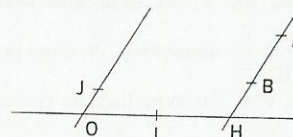
◆ Exercice n°31 p.89



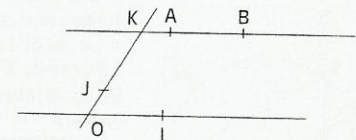
(D) désigne une droite perpendiculaire à (D₁), (D₂) et (D₃) respectivement en E, F et G.

- (D₂) est l'axe médian de (D₁) et (D₃), donc : EF = FG.
- Par conséquent, F est le milieu de [EG], car E, F et G sont alignés.
- Je désigne respectivement par p et q les projections sur (AB) et (CD) parallèlement à (D₁).
- Les droites (D₁), (D₂) et (D₃) sont parallèles, j'ai les tableaux de correspondance suivants :
- F est le milieu de [EG], donc M est le milieu des segments [AB] et [CD].
- Les segments [AB] et [CD] ont même milieu, donc ACBD est un parallélogramme.

◆ Exercice n°32 p.89

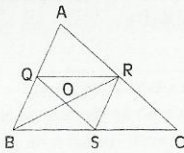


a) Les abscisses de A et B dans le repère (O, I, J) sont les abscisses respectives dans le repère (O, I) de la droite (OI) des projetés de A et B sur la droite (OI) parallèlement à la droite (OJ). Si A et B ont même abscisse, c'est donc qu'ils ont même projeté sur (OI) parallèlement à (OJ), donc que (AB) est parallèle à (OJ).



b) Je démontre, comme en a), que si A et B ont même ordonnée, c'est qu'ils ont même projeté sur (OJ) parallèlement à (OI), donc que (AB) est parallèle à (OI).

◆ Exercice n°33 p.89



a) On suppose que Q est le milieu de [AB].

• Je désigne par p_1 la projection sur (AC) parallèlement à (AB), j'ai le tableau de correspondance suivant :



Le point Q est le milieu de [AB], donc R est le milieu de [AC].

• Je désigne par p_2 la projection sur (BC) parallèlement à (AB), j'ai le tableau de correspondance suivant :



Le point R est le milieu de [AC], donc S est le milieu de [BC].

• p étant la projection sur (AB) parallèlement à (AC), j'ai donc le tableau de correspondance suivant :
Les points S et Q sont les milieux respectifs de [BC] et [BA], donc $p(S) = Q$.



b) On suppose que $p(S) = Q$.

• (QR) parallèle à (BC), (RS) parallèle à (AB), S appartient à (BC) et Q appartient à (AB), les points Q, B, S et R ne sont pas alignés, donc QRSB est un parallélogramme.

Je désigne par O le centre du parallélogramme.

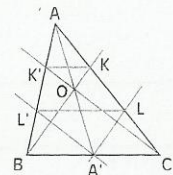
• O appartient à (QS), (QS) parallèle à (AC) et Q appartient à (AB), donc Q est l'image de O par p .

• R appartient à (AC), donc j'ai le tableau de correspondance ci-contre :



Le point O est le milieu de [BR], donc Q est le milieu de [AB].

◆ Exercice n°34 p.89



a) Je désigne par p la projection sur (AC) parallèlement à (BO).

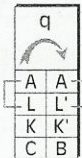
J'ai le tableau de correspondance ci-contre :



Les points O et A' sont les milieux respectifs de [AA'] et [BC], donc K et L sont les milieux respectifs de [AL] et [KC], par conséquent :
 $AK = KL$ et $KL = LC$.
Donc : $AK = KL = LC$.

b) • Je démontre comme en a) que K' est le milieu de [AL'] et L' milieu de [K'B].

Je désigne par q la projection sur (AB) parallèlement à (LL'). Les points K et K' sont les milieux respectifs de [AL] et [AL'], j'ai le tableau de correspondance ci-contre :

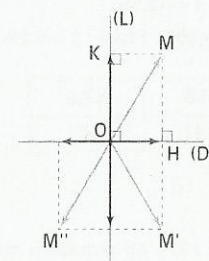


• L est le milieu de [KC], l'image de C par q est donc le symétrique K' par rapport à L'.

Donc B est l'image de C par q .

• K' et B sont les images respectives de K et C par q , donc les droites (KK') et (CB) sont parallèles à (LL').

◆ Exercice n°35 p.90



c) • Je démontre (cf ex n°11 p.87) que OHMK est un rectangle.

donc : $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{OK}$.

Par conséquent : $\vec{HM} + \vec{HM}' = \vec{HO} + \vec{OM} + \vec{HO} + \vec{OM}'$,

$\vec{HM} + \vec{HM}' = \vec{HO} + (\vec{OH} + \vec{OK} + \vec{HO}) + (\vec{OH} + \vec{KO}) = \vec{O}$.

Donc le point H est le milieu de [MM'].

De plus, OHMK est un rectangle, donc (D) est perpendiculaire à (MM').

Par conséquent, (D) est la médiatrice de [MM'], M et M' sont donc symétriques par rapport à (D).

• De même : $\vec{OM} + \vec{OM}'' = \vec{OH} + \vec{OK} + \vec{HO} + \vec{KO} = \vec{O}$,

donc, O est le milieu de [MM''] et M'' est le symétrique de M par rapport à O.

◆ Exercice n°36 p.90

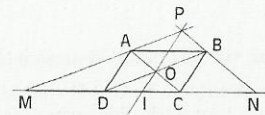
a) Dans le repère (O, A, B), O, A, B, C, D, E et F ont pour couples de coordonnées respectifs :

(0 ; 0), (1 ; 0), (0 ; 1), (-1 ; 1), (-1 ; 0), (0 ; -1), (1 ; -1).

b) Dans le repère (D, O, C), O, A, B, C, D, E et F ont pour couples de coordonnées respectifs : (1 ; 0), (2 ; 0), (1 ; 1), (0 ; 1), (0 ; 0), (1 ; -1) et (2 ; -1).

c) Dans le repère (O, A, C), O, A, B, C, D, E et F ont pour couples de coordonnées respectifs : (0 ; 0), (1 ; 0), (1 ; 1), (0 ; 1), (-1 ; 0), (-1 ; -1) et (0 ; -1).

◆ Exercice n°37 p.90



a) • Je désigne par p la projection sur (CD) parallèlement à (BD).

J'ai le tableau de correspondance :



Le point O est le milieu de [AC], donc D est le milieu de [MC].

Par suite : $MD = DC$ (1).

• Je désigne par q la projection sur (CD) parallèlement à (AC).

J'ai le tableau de correspondance ci-contre :



Le point O est le milieu de [BD], donc C est le milieu de [DN].

Par conséquent : $CN = DC$ (2).

• Des égalités (1) et (2), on tire : $MD = DC = CN$.

b) La droite (OP) coupe (AB) en J et (DC) en I.

• ACBP est un parallélogramme, donc J est le milieu de [AB].

• Dans le triangle ABC, (OP) passe par les milieux de [AB] et [AC], donc : (OP) // (BC). Par suite : (OP) // (AD).

• Dans le triangle ACD, (OP) passe par le milieu de [AC] et est parallèle à (AD), donc : I est le milieu de [DC].

◆ Exercice n°38 p.90

Recherche d'une méthode de construction

Je voudrais utiliser la propriété des projections relative au milieu d'un segment. Je ne peux cependant pas trouver de projection appliquant le segment [AB] sur le segment [CD], car ni (AC) et (BD), ni (BC) et (AD) ne sont parallèles. Je vais donc utiliser une droite auxiliaire.

Programme de construction

- Tracer une droite (L) sécante à (AB) et (AC) en A.
- Construire la droite parallèle à (AC) passant par D, elle coupe (L) en E.
- Construire la droite parallèle à (BE) passant par M, elle coupe (L) en I.
- Construire la droite parallèle à (AC) passant par I, elle coupe (CD) en N.

Commentaire

Autre méthode de construction : 1) Tracer la droite (BC). 2) Construire la parallèle (L) à (BC) passant par M. 3) Marquer M', point d'intersection de (L) et (AC) (M' est le milieu de [AC]). 4) Tracer la droite (AD). 5) Construire la parallèle (L') à (AD) passant par M'. 6) Marquer N, point d'intersection de (L') et (CD).

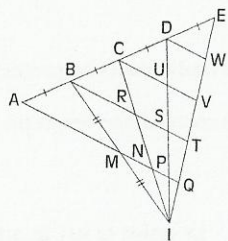
Exercice de recherche

◆ Exercice n°39 p.90

• La parallèle à la droite (AM) qui passe par B coupe les droites (IC), (ID) et (IE) respectivement en R, S et T.

La droite parallèle à (AM) qui passe par C coupe (ID) et (IE) respectivement en U et V.

La droite parallèle à (AM) qui passe par D coupe (IE) en W.



p_c désigne la projection sur (IC) parallèlement à (AM). J'ai le tableau de correspondance suivant :

A	N
B	R
C	C
I	I
M	N

Les points M et B sont les milieux respectifs de [IB] et [AC], donc N et R sont les milieux respectifs de [IR] et [NC]. Par conséquent : $IN = NR = RC$, donc $IC = 3 IN$.

- p_D : projection sur (ID) parallèlement à (AM).

A	P
B	S
C	U
D	D
I	I
M	P

Les points M, B et C sont les milieux respectifs des segments [IB], [AC] et [BD], donc P, S et U sont les milieux respectifs des segments [IS], [PU] et [SD].

Par conséquent :
 $IP = PS = SU = UD$,
 donc : $ID = 4 IP$.

A	Q
B	T
C	V
D	W
E	E
I	I
M	Q

- p_E : projection sur (IE) parallèlement à (AM).

Les points M, B, C et D sont les milieux respectifs des segments [IB], [AC], [BD] et [CE], donc Q, T, V et W sont les milieux respectifs des segments [IT], [QV], [TW] et [VE].

Par conséquent :
 $IQ = QT = TV = VW = WE$,
 donc : $IE = 5 IQ$.

7. Angle au centre - Polygones réguliers

(pages 91 à 98 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- introduire la notion d'angle au centre d'un cercle ;
- établir une relation entre l'angle au centre et l'arc intercepté, entre l'arc et la corde qui le sous-tend ;
- utiliser la notion d'angle au centre pour construire un polygone régulier.

COMMENTAIRES

• La notion d'angle au centre étant nouvelle, on en donnera une approche simple mais on amènera les élèves à l'utiliser correctement.

L'approche par le secteur angulaire a été évitée pour ne pas créer de problèmes de notation.

Les points A et B d'un cercle (C) de centre O n'étant pas diamétralement opposés, l'arc \widehat{AB} est le plus petit des deux arcs, c'est celui intercepté par l'angle \widehat{AOB} .

• Les propriétés qui concernent d'une part un angle au centre et l'arc qu'il intercepte, d'autre part une corde et l'arc qu'elle sous-tend, permettent de construire :
 - des polygones réguliers (par un partage du cercle en arcs de même longueur) ;
 - des diagrammes circulaires en statistiques (par un partage du cercle en arcs de longueurs proportionnelles).

En effet, à l'aide des propriétés de la médiatrice d'un segment, seuls deux polygones réguliers ont été introduits en classe de 5^e :

- l'hexagone régulier, à partir du triangle équilatéral ;
- l'octogone régulier, à partir du carré.

Aussi, à l'aide de l'angle au centre, l'élève de 4^e peut construire tout polygone régulier.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Angle au centre et arcs de cercle

- **Définition**
On appelle angle au centre d'un cercle un angle qui a pour sommet le centre de ce cercle.
- **Vocabulaire et notations**
- Arc \widehat{AB} ; arc \overline{AB} ; arc intercepté par un angle au centre.
- La corde [AB] sous-tend l'arc \widehat{AB} et l'arc \overline{AB} .
- **Propriétés**
- La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.
- Dans un cercle, si deux angles au centre ont la même mesure, alors ils interceptent deux arcs de même longueur.
- Dans un cercle, si deux arcs ont la même longueur, alors ils sont interceptés par deux angles au centre de même mesure.
- Dans un cercle, si deux arcs ont la même longueur, alors les deux cordes qui les sous-tendent ont la même longueur.
- Dans un cercle, si deux cordes ont la même longueur, alors elles sous-tendent deux arcs de même longueur.
- **Formule**
Longueur de \overline{AB} = $2\pi r$ - longueur de \widehat{AB} .

savoir-faire

- Reconnaître un angle au centre d'un cercle.
- Construire un angle au centre de mesure donnée.
- Reconnaître un arc de cercle intercepté par un angle au centre.
- Reconnaître une corde sous-tendant un arc
- Reconnaître un arc sous-tendu par une corde.
- Calculer la longueur d'un arc.
- Utiliser les propriétés pour démontrer :
 - une égalité d'angles au centre ;
 - une égalité de longueurs d'arcs ;
 - une égalité de longueurs de cordes.

Polygones réguliers

- **Définition**
On appelle polygone régulier, tout polygone inscrit dans un cercle ayant ses côtés de même longueur.
- Reconnaître un polygone régulier.
- Construire un polygone régulier en utilisant l'angle au centre.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice n°3 p.97

- a) • Demi-périmètre du cercle (C), de centre I et de rayon 4 cm : $\pi r = 3,14 \times 4 = 12,56$.
 • Longueur de l'arc de cercle intercepté par l'angle au centre \widehat{EIF} de mesure 90° : $12,56 \div 2 = 6,28$.

b)

Mesure de l'angle au centre (en °)	90	45	135	67,5
Mesure de l'arc intercepté (en cm)	6,28	3,14	9,42	4,71

Commentaires

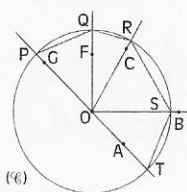
- On utilisera les propriétés des tableaux de proportionnalité.
- Pour calculer la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de 135°, on montrera aux élèves que l'on a deux possibilités : $45 \times 3 = 135$ ou $90 + 45 = 135$. Ces deux possibilités correspondent à deux propriétés des tableaux de proportionnalité.

◆ Exercice n°6 p.97

- Périmètre du cercle (\mathcal{C}), de centre O et de rayon 3 cm : $\mathcal{P} = 2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi$.

Longueur de l'arc intercepté (en cm)	6π	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{9\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{10}$
Mesure de l'angle au centre (en °)	360	18	54	90	126

◆ Exercice n°7 p.97



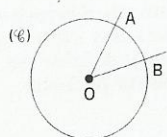
- Tracer un cercle (\mathcal{C}) de centre O.
- Le cercle (\mathcal{C}) coupe respectivement les côtés des angles \widehat{AOB} , \widehat{BOC} , \widehat{COF} et \widehat{FOG} en T et S, S et R, R et Q, Q et P.
- Comparer les longueurs des segments [TS], [SR], [RQ] et [QP].
- On trouve : $QR < PQ$, $PQ = ST$, $PQ < RS$.
- Donc : $\text{mes } \widehat{QOR} < \text{mes } \widehat{POQ}$, $\text{mes } \widehat{POQ} = \text{mes } \widehat{SOT}$ et $\text{mes } \widehat{POQ} < \text{mes } \widehat{ROS}$.
- On en déduit le rangement des angles par ordre croissant.

◆ Exercice n°12 p.97

- longueur de \widehat{AB} = longueur de \widehat{BE} = longueur de \widehat{EF} = longueur de \widehat{FG} = longueur de \widehat{GA} , donc : $AB = BE = EF = FG = GA$.
- Le polygone ABEFG est inscriptible dans un cercle (\mathcal{C}).
- Donc, le polygone ABEFG est un pentagone régulier.

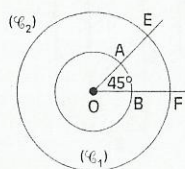
▢ Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n°20 p.98



- Je désigne par \mathcal{P} , le périmètre du cercle (\mathcal{C}).
- $\mathcal{P} = 2\pi r = 6,28r$.
- longueur de $\widehat{AB} = 1,57$; longueur de $\widehat{AB} = \frac{1}{16} \mathcal{P}$; donc : $\mathcal{P} = 16 \times 1,57$.
- Par conséquent : $r = \frac{16 \times 1,57}{6,28} = 4$.
- $\text{mes } \widehat{AOB} = 22,5^\circ$ ($360 : 16 = 22,5$).

