

Avant – propos

La collection « MATH.IVOIRE » est conçue par des professeurs de Mathématiques de la Côte d'Ivoire.

Nos diverses expériences nous ont amenés à concevoir ce document dont la variété des exercices permet de développer toutes les notions au programme de l'enseignement des Mathématiques en Côte d'Ivoire.

Il est composé d'exercices d'application, d'exercices de synthèse et de sujets de baccalauréat session normale.

La perfection étant un objectif à atteindre, toute proposition d'amélioration sera favorablement accueillie.

Les auteurs

SOMMAIRE

<u>1^{ère} Partie : ANALYSE ET PROBABILITE</u>	pages
LEÇON 1 : LIMITE – CONTINUE – DERIVABILITE.....	3
LEÇON 2 : PRIMITIVES.....	9
LEÇON 3 : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN	14
LEÇON 4 : FONCTION EXPONENTIELLES FONCTIONS PUISSANCES	24
LEÇON 5 : CALCUL INTEGRAL	34
LEÇON 6 : SUITES NUMERIQUES	38
LEÇON 7 : PROBABILITE	53
LEÇON 8 : STATISTIQUE	55
LEÇON 9 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES.....	57
<u>2^{ème} Partie : ALGEBRE ET GEOMETRIE</u>	
LEÇON 1 : BARYCENTRES	61
LEÇON 2 : NOMBRES COMPLEXES	65
LEÇON 3 : ARITHMETIQUE	72
LEÇON 4 : ISOMETRIES DU PLAN	77
LEÇON 5 : SIMILITUDES DU PLAN	82
LEÇON 6 : CONIQUES	91
LEÇON 7 : GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE.....	95
<u>3^{ème} Partie : SUJETS</u>	97

LEÇON 1 : LIMITES, CONTINUITÉ ET DERIVABILITÉ

EXERCICE 1

Calculer les limites suivantes

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{x \rightarrow 2\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) ; 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{2 \sin x}{3 + \cos x} \right) ; 3) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} \right) \\
 &4) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x - \sqrt{6x + 4}}{x^2 - 4} \right) ; 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 4x - 3}{x^2 + 5x - 1} \right) ; 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} \right) \\
 &7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \right) ; 8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) ; 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 4} \right) \\
 &10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(x^3)}{x} \right) ; 11) \lim_{x \rightarrow +\infty} x E\left(\frac{1}{x}\right) ; 12) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{E(x)}{x} \right) ; \\
 &13) \lim_{x \rightarrow 0^-} x E\left(\frac{1}{x}\right) ; 14) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{E(x)}{x} \right) ; 15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10 - x}{5 - \cos x} \right) ; \\
 &16) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi} \right) ; 17) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) ; 18) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 1} \right) ; \\
 &19) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x} \right) ; 20) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos 3x + \sin 3x}{\cos x - \sin x} \right) ; 21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(4x))}{3x} ; \\
 &22) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3}{1 - \cos x} \right) ; 23) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(\pi E(x)) + 1}{1 - \cos x} \right) ; 24) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin}{x} - 1}{x} \right) ; 25) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2} \right)
 \end{aligned}$$

Indications : Pour $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ et $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$.

EXERCICE 2

Soit la fonction h définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - E(x)$

- Déterminer l'ensemble de définition de h
- Prouver que $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq h(x) \leq 1$
- Etudier la continuité de h en un point n ($n \in \mathbb{Z}$)

2) Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

- Déterminer l'ensemble de définition de g
- Prouver que g est continue au point 1
- Soit n un entier relatif. Etudier la continuité de g au point n

EXERCICE 3

I On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{1}{2}$$

Prouver que f est continue en 0

II Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de g

2) Prouver que g est prolongeable par continuité en 2

3) Déterminer les équations des asymptotes éventuelles à la courbe de g on justifiera les réponses

III Soit la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de h

2) Prouver que la fonction h est prolongeable par continuité en 0

3) Définir le prolongement k de h en 0

IV - Soit la fonction $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 1}{|x| - 1}$$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de p

b) Ecrire $p(x)$ sans les barres de valeur absolue

2) Prouver que p est prolongeable par continuité en -1 et définir ce prolongement q

3) a) Calculer les limites de q

b) Prouver que la droite (Δ) d'équation $y = x + 3$ est asymptote à (ζ_q) en $+\infty$

c) Etudier les positions relatives de (ζ_q) et (Δ)

4 a) Justifier que (ζ_q) admet une asymptote verticale dont on précisera une équation

b) Etudier les variations de q et dresser son tableau de variations

c) Tracer soigneusement (ζ_q)

EXERCICE 4

1) Calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 2}{x^2 - 1} \right) ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x^2 - x} ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}} - 1}{x\sqrt{x} - 1} \right)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^{*+}$

$$a) 3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 1 = 0 ; \quad b) 3x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

EXERCICE 5

I - Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0

1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad x_0 = 0 ; \quad x \mapsto |2x - 4| \quad \text{et} \quad x_0 = 2$$

3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x|x| + 1 \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

II - calculer la fonction dérivée de la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$1) g(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad ; \quad 2) g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad ; \quad 3) g(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$4) g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad 5) g(x) = |3x^2 + x - 4|$$

III - Soit la fonction $h : \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \tan x$$

(ζ_h) est la courbe de h

- 1) Etudier les variations de h
- 2) Calculer les limites de h et dresser son tableau de variations
- 3) Justifier que h est une bijection
- 5) Calculer h'' et déterminer les variations de h'
 - a) Justifié que pour $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, $|h'(x)| \leq 2$
 - b) En déduire que pour $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, $|h(x)| \leq 2x$
- 6) a) Trouver une équation de la tangente (T) à (ζ_h) au point d'abscisse 0
b) Etudier les positions relatives de la courbe (ζ_h) et de la droite (T)
- 7) Tracer (T) , (ζ_h) et $(\zeta_{h^{-1}})$ sur le même graphique
- 8) a) Calculer $(h^{-1})'(0)$

b) Prouver que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

c) En déduire $(h^{-1})'(0)$

9) Soit la fonction p définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $p(x) = h^{-1}(x) + h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

- a) Prouver que pour $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $p'(x) = 0$
- b) En déduire $p(x)$ pour $x \in]-\infty ; 0[$ et $p(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$

IV ACCROISSEMENTS FINIS

1 a) Si $f'(x) \leq 1$ sur $[1 ; \pi]$ alors $f(1) - f(\pi) \leq 1 - \pi$

b) Si $f'(x) \leq 1$ alors $\left| f\left(\frac{2\pi}{3}\right) - f(0) \right| \leq \frac{2\pi}{3}$

Vrai ou faux. Justifier votre réponse

2) Démontrer que, pour tout réel x , on a $|\sin x| \leq |x|$

3) En appliquant les inégalités des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur le segment $[10\,000 ; 10\,001]$, déterminer une majoration de l'erreur

commise en prenant 100 comme approximation de $\sqrt{10\,001}$.

4) Démontrer que l'on a, pour tout réel a et b :

$$\text{si } 0 < a \leq b \quad \text{alors} \quad \frac{b-a}{b} \leq \ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}$$

V 1) Etudier et représenter la fonction f_k

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x |x| + 1 \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad ; \quad x \mapsto x + \sqrt{|x^2 - 1|}$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\cos x}{2 + \cos x} \quad ; \quad x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$$

EXERCICE 6

1) Les fonctions $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ et $g : x \mapsto x - 3$ sont-elles égales ?

Si non que représente g pour f .

2) Soit $f(x) = \frac{1}{x} \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right)$

Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, on le notera g .

$$f :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

3) Soit la fonction

$$x \mapsto \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$$

Trouver la fonction k prolongement par continuité de f en 0.

EXERCICE 7

$$h : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

On considère la fonction

$$x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 6}{2x - 4}$$

1) Déterminer les nombres réels a , b et c tel que pour tout nombre réel différent de 2 :

$$h(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

2) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $x - 2y + 5 = 0$ est une asymptote oblique à (ζ) , courbe représentative de h

b) Etudier les positions relatives de (Δ) et (ζ) .

3) Sachant que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$ étudiez les variations de h et dressez son tableau de variation.

EXERCICE 8

Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x - 1}{x^2 - |x|}$

et (Γ) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J)

1- a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g

b) Ecrire g sans les barres de valeur absolue

c) Montrer que g est prolongeable par continuité au point 1

2- a) Par la suite, on pose $g(1) = 1$

$$\text{pour } x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0[, \quad g'(x) = \frac{2 - (x - 1)^2}{(x^2 + x)^2}$$

b) Préciser le sens de variation de g sur les intervalles $] -\infty ; -1[$ et $] -1 ; 0[$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

3- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de g sur D_g

4- a) Trouver une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 1

b) Préciser les asymptotes à (Γ)

c) Tracer (Γ)

EXERCICE 9

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - |x|}$

Et (ξ) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J)

1 a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

b) Ecrire f sans les barres de valeur absolue

c) Montrer que f est prolongeable par continuité au point -1

Par la suite, on pose $f(-1) = -1$

2 a) Pour $x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2 - (x+1)^2}{(x^2 - x)^2}$

b) Préciser le sens de variation de f sur les intervalles $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3 a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f sur D_f

4 a) Trouver une équation de la tangente (T) à (ξ) au point d'abscisse -1

b) Préciser les asymptotes à (ξ)

c) Tracer (ξ)

EXERCICE 10

Soit la fonction $U :]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \tan(x)$

1- Prouver que U est une bijection

2- Soit U^{-1} sa bijection réciproque. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $(U^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

PROBLEME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 2x|}}{x}$

et de représentation graphique (ζ)

I- 1) Démontrer que pour $x \in] - \infty ; 0 [\cup [2 ; + \infty [$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}$

et pour $x \in] 0 ; 2]$, $f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x}$

2) Prouver que f n'est pas dérivable à gauche et à droite de 2

3) a) Prouver que pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{\left|1 - \frac{2}{x}\right|}$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

c) Justifier que la droite (OJ) est asymptote verticale à (ζ)

4) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) Interpréter graphiquement ces limites.

5) Soit (Δ) la droite d'équation $y = 1$. Etudier les positions relatives de (ζ) et (Δ) sur $] 0 ; 2]$

II - 1) Pour $x \in] 0 ; 2]$

a) Calculer $f'(x)$

b) En déduire que f est décroissante sur $] 0 ; 2]$

2) Pour $x \in] - \infty ; 0 [\cup [2 ; + \infty [$

a) Calculer $f'(x)$

b) En déduire que $f'(x)$ et x ont le même signe

c) Préciser le sens de variation de f sur $x \in] - \infty ; 0 [\cup [2 ; + \infty [$

3) Dresser le tableau de variations de f

4) a) Trouver une équation de la tangente au point 1, on la note (T)

b) Tracer (T) , les asymptotes et (ζ)

III- Soit h la restriction de f à l'intervalle $] 0 ; 2]$

1) Montrer que h est une bijection de l'intervalle $] 0 ; 2]$ sur un intervalle $\mathfrak{I}$ que l'on précisera

2) a) Calculer $(h^{-1})'(1)$

b) Montrer que pour $x \in \mathfrak{I}$, $h^{-1}(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$

c) Calculer $(h^{-1})'(x)$ et vérifier le résultat de la question III- 2) a)

3) Tracer $(\zeta_{h^{-1}})$ sur le même graphique que (ζ)

EXERCICE 1

Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I donné

1. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0; +\infty[$; 2. $f(x) = (2x + 3)^4$; $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = x(x^2 + 1)^3$; $I = \mathbb{R}$; 4. $f(x) = \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 2)^3}$; $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$; $I =]-\infty; 0]$ 6. $f(x) = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}$; $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$
7. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$; $I =]0; 1[$; 8. $f(x) = \sin x \cos x$; $I = \mathbb{R}$
9. $f(x) = \sin^2 x$; $I = \mathbb{R}$; 10. $f(x) = \cos(3x) \cdot \sin(4x)$; $I = \mathbb{R}$
11. $f(x) = \cos^4 x$; $I = \mathbb{R}$; 12. $f(x) = \tan^2 x$; $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
13. $f(x) = \tan x + \tan^3 x$; $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$; 14. $f(x) = \sin^2 x \cos^3 x$; $I = \mathbb{R}$
15. $f(x) = \sin^5 x$; $I = \mathbb{R}$; 16. $f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$; $I =]0; \pi]$

EXERCICE 2

Déterminer la primitive G de la fonction g sur l'intervalle I , qui vérifie la condition donnée

1. $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 + 2x^2 - 1}{x^2}$; $I =]-\infty; 0[$ et $G(-2) = 3$
2. $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$; $I =]2; +\infty[$ et $G(4) = -1$
3. $g(x) = \sin x - 2\cos(2x) + \sin(5x)$; $I = \mathbb{R}$ et $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - \pi}{2}$
4. $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x - 1)^2}$
 - a. Trouver trois réels a, b, c pour que : $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 1)^2}$
 - b. En déduire la primitive de f sur $]1; +\infty[$ qui s'annule au point 0

EXERCICE 3

I - On pose pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $U(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ et $V(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$

1. Vérifier que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $U'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$
2. Déterminer la primitive de V sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ qui s'annule au point $\frac{\pi}{6}$

II- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cos(2x)$

On pose $F(x) = (ax + b) \cos(2x) + (cx + d) \sin(2x)$

Déterminer a, b, c et d pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$

III- On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 \sqrt{2x+1}$$

1. On pose $G(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot \sqrt{2x+1}$

Déterminer les nombres réels a, b, c et d pour que G soit une primitive

de g sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$

2. Trouver la primitive H de g sur $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ qui prend la valeur -1 au point 0 .

EXERCICE 4

I- Déterminer une primitive F de f sur un intervalle I

1) $f(x) = x(3x^2 - 1)^3$; $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \tan^3(x) + \tan^5(x)$; $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

II- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x \cos(2x)$

Posons $G(x) = \frac{1}{2}x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x)$

Montrer que G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

2) Déterminer la primitive H de g sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -1 en $\frac{\pi}{2}$

EXERCICE 5

Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I donné

1. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0; +\infty[$; 2. $f(x) = (2x+3)^4$; $I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = x(x^2+1)^3$; $I = \mathbb{R}$; 4.

5. $f(x) = \sqrt{1-4x}$; $I =]-\infty; 0]$ 6. $f(x) = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}$; $I = \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$

7. $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$; $I = \mathbb{R}$ 8. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$; $I = \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$

8. $f(x) = \sin x \cos x$; $I = \mathbb{R}$; 9. $f(x) = \sin^2 x$; $I = \mathbb{R}$

10. $f(x) = \cos(3x) \cdot \sin(4x)$; $I = \mathbb{R}$; 11. $f(x) = \cos^4 x$; $I = \mathbb{R}$

12. $f(x) = \tan^2 x$; $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$; 13. $f(x) = \tan x + \tan^3 x$; $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

14. $f(x) = \sin^2 x \cos^3 x$; $I = \mathbb{R}$; 15. $f(x) = \sin^5 x$; $I = \mathbb{R}$

16. $f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$; $I =]0; \pi]$; 17. $f(x) = \tan^3(x) - \tan^5(x)$; $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

EXERCICE 6

Déterminer la primitive G de la fonction g sur l'intervalle I , qui vérifie la condition donnée

1. $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 + 2x^2 - 1}{x^2}$; $I =] - \infty ; 0 [$ et $G(-2) = 3$

2. $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$; $I =] 2 ; + \infty [$ et $G(4) = -1$

3. $g(x) = \sin x - 2\cos(2x) + \sin(5x)$; $I = \mathbb{R}$ et $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - \pi}{2}$

4. $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x - 1)^2}$

a. Trouver trois réels a, b, c pour que : $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 1)^2}$

b. En déduire la primitive de f sur $] 1 ; + \infty [$ qui s'annule au point 0

EXERCICE 7

I- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin(x)$.

1. Prouver $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x \cos(x) + \sin(x)$.

2. Déterminer les primitives de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

3. En déduire la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 2 en $\frac{\pi}{6}$.

EXERCICE 8

I- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cos(2x)$

On pose $F(x) = (ax + b) \cos(2x) + (cx + d) \sin(2x)$

Déterminer a, b, c et d pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$

II- On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 \sqrt{2x + 1}$$

1. On pose $G(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot \sqrt{2x + 1}$

Déterminer les nombres réels a, b, c et d pour que G soit une primitive de g sur

l'intervalle $\left] - \frac{1}{2} ; + \infty \right[$

2. Trouver la primitive H de g sur $\left] - \frac{1}{2} ; + \infty \right[$ qui prend la valeur -1 au point 0.

EXERCICE 9

I / Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

1 Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$

1) Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

II / On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$$

- 1) Etudier les variations de g
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- b) Dresser le tableau de variation de g
- 3) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (ζ_g) en $+\infty$
- b) Etudier les positions relatives de (ζ_g) et (D)
- c) Déterminer une équation de la droite (D') asymptote à (ζ_g) en $-\infty$
- 4) Tracer (ζ_g) soigneusement
- 5) Soit h la restriction de g à l'intervalle $[0; +\infty[$
 - a) Justifier que h est une bijection de l'intervalle $[0; +\infty[$ sur un intervalle $\mathfrak{I}$ que l'on précisera
 - b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h . Dresser le tableau de variation de h^{-1}
 - c) Calculer $(h^{-1})'(\sqrt{2})$
- 6) a) Prouver que pour $x \in [1; +\infty[$, $h^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
- b) Calculer $(h^{-1})'(x)$ et vérifier le résultat de la question 5) c)
- 7) Tracer $(\zeta_{h^{-1}})$ sur le même graphique que (ζ_g) .

PROBLEME

I) f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ telles que

$$\forall x \in [a; b], f'(x) \leq g'(x)$$

- 1) on pose $V(x) = f(x) - f(a) - g(x) + g(a)$
- a) calculer $V(a)$
- b) justifier que V est décroissante sur $[a; b]$
- 2) Prouver que $\forall x \in [a; b], f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a)$
- 3) En admettant que, $\forall x \in [0; +\infty[, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$

$$\text{Prouver que } \forall x \in [0; +\infty[, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

$$h : \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

II) On considère la fonction

$$x \mapsto \tan(x)$$

- 1) a) Prouver que h est une fonction impaire
- b) Interpréter graphiquement ce résultat
- 2) a) $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, donner $h'(x)$ et calculer $h''(x)$
- b) En déduire que pour $a \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$; $b \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ tels que $a < b$

Démontrer que $\frac{b-a}{\cos^2(a)} \leq h(b) - h(a) \leq \frac{b-a}{\cos^2(b)}$

3) a) Justifier que h est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

b) Prouver que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} h(x) = +\infty$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} h(x)$

c) Dresser le tableau de variation de h

4) a) Trouver une équation de la tangente (T) à (ζ_h) au point d'abscisse 0

b) Préciser les asymptotes à (ζ_h)

c) Tracer (ζ_h) dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 2 cm)

5) a) Démontrer que h est une bijection

b) Dresser le tableau de variation de la réciproque h^{-1} de h

c) Tracer $(\zeta_{h^{-1}})$ sur le même graphique que (ζ_h)

6) Justifier que h^{-1} est dérivable au point $\sqrt{3}$ et calculer $(h^{-1})'(\sqrt{3})$

7) On admet que $\forall x \in \mathbb{R}, (h^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Posons pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, P(x) = h^{-1}(x) + h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Démontrer que $P'(x) = 0$

b) En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[P(x) = \frac{\pi}{2}$; c) Déterminer $P(x)$ pour $x \in]-\infty; 0[$

8) On pose $\forall x \in \mathbb{R}, q(x) = \frac{1}{1+4x^2}$

Déterminer une primitive Q de q sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 1

Réduire les nombres suivants à leurs formes les plus simples

$$A = \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$$

$$B = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{avec } n \geq 3$$

$$C = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{avec } n \geq 3$$

$$D = \ln(e^3) - 3 \ln(\sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$$

EXERCICE 2

1° Tracer la courbe (Γ) de la fonction $\ln$

2) A l'aide de (Γ) tracer la courbe de la fonction f_k définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

On précisera le procédé utilisé

$$f_1(x) = \ln(x) + 1 \quad ; \quad f_2(x) = 2 - \ln(4 - x) \quad ; \quad f_3(x) = 2 - \ln(x)$$

$$f_4(x) = 2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad f_5(x) = \ln(2 - x)$$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

$$\ln(x + 2) = \ln(3 - x) \quad ; \quad \ln(x^2 - 4) = \ln(1 - 4x) \quad ; \quad (2 - x) \ln(x + 3) = 0 \quad ;$$

$$(\ln(x))^2 - \ln(x) - 2 = 0 \quad ; \quad \ln(x^2 - x - 2) \leq \ln(2x^2 - x - 6) \quad ;$$

$$(x^2 - 4) \ln(3 - x) \leq 0 \quad \frac{2 \ln(x) - 1}{\ln(x) + 2} \geq \frac{\ln(x) + 2}{\ln(x) - 4} \quad ; \quad \frac{3x \ln|x|}{x^2 - 1} \leq 0 \quad ;$$

EXERCICE 4

Déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée de la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad ; \quad g(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

$$g(x) = x \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \quad ; \quad g(x) = \frac{x}{\ln(x)} \quad ; \quad g(x) = \frac{2 \ln(x)}{\ln(x) - 1} \quad ;$$

$$g(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

EXERCICE 5

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \quad ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} \quad ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad ;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad ; \quad 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} \quad ; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$$

Pour $n \geq 2$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n)}{x}$; 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+2)}{2\ln x - 1}$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+2)}{\ln(2x-1)}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

EXERCICE 6

I - Déterminer une primitive H de la fonction h sur l'intervalle I

1) $h(x) = \frac{1}{3x+1}$ $I =]0; +\infty[$; 2) $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $I =]-1; 1[$

3) $h(x) = \frac{3x^2-x+1}{x^2-1}$ $I =]-\infty; -1[$; 4) $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ $I =]0; +\infty[$

5) $h(x) = \frac{1}{x \ln^3 x}$ $I =]0; 1[$; 6) $h(x) = \frac{1}{x \ln x}$ $I =]0; 1[$

7) $h(x) = \tan x - \tan^3 x$ $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; 8) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $I =]1; +\infty[$

9) $h(x) = 2x \ln x - x$ $I =]0; +\infty[$; 10) $h(x) = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x}$ $I =]0; 1[$

II - soit g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

1) Déterminer l'ensemble de définition de g

2) Prouvé que pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

3) Soit la fonction $x \mapsto \frac{2 - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Déterminer une primitive H de h sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 7

Etudier et représenter la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

I- 1) $f(x) = \frac{2 \ln x}{\ln x - 1}$; 2) $f(x) = \frac{x}{\ln|x|}$; 3) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$

4) $f(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$; 5) $f(x) = x + \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$;

II- 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; f est une fonction : paire ☐ impaire ☐

2) Complète $f'(x) =$

EXERCICE 8

I- Soit la fonction h définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $h(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1})$

1) Déterminer l'ensemble de définition de h

2) Prouver que h est une fonction impaire ; 3) Calculer $h'(x)$.

II- On considère les fonctions v_0 et v_1 définies sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$ par :

$$v_0 = \frac{1}{\sin(x)} \quad \text{et} \quad v_1 = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right|$$

1) Prouver que v_1 est une primitive de v_0 sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right]$

2) Déterminer la primitive v_2 de la fonction v_0 sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right]$ qui s'annule en $\frac{2\pi}{3}$

EXERCICE 9

1) a) Justifier que la fonction tangente, notée $\tan$, est une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ sur $\mathbb{R}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction u , réciproque de la fonction tangente

2) On admet que pour $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\text{On pose } F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

a) Déterminer le sens de variation de F

b) Justifier à l'aide de variable affine que la fonction F est impaire

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

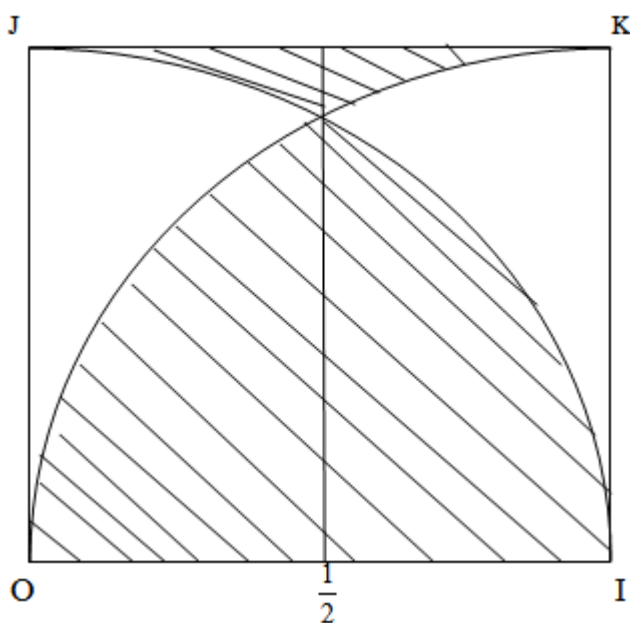
d) Trouver une équation de la tangente à (ζ_F) au point d'abscisse 0.

EXERCICE 3

I - $OKIJ$ est un carré $OI = OJ = 1$.

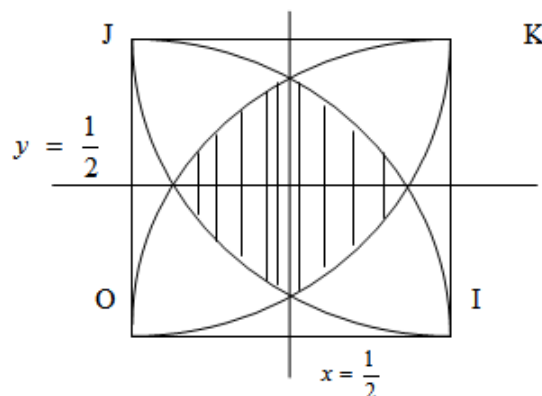
1) On donne $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

Calculer l'aire de la partie hachurée



2) On donne $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{12}$.

Calculer l'aire de la partie hachurée



II - Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x^2}$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t) dt$

- 1 - Etudier les variations de f
- 2 - a) Prouver que f est une fonction paire ;
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 c) Dresser le tableau de variation de f
- 3 - Tracer (ζ_f) sur un papier millimétré unité graphique : 5 cm
- 4 - a) Démontrer que F est une fonction impaire
 b) Calculer $F'(x)$
 c) Justifier que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- 5- a) Démontrer que $\forall t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}$
 b) Prouver que pour $x \geq 0, F(x) \leq F(1) + \frac{1}{e}$
 c) En déduire que F admet une limite finie ℓ en $+\infty$
- 6- a) Dresser le tableau de variation de F
 b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (ζ_F) en 0
 c) Tracer l'allure de (ζ_F) sur le même graphique que (ζ_f) . On prendra $\ell = 0,89$

PROBLEME 1

Dans cet exercice, toutes les représentations graphiques seront faites dans un même repère du plan (O, I, J) unité 4 cm

PARTIE A

On considère la fonction numérique f définie par

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left(\frac{|x|+2}{|x|} \right) & x \neq 0 \\ \text{et } f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est impaire puis préciser son domaine d'étude
- 2 a- Prouver que f est continue en 0
 b- f est-elle dérivable en 0 ? En déduire l'ensemble de dérivabilité de f
 c- déterminer la limite de f en $+\infty$
- 3) a- Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$.
 b- Dresser le tableau de variation de f' . En déduire le signe de $f'(x)$
 c- Dresser le tableau de variations de f
- 4) (C) désigne la représentation graphique de f . Tracer (C) après avoir précisé ses tangentes aux points d'abscisse 0 et 2
- 4) On pose $U(x) = \frac{2x}{x+2}$ avec $x \in [0; +\infty[$ de représentation graphique (H)
 a- Dresser le tableau de variations de U
 b- Vérifier que pour $x \in]0; +\infty[$, $f(x) - U(x) = x f'(x)$
 En déduire les positions relatives de (C) et (H) sur l'intervalle $[0; +\infty[$
 Tracer (H) après avoir précisé sa tangente au point 2.
 c- Soit λ un élément de $]0; +\infty[$
 Prouver que $U(\lambda)$ est l'ordonnée du point d'intersection de l'axe $(O, \vec{j})$
 et de la tangente à (C) au point d'abscisse λ .

PARTIE B

On veut déterminer l'ensemble E des fonctions g dérivables sur $]0; +\infty[$ vérifiant :

$$g(x) - x g'(x) = \frac{2x}{x+2} \quad (P)$$

Pour $x \in]0; +\infty[$ On pose $G(x) = \frac{g(x)}{x}$

1) Montrer que g vérifie la propriété (P) si et seulement si $G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$

2) Déterminer E

PROBLEME 2

A - Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 - \ln x$

1) Etudier les variations de g sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation

2) a) Prouver que pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$

b) En déduire le signe de $x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$

B - Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$ si $x \neq 0$
et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

2) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et dresser le tableau de variation de f

4) Etudier les positions relatives de (ζ_f) et de la droite (D)
d'équation $y = 1$

5) Tracer soigneusement (ζ_f) . Unité graphique 2 cm

C - 1) a) Démontrer que pour $u \in [0, 1[$, $1 + u \leq \frac{1}{1-u}$

b) En déduire que pour $x \geq 1$, $1 + \frac{\ln x}{x} \leq f(x)$

c) Etudier le signe de $1 + \ln x - f(x)$ pour $x \geq 1$

d) En déduire que pour $x \geq 1$, $1 + \frac{\ln x}{x} \leq f(x) \leq 1 + \ln x$

PROBLEME 3

I / On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln|x|$

1) a) Déterminer D_g

b) Justifier que g est paire et calculer $g(1)$

2) a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe

b) Dresser le tableau de variation de g

3) Déterminer, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$

II / Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - \frac{\ln|x|}{x}$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) , on note (ζ) la représentation graphique de f

1 a) Déterminer l'ensemble de définition D de f

b) Etudier la dérivabilité de f sur D

2 a) Calculer $f'(x)$

b) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

c) Déterminer le signe de $f'(x)$ et préciser le sens de variation de f

3 a) Etudier la limite de f (éventuelle) au point 0. Donner l'interprétation graphique du résultat.

b) Calculer les limites de f à l'infini. Dresser le tableau de variation de f

Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (ζ) en $+\infty$ et en $-\infty$

4) Etudier les positions relatives de (ζ) et (D) . Préciser les coordonnées des éventuels

points d'intersection de (ζ) et (D)

c) Montrer que le point J est centre de symétrie de (ζ)

d) Calculer $f(-e)$ et $f\left(-\frac{1}{e}\right)$ en fonction de e

5) On donne les arrondis d'ordre 2 : $e = 2,72$; $\frac{1}{e} = 0,37$

En déduire les arrondis d'ordre 1 de $f(-e)$ et $f\left(-\frac{1}{e}\right)$

6 a) Tracer avec précision la droite (D) et (ζ)

b) Représenter sur la figure la partie du plan délimitée par (ζ) et (D) et les droites

d'équation $x = -e$; (D_2) d'équation $x = -\frac{1}{e}$.

Calculer l'aire de cette partie

6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[-1; 0[$

a) Montrer que h est une bijection de $[-1; 0[$ sur un intervalle que l'on précisera.

Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (ζ') la représentation graphique de h^{-1}

b) Déterminer une équation de la tangente à (ζ') au point d'abscisse de 0

c) Tracer (ζ') sur le même graphique que (ζ) .

PROBLEME 4

PARTIE A

Soit g la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x) = x \ln|x| - x & \text{si } x \neq 0 \\ \text{et } g(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Etudier la continuité de g en 0

b) Etudier la dérivabilité de g en 0

c) Prouver que g est impaire

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

3) a) Calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

b) Prouver que g est décroissante uniquement sur $[-1; 1]$

c) Dresser le tableau de variation de g

4) a) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x}{\ln|x|} \right)^2 & \text{si } x \neq 0 \\ \text{et } f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) Prouver que l'ensemble de définition de f est $] -\infty ; -1[\cup] -1 ; 1[\cup] 1 ; +\infty [$
 b) Prouver que f est paire
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 0
- 3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 b) Justifier que (ζ_f) admet une branche parabolique dont on précisera la direction en $+\infty$
 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
- 4) a) Montrer que pour $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{2g(x)}{\ln^3|x|}$
 b) Déterminer le sens de variation de f
 c) Dresser le tableau de variation de f
- 5) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On note (ζ_g) et (ζ_f) les courbes représentatives des fonctions g et f
 a) Déterminer les asymptotes à (ζ_f)
 b) Tracer (ζ_g) ; (ζ_f) et ses asymptotes

PROBLEME 5

I- On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$

- 1- Etudier les variations de la fonction g
- 2- a. Calculer les limites de g ; b. Dresser le tableau de variations de g
- 3- Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$

II- Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{2} + 1 + \frac{\ln|x|}{x}$$

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) unité : 2 cm

- 1-a. Préciser D_f
 b. Montrer que le $J(0 ; 1)$ est centre de symétrie de (C)
- 2- Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$
 a. Calculer $f'(x)$
 b. Montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe
 c. Calculer les limites de f aux bornes de $]0 ; +\infty[$
- 3- Dresser le tableau de variations sur D_f

- 4- a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2} + 1$ est asymptote à (C)
 b. Etudier les positions relatives de (D) et (C) ; c. Préciser les autres asymptotes éventuelles
- 5- a. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse e On la notera (T)
 b. Tracer (T) , (D) et (C) .
- III- 1- Montrer que l'équation $x \in]1; +\infty[$, $f(x) = x$ admet une solution unique α
- 2- Montrer que $\ln(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha$
- 3- Soit la fonction $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x^2}{2} - x$
- a- Tracer $(C_{\ln})$ et (C_h) sur un même graphique
 b- Déterminer en s'appuyant sur le graphique l'encadrement de α par deux décimaux Consécutifs d'ordre 1
- 4- Etudier les positions relatives de (C) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$
- 5- Soit m , un nombre réel
 Déterminer suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

PROBLEME 6

- I) Soit la fonction $U:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x - 1 - \ln x$
- 1) Prouver que $\forall x \in]0; +\infty[$, $U'(x) = \frac{x-1}{x}$
- 2) Etudier le signe de $U'(x)$ et préciser les variations de U
- 3) Dresser le tableau de variation de U (on ne demande pas de calculer les limites de U)
- 4) A l'aide du tableau de variation de U , démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, $\ln(x) \leq x - 1$
- 5) En utilisant le résultat précédent, démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$

- II) On considère la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x \ln x & \text{si } x > 0 \\ \text{et } f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) Unité grap : 2 cm

- 1) a) Préciser l'ensemble de définition de f
 b) Prouver que f est continue en 0
 c) Justifier que f n'est pas dérivable à droite de 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 2) a) Prouver que pour $x > 0$, $f'(x) = \ln(x) + 1$
 b) Etudier les variations de f
 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et dresser le tableau de variation de f
- 3) a) Prouver que la droite (T) d'équation $y = x - 1$ est tangente à (ζ) au point d'abscisse 1
 b) Prouver que (ζ) est au dessus de (T) on utilisera le résultat de la question I) 5)
- 4) a) Résoudre l'équation $f(x) = x$
 b) Tracer soigneusement (ζ)
- 5) Déterminer une primitive g de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$ (on pourra utiliser f')

PROBLEME 7

PARTIE A

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^2 + x - 2 = 0$

2- En déduire les solutions de l'équation $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$ puis que $(\ln x)^2 + \ln x - 2 < 0$

Pour tout $x \in]e^{-2}; e[$

PARTIE B

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x(\ln x)^2 - x \ln x - x - 1$

- 1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$
- 2) Démontrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$
- 3) a) Donner le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x
b) Dresser le tableau de variation de g
- 4) Démontrer que l'équation, $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$ et que $5,4 < \alpha < 5,5$
- 5) Démontrer que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty; \alpha]$ et $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [\alpha; +\infty[$

PARTIE C

Soit la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1+x \ln x}{-1+\ln x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
 et (C) sa courbe représentative

dans un repère orthonormé (O, I, J) (UNITE : 0,5 cm)

- 1) Démontrer que $D_f = [0; e[\cup]e; +\infty[$
- 2) a) Etudier la continuité de f en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Donner une interprétation graphique des résultats obtenus
- 2) a) calculer les limites de f à gauche et à droite en e . Donner une interprétation graphique des résultats obtenus
b) Calculer la limite de f en $+\infty$
- 4) Démontrer que $\forall x \in [0; e[\cup]e; +\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x(-1+\ln x)^2}$
- 5) a) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f
b) Dresser le tableau de variation de f
- 6) a) Donner au dixième près les valeurs de $f(8)$; $f(10)$; $f(11)$; $f(15)$
b) Construire les tangentes et les asymptotes à (C) et (C') dans le repère (O, I, J) on prendra $e = 2,7$ et $\alpha = 5,4$

PARTIE D

Soit h la restriction de f à $[0; e[$

- 1) Démontrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} d'un intervalle K à préciser vers $[0; e[$
- 2) Démontrer que h^{-1} est dérivable en -1 puis calculer $(h^{-1})'(-1)$
- 3) Donner le sens de variation de h^{-1} et dresser son tableau de variation
- 4) Soit (Γ) la courbe représentative de h^{-1} . Construire (Γ) sur le même repère que (C). on utilisera des couleurs différentes pour (Γ) et (C)

PROBLEME 8

Soit la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{(\ln x)^n}{x}$$

Où $n \in \mathbb{N}^*$. (ζ_n) désigne la courbe de f_n dans un repère orthonormé (O, I, J)

I - Etudier et représenter f_1

II - On considère que $n \geq 2$

- 1) Prouver que toutes les courbes (ζ_n) passent par un point fixe que l'on déterminera
- 2) Calculer $f'_n(x)$
- 3) On suppose que n est pair
 - a) Calculer les limites de f_n
 - b) Etudier le signe de $f'_n(x)$
 - c) Dresser le tableau de variations de f_n
- 4) On suppose que n est impair
 - a) Calculer les limites de f_n
 - b) Etudier le signe de $f'_n(x)$
 - c) Dresser le tableau de variation de f_n

LEÇON 4 :**FONTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE****EXERCICE 1**

Réduire chacune des expressions suivantes à sa forme la plus simple

$$A = e^{-3} \times e^5 \times \sqrt{e} ; \quad B = \frac{e^{-3}}{e^{-5}} ; \quad C = \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}} + e^{\frac{1}{2} \ln(4)} - \ln(e^{-2})$$

EXERCICE 2

Démontrer, pour $x \in \mathbb{R}$ que

$$1) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = 1$$

$$2) \frac{4e^x}{2e^x + 3} = \frac{4}{2 + 3e^{-x}} = 2 - \frac{6}{2e^x + 3}$$

$$3) \frac{e^{2x}}{e^x + 1} = e^x - \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

EXERCICE 3

1) Tracer la courbe (K) de la fonction exponentielle

2) A l'aide de (K) tracer la courbe de la fonction g_k où $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On précisera le procédé utilisé

$$1) g_1(x) = e^{x-2} + 1 ; \quad 2) g_2(x) = 2 - \frac{1}{e^{x-2}} ; \quad 3) g_3(x) = e^{4-x}$$

$$4) g_4(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$$

EXERCICE 4

I Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

$$1) e^{\frac{3x-1}{x}} = e^{2+x} ; \quad 2) 3e^{2x} - e^x - 2 = 0 \quad 3) \frac{e^x - 5}{e^x + 1} = \frac{3e^x - 10}{4e^x + 2}$$

$$4) e^x - 3e^{-x} + 2 = 0 ; \quad 5) \ln(1 - e^x) = x ; \quad 6) e^{2x} - 8e^{-x} = 0$$

$$7) (3e^x - 1)(e^{2x} + e^x - 2) < 0$$

II Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$1) \begin{cases} 2e^x + 3e^y = 1 \\ e^x - 5e^y = 7 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} e^x - 2e^y = -1 \\ e^x \times e^y = 6 \end{cases}$$

EXERCICE 5

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction k définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée

$$1) k(x) = \frac{3e^x - 1}{2e^x - 3} ; \quad 2) k(x) = (2x^2 - x - 1)e^{-x} ; \quad 3) k(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}} \quad 4)$$

$$k(x) = \ln(1 + e^x) ; \quad 5) k(x) = \ln|e^x - e^{-x}| ; \quad 6) k(x) = \ln(e^x + e^{-x})$$

$$7) k(x) = \frac{x-1}{e^{\frac{1}{x}}} ; \quad 8) k(x) = e^{-x} \ln(x) ; \quad 9) k(x) = (1 - x^3)e^{-x}$$

EXERCICE 6

Soit $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

1) Calculer $p'(x)$ et $p''(x)$

2) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ et

$$\text{pour } x \geq 0, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}; \text{ pour } x \leq 0, e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

II - Soit la fonction $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 e^{-x}$$

1) Calculer $q'(x)$, $q''(x)$ et déterminer une relation liant $q(x)$, $q'(x)$

$$q''(x) \text{ et } e^{-x}$$

2) Soit n un entier supérieur ou égal à 2

Calculer la dérivée d'ordre n de q en fonction de n

EXERCICE 7

Calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \right); \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x)$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(e^x - e^{-x}); \quad 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - e^{-x}) - x; \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 3}{e^x + 2}$$

$$7) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 e^{-\frac{1}{x}}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{-\frac{1}{x}} - x \right); \quad 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x e^x - e^{2x})$$

$$10) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

EXERCICE 8

Déterminer une primitive K de la fonction k sur l'intervalle I

$$1) k(x) = \frac{3e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x}} \quad I = \mathbb{R}; \quad 2) k(x) = \frac{e^{2x}}{3e^{2x} + 2} \quad I = \mathbb{R}$$

$$3) k(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \quad I =]0; +\infty[; \quad 4) k(x) = \frac{1}{1 + e^x} \quad I = \mathbb{R}$$

$$5) k(x) = \frac{2e^{2x} + 3e^x + 2}{1 + e^x} \quad I = \mathbb{R}; \quad 6) k(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad I = \mathbb{R}$$

$$7) k(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 1} \quad I =]0; +\infty[; \quad 8) k(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) \quad I =]0; +\infty[$$

$$9) k(x) = \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 1} \quad I =]-\infty; 0[; \quad 10) k(x) = \frac{1 - e^{5x}}{1 - e^{-x}} \quad I =]0; +\infty[$$

$$11) k(x) = x^2 e^{-x} \text{ on posera } K(x) = (ax^2 + bx + c) e^{-x}$$

EXERCICE 9

Etudier et représenter la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$1) h(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}; \quad 2) h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad 3) h(x) = x + 1 + xe^x$$

$$4) h(x) = e^x \ln x; \quad 5) h(x) = \ln(e^x + 1); \quad 6) h(x) = x^2 e^{-x};$$

$$7) h(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - x \text{ si } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 0$$

EXERCICE 10

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$ et (C_g) sa courbe dans un repère orthonormé (O, I, J)

1 a) Préciser D_g

b) Prouver que le point $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe (C_g)

2 a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe

b) Calculer les limites de g en $-\infty$; en 0 et en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de g

3 a) Préciser les asymptotes à (C_g)

b) Tracer (C_g) . On prendra $OI = OJ = 2 \text{ cm}$

4 a) Prouver que la restriction h de g à l'intervalle $]0; +\infty[$ est une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera

b) Tracer $(C_{h^{-1}})$ sur le même graphique que (C_g)

c) Trouver une primitive G de g sur $]0; +\infty[$.

EXERCICE 11

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(\ln x) + \ln 2 = 1$

2) Montrer par récurrence que la dérivée n ième de la fonction $x \mapsto xe^x$ est $x \mapsto (x + n)e^x$

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - (x + 1)e^x$

EXERCICE 12

Soit $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$; $g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

1) Déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$

2) Déterminer une primitive de $f + g$ sur $\mathbb{R}$

3) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 13

Soit a un nombre réel on considère la fonction

$f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto e^{-x} + ax$

de représentation graphique (ζ_a) dans un repère orthonormé

1) Etudier les variations de f_a et dresser le tableau de variations de f_a en fonction des valeurs de a

2) a) Déterminer une équation de l'asymptote (D_a) à (ζ_a) en

b) Etudier les positions relatives de (ζ_a) et (D_a)

3 a) Justifier que toutes les courbes (ζ_a) passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées.

PROBLEME1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+xe^x}$

On désigne par (ξ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J)

Partie I : Etude de f

1 Soit ψ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\psi(x) = 1 + xe^x$

a) Etudier les variations de ψ puis dresser son tableau de variation

(on ne demande pas de calculer les limites)

b) Démontrer que pour tout nombre réel $\psi(x) > 0$

c) En déduire l'ensemble de définition de f

2 Soit φ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\varphi(x) = 1 - x^2e^x$

a) Calculer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Etudier les variations de φ puis dresser son tableau de variation

c) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 0,7 et 0,71

d) En déduire que

$$\bullet \forall x \in]-\infty; \alpha[, \varphi(x) > 0$$

$$\bullet \forall x \in]\alpha; +\infty[, \varphi(x) < 0$$

3 On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$a) \text{ Démontrer que } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+xe^x)^2}$$

b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

c) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

4 Soit (D) la droite d'équation $y = x$

a) Démontrer que (D) est asymptote à (ξ) en $-\infty$

b) Etudier les positions de (ξ) par rapport à (D) (on pourra utiliser la question 1.1.b)

c) Démontrer que la droite (D) est tangente à (ξ) au point d'abscisse 0

d) Tracer (D) et (ξ) dans la fenêtre définie par :

$$X_{\min} = -4,5 \quad , \quad X_{\max} = 4$$

$$Y_{\min} = -5 \quad , \quad Y_{\max} = 0,4$$

On prendra $OI = 2 \text{ cm}$; $OJ = 5 \text{ cm}$ et $\alpha = 0,7$

Partie II

On pose $h(x) = x^2e^{-x}$ et $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

1 Déterminer a, b et c pour que H soit une primitive de h

2 a) Dresser le tableau de variation de h sur $[0; +\infty[$

$$b) \text{ Prouver que } \forall x \in [0; +\infty[; |h(x)| \leq \frac{4}{e^2}$$

3 En déduire un encadrement de $H(2) - H(0)$

PROBLEME 2

n étant un entier naturel non nul, soit la fonction

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^n e^{-x}$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère ortho normal (O, I, J) : unité: 3 cm,

1- Etude et représentation graphique de f_1 .

1- a) Montrer que : $f'_1(x) = (1-x)e^{-x}$.

b) Etudier le signe de $f'_1(x)$

2- Calculer les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

3- Dresser le tableau de variations de f_1 .

4- a) Préciser les asymptotes éventuelles de f_1 .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ Interpréter graphiquement ce résultat.

5- a) Trouver une équation de la tangente (T) à (C_1) au point O .

b) Tracer soigneusement (T) et (C_1) .

11- On suppose que $n \geq 2$

1- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x}$; b) Interpréter graphiquement ce résultat.

2- Montrer que : $f'_n(x) = x^{n-1} (n-x) e^{-x}$

3- On suppose pour cette partie que n est pair.

a) Etudier le signe de $f'_n(x)$; b) Calculer la limite de f_n en $-\infty$

c) Dresser le tableau de variations de f_n

4- On suppose cette fois-ci que n est impair.

a) Etudier le signe de $f'_n(x)$; b) Calculer la limite de f_n en $-\infty$

c) Dresser le tableau de variations de f_n

111- Positions relatives des courbes (C_n) .

1- On pose : $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

Etudier le signe de $d_n(x)$ suivant les valeurs de x .

a) Dans le cas où n est pair. ; b) Dans le cas où n est impair.

2- En déduire les positions relatives des courbes (C_{n+1}) et (C_n)

3- Justifier que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

4- Tracer (C_2) sur le même graphique que (C_1)

5- Dans cette partie, on suppose que n est Impair.

a) Etudier le signe de : $f_{n+2}(x) - f_n(x)$; b) En déduire les positions relatives de (C_{n+2}) et (C_n)

c) Tracer soigneusement (C_3) sur le même graphique que (C_1) et (C_2) .

6- Soit $v(x) = f_1(x) - f_2(x)$

a) On pose : $V(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ Déterminer a, b et c pour que V soit une primitive de v .

b) Calculer $V(1) - V(0)$.

PROBLEME 3

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) : unité: 2 cm.

PARTIE A

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F(x) = x e^x - x - 1 \text{ et } (\zeta) \text{ sa courbe représentative. On pose } g(x) = x e^x + e^x - 1$$

- 1) a) Etudier le signe de $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = x e^x$ sur $\mathbb{R}$
 b) En déduire que $g(x)$ est négatif ou nul uniquement sur $] -\infty ; 0]$
- 2) a) Calculer $f(x)$ et montrer que $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe sur $\mathbb{R}$.
 b) Préciser le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
 c) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ puis dresser le tableau de variations de f .
- 3) a) Démontrer que la droite $(D) : y = -x$ est asymptote oblique à (ζ) en $-\infty$
 b) Etudier la position relative de (ζ) et (D) sur $\mathbb{R}$.
 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
- 4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$. Soit α celle qui est positive
 5) Sachant que $0,8 \leq \alpha \leq 0,81$. Tracer (D) et (ζ) dans le repère $(0, I, J)$.
 6) λ est un réel strictement négatif
 a) Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine D définie par :
- $$\begin{cases} \lambda \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq -x - 1 \end{cases}$$
- b) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$

PARTIE B

Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur à 1.

Soit la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_n(x) = x e^x - n x - 1 \quad \text{et} \quad (\zeta_n) \text{ sa courbe représentative.}$$

I/ Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = (1+x)e^x - n$

- 1) a) Montrer que $g'_n(x) = (2+x)e^x$ et déterminer les variations de g_n
 b) Calculer les limites de g_n en $-\infty$ et $+\infty$, puis dresser le tableau de variation de g_n
 2) a) Calculer $g_n(0)$ et montrer que g_n s'annule pour une unique valeur α_n strictement positive

b) Montrer que : $\alpha_n = \ln \left(\frac{n}{1 + \alpha_n} \right)$ ($\ln$ indique le logarithme népérien)

3) On rappelle que : $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$

a) En utilisant cette relation, montrer que $g_n(\ln \sqrt{n})$ est négatif.

b) Justifier que $\frac{1}{2} \ln n \leq \alpha_n$

4) Etudier la convergence des suites de terme général α_n et $\frac{\alpha_n}{n}$

5) Déterminer le signe de $g_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.