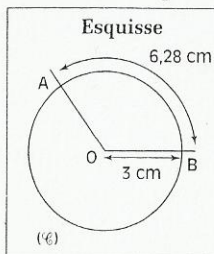
◆ Exercice n°22 p.98



- Je désigne par r_1 le rayon du cercle (\mathcal{C}_1) et par r_2 le rayon du cercle (\mathcal{C}_2) (avec $r_2 = 2r_1$).
- longueur de $\widehat{AB} = \frac{2\pi r_1}{8} = \frac{\pi r_1}{4}$.
- longueur de $\widehat{EF} = \frac{2\pi r_2}{8} = \frac{\pi r_2}{4} = \frac{\pi(2r_1)}{4} = \frac{\pi r_1}{2}$.
- Par conséquent : longueur de $\widehat{EF} = 2 \times$ longueur de \widehat{AB} .

▢ Exercice de recherche

◆ Exercice n°23 p.98



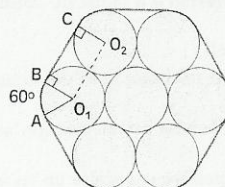
- Recherche d'une méthode de construction**
- Pour pouvoir colorier un arc de longueur 6,28 cm, je dois trouver la mesure de l'angle au centre qui intercepte cet arc de cercle.
 - Je calcule d'abord le périmètre du cercle de rayon 3 cm, puis je cherche la mesure de l'angle au centre en utilisant la propriété : « La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte ».
 - $\mathcal{P} = 2\pi r = 2 \times 3,14 \times 3$.
 - $\frac{\text{mes } \widehat{AOB}}{6,28} = \frac{360^\circ}{\mathcal{P}}$.

◆ Exercice n°24 p.98

Je désigne par O le milieu de [AB].

- Longueur de $\widehat{AB} = \pi r = 3,14 \times 5 = 15,7$.
- Longueur de $\widehat{EF} =$ longueur de $\widehat{AB} -$ longueur de $\widehat{AE} -$ longueur de $\widehat{FB} = 15,7 - 3,14 - 3,14 = 9,42$.
- Donc : longueur de $\widehat{EF} = 9,42$ (unité : le m).
- Par conséquent : $\text{mes } \widehat{EOF} = 180^\circ \times \frac{9,42}{15,7} = 108^\circ$.

◆ Exercice n°25 p.98



- L'unité de longueur est le cm.
- Le quadrilatère BCO_2O_1 est un rectangle tel que : $BC = O_1O_2 = 15$.
- Je désigne par ℓ la longueur de la ficelle à utiliser :
- $\ell = 6 \times BC + 6 \times$ longueur de \widehat{AB} .
- Or : longueur de $AB = \frac{2 \times 3,14 \times 7,5}{6} = 7,85$ ($360^\circ : 6 = 60^\circ$).
- Donc : $\ell = 6 \times 15 + 6 \times 7,85 = 137,1$.
- La longueur de ficelle à utiliser est de 1,371 m, donc In di ne pourra pas entourer les 7 boîtes cylindriques avec sa ficelle de 1,25 m.

8. Solides de l'espace

(pages 99 à 112 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- présenter et réaliser des solides servant de supports à l'étude de l'espace ;
- représenter, dans le plan, des solides de formes géométriques simples ;
- présenter la boule, le cylindre et le cône comme des solides de révolution et les représenter dans le plan.

COMMENTAIRES

La réalisation de prismes droits et de pyramides permet de réactiver le vocabulaire, la construction de patrons et la réalisation de solides abordés en classes de 6^e et 5^e. Ces solides seront conservés et utilisés au chapitre 9, où ils serviront de support à l'étude des droites et des plans de l'espace.

Le professeur pourra se confectionner un petit matériel didactique :

- un « squelette » de cube, les arêtes étant constituées de pailles reliées entre elles par un fil intérieur et maintenues aux sommets du cubes par des équerres ou trièdre droits façonnés avec des attaches- lettres (trombone) ;
- un cube articulé qui permet de mettre en évidence le principe et des règles de la perspective cavalière ;
- un puzzle dans l'espace à partir des prismes droits (cube, pavé droit, ...).

La représentation en perspective de solides classiques utilisera trois règles élémentaires, suffisantes pour une représentation fiable et codifiée dans le plan. Cette représentation est une approche de la perspective cavalière, qui sera traitée dans le cas simple du cube.

La sphère et le cône sont présentés comme des solides de révolution. Ce concept, admis, est approché par des manipulations simples à réaliser. Le cylindre droit, déjà vu en classe de 6^e, est rattaché à cette catégorie de solides.

Les calculs d'aire de sphères et de volume de boules se feront à partir de formules admises.
Les calculs de volumes de pyramides et de cônes seront vus en classe de 3^e.

La pyramide et le cône seront repris en classe de 3^e.

Leur introduction avant ce niveau doit se limiter au vocabulaire, à la réalisation de patrons et à la construction des solides.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Représentation d'un objet de l'espace

• Règles de représentation en perspective

R_1 : Des arêtes à supports parallèles sur l'objet sont représentées par des segments à supports parallèles sur le dessin.

R_2 : Toute face de l'objet, située dans un plan vertical de face, est dessinée sans déformation.

R_3 : Des arêtes « cachées », sont représentées par des traits en pointillés.

• Règles de représentation en perspective cavalière

R_1 ; R_2 ; R_3

R_4 : Les arêtes de l'objet à supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont représentées par des segments à supports parallèles faisant un angle de mesure fixée α avec la représentation de l'horizontale sur le dessin.

(α est appelé l'inclinaison des fuyantes sur l'horizontale.)

R_5 : Les longueurs des segments du dessin, représentant les arêtes de l'objet à supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont multipliées par un coefficient c .

(c est appelé coefficient de réduction.)

Solides de révolution

• Définitions

– On appelle sphère de centre A et de rayon r , l'ensemble des points M de l'espace tels que $AM = r$.

– On appelle boule de centre A et de rayon r , l'ensemble des points M de l'espace tels que $AM < r$ ou $AM = r$.

– La boule, le cylindre droit, le cône sont des solides obtenus en faisant tourner autour d'un de leurs axes de symétrie, respectivement un disque, un rectangle, un triangle isocèle.

Ce sont des solides de révolution.

Volumes et aires

• Formules

– Volume et aire latérale d'un prisme ou d'un cylindre :
 $V = B h$; $A = P h$. B : aire d'une base,

h : hauteur P : périmètre d'une base

– Volume d'une boule et aire d'une sphère :

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} ; A = 4\pi r^2 ; r : \text{rayon.}$$

savoir-faire

• Représenter **en perspective** à partir du solide ou de ses dimensions :

- un cube, un pavé droit ;
- un prisme droit dont les bases sont des triangles ou des quadrilatères ;
- une pyramide dont la base est un triangle ou un quadrilatère.

• Représenter **en perspective cavalière** un cube (*savoir-faire non exigible à ce niveau.*)

• Représenter dans le plan une sphère, un cylindre droit, un cône.

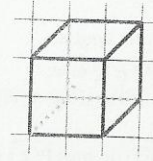
- Reconnaître, dessiner, réaliser un patron de cône.
- Réaliser un cône.

- Calculer l'aire d'une sphère.
- Calculer le volume d'une boule.

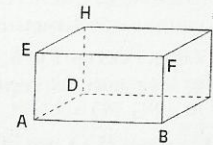
EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

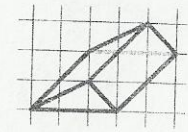
♦ Exercice 2.a p.103



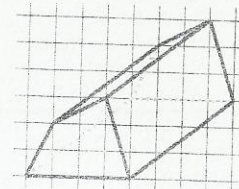
♦ Exercice 2.b p.103



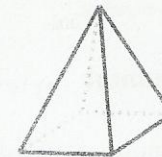
♦ Exercice 2.c p.104



♦ Exercice 2.d p.104



♦ Exercice 2.e p.104



♦ Activité 2.3 p.105

Dimensions sur le dessin : $AB = 0,7$; $BC = 0,7$; $CD = 1$; $DE = 1,7$ (en cm).

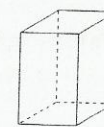
Dimensions réelles : $AB = 7$; $BC = 7$; $CD = 10$; $DE = 17$ (en cm).

Le quadrilatère $MNPQ$ est un losange, car : $MN = PQ = DE = 17$ et $MQ = NP = AB + CD = 10 + 7 = 17$, donc : $MN = NP = PQ = QM$.

Commentaire

Préciser aux élèves de déterminer les longueurs réelles des arêtes après avoir mesuré au préalable les longueurs des arêtes sur le dessin.

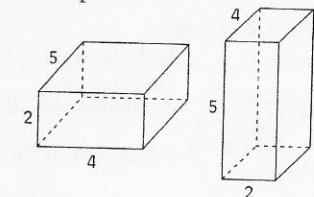
♦ Représentation en perspective cavalière d'un pavé droit p.106



Commentaire

Il faut supprimer les deux dimensions 2 cm et 3 cm et préciser aux élèves de mesurer les longueurs sur le dessin. Les trois dimensions sont : 1,1 cm, 1,7 cm et 1,6 cm ($0,8 \times 2 = 1,6$).

♦ Exercice 2.f p.106



Commentaire

Les représentations ci-dessus sont à l'échelle 0,45.

♦ Activité 3.3 : Réalisation d'un chapeau pointu p.109

$$\mathcal{P} = 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 45 = 282,86.$$

$$\text{mes } \hat{A} = 360^\circ \times \frac{44}{282,86} = 56^\circ.$$

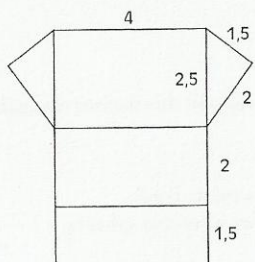
♦ Exercice 4.a p.109

$$\mathcal{A} = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 10,5^2 = 1\,386 \text{ (en cm}^2\text{)}.$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 10,5^3 = 4\,851 \text{ (en cm}^3\text{)} \text{ ou } V = 4,851 \text{ (en litres).}$$

Exercices d'entraînement

◆ Exercice n°2 p.110

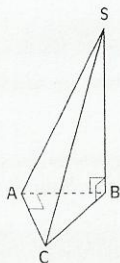


Les deux triangles de base de ce prisme droit sont des triangles rectangles, car ils vérifient la réciproque de la propriété de Pythagore : $2^2 + 1,5^2 = 2,5^2$.

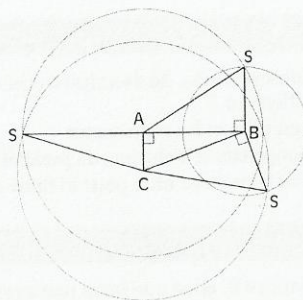
◆ Exercice n°4 p.110

c	3	4	5	n
f	4	5	6	n+1
s	4	5	6	n+1
a	6	8	10	2n

◆ Exercice n°5 p.110 Représentation en perspective



Construction du patron

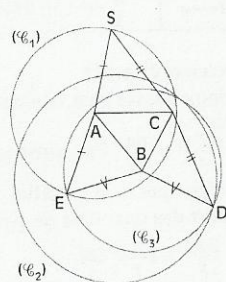


- D'après le patron, je peux conjecturer que $(AC) \perp (AS)$, donc que le triangle ACS est rectangle en A.
- Démonstration
 $SA^2 = SB^2 + AB^2$
 $SC^2 = BC^2 + BS^2$
 $SC^2 - SA^2 = BC^2 - AB^2$
 $SC^2 - SA^2 = AC^2$
 $SC^2 = SA^2 + AC^2$,
 le triangle ACS est donc rectangle en A (réciproque de la propriété de Pythagore).

◆ Exercice n°6 p.110

L'objet réalisé est une pyramide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

◆ Exercice n°3 p.110

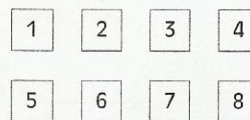


Le point E est le point d'intersection de (C_1) , cercle de centre A et de rayon AS et de (C_2) , cercle de centre B et de rayon AC. Le point D est le point d'intersection de (C_2) , cercle de centre B et de rayon CS et de (C_3) .

Commentaire

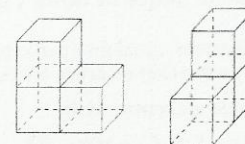
Dans le cas d'une pyramide dont la base a n côtés, on demandera aux élèves d'émettre une conjecture pour f, s et a et on la fera vérifier pour n = 6 et n = 7.

◆ Exercice n°7 p.110

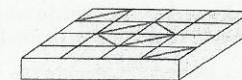


Les dessins 1, 2, 3, 4, 6 et 7 peuvent représenter ce cube.

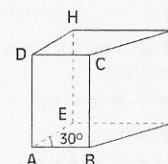
◆ Exercice n°8 p.110



◆ Exercice n°9 p.111



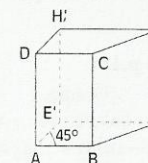
◆ Exercice n°10 p.111



- 1) Relever les dimensions sur la représentation et les exprimer en mm par exemple, en tenant compte du coefficient de réduction : $c = 0,5$.
 $AB = CD = 10$, $AD = BC = EH = FG = 15$,
 $EF = HG = 17$, $DH = AE = 8$ et $BF = CG = 15$.

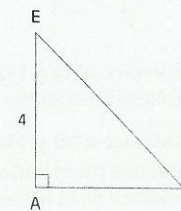
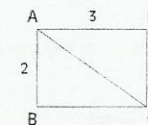
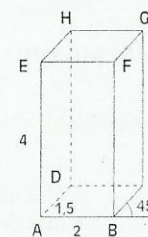
Commentaire

Il faudra bien faire remarquer aux élèves que l'inclinaison des fuyantes sur l'horizontale est la mesure de l'angle \widehat{BAE} dans le 1^{er} cas ($ABFE$ trapèze rectangle en A et E) et la mesure de l'angle $\widehat{BA'E'}$ dans le 2^e cas ($AB'F'E'$ trapèze rectangle en A et E') et non pas la mesure respective des angles de (BF) et (BF') avec la représentation de l'horizontale sur le dessin.



◆ Exercice n°11 p.111

- Choisir une mesure pour l'angle des fuyantes et un coefficient de réduction, par exemple : $a = 45^\circ$ et $c = 0,5$.
- Choisir un plan vertical de face : par exemple la face ABFE
- Représenter le solide en respectant les consignes.



◆ Exercice n°12 p.111

- Il s'agit du patron d'un cône, de base le disque de centre C et de rayon 4, de développement latéral le demi-disque de centre C' et de rayon 8, car :

$$\mathcal{P}_C = 2 \times \pi \times 4 = 8\pi \text{ et } \frac{1}{2} \mathcal{P}_{C'} = \frac{2 \times \pi \times 8}{2} = 8\pi.$$

◆ Exercice n°13 p.111

- Les bases des deux cônes sont des disques de périmètres respectifs :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4} \times 2\pi \times 6 = 2\pi \times 1,5$$

$$\text{et } \mathcal{P}' = \frac{3}{4} \times 2\pi \times 6 = 2\pi \times 4,5.$$

Donc les rayons respectifs des disques de base de ces deux cônes sont : 1,5 et 4,5 cm.

◆ Exercice n°14 p.111

• Dans le triangle ABC rectangle en A, la propriété de Pythagore permet d'écrire : $AB^2 + AC^2 = BC^2$, donc : $AC = 3$.
Par conséquent, la base du cône est un disque de rayon 3 cm et de périmètre 6π (en cm).

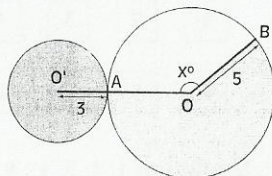
• La surface latérale du cône est un secteur circulaire (partie grisée) qui contient un demi-disque de centre O et de rayon 5 cm.

• x désigne la mesure (en °) de l'angle au centre \widehat{AOB} ,

donc : longueur de $\widehat{AB} = 2\pi \times 5 - 2\pi \times 5 \times \frac{x}{360} = 10\pi - \frac{\pi x}{36}$.

Or, la longueur de \widehat{AB} est le périmètre de base,

donc : $6\pi = 10\pi - \frac{\pi x}{36}$. Par conséquent : $x = 144$.



◆ Exercice n°15 p.111

• Volume de la boule : $V = \frac{4}{3} \pi \times 4^3 = \frac{256}{3} \pi$
 $V \approx 268$ ($\pi \approx 3,14$).

Volume du cube : $V' = 5^3 = 125$.

Volume du prisme : $V'' = \frac{1}{2} (4 \times 3) \times 16 = 96$.

• Aire de la sphère : $A = 4\pi \times 4^2 = 64\pi$
 $A \approx 201$ ($\pi \approx 3,14$).

Aire du cube : $A' = 6 \times 5^2 = 150$.

Aire du prisme :

$A'' = 2 \times \frac{1}{2} (4 \times 3) + (4 \times 16) + (5 \times 16) + (3 \times 16)$
 $A'' = 204$.

◆ Exercice n°16 p.111

Dessin 1

- Aire du disque coloré : $A_1 = 4\pi$ (en cm^2).

- Aire de la demi-sphère : $A_2 = 8\pi$ (en cm^2).

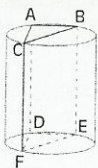
• L'aire du quart de sphère est égale à l'aire d'un disque de même centre que la sphère.

Dessin 2

- Aire de la surface colorée : $A'_1 = 4\pi$ (en cm^2).

- Aire du quart de sphère : $A'_2 = 4\pi$ (en cm^2).

◆ Exercice n°17 p.111-112



• Le triangle ABC est rectangle en A, car [CB] est un diamètre d'une base du cylindre.

• Volume du prisme

- Dans le triangle ABC rectangle en A, j'ai : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Donc : $16 + AC^2 = 25$.

Par conséquent : $AC = 3$.

- $V = \frac{AB \times AC}{2} \times AD = 60$ (en cm^3).

◆ Exercice n°18 p.112

• Volume du cylindre : $V = \pi$. • Volume de la demi-boule : $V' = \frac{2}{3} \pi$. • Volume du solide : $V'' = \frac{5}{3} \pi$.

◆ Exercice n°19 p.112

• Volume du cylindre : $V = 9\pi h$.

• Volume de la boule : $V' = 36\pi$.

$V = V'$ équivaut à $9\pi h = 36\pi$,

donc : $h = 4$.

• Aire totale du cylindre : $A = 6\pi (3 + h)$.

• Aire de la sphère : $A' = 36\pi$.

$A = A'$ équivaut à $6\pi (3 + h) = 36\pi$,

donc : $h = 3$.

☐ Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n°20 p.112

• $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ et $A = 4\pi r^2$,

donc : $V = A$ équivaut à $\frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^2$.

Par conséquent : $r = 3$ (en cm).

Par suite : $V = A = 36\pi$.

◆ Exercice n°21 p.112

• $V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$.

◆ Exercice n°22 p.112

	Balle : r	Balle : $3r$
Aire	$4\pi r^2$	$9 \times 4\pi r^2$
Volume	$\frac{4}{3} \pi r^3$	$27 \times \frac{4}{3} \pi r^3$

Indi a raison, car le volume de la balle est 27 fois plus petit que celui du ballon, $(3r)^3 = 27r^3$.

L'aire de la balle est 9 fois plus petite que celle du ballon, $(3r)^2 = 9r^2$.

◆ Exercice n°23 p.112

• Les deux boules sont fabriquées dans le même bois, le rapport des masses est égal au rapport des volumes,

donc : $(\frac{R}{r})^3 = \frac{64}{27}$. Par conséquent : $\frac{4}{3} = \frac{R}{r}$ (1).

• Je désigne par x , la quantité de peinture pour peindre la petite boule.

Le rapport des quantités de peinture est égal au rapport des aires des sphères,

donc : $\frac{240}{x} = (\frac{R}{r})^2$ (2).

Les égalités (1) et (2) permettent d'écrire : $\frac{240}{x} = (\frac{4}{3})^2$.

Par conséquent : $x = 135$ (en g).

◆ Exercice n°24 p.112

• Volume de la demi-sphère de rayon 1 : $V_1 = \frac{1}{2} (\frac{4}{3}) \pi = \frac{2}{3} \pi$.

• Volume du cylindre de hauteur $(h - 1)$ et de base un cercle de rayon 1 : $V_2 = (h - 1)\pi$.

• Volume du liquide : $V = V_1 + V_2 = \pi (h - \frac{1}{3})$.

Donc : $V = \pi$ équivaut à $\pi (h - \frac{1}{3}) = \pi$.

Par conséquent : $h = \frac{4}{3}$.

9. Droites et plans de l'espace

(pages 113 à 126 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

À partir de manipulations, d'observations, de descriptions et de représentations de solides de l'espace, ce chapitre vise essentiellement à :

- déterminer une droite, un plan et les représenter ;
- mettre en évidence des propriétés d'inclusion, de parallélisme et d'orthogonalité dans l'espace ;
- mettre en place un savoir-faire aussi utile pour le futur maçon que pour le futur élève de 2^e.

COMMENTAIRES

Les solides réalisés dans le chapitre 8, ainsi que leurs patrons seront utilisés pour des observations permettant de matérialiser dans l'espace les représentations dans le plan de ces solides. Les élèves seront amenés à passer du solide à sa représentation et inversement.

Toute axiomatique étant exclue, les propriétés d'inclusion, de parallélisme et d'orthogonalité seront admises sans démonstration à partir de considérations sur les sommets, les arêtes et les faces des solides réalisés.

La leçon 4, portant sur la notion de droites coplanaires, n'est qu'une première approche de cette notion très importante en raison de son utilisation fréquente dans la suite du cursus de l'élève en mathématiques.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Droites et plans

• Propriété

Dans l'espace, un plan peut être déterminé par :

- deux droites parallèles ;
- deux droites sécantes ;
- une droite et un point n'appartenant pas à cette droite ;
- trois points non alignés.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

• Définitions

- On dit qu'une droite et un plan sont sécants lorsqu'ils ont un point commun et un seul.
- On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.
- On dit qu'une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est parallèle à une droite de ce plan.

• Propriété

Si une droite est perpendiculaire en un point A à un plan, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan passant par A.

• Remarque

Une droite qui n'est pas sécante à un plan est parallèle à ce plan.

Positions relatives de deux plans

• Définitions

- On dit que deux plans sont parallèles lorsqu'ils admettent une droite perpendiculaire commune.
- On dit que deux plans sont sécants lorsqu'ils ont une droite commune.
- On dit que deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

• Propriétés

- Lorsque deux plans sont parallèles :
- ils n'ont aucun point commun ;
- toute droite contenue dans l'un de ces plans est parallèle à l'autre plan.

• Remarque

Lorsque deux plans ont au moins un point commun, ils ont une droite commune qui passe par ce point.

savoir-faire

- Sur des solides ou leurs représentations, déterminer un plan par :
 - deux droites parallèles ;
 - deux droites sécantes ;
 - une droite et un point n'appartenant pas à cette droite ;
 - trois points non alignés.
- Sur des solides ou leurs représentations, nommer :
 - des droites contenues dans un plan donné ;
 - des plans contenant une droite donnée ;
 - des droites perpendiculaires à une droite donnée et passant par un point donné.

- Sur des solides ou leurs représentations, reconnaître :
 - une droite contenue dans un plan ;
 - deux droites perpendiculaires ;
 - deux droites parallèles ;
 - une droite sécante à un plan ;
 - une droite perpendiculaire à un plan ;
 - une droite parallèle à un plan.

- Sur des solides ou leurs représentations, reconnaître :
 - deux plans parallèles ;
 - deux plans sécants ;
 - la droite commune à deux plans sécants ;
 - deux plans perpendiculaires.

Positions relatives de deux droites

• Propriété

Dans l'espace, si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

• Remarque

Les propriétés de la géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

• Vocabulaire

- Droites coplanaires.
- Droites non coplanaires.

• Sur des solides ou leurs représentations, reconnaître :

- des droites coplanaires ;
- des droites non coplanaires.

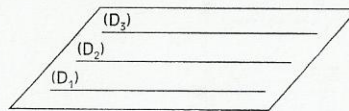
EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

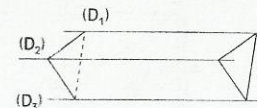
♦ Exercice 4.a p.122

• Cas de trois droites parallèles deux à deux

- Si les trois droites sont dans un même plan, elles déterminent un seul plan, le plan contenant ces trois droites.

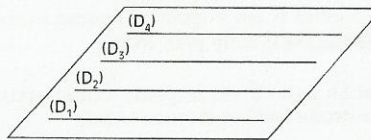


- Si les trois droites ne sont pas dans un même plan, elles déterminent trois plans sécants deux à deux suivant ces trois droites.

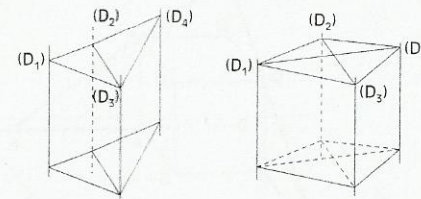


• Cas de quatre droites parallèles deux à deux

- Si les quatre droites sont dans un même plan, elles déterminent un seul plan, le plan contenant ces quatre droites.

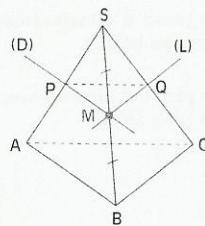


- Si les quatre droites ne sont pas dans un même plan, elles déterminent quatre ou six plans.



Exercices d'entraînement

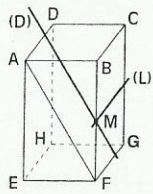
♦ Exercice n°2 p.123



- a) Les trois points non alignés M, A et B déterminent le plan (SAB). Les droites parallèles (AB) et (D) déterminent un plan et un seul, or le point M appartient à (D), donc ce plan est le plan (SAB). Par conséquent (D) est contenue dans le plan (SAB).
Le point P est le milieu de [SA], car dans le triangle SAB, la droite (D) passe par le milieu M de [SB] et est parallèle à (AB), donc elle passe par le milieu P du troisième côté [SA].
c) Je justifie de même que Q est le milieu de [SC].
La droite (PQ) est parallèle à la droite (AC), car dans le triangle SAC, la droite (PQ) passe par les milieux respectifs des côtés [SA] et [SC], donc elle est parallèle au support du troisième côté [AC].

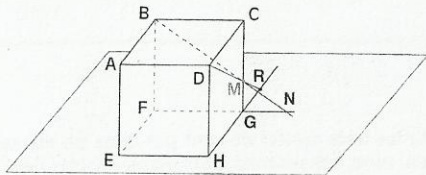
d) $\mathcal{P}_{MPQ} = MP + PQ + QM = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} CA = 4$ (la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est égale à la moitié de la longueur du 3^e côté.)

◆ Exercice n°3 p.123

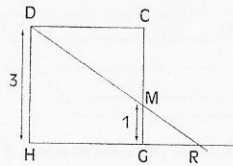
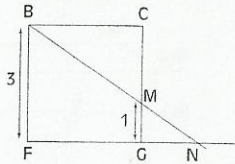


- La droite (D) est contenue dans le plan (ABF).
- La droite (L) est contenue dans le plan (BFG) et est perpendiculaire à (BF) en M, donc (L) est parallèle à (FG).

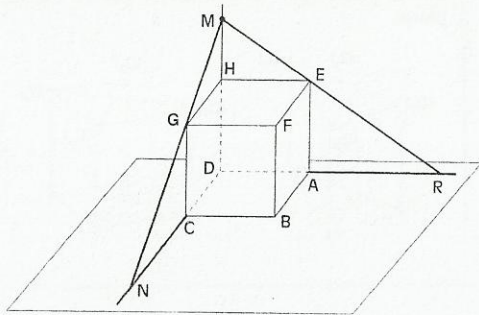
◆ Exercice n°4 p.123



- a) Les droites (BM) et (FG) sont contenues dans le plan (BCG), car les points B, M, F et G appartiennent à ce plan.
Le point N est le point d'intersection de la droite (BM) et du plan (EHG).
- b) Le point R est le point d'intersection de la droite (DM) et du plan (EHG).

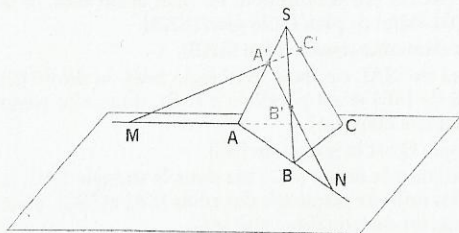


◆ Exercice n°5 p.123



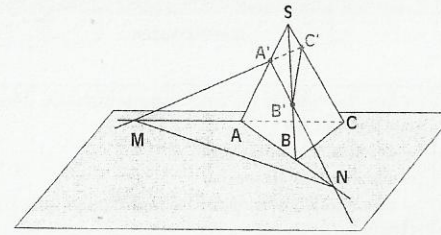
- a) Les droites (MG) et (DC) sont contenues dans le plan (HCG), car les points M, G, D et C appartiennent à ce plan.
Le point N est le point d'intersection de la droite (MG) et du plan (ABC).
- b) Le point R est le point d'intersection de la droite (ME) et du plan (ABC).

◆ Exercice n°6 p.124



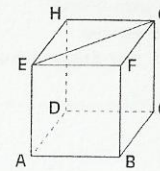
- a) Le point M est le point d'intersection de la droite (C'A') et du plan (ABC).
- b) Le point N est le point d'intersection de la droite (A'B') et du plan (ABC).

◆ Exercice n°8 p.124



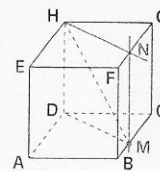
- a) La droite (A'B') est la droite d'intersection des plans (A'B'C') et (SAB).
La droite (B'C') est la droite d'intersection des plans (A'B'C') et (SBC).
La droite (A'C') est la droite d'intersection des plans (A'B'C') et (SCA).
- c) Les points M et N sont deux points communs aux plans (A'B'C') et (ABC).
La droite (MN) est la droite d'intersection des plans (A'B'C') et (ABC).

◆ Exercice n°9 p.124



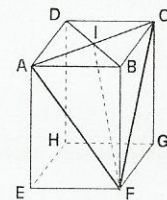
- La droite (EG) est contenue dans le plan (EFG), mais elle n'est pas perpendiculaire à (BCG).
- Les plans (EFG) et (BCG) sont perpendiculaires, car le plan (EFG) contient la droite (HG) qui est perpendiculaire au plan (BCG).
- Les plans (HFB) et (ABC) sont perpendiculaires, car le plan (HFB) contient la droite (FB) qui est perpendiculaire au plan (ABC).
- Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles, car ils admettent pour droite perpendiculaire commune, la droite (FG).

◆ Exercice n°10 p.124



- Le plan (HDM) est perpendiculaire au plan (ABC), car le plan (HDM) contient la droite (HD) qui est perpendiculaire au plan (ABC).
- La droite d'intersection des plans (HDM) et (ABC) est la droite (DM).
- La droite (HN) est contenue dans le plan (HDM), car : (HN) // (DM).
- La droite (MN) est la droite d'intersection des plans (HDM) et (BFG), car les points M et N appartiennent à (HDM) et à (BFG).

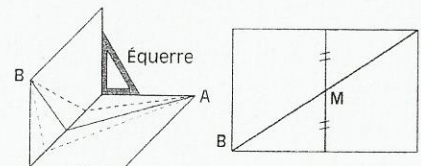
◆ Exercice n°14 p.125



- Les triangles AEF et CGF sont superposables ($AE = CG$, $EF = GF$ et $\widehat{AEF} = \widehat{CGF} = 90^\circ$), donc : $FA = FC$.
- Par conséquent le triangle ACF est isocèle en F.
- ABCD est un carré, donc les supports de ses diagonales sont perpendiculaires, par conséquent (AC) est perpendiculaire à (BD).
- Le point I est le milieu de [AC] (les diagonales du carré ABCD se coupent en leur milieu I), donc (IF) est la médiane du triangle FAC qui passe par le sommet principal. Or le triangle FAC est isocèle en F, donc (IF) est aussi la hauteur de ce triangle passant par F, par conséquent (IF) est perpendiculaire à (AC).

▣ Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n°15 p.125

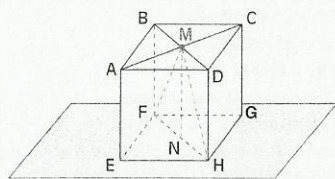


- Le chemin le plus court pour la fourmi est le chemin qui passe par le point M, milieu de la pliure ([AB] est une diagonale du rectangle, donc le plus court chemin de A à B).

◆ Exercice n°16 p.125

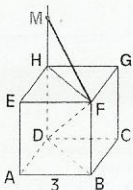
- Les droites (AE) et (CG) sont parallèles, donc elles définissent un plan, par conséquent les points A, C, G et E appartiennent à un même plan, le plan (AEG).
- Le plan (AEG) est perpendiculaire au plan (EHG), car le plan (AEG) contient une droite (la droite (AE)) perpendiculaire au plan (EHG).