III 1) Calculer $F'_n(x)$ et en déduire les variations de $F_n(x)$

Déterminer les limites de F_n en $-\infty$ et $+\infty$

3) Montrer que $F_n(\alpha_n) = - \left(1 + \frac{n \alpha_n}{1 + \alpha_n} \right)$ et donner le tableau de variation de F_n .

4) Montrer que la droite (D_n) d'équation : $y = -n x - 1$ est asymptote oblique à (ζ_n) en $-\infty$

5) a) $\forall x \in \mathbb{R}$ calculer $F_{n+1}(x) - F_n(x)$

b) Etudier la position relative de (ζ_{n+1}) et (ζ_n) sur $\mathbb{R}$.

6) Sachant que $0,35 \leq \alpha_2 \leq 0,4$, montrer que $-1,2 \leq f_2(\alpha_2) \leq -1,1$
 et tracer (D_2) et (ζ_2) dans le repère $(0, I, J)$.

PROBLEME 4

Partie A

I / Soit la fonction $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^x - 1 - x - x^2$$

- 1 - Calculer $p'(x)$ et prouver que $p''(x) = e^x - 2$
- 2 - a) Etudier le signe de $p''(x)$
b) Dresser le tableau de variation de p' (on ne calculera pas les limites)
- c) Prouver que l'équation $p'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]\ln 2, +\infty[$ vérifiant $1,25 < \alpha < 1,26$
- 3 - Prouver que pour $x \in]-\infty, 0[\cup]\alpha, +\infty[$, $p'(x) > 0$
pour $x \in [0, \alpha]$, $p'(x) \leq 0$
- 4 - a) Calculer les limites de p et dresser le tableau de variations de p
b) Prouver que pour $x \in]-\infty, \alpha[$, $p(x) \leq 0$
c) En déduire que pour $x \in]-\infty, \alpha[$, $e^x \leq 1 + x + x^2$
d) Justifier que pour $x \in]-\infty, \alpha[$, $e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3}$

II / 1 - Démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}$, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$\forall x \in [0, +\infty[$

2 - Prouver que pour $x \in [0, 1]$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3}$$

3 - Soit la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 1$

Prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$ (on utilisera l'encadrement de II-2)

Pour la suite on admet que h est dérivable en 0 et $h'(0) = -\frac{1}{2}$.

Partie B

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

On note (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J)

I / 1 - Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2 - Prouver que f est continue en 0

3 - a) Justifier que pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{h(x)}$

b) Prouver que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$

c) Ecrire une équation de la tangente (T) à (ζ) au point d'abscisse 0

4 - a) Pour $x \neq 0$, prouver que $f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$

b) Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c) Calculer les limites de f et dresser son tableau de variations

II / Soit (D) la droite d'équation $y = x$

1 - Démontrer que (D) est asymptote à (ζ) en $+\infty$

2 - Prouver que (ζ) est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$

3 - Préciser une équation de l'asymptote à (ζ) en $-\infty$

4 - Tracer (D) , (T) et (ζ)

III / 1 - Prouver que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K que l'on précisera

2 - Déterminer $(f^{-1})'(1)$

3 - Tracer (ζ') la courbe de f^{-1} de f sur le même graphique que (ζ) en couleur différente

Partie C

Dans cette partie, $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = x^{n-1}(e^x - 1)f(x)$ et $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$

1 - Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = x^n e^x$

2 - Interpréter géométriquement I_n

3 - a) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$

c) En déduire que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

4 - a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

b) En déduire que $\lim (I_n) = 0$

c) Prouver que pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

d) Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 1$, $I_n = (-1)^n n! \left[I_0 + e \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{p!} \right]$

e) En déduire que $\lim \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) = \frac{1}{e}$

LEÇON 5 : CALCUL INTEGRAL

EXERCICE 1

Soit f une fonction continue et paire sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$; on pose :

$$\varphi(a) = \int_{-a}^a f(t) dt - 2 \int_0^a f(t) dt.$$

1°) Déterminez φ lorsque $f(x) = \cos(x)$.

2°) On revient au cas général. Notons F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

a- Exprimez $\varphi(a)$ à l'aide de F .

b- Déduisez-en que φ est dérivable et calculez $\varphi'(a)$.

c- Démontrez que pour tout réel strictement positif a , $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

3°) Application : calculez $\int_{-5}^5 (x^2 + |x|) dx$.

EXERCICE 2

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, et, $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1+t} dt$.

1°) Démontrez que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\frac{e^t}{1+t} \geq 1$.

2°) Démontrez que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3°) Démontrez que $f(2) \geq 1$.

4°) Déduisez-en qu'il existe un réel $c \in [1; 2]$ tel que $f(c) = 1$.

EXERCICE 3

I - Calculer $I(a) = \int_1^a \ln x dx$ par parties.

II - En déduire à l'aide d'un changement de variable

Calculer $J = \int_0^5 \ln(4x^2 + 4x + 1) dx$

EXERCICE 4

1°) Démontrez qu'il existe une fonction $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt.$$

2°)

a- Démontrez que f est dérivable en utilisant l'égalité :

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t} dt.$$

b- Démontrez qu'il existe un unique réel α tel que $f'(\alpha) = 0$.

c- Donnez l'expression exacte et une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3°) Dressez le tableau de variation de f .

4°)

a- Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$; $e^{-x^2} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} \leq f(x) \leq e^{-x^4} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t}$.

b- Déduisez-en que f admet une limite finie en $+\infty$.

c- La limite lorsque x tend vers 0 de $f(x)$ existe-elle ?

EXERCICE 5

1) Calculer $\int_0^x te^t dt$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$

2) Soient a une constante réelle et u la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^x - a$

Soit U la primitive de u sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

a) Exprimer $U(x)$ à l'aide d'une intégrale.

b) En déduire $U(x)$ en fonction de x .

3) f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xe^x - 2 \int_0^1 f(x) dx \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Calculer $\int_0^1 f(x) dx$

EXERCICE 6

I- Calculer $I = \int_0^1 (x^2 + 2x) e^{-x} dx$ à l'aide d'une intégration par parties

II- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - 3$

$x \mapsto 2x$

Calculer l'aire A de la partie du plan délimitée par $(\zeta_g); (\zeta_h)$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$

PROBLEME

I- Soit la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) a) Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = 3 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right)$

b) Déterminer, suivant les valeurs de x , le signe de $g'(x)$ et préciser les variations de g

3) a) Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variation de g

b) En déduire le signe de $g(x)$.

II- On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$

par $f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) a) Démontrer que : pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

b) Déterminer les variations de f et dresser le tableau de variation de f

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x - 1$ et (ζ) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J)

a) Démontrer que (Δ) est asymptote oblique à (ζ)

b) Etudier la position relative de (Δ) et (ζ)

c) Préciser les autres asymptotes éventuelles à (ζ) et écrire une équation de la tangente (T) à (ζ) au point d'abscisse 1.

d) Construire (Δ) , (T) et (ζ) dans le repère (O, I, J)

4) a) Calculer à l'aide d'une intégration par partie $I(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}} dx$

b) calculer en cm^2 l'aire A de la partie du plan comprise entre (ζ) et (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

PROBLEME

PARTIE 1

Soit la fonction $h:]-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln(1-x) + x$$

1- Etudier les variations de h

2 a) Calculer $h(0)$

b) Dresser le tableau de variations de h

3 - Justifier que pour tout élément x de $]-\infty; 0]$

PARTIE 2

I- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} g(x) = xe^{-x} & \text{si } x > 0 \\ g(x) = \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, I, J)

unité graphique = 2 cm

1 Montrer que g est continue en 0

2) a) Etudier la dérivabilité de g en 0. En déduire les équations des demi-tangentes à (ζ) au point O.

b) En utilisant les résultats de la partie 1, étudier la position relative de (ζ) et de la droite (D) d'équation $y = -x$ sur $]-\infty; 0]$

c) Etudier la position de (ζ) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$ sur l'intervalle $]-\infty; 0]$

3) a) Calculer $g'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

b) Montrer que g est croissante uniquement sur l'intervalle $[0; 1]$

4) a) Calculer les limites de g et dresser son tableau de variations

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$. Interpréter ce résultat

c) Préciser les asymptotes éventuelles à (ζ)

5 Tracer soigneusement (ζ)

II – Soit f la restriction de g à l'intervalle $]-\infty; 0]$

1) a) Montrer que f est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur un intervalle que l'on précisera

Soit f^{-1} sa bijection réciproque, de représentation graphique (ζ')

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1} à partir de celui de g

2 sans expliciter $f^{-1}(x)$, Calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$

3 Soit x un nombre réel positif ou nul

a) Montrer que $f^{-1}(x) = 1 - e^x$

b) Calculer $(f^{-1})'(x)$ et vérifier le résultat de la question

4 Tracer (ζ') sur le même graphique que (ζ) .

PARTIE 3

1) a) Hachurer la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = -e$; $x = -1$; $y = 0$ et la courbe (ζ) .

b) Montrer que l'aire de la partie hachurée est

$$A = (1 + e) \ln(1 + e) - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

2 On se propose de déterminer l'aire A' de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = \ln 2$; $x = \ln(1 + e)$; $y = -1$ et la courbe (ζ')

a) Démontrer que $A' = (e - 1) \ln(1 + e) - \int_{-e}^{-1} \ln(1 - x) dx$

On pourra considérer le rectangle $ABCD$ avec

$A(0 ; -1)$; $B(\ln(1 + e) ; -1)$; $C(\ln(1 + e) ; -e)$ et $D(0 ; -e)$

b) En déduire la valeur de A'

LEÇON 6 : SUITES NUMERIQUES**EXERCICE 1**

Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{12 + U_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1°) Déterminez une valeur approchée de $U_1; U_2; U_3; U_4; U_5$.

2°) Démontrez par récurrence que :

a- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < U_n < 4$;

b- La suite (U_n) est croissante.

3°) La suite (U_n) est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

EXERCICE 2

Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 10U_{n+1} - 9U_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1°) Calculez $U_2; U_3; U_4$.

2°) Soit la suite (V_n) définie par : $V_n = U_{n+1} - U_n$.

a- Démontrez que la suite (V_n) est une suite géométrique.

b- Calculez V_n puis U_n en fonction de n.

c- La suite (U_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 3

Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{-7U_n - 8}{2U_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1°) a- Calculez $U_1; U_2; U_3; U_4$.

b- Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n < -2$.

c- Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \neq -\frac{1}{2}$; $U_n \neq -2$.

d- Démontrez que (U_n) est une suite croissante.

e- Que peut-on conclure ?

2°) Soit la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2}$.

a- Démontrez que (V_n) est une suite arithmétique.

b- Calculez U_n en fonction de n.

c- Calculez $\lim U_n$.

EXERCICE 4

Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 5 - \frac{4}{U_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1°) Calculez $U_1; U_2; U_3; U_4$.

2°) Démontrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 2$.

Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \neq 0$.

3°) a- Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{2} |U_n - 4|$.

b- Démontrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, |U_n - 4| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

4°) Démontrez que la suite (U_n) est convergente et précisez sa limite.

5°) Déterminez un nombre réel A tel que pour tout $n \geq A$ on ait : $|U_n - 4| \leq 10^{-5}$.

EXERCICE 5

Soit $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx, n \in \mathbb{N}^*$

1°) En utilisant une intégration par parties trouvez une relation entre I_{n+1} , et I_n

2°) Déduisez-en la valeur de I_4 .

EXERCICE 6

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx, n \in \mathbb{N}$

1°) Majorez et mineurez I_n .

2°) Déduisez-en que la suite (I_n) converge vers 0.

EXERCICE 7

Soit la suite $(I_n), n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1°) Calculez I_0 , et I_1 .

2°) Démontrez que la suite (I_n) est croissante et majorée par 1.

Que Peut-on conclure ?

3°) a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = 1 - J_n$, avec, $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

b) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{1+n}$.

Déduisez-en $\lim J_n$, et $\lim I_n$.

EXERCICE 8

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$, par, $U_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Nous nous proposons d'étudier la convergence de la suite (U_n) .

1°)

a- Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, -x \leq \int_0^x \sin(t) dt \leq x$.

b- Déduisez-en que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, -x \leq 1 - \cos(x) \leq x$.

c- En réitérant le procédé, démontrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, -\frac{1}{2}x^2 \leq x - \sin(x) \leq \frac{1}{2}x^2$.

2°)

a- k et n étant des entiers naturels ($n \neq 0$), encadrez $\sin(\frac{k}{n^2})$, par 1°).

b- Déduisez-en que pour tout entier $n \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k - \frac{1}{2n^4} \sum_{k=0}^n k^2 \leq U_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k + \frac{1}{2n^4} \sum_{k=0}^n k^2.$$

3°)

a- Démontrez par récurrence que $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, pour $n \neq 0$.

b- Déduisez-en que la suite (U_n) converge et donnez sa limite.

EXERCICE 9

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$
On note Φ la solution positive

2) Démontrer que $\Phi^2 = \Phi + 1$; $1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$

3) On pose $a_0 = 2$ et $\forall n \geq 0$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$

a) Montrer que $\forall n \geq 1$, $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$

b) Prouver que $\forall n \geq 1$, $|a_{n+1} - \Phi| \leq \frac{4}{9} |a_n - \Phi|$

c) Montrer que $|a_n - \Phi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$ En déduire la limite de la suite (a_n) .

EXERCICE 10

1 Démontrer par récurrence que

$$a) \sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; \quad b) \sum_{p=1}^n p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} ; \quad c) \cos(n\pi) = (-1)^n$$

2 Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ et calculer sa limite éventuelle

$$a) n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n - \left(\frac{5}{4}\right)^n ; \quad b) n \in \mathbb{N}, u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$c) n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(\frac{6}{5}\right)^n ; \quad d) n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$$

$$e) n \in \mathbb{N}, u_n = n \left(1 + \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) \right) ; \quad f) n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{n^2 + k} \right)$$

$$g) n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + 2k + 1} \right) + \frac{n}{n^2}$$

EXERCICE 11

I - On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

- 1) calculer I_0
- 2) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n
- 3) Calculer I_4

II- On pose $J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$

- 1) Calculer J_n en utilisant deux intégrations par parties successives
- 2) Prouver que la suite $(J_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
- 3) On pose $S_n = J_0 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$
 - a) Calculer S_n de deux manières différentes
 - b) Déterminer si elle existe $\lim S_n$

III - On pose $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin x dx$

- a) Calculer K_0 et K_1
- b) A l'aide d'intégration par parties, déterminer une relation entre K_n et K_{n-2}
- c) Dédire l'expression de K_4 et K_5
- d) Prouver que $0 \leq K_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$. En déduire $\lim K_n$

EXERCICE 12

Le nombre de diplômés de B.T.S de l'enseignement supérieur technique et professionnel (ESTP)

En Côte d'Ivoire augmente de 12 % chaque année. En 1994, une étude statistique a dénombré 400 diplômés de B.T.S.

Soit d_n le nombre de diplômés de B.T.S à l'année $1994 + n$

- 1) Déterminer d_1 et d_2
- 2) Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n . Quelle est la nature de la suite $(d_n)_n$?
- 3) a) Exprimer d_n en fonction de n
- b) Déterminer le nombre de diplômés pour l'année 2005
- c) A partir de quelle année le nombre de diplômés excédera 2000 ?
- 4) Combien a-t-on eu de diplômés de 1994 au 31 décembre de l'année 2001 ?

EXERCICE 13

I- On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin(x) dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos(x) dx$

- 1 Calculer I_0 et J_0
- 2) On suppose $n \geq 1$
 - a) soit $U(x) = -e^{-nx} \cos(x)$, prouver que $U'(x) = -e^{-nx}(\sin x + n \cos x)$
 - b) En déduire que $I_n + n J_n = 1$
- 3) A l'aide d'une intégration par parties, prouver que $J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} + n I_n$
- 4) a) En utilisant les résultats précédents, exprimer explicitement I_n et J_n en fonction de n

b) Vérifier les résultats de la question 1)

5) On pose $V_n = \frac{1 - ne^{-\frac{n\pi}{2}}}{1 + n^2}$ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (V_n)$

II – Dans un repère orthonormé (O, I, J) , unité :

Soit $p: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ $q: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$

$x \mapsto x^2$ $x \mapsto \sqrt{x}$

1) Tracer (ζ_p) et (ζ_q) dans le même repère

2) Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations

$x = 0$ et $x = 1$ et les courbes (ζ_p) et (ζ_q) .

EXERCICE 14

1) $(U_n)_n$ est une suite arithmétique vérifiant $U_{100} = 46$ et $U_{90} = 51$

Complète : La raison est et le premier terme $U_0 =$

2) $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0

On donne $V_4 = 1$ et $V_9 = \frac{1}{32}$; Complète : $q = \dots\dots\dots$; $V_0 = \dots\dots\dots$

EXERCICE 15

Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1) Calculer I_0

2) Pour tout n , calculer I_{n+1} en fonction de I_n . En déduire I_4

II- Soit $J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$

1) Calculer J_n à l'aide de deux intégrations par parties successives

2) Montrer que $(J_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison

III- pour tout entier n on définit $U_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1) a) Justifier l'existence de U_n

b) Calculer U_1

c) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $U_n = e - n U_{n-1}$

(on effectuera une intégration par parties)

Pour n fixé, on note F_n une primitive de la fonction $x \mapsto (\ln x)^n$ sur $]0; +\infty[$.

a) Démontrer que la fonction $t \mapsto F_n(e^t)$ est dérivable et expliciter sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

i) $U_n = F_n(e) - F_n(1)$

ii) $U_n = \int_0^1 t^n e^t dt$

iii) $0 \leq U_n \leq \frac{e}{n+1}$ (on encadrera $t^n e^t$ sur $[0; 1]$)

EXERCICE 16

Soit la suite $(I_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

1) Calculer I_1

2) Exprimer, pour $n \geq 2$, I_n en fonction de I_{n-1}

En déduire que : $I_n = e - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$, $n \geq 1$

3) Majorer la fonction $x \mapsto (1-x)^n e^x$ sur l'intervalle $[0; 1]$

En déduire $\lim I_n$ et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e$

NB : $0! = 1$; $1! = 1$; $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$. $n!$ se lit < factorielle n >

EXERCICE 17

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \frac{1}{2^{n+1} \times n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$

A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1

2) Démontrer que Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1} \times (n+1)!}$

3) En déduire, par récurrence, que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} + I_n$$

4_ Montrer que l'on peut trouver une constante A, en majorant la fonction $t \mapsto (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}$

sur l'intervalle $[0; 1]$, telle que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} A$

En déduire la limite de la suite $(U_n)_n$ définie par $U_n = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!}$

EXERCICE 18

Soit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

1) a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que F est impaire

b) Montrer que F est strictement croissante

2) a) Justifier que pour $x > 1$, $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leq \int_1^x \frac{dt}{t^2}$

En déduire, en utilisant l'écriture $F(x) = F(1) + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$ que $F(x) \leq 2$

b) Soit $U_n = F(n)$

$(U_n)_n$ est-elle convergente ? Que peut-on dire de sa limite ?

c) Montrer que Soit $U_n \leq F(x) \leq U_{n+1}$ avec $E[x] = n$

d) Que peut-on en déduire pour la fonction F quand x tend vers $+\infty$

EXERCICE 19

I - Soit x un nombre réel, on pose $U_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ Calculer $\lim U_n(x)$

II- On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cos(x) dx$

1) A l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que $I_n = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} (-e^{-\pi})^n$

2) En déduire que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme I_0

3) On pose $S_n = \sum_{k=0}^n I_k$ Calculer S_n de deux manières différentes

EXERCICE 20

1) On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$ et Pour $n \geq 1$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$

$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx$ et Pour $n \geq 1$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \times \cos x dx$

a) Calculer J_n

b) Montrer que pour $n \geq 0$, $I_{n+2} - I_n = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

2) a) Calculer I_1 ; b) En déduire I_3

3) Soit la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

b) On pose $U(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

Calculer $\frac{U'(x)}{U(x)}$ En déduire une primitive de f sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

c) Calculer I_0 , I_2 et I_4

EXERCICE 21

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(\ln x) + \ln 2 = 1$

2) Montrer par récurrence que la dérivée n ième de la fonction $x \mapsto x e^x$ est $x \mapsto (x + n) e^x$

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - (x + 1) e^x$

EXERCICE 22

I - Déterminer les racines 6^{ième} du nombre complexe -1

II - On pose $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = 4 a^n$

A_n désigne le point image de z_n dans un repère orthonormé $(O; P; Q)$

- 1 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 2 - Prouver que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique et déterminer sa période
- 3 - a) Démontrer que $\forall t \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, A_x = A_t \Leftrightarrow x \equiv t \pmod{12}$
 b) Construire tous les points A_n où $n \in \mathbb{N}$
 c) Placer le point A_{2011}
- 4 - Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels z_n est :
 a) Un nombre réel
 b) Un nombre imaginaire pur
- 5 - Pour tout entier naturel n , démontrer que le triangle $A_n A_{n+4} A_{n+8}$ est équilatéral et de centre O .

EXERCICE 23

I - Démontrer en utilisant la formule de Moivre que pour tout entier naturel n

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \text{et} \quad \sin(n\pi) = 0$$

II - Soit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cos(x) dx$

- 1) En utilisant une double intégration par parties et les résultats de la partie I
 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n = \frac{1}{2} (1 + e^{-\pi}) (-e^{-\pi})^n$
- 2) En déduire que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme I_0
- 3) On pose $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + \dots + I_n$
 a) Prouver que pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - (-e^{-\pi})^{n+1} \right)$
 b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

EXERCICE 24

On considère la suite numérique (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3} U_n + 1 \end{cases}$$

On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{R}$ par : $V_n = U_n - 3$

- 1) a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique
 b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
- 2) Etudier la convergence de U_n

EXERCICE 25

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

On note (ζ) le cercle de centre O et de rayon R , R étant un nombre réel strictement positif

A désigne le point de (ζ) d'abscisse R . Etant donné un entier $n \geq 2$, on note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{n}$. On considère la suite des points $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de (ζ)

définie par :

$$\begin{cases} M_0 = A \\ M_{k+1} = r(M_k) \end{cases}$$

- 1) Faire une figure pour $n = 16$ et $R = 4 \text{ cm}$ (on construira tous les points M_k)
- 2) soit z_k l'affixe du point M_k
 - a) Exprimer z_{k+1} en fonction de z_k
 - b) En déduire l'expression de z_k en fonction de k et n .
- c) Montrer que la suite (M_k) est périodique et préciser sa période.
Placer sur la figure les points M_{1998} et M_{2001}
- 3) a) Prouver que , pour $k \in \mathbb{N}$, $M_k M_{k+1} = 2 R \sin \frac{\pi}{n}$
- b) on pose $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n$, le périmètre du polygone régulier
- Montrer que $L_n = 2 R n \sin \frac{\pi}{n}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$
- Interpréter géométriquement ce résultat

PROBLEME1

A / 1) Soit la fonction f définie sur $] -1 ; -1 [$ par $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

- a) Justifier que f est impaire
- b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations
- c) Tracer (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J)
(unité graphique 5 cm) . On précisera une équation de la tangente à (ζ) en O
- d) Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan délimitée par (ζ) , l'axe $(O, \vec{i})$
et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ (on pourra faire une intégration par parties)

2) On pose $g(x) = f(\sin x)$, $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$

Montrer que g est une primitive sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$ de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{\cos x}$

B / Soit a un réel appartenant à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$.

Pour $n \geq 1$, on pose $I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n}(t)}{\cos t} dt$

1) Montrer que $0 \leq I_n(a) \leq \frac{a \sin^{2n} a}{\cos a}$

2) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

C / On pose, pour $t \in [0 ; a]$ et $n \geq 1$,

$$F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} + \dots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}$$

1) Justifier que F_n est dérivable sur $[0 ; a]$ et $F_n'(t) = \frac{1 - \sin^{2n} t}{\cos t}$.

Calculer $F_n(0)$

2) a) Montrer que $F_n(a) = g(a) - I_n(a)$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(a)$

3) On considère la suite U définie par

$$U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2^5} + \frac{1}{5 \times 2^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) 2^{2n-1}}$$

a) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite U converge vers un nombre que l'on précisera

b) Montrer, en utilisant les résultats de B / 1) et C / 3), que pour $n \geq 1$, U_n est une valeur approchée

de $\ln(\sqrt{3})$ à $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ près par défaut.

a) En déduire, sous forme d'une fraction irréductible, une valeur approchée de $\ln(\sqrt{3})$ à 10^{-2} près par défaut.