◆ Exercice n°18 p.126



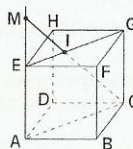
On a : (DH) \perp (EHG)
 or : (MN) // (DH) ; car (MN) est un axe du rectangle BDHF
 donc : (MN) \perp (EHG)

◆ Exercice n°19 p.126



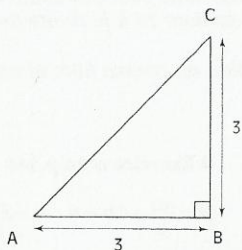
- a) Les points H et F sont deux points communs aux plans (MDF) et (EFG), donc la droite (HF) est la droite d'intersection des plans (MDF) et (EFG).
 b) La droite (FB) est la droite d'intersection des plans (MDF) et (CGF). La droite (HD) est la droite d'intersection des plans (MDF) et (EAH). La droite (BD) est la droite d'intersection des plans (MDF) et (ABC).

◆ Exercice n°20 p.126



- a) Les points M, E, G, C et A appartiennent à un même plan, (MAC) ou (ECG) désignent ce plan.
 La droite (EG) est la droite d'intersection des plans (ECG) et (EFG), donc des plans (MAC) et (EFG).
 Le point d'intersection de la droite (MC) et du plan (EFG) est le point I, intersection des droites (EG) et (MC), car I appartient au plan (MAC) et au plan (EFG), donc à leur droite d'intersection (EG).

b) Construction de [AC]

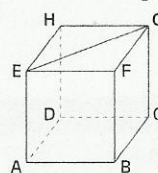


◆ Exercice n°17 p.125

- La droite (AC) est perpendiculaire au plan (BDH), car (AC) est perpendiculaire à (BD) (les diagonales du carré ABCD sont perpendiculaires), (AC) est perpendiculaire à (IJ) (I et J sont les centres respectifs des carrés ABCD et EFGH) et les droites (AC) et (IJ) sont sécantes en I.
- Les plans (BDH) et (ACG) sont perpendiculaires, car le plan (ACG) contient la droite (AC) qui est perpendiculaire au plan (BDH).

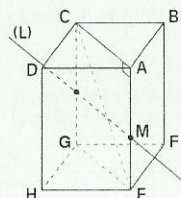
- a) Le quadrilatère BDHF est un rectangle, car :
 $BF = DH$, $BD = FH$ et $\widehat{BFH} = 90^\circ$.
 b) Le rectangle BDHF admet un axe de symétrie (L) qui passe par le milieu M de [BD].
 Par la symétrie $S_{(L)}$, le point H est l'image de F et M est sa propre image, donc [MH] est l'image de [MF], donc $MF = MH$.
 Par conséquent le triangle FMH est isocèle en M.

◆ Exercice n°22 p.126



- La droite (EG) contenue dans le plan (EFG) n'est pas parallèle à la droite (AB), car (EG) est parallèle à (AC) et (AC) non parallèle à (AB).
- Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles, donc toutes les droites contenues dans le plan (EFG) sont parallèles au plan (ABC).
 Par conséquent, je ne peux pas trouver une droite contenue dans le plan (EFG) qui ne soit pas parallèle au plan (ABC).

◆ Exercice n°23 p.126



Le quadrilatère ACGE est un rectangle (cf ex. n° 18 p.126).

Donc, pour tracer la droite perpendiculaire à (EA) passant par M et contenue dans le plan (CAE), il me suffit de tracer la droite (L) parallèle à (AC) passant par M.

10. Calcul littéral

(pages 129 à 144 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- familiariser les élèves avec des expressions littérales ;
- organiser des calculs avec des expressions littérales.

COMMENTAIRES

En classe de 6^e et 5^e, on peut dire que les élèves ont été initiés au calcul littéral par l'utilisation des formules (formules de périmètre, d'aire, de volume, de vitesse, ...).

Cette première initiation a permis de donner un sens aux lettres dans une expression.

En classe de 4^e, il est question d'amener l'élève à manipuler des expressions littérales au sens général du terme, sans nécessairement que les lettres aient un sens.

Le professeur partira de l'organisation du calcul numérique pour présenter celle du calcul littéral. Il pourra ainsi reprendre en les formalisant au besoin, les règles essentielles du calcul numérique sur les nombres relatifs ; ces règles sont aussi celles du calcul littéral.

Ainsi ce chapitre donnera l'occasion :

- de formaliser les règles de calcul sur les sommes, les produits et les puissances déjà vues en 5^e et de compléter ces règles ;
- de généraliser les règles de priorité sur l'addition (la soustraction), la multiplication et sur le calcul des puissances.

Les produits remarquables et les factorisations sont abordés en classe de 4^e et feront l'objet d'une étude plus développée en classe de 3^e, toutefois on les mettra en évidence en les visualisant à l'aide d'un support géométrique, ceci étant un des moyens de remédier à l'une des erreurs trop fréquemment rencontrées « $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ».

Le professeur devra graduer la difficulté des exemples et des exercices afin d'assurer aux élèves une parfaite maîtrise des techniques de base du calcul littéral. En effet, il faut être conscient qu'une maîtrise insuffisante induira les mêmes erreurs jusqu'en fin de second cycle.

Ce chapitre est aussi l'occasion d'utiliser les développements d'un produit et les produits remarquables pour faire faire du calcul rapide et du calcul mental aux élèves (rubrique calcul rapide p.140 et exercice n° 31 p.143) en leur faisant dégager des méthodes simples pour, par exemple :

- calculer le carré des nombres terminés par 5, 1 ou 9 ;
- calculer des produits du type : 29×31 , 61×59 ou 68×72 ;
- calculer les produits de deux nombres terminés par 1.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Expressions littérales

• Vocabulaire

Programme de calcul ; schéma de calcul ; expression littérale ; valeur numérique d'une expression littérale.

• Remarques

Pour obtenir la valeur numérique d'une expression littérale, on remplace ses lettres par les nombres donnés.

• Pour décrire un calcul, on peut utiliser : un programme de calcul, une formule, une phrase ; ceux-ci pouvant être visualisés par un schéma de calcul.

Sommes algébriques

• Vocabulaire

Réduire une somme, c'est la transformer en une somme ayant moins de termes.

• Règle

Pour calculer une somme algébrique, on peut déplacer ou regrouper certains termes de cette somme.

• Règle de suppression des parenthèses

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

savoir-faire

• Être capable d'exprimer une formule par une phrase, réaliser le programme de calcul donné par une formule.

• Reconnaître et compléter un schéma de calcul.

• Calculer la valeur numérique d'une expression littérale en remplaçant les lettres par des nombres.

• Calculer une somme algébrique en regroupant ou en déplaçant des termes de la somme.

• Supprimer ou placer des parenthèses dans une somme.

• Réduire une somme algébrique.

Produits et puissances

• Règle

Pour calculer un produit, on détermine son signe, on peut déplacer ou regrouper certains facteurs, avant de calculer le produit de leurs distances à zéro.

• Vocabulaire

Développer un produit, c'est l'écrire sous forme d'une somme.

• Propriétés

a , x et y sont des nombres relatifs.

$$a(x + y) = ax + ay ; a(x - y) = ax - ay ;$$

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

• Définition

a est un nombre relatif, n est un nombre entier naturel plus grand que 1 ; a^n désigne le produit de n facteurs égaux au nombre a .

• Propriétés

a et b sont des nombres relatifs, m et n sont des nombres entiers naturels plus grand que 1.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n ; a^m \times a^n = a^{m+n} ; (a^m)^n = a^{m \times n}$$

• Déterminer le signe d'un produit.

• Calculer un produit en déplaçant ou en regroupant des facteurs du produit.

• Utiliser les égalités suivantes pour développer un produit :

$$a(x + y) = ax + ay ;$$

$$a(x - y) = ax - ay ;$$

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

• Utiliser les formules sur les puissances.

Produits et puissances (suite)

- si $m > n$, alors $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ($a \neq 0$)

- si $m < n$, alors $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ ($a \neq 0$)

- si n est pair : $(-a)^n = a^n$;

- si n est impair : $(-a)^n = -a^n$

Calcul littéral

• Règle

En l'absence de parenthèses :

- la multiplication est prioritaire sur l'addition et la soustraction ;

- le calcul de puissance est prioritaire sur la multiplication.

• Propriétés

a et b sont des nombres relatifs.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 ;$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

• Vocabulaire

- Termes d'une somme ; facteurs d'un produit.

- Factoriser une somme, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs.

• Etablir les égalités :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 ;$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

• Préciser les termes d'une somme.

• Préciser les facteurs d'un produit.

• Écrire une somme ou une différence sous forme d'un produit de facteurs en utilisant les égalités :

$$a(x + y) = ax + ay ; a(x - y) = ax - ay$$

• Factoriser des expressions littérales en utilisant des produits remarquables.

• Développer et réduire des expressions littérales comportant des puissances.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n°31 p.143

$$\bullet (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25.$$

$$35^2 = (10 \times 3 + 5)^2$$

$$65^2 = (10 \times 6 + 5)^2$$

$$85^2 = (10 \times 8 + 5)^2$$

$$35^2 = 100 \times 3 \times 4 + 25 = 1\ 225$$

$$65^2 = 100 \times 6 \times 7 + 25 = 4\ 225$$

$$85^2 = 100 \times 8 \times 9 + 25 = 7\ 225$$

Commentaires

• On pourra essayer de faire dégager aux élèves une méthode de calcul rapide pour les carrés des nombres de deux chiffres terminés par 5 en les amenant, par des questions appropriées, à faire les constatations suivantes sur les trois nombres 35, 65, 85 et leurs carrés :

1) Les carrés de ces nombres se terminent par 25. 2) Les deux premiers chiffres du carré de ces nombres s'obtiennent en multipliant le chiffre des dizaines du nombre par son suivant.

On fera vérifier pour 15^2 , 25^2 , 45^2 , 55^2 , 75^2 et 95^2 .

• On pourra leur montrer sur des exemples que cette méthode reste vraie pour des nombres à trois chiffres (le carré de 125 s'obtient en multipliant 12 par 13 et en mettant 25 à la droite du nombre obtenu, donc $125^2 = 15\ 625$).

• En utilisant la méthode précédente et les produits remarquables, on pourra faire effectuer aux élèves des calculs rapides du type : 24^2 , 26^2 , 34^2 , 36^2 , ...

◆ Exercice n°32 p.144

$$\mathcal{P} = 2(x + 8) ; \mathcal{A} = 3(x + 5).$$

◆ Exercice n°33 p.144

$$\mathcal{A} = (x + 1)x = x^2 + x.$$

◆ Exercice n°34 p.144

$$\mathcal{P} = \frac{\pi a}{2} + 2b + a ; \mathcal{A} = \frac{\pi a^2}{8} + ab.$$

◆ Exercice n°35 p.144

$$A = x^2 - \frac{\pi x^2}{8} = \left(1 - \frac{\pi}{8}\right) x^2.$$

◆ Exercice n°37 p.144

$$\bullet \mathcal{P}_R = 2(b+2); \mathcal{A}_R = 2b; \mathcal{P}_{T_2} = 3(b+2).$$

$$\bullet \mathcal{P}_{T_1} = a+b+9; \mathcal{A}_{T_1} = \frac{a(b+5)}{2}.$$

$$\bullet \mathcal{P}_{KLMNPQ} = a+2b+15.$$

◆ Exercice n°39 p.144

DFE et ACB sont rectangles respectivement en F et C.

$$DF = b \text{ et } FE = c$$

$$\bullet \text{ Aire totale du prisme droit : } A = bc + 4,5(a+b+c).$$

$$\bullet \text{ Volume du prisme droit : } V = 2,25bc.$$

◆ Exercice n°36 p.144

$$1) \mathcal{P} = 4x - 2y + 2z; \mathcal{A} = (x-y)(x+z). \quad 2) \mathcal{P} = 21; \mathcal{A} = 24,5.$$

◆ Exercice n°38 p.144

$$\bullet A = 10x + 12 = 2(5x + 6).$$

$$\bullet V = 6x.$$

◆ Exercice n°40 p.144

$$\bullet A = 10,8x + 4.$$

$$\bullet V = 2x.$$

$$\bullet m = 15,6x \text{ (en tonnes).}$$

11. Nombres rationnels

(pages 145 à 160 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- entretenir et consolider la pratique de la simplification des fractions ;
- présenter le calcul du PGCD et du PPCM de deux nombres ;
- présenter les nombres rationnels ;
- faire acquérir des techniques de calcul et de comparaison sur les nombres rationnels.

COMMENTAIRES

Dans ce chapitre, on entretiendra et on consolidera les notions abordées en 6^e et complétées en 5^e. L'utilisation du PGCD et du PPCM ne sera exigée, ni pour la simplification, ni pour la réduction au même dénominateur.

La présentation des nombres rationnels se fait ici de manière simple et naturelle, à partir des fractions : « un nombre rationnel est une fraction ou l'opposé d'une fraction ».

D'autres écritures des nombres rationnels sont alors introduites par le quotient de nombres entiers relatifs.

En effet, l'élève doit savoir que le nombre $\frac{2,5}{-3,2}$ par exemple, est un nombre rationnel, car il est égal à $-\frac{35}{32}$ qui est l'opposé de la fraction $\frac{25}{32}$.

Cependant, on peut trouver des quotients de nombres qui ne sont pas des nombres rationnels.

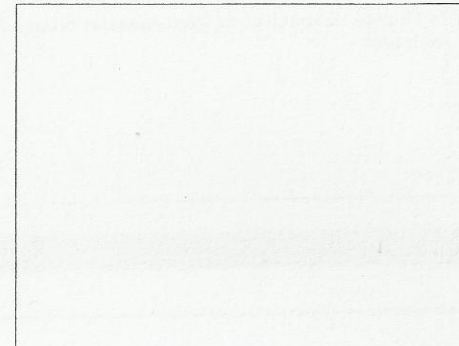
$$\frac{\pi}{3} \text{ par exemple.}$$

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

savoir-faire

Fractions



- Simplifier une fraction :
 - en utilisant les caractères de divisibilité ;
 - en reconnaissant un diviseur commun au numérateur et au dénominateur ;
 - en utilisant la décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.
- Rendre irréductible une fraction.
- Réduire des fractions au même dénominateur :
 - en utilisant le produit des dénominateurs ;
 - en recherchant les premiers multiples communs non nuls des dénominateurs ;
 - en décomposant les dénominateurs en produit de facteurs premiers.

P.G.C.D - P.P.C.M

• Règles

- Le PGCD de deux nombres entiers naturels est le produit des facteurs communs aux décompositions des deux nombres, chaque facteur étant affecté du plus petit exposant apparu dans les deux décompositions.
- Le PPCM de deux nombres entiers naturels est le produit de tous les facteurs des décompositions des deux nombres, chaque facteur étant affecté du plus grand exposant apparu dans les deux décompositions.

- Déterminer des multiples communs de deux nombres entiers naturels.
- Calculer le PGCD de deux nombres.
- Calculer le PPCM de deux nombres.

Nombres rationnels

• Définitions

- Un nombre rationnel est un nombre égal à une fraction ou à l'opposé d'une fraction.
- a et b sont des nombres entiers relatifs et b est non nul ; on appelle quotient de a par b le nombre rationnel q tel que $a = bq$.

• Propriété

a et b sont des nombres entiers relatifs et b est non nul :

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

• Vocabulaire et notation

\mathbb{Q} est l'ensemble des nombres rationnels.

L'inclusion : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

- Distinguer, sur une liste de nombres, les nombres décimaux relatifs et les nombres rationnels.
- Passer de l'écriture d'un quotient de nombres décimaux à l'écriture d'un quotient de nombres entiers.
- Simplifier (éventuellement) un nombre rationnel quand il est écrit comme un quotient.
- Reconnaître des nombres rationnels égaux.
- Réduire des nombres rationnels au même dénominateur.
- Comparer des nombres rationnels directement ou éventuellement en utilisant une droite graduée.

Opérations sur les nombres rationnels

• Règle

- Pour calculer la somme (ou la différence) de deux nombres rationnels écrits sous forme de fraction ou d'opposés de fractions :
 - on les réduit à un même dénominateur positif ;
 - on calcule la somme (ou la différence) des numérateurs des quotients obtenus.

- Calculer :
 - une somme de nombres rationnels ;
 - une différence de nombres rationnels.
 - un produit de nombres rationnels.
- Utiliser les propriétés des puissances pour :
 - faire des calculs ;

Opérations sur les nombres rationnels (suite)

- **Propriété**
 a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs,
 b et d sont non nuls ; $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.
- **Définitions**
 $-a$ et b sont des nombres relatifs non nuls.
 on a $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$, on dit que $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont des
 nombres rationnels inverses l'un de l'autre.
 $-$ On appelle quotient du rationnel r par le rationnel
 non nul s , le nombre rationnel q tel que $r = sq$.

- $-$ simplifier des écritures : $\frac{r^m}{r^n}$.
- Écrire l'inverse d'un nombre rationnel sous forme de fraction ou de l'opposé d'une fraction.
- Calculer le quotient de deux nombres rationnels non nuls.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices d'entraînement

♦ **Exercice n°16 p.154**

• $\frac{2\ 151}{3\ 024} = \frac{239}{336}$, $\frac{2\ 345}{3\ 240} = \frac{469}{648}$, $336 = 2^4 \times 3 \times 7$, $648 = 2^3 \times 3^4$.

Donc PPCM (336 ; 648) = $2^4 \times 3^4 \times 7 = 9\ 072$.

$\frac{2\ 151}{3\ 024} = \frac{6\ 453}{9\ 072}$ et $\frac{2\ 345}{3\ 240} = \frac{6\ 566}{9\ 072}$, donc $\frac{2\ 151}{3\ 024} < \frac{2\ 345}{3\ 240}$.

• $10\ 368 = 2^7 \times 3^4$ et $23\ 328 = 2^5 \times 3^6$, donc PPCM (10 368 ; 23 328) = $2^7 \times 3^6 = 93\ 312$.

$\frac{1\ 225}{10\ 368} = \frac{11\ 025}{93\ 312}$ et $\frac{2\ 695}{23\ 328} = \frac{10\ 780}{93\ 312}$, donc $\frac{2\ 695}{23\ 328} < \frac{1\ 225}{10\ 368}$.

Exercices d'approfondissement

♦ **Exercice n°44 p.157**

Dans les quatre cas : PGCD (a ; b) \times PPCM (a ; b) = $a \times b$.

♦ **Exercice n°45 p.157**

Dans les quatre cas, le PGCD des quotients respectifs de a et b par le PGCD(a ; b) est égal à 1.

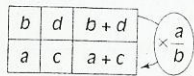
♦ **Exercice n°46 p.157**

$504 = 2^3 \times 7 \times 9, 492 = 2^2 \times 3 \times 41$, PPCM (504 ; 492) = $2^3 \times 3 \times 7 \times 9 \times 41 = 61\ 992$.

$\frac{\text{PPCM}(504 ; 492)}{504} = \frac{2^3 \times 3 \times 7 \times 9 \times 41}{2^3 \times 7 \times 9} = 3 \times 41 = 123$.

$\frac{\text{PPCM}(504 ; 492)}{492} = \frac{2^3 \times 3 \times 7 \times 9 \times 41}{2^2 \times 3 \times 41} = 2 \times 7 \times 9 = 126$.

♦ **Exercice n°48 p.157**



$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

Si x et y vérifient : $\frac{x}{7} = \frac{y}{5}$ et $x + y = 72$,

on a alors : $\frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{x+y}{12} = \frac{72}{12} = 6$.

Donc : $x = 42$ et $y = 30$.

♦ **Exercice n°49 p.157**

Je désigne par x la contenance en litres du réservoir. Il est vide aux $\frac{2}{3}$, donc il est plein au $\frac{1}{3}$.

Donc : $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}x = 20$; $x = 48$.

♦ **Exercice n°50 p.157**

Je désigne par k, m et n les parts respectives de Kade, Madion et Ngaba.

J'ai : $k = \frac{7}{15} \times 75 = 35$, $m = \frac{4}{5} \times 35 = 28$

et $n = 75 - 35 - 28 = 12$.

♦ **Exercice n°52 p.157**

Je désigne par c la mesure du côté d'une dalle exprimé en cm et N le nombre de dalles. Je suppose que c est un nombre entier naturel.

On ne doit pas découper les dalles, donc c doit être un diviseur commun à la largeur et la longueur de la pièce rectangulaire exprimées en cm et de plus c doit être compris entre 9 et 31.

- Les diviseurs de 900 compris entre 9 et 31 sont : 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30.
- Les diviseurs de 600 compris entre 9 et 31 sont : 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30.

Donc les différentes possibilités sont : $c = 10$ et $N = 5400$, $c = 12$ et $N = 3750$, $c = 15$ et $N = 2400$, $c = 20$ et $N = 1350$, $c = 25$ et $N = 865$, $c = 30$ et $N = 600$.

♦ **Exercice n°54 p.157**

• Je désigne par N le nombre de dents dont auront tourné chacune des roues après être revenues à leur position de départ, $N = \text{PPCM}(24 ; 36 ; 54)$.

• J'ai : $24 = 2^3 \times 3, 36 = 2^2 \times 3^2$ et $54 = 2 \times 3^3$.

Donc : PPCM (24 ; 36 ; 54) = $2^3 \times 3^3 = 216$.

• La première roue a tourné de 216 dents, donc elle a effectué 9 tours ($\frac{216}{24} = 9$).

Temps (en mn) mis par les roues pour revenir à leur position de départ : 18 secondes ($\frac{9}{30} = 18$).

♦ **Exercice n°55 p.157**

• 1 ligne = $\frac{1}{12}$ pouce, 1 pouce = $\frac{1}{12}$ pied, 1 ligne = $\frac{1}{144}$ pied et 1 pied = $\frac{1}{3}$ yard.

• 3 yards 2 pieds 5 pouces = $3 + 2 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{3}$ yards = $\frac{137}{36}$ yards.

• 1 yard 7 pieds 6 pouces 4 lignes = $3 \times 12 + 7 \times 12 + 6 + \frac{4}{12}$ pouces = $\frac{379}{3}$ pouces.

• 1 mille 232 yards 1100 pieds = $1 + 232 \times \frac{1}{1760} + 1100 \times \frac{1}{1760} \times \frac{1}{3}$ milles = $\frac{1\ 769}{1\ 320}$ milles.

♦ **Exercice n°56 p.158**

Je désigne par x le nombre d'élèves de la classe.

J'ai l'équation : $\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{6}x + 4 = x$.

Par conséquent : $\frac{20+3+5}{30}x + 4 = x$; $x = 60$.

♦ **Exercice n°57 p.158**

• Je désigne par x le nombre de places assises dans l'avion. J'ai : $\frac{3}{4}x - 45 + 27 = \frac{2}{3}x$.

Par conséquent : $(\frac{3}{4} - \frac{2}{3})x = 18$; $x = 216$.

• Juste avant l'escale de Ouagadougou, il y a 144 passagers ($\frac{2}{3} \times 216 = 144$),

donc, 97 passagers débarquent à Ndjamena ($144 - 72 + 25 = 97$).

♦ **Exercice n°58 p.158**

a) Notation du devoir : 20 pts ($4 \times 1 + 5 \times \frac{3}{4} + 20 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{4} = 20$).

b) Je désigne par N la note d'Ali : $N = 10,5 (2 \times 1 + 3 \times \frac{3}{4} + 11 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 10,5)$.

c)

	1 pt	3/4 pt	1/2 pt	1/4 pt
Tableau des cas possibles pour Mamadou	1	0	1	0
	1	0	0	2
	0	2	0	0
	0	1	1	1
	0	1	0	3
	0	0	3	0
	0	0	2	2
	0	0	1	4
	0	0	0	6

d)

	1 pt	3/4 pt	1/2 pt	1/4 pt
Tableau des cas possibles pour Aïcha	1	0	0	1
	0	1	1	0
	0	1	0	2
	0	0	2	1
	0	0	1	3
	0	0	0	5

◆ Exercice n°59 p.158

6 155 est le nombre d'électeurs inscrits sur les listes électorales et 124 le nombre de bulletins nuls.

a) Nombre d'abstentions : $\frac{20}{100} \times 6\ 155 = 1\ 231$; nombre de votants : $6\ 155 - 1\ 231 = 4\ 924$.

b) Nombre de suffrages exprimés : $4\ 924 - 12 = 4\ 800$.

c) 1^{re} liste : $\frac{42}{100} \times 4\ 800 = 2\ 016$; 2^e liste : $\frac{35}{100} \times 4\ 800 = 1\ 680$; 3^e liste : $\frac{23}{100} \times 4\ 800 = 1\ 104$.

◆ Exercice n°60 p.158

a) Quantité de potion (en ℓ) préparée par le guérisseur : $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{31}{40}$.

Contenance du flacon (en ℓ) : $0,75 = \frac{3}{4} = \frac{30}{40}$. Donc, le flacon est insuffisant pour contenir la potion.

b) Fraction totale de potion prescrit par le guérisseur les cinq premiers jours : $\frac{21}{20}$.

($\frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{21}{20}$). Donc, Adou n'aura pas assez de potion. En respectant les doses prescrites,

Adou devra consommer les $\frac{19}{20}$ de la potion les quatre premiers jours et le $\frac{1}{20}$ restant, le 5^e jour.

◆ Exercice n°61 p.159

a) Pourcentage d'autres gaz : $100 - 79,2 - 20,7 - 0,03 = 0,07$.

Quantité (en ml) de gaz carbonique inspiré (par litre d'air inspiré) : $1\ 000 \times \frac{0,03}{100} = 0,3$.

b) Volume d'air inspiré en une journée (en m³) : $\frac{60}{1\ 000} \times (6 \times 8 + 7 \times 7 + 5 \times 8 + \frac{5}{2} \times 14 + \frac{3}{2} \times 43) = 14,19$.

Volume de gaz carbonique inspiré en une journée (en ℓ) : $\frac{1\ 419}{1\ 000} \times 0,3 = \frac{4\ 257}{1\ 000} = 4,257$.

◆ Exercice n°62 p.159

a) F_1, F_2, F_3, F_4 représentent respectivement : 5,85 % ($\frac{9 \times 13}{40 \times 50} = \frac{117}{2\ 000}$), 11,7 %

($\frac{13 \times 18}{40 \times 50} = \frac{117}{1\ 000}$), 21,6 % ($\frac{18 \times 24}{40 \times 50} = \frac{27}{125}$) et 60 % ($\frac{30 \times 40}{40 \times 50} = \frac{3}{5}$) du format F_5 .

b) F_1, F_2, F_3 représentent respectivement : $\frac{39}{400}$ ($\frac{9 \times 13}{30 \times 40}$), $\frac{39}{200}$ ($\frac{13 \times 18}{30 \times 40}$) et $\frac{9}{25}$ ($\frac{18 \times 24}{30 \times 40}$) de F_4 .

◆ Exercice n°63 p.159

$$\frac{8}{3} = 2 \times \frac{4}{3} ; \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} ; \frac{5}{2} = \frac{5}{4} \times 2.$$

◆ Exercice n°64 p.159

1) \mathcal{A} est l'aire du document original : $\mathcal{A} = L \times l$.

Dans le cas où la longueur et la largeur du document photocopié sont deux fois plus petites que

celles de l'original, l'aire \mathcal{A}' du document photocopié est : $\mathcal{A}' = \frac{L}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{L \times l}{4}$.

Donc le rapport de réduction est $\frac{1}{4}$ ($\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \frac{1}{4}$) et non $\frac{1}{2}$.

2) a)

Format	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
Longueur	1 189	841	594	420	297
Largeur	841	594	420	297	210

b) A_1, A_2 et A_3 représentent respectivement

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$ de A_0 et A_4, A_5 et A_6 représentent

respectivement $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$ de A_2 .

d) Rapport de réduction de A_3 à A_5 : 25 %. Rapport d'agrandissement de A_3 à A_2 : 200 %.

◆ Exercice n°65 p.160

Longueur et largeur du format A_5 : 21 cm et 14,9 cm. J'ai : $\frac{21}{25,7} \approx 0,8171$ et $\frac{14,9}{19,3} \approx 0,772$.

Donc pour faire tenir respectivement la largeur et la longueur du document dans la largeur et la longueur d'une feuille de format A_5 , il faut employer 60 % comme rapport de réduction ($0,772^2 \approx 0,596$).

▣ Exercices de recherche

◆ Exercice n°66 p.159

• Je désigne par a la longueur de l'arête de ces boîtes en cm, donc : $a = \text{PGCD}(150 ; 165 ; 105)$.

• $150 = 2 \times 3 \times 5^2, 165 = 3 \times 5 \times 11$ et $105 = 3 \times 5 \times 7$, donc : $a = 3 \times 5 = 15$.

• Nombre de boîtes nécessaires pour remplir la caisse : $770 \left(\frac{150}{15} \times \frac{165}{15} \times \frac{105}{15} = 10 \times 11 \times 7 \right)$.

◆ Exercice n°67 p.159

$16 = 2^4, 45 = 5 \times 3^2$ et $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ (2 mn 20s = 140 s).

a) Le 1^{er} et 2^e signal seront de nouveau émis simultanément après des durées (en s) qui sont des multiples communs de 16 et 45, donc pour la 1^{re} fois, après 720 secondes, soit à *minuit 12 mn*.

• Le 1^{er} et 3^e signal seront de nouveau émis simultanément après des durées (en s) qui sont des multiples communs de 16 et 140, donc pour la 1^{re} fois, après 560 secondes, soit à *minuit 9 mn 20 s*.

• Le 2^e et 3^e signal seront de nouveau émis simultanément après des durées (en s) qui sont des multiples communs de 45 et 140, donc pour la 1^{re} fois, après 1 260 secondes, soit à *minuit 21 mn*.

b) Les trois signaux seront émis simultanément après des durées (en s) qui sont des multiples communs aux trois nombres 16, 45 et 145, donc pour la 1^{re} fois après 5 040 secondes, soit à 1 h 24 mn.

◆ Exercice n°68 p.159

Après le 4^e rebond, la hauteur h_4 mesurée (en m) doit vérifier : $(\frac{2}{3})^4 < h_4 < (\frac{3}{4})^4$, donc $\frac{16}{81} < h_4 < \frac{81}{256}$.

Je sais que $h_4 = 0,3$ (en m), donc, $\frac{16}{81} < h_4 < \frac{81}{256}$, car $\frac{16}{81} \approx 0,197$ et $\frac{81}{256} \approx 0,316$.

Toutefois, bien que h_4 vérifie la double inégalité, je ne suis pas assuré que la balle soit « bonne », en effet rien ne garantit que les quatre rebonds se sont tous bien déroulés. Par exemple, si la hauteur

h_1 du 1^{er} rebond est 0,8 m et si les trois autres rebonds sont compris entre les $\frac{2}{3}$ et les $\frac{3}{4}$ du rebond

précédent, alors $h_4 = 0,3$ vérifie bien la contrainte $(\frac{2}{3})^3 \times 0,8 < h_4 < (\frac{3}{4})^3 \times 0,8$ (ou $0,237 < h_4 < 0,318$),

pourtant la balle n'est pas « bonne », car h_1 ne vérifie pas la contrainte $\frac{2}{3} < h_1 < \frac{3}{4}$.

◆ Exercice n°69 p.159

$$\bullet 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} ; \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} ; \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} ; \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30} ; \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\bullet S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

12. Équations - Inéquations

(pages 161 à 176 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- introduire les propriétés : « égalités et opérations », « inégalités et opérations » ;
- résoudre des équations du 1^{er} degré à une inconnue ;
- rechercher des solutions d'inéquations du 1^{er} degré à une inconnue.

COMMENTAIRES

Ce chapitre introduit la notion d'équation, en lui donnant du sens, à travers la mise en équation d'un problème concret.

Il est déconseillé d'utiliser l'expression « équations équivalentes ». On utilisera plutôt : « équations ayant les mêmes solutions ». Pour transformer une équation à une inconnue en une équation plus simple ayant les mêmes solutions, on utilisera les propriétés « égalités et équations ».

Les équations paramétriques ne sont pas au programme de 4^e et l'inégalité au sens large n'est pas définie en 4^e.

Le symbole « < » est lu « plus petit que » et « > » est lu « plus grand que ».

En classe de 4^e, on se limite à la présentation des inéquations et à la recherche de quelques solutions.

La résolution de telles inéquations, c'est-à-dire la recherche de leur ensemble des solutions est réservée à la classe de 3^e où l'élève dispose de la notion d'intervalle.