PROBLEME2

Partie A

I / Soit la fonction $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^x - 1 - x - x^2$$

1 - Calculer $p'(x)$ et prouver que $p''(x) = e^x - 2$

2 - a) Etudier le signe de $p''(x)$

b) Dresser le tableau de variation de p' (on ne calculera pas les limites)

c) Prouver que l'équation $p'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]\ln 2, +\infty[$ vérifiant $1,25 < \alpha < 1,26$

3 - Prouver que pour $x \in]-\infty, 0[\cup]\alpha, +\infty[$, $p'(x) > 0$
pour $x \in [0, \alpha]$, $p'(x) \leq 0$

4 - a) Calculer les limites de p et dresser le tableau de variations de p

b) Prouver que pour $x \in]-\infty, \alpha[$, $p(x) \leq 0$

c) En déduire que pour $x \in]-\infty, \alpha[$, $e^x \leq 1 + x + x^2$

d) Justifier que pour $x \in [0; \alpha[$, $e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3}$

II / 1 - Démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}$, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$\forall x \in [0, +\infty[$

2 - Prouver que pour $x \in [0, 1]$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3}$$

3 - Soit la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 1$

Prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$ (on utilisera l'encadrement de II-2)

Pour la suite on admet que h est dérivable en 0 et $h'(0) = -\frac{1}{2}$.

Partie B

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

On note (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J)

I / 1 - Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2 - Prouver que f est continue en 0

3 - a) Justifier que pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{h(x)}$

b) Prouver que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$

c) Ecrire une équation de la tangente (T) à (ζ) au point d'abscisse 0

4 - a) Pour $x \neq 0$, prouver que $f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$

b) Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c) Calculer les limites de f et dresser son tableau de variations

II / Soit (D) la droite d'équation $y = x$

1 - Démontrer que (D) est asymptote à (ζ) en $+\infty$

2 - Prouver que (ζ) est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$

3 - Préciser une équation de l'asymptote à (ζ) en $-\infty$

4 - Tracer (D) , (T) et (ζ)

III / 1 - Prouver que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K que l'on précisera

2 - Déterminer $(f^{-1})'(1)$

3 - Tracer (ζ') la courbe de f^{-1} de f sur le même graphique que (ζ) en couleur différente

Partie C

Dans cette partie, $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = x^{n-1}(e^x - 1)f(x)$ et $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$

1 - Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = x^n e^x$

2 - Interpréter géométriquement I_n

3 - a) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$

c) En déduire que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

4 - a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

b) En déduire que $\lim (I_n) = 0$

c) Prouver que pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

d) Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 1$, $I_n = (-1)^n n! \left[I_0 + e \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{p!} \right]$

e) En déduire que $\lim \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) = \frac{1}{e}$

PROBLEME3

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

(ζ) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(0, I, J)$ unité graphique 2 cm.

I - 1 - Prouver que f est continue à droite de O et dérivable à droite de O.

2 - Montrer que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (ζ).

3 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Prouver que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (ζ) en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Etudier les positions relatives de (ζ) et (D).

(on pourra utiliser l'inégalité $e^u \geq 1 + u$ pour tout nombre réel u).

4 - a) Démontrer que pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et préciser les variations de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

5 - Tracer (ζ).

6 - Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$.

a) Prouver que h est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

b) Tracer ($\zeta_{h^{-1}}$) sur le même graphique que (ζ).

Partie 2

Soit la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$m(x) = x e^{-\frac{1}{2x}} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad m(0) = 0.$$

(Γ) est la courbe de m dans le repère orthonormé $(0, I, J)$.

1 - Montrer que (Γ) est l'image de (ζ) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

2 - Construire (Γ) à partir de (ζ) en couleur différente.

Partie 3

On considère pour $n > 1$, la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x e^{-\frac{1}{nx}} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0.$$

I - Soit $g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2}$$

1 - Calculer $g'(t)$ et $g''(t)$.

2 - Déterminer les variations de g' puis le signe de $g'(t)$.

3 - En déduire les variations de g et le signe de $g(t)$.

4 - Prouver que pour $t \in [0; +\infty[$, $0 \leq e^{-t} - 1 + t \leq \frac{t^2}{2}$.

II - 1 - En utilisant le résultat précédent prouver que : $0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}$

2 - On pose $a_n = \int_1^n \left(f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \right) dx$.

a) Interpréter graphiquement le nombre a_n .

b) Démontrer que, pour $n > 1$, $0 \leq a_n \leq \frac{\ln(n)}{2n^2}$.

c) Déterminer la limite de a_n .

PROBLEME4

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (\ln |x|)^3 - 3 \ln |x|$
 (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique 2 cm

I - 1 - a) Déterminer D_f

b) Justifier que f est une fonction paire. Interpréter graphiquement ce résultat

2 - on réduit le domaine d'étude de f à l'intervalle $]0; +\infty[$

a) Etudier les variations de f

b) Calculer les limites de f et dresser son tableau de variation

3 - a) Justifier que l'axe (OI) est asymptote verticale à (ζ)

b) Démontrer que (ζ) admet une branche parabolique dont on précisera la direction en $+\infty$

c) Etudier les positions relatives de (ζ) et (OI) sur $]0; +\infty[$

4 - Trouver une équation de la tangente (T) à (ζ) au point I

5 - Tracer (T) et (ζ) sur $\mathbb{R}$

II - soit $h: \left[\frac{1}{e}; e\right] \rightarrow [-2; 2]$

$x \mapsto f(x)$

1 - Prouver que h est une bijection

2 - Déterminer $(h^{-1})'(0)$

3 - Tracer $(\zeta_{h^{-1}})$ sur le même graphique que (ζ)

III - On pose pour $n \geq 0$, $I_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 (\ln x)^n dx$

1 - Calculer I_0

2 - a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour $n \geq 1$,

$$I_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{e} - n I_{n-1}$$

b) En déduire I_1 et I_3 .

c) Calculer $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx$ et en déduire en cm^2 , l'aire de l'ensemble des points

$M(x, y)$ du plan, tels que $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$

3 - a) Prouver en utilisant le changement de variable $t = \ln x$ que

$$I_n = \int_{-1}^0 t^n e^t dt$$

b) Justifier que $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)e} \leq I_n \leq 0$

c) En déduire $\lim(I_n)$

4 - a) Démontrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (-1)^n n! \left[I_0 - \frac{1}{e} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \right]$

b) Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{I_n}{n!}$

c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} = e$

PROBLEME5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x} + 1}$

et (ζ) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J) . **Unité graphique 1 cm**

PARTIE A

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) Démontrer que f est paire ; En déduire une interprétation graphique

2) Pour x appartenant $[0 ; +\infty[$.

a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{4e^x(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$.

3) a) Démontrer que e^α est solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$

b) En déduire la valeur exacte de α

4) a) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

b) Déterminer sur $\mathbb{R}$ le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

5) Tracer (ζ) (*pour la construction uniquement on prendra 2 cm comme unité*)

PARTIE B

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

1) Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$

2) Interpréter géométriquement le réel $F(\alpha)$ en déduire que $-\alpha \leq F(\alpha) \leq 0$

3) a) Démontrer que pour tout réel positif t , $f(t) \geq 1 - 4e^{-t}$

b) En déduire que pour tout réel positif x , $F(x) \geq x - 4$

et déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$

4) Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $-\infty$

PARTIE C

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

On rappelle que $0! = 1$.

1) a) Calculer I_0 .

b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$

c) Justifier que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

2) a) En utilisant une intégration par parties, prouver que, pour $n \geq 1$, $I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!}$.

b) Calculer I_1 , I_2 et I_3

3) On pose pour $n \geq 1$, $J_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$.

a) Exprimer J_n en fonction de I_0 et I_n .

b) Démontrer que (J_n) est convergente et calculer $\lim J_n$.

c) Justifier que pour $n \geq 0$, $\frac{1}{(n+1)!} \leq J - J_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$.

LEÇON 7 :	PROBABILITE
------------------	--------------------

Exercice 1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{N}$: a) $A_n^2 - 132 = 0$; b) $C_n^2 - n = 54$.

2) Résolvez dans $\mathbb{N}^2$:

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+1} \\ 4C_x^y = 5C_x^{y-1} \end{cases}$$

Exercice 2

Lors d'un examen oral, le professeur ZAMBLE BI doit interroger sept élèves dont quatre garçons et trois filles. Pour cela, il doit établir une liste donnant l'ordre de passage.

- 1) Combien de listes peut-il constituer au total ?
- 2) Combien de listes peut-il constituer au total, si Fanta, l'une des élèves doit être la dernière à passer ?

Exercice 3

On lance 3 dés (rouge, noir, blanc) tous numérotés de 1 à 6. Le rouge indique les centaines, le noir indique les dizaines et le blanc indique les unités. On obtient ainsi un nombre de 3 chiffres. Exemple : 113.

- 1) Combien de nombres de 3 chiffres peut-on avoir au total ?
- 2) Combien de ces nombres se terminant par 4 peut-on avoir au total ?
- 2) Combien de ces nombres qui sont supérieurs à 400 peut-on avoir au total ?

Exercice 4

A l'issue d'une réunion 10 personnes se serrent chaleureusement les mains.

Chaque personne sert la main de toutes les autres.

- 1) Justifier que le nombre total de poignées de main est 45.
- 2) Pour un total de 1225 poignées de main ; déterminer le nombre n ($n \in \mathbb{N}$) de personnes de cette réunion.

Exercice 5

- 1) Quel est le nombre d'anagrammes du mot ALIMENT ?
- 2) Même question avec le mot EXERCICE

Exercice 6

Un club est composé de 20 élèves dont 12 garçons et 8 filles. L'entraîneur désire former une équipe de 5 joueurs à choisir parmi ces 20 athlètes pour participer à un tournoi.

- 1-a) vérifier que le nombre d'équipes possibles qu'il peut former est 15504
 - b) Déterminer le nombre d'équipes possibles composées uniquement de filles.
 - c) Déterminer le nombre d'équipes possibles contenant au moins une fille.
- 2) On suppose que l'équipe formée soit composée de BOHE, CISSE, AMENAN, TUO et ZADI. Pour la cérémonie d'ouverture, les cinq athlètes se présentent en défilant l'un derrière l'autre.
 - a) Combien de présentations possibles peut-on avoir ?
 - b) Combien de présentations possibles peut-on avoir si AMENAN doit être la première dans le rang ?

Exercice 7

I- Dans un terrain de camping, il y a 32% de français et 68% de belges.

70% des français savent jouer à la belote ; 30% des belges savent jouer à la belote. Vous rencontrez une personne dans le terrain, il se trouve qu'elle sait jouer à la belote. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit de nationalité belge ?

II- A et B sont deux événements indépendants vérifiant $p(\bar{A}) = 0,35$ et $p(B) = 0,46$

Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$

III- Un dé pipé à 4 faces numérotées 1, 2, 3, 4 est tel que

$$p(\{2\}) = 2p(\{1\}) ; \quad p(\{3\}) = 6p(\{1\}) ; \quad p(\{4\}) = 6p(\{2\})$$

Calculer $p(\{1\}) ; p(\{2\}) ; p(\{3\}) ; p(\{4\})$

Exercice 8

On considère un dé cubique dont quatre faces sont rouges et deux faces vertes, et l'on suppose l'équiprobabilité d'apparition de chaque face.

1°) On jette le dé quatre fois de suite.

a- Calculez la probabilité d'apparition dans l'ordre de R, R, V, R.

b- Calculez la probabilité d'apparition de trois faces rouges et trois seulement.

2°) On note $p_1 = p(R)$, la probabilité d'obtenir une face rouge en un lancer et $p_n = p(V; \bullet \bullet \bullet; V; R)$

au cours de n lancers successifs R apparaît au dernier jet.

a- Calculez $p_1; p_2; p_n$.

b- Soit $S_n = \sum_{k=1}^n p_k = p_1 + \bullet \bullet \bullet + p_n$; déterminez $\lim S_n$.

Exercice 9

On dispose d'un dé en bois de 3 Cm d'arête. On le peint en rouge puis on le découpe en petits cubes de 1 Cm d'arête, parallèlement aux faces. On place ces petits cubes dans un sac.

1°) On tire simultanément deux petits cubes du sac. On compte le nombre des faces coloriées en rouge pour l'ensemble de ces deux dés : on désigne par X ce nombre.

a- Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

b- Quelle est la probabilité pour que X soit au moins égal à 4 ?

2°) On tire deux dés comme ci-dessus : on note le nombre de faces coloriées et on les remet dans le sac. On répète encore deux fois cette opération.

Quelle est la probabilité d'obtenir 18 faces coloriées en tout après ces trois tirages ?

Exercice 10

Soit (D) une droite du plan munie d'un repère $(O; \vec{U})$ et soient A et B deux

points de (D), d'abscisses respectives a et b. On désigne par α et β deux nombres réels tel que $\alpha + \beta = 1$.

$$\varphi : (D) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G = \text{bar} \{ (A; \alpha), (B; \beta) \} \text{ et}$$

$$M \mapsto \varphi(M) = \alpha \overline{MA}^2 + \beta \overline{MB}^2$$

1°) a- Exprimez $\varphi(G)$ au moyen de $\varphi(O)$ et de $\overline{OG}^2$.

c- Calculez en fonction de a, b, α et β : l'abscisse de G, $\varphi(O)$, puis $\varphi(G)$ et vérifiez que $\varphi(G)$ ne dépend que de $a - b$, α et β .

2°) On suppose maintenant que $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs a et b avec les probabilités respectives α et β .

a- Calculez l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

b- Calculez l'espérance mathématique $E(X^2)$ de X^2 .

c- Démontrez que la variance de X est égale à $\varphi(G)$.

3°) Application numérique :

Un joueur lance un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si le chiffre obtenu est pair ou divisible par 3, il gagne 4000 FCFA. Dans le cas contraire il gagne 10000 FCFA.

Soit X le gain de ce joueur. Calculez l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

EXERCICE 11

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher, dont cinq portent le numéro 1, quatre portent le numéro 2 et un, le numéro 3

L'expérience consiste à tirer du sac, successivement et sans remise, trois jetons. Ceux-ci sont alignés de gauche à droite de façon à obtenir un nombre de trois chiffres. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1 - Quelles sont les probabilités des événements suivants ?

- A " Les chiffres du nombre obtenu sont deux à deux distincts "
- B " Obtenir le nombre 111 "
- C " Obtenir le nombre 112 "
- D " Obtenir le nombre 122 "

2 - A chaque tirage, on définit la variable X égale à la somme des chiffres du nombre obtenu

- a) Trouver les valeurs possibles de X
- b) Déterminer la loi de probabilité de X
- c) Calculer son espérance mathématique

d) Montrer que la probabilité de l'événement " $X \leq 5$ " est $\frac{3}{4}$

3 - On répète 4 fois l'expérience précédente ; Calculer la probabilité pour que, au cours de ces 4 essais, l'événement $X \leq 5$ se réalise exactement deux fois.

EXERCICE 12

On peint les six faces d'un cube de bois d'arête 3 cm. On le débite, par des traits de scie parallèles aux plans des faces, en 27 petits cubes d'arêtes 1 cm. On place ces 27 petits cubes dans un sac.

1- a) Prouver que le sac contient 8 cubes dont 3 faces sont peintes; 12 cubes dont 2 faces sont peintes et 6 faces dont une seule est peinte.

b) Combien y a-t-il de cubes n'ayant aucune face peinte?

2- On tire simultanément deux cubes du sac. Soit X la variable aléatoire égale au nombre total de faces peintes que présentent ces deux cubes.

a) Déterminer les différentes valeurs de X .

b) Dresser la loi de probabilité de X .

c) Montrer que l'espérance mathématique $E(X)$ est 4.

d) Calculer la variance $V(X)$.

A et B sont deux événements correspondants à une même épreuve aléatoire.

On sait que $p(A) = 0,6$; $p(B) = 0,5$; $p(A \cap B) = 0,18$

Déterminer : $p(\bar{A})$; $p_A(B)$; $p_A(\bar{B})$; $p(\bar{A} \cap B)$; $p_{\bar{A}}(B)$; $p_{\bar{A}}(\bar{B})$; $p_B(\bar{A})$.

(On pourra s'aider d'un arbre de probabilité)

Exercice 13

$\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont deux événements associés à une épreuve aléatoire Ω .

A et B sont leurs événements contraires.

On considère l'arbre de probabilité ci-contre :

1°) a) Que représentent x et y ? b) Complète cet arbre.

2°) Exprimer $P(B)$ en fonction de x et y .

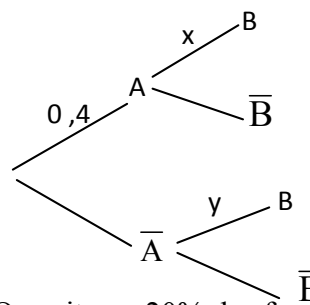
3°) Quelle relation doivent vérifier x et y pour que

A et B soient indépendants ?

4°) Exprimer $P_B(A)$ en fonction de x et y .

5°) On suppose que $y = 0,3$.

Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $P_B(A) = P_A(B)$.



Exercice 14

Une réunion rassemble 20 personnes : 12 femmes et 8 hommes. On sait que 20% des femmes fument ainsi que 40 % des hommes.

a. Une personne quitte la réunion. Quelle est la probabilité que cette personne soit occupée à fumer ?

b. Une personne quitte la réunion en fumant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ?

EXERCICE 15

I - Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

II - Un sac contient n jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à n ,

$n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

On tire simultanément deux jetons du sac

1 - Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : le plus grand des nombres inscrits sur les jetons tirés est 5

B : le plus grand des nombres inscrits sur les jetons tirés est au plus 5

2 - Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres inscrits sur les jetons tirés

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Prouver que $E(X) = \frac{2}{3}(n+1)$

c) Déterminer une condition pour que $E(X)$ soit un entier.

EXERCICE 16

Un jeu de hasard se présente comme suite :

Tirer simultanément deux boules d'une urne contenant six boules vertes et n boules blanches où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2

Si les boules tirées sont de la même couleur, le joueur gagne 1000 F et si les deux boules sont de couleurs différentes, le joueur perd 1000 F

1) Dans cette question, on prend $n = 2$

Calculer la probabilité d'obtenir

a) Deux boules de même couleur

b) Deux boules de couleurs différentes

2) On revient au cas général où $n \geq 2$ soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de X

b) Démontrer que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à $1000 \left(\frac{n^2 - 13n + 30}{(n+6)(n+5)} \right)$

c) Combien faut-il placer de boules blanches dans l'urne pour que le joueur ait la même probabilité de gagner ou de perdre à ce jeu ?

d) Pour quelles valeurs de n a-t-on $E(X) > 0$.

Exercice 17

Dans un village 80% de la population a été vaccinée contre une maladie. Une enquête a révélé les résultats suivants :

15% de la population vaccinée a la maladie.

40% de la population non vaccinée a la maladie.

On choisit au hasard une personne dans le village et on considère les événements suivants :

V : « La personne choisie a été vaccinée ».

M : « La personne choisie a la maladie »

1) a) Déterminer les probabilités : $P(V)$ et $P_V(M)$.

b) Déterminer $P(V \cap M)$, $P(\bar{V} \cap M)$ et en déduire que $P(M) = \frac{1}{5}$.

2) Une personne choisie au hasard est malade.

Déterminer la probabilité qu'elle soit vaccinée.

LEÇON 8 : STATISTIQUES

Exercice* 1

Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à l'ordre 2.

Le tableau suivant donne l'évolution de 1991 à 1999 du prix du kilogramme d'une denrée alimentaire.

Année (X)	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Prix (Y) en franc CFA	120	170	180	225	260	275	325	330	365

1) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique double.

Echelle : Axe des abscisses : Origine 1990 et 1 cm $\rightarrow$ 1 an.

Axe des ordonnées : Origine 100 et 1 cm $\rightarrow$ 20 f.

2) Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés.

3) En quelle année la valeur de la denrée dépassera 500 f ? Préciser cette valeur.

Exercice 2

Le tableau suivant donne les notes sur 20 obtenues en

mathématiques et en sciences physiques par huit candidats de la série D au BAC 2018. X_i est la note de mathématiques et Y_i est la note de physique-chimie.

X_i	4	6	7	9	11	14	12	17
Y_i	3	4	6	8	10	12	9	14

1- Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 1 cm.

2- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage puis le placer dans le repère.

3- a) Vérifier que la covariance $cov(X, Y)$ de la série statistique est égale à $\frac{57}{4}$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double.

4- Démontrer qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés est : $y = \frac{19}{22}x - \frac{17}{44}$.

5- Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calculer la note probable de mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en physique-chimie.

Exercice 3

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires d'une entreprise, exprimé en millions de francs, huit années consécutives de 2009 à 2016.

Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires (y_i) (en millions)	41	67	55	80	95	104	100	122

1- Représenter le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).

Unité graphique : en abscisse 1 cm $\leftrightarrow$ 1 année et en ordonnée 1 cm $\leftrightarrow$ 10 millions.

2- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3- Justifier qu'une équation de la droite d'ajustement linéaire obtenue par la méthode des moindres carrés est : $y = 10,643x + 35,107$

4- En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires de cette entreprise gardera la même tendance, déterminer le chiffre d'affaire pour l'année 2017.

5- En quelle année le chiffre d'affaire de l'entreprise atteindra 160 millions ?

Exercice 4

Dans la ville d'Abidjan, le ministère de la santé recense par clinique, le nombre de postes de personnel en fonction du nombre de lits de la clinique. Les résultats de 10 cliniques sont regroupés dans le tableau suivant:

Clinique	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Nombres de lits X	120	175	75	135	110	90	185	128	120	145

Nombres de postes Y	205	250	112	180	125	122	242	170	164	188
---------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

1. Construire le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ correspondant à cette série statistique.
On prendra comme unités graphiques: en abscisse, 1 cm pour 10 lits et en ordonnée : 1 cm pour 20 postes.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r . Un ajustement affine est-il justifié ?
4. a) Déterminer une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés.
b) Tracer la droite (D) sur le graphique.
5. Une nouvelle clinique de 100 lits vient d'ouvrir. A combien peut-on estimer le nombre de postes de cette clinique? Illustrer sur le graphique.
6. Dans une clinique où le personnel est estimé à 280 personnes, quel est le nombre de lits de cette clinique?

Exercice 5 Une enquête menée dans une entreprise auprès du personnel a porté sur le salaire mensuel Y par agent et le nombre X d'années d'ancienneté. Les résultats pour dix agents sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Salaire net mensuel y_i (en milliers de francs)	45	30	60	80	75	90	100	120	110	130
Nombre d'années d'ancienneté x_i	2	1	3	4	4	5	5	6	6	7

Tous les résultats seront donnés au centième près.

- 1) Représenter le nuage de points correspondant à la série double (X, Y) dans un repère orthogonal.
Sur l'axe des abscisses, prendre 1cm pour 1 année. Sur l'axe des ordonnées, prendre 1cm pour 10000 francs.
- 2- a) Calculer le salaire moyen du personnel de l'entreprise.
b) Quel est le nombre moyen d'année d'ancienneté du personnel ?
c) Placer le point moyen G dans le repère
- 3- Calculer la covariance de X et Y.
- 4- Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en X par la méthode des moindres carrés et la tracer.
- 5- a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série et interpréter le.
b) Si un agent de cette entreprise gagne 150000 francs par mois, à combien d'années peut-on évaluer son ancienneté ?
c) Quel est le salaire d'un agent qui a 10 années d'ancienneté ?

Exercice 6

Un pharmacien observe durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaire en million de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où X désigne le numéro du mois et Y le chiffre d'affaire correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22

- 1) Calculer les moyennes $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ respectivement des variables X et Y.
- 2) Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point G
(Unité graphique : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnées)
- 3) Calculer la variance $V(X)$ de X et la covariance $COV(X, Y)$ de X et Y.
- 4) Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de Y en fonction de X est $Y = \frac{78}{35}X + 9,2$
- 5) En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaire de cette pharmacie à la fin du 7^{ème} mois.

Exercice* 7

Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge de dix personnes choisies au hasard dans une population

X	36	38	40	42	45	47	50	52	60	70
y	11,8	12,0	12,2	12,0	12,5	12,3	13,1	14,0	15,5	15,4

- 1) Calculer les moyennes $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ respectivement des variables X et Y.
- 2) Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (X ; Y) ainsi que le point moyen G. (Unité graphique : 0,5 cm pour un an et 3cm pour l'unité de tension artérielle).
- 3) Calculer la variance V(X) de X et la covariance COV(X,Y) de X et Y.
- 4) a) Déterminer une équation de la droite (D) de regression de Y en fonction de X .
b) Construire (D).
- 5) En utilisant la droite (D), calculer une estimation de la tension artérielle d'une personne âgée de 65 ans.

Exercice* 8

Une entreprise veut prévoir le nombre d'articles qu'elle aura en stock en l'an 2015.
L'évolution du stock de ses articles, au cours des six dernières années , est donnée par le tableau statistique ci-dessous.

Années	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	3810	3860	3940	4020	4100	4180

x_i = Ordre des années et y_i = nombre d'articles en stock.

1. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.
(On prendra l'arrondi d'ordre zéro pour l'ordonnée de G).
2. Représenter graphiquement le nuage de points de la distribution statistique définie par le tableau précédent, dans le plan muni d'un repère orthogonal.
(Unité 2 cm en abscisse et 200 articles pour 1 cm en ordonnées).
3. Déterminer une équation de la droite de régression de y en fonction de x.
(On donnera l'arrondi d'ordre 2 des résultats).
4. Quel serait à partir de ces études le nombre d'articles en stock de l'entreprise en 2015 ?
(On donnera l'arrondi d'ordre 0 du résultat).