Toutefois, il sera utile d'habituer l'élève à se donner le support visuel de la droite graduée pour placer approximativement des solutions trouvées.

Pour transformer une inéquation à une inconnue en une inéquation plus simple ayant les mêmes solutions, on utilisera les propriétés « inégalités et inéquations ».

La recherche de solutions d'inéquations du type $x > u$ ou $x < u$ doit être maîtrisée avant de passer aux autres types d'inéquations. En tout état de cause, l'étude des inéquations sera approfondie en 3^e. On habituera l'élève à passer de l'écriture $u < x$ à l'écriture $x > u$.

Les expressions du type : « Lorsqu'on transpose un nombre d'un membre d'une équation ou d'une inéquation dans l'autre membre, il change de signe » et « Lorsqu'on multiplie ou on divise les deux membres d'une inéquation par un même nombre négatif, on renverse le sens de l'inéquation » sont à proscrire du vocabulaire sur les équations et inéquations.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

savoir-faire

Équations

• Vocabulaire

- Équation, inconnue, membre d'une équation.
- Un nombre vérifie l'équation.
- Solution d'une équation.
- Résoudre une équation.

• Propriétés

- Lorsqu'on ajoute un même nombre à chaque membre d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.
- Lorsqu'on multiplie par un même nombre chaque membre d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

• Transformer une équation en une équation plus simple ayant les mêmes solutions.

• Vérifier qu'un nombre rationnel est solution d'une équation.

• Résoudre les équations du type :

$$x + a = b ; ax = b ; ax + b = c ; ax + b = cx + d.$$

• Utiliser les méthodes suivantes :

- Pour résoudre une équation du type $x + a = b$, d'inconnue x , on ajoute à chacun de ses membres l'opposé de a pour se ramener à une équation du type : $x = u$.

Équations (suite)

- Lorsqu'on ajoute un même nombre à chaque membre d'une équation, on obtient une équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ.

- Lorsqu'on multiplie par un même nombre non nul chaque membre d'une équation, on obtient une équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ.

- Les équations du type « $x = u$ » ont une seule solution : le nombre u .

- Pour résoudre une équation du type $ax = b$, d'inconnue x ($a \neq 0$), on multiplie chacun de ses membres par $1/a$ (inverse de a) pour se ramener à une équation du type : $x = u$

- Pour résoudre l'équation : (E) $ax + b = cx + d$ d'inconnue x , on peut transformer l'équation (E), successivement en :

* une équation du type : $ax + b = 0$;

* une équation du type : $ax = b$;

* une équation du type : $x = u$.

Ces équations ont toutes la même solution que l'équation (E) : le nombre u .

Inéquations

• Vocabulaire

- Inéquation, inconnue, membre d'une inéquation.

- Un nombre vérifie l'inéquation.

- Solution d'une inéquation.

• Propriétés

- Lorsqu'on ajoute un même nombre à chaque membre d'une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

- Lorsqu'on multiplie par un même nombre positif non nul chaque membre d'une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

- Lorsqu'on multiplie par un même nombre négatif non nul chaque membre d'une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de sens contraire.

- Lorsqu'on ajoute un même nombre à chaque membre d'une inéquation, on obtient une inéquation qui a les mêmes solutions que l'inéquation de départ.

- Lorsqu'on multiplie par un même nombre positif non nul chaque membre d'une inéquation, on obtient une inéquation qui est de même sens et qui a les mêmes solutions que l'inéquation de départ.

- Lorsqu'on multiplie par un même nombre négatif non nul chaque membre d'une inéquation, on obtient une inéquation qui est de sens contraire et qui a les mêmes solutions que l'inéquation de départ.

- Les solutions de l'inéquation $x < u$, d'inconnue x sont les nombres plus petits que u .

• Trouver des solutions d'une inéquation des types suivants : $x < u$ ou $x > u$.

• Transformer des inéquations du type :

$$x + a < b ; ax < b ; ax + b < c \text{ et}$$

$$ax + b < cx + d \text{ en des inéquations du type}$$

$$x < u \text{ ou } x > u.$$

• Vérifier qu'un nombre rationnel est solution d'une inéquation.

• Placer approximativement sur une droite graduée, un nombre, solution d'une inéquation.

EXERCICES DU MANUEL

☐ Exercices d'entraînement

♦ Exercice n°13 p.173

• Le triangle ABC est rectangle en B, donc d'après la propriété de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc : $AC^2 = x^2 + 9$.

• Je désigne par \mathcal{A} l'aire du triangle ABC :

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{3x}{2}$$

• $\mathcal{A} = 6$ signifie que $\frac{3}{2}x = 6$, donc : $x = 4$. Par conséquent : $AC^2 = x^2 + 9 = 25$; $AC = 5$.

◆ Exercice n°14 p.173

• Je désigne par \mathcal{A} l'aire du triangle ABC :

$$\mathcal{A} = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{b(b+2)}{2}, \mathcal{A} = \frac{1}{2}(b^2 + 2b) = \frac{b^2}{2} + b.$$

◆ Exercice n°16 p.174

Je considère G, point d'intersection des droites (CD) et (AF). FEDG est un rectangle et ABCG est un carré. J'ai : $\mathcal{A}_{ABCDEF} = \mathcal{A}_{FEDG} + \mathcal{A}_{ABCG}$, $\mathcal{A}_{FEDG} = GD \times GF = 6(3+x) = 18 + 6x$ et $\mathcal{A}_{ABCG} = 9$, donc : $\mathcal{A}_{ABCDEF} = 18 + 6x - 9 = 6x + 9$.

$\mathcal{A}_{ABCDEF} = 15$ signifie que $6x + 9 = 15$.

Par conséquent : $x = 1$.

Commentaires

- On fera justifier que FEDG est un rectangle, que ABCG est un carré et que $GF = 3 + x$.
- On peut également introduire le point H, d'intersection des droites (CB) et (FE) et justifier que ABHF et CDEH sont des rectangles.

◆ Exercice n°23 p.174

• OA est la hauteur du triangle ABC relative à la base CB.

G appartient au segment [OG], donc : $OA = OG + GA = x + 2$.

Les points C, B et O appartiennent respectivement à [EF], [CF] et [CB],


donc : $2x = EO + OF = EF = EC + CB + BF = 2 + CB + 2 = CB + 4$.

Par conséquent : $CB = 2x - 4 = 2(x - 2)$.

Je désigne par \mathcal{A} l'aire du triangle ABC : $\mathcal{A} = \frac{CB \times OA}{2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{2} = x^2 - 4$.

• $\mathcal{A} = 60$ signifie que $x^2 - 4 = 60$.

Par conséquent : $x^2 = 64$; $x = 8$.

 Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n°39 p.176

Je désigne par P_1 et P_2 les prix à payer respectivement de jour et de nuit pour x kilomètres.

$$P_1 = 120x + 100 \text{ et } P_2 = 240x + 100.$$

• Le jour, en ville, le tarif horaire est plus économique lorsque : $P_1 > 1900$.

Donc : $P_1 > 1900$ signifie que $120x + 100 > 1900$.

L'inéquation $120x + 100 > 1900$ a les mêmes solutions que l'inéquation $x > 15$.

• La nuit en ville, ou en banlieue le tarif horaire est plus économique lorsque : $P_2 > 1900$.

Donc : $P_2 > 1900$ signifie que $240x + 100 > 1900$.

L'inéquation $240x + 100 > 1900$ a les mêmes solutions que l'inéquation $x > 7,5$.

Commentaire

Il faudrait, par souci de cohérence, introduire la vitesse horaire moyenne d'un taxi, puisqu'ici il apparaît que 200 est solution de la première inéquation, bien qu'il soit impossible de parcourir 200 km en une heure et qu'il faudrait donc louer le taxi pour un minimum de 2 heures.

◆ Exercice n°40 p.176

$$\text{Équation : } x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33; (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7})x = 33; x = \frac{1386}{97}$$

◆ Exercice n°41 p.176

• Le triangle ADB est isocèle de sommet D, donc : $2x = 180 - \widehat{ADB}$ (1).

• Les angles \widehat{A} et \widehat{B} sont supplémentaires, donc : $\widehat{ADB} = 180 - \widehat{BDC}$ (2).

Des égalités (1) et (2), je déduis que : $2x = \widehat{BDC}$ (3).

• Le triangle DBC est isocèle de sommet B, donc : $\widehat{DCB} = \widehat{BDC}$ (4).

Des égalités (3) et (4), je déduis que : $\widehat{DCB} = 2x$ (5).

• Le triangle ABC est isocèle de sommet A, donc : $x + 2 \times \widehat{DCB} = 180$ (6).

Des égalités (5) et (6), je déduis que : $5x = 180$.

Par conséquent : $x = \frac{180}{5} = 36$.

13. Approximations décimales d'un nombre

(pages 177 à 191 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- définir une puissance de 10 dont l'exposant est un nombre entier relatif ;
- écrire un nombre décimal sous la forme $a \times 10^p$;
- présenter la notion de nombre décimal d'ordre n , la notion d'encadrement d'un nombre rationnel par deux nombres décimaux (consécutifs ou non) d'ordre n et une notion d'approximation décimale d'ordre n .

COMMENTAIRES

Les exposants négatifs sont réservés exclusivement aux puissances de 10.

Il s'agit d'une première approche de la notion d'approximation ; on ne pratiquera donc pas d'opération sur les encadrements en classe de 4^e.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

savoir-faire

Puissances de 10

• Définition

n étant un nombre entier naturel, 10^{-n} est l'inverse de 10^n .

• Remarque

- Si n est un nombre entier naturel, alors

$$10^n = \frac{10 \dots 10}{n \text{ zéros}}$$

- Si n est un nombre entier naturel non nul, alors

$$\frac{1}{10^n} = 0,0 \dots 01$$

n chiffres après la virgule :
($n-1$) « zéros » et 1 « un ».

• Propriétés

n et p sont des nombres entiers relatifs :

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p}; (10^n)^p = 10^{n \times p};$$

$$\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}.$$

• Écrire des puissances de 10 sous différentes formes.

• Calculer avec les puissances de 10.

Nombres décimaux et puissances de 10

• Définitions

– On appelle notation scientifique d'un nombre décimal x l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$, où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et p est un nombre entier relatif.

– On appelle nombre décimal d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) un nombre décimal qui peut être écrit sous la forme d'un produit d'un nombre entier relatif par 10^{-n} .

• Propriété

a et b sont des nombres entiers relatifs non nuls, p et q sont des nombres entiers relatifs,

$$(a \times 10^p) \times (b \times 10^q) = (a \times b) \times 10^{p+q}$$

• Règle

Pour comparer des nombres décimaux positifs X et Y écrits sous la forme $a \times 10^p$, on écrit les notations scientifiques de chacun de ces nombres $X = x \times 10^n$; $Y = y \times 10^m$

– si $n \neq m$, alors X et Y sont rangés dans le même ordre que n et m

– si $n = m$, alors X et Y sont rangés dans le même ordre que x et y .

• Écrire un nombre décimal sous la forme

$a \times 10^p$ et inversement, retrouver une autre écriture à partir de l'écriture $a \times 10^p$.

• Trouver la notation scientifique d'un nombre décimal.

• Effectuer le produit de deux nombres décimaux écrits sous la forme $a \times 10^p$.

• Encadrer un nombre décimal par deux puissances de 10 d'exposants entiers consécutifs.

• Comparer deux nombres décimaux écrits sous la forme $a \times 10^p$.

• Comparer des nombres décimaux.

Approximations décimales d'un nombre rationnel

• Définition

On appelle troncature à n décimales du nombre x le nombre décimal d'ordre n obtenu en ne conservant que les n premiers chiffres après la virgule de l'écriture décimale de x .

• Vocabulaire

– Approximation décimale d'ordre n par défaut.

– Approximation décimale d'ordre n par excès.

– Arrondi d'ordre n d'un nombre positif.

• Règles

– Pour trouver les approximations décimales d'ordre n du nombre $\frac{a}{b}$, on calcule le quotient q de la division

de a par b avec n chiffres après la virgule. Le nombre q est l'approximation décimale d'ordre n par défaut de

$\frac{a}{b}$ et le nombre décimal d'ordre n qui suit q est l'approximation décimale d'ordre n par excès de $\frac{a}{b}$.

– Pour trouver l'arrondi d'ordre n de la fraction $\frac{a}{b}$ on calcule le quotient q de la division de a par b avec $n+1$ chiffres après la virgule.

Si le $(n+1)^{\text{e}}$ chiffre après la virgule est 0, 1, 2, 3 ou 4,

l'arrondi d'ordre n de $\frac{a}{b}$ est l'approximation décimale d'ordre n par défaut.

Si le $(n+1)^{\text{e}}$ chiffre après la virgule est 5, 6, 7, 8 ou 9,

l'arrondi d'ordre n de $\frac{a}{b}$ est l'approximation décimale d'ordre n par excès.

• Trouver la troncature à n décimales d'un nombre rationnel.

• Encadrer un nombre rationnel positif par deux nombres décimaux (consécutifs ou non consécutifs) d'ordre n .

• Trouver une approximation décimale d'un nombre rationnel positif (par défaut ou par excès).

• Trouver l'arrondi d'un nombre rationnel positif.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice 2.e p.181

Une opération en 10^{-9} s ou 1 ns.

1 000 opérations en 10^{-6} s ou 1 μ s.

1 000 000 opérations en 10^{-3} s ou 1 ms.

◆ Exercice 2.f p.181

• $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$; $1 \text{ \AA} = 10^{-7} \text{ mm}$.

• $1 \mu\text{m} = 10^4 \text{ \AA}$

Exercices d'entraînement

◆ Exercice n°7 p.190

• 10^{15} sabords

◆ Exercice n°11 p.190

Le diamètre d'un globule rouge est $7 \mu\text{m}$ ou $7 \times 10^{-6} \text{ m}$.

◆ Exercice n°13 p.191

1 année = $365 \times 24 \times 60 \times 60$ secondes

= 31 536 000 secondes.

En notation scientifique :

1 année = $3,153 6 \times 10^7$ secondes.

◆ Exercice n°14 p.191

$2,5 \times 10^{-2}$; $1,456 5 \times 10$

$1,24 \times 10^6$; 4,12

$1,4 \times 10^4$;

9×10 ;

$2,4 \times 10^2$; 6×10^2 .

◆ Exercice n°15 p.191

1) $x = 0,7 \times 10^0$, $y = 3,25 \times 10^0$,

$xy = 2,275 \times 10^0$.

2) $x = -0,53 \times 10^0$, $y = 1,20 \times 10^2$,

$xy = -0,636 \times 10^2$.

3) $x = 3 \times 10^{-3}$, $y = 9,4 \times 10^0$,

$xy = 2,82 \times 10^{-2}$.

4) $x = 2 \times 10^{-3}$, $y = 2 \times 10^{-3}$,

$xy = 4 \times 10^{-6}$.

◆ Exercice n°16 p.191

$a = 3,92 \times 10^{-2}$ $e = 3,48 \times 10$

$b = 5,47 \times 10^4$ $f = -4,24 \times 10^8$

$c = 5,235 3 \times 10^{10}$ $g = 1,53 \times 10^{-3}$

$d = 1,372 4 \times 10^{-4}$ $h = 3,91 \times 10^{12}$

◆ Exercice n°17 p.191

$a = 3,78 \times 10^0$

$b = 1,404 56 \times 10^{-2}$

$c = 3,092 5 \times 10^0$

$d = 1,349 580 8 \times 10^{-5}$

◆ Exercice n°21 p.191

$0,149 \times 10^9 < 1,45 \times 10^8 < 150 000 000 < 15,4 \times 10^7$.

◆ Exercice n°25 p.191

$0,66 < \frac{2}{3} < 0,67$; $3,14 < \pi < 3,15$; $0,44 < \frac{4}{9} < 0,45$; $0,84 < \frac{11}{13} < 0,85$; $3,14 < \frac{22}{7} < 3,15$.

Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n°29 p.192

Distance correspondant à une année lumière :

$300 000 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365 = 94 608 \times 10^8$

1 a.l = 9 460 800 000 000 km.

◆ Exercice n°30 p.192

1 u.a = 149 600 000 km.

• Distance moyenne Mars – Soleil : 1,5 u.a (env)

• Distance moyenne Pluton – Soleil :

5 909 200 000 km (environ).

◆ Exercice n°31 p.192

18 g d'eau renferme environ $6,02 \times 10^{23}$ molécules d'eau.

- Masse volumique d'un litre d'eau : 1 000 g.
- Nombre de molécules d'eau contenues dans un litre d'eau : environ $0,334 \times 10^{26}$ ou $3,34 \times 10^{25}$.

◆ Exercice n°32 p.192

• Je verrai l'éclair après $\frac{10}{300\ 000}$ de seconde, c'est-à-dire après $\frac{1}{30\ 000}$ de seconde.

Temps mis par le coup de tonnerre pour me parvenir : $\frac{10\ 000}{340}$ secondes (environ 29,4 secondes).

- a) 680 m b) 3 400 m c) 10 200 m d) 20 km 400 m e) 35 km 700 m.

◆ Exercice n°33 p.192

• Masse moyenne annuelle de savon utilisée par chacun des habitants : 1,98 kg (environ).

◆ Exercice n°34 p.192

Le volume des océans est estimé à 1 350 millions de milliards de m^3 .

- Volume des océans : $1\ 350 \times 10^{18}$ litres d'eau de mer.
- Masse de sel dissout dans les océans : $1\ 350 \times 10^{18} \times 27\ g = 3\ 645 \times 10^{19}\ g = 3\ 645 \times 10^{13}\ t$.
- Masse d'or éparpillée dans les océans : $1\ 350 \times 10^{15} \times 0,004\ mg = 540 \times 10^{13}\ mg = 540 \times 10^4\ t$.

◆ Exercice n°35 p.192

- Périmètre d'une roue : $2 \times 3,14 \times 25\ cm = 157\ cm = 1,57\ m$.
- Après 400 km, chaque roue aura fait environ 254 777 tours ($\frac{400\ 000}{1,57} \approx 254\ 777$).

◆ Exercice n°36 p.192

- 500 milliards de francs correspondent à 50 000 000 de billets de 10 000 francs.
- Epaisseur de la pile de billets de 10 000 francs : $5 \times 10^7 \times 0,012\ cm = 6\ km$.

◆ Exercice n°37 p.192

• $a < a + 1$ • $\frac{1}{a} > \frac{1}{a + 1}$

◆ Exercice n°38 p.192

$x = 1 + \frac{1}{10^{1995}}$ et $y = 1 - \frac{1}{1 + 10^{1995}}$

- $y < 1$ et $1 < x$, donc : $x < y$.
- y est le plus proche du nombre 1 que x ,

car : $\frac{1}{1 + 10^{1995}} < \frac{1}{10^{1995}}$ (cf ex n°37).

14. Résolution de problèmes

(pages 193 à 208 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- résoudre certains problèmes simples de dénombrement en mettant en place deux outils : l'arbre de choix et les diagrammes ;
- résoudre des problèmes de proportionnalité ;
- résoudre des problèmes concrets après mise en équation.

COMMENTAIRES

Ce chapitre ne comporte aucun savoir en tant que tel, mais des savoir-faire qu'il faudra faire acquérir aux élèves, notamment en ce qui concerne la mise en équation d'un problème.

Tout le chapitre est traité sous forme d'une suite d'exercices commentés, il faudra donc être attentif au mode de gestion de la classe à adopter pour tel ou tel leçon. Il pourra être différent suivant les exercices, par exemple :

- séance d'exercices de recherche individuelle, ou en groupes, ou collective ;
- séance d'exercices classiques (la proportionnalité est connue) ;
- séance d'exercices commentés (on donne le texte et des consignes, ...).

Les problèmes de dénombrement ont été abordés en exercices dans les classes précédentes. En classe de 5^e, on a déjà utilisé l'arbre de choix à propos d'exercices sur les puissances d'un nombre entier naturel.

Il n'est pas question ici de donner des résultats, mais d'introduire progressivement et de réinvestir chaque fois que possible, des méthodes performantes de dénombrement. D'une manière générale, les problèmes de dénombrement peuvent permettre de dédramatiser les mathématiques en introduisant le côté ludique de celles-ci : on peut faire manipuler les élèves (jeu de pile ou face, jeu de dés, nombre de combinaisons d'un cadenas, ...).

Des problèmes de proportionnalité ont déjà été traités en 6^e et 5^e ; le problème important du partage proportionnel, utilisant des propriétés des tableaux de proportionnalité, est la seule nouveauté de cette leçon. On pourra aussi résoudre quelques exercices de calculs d'intérêts simples et d'intérêts composés.

La résolution de problèmes mettant en oeuvre des équations ou des inéquations est un des savoir-faire important de la classe de 4^e. Cette leçon permet de réinvestir les savoirs et savoir-faire du chapitre 12 (Équations - Inéquations). Elle permet, comme la résolution de problèmes de proportionnalité, d'utiliser le contexte socio-culturel et de montrer ainsi que les mathématiques sont un outil permettant de résoudre des problèmes du vécu quotidien de l'élève.

Dans cette leçon, on pourra faire acquérir aux élèves dans un premier temps d'apprentissage, une démarche systématique de résolution de tels problèmes que l'on a décomposée en 4 phases :

- Lecture de l'énoncé :
 - identifier ce qui est connu et ce que l'on cherche.
- Traduction du problème en langage mathématique
 - choisir l'inconnue ;
 - mettre en équation.
- Résolution de l'équation ou de l'inéquation.
- Vérification et solution du problème.

On s'attachera aussi à montrer que dans certains cas simples, il n'est pas utile d'utiliser un outil aussi puissant que la mise en équation pour résoudre un problème.

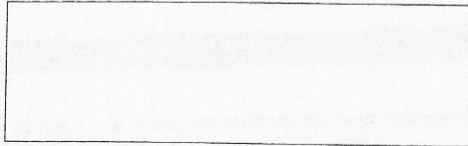
On pourra utiliser le problème de Ben Ezra à titre d'exercice de recherche.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

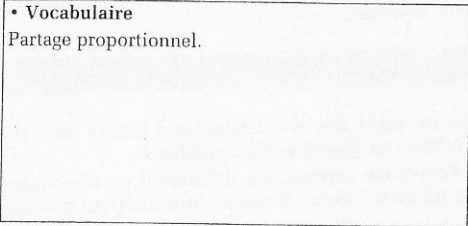
savoir-faire

Problèmes de dénombrement



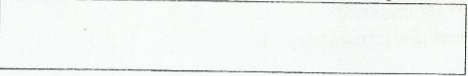
- Résoudre certains problèmes de dénombrement en utilisant :
 - un comptage direct ;
 - un arbre de choix ;
 - un diagramme.

Problèmes de proportionnalité



- Résoudre des problèmes de proportionnalité faisant intervenir :
 - un pourcentage ;
 - une vitesse moyenne ;
 - un débit moyen ;
 - une échelle ;
 - une masse volumique.
- Résoudre un problème de partage proportionnel.

Équations et inéquations pour résoudre des problèmes



- Mettre en équation et résoudre un problème (1^{er} degré à une inconnue).

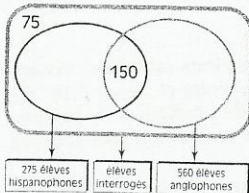
EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice 1.a p.195

Un arbre de choix permet de trouver 9 000 combinaisons différentes ($9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$). Je peux remarquer que ces combinaisons sont tous les nombres de 1 000 à 9 999, il y en a bien : $9\,999 - 1\,000 + 1 = 9\,000$.

◆ Exercice 1.b p.197



- Nombre d'élèves apprenant seulement l'espagnol : 125
 $275 - 150 = 125$
- Nombre d'élèves apprenant seulement l'anglais : 410
 $560 - 150 = 410$
- Nombre d'élèves interrogés : 760
 $75 + 125 + 410 + 150 = 760$

◆ Exercice 3.c p.204

Je désigne par a le nombre d'années, alors : $21 + a < 2a$ ($a < 21$).
À partir de l'an 2 015, l'âge d'Aïssatou sera plus petit que le double de l'âge de sa fille Aminata.

◆ Exercice 3.d p.204

Je désigne par x le nombre de portions vendues. Je sais que : Bénéfice = Prix de vente - prix d'achat, donc : $25x - 1\,350 > 200$; $x > 62$.
Ayant acheté 3 kg d'arachides, je peux au maximum faire 120 portions de 25 g chacune.
De 63 portions vendues et dans la limite de 120 portions, les élèves feront plus de 200 F de bénéfice.

Exercices d'entraînement

◆ Exercice n°2 p.205

Le chapitre III commence page 64 et finit page 80. Par un comptage direct, je trouve :
Chapitre II : 29 pages ; Chapitre III : 17 pages ; Chapitre IV : 27 pages.
Je fais les remarques suivantes : $29 = 63 - 34$; $17 = 80 - 63$; $27 = 107 - 80$
Plus généralement, le nombre de pages d'un chapitre commençant page a et se terminant page b est $b - (a + 1)$ où a et b sont des nombres entiers naturels non nuls tels que $a < b$.



◆ Exercice n°3 p.205

- Pour 192 pages : 468 caractères ($9 \times 1 + 90 \times 2 + 93 \times 3 = 468$).
- Pour 224 pages : 564 caractères ($9 \times 1 + 90 \times 2 + 125 \times 3 = 564$).

◆ Exercice n°4 p.205

- En utilisant un arbre de choix, je trouve :
6 × 5 fractions.

◆ Exercice n°5 p.205

En utilisant un arbre de choix, je trouve :
 $3 \times 2 \times 1$ drapeaux.
Comptage direct : VJR, VRJ, RVJ, RJV, JVR, JRV.

◆ Exercice n°8 p.205

Une année-lumière représente $3 \times 10^5 \times 3\,600 \times 24 \times 365 = 9,46 \times 10^7$ km.
Temps mis par la lumière pour parvenir à un observateur terrestre :

a) en provenance de la Lune : $\frac{380\,000}{300\,000} \text{ s} = 1,27 \text{ s}$;

b) en provenance du Soleil est : $\frac{15 \times 10^7}{3 \times 10^5} \text{ s} = 500 \text{ s} = 8 \text{ mn } 20 \text{ s}$.

◆ Exercice n°12 p.205

d_K , d_A et d_L désignent les distances parcourues respectivement par Konan, Adou et Lamine pour aller de leur domicile à l'école (unité : le km).

1) $60 \times 2\,500 < d_K < 80 \times 2\,500$, donc : $1,5 < d_K < 2$.

2) $\frac{9}{60} \times 20 < d_A < \frac{10}{60} \times 20$, donc : $3 < d_A < 3,34$.

3) $d_L = \frac{5}{60} \times 50 = 4,17$.

Conclusion : Konan habite le plus près de l'école et Lamine le plus loin.

◆ Exercice n°13 p.205-206

• Volume intérieur du fût : $\frac{\pi \times 80^2}{4} \times 130 \approx 653\,120$ (en cm^3).

• Masse de maïs initialement contenu dans le fût : $653\,120 \times 1,16 \text{ g} = 757\,619,2 \text{ g} = 757,619\,2 \text{ kg}$.
Chaque jour Moussa donne globalement 8 kg de maïs à ses deux filles.

Le 95^e jour les deux épouses de Moussa ne pourront donc disposer que de 5,619 2 kg de maïs et le fût sera vide, car : $757,619\,2 \text{ t} = 94 \times 8 + 5,619\,2$.

◆ Exercice n°14 p.206

Volume : $V = 2 \times 0,5 \times h = h$ (en dm^3), (h épaisseur en dm).

Masse : $m = 7,3 h$ (en kg) ou $m = 7\,300 h$ (en g).

Or, $m = 2,19$ (en g), donc : $h = \frac{2,19}{7\,300} = 0,003$ (en dm), ou $h = 0,3 \text{ mm}$.

◆ Exercice n°16 p.206

• 1^{er} cas : ABC isocèle en A.

Données : mes $\hat{B} = \text{mes } \hat{C}$ et mes $\hat{A} = 50^\circ$.

Je pose : mes $\hat{B} = \text{mes } \hat{C} = x^\circ$.

Équation : $2x + 50 = 180$.

Donc : $x = 65$.

mes $\hat{B} = \text{mes } \hat{C} = 65^\circ$ et mes $\hat{A} = 50^\circ$.

• 2^e cas : ABC isocèle en B

Données : mes $\hat{A} = \text{mes } \hat{C} = 50^\circ$.

Je pose : mes $\hat{B} = x^\circ$.

Équation : $x + (50 + 50) = 180$.

Donc : $x = 80$.

mes $\hat{A} = \text{mes } \hat{C} = 50^\circ$ et mes $\hat{B} = 80^\circ$.

◆ **Exercice n°18 p.206**

Yassi a dépensé 5 500 F (10 000 - 4 500 = 5 500).

Je désigne par p le prix du livre, donc le prix du cahier est : $\frac{1}{4}$ (10 000 - p).

Par conséquent : $p + \frac{1}{4}$ (10 000 - p) = 5 500 (Solution : $p = 4 000$).

Le prix du livre est 4 000 F et le prix du cahier est 1 500 F.

◆ **Exercice n°19 p.206**

Je désigne par t le nombre d'années. J'ai l'équation : $42 + t = 2(16 + t)$ (Solution : $t = 10$).

◆ **Exercice n°22 p.206**

x désigne le nombre d'années après lequel l'âge du grand père sera égale au deux tiers de la somme des âges de ses petits enfants. Le grand père aura alors $(62 + x)$ ans et ses petits enfants auront $(20 + x)$, $(18 + x)$ et $(16 + x)$ ans respectivement.

Donc : $x + 62 = \frac{2}{3}(x + 20 + x + 18 + x + 16)$ (Solution : $x = 26$).

◆ **Exercice n°24 p.206**

x désigne le tonnage de café récolté par le père, j'ai donc l'équation : $x + \frac{2}{3}x + \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}x = 45$.

Par conséquent : $(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5})x = 43$ (Solution : $x = 15$).

◆ **Exercice n°25 p.206**

• n désigne le nombre d'employés de l'entreprise. Nombre d'employés licenciés : $\frac{1}{4}n$.

• Nombre d'employés restant dans l'entreprise : $\frac{3}{4}n$. Nombre d'employés réembauchés : $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}n = \frac{3}{16}n$.

L'entreprise réembauche exactement le même nombre d'employés qu'elle n'en a licencié.

◆ **Exercice n°26 p.206**

Le trapèze ABCD est rectangle en A de bases [AB] et [CD], [AD] est une hauteur de ce trapèze, donc :

$$S_{ABCD} = \frac{AD \times (AB + CD)}{2} = \frac{4 \times (x + 14)}{2} = 2x + 28.$$

Par conséquent : $2x + 28 = 45$ (Solution : $x = 8,5$).

☐ **Exercices d'approfondissement**

◆ **Exercice n°27 p.207**

D, F, K, N et R désignent respectivement les noms de Djondimadji, Frondoh, Komo, Ngaimonazoué et Ranaivoarimiandry. Au total, il y a eu 10 serremments de mains ($4 + 3 + 2 + 1 = 10$), car :

- D serre successivement la main à F, K, N et R, donc : 4 serremments de mains ;
- F serre successivement la main à K, N et R, donc : 3 serremments de mains ;
- K serre successivement la main à N et R, donc : 2 serremments de mains ;
- N serre la main à R, donc : 1 serrement de mains.

◆ **Exercice n°28 p.207**

a) Je désigne par A, B et C les trois livres. Trouver le nombre de rangements de ces trois livres verticalement sur une étagère revient à trouver le nombre de mots que l'on peut écrire avec les lettres A, B et C, les lettres n'étant utilisées qu'une seule fois dans le même mot.

Je peux faire un comptage direct ou utiliser un arbre de choix. Je trouve 6 rangements possibles ($3 \times 2 \times 1 = 6$).

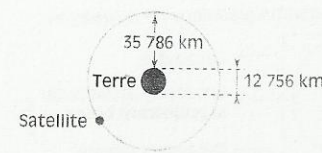


Comptage direct :
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA

b) En désignant par A, B, C, D et E les cinq livres et en utilisant le même raisonnement avec un arbre de choix, je trouve 120 rangements possibles ($5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$).