Exercice 10 (concours de CAFOP 2012)

Le tableau ci-dessous donne l'ancienneté x_i en année et le salaire y_i en millier de francs CFA par mois de chacun des huit ouvriers d'une exploration agricole.

x_i	3	5	7	9	12	14	16	18
y_i	68	74	89	101	120	130	135	155

1. Représenter le nuage de point en portant en abscisse les valeurs x_i et en ordonnée les y_i .
Unité : 1 cm pour 1an en abscisse et 1 cm pour 10 milliers de francs CFA en ordonnées.
- 2.a) calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points.
b) placer G sur le graphique.
- 3.a) Vérifier que la covariance de la série double (x_i, y_i) est égale à 145.
b) Démontrer qu'une équation de la droite de régression de y en fonction de x par la méthode des moindres carrés est : $y = \frac{580}{101}x + \frac{4919}{101}$.
- c) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat.
- d) Déterminer le salaire d'un ouvrier dans sa 24^{ème} année.

Exercice* 11

Au cours d'une séance d'essais un pilote d'automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.

Au moment du top sonore, on mesure la vitesse V_i en km/h de l'automobile puis la distance Y_i en mètre nécessaire pour arrêter le véhicule. On obtient les résultats suivants pour six essais.

V_i (km/h)	27	43	62	80	98	115
--------------	----	----	----	----	----	-----

$Y_i(m)$	6,8	20,5	35,9	67,8	101,2	135,8
----------	-----	------	------	------	-------	-------

On pose pour les six valeurs de V_i , $X_i = V_i^2$ et on considère la série double (X_i, Y_i) .

1. Compléter le tableau suivant :

X_i						
Y_i						

2. Construire le nuage de points associé à la série statistique double $(X_i ; Y_i)$

(X_i en abscisse avec 1 cm pour 1000 et Y_i en ordonnée avec 1 cm pour 10).

3.a) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X puis la tracer dans le repère précédent..

b) En déduire la valeur estimée de X pour une distance d'arrêt de 180m puis la vitesse du véhicule.

c) Quelle est la distance d'arrêt estimée pour une vitesse de 150 km/h.

LEÇON 9 :EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE 1 :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles : **a.** $y' = 3y$; **b.** $y' + 2y = 0$; **c.** $2y' + 3y = 0$
d. $y'' = 2y$ **e.** $y + 3y'' = 0$; **f.** $2y + 3y'' = 0$; **g.** $4y'' = y$.
2. Déterminer la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions données :
a. $f(x) = -5f'(x)$ et $f(0) = 1$
b. $f(x) + 2f'(x) = 0$ et (C_f) admet au point d'abscisse -2 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 0,5x$.
c. $f''(x) + 4f(x) = 0$ et le point de coordonnées $(0;2)$ appartient à (C_f) et $f'(0) = 0,5$

EXERCICE 2

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f_k(x) = (x+k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1-k$.
2. On note M_k le point de la courbe C_k d'abscisse $1-k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation

$$y = e^{-x}.$$

3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :

- la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$;
- la courbe C_k d'équation $y = (x+k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

- a.** Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

- b.** En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x+2)e^{-x} dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

EXERCICE 3

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000). D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0; +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle : (E) $y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y)$.

1. Démontrer l'équivalence suivante : Une fonction f , dérivable, strictement positive sur $[0; +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0; +\infty[$, $f(t) = -\frac{1}{20}f(t) [3 - \ln f(t)]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0; +\infty[$,

$$g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}.$$

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle : $z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$.

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0; +\infty[$ $f(t) = \exp\left[3 + Ce^{\frac{t}{20}}\right]$

(la notation $\exp$ désigne la fonction exponentielle naturelle : $x \mapsto e^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par : $f(t) = \exp\left[3 - 3e^{\frac{t}{20}}\right]$.

Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

EXERCICE 4 : Datation au carbone 14.

Le carbone 14 est un isotope instable du carbone 12. Il est produit en haute atmosphère par des réactions nucléaires.

On admet qu'il se trouve en proportion constante dans les organismes vivants qui absorbent du carbone et que la proportion de carbone 14 par rapport au carbone 12 est voisine de

$$P_0 = 1,3 \cdot 10^{-1}\%.$$

Quand un organisme meurt il n'absorbe plus de carbone, et le carbone 14 présent dans l'organisme se désintègre en azote. A la mort d'un organisme, on peut décrire la proportion de carbone 14 par une fonction dérivable $P(t)$ sur $[0; +\infty[$ (t en années). On peut démontrer qu'à chaque instant t , la vitesse à laquelle diminue cette proportion dans l'organisme après sa mort est proportionnelle à la proportion présente dans l'organisme :

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = -1,21 \cdot 10^{-4}.$$

1. Ecrire une équation différentielle dont P est solution et la résoudre en tenant compte de la condition initiale.

2. Démontrer que l'équation : $P(t) = \frac{P_0}{2}$ admet une solution unique et donner une valeur approchée à 10 ans

près de cette solution à l'aide de votre calculatrice.

3. L'analyse d'un fragment d'os a révélé une proportion de $0,2 \cdot 10^{-2}\%$ de carbone 14. Date-il de plus de 10 000 ans ?

EXERCICE 5 : L'équation de Newton

La loi du refroidissement (Newton) s'énonce en générale ainsi : « la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant à tout instant ». On décrit la température de ce corps à chaque instant par une fonction $\theta(t)$ dérivable sur $[0; +\infty[$, la vitesse de refroidissement par sa dérivée $\theta'(t)$ et on note T la température du milieu ambiant.

1. Expliquer pourquoi il existe une constante positive k telle que $\theta'(t) = k[T - \theta(t)]$.
2. En déduire que θ est solution d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$.
3. a. Dans une salle de classe à 20°C un professeur entre avec son gobelet de café chaud (à 80°C). Exprimer $\theta(t)$ à l'aide de t et de k .
b. Deux minutes plus tard le café est à 60°C . Déterminer une valeur approchée de k dans ce cas.
c. Au bout de combien de temps le professeur pourra-t-il boire son café qu'il aime consommer à 40°C ?

EXERCICE 6 Taux d'alcoolémie

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL-1) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}^+$, l'équation différentielle : $(E) : y' + y = a$ où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}^+ : g(t) = f(t)e^t$. Démontrer que g est une fonction affine.
2. Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a .
3. Dans cette question, on suppose que $a = 5$.
a. Étudier les variations de f et tracer sa courbe.
Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.
b. Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5$ gL-1.

EXERCICE 7 Avec second membre variable

On considère l'équation différentielle : $(E) : y' - 3y = \sin x$

1. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation sans second membre associé :
 $(E_0) : y' - 3y = 0$
2. Déterminer des réels a et b de sorte que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $p(x) = a \cos x + b \sin x$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f - p$ est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

PROBLEME

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h , définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :
 $g(x) = h(x) e^{-x}$

- a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

- b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n) , sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

- a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation $(F) : y' + y = 0$.

- b. Résoudre (F) .

c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n) .

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$ (on rappelle que par convention $0! = 1$)

1. On pose, pour tout x réel, $f_0(x) = e^{-x}$; $f_1(x) = x e^{-x}$.

a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. Pour tout entier strictement positif n , on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

2. Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ (on ne cherche pas à calculer I_n)

a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0; 1]$ l'encadrement

$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$. En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n) .

b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité $I_k - I_{k-1} = -\frac{1}{k!} e^{-1}$.

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que $I_n = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1}}{k!}$.

d. En déduire finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

2^{ème} PARTIE : ALGEBRE ET GEOMETRIE

LEÇON 1 :BARYCENTRES - LIGNE DE NIVEAUX

EXERCICE 1

ABCD est un carré de centre O et de côté a ($a > 0$). G est centre de gravité du triangle ABC, I est le milieu du segment [BC] et K le point du plan vérifiant $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BG}$.

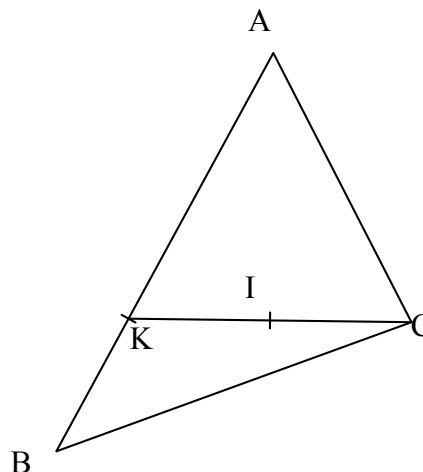
A	B	C
1	-1	1

- 1) Justifie que $D = \bar{B}$
- 2) Ecrire :
 - a) G comme barycentre des points D et B,
 - b) K comme barycentre des points A, B, C et D.
- 3) M étant un point du plan.
 - a) Réduire les vecteurs $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.
 - b) Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$

EXERCICE 2

Ecrire le point G comme barycentre des points A, B et C.

- 1) $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CK}$; 2) $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$
- 3) $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\{G\} = (CH) \cap (BK)$.



EXERCICE 3

ABC est un triangle. On donne les points H, K et L tels que

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{CL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.$$

Démontrer que les points H, K et L sont alignés.

EXERCICE 4

ABC est un triangle.

- 1) On donne les points I, J et K tels que $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$.
 - a) Faire une figure.
 - b) Démontrer que les droites (AJ) ; (BK) et (CI) sont concourantes.
- 2) On donne les points P, Q et R tels que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CR} = -2\overrightarrow{CA}$.
 - a) Faire une figure.
 - b) Démontrer que les droites (AQ) ; (BR) et (CP) sont parallèles.

EXERCICE 5

ABC est un triangle équilatéral de côté a ($a > 0$). Déterminer et construire le lieu géométrique des points M du plan vérifiant :

- 1) $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = a^2$
- 2) $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = a^2$
- 3) $\frac{MA}{MB} = 2$
- 4) $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$
- 5) $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 6) $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$7) 2\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

EXERCICE 6

ABC est un triangle inscrit dans un cercle (C). M est un point du plan.

P, Q et R sont les projetés orthogonaux du point M respectivement sur les droites (AB) ; (BC) et (CA).

1) Démontrer que les points M, Q, B et P sont cocycliques.

2) Prouver que $2\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{PQ}}, \widehat{\overrightarrow{PR}}) = 2\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}}, \widehat{\overrightarrow{BM}}) - 2\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}}, \widehat{\overrightarrow{AM}})$

3) Prouver que P, Q et R sont alignés si et seulement si $M \in (C)$.

EXERCICE 7

ABC est un triangle. P, Q et R sont des points distincts de A, B et C appartenant respectivement aux droites (AB), (BC) et (CA).

1) Faire une figure.

2) (C_1) , (C_2) et (C_3) sont les cercles circonscrits respectivement aux triangles APR, BPQ et CQR.

Soit I le second point d'intersection des cercles (C_1) et (C_2) .

a) Prouver que $2\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CB}}, \widehat{\overrightarrow{CA}}) = 2\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IQ}}, \widehat{\overrightarrow{IR}})$.

b) Justifier que I appartient au cercle (C_3) .

3)a) Démontrer que $2\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{PR}}, \widehat{\overrightarrow{PQ}}) = 2\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}}, \widehat{\overrightarrow{AI}}) - 2\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}}, \widehat{\overrightarrow{BI}})$.

b) Démontrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si A, B, C et I sont cocycliques.

EXERCICE 8

L'unité graphique est le centimètre

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6$

G_1 est le barycentre des points pondérés $(A ; 1)$ et $(B ; 3)$

G_2 est le barycentre des points pondérés $(A ; 1)$ et $(B ; -3)$

1) Construire les points G_1 et G_2

2) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 - 9MB^2 = 0$

est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$

3) Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{3}$

EXERCICE 9

Soit EFG un triangle dans inscrit dans un cercle (ζ) de centre O. la droite perpendiculaire à (FG) menée par E coupe le cercle (ζ) en I et la droite (FG) en A. On désigne par J le symétrique de I par rapport à (FG) .

La droite (FJ) coupe la droite (EG) en B.

1 Faire une figure

2 a) Prouver que $(\widehat{\overrightarrow{FI}}, \widehat{\overrightarrow{FA}}) = (\widehat{\overrightarrow{EA}}, \widehat{\overrightarrow{EB}})$

b) Démontrer que les points F, A, B et E sont cocycliques

c) Prouver que $(FB) \perp (EG)$

3 On admet que EFG n'est pas rectangle

a) Justifier que J est l'orthocentre de EFG

b) Prouver que A est le barycentre de $(F, \tan(\widehat{EFG}))$ et $(G, \tan(\widehat{EGF}))$

c) Ecrire B comme barycentre de E et G

EXERCICE 10

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle (Γ) de centre O . G le centre de gravité et H l'orthocentre ABC . Soit K le symétrique de H par rapport à la droite (AC) .

1- Faire une figure

2- a Démontrer que $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{AH}$

b) En déduire que $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

c) Prouver que O est le barycentre des points pondérés $(G; 3)$ et $(H; -1)$

3- Démontrer que le point K appartient au cercle (Γ)

4- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{AB} + \vec{AC}\|$$

EXERCICE 11

I/ ABCD est un quadrilatère

$$G = \text{bar} \left\{ (A; 1), (B; 4), (C; 1), (D; -2) \right\}$$

Ecrire le vecteur $\vec{AG}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$

$$2) \text{ On donne } \vec{AK} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} - \vec{AD}$$

$$K = \text{bar} \left\{ (A; m), (B; 2), (C; 3), (D; -6) \right\}$$

La valeur de m est

$$\text{II / A et B sont deux points du plan } I = \text{bar} \left\{ (A; 1), (B; 2) \right\};$$

$$J = \text{bar} \left\{ (A; 2), (B; -1) \right\}$$

$$\text{L'ensemble des points } M \text{ du plan tels que } \|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB}\|$$

est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$

$$a) \text{ Complete } G_1 = \text{bar} \left\{ (I;), (J; 1) \right\} \quad G_2 = \text{bar} \left\{ (I;), (J; 1) \right\}$$

EXERCICE 12

ABC est un triangle non équilatéral. Soit A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

$$\text{On pose } a = BC, b = CA, c = AB \text{ et } \vec{u} = a^2 \vec{BC} + b^2 \vec{CA} + c^2 \vec{AB}$$

1) Construire ABC et le centre O du cercle circonscrit à ABC ,

$$2) a) \text{ Montrer que } \vec{u} = (a^2 - b^2) \vec{AC} + (c^2 - a^2) \vec{AB}$$

b) En déduire que le vecteur $\vec{u}$ est non nul.

$$3) \text{ Soit } (\Phi) \text{ l'ensemble des points } M \text{ du plan tels que } a^2 \vec{BC} \cdot \vec{MA'} + b^2 \vec{CA} \cdot \vec{MB'} + c^2 \vec{AB} \cdot \vec{MC'} = 0$$

a) Démontrer que le centre O du cercle circonscrit à ABC est un élément de (Φ)

$$b) \text{ Soit } G \text{ le centre de gravité de } ABC, \text{ Sachant que } \vec{GA'} = \frac{1}{3} \vec{AA'} \text{ et } \vec{AA'} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$\text{montrer que } \vec{BC} \cdot \vec{GA'} = \frac{1}{6} (b^2 - c^2)$$

$$\text{On admet que: } \vec{CA} \cdot \vec{GB'} = \frac{1}{6} (c^2 - a^2) \quad ; \quad \vec{AB} \cdot \vec{GC'} = \frac{1}{6} (a^2 - b^2)$$

c) Démontrer que G appartient à (Φ)

$$4) a) \text{ Montrer que } M \in (\Phi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 \vec{BC} + b^2 \vec{CA} + c^2 \vec{AB}) \cdot \vec{MO} + a^2 \vec{BC} \cdot \vec{OA'} + b^2 \vec{CA} \cdot \vec{OB'} + c^2 \vec{AB} \cdot \vec{OC'} = 0$$

c) Montrer que (Φ) est une droite que l'on précisera. Tracer (Φ)

EXERCICE 13

Soit $A B C D$ un losange de centre O tel que $OB = 2 OA$

1- Démontrer que le barycentre H des points pondérés $(B, 2)$; $(C, -1)$; $(D, 1)$

est le milieu du segment $[AB]$

2- Soit k un nombre réel

a) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des barycentres G_k des points pondérés

(A, k) ; $(B, 2)$; $(C, k-1)$; $(D, 1-k)$

b) Préciser la valeur de k pour laquelle G_k est un point de la droite (AC)

3- Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan pour lesquels :

a) les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ et $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ sont colinéaires.

b) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\| = \|2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$ noté (E_3)

LEÇON 2 : NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

1°) Calculer les nombres complexes suivants : $i^2 ; i^3 ; i^4 ; i^5 ; i^6 ; i^7 ; i^8 ; (i)^{2k} ; (i)^{2k+1} ; i^n ; (1+i)^2 ; (1+i)^3 ; (1+i)^{2k} ; (1-i)^2 ; (1-i)^{2k}$.

2°) Calculer : a) $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^7$;

B - $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^n$ suivant les valeurs de n

3°) Soit $z_1=1+i$ et $z_2=-2i$. Ecrivez sous forme algébrique chacun des nombres suivants :

$$Z_1 - 2Z_2 ; \frac{z_1}{z_2} ; z_1^2 z_2 ; \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}.$$

Exercice 2

1°) Déterminez l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles $Z = \frac{z + 4i}{z - 4i}$ est défini. Dans ce cas calculez $|Z|$.

2°) a- Déterminez l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles Z est réel.

Déterminez puis construisez les points images de ces z.

b- Déterminez l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles Z est imaginaire pur. Déterminez puis construisez les points images de ces z.

Exercice 3

Soit $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 1 + i$. On pose $Z = \frac{z}{z'}$.

1°) Déterminez l'expression trigonométrique de z, z' et Z.

2°) Déterminez l'expression algébrique de Z.

3°) Déduisez des questions précédentes la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 4

Soit $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

1°) Déterminez le module et un argument de $1+z$ et de $1-z$.

2°) Déterminez le module et un argument de $1+z+z^2$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto z' = f(z) = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i}.$$

1°) a – Déterminez l'ensemble de définition D de f.

b – Démontrez que f est une bijection de D sur D.

c – Démontrez que $f^{-1} = f$

2°) On pose $Z = z - i$ et $Z' = z' - i$.

a- Démontrez que $Z \cdot Z' = -3 + 4i$.

b- Déterminez le module de $Z \cdot Z'$.

c- Déduisez-en que l'image d'un cercle du plan complexe dont le centre est A(i), est un cercle de même centre.

d- Existe-t-il un cercle coïncidant avec son image ?

EXERCICE 6

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle que l'on déterminera d'abord.

$$(E) : z^3 - (2 + 3i)z^2 + (5i - 1)z + 2 - 2i = 0$$

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points

$$A_0(0 ; 2) ; A_1(1 ; 1) ; A_2(1 ; 0)$$

1) Faire une figure unité graphique : 6 cm

2) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est rectangle isocèle.

EXERCICE 7

I / 1) Résoudre l'équation $z \in \mathbb{C}, z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$

2) On considère le polynôme définie de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - (1-i)z^3 - iz^2 - (2+2i)z - 4$

a) Calculer $P(-1)$ et vérifier que $P(-2i) = 0$

b) En utilisant les résultats précédents, résoudre l'équation $P(z) = 0$

II / Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . unité 2 cm, on donne les points A, B et K

d'affixes respectives $-2i$; 2 et -1

1) Faire une figure soignée

2) Démontrer que le quadrilatère ABJK est un trapèze isocèle

3) Prouver que les points A, B, J et K appartiennent à un cercle (ζ) dont on précisera l'affixe du centre Ω et le rayon

4) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant

$$\arg \left(\frac{z+1}{z-1} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

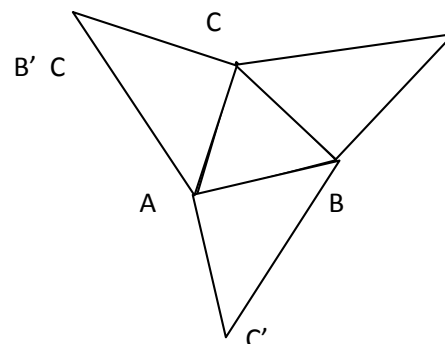
EXERCICE 8

ABC est triangle équilatéral de sens direct et de centre G

A l'extérieur du triangle ABC, on construit les triangles rectangles isocèles ACB', BAC' et CBA' Respectivement en C, en A et B, de sens direct

Démontrer en utilisant les nombres complexes que le triangle

A'B'C' est équilatéral et de sens direct



EXERCICE 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{U}, \vec{V})$

unité graphique = 2 cm

1) a) Développer $(1 + \sqrt{3})^2$

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + (1 - \sqrt{3})z + (2 - \sqrt{3}) = 0$

2) On suppose $a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} (1 - i)$ et $b = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} (1 + i)$

On note A et B les points du plan d'affixes respectives a et b . Calculer $\frac{a}{b}$

En déduire la nature du triangle AOB

3) Soit C le point d'affixe 1

a) Montrer que $1 - a = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} - i)$ et $b - a = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (-2i)$

b) Mettre sous forme trigonométrique le nombre $\frac{1 - a}{b - a}$

c) Justifier que le triangle ABC est équilatéral

4) Construire soigneusement A, B et C

EXERCICE 10

I- On pose $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (5-2i)z - 2+3i$

1) Vérifier que $P(-i) = 0$

2) Prouver que P admet un zéro réel a que l'on précisera

3) Résoudre l'équation $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$

II- Sur la figure ci-dessous ABCD et CEFG sont deux carrés de sens direct et E est le milieu du segment $[CB]$

D

C

G



B, C, D, E, F et G

- 1) a) Prouver que $d = bi$

b) Calculer c et e

c) Prouver que $f = b \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i \right)$ et $g = b \left(\frac{3}{2} + i \right)$

2) Démontrer que $Mes \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AF} \right) = \frac{\pi}{4}$

3) Soit K le point d'intersection des droites (DE) et (AF)

a) Démontrer que les points C, E, F et K sont cocycliques

b) En déduire que les droites (EK) et (KG) sont perpendiculaires

4) a) Démontrer que les droites (DE) et (GB) sont perpendiculaires

b) Prouver que les points B , K et G sont alignés

EXERCICE 11

1 On pose $Z = \cos \theta + i \sin \theta$; $\theta \in [0 ; 2\pi]$

Discuter suivant les valeurs de θ la forme trigonométrique

du nombre complexe $\frac{Z + 1}{Z}$

2. Le plan étant muni d'un repère orthonormé ; résoudre l'équation $Z \in \mathbb{C}, Z^4 = -4i$ et placer les points images des solutions

EXERCICE 12

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

I – Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan d'affixe Z tels que :

1) Le nombre $\frac{1+Z}{1+\overline{Z}}$ soit imaginaire pur

$$2) \left| \frac{iZ - 2 + 3i}{Z + 1 - 2i} \right| = 2$$

II – Soit P_0 le point d'affixe $Z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + i)$

a- Mettre sous forme trigonométrique

b- Placer les points P_0 ; $M_0(Z_0 + 1)$ et $M'_0(Z_0^2 + 2)$ sur une autre figure et prouver que les points

I, M_0 et M_0' sont alignés

2) Soit P le point d'affixe Z déterminer l'ensemble des points P pour que les points

$M(1 + Z)$; $M'(Z^2 + 2)$ et I soient alignés

EXERCICE 13

I / En utilisant la formule de Moivre, prouver que pour tout entier naturel n , $\cos(n\pi) = (-1)^n$

II / Résoudre l'équation $z \in \mathbb{C}$, $2z^2 + 3z + 2 - 3i = 0$

III / Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J)

unité graphique : 2 cm

On donne les points A et B d'affixes respectives 2 et 5

a) Faire une figure

b) Construire l'ensemble (ζ_1) des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = \frac{\pi}{6}$

c) Construire l'ensemble (ζ_2) des points M du plan tels que $\frac{MB}{MA} = 2$

2) On désigne par E le point d'intersection des ensembles (ζ_1) et (ζ_2) c'est-à-dire

$$\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \frac{MB}{MA} = 2$$

On se propose de déterminer l'affixe du point E

a) Prouver que $\frac{Z_E - Z_B}{Z_E - Z_A} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) Calculer Z_E

EXERCICE 14

I-1- Ecrire le nombre $A = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}$ sous forme trigonométrique

2- Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $B = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2003}$

3- Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $C = \frac{2i}{(\sqrt{3} - i)}$

4- Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $D = (1 + 2i)^4$

II- Complète les équivalences suivantes de manière à les corriger

$$\left(\begin{array}{l} ABC \text{ est un triangle} \\ \text{rectangle isocèle} \end{array} \right) \Leftrightarrow \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \pm i$$

$$\left(\begin{array}{l} A, B \text{ et } C \text{ sont des} \\ \text{points alignés} \end{array} \right) \Leftrightarrow \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}$$

$$M \in \zeta(A; r) \Leftrightarrow Z_M - Z_A = r$$

EXERCICE 15

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$ unité graphique : 2 cm

A, B, C désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3i$ et $c = 2i$

1) a) Ecrire b sous forme exponentielle

b) Construire les points A, B et C

2) On désigne par E le barycentre du système $\{(A; 1); (C; 3)\}$

et par F le barycentre du système $\{(A; 2); (B; 1)\}$

- a) Etablir que l'affixe e du point E est égale à $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
- b) Etablir que l'affixe f du point F est égale à $-\sqrt{3} - i$
- 3) a) Démontrer que le quotient $\frac{e-c}{e-b}$ est un imaginaire pur.
En déduire que, dans le triangle ABC , le point E est le pied de la hauteur issue de B .
Placer le point E sur la figure.
- b) Démontrer que le point F est le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C
- 4) On désigne par H le barycentre du système $\{(A; 2); (B; 1); (C; 6)\}$
Démontrer que le point H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF)
Que représente le point H pour le triangle ABC ?
- 5) Démontrer que les points C , E , F et B appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.
- 6) a) Prouver que $h = -\frac{\sqrt{3}}{3} + i$ est l'affixe de H et que $HC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- b) On donne $HA = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ et $HB = \frac{8\sqrt{3}}{3}$
Déterminer et construire l'ensemble (Ψ) des points M du plan d'affixe z tels que :
- $$2|z-a|^2 + |z-b|^2 + 6|z-c|^2 = 84$$

EXERCICE 16

Soit les polynômes P , P_1 et P_2 définies par

$$P(z) = z^4 + (2 + 4i)z^2 + (4 + 8i)z + 8 + 8i$$

$$P_1(z) = z^2 - 2z + 4 + 4i \quad ; \quad P_2(z) = z^2 + 2z + 2$$

I- 1)a) Montrer que P_1 admet une seule racine imaginaire pure que l'on déterminera

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P_1(z) = 0$

2) Trouver les racines de P_2

3) a) Démontrer que pour $z \in \mathbb{C}$, $P_1(z) \times P_2(z) = P(z)$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 + (2 + 4i)z^2 + (4 + 8i)z + 8 + 8i = 0$

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ unité graphique : 2 cm

Soit les points A , B , C et D d'affixes respectives $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$ et $2 - 2i$

1) Prouver que le triangle BCD est rectangle isocèle en B

2) Démontrer que les points A , B , C et D appartiennent à un cercle (ζ)

dont l'on précisera le centre et le rayon

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant

a) $\frac{z+1+i}{z-2+2i}$ est imaginaire pur. On le notera (Γ_1)

b) $|iz+2| = |\bar{z}+1+i|$ on le notera (Γ_2)

EXERCICE 17

I – Mettre sous forme trigonométrique puis exponentielle chacun des nombres

complexes suivants : $A = -1 + i\sqrt{3}$; $B = 1 + e^{-\frac{2i\pi}{3}}$;
 $C = -2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)$; $D = 3 \left(-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)$

II – On pose $u = \sqrt{3} - i$ et $v = 1 + i$

1 – Calculer uv sous forme algébrique

2 – Démontrer que $uv = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]$

3 – a) En utilisant les résultats précédents, prouver que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b) En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

III – On pose $P = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

1 – Prouver que $P^2 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

2 – a) Déterminer la forme trigonométrique de P^2

b) En déduire la forme trigonométrique de P

3 – a) Déterminer à l'aide des résultats précédents $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

b) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$; $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$; $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$; $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

EXERCICE 18

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points E , F , G et H d'affixes respectives $-i$; $-1 + 2i$; $1 + 4i$ et $3 + 2i$

Faire une figure

2 – Démontrer que :

a) Les points E , I et H sont alignés ; b) Le triangle $F I H$ est rectangle et isocèle en I

3 – Démontrer que $F I H G$ est un carré

4 – Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes Z tels $|2iZ + 4 + 2i| = 4$

EXERCICE 19

I) Calculer $\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2008}$ sous forme algébrique

II) on pose $A = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2008\pi}{3}\right)$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \dots + \sin\left(\frac{2008\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad Z = A + iB$$

On rappelle que $A = \sum_{k=0}^{2008} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ et $B = \sum_{k=0}^{2008} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

1) Démontrer que $Z = \frac{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}$

2) Mettre Z sous forme algébrique

3) En déduire les valeurs de A et B .

EXERCICE 20

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit M un point du plan et $z = x + iy$ son affixe.

N et P sont les points d'affixes respectives z^2 et z^4

I - 1 - Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M pour lesquels M, N, P

est un triangle rectangle en N a pour équation : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$

2 - Justifier que (Γ) est une hyperbole équilatère dont on précisera les éléments géométriques (sommets, foyers, excentricité, directrices)

3 - Soit K le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

On pose $\vec{i} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{j} = \frac{-\vec{u} + \vec{v}}{\sqrt{2}}$

a) Justifier que $(K, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé

b) Notons (x', y') les coordonnées de M dans $(K, \vec{i}, \vec{j})$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y

c) Déterminer une équation de (Γ) dans le repère $(K, \vec{i}, \vec{j})$

4 - Construire soigneusement (Γ)

EXERCICE 1

- I) Déterminer tous les multiples de 6 compris entre -32 et 245.
- II) Déterminer tous les entiers relatifs n pour lesquels le nombre $\frac{2n+46}{n+3}$ est relatif.
- III) Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- 1) $\begin{cases} 2xy = 10 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2xy = 10 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$; 3) $x^2 - y^2 = 21$
- IV) On pose $d = x + 43y$.
Déterminer x et y pour que d soit un entier divisible par 2 et par 9.
- V) Calculer les nombres A et B dans le système binaire.
 $A = 100111^2 + 11101^2$
 $B = 110011^2 \times 1101^2$
- VI) 1) Déterminer l'écriture des nombres suivants dans le système.
 $C = 256$; $D = 451$
 2) Déterminer dans le système décimal, les nombres donnés dans le système binaire.
 $E = 111101$; $F = 110101101$

EXERCICE 2

- I) Déterminer le PGCD et le PPCM des nombres a et b .

1) $a = 126$ $b = -504$

2) $a = -252$ $b = -306$

- II) On pose $x = n^2 - 2n + 5$

$y = n + 3, \quad n \in \mathbb{N}$

Déterminer les valeurs possibles du PGCD de x et y .

EXERCICE 3

- I) Déterminer les entiers relatifs x vérifiant :

1) $7x \equiv 3 \pmod{5}$

2) $5^x \equiv 4 \pmod{7}$

- II) Soit n un entier naturel.

- 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.

- 2) En déduire

- a) Le reste de la division euclidienne de 3^{2011} par 7.

- b) L'ensemble des nombres naturels x vérifiant $3^x \equiv 6 \pmod{7}$.

- 3) On pose $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A_n par 7.

EXERCICE 4

Soit n un entier relatif.

- 1) Prouver que le nombre $\frac{5n+2}{7n+3}$ est irréductible.

- 2) Le nombre $\frac{2n+5}{4n-3}$ est-il irréductible ?

- 3) En utilisant l'algorithme d'Euclide, démontrer que les nombres $n^2 + 5n + 5$ et $n + 1$ sont premiers entre eux.

- 4) En utilisant le théorème de Bézout, démontrer que les nombres $4n + 7$ et $10n + 7$ sont premiers entre eux.

- 5) En utilisant le théorème de Bézout, prouver que les nombres $n^2 + 1$ et n sont premiers entre eux.

EXERCICE 5

- 1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, prouver que les nombres 351 et 100 sont premiers entre eux.

- 2) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tels que $351u + 100v = 1$.

- 3) Résoudre l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$351x + 100y = 21$

- 4) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} x \equiv 28 [251] \\ x \equiv 79 [100] \end{cases}$$

EXERCICE 6

I) Dans la liste suivante :

1 ; 11 ; 21 ; 31 ; 41 ; 51 ; 61 ; 71 ; 81 ; 91 ; 101 ; 111 ; 121 ; 131 ; 141 ; 151 ;
161 ; 171 ; 181 ; 191 ; 201 ; 211 ; 221 ; 231 et 241.

Citer ceux qui sont :

- 1) multiples de 7
- 2) multiples de 13
- 3) des nombres premiers.

II) Les entiers 9187 et 9553 sont-ils des nombres premiers ?

EXERCICE 7

I Déterminer le résultat de la somme $\overline{100111}^{\text{deux}} + \overline{112}^{\text{huit}}$ dans la base binaire.

II On assimile les lettres de l'alphabet français

A, B, ..., Z aux nombres 0, 1, ..., 25 et on code ces nombres par la fonction de
« hachage » ou « chiffage »

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \{ 0, 1, \dots, 25 \} \rightarrow \{ 0, 1, \dots, 25 \} \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$$

$$\text{Avec } f(x) \equiv 17x + 22 [26]$$

(Autrement dit, $f(x)$ est le reste de $17x + 22$ dans la division par 26)

1) Chiffrer le nombre « HUIT »

1) On souhaite déterminer l'expression d'une fonction de déchiffrement g de

$\{ 0, 1, \dots, 25 \}$ dans lui-même telle que $y \equiv f(x) [26] \Leftrightarrow x \equiv g(y) [26]$

a) Déterminer un entier u tel que $17u \equiv 1 [26]$ avec $0 \leq u \leq 25$

b) En déduire que la fonction de déchiffrement est $g : y \mapsto 23y + 14 [26]$

3) Déchiffrer alors le mot « QWXA »

EXERCICE 8

I - Montrer que la suite $U_n = 1 + 0,6 + 0,6^2 + \dots + 0,6^n$ est majorée.

II - Soit n un entier naturel qui s'écrit $n = 10a + b$ ($a ; b \in \mathbb{N}$).

Montrer que n est divisible par 7 si et seulement si $a - 2b$ est divisible par 7.

EXERCICE 9

1) Discuter suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 5^n par 8

2) Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre $(2005)^{2002}$ par 8

3) a) Justifier que $1285 \equiv 5 [8]$

b) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel k , le reste de la division euclidienne par 8, du nombre
 $U_k = 1285^k + 2(1285)^{2k} + 3(1285)^{3k} + 4(1285)^{4k} + 5(1285)^{5k}$

EXERCICE 10

I / Sept entiers consécutifs sont rangés dans l'ordre croissant

La somme des trois premiers est 174, la somme des trois derniers est :

- a) 200 b) 186 c) 190 d) 181

II / Le nombre de diviseurs dans $\mathbb{Z}$ du nombre $-2^3 \times 3^2 \times 5$ est :

- a) 24 b) 36 c) 48 d) 16

III / Une solution de l'équation $2x \equiv 3 [4]$ est :

- a) 2 b) 3 c) 2 d) aucune des réponses précédentes

EXERCICE 11

I - Déterminer les couples d'entiers relatifs (a, b) vérifiant

$$1) \begin{cases} a + b = 96 \\ P P C M(a; b) = 180 \end{cases}$$

$$2) 2m + 7d = 111 \quad \text{où} \quad m = P P C M(a; b) \quad \text{et} \quad d = P G C D(a; b)$$

II- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$1) \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + 3y = -5 \end{cases} \quad 2) x^2 - y^2 = 28$$

III- Dire si le nombre donné est premier 1) 7 321 ; 2) 92 303

EXERCICE 12

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} x \equiv 14 [26] \\ x \equiv 10 [40] \end{cases}$$

2) Pour effectuer un convoi, deux types de cars sont disponibles. Le premier type de cars comporte 40 places et le second type 26 places. Il y a plus de cars de 40 places que de cars de 26 places. Lorsque tous les participants prennent des cars de 40 places, il y a 10 personnes qui n'auront pas de place, si on utilise uniquement des cars de 26 places, 14 personnes n'auront pas de places. On utilise les deux types de cars. Alors il restera deux places dans l'un des cars.

Sachant que le nombre de passagers ne dépasse pas 700.

Déterminer le nombre de passager et le nombre de cars de chaque type.

EXERCICE 13

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A , qui apparaît périodiquement tous les 105 jours, six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B , dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition *simultanée* des deux objets aux yeux de l'astronome.

le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1

1) Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et par B entre J_0 et J_1

Montrer que le couple $(u; v)$ est solution de l'équation $(E_1) : 35x - 27y = 2$

2) a) Déterminer par l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$

solution particulière de l'équation : $(E_2) : 35x - 27y = 1$

b) En déduire une solution particulière $(u_0; v_0)$ de l'équation $(E_1) : 35x - 27y = 2$

3) a) Prouver que le couple $(34; 44)$ est une solution de l'équation (E_1)

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_1) : 35x - 27y = 2$

c) Déterminer la solution $(u; v)$ permettant de déterminer J_1

4) a) Prouver que le nombre de jours entre J_0 et J_1 est 7 35.

- b) J_0 étant le mardi 6 décembre 2011, déterminer J_1 en précisant le jour et la date exacte (l'année 2012 étant bissextile).
- c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

EXERCICE 14

1) A l'aide de la congruence, démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n^2(n^2 - 1)$ est multiple de 12

2) A l'aide du raisonnement par récurrence démontrer que
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

II- Déterminer les entiers n pour lesquels

1) $n^2 - n + 1$ est divisible par 7 ; 2) $PGCD(n, 630) = 105$ et $601 \leq n \leq 1099$

EXERCICE 15

I – On pose $a = 2n + 8$ et $b = 3n + 15$. On désigne par δ le PGCD de a et b

1) Déterminer les valeurs possibles de δ

2) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels $\delta = 6$

II – 1) Déterminer, suivant les valeurs de n ($n \in \mathbb{N}$), le reste de la division euclidienne de 5^n par 13

2) Déterminer les solutions de l'équation $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$

III – Parmi les nombres suivants, trouver ceux qui sont des nombres premiers 839 ; 16637 et 781

VI – 1) Déterminer les chiffres x et y tels que le nombre s'écrivant $\overline{x2y}$ en base 6

s'écrit $\overline{3x2}$ en base 5. Donner ce nombre dans le système décimal

2) Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ PPCM(x; y) = 105 \end{cases}$$

EXERCICE 16

Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = \underbrace{1111\dots 11}_n$

1) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$

2) En déduire que $n \geq 1, a_n = \frac{1}{9} (10^n - 1)$

3) On donne deux entiers m et n tels que $m > n \geq 1$

a) Démontrer que $a_m - a_n = 10^n \cdot a_{m-n}$; b) Le nombre 11 111 est-il premier ?

EXERCICE 17

1) Déterminer l'entier $b > 1$ tel que le nombre 941 (dans le système décimal)

s'écrit $\overline{4205}_b$ dans le système de base b

2) Résoudre l'équation $(x, y) \in \mathbb{Z}^2, 335x - 67y = 1407$

EXERCICE 18

I – 1 - On considère l'équation $(E) : (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, 6x + 5y = 9113$

a) Vérifier que $(8; 1813)$ est solution de (E) .

b) Résoudre (E) .

2 - Prouver que l'ensemble des solutions du système

$$t \in \mathbb{N}, \begin{cases} t \equiv 3 \pmod{5} \\ t \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$$

est $\{ 30k + 23, k \in \mathbb{N} \}$

II -- Un quartier est constitué de maisons duplex et de maisons basses. Le nombre moyen d'habitants par duplex est 5. Le nombre moyen d'habitants par maison basse est 6.

Si l'on devait loger tous les habitants du quartier dans des duplex, 3 personnes n'auront pas de logement.

Si l'on devait loger tous les habitants du quartier dans des maisons basses, 5 personnes n'auront pas de logement.

1 - Déterminer le nombre d'habitants de ce quartier sachant qu'il est compris entre 9 1 0 0 et 9 1 2 5.

2 - Le nombre de duplex dans ce quartier est compris entre 7 0 0 et 7 0 4

Calculer le nombre de duplex et le nombre de maisons basses.

LEÇON 4 : ISOMETRIES DU PLAN

EXERCICE 1

Soit O un point du plan et r est la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

A est un point du plan. On pose $B=r(A)$ et $C=r(B)$.

- 1) Faire une figure.
- 2) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral, de sens direct et de centre O .

EXERCICE 2

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre G .

I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$.

Déterminer la nature et le(s) élément(s) caractéristique(s) de la composition f .

- 1) $f = r(A ; \frac{\pi}{3}) \circ r(B ; \frac{\pi}{3})$; 2) $f = r(A ; \frac{\pi}{3}) \circ r(B ; \frac{\pi}{3})$; 3) $f = r(A ; \frac{\pi}{3}) \circ r(G ; \frac{2\pi}{3})$
- 4) $f = t_{\overrightarrow{AJ}} \circ t_{\overrightarrow{BI}}$; 5) $f = S_{(KG)} \circ S_{(AC)}$; 6) $f = S_{(KJ)} \circ S_{(BI)}$
- 7) $f = S_K \circ r(J ; \frac{\pi}{3})$; 8) $f = t_{\overrightarrow{JC}} \circ r(G ; \frac{2\pi}{3})$; 9) $f = S_{(AG)} \circ S_{(BC)}$
- 10) $f = r(C ; \frac{\pi}{3}) \circ r(B ; \frac{\pi}{3}) \circ r(A ; \frac{\pi}{3})$; 11) $f = S_A \circ S_B$

EXERCICE 3

PQR est un triangle équilatéral de sens direct.

$Q' \in [PQ], R' \in [QR]$ et $P' \in [RP]$ tel que $PP' = QQ' = RR'$.

Démontrer que le triangle $P'Q'R'$ est équilatéral et de sens direct.

- 1) En utilisant les nombres complexes.
- 2) En utilisant une rotation.

EXERCICE 4

Soit A et B deux points distincts du plan.

f est une isométrie du plan.

I) On suppose que $f(A)=A$ et $f(B)=B$.

- 1) Prouver que pour tout point M de la droite (AB) , $f(M)=M$.
- 2) Démontrer la nature et le(s) élément(s) caractéristique(s) de f .

II) On suppose que $f(A)=B$ et $f(B)=A$.

I désigne le milieu du segment $[AB]$.

- 1) Prouver que $f(I)=I$.
- 2) Démontrer que $f((AB))=(AB)$.
- 3) Déterminer la nature et le(s) élément(s) caractéristique(s) de f .

EXERCICE 4

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, de centre G . I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$.

- 1) Faire une figure.
- 2) Déterminer la nature et le(s) élément(s) caractéristique(s) de la composée g .

- a) $g = r(A ; \frac{\pi}{3}) \circ t_{\overrightarrow{CB}}$
- b) $g = r(A ; \frac{\pi}{3}) \circ S_{(IK)}$
- c) $g = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AG)}$
- d) $g = r(G ; \frac{2\pi}{3}) \circ S_{(BC)}$
- e) $g = s_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{CA}}$
- f) $g = t_{\overrightarrow{CA}} \circ S_{(IJ)}$

EXERCICE 5

Soit $ABCD$ un carré de sens direct, on note I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1° On pose $f = S_{(IK)} \circ R_{\left(A; \frac{\pi}{2}\right)}$.

- Préciser la nature de f .
- Déterminer $f(A)$, $f(B)$ et $f(I)$.
- En déduire les éléments caractéristiques de f , puis sa forme réduite.

2° On pose $g = R_{\left(C; \frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(IK)}$

- Déterminer $g(C)$, $g(D)$ et $g(K)$.
- En déduire que la forme réduite de g est $g = T_{\overline{KJ}} \circ S_{(KJ)} = S_{(KJ)} \circ T_{\overline{KJ}}$.

3° Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

- $g \circ f$
- $f \circ g$
- $g \circ f^{-1}$

EXERCICE 6

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, inscrit dans le cercle (ζ) de centre O .

Pour tout point M de l'arc $\widehat{AB}$ contenant le point C , qu'on notera (Γ) . N est le point de la demi-droite $[BM)$ tel que $AM = BN$

Soit M' l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. D est le point du plan tel que $ABDC$ soit un losange. H est le milieu du segment $[BC]$

1) Faire une figure soignée

2) a) prouver que $MeS(\widehat{MA}, \widehat{NB}) = \frac{\pi}{3}$

b) Justifier que le triangle $BM'N$ est équilatéral et de sens direct

3) a) Prouver que N est l'image de M par la composée d'une rotation R_1 de centre

B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

b) Déterminer le centre et l'angle de $R_1 \circ t_{\overrightarrow{AB}}$

4) a) Déterminer l'image de M par la rotation R_2 de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) Déterminer et trouver le lieu géométrique des points N lorsque M décrit (Γ)

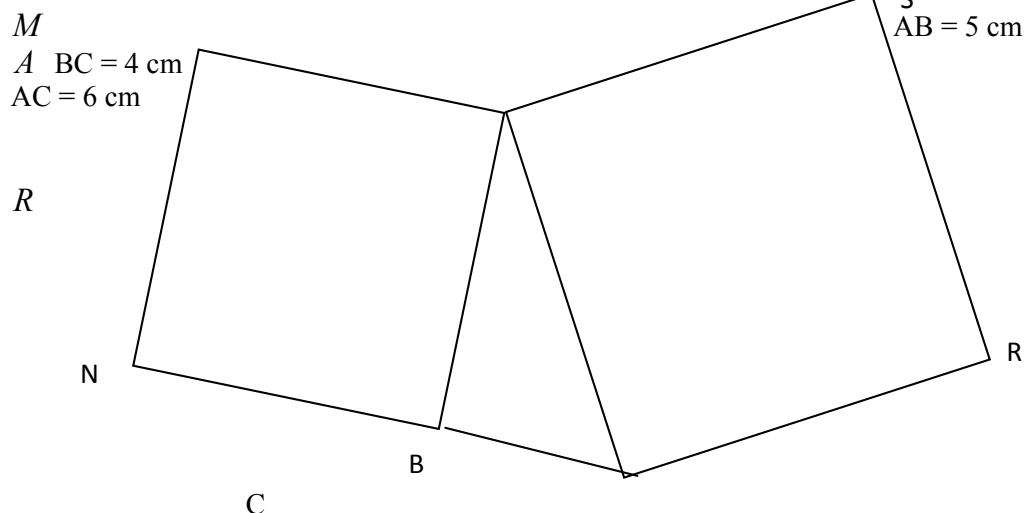
5) On pose $f = R_2 \circ S_{(AB)}$

a) Trouver $f(A)$ et $f(B)$

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

EXERCICE 7

I-1) Reproduire la figure suivante dans laquelle ABC est un triangle de sens direct et $ACRS$, $BAMN$ sont des carrés



2) Construire le parallélogramme $MASD$ et son milieu I .

II- On veut démontrer que $(AD) \perp (BC)$ et $AD = BC$ en utilisant deux méthodes.

1) Méthode géométrique

On considère la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

- Construire S' l'image de S par r et I' l'image de I par r
- Quelles sont les images des points M et C par r ?
- Démontrer que A est le milieu de $[CS']$
- Démontrer que I' est le milieu de $[BS']$
- En déduire que $(AD) \perp (BC)$ et que $AD = BC$

2) Utilisation des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct

On désigne par a , b et c les affixes respectives des points A , B et C

- Démontrer que l'affixe s de S est $s = i(c - a) + a$
- Démontrer que l'affixe m de M est $m = i(a - b) + a$
- Calculer l'affixe $z_{\overrightarrow{AD}}$ de $\overrightarrow{AD}$ et celle $z_{\overrightarrow{BC}}$ de $\overrightarrow{BC}$ en fonction de c et b
- Montrer que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et que $AD = BC$.

EXERCICE 8

Soit ABC un triangle rectangle en A et M un point de la droite (BC) distinct de B et C

On désigne par P et Q les symétriques respectifs du point M par rapport aux côtés (AB) et (AC)

- Montrer que le point A est le milieu du segment $[PQ]$
- Montrer que les droites (BP) et (CQ) sont parallèles.

II- Soit $ABCD$ un carré direct. M étant un point de la droite (BC) , on désigne par M' le point d'intersection de la droite (CD) et de la perpendiculaire menée par A à la droite (AM)

- Montrer que le triangle AMM' est rectangle isocèle.
- Soit I le milieu du segment $[MM']$. Déterminer l'ensemble des points I lorsque M décrit la droite (BC)

EXERCICE 9

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

On note (ζ) le cercle de centre O et de rayon R , R étant un nombre réel strictement positif

A désigne le point de (ζ) d'affixe R . Etant donné un entier $n \geq 2$, on note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{n}$. On considère la suite des points $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de (ζ)

définie par :

$$\begin{cases} M_0 = A \\ M_{k+1} = r(M_k) \end{cases}$$

1) Faire une figure pour $n = 16$ et $R = 4 \text{ cm}$ (on construira tous les points M_k)

2) soit z_k l'affixe du point M_k

a) Exprimer z_{k+1} en fonction de z_k

b) En déduire l'expression de z_k en fonction de k et n .

c) Montrer que la suite (M_k) est périodique et préciser sa période.

Placer sur la figure les points M_{1998} et M_{2001}

3) a) Prouver que, pour $k \in \mathbb{N}$, $M_k M_{k+1} = 2R \sin \frac{\pi}{n}$

b) on pose $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n$, le périmètre du polygone régulier

Montrer que $L_n = 2Rn \sin \frac{\pi}{n}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$. Interpréter géométriquement ce résultat.

EXERCICE 10

ABCD est un carré de sens direct. E est le point du plan tel que le triangle AED soit équilatéral direct.

1- a) Reproduire cette figure.

a) Construire les points G et F tels que les triangles ACG et AFB soient équilatéraux directs.

2- a) Démontrer que les points B, D et G sont alignés.

b) En déduire, en utilisant une rotation, que les points C, E et F sont alignés.

3- a) Démontrer que le triangle AFE est rectangle isocèle en A.