◆ **Exercice n°29 p.207**

- Rayon terrestre à l'équateur : $R = 12 756 : 2 = 6 378$ (en km).
- Longueur de la trajectoire du satellite :



$$L = 2 \times 3,14 \times (6 378 + 35 786) = 264 789,92 \text{ (en km).}$$

Le satellite étant apparemment immobile pour un observateur situé sur Terre, cela signifie que le satellite à la même vitesse de rotation que la Terre, c'est-à-dire 24 h.

$$\text{Donc : } v = L : 24 = 264 789,92 : 24 = 11 032,9 \text{ (en km/h).}$$

◆ **Exercice n°30 p.207**

a) L'unité est le cm : $L = 1 020$ et $\ell = 750$. Pour que le plan à l'échelle $1/n$ puisse être dessiné sur une feuille de format 21 cm \times 27 cm, je dois avoir à la fois les trois conditions suivantes :

- 1) n est un nombre entier naturel non nul ;
- 2) n est le plus petit possible (car, $\frac{1}{n}$) est le plus grand possible) ;
- 3) $37,78 < n$ et $35,71 < n$ (car : $1 020 \times \frac{1}{n} < 27$ et $750 \times \frac{1}{n} < 21$; $1 020 < 27n$ et $750 < 21n$).

L'unique nombre entier naturel n vérifiant simultanément ces trois conditions est : 38.

b)

Longueur réelle en m	10,20	7,50	3,50	3,20	3	2,80	2,50	1,50	1,20
Longueur sur le plan en cm	26,8	19,7	9,2	8,4	7,9	7,4	6,6	3,9	3,2

◆ **Exercice n°31 p.207**

Je désigne par h l'heure de départ de l'automobiliste. Il parcourt la même distance et il part à la même heure dans les deux cas, je peux donc écrire l'équation : $60(13 - h) = 80(11 - h)$ (car : $d = v \times t$).

Solution : $h = 5$ et $d = 480$.

Par conséquent, l'automobiliste est parti à 5 heures et a parcouru 480 km.

◆ **Exercice n°32 p.207**

- Lièvre : $v = 60$ km/h = 6 m/s = $10^4/6$ cm/s.
- Tortue : $v' = 10$ cm/s et 16 mn = 960 s.

Je désigne par t le temps de course du lièvre. Le lièvre et la tortue ont parcouru la même distance,

$$\text{donc : } \frac{10^4}{6}t = 10(960 + t) \text{ (Solution : } t \approx 5,8 \text{ (en s)).}$$

Puisque $d = v \times t$, donc : $d = 600 \times 16,27 = 96,58$ (en m).

Le lièvre rejoint donc la tortue à 3,42 m de l'arrivée.

◆ **Exercice n°38 p.208**

• Distance à vol d'oiseau Dakar - Abidjan : 1 800 km ($d = 900 \times 2 = 1 800$, car : $v = 900$ et $t = 2$).

• Echelle de la carte : $e = \frac{45}{180 000 000} = \frac{1}{4 000 000}$ (1 cm sur la carte = 40 km à vol d'oiseau).

• Dakar - Abidjan : 1 800 km ; Abidjan - Douala : 1 520 km ($38 \times 40 = 1 520$) ; Douala - Brazzaville : 1 100 km ($27,5 \times 40 = 1 100$) ; Brazzaville - Kigali : 1 668 km ($41,7 \times 40 = 1 668$) ; Kigali - Nairobi : 740 km ($18,5 \times 40 = 740$) ; Nairobi - Antananarivo : 2 320 km ($58 \times 40 = 2 320$). Distance Dakar - Nairobi : 6 828 km ($1 800 + 1 520 + 1 100 + 1 668 + 740 = 6 828$).

• Dakar - Nairobi : 7 h 34 mn ($6 828 : 900 = 7,57$). Escapes : 19 h ($4 \times 1 + 15 = 19$).

Nairobi - Antananarivo : 2 h 54 mn ($2 320 : 800 = 2,9$).

Durée totale du trajet Dakar - Antananarivo : 29 h 28 mn (7 h 34 mn + 2 h 54 mn + 19 h).

◆ Exercice n°39 p.208

x désigne le nombre total de cacaoyers.

La réaction d'Afana s'explique, car après la première affirmation d'Akomezoa, il a fait le calcul

$\frac{3}{5} + \frac{1}{2}$ et trouve $\frac{11}{10}$ qui est une fraction plus grande que 1, d'où son exclamation ironique.

• Nombre de cacaoyers attaqués uniquement par les chenilles : $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x = \frac{2}{6}x = \frac{1}{3}x$.

• Nombre de cacaoyers atteints uniquement par la pourriture brune :

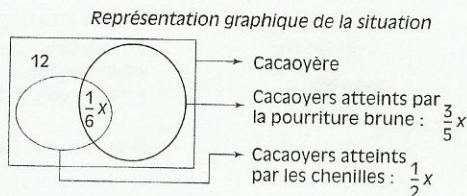
$$\frac{3}{5}x - \frac{1}{6}x = \frac{13}{30}x$$

• J'ai donc l'équation :

$$\frac{1}{3}x + \frac{13}{30}x + \frac{1}{6}x + x + 12 = x$$

(Solution : $x = 180$).

Par conséquent, Akomezoa possède 180 cacaoyers.



◆ Exercice n°40 p.208

• Kamel ne peut effectuer son partage, car 17 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 9.

• En prêtant un chameau à Kamel, le partage devient possible, car Kamel a alors 18 chameaux à partager et 18 est divisible par 2, par 3 et par 9.

En effectuant le partage, l'aîné, le cadet le benjamin recevront respectivement 9, 6 et 2 chameaux, soit un total de 17 chameaux, donc le sage peut reprendre son chameau.

• Aucun des enfants n'a eu sa part exacte, puisque les parts respectives de l'aîné, du cadet et du benjamin auraient du être de : $8,5 (\frac{17}{2})$, $5,7 (\frac{17}{3})$ et $1,9 (\frac{17}{9})$.

• Les trois enfants sont malgré tout satisfaits du partage, car chacun d'entre eux a reçu plus que prévu : $9 > 8,5$; $6 > 5,7$ et $2 > 1,9$.

◆ Exercice n°41 p.208

x désigne le nombre de trajet aller-retour Yaoundé - Douala effectué annuellement par Mr Tsoumts.

Prix au tarif 1 : $5\,600x$. Prix au tarif 2 : $(5\,600 - \frac{30}{100} \times 5\,600)x + 25\,200 = 3\,920x + 25\,200$.

Le tarif 2 sera plus avantageux pour Mr Tsoumts à condition que : $3\,920x + 25\,200 < 5\,600x$.

L'inéquation $3\,920x + 25\,200 < 5\,600x$ a les mêmes solutions que l'inéquation $15 < x$.

Donc, à partir de 16 voyages annuels, le tarif 2 sera plus intéressant que le tarif 1.

◆ Problème de Ben Ezra p.193

Après un partage équitable entre deux personnes, ces deux personnes possèdent la même part.

Je désigne par x le nombre de fruits cueillis par l'homme entré dans le verger.

• Part du 1^{er} gardien : $\frac{1}{2}x + 2$.

• Part du 2^e gardien : $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 2) + 2 = \frac{1}{4}x + 1$.

• Part du 3^e gardien : $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 3) + 2 = \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

• Part restante : $x - (\frac{1}{2}x + 2) = \frac{1}{2}x - 2$.

• Part restante : $(\frac{1}{2}x - 2) - (\frac{1}{4}x + 1) = \frac{1}{4}x - 3$.

• Part restante : $(\frac{1}{4}x - 3) - (\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}x - \frac{7}{2}$.

Puisqu'il ne reste qu'un fruit à l'homme à la sortie du verger, j'ai donc l'équation : $\frac{1}{8}x - \frac{1}{7} = 1$.

Solution : $x = 36$.

Commentaire

On prendra soin de faire vérifier aux élèves que la solution trouvée est exacte en leur faisant faire le partage pas à pas à partir de 36 fruits, car le partage pourrait leur sembler impossible du fait

qu'au 3^e partage interviennent les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{2}$.

15. Statistiques

(pages 209 à 222 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Le chapitre vise essentiellement à apprendre à l'élève à :

- collecter, organiser et traiter des données statistiques ;
- représenter des données statistiques par des diagrammes ;
- interpréter un tableau, un diagramme.

COMMENTAIRES

Le chapitre donne une initiation à la statistique.

On veillera à faire travailler les élèves sur des données actuelles qu'ils ont eux-mêmes collectées dans leur environnement.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

savoir-faire

Organisation des données

- **Vocabulaire**
 - Données statistiques, informations, enquête.
 - Population, individu.
 - Effectif total.
 - Caractère.
 - Caractère qualitatif, caractère quantitatif.
 - Modalité d'un caractère.
 - Effectif d'une modalité.
 - Tableau des effectifs.
 - Tableau des fréquences.
- **Définitions**
 - On appelle fréquence d'une modalité le quotient de l'effectif de la modalité par l'effectif total.
- **Remarque**
 - Organiser des données, c'est les présenter dans un tableau regroupant :
 - les modalités du caractère ;
 - les effectifs de chaque modalité ou les fréquences.

- Collecter des données.
- Organiser des données.
- Calculer des fréquences.
- Exprimer des fréquences en %.
- Calculer l'effectif d'une modalité connaissant l'effectif total et la fréquence de la modalité.

Traitement des données

- **Vocabulaire**
 - Moyenne.

- Calculer la moyenne de données statistiques.

Diagrammes

- **Vocabulaire**
 - Diagramme en bâtons, diagramme à bandes, diagramme semi-circulaire.

- Construire un diagramme (à bandes, à bâtons ou semi-circulaire).
- Interpréter un diagramme.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice 1.a p.211

Le caractère de la troisième question est la couleur (du maillot), il est qualitatif. Ses modalités sont les couleurs : vert ; jaune ; orange ; rose ; bleu ; rouge ; violet ; marron.

ATTENTION, le caractère de la quatrième question est également qualitatif, car le rang de l'année de naissance n'est pas une quantité.

◆ Exercice 1.c p.212

Couleur	Vert	Jaune	Orange	Rose	Bleu	Rouge	Violet	Marron
Effectif	9	14	11	9	12	2	2	1

◆ Exercice 1.g p.214

$\frac{N}{62} = 11,3\%$; $N = \frac{11,3 \times 62}{100} = 7,006$ (7 élèves de cette classe ont une taille de 1,52 m).

◆ Exercice 2.a p.215

Durée du trajet (en mn)	5	8	11	14	17	
Effectifs	4	7	16	19	8	54
Fréquences	0,06	0,11	0,26	0,31	0,13	
	20	56	176	266	136	654

• Temps moyen des trajets :
12 mn 7 s
(654 : 54 = 12,11)

◆ Exercice 2.b p.215

$18 \times 92\,500 = 1\,665\,000$ (en Francs).

◆ Exercice 3.a p.216

Jours	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	
Angles (en °)	17	26	27	33	32	45	
Effectifs	17	26	27	33	32	45	

• Moyenne : 30

◆ Exercice 3.b p.216

Couleurs	Vert	Jaune	Orange	Rose	Bleu	Rouge	Violet	Marron	Total
Effectifs	9	14	11	9	12	2	2	1	60
Angles (en °)	27	42	33	27	36	6	6	3	180

Exercices d'entraînement

◆ Exercice n°1 p.219

a) et b) 9 modalités : 15 ; 25 ; 30 ; 35 ; 40 ; 45 ; 50 ; 60 ; 65, pour un effectif de 30 familles.

c) Consommations	15	25	30	35	40	45	50	60	65
Effectifs	1	3	4	4	4	4	6	2	2

d) Quatre modalités d'effectif 4 : 30 ; 35 ; 40 ; 45. e) Modalité qui a l'effectif le plus grand : 60.

◆ Exercice n°3 p.219

Il convient d'exprimer les effectifs en pourcentages

- Haman respecte le mieux le poids légal du pain.
- Tahirou a le plus de pain de poids inférieur au poids légal.

	HAMAN		
Pds légal	-	=	+
Effectifs	12	46	6
%	18,75	71,97	9,37

	TAHIROU		
	-	=	+
	18	52	10
%	22,5	65	12,5

◆ Exercice n°4 p.219

Temps (mn)	5	10	15	20	25	30
Effectifs	10	12	23	9	6	4
Fréquences	15,62	18,75	35,93	14,06	9,37	6,25

◆ Exercice n°8 p.219

• Nombre moyen de pages par chapitre du L.A de 6^e ($104 : 15 = 6,93$) donc 7 pages.

◆ Exercice n°10 p.220

La page 97 est la seule page modifiée pour l'édition 94. Cette modification apporte un surplus de 234 caractères (996 - 762). Cette modification apporte donc un surplus de 2,25 caractères par page ($234 : 104$).

La moyenne du nombre de caractères par page pour l'édition 94 est 925,25 ($923 + 2,25$).

◆ Exercice n°11 p.220

Lettres	A	E	I	O	U
Angles (en °)	37	61	33	24,5	24,5
Effectifs	9	15	8	6	6

◆ Exercice n°13 p.220

Riz (en kg)	15	25	30	35	40	45	50	60	65
Effectifs	1	3	4	4	4	4	6	2	2
Angles (en °)	6	18	24	24	24	24	36	12	12

◆ Exercice n°15 p.220

Riz (en kg)	15	25	30	35	40	45	50	60	65
Effectifs	1	3	4	4	4	4	6	2	2
Bandes	1	3	4	4	4	4	6	2	2

Remarque : Les longueurs des bandes sont exprimées en cm.

◆ Exercice n°17 p.220

a) Population : pièces du magasin. b) Modalités : vis, écrous, rondelles.

Pièces	Vis	Écrous	Rondelles
Effectifs	22	30	23
Fréquences	0,29	0,40	0,31
Longueurs de bande (en cm)	2,9	4	3,1

◆ Exercice n°5 p.219

Stylos achetés	1	2	3	4
Effectifs	4	38	14	8
Bâtons (en cm)	1	9,5	3,5	2

◆ Exercice n°5 p.219

Pointures	35	36	37	38	39	40	41
Effectifs vendus	20	45	10	15	25	55	30
Fréquences	0,1	0,22	0,05	0,07	0,12	0,27	0,15

♦ Exercice n°21 p.221

Le diagramme montre la répartition de 2,5 % de 1 350 milliards de milliards de litre d'eau. Cela représente $33,75 \times 10^{18}$ litres d'eau.

Répartition	Banquises	Nappes souterraines	Eaux résiduelles	Total
Angles (en °)	130	45	5	180
Quantité d'eau (en l)	$24,375 \times 10^{18}$	$8,4375 \times 10^{18}$	$0,9375 \times 10^{18}$	$33,75 \times 10^{18}$

□ Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n°22 p.221

- a) Les bébés nés ce jour.
b) Effectif total : 18.
c) Le sexe des bébés.

d)

Sexe	F	M
Effectif	10	8
Longueur de bande (en cm)	5	4
Angle (en °)	100	80

♦ Exercice n°23 p.221

- a) Les 11 joueurs de l'équipe. b) Fréquences : 1 joueur (0,09) ; 2 joueurs (0,18) ; 4 joueurs (0,36).
c) Longueurs de bâton en cm : 1 joueur (0,9) ; 2 joueurs (1,8) ; 4 joueurs (3,6).
d) Moyenne des buts marqués : $\frac{0+0+0+6+0+5+1+2+2+8+0+9}{11} = \frac{60}{11} = 5,45$

♦ Exercice n°24 p.221

- a) Production totale : $3 + 6 + 8 + 12 + 14 = 43$ (en milliers de tonnes)

Centres	A	B	C	D	E
Angles (en °)	$\frac{180 \times 3}{43} = 12,5$	$\frac{180 \times 6}{43} = 25$	$\frac{180 \times 8}{43} = 33,5$	$\frac{180 \times 12}{43} = 50$	$\frac{180 \times 14}{43} = 59$

♦ Exercice n°25 p.221-222

- a) Les pays d'Afrique francophone ; b) La population en 1990 ; c) Caractère quantitatif ;
d) Moyenne : 8 258 162.

♦ Exercice n°26 p.222

Notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	1	2	6	4	10	9	2	4	11	10
Fréquences	0,01	0,02	0,05	0,03	0,08	0,07	0,02	0,03	0,08	0,08

Notes	11	12	13	14	15	16	17	18	
Effectifs	12	14	15	13	9	4	1	2	129
Fréquences	0,09	0,11	0,11	0,1	0,07	0,03	0,01	0,02	

- Nombre de candidats : 129.
- Moyenne : 10,21

♦ Exercice n°27 p.222

- Effectif total : 40.
- Moyenne : 49,775 cm.

♦ Exercice n°28 p.222

Notes	3	7	8	9	10	11	13	15	17	19
Effectifs	2	3	4	1	1	2	5	4	2	1

- Moins de 8 de moyenne : 20 %.
- Plus de 12 de moyenne : 48 %.