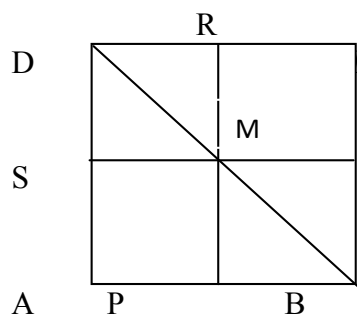
b) En déduire que les droites (DE) et (BF) sont perpendiculaires.

4- Soit H, le point d'intersection des droites (BF) et (DE).

a) Démontrer que la droite (AH) est la médiatrice des segments [BE] et [DF].

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan qui applique B sur F et E sur D.

EXERCICE 11



ABCD est un carré de sens direct M est

un point de la droite (BD). P, Q, R et S

sont les projetés orthogonaux respectifs du point M

sur les droites (AB), (BC), (CD) et (DA)

On veut démontrer que $(MC) \perp (PS)$ et $MC = PS$

I- Utilisation d'une rotation

1- Démontrer qu'il existe un quart de tour direct r tel que $r(C) = S$ et $r(M) = P$

2- Justifier que $(MC) \perp (PS)$ et $MC = PS$

II- Utilisation des nombres complexes

On considère le repère orthonormé $(A; B; C)$

1 Déterminer les affixes des points A , B , C et D

2- On pose $Z_M = x + i y$ déterminer les affixes des points P , Q et S en fonction de x et y

3- Démontrer que $(MC) \perp (PS)$ et $MC = PS$

EXERCICE 12

Soit ABC un triangle rectangle en A et I , J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[CA]$ et $[AB]$.

Une droite (Δ) passant par A coupe la droite (IJ) en E et la droite (IK) en F

Démontrer que les droites (BF) et (CE) sont parallèles.

LEÇON 5 : SIMILITUDES DIRECTES

EXERCICE 1

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre G. I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. E est le symétrique du point C par rapport à la droite (AB). F est le symétrique du point B par rapport à la droite (AC). H est le symétrique du point A par rapport à la droite (BC).

- 1) Faire une figure.
- 2) Démontrer que le triangle HFE est équilatéral, de sens direct et de centre G.
 - a) Calculer $\frac{HE}{AB}$ et $\text{Mes}(\widehat{AB}, \widehat{EH})$.
 - b) En déduire l'angle et le rapport de la similitude directe s qui applique A sur E et B sur H.
 - c) Déterminer le centre de s .
 - d) Trouver l'image de C par s et justifier votre réponse.
- 3) Soit h l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$. r est la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
On pose $\sigma = r \circ h$.
 - a) Déterminer les images des points E, F et H et B par σ .
 - b) Préciser la nature, le rapport et l'angle de σ .
 - c) Soit σ' l'image de G par σ . Démontrer que G' est le centre du triangle ABE. Construire G'.
 - d) On pose $J' = \sigma(J)$. Prouver que J' est le milieu du segment [KE]. Construire J'.
 - e) Soit Ω le centre de σ . Construire Ω . On justifiera la construction.
- 4) Déterminer la nature et le(s) élément(s) caractéristique(s) de la composée g .
 - a) $g = h(G ; -\frac{1}{2}) \circ t_{\overline{IJ}}$
 - b) $g = t_{\overline{JF}} \circ h(G ; 2)$
 - c) $g = h(F ; 2) \circ (G ; -\frac{1}{2})$
 - d) $g = h(G ; -2) \circ (H ; 2)$
- 5) ω est la similitude de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 - a) Déterminer les images des points A, B et E par ω .
 - b) Soit $K' = \omega(K)$. Démontrer que K' est le milieu du segment [AJ].

EXERCICE 2

- I) ABCD est un carré de centre O et de sens direct. I est le milieu du segment [OB]. J est le milieu du segment [DC]. Démontrer que le triangle AIJ est isocèle en I.
- II) Soit E un point du plan et (Γ) un cercle. M est un point de (Γ) et N le point tel que le triangle EMN est équilatéral de sens direct. P est le centre de gravité du triangle EMN.
 - 1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s de centre A qui transforme M en P.
 - 2) Déterminer et construire l'ensemble des points P lorsque M décrit le cercle (Γ).
- III) (D) et (D') sont deux droites parallèles. K est un point tel que $K \notin (D) \cup (D')$. Construire un point R sur (D) et un point S sur (D') tel que le triangle KRS soit rectangle isocèle en R.

EXERCICE 3

ABC est un triangle rectangle en B tel que $\text{Mes}(\widehat{AB}, \widehat{AC}) = \frac{\pi}{3}$. La droite perpendiculaire à (AC) menée par C coupe la droite (AB) en E.

- 1)
 - a) Démontrer que les triangles ABC et CBE sont semblables.
 - b) Soit s la similitude directe qui transforme ABC en CBE. Déterminer le rapport et l'angle de s .
Construire son centre Ω .
- 2) σ est la similitude directe de centre A qui applique B sur C. σ' est la similitude directe de centre C qui applique E sur B. On pose $\omega = \sigma' \circ \sigma$.

a) Déterminer la nature, le rapport et l'angle de ω .

b) Construire l'image T de A par ω .

c) Construire le centre I de ω .

EXERCICE 4

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle que l'on déterminera d'abord. (E): $z^3 - (2 + 3i)z^2 + (5i - 1)z + 2 - 2i = 0$

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . On donne les points

$A_0(0; 2)$; $A_1(1; 1)$; $A_2(1; 0)$

1) Faire une figure unité graphique : 6 cm

2) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est rectangle isocèle.

3) Soit S la similitude directe qui applique A_0 sur A_1 et A_1 sur A_2

On définit la suite des points $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $S(A_n) = A_{n+1}$

a) Construire $A_3; A_4; A_5; A_6; A_7$ et A_8

b) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n . Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la suite (z_n)

c) Exprimer z_n en fonction de n

4) On pose $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_nA_{n+1}$. Exprimer L_n en fonction de n et calculer sa limite

EXERCICE 5

I / Les similitudes directes ne conservent pas :

- a) Le barycentre b) La distance c) Le parallélisme
d) L'orthogonalité

II / f est une similitude directe. On donne $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$

1) $M'N' = MN$; f est une

2) $(MN) \parallel (M'N')$; f est une Ou

3) $M'N' = MN$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \neq 0$; f est une

III / f est une similitude directe vérifiant $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$

Construire le centre Ω de f

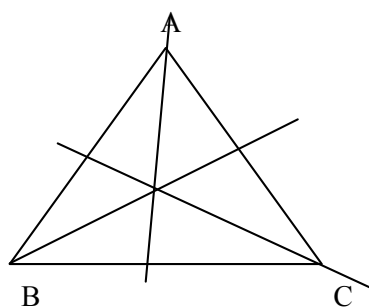
IV / ABCD est un carré de sens direct I, J et K sont les milieux respectifs des segments

$[AB]$; $[OD]$; $[DC]$

g est la similitude directe de centre A qui applique B sur O. Le rapport

de g est ; L'angle de g a pour mesure

V /



ABC est un triangle équilatéral de centre

G, de sens Direct. r_1 , r_2 et r_3 sont les rotations de

centres Respectifs A, B et C et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$

On pose $f = r_3 \circ r_2 \circ r_1$

1) La nature de f est ; Le centre de f est

3) Complète le tableau suivant

transformations	nature	Eléments caractéristiques
$r_1 \circ S_{(AB)}$		
$S_{(AB)} \circ r_1$		
$S_{(AB)} \circ S_G$		

VI /
Com
plète
S
est la
simili

tude de centre A de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

S' est la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$

1) La réciproque S^{-1} de S est la similitude de centre ; de rapport et d'angle de mesure

2) On pose $k = S' \circ S$

La nature de k : Eléments caractéristiques :

EXERCICE 6

Soit δ la transformation du plan dont l'écriture complexe est $z' = iz$

Soit M un point et $M' = \delta(M)$. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J)

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de δ

a) Prouver que $\widehat{IM, JM'} = \frac{\pi}{2}$

b) Démontrer que le triangle JMM' est rectangle en J si et seulement si

M appartient à l'ensemble $(IJ) \setminus \{I, J\}$

2) Dans cette partie, on suppose que le point M appartient à l'ensemble $(IJ) \setminus \{I, J\}$

et N est le milieu du segment $[MM']$

a) Construire M , M' et N

b) Démontrer que les points O , J , M et M' appartiennent à un même cercle de centre N . Tracer ce cercle

c) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude s qui applique M sur N

3) Déterminer le lieu géométrique des points M' lorsque M décrit $(IJ) \setminus \{I, J\}$

EXERCICE 7

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J) . Unité: 2cm. On note A et B les points d'abscisses respectives 2 et 6 + 2i, Soit φ l'application du plan (P) vers (P) qui à tout point M d'abscisse Z associe le point M'

D'abscisse Z' tel que $Z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}Z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

1) a) Vérifier que $\varphi(A) = A$.

c) Déterminer l'abscisse du point P, antécédent du point O par φ

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ .

3) Soit M un point distinct de A et M' son image par φ .

a) Démontrer que AMM' est un triangle rectangle en M',

b) Donner un programme de construction du point M',

4) a) Construire les points A, B, B' et N milieu de $[AB]$.

b) On choisit M sur le cercle (ζ) de diamètre $[AB]$.

Déterminer et construire le lieu (M') des points M' image de M par φ , Lorsque M décrit (ζ) .

EXERCICE 8

L'unité graphique est le centimètre

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6$

G_1 est le barycentre des points pondérés $(A; 1)$ et $(B; 3)$

G_2 est le barycentre des points pondérés $(A; 1)$ et $(B; -3)$

1- a) Construire les points G_1 et G_2

b) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 - 9MB^2 = 0$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$

c) Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{MA; MB}) = \frac{\pi}{3}$

2- Soit C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

D l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$

S la similitude directe qui applique A sur B et C sur D

a) Construire les points C et D

b) Calculer le rapport de S

c) justifier qu'une mesure de l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$

3- On note Ω le centre de S

a) Démontrer que Ω appartient à (Γ) et à (E) . Placer Ω

b) Démontrer que $\text{Mes}(\widehat{AC; AD}) = -\frac{2\pi}{3}$

c) En déduire que les points A, C, D et Ω appartiennent à un même cercle (ζ)

Construire (ζ)

EXERCICE 9

$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre I . On désigne par J le milieu du segment $[AI]$ et par s la similitude directe qui applique A sur I et B sur J .

1) Déterminer le rapport et l'angle de s

2) Construire $s(C)$ et $s(D)$

3) Soit Ω le centre de s

a) Montrer que les points Ω, A, B et J sont cocycliques

b) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AD]$

c) Construire Ω

EXERCICE 10

ABC est un triangle quelconque de sens direct

$ABED$ et $ACGF$ sont des carrés de centres respectifs I et J extérieur à ABC .

K est le milieu du segment $[DF]$.

On considère r_1 et r_2 les quarts de tour direct de centres respectifs I et J .

S_K est la symétrie de centre K

a) Démontrer que $r_1 \circ r_2 = S_K$

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_2^{-1} \circ r_1^{-1}$

2) a) Déterminer l'image de la droite (AH) par S_K

b) En déduire que les points A, H et K sont alignés

3) On pose $S_K(A) = A'$

a) Montrer que $A' = r_1(C)$; b) En déduire que $(EC) \perp (A'B)$

c) Démontrer que $(BG) \perp (A'C)$

4) Dédurre des questions précédentes que les droites (EC) , (BG) et (AH) sont concourantes.

EXERCICE 11

Soit A un point et (D) une droite ne passant pas par A .

Soit M un point de (D) et N le point du plan tel que le triangle AMN est équilatéral indirect. Soit P le projeté de M sur $[AN]$

Déterminer et construire l'ensemble décrits par les points N et P lorsque le point M décrit la droite (D) . On les notera (Γ) et (Σ) respectivement.

EXERCICE 12

$ABCD$ est un carré de centre I et de sens direct

(pour la figure seulement, on prendra $AB = 6 \text{ cm}$)

E est le symétrique de A par rapport à B

$CEFG$ est un carré de sens direct et de centre J

H , K et L sont les milieux respectifs des segments $[BE]$, $[EC]$ et $[CD]$

1 - Faire une figure

2 - a) Démontrer que $MES(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{LH}) = \frac{\pi}{4}$

b) En utilisant les cosinus et sinus des angles $(\overrightarrow{JL}, \overrightarrow{JI})$ et $(\overrightarrow{JH}, \overrightarrow{JE})$

prouver que $MES(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JH}) = \frac{\pi}{4}$

c) Justifier que les points I , L , J et H sont cocycliques

d) En déduire que le triangle $I J H$ est rectangle isocèle en H

3 - On note $f = t_{\overline{CE}} \circ r\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$

a) Déterminer les images par f des points B et C

b) Trouver la nature et les éléments caractéristiques de f

4 - On pose $g = s_{(BD)} \circ t_{\overline{JE}}$

a) Déterminer les images, par g , des points D et C

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g

5 - Soit s la similitude directe de centre J de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$

a) Déterminer les images, par s , des points C et I

b) Soit T le symétrique de K par rapport à H

Démontrer que le triangle JAT est rectangle isocèle en T

c) Construire M l'image par s du point G

d) Démontrer que les points M , K , H et T sont alignés

EXERCICE 13

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère l'équation $(E) : 3x - 2y = 1$

1) a) Montrer que $(-1, -2)$ est une solution de (E)

b) Résoudre (E)

2) Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives $y = 2x + 4$ et $3x - 2y = 1$

a) Vérifier que pour tout entier relatif k , le point $A_k(k - 3; 2k - 2)$ appartient à (D)

On admettra que ce sont les seuls points de (D) à coordonnées entières.

- b) Montrer que les seuls points de (D') à coordonnées entières sont les points $B_{k'}(2k' - 1; 3k' - 2)$ où $k' \in \mathbb{Z}$.
- 3) a) Existe-t-il deux entiers relatifs k et k' tels que $A_k = B_{k'}$?
 b) Déterminer les entiers relatifs k et k' tels que $(A_k B_{k'})$ soit parallèle à l'axe des abscisses.
 c) Trouver l'entier q tel que $\overrightarrow{A_{3q} B_{2q}} = 4 \vec{u}$
- 4) Soit Ω un point quelconque du plan d'affixe ω . On note H le milieu de $[A_6 B_4]$
 On désigne par S la similitude directe de centre Ω de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
 a) Donner l'écriture complexe de la similitude S
 b) Déterminer ω pour que l'image du point H soit l'origine du repère.

PROBLEME1

On considère le triangle rectangle en B tel que $AB = 5 \text{ cm}$ et $\text{Mes}(\widehat{AB; AC}) = \frac{\pi}{3}$

Soit E le milieu du segment $[AC]$.

- I - 1 -** a) Construire le triangle ABC
 b) Démontrer qu'il existe une rotation r transformant B en C et A en E .
 c) Déterminer l'angle de la rotation r .
 d) Construire son centre O .
- 2 - Soit S la similitude directe de centre O qui transforme B en E .
 Soit J le centre du cercle circonscrit au triangle OAE .
 a) Déterminer l'angle et le rapport de S .
 b) Démontrer que $S(A) = J$.
- 3 - Soit k un nombre réel non nul, M et M' deux points du plan tels que :
 $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'} = k \overrightarrow{EC}$.
- a) Construire les points M et M' pour $k = \frac{3}{2}$.
 b) Démontrer que M est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs $(k - 1)$ et $(-k)$.
 c) Démontrer que $r(M) = M'$ et en déduire que le triangle OMM' est équilatéral.
 d) Démontrer que les points O, A, M et M' sont cocycliques.
- 4 - Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM' .
 a) Démontrer que $S(M) = N$.
 b) Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB) .

II - Dans cette partie le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (U, V, W)

On donne les points A et B d'affixes $Z_A = 4$ et $Z_B = 3i$.

- 1) Prouver que $Z_C = -3\sqrt{3} + (3 - 4\sqrt{3})i$

En déduire que $Z_E = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3 - 4\sqrt{3}}{2} \right)i$

2) Déterminer l'écriture complexe de la similitude S .

PROBLEME2

Sur la figure1 ABC est un triangle équilatéral de centre G et de sens direct.

A l'extérieur du triangle ABC , on construit les points R, P et Q tels que les triangles ABR et BCP soient respectivement rectangles isocèles en B, C et A , et chacun, de sens direct

PARTIE A

Dans cette partie, on veut démontrer que le triangle RPQ est équilatéral en utilisant deux méthodes différents

I – Utilisation d'une rotation

Soit r la rotation de centre G et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$

- 1) a) Préciser les images des points C et A , par la rotation r
b) Prouver que $r(AQ) = (BR)$; c) Justifier que $r(CQ) = (AR)$
d) En déduire $r(Q)$

- 2) a) Préciser $r(R)$ et $r(P)$
b) Justifier que le triangle RPQ est équilatéral

II - Utilisation des nombres complexes

On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Soit a, b, c, p, q et m les affixes respectives des points A, B, C, P, Q et R

- 1) Démontrer que $m = i(a - b) + b$
- 2) On suppose que $p = i(b - c) + c$

Sachant que $c - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)$ et $a - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b)$

Démontrer que $q - p = (c - a) \left(i e^{i\frac{\pi}{3}} + i - 1 \right)$; $m - p = (c - b) \left(i e^{i\frac{\pi}{3}} + i - 1 \right)$

- 3) Démontrer que le triangle RPQ est équilatéral.

PARTIE B

Dans cette partie on suppose le triangle RPQ équilatéral de sens direct et on cherche à construire le triangle équilatéral ABC de manière à reconstituer la figure 1.

On admet que ABC et RPQ ont le même centre G

- 1) Construire $\zeta = \left\{ M \in \mathcal{C} / \text{mes} \left(\widehat{MG, MQ} \right) = \frac{2\pi}{3} \right\}$

- 1) Prouver que $A \in \zeta$

II – Soit E le point du plan tel que le triangle PQE soit rectangle isocèle en Q et de sens direct

On désigne par σ la similitude directe de centre G qui applique E sur Q .

On admet que $\sigma(P) = C$

- 1) a) Prouver que $\sigma(Q) = A$

b) En déduire que $\text{mes} \left(\widehat{GE, GQ} \right) = \text{mes} \left(\widehat{GQ, GA} \right)$

- 2) Justifier que le point A appartient au symétrique de la droite (GE) par rapport à la droite

- 3) a) Construire le point A

b) A étant construit, construire les points B et C . On rappelle que

$$B = r(A) \text{ et } C = r^{-1}(A) ; r = r \left(G ; \frac{2\pi}{3} \right)$$

PROBLEME3

Dans le plan P, on donne un point Ω

Soit s , la similitude de centre Ω , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$

PARTIE A

I – Soit M un point du plan et $M' = s(M)$

1. Donner la valeur de $\frac{\Omega M'}{\Omega M}$ et la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$

2. Sachant que : $MM'^2 = \Omega M^2 + \Omega M'^2 - 2 \Omega M \cdot \Omega M' \cos \frac{\pi}{4}$, prouver que le triangle $\Omega M M'$ est rectangle isocèle en M et de sens direct.

3. Placer les points Ω et M , puis construire l'image M' de M par la similitude s

II – Soit ABC un triangle quelconque de sens direct. A l'extérieur du triangle ABC , on construit les points R , P et Q tels que les triangles BAR , CBP et ACQ soient rectangles isocèles respectivement en B , C et A de sens direct.

s_P , s_Q et s_R sont les similitudes directes de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$

et de centres respectifs P , Q et R

On pose $f = s_R \circ s_P \circ s_Q$

1. Faire une figure soignée

2. Prouver que $f(A) = A$

3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

PARTIE B

Dans cette partie, on suppose donné un triangle PQR et on cherche à construire un triangle ABC de manière à reconstituer la figure précédente.

I- 1. Justifier que si un triangle ABC est solution du problème posé alors le point A est déterminé de manière unique.

2. Par quelle rotation peut-on obtenir C connaissant le point A

3. Par quelle rotation peut-on obtenir B connaissant le point C

4. Combien de solutions (triangle ABC) peut-on construire ? Justifier votre réponse

II- On se propose de construire le triangle ABC dans le cas particulier où le triangle PQR est rectangle isocèle en Q et de sens direct.

Soit I le milieu de $[PR]$

1. Faire une figure (on prendra $PQ = 6\text{ cm}$ pour cette figure)

2. Construire les points I' et S , symétriques respectifs des points R et P par rapport au point Q

3. Démontrer que : $\text{mes}(\overrightarrow{QI}, \overrightarrow{QI'}) = \text{mes}(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI'})$

En déduire que A appartient au cercle (C) circonscrit au triangle QII'

4. Déterminer $f(Q)$. En déduire que $\text{mes}(\overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{SR}) + \pi = \text{mes}(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AR})$

5. En déduire que le point A appartient à un cercle (C') que l'on précisera.

6. Construire les cercles (C) et (C') puis les points A , B et C

PARTIE C

Dans cette partie, on suppose que le triangle ABC est équilatéral de sens direct
décôté m ; ($m > 0$)

I- 1. Construire les points P , Q et R comme indiqué dans la **PARTIE A**

On veut démontrer que le triangle PQR est équilatéral de deux manières

2. En utilisant le calcul de distance

a. Exprimer, en fonction de m , CP et CQ

b. Démontrer que $\text{mes}(\widehat{PCQ}) = \frac{11\pi}{12}$

On suppose que $\text{mes}(\widehat{QAR}) = \text{mes}(\widehat{RBP}) = \frac{11\pi}{12}$; $\cos \frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

c. sachant que $PQ^2 = PC^2 + CQ^2 - 2PC.CQ.\cos(\widehat{PCQ})$. Montrer que

$$PQ = m\sqrt{4+\sqrt{3}} \quad (\text{Indication } (\sqrt{3}+1)^2 = 4+2\sqrt{3})$$

d. Justifier que le triangle PQR est équilatéral

3. Utilisation des nombres complexes

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé direct

Soit a, b, c, p, q et r les affixes respectives des points A, B, C, Q et R

a. Démontrer que $r = i(a - b) + b$

b. On suppose que $q = i(c - a) + a$ et $p = i(b - c) + c$

Sachant que $c - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)$ et $a - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b)$

Démontrer que $q - p = (c - a)\left(i + ie^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)$ et $r - p = (c - b)\left(i + ie^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)$

c. Démontrer que le triangle PQR est équilatéral

II – Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC

Soit M un point de (Γ) et L le point du plan tel que le triangle AML soit équilatéral et de sens direct. Soit M' le milieu du segment $[AL]$

1. Construire (Γ) , M' et L

2. Déterminer le rapport et la mesure principal de l'angle de la similitude σ de centre A qui applique le point M sur le point M' .

3. Déterminer et construire l'ensemble des points M' lorsque M décrit (Γ)

LEÇON 6 : LES CONIQUES

EXERCICE 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \sqrt{|9x^2 - 4|}$$

- 1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
 b) Prouver que f est une fonction paire.
 c) Interpréter graphiquement ce résultat.
- 2) a) Prouver que la droite (D) d'équation $y=3x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.
 b) Etudier les positions relatives de (C_f) en $-\infty$.
- 3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- 4) Tracer (C_f) .
- 5) Soit $(\Gamma)=s_{(OI)}((C_f))$ où $s_{(OI)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OI) .
 On pose $(H)=(\Gamma) \cup (C_f)$ sur $]-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}; +\infty[$ et $(\varepsilon)=(\Gamma) \cup (C_f)$ sur $]-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$.
- a) Tracer (Γ) .
- b) Prouver que $M(x, y) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\frac{2}{3})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$
- c) Prouver que $M(x, y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{(\frac{2}{3})^2} = -1$

EXERCICE 2

Soit E l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

- 1) Déterminer les éléments caractéristiques (foyers, directrices, excentricité) de (E) .
- 2) Déterminer les éléments remarquables (axe focal, sommets, grand axe, petit axe).
- 3) Tracer E .
- 4) Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$. $(E')=r(E)$.
 a) Tracer (E') .
 b) Ecrire une équation cartésienne de E' .

EXERCICE 3

Soit (H) l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

- 1) Déterminer les éléments caractéristiques de (H) .
- 2) Déterminer les éléments remarquables (axe focal, sommets, asymptotes)
- 3) Soit s la similitude directe de centre O , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit $(H')=s((H))$.

- a) Tracer (H') .
- b) Trouver une équation cartésienne de (H') .

EXERCICE 4

I- $(E_m) : x^2 + m y + (m + 1) y = 1$

1 Complète par $<$; $>$ ou $=$

$$(E_m) \text{ est } \begin{cases} - \text{ une parabole si } m \dots\dots 0 \\ - \text{ une Ellipse si } m \dots\dots 0 \\ - \text{ une Hyperbole si } m \dots\dots 0 \end{cases}$$

- 3) L'ensemble des centres des cercles passant par un point F et tangents à une droite (D) est :
 a) une ellipse b) une parabole c) une hyperbole d) l'ensemble vide

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

Soit les points $A(1, 0)$; $B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $C\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et la droite (D) dont une équation est : $x = 1$.

1. Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABGC$.

2. On note Γ l'ensemble des points M du plan, de coordonnées (x, y) , qui vérifient

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x - 1)^2$$

a. Montrer que B et C appartiennent à Γ .

b. Montrer que Γ est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MG = \sqrt{2} d(M, (D)). \text{ où } d(M, (D)) \text{ désigne la distance de } M \text{ à la droite } (D).$$

c. En déduire la nature et les éléments remarquables de Γ .

d. Déterminer l'équation réduite et les éléments caractéristiques de Γ .

e. Représenter Γ .

EXERCICE 6

Soit C et C' deux cercles tels que C' soit inclus dans C . Montrer que le lieu des centres des cercles Γ tangents à C et C' est inclus dans une ellipse (On admet la réciproque). Préciser comment construire les sommets principaux.

EXERCICE 1

Soit (D) et (D') les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2 - 2\mu \quad (\mu \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

(P) et (P') sont les plans d'équations cartésiennes respectives :

$2x + y + 2z - 4 = 0$ et $2x - 2y - z + 5 = 0$.

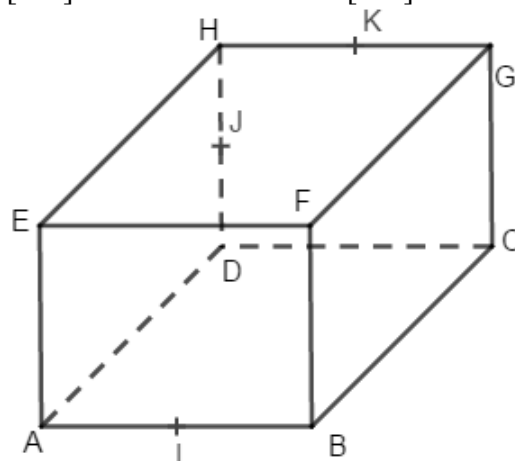
1. Montrer que (D) et (D') sont sécantes en un point A.
2. Montrer que (D') et (P) sont strictement parallèles.
3. Montrer que (P) et (P') sont orthogonaux.

EXERCICE 2

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [HD] et K est le milieu de [HG].

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
2. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).
3. Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?



EXERCICE 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ est :
 a) l'ensemble vide b) un plan c) une sphère
2. On considère les points $E(0; 1; -2)$ et $F(2; 1; 0)$. Les coordonnées du barycentre G de (E; 1) et (F; 3) sont :
 a) $G(6; 4; -2)$ b) $G(1,5; 1; -0,5)$ c) $G(0,5; 1; 1,5)$
3. Soit d la droite de représentation paramétrique $x = 2 - t; y = 3t; z = -3, t \in \mathbb{R}$. On considère les points $A(2; 3; -3), B(2; 0; -3)$ et $C(0; 6; 0)$. On a : a) $d = (AB)$; b) $d = (BC)$; c) $d \neq (AB)$ et $d \neq (BC)$ et $d \neq (CA)$
4. Les droites de représentations paramétriques respectives : $x = 2 + t; y = 1 - t; z = 1 + t, t \in \mathbb{R}$,
 $x = -t_0; y = -2 - 1,5t_0; z = 3 + t_0, t_0 \in \mathbb{R}$

admettent comme point commun : a) $I(3 ; 0 ; 2)$; b) $J(2 ; 1 ; 1)$; c) $K(0 ; 2 ; -3)$

5. Les droites de représentations paramétriques respectives : $x = 1 ; y = 1 + 2t ; z = 1 + t, t \in \mathbb{R}$,

$$x = 3 - 2t_0 ; y = 7 - 4t_0 ; z = 2 - t_0, t_0 \in \mathbb{R}$$

sont : a) parallèles ; b) sécantes ; c) non coplanaires

6. La droite de représentation paramétrique $x = -4t ; y = 1 + 3t ; z = 2 + 2t, t \in \mathbb{R}$ et le plan d'équation : $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont : a) orthogonaux ; b) parallèles ; c) ni orthogonaux ni parallèles

7. L'ensemble des points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ est :

- a) l'ensemble vide b) une droite c) un plan

EXERCICE 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer une équation du plan P passant par le point $A(1 ; 0 ; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Soit P_0 le plan d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$ et M le point de coordonnées $(0 ; 1 ; 1)$.

a. Sachant que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur non nul normal à l'un est orthogonal à un vecteur non nul normal à l'autre, démontrer que les plans P et P_0 sont perpendiculaires.

b. Calculer les distances d et d_0 du point M aux plans P et P_0 respectivement.

3. a. Donner une représentation paramétrique de la droite D intersection des plans P et P_0 .

b. Déterminer les coordonnées du point H de D tel que la droite (MH) soit perpendiculaire à la droite D.

c. Vérifier que $MH^2 = d^2 + d_0^2$.

EXERCICE 5

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1.

On choisit le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec $\vec{i} = \overrightarrow{AB}, \vec{j} = \overrightarrow{AD}, \vec{k} = \overrightarrow{AE}$.

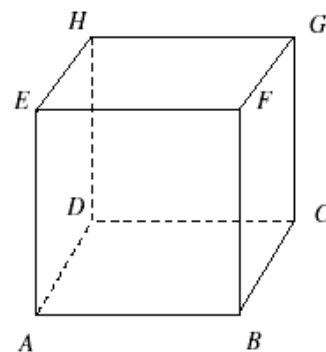
On appelle I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments $[BC], [CD], [DH], [HE], [EF]$ et $[FB]$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, K, M .

2. Montrer que les six points I, J, K, L, M et N sont coplanaires, dans un plan que l'on notera P (on donnera une équation du plan P dans le repère choisi).

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan P.

4. Montrer que les projetés orthogonaux des points I, J, K, L, M et N sur la droite (AG) sont confondus en un même point.



On appellera T ce point.

Déterminer la position du point T sur le segment $[AG]$.

5. Montrer que $IJKLMN$ est un hexagone inscritible dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon et montrer que tous ses côtés ont même longueur.

6. On considère la pyramide ayant pour base cet hexagone et pour sommet le point G . Quelle fraction du volume du cube représente le volume de cette pyramide ?

EXERCICE6

Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(2; 0; 0), B(-1; \sqrt{3}; 0) \text{ et } C(-1; -\sqrt{3}; 0)$$

1. Placer sur une figure les points A, B et C dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre.

3. a. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B .

b. Déterminer l'ensemble des points N de l'espace équidistants des points B et C .

c. En déduire que l'ensemble des points P de l'espace équidistants des points A, B et C est l'axe $(O; \vec{k})$.

4. Montrer qu'il existe un unique point D dont la troisième coordonnée est positive tel que le tétraèdre $ABCD$ soit régulier et calculer ses coordonnées.

5. Soit M un point quelconque du segment $[CD]$. On pose $\overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CD}$ avec $\lambda \in [0; 1]$.

a. Montrer que $\cos \widehat{AMB} = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$.

On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la relation $f(\lambda) = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = 1 - \frac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$.

b. Etudier les variations de la fonction f .

c. En déduire la position de M pour laquelle l'angle $\widehat{AMB}$ est maximum.

d. Quelle est la valeur de ce maximum?

SUJETS DE BACCALAUREAT

BACCALAURÉAT
SESSION 2015

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Dans un quartier d'affaires d'une ville, la Mairie a créé des parkings payants pour les véhicules. Le prix du stationnement dans ces parkings est de 2 000 F par jour. Par ailleurs le stationnement en tout autre endroit est interdit et l'amende à payer liée à cette infraction est égale à 5 000 F.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Partie I

Pour encourager les automobilistes à utiliser ses parkings, la Mairie organise, dans le cadre d'une promotion, une loterie. Cette loterie est constituée de dix tickets identiques disposés dans une urne dont deux sont gagnants.

Chaque automobiliste qui désire se garer dans un des parkings, effectue le tirage d'un ticket, note le résultat, le remet dans l'urne puis effectue le deuxième tirage.

- Si les deux tickets tirés sont gagnants alors le client stationne gratuitement.
- Si un seul des deux tickets tirés est gagnant alors le client stationne à 1 000 F.
- Si aucun des deux tickets tirés n'est gagnant alors le client stationne à 2 000 F.

Un automobiliste se présente et effectue les deux tirages.

1. Calculer la probabilité de stationner gratuitement.
2. Justifier que la probabilité de payer la moitié du prix du stationnement est égale à $\frac{8}{25}$.
3. Calculer la probabilité de payer au moins 1 000 F pour le stationnement.

Partie II

La probabilité pour un automobiliste d'être interpellé par la Police Municipale pour stationnement interdit et d'avoir alors à payer l'amende est égale à $\frac{4}{5}$.

Un automobiliste se gare n fois en stationnement interdit. Les risques d'amende sont indépendants d'un stationnement interdit à l'autre.

1. a) Calculer la probabilité q_n de payer l'amende au plus une fois.
b) Démontrer que la probabilité P_n qu'il paye au moins une fois l'amende est $P_n = 1 - \frac{1}{5^n}$.
c) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que $P_n \geq 0,99$.

1/4

Tournez la page S.V.P.

2. Monsieur Riko, exerçant dans ce quartier, paye en moyenne 4800 F pour trois jours de stationnement par semaine dans les parkings payants. Il estime que les stationnements payants lui reviennent trop chers et prend le risque de se garer en stationnement interdit trois fois dans la semaine. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant total des amendes qu'il peut payer dans la semaine.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Monsieur Riko a-t-il intérêt à se garer en stationnement interdit ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Partie I

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. L'unité graphique est 2 cm. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$; $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} + 2i$.

- Calculer le module et l'argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$ où z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B.
 - En déduire que le triangle OAB est équilatéral.

- On note P et Q les milieux respectifs des segments [OB] et [AB].

r est la rotation de centre J d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

On pose : $f = t \circ r$.

- Déterminer l'image par f du point O.
- Démontrer que f est une rotation dont on donnera l'angle.
- Construire le centre K de f .

Partie II

- Soit M un point du plan d'affixe z . On pose : $z = x + iy$, où x et y des nombres réels. On note H le point d'affixe $x + 3i$.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $2|z| = |y - 3|$.

- Démontrer que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$.
 - Justifier que (Γ) est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice (D) associée.
 - Démontrer que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.
 - Préciser les coordonnées du centre Ω de (Γ) et les coordonnées des sommets de (Γ) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 - Tracer (Γ) .
- Soit (Γ') est l'image de (Γ) par f .
 - Démontrer que (Γ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$.
 - Préciser un foyer et la directrice associée.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 10 cm.

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (e^{-x^2} - 1) \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J).

On se propose dans ce problème de trouver un encadrement de $\int_0^1 f(x) dx$.

Partie A

On considère les fonctions h et g dérivables et définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + e^x + 1 \text{ et } g(x) = x \ln x + e^x - 1.$$

On admet qu'il existe un nombre réel $\alpha \in]0; 1[$ tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, \alpha[, h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, h(x) > 0 \\ h(\alpha) = 0 \end{cases}$$

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = h(x)$.
3. a) Etudier les variations de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
b) Dresser le tableau de variation de g .
4. a) Démontrer que l'équation : $x \in]0; +\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique β .
b) Justifier que : $\beta \in]0,3; 0,4[$.
c) Démontrer que :
 $\forall x \in]0; \beta[, g(x) < 0; \forall x \in]\beta; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Justifier que f est dérivable en 0.
3. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
c) Donner une interprétation graphique des résultats des limites des questions a) et b).
4. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{x^2} g(x^2)$.
b) Déterminer les variations de f sur $]0; +\infty[$.
c) Dresser le tableau de variation de f .
5. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.
b) Tracer $(\mathcal{C})$ et (T) dans le plan muni du repère (O, I, J).
On prendra $\beta = 0,31$.

Partie C

1. Sachant que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.

a) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, -1 \leq -e^{-x} \leq -1 + x$.

b) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

2. Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ; 1]$.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x dx.$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_n(t)$.

b) Démontrer que :

$$\forall t \in]0 ; 1], -I_2(t) + \frac{1}{2} I_4(t) \leq \int_t^1 f(x) dx \leq -I_2(t).$$

3. On pose : $S = \int_0^1 f(x) dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de S .

b) On admet que : $\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 f(x) dx = S$.

Déterminer un encadrement de S .

BACCALAURÉAT
SESSION 2016

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

*Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.*

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\ln(n+1) + \ln(n+2) + \dots + \ln(n+n) - n \ln(n)}{n}.$$

- 1- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{1}{n} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right].$$

- 2- a) Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right).$$

(On pourra utiliser un encadrement de $\ln(x)$ sur l'intervalle $\left[1 + \frac{k}{n}, 1 + \frac{k+1}{n}\right]$.)

- b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n - \frac{1}{n} \ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x) dx \leq u_n$.

- 3- Sachant que $\int_1^2 \ln(x) dx = 2\ln(2) - 1$, déduire de ce qui précède la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. L'unité graphique est 2 cm.

- 1- On note $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z ($z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) tels que :
 $14z\bar{z} + 16i(z - \bar{z}) = z^2 + \bar{z}^2$.
 Démontrer que M appartient à $(\mathcal{C})$ si et seulement si :

$$3x^2 + 4y^2 - 8y = 0.$$

- 2- a) Justifier que $(\mathcal{C})$ est une ellipse. On note Ω son centre.
 b) Préciser les coordonnées de Ω .

- c) Déterminer une équation de l'axe focal de $(\mathcal{C})$.
 d) On note A, A', F et F' les points d'affixes respectives

$$\frac{-2\sqrt{3}}{3} + i, \frac{2\sqrt{3}}{3} + i, -\frac{\sqrt{3}}{3} + i \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{3} + i.$$

Justifier que A et A' sont les sommets de $(\mathcal{C})$ situés sur son axe focal.

Justifier que F et F' sont les foyers de $(\mathcal{C})$.

- 3- Construire l'ellipse $(\mathcal{C})$.
 4- On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.
 a) Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est :

$$3x^2 - y^2 = 1.$$

 b) Tracer les asymptotes de (H).
 c) Construire (H).

PROBLÈME

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2\text{cm}$.

On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} \ln |x|.$$

- 1- a) Calculer la limite de f en 0.
 b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 c) Démontrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -\frac{1}{4}[$ et $]0; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\frac{1}{4}; 0[$.
 d) Dresser le tableau de variation de f .
 2- Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $3 < \alpha < 4$.
 3- Démontrer que :
 $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[, f(x) < 0;$
 $\forall x \in]\alpha; +\infty[, f(x) > 0.$

Partie B

On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 \ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

- 1- a) Démontrer que h est dérivable en 0.

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Démontrer en utilisant A-3) que :

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \frac{1}{\alpha}[, h'(x) > 0;$$

$$\forall x \in]\frac{1}{\alpha}; +\infty[, h'(x) < 0.$$

2- On note (Γ) la courbe représentative de la restriction de h à l'intervalle $[-1; \frac{3}{2}]$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Tracer la tangente (Γ) en son point d'abscisse 0.

b) Construire la courbe (Γ) . (On prendra $\alpha = 3,6$.)

3- λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_{\lambda}^1 x^2 \ln(x) dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln \lambda.$$

b) On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) ,

la droite de repère $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

Déduire de la question précédente que :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 \ln(\lambda) \right) \text{ cm}^2.$$

c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie C

On se propose de calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

1- Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et définie par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln(x)$.

a) Étudier les variations de g .

b) Démontrer que l'image de l'intervalle $[3; 4]$ par g est contenue dans l'intervalle $[3; 4]$.

c) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation : $x \in]0; +\infty[, g(x) = x$.

2- On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $3 \leq u_n \leq 4$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $(u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

c) Démontrer que, pour tout x élément de $[3; 4]$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12} |u_{n+1} - u_n| \text{ puis que } |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}.$$

d) Démontrer que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$.

En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.

Pays : Côte d'Ivoire	Année : 2017	Épreuve : Mathématiques
Examen : Bac, Série C	Durée : 4 h	Coefficient : 5

EXERCICE 1

On désigne par Y une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- Y prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b et e^c où a, b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tels que : $a = b - r$ et $c = b + r$.
- L'espérance mathématique $E(Y)$ de Y est égale à 1.

1. a) Justifie que le couple (b, r) est solution du système (S) $\begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$.

b) Résous le système (S).

c) Dédus de ce qui précède que : $a = \ln(\frac{1}{7})$ et $c = \ln(\frac{6}{7})$.

2. Justifie que la variance $V(Y)$ de Y est égale à $\frac{12}{7}$.

3. On marque sur une droite graduée (D) les points A, B et C d'abscisses respectives 1 ; -1 et 2.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 4).

On note (Γ) l'ensemble des points M de la droite (D) tels que : $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$ et on

pose : $h(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$.

a) Calcule l'abscisse du point G.

b) Démontre que : $h(G) = V(Y)$.

c) Détermine l'ensemble (Γ) .

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle OIJ tel que : $OI = OJ$ et $\text{Mes}(\widehat{OI}; \widehat{OJ}) = \frac{\pi}{2}$.

A, B et C sont les milieux respectifs des segments [IJ], [JO] et [OI].

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$. On pose : $F = rot$ et $G = tor$.

1. Fais une figure. (On prendra : $OI = 8 \text{ cm}$).

2. a) Détermine $F(C)$ et $G(B)$.

b) Dédus de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations F et G.

3. On désigne par F^{-1} la réciproque de la transformation F.

a) Détermine la nature de la transformation $G \circ F^{-1}$.

b) Détermine $(G \circ F^{-1})(O)$, puis caractérise la transformation $G \circ F^{-1}$.

c) Détermine $(G \circ F)(I)$ puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $G \circ F$.

4. On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que défini précédemment.

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2 . On pose : $S = h \circ r$.

- Écris l'abbre de chacun des points A , B et C .
- Détermine l'écriture complexe de h et celle de r .
- Soit g l'application complexe associée à S .

Démontre que : $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$.

- Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de S .

PROBLÈME

On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $t_n = n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + \ln(n!)$.

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (t_n) et de démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi})$$

Partie I : Étude de la convergence de la suite (t_n)

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $] -n; +\infty[$ par : $\psi(t) = \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n}$.

On suppose que ψ est dérivable sur $] -n; +\infty[$ et on note ψ' sa fonction dérivée.

- Justifie que : $\forall t \in] -n; +\infty[, \psi'(t) = \frac{-t}{n^2(1 + \frac{t}{n})}$.

- Calcule $\psi(0)$.

- Dresse le tableau de variation de la fonction ψ (On ne calculera pas les limites).

- Déduis de ce qui précède que : $\forall t \in] -n; +\infty[, \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}$.

- En utilisant la question 1. d) et en effectuant un changement de variable, démontre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1.$$

- Démontre que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k} - 1\right) dx = 0$.

- Déduis des questions 2. a) et 2. b) que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq 0$.

- Justifie alors que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(k)$.

- En utilisant la relation de Chasles, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(n!).$$

- En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + \ln(n!) \geq \ln(\sqrt{2}).$$

- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq \ln(\sqrt{2})$.

4. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0; 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

On admet que : $\forall x \in]0; 1[, f(x) \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} - t_n = 1 - f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$.

- Détermine le sens de variation de la suite (t_n) .
- Déduis des questions précédentes la convergence de la suite (t_n) .

Partie II : Calcul de la limite de la suite (t_n)

On définit la suite (w_n) par :

$$w_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

1. a) Calcule w_1 .

- Démontre que la suite (w_n) est décroissante et positive.
On admettra que la suite (w_n) est à termes strictement positifs.

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

On remarquera que : $\sin^{n+2}(t) = \sin(t) \times \sin^{n+1}(t)$.

d) En utilisant les questions 1. b) et 1. c) de la partie III, justifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1.$$

e) Déduis de ce qui précède $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$.

- Démontre que la suite (y_n) est constante.
- Déduis de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \frac{\pi}{2}$.

c) Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} n w_n^2$.

(On remarquera que : $n w_n^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{w_n}{w_{n+1}}$).

d) Déduis de ce qui précède que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3. On admet dans toute la suite du problème que, si une suite (a_n) converge vers l , alors la suite (a_{2n}) converge aussi vers l .

a) Déduis de la question 2. c) de la partie II la limite de la suite $(n w_{2n}^2)$.

(On remarquera que : $n w_{2n}^2 = \frac{1}{2} (2n w_{2n}^2)$).

b) En utilisant la question 1. c) de la partie II, démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

c) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{t_n} = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

d) En admettant que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{t_{2n}-2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{n w_{2n}^2}$, détermine la limite de la suite (t_n) .

BACCALAURÉAT
SESSION 2018

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont également autorisées.

EXERCICE 1

L'unité graphique est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un losange OABC tel que :

$$OA = 7 \text{ et } \text{Mes}(\widehat{OA; OC}) = \frac{\pi}{3}.$$

E est le point du segment [OB] tel que : OE = OA.

F est le point de la demi-droite [OC) tel que : CF = EB et C ∈ [OF].

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [OA], [AB], [BC] et [OC].

On désigne par (Δ) la médiatrice du segment [OA] et par (Δ') celle de [BC].

1. Fais une figure.
2.
 - a) Justifie que les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles.
 - b) Justifie que le triangle OAC est équilatéral.
 - c) Justifie que : OB = OF.
3. Soit R_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
 On pose : $f = R_1 \circ R_2$.
 - a) Détermine $f(O)$ et $f(A)$.
 - b) Démontre que f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
 - c) Déduis de ce qui précède que : $(EF) \perp (OA)$ et $EF = OA$.
 - d) Construis le centre Ω de f .
4.
 - a) Justifie qu'il existe une isométrie g et une seule telle que : $g(O) = A$, $g(A) = C$ et $g(C) = B$.
 - b) Justifie que g est un antidéplacement.
 - c) Démontre que g est une symétrie glissée.
5. Dans cette partie, on se propose de caractériser la symétrie glissée g .
 Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et S la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
 - a) Démontre que : $g = RoS$.
 - b) Détermine l'axe de la symétrie orthogonale S_1 telle que : $R = S_{(AB)} \circ S_1$.
 - c) Déduis de ce qui précède que : $g = S_{(AB)} \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur que l'on caractérisera.
 - d) En utilisant la relation $\vec{CB} = \vec{CJ} + \vec{JB}$, détermine les éléments caractéristiques de g .

EXERCICE 2

Dans tout cet exercice, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Démontre que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2. On pose : $A = n + 3$, $B = 2n + 1$ et $d = \text{PGCD}(A ; B)$.
 - a) Calcule $2A - B$ et déduis-en les valeurs possibles de d .
 - b) Démontre que A et B sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
 - c) Soient $S = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $P = 2n^2 - n - 1$.
Justifie que S et P sont divisibles par $n - 1$.
3. On pose : $\delta = \text{PGCD}(n(n + 3) ; 2n + 1)$.
 - a) Démontre que d divise δ .
 - b) Démontre que δ et n sont premiers entre eux.
 - c) Déduis des questions 3-a) et 3-b) que δ est égal à d .
 - d) Détermine le $\text{PGCD}(S ; P)$ en fonction de n .
4. Détermine $\text{PGCD}(S ; P)$ pour $n = 2016$ puis pour $n = 2017$.

PROBLÈME

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g_n(t) = \left(-\frac{2}{t} + \ln t\right)^n.$$

On note (C_n) la courbe représentative de g_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Unités graphiques : $OI = 2$ cm et $OJ = 0,5$ cm.

Partie A

1.
 - a) Calcule la limite de g_1 en 0.
 - b) Interprète graphiquement ce résultat.
2.
 - a) Calcule la limite de g_1 en $+\infty$.
 - b) Justifie que (C_1) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.
3. On suppose que g_1 est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
 - a) Démontre que g_1 est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
On admet que l'équation $t \in]0 ; +\infty[$, $g_1(t) = 0$ admet une solution unique α telle que : $2,3 < \alpha < 2,4$.
 - b) Justifie que l'équation $t \in]0 ; +\infty[$, $g_1(t) = 1$ admet une solution unique β telle que : $4,3 < \beta < 4,4$.
4. Soit t un nombre réel strictement positif.
Démontre que :
 - a) $g_1(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0 ; \alpha[$;
 - b) $g_1(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha ; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que n est supérieur ou égal à 2.

1. a) Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_n(t)$.

- b) Démontre que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g_n(t)}{t} = 0$ (On pourra poser : $x = \frac{1}{t^n}$).
- c) Interprète graphiquement les résultats précédents.
2. On suppose que n est pair.
- a) Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} g_n(t)$.
- b) Interprète graphiquement ce résultat.
3. On suppose que n est impair.
- a) Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} g_n(t)$.
- b) Soit t un nombre réel strictement positif.
Justifie que :
- i) $g_n(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0 ; \alpha[$;
- ii) $g_n(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha ; +\infty[$.
(On pourra utiliser la question 4 de la partie A).
4. On suppose que pour tout entier naturel n supérieur ou à 2, g_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on désigne par g'_n sa fonction dérivée.
- a) Démontre que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout nombre réel strictement positif t , $g'_n(t) = n g'_{n-1}(t) \times g_{n-1}(t)$.
- b) Étudie suivant la parité de n , le signe de g'_n sur $]0 ; +\infty[$.
- c) Dresse suivant la parité de n , le tableau de variation de g_n .

Partie C

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et t un nombre réel strictement positif.

1. a) Exprime $g_{(n+p)}(t)$ en fonction de $g_n(t)$ et $g_p(t)$.
- b) Déduis de ce qui précède que : $g_{(n+p)}(t) - g_n(t) = (g_p(t) - 1) \times g_n(t)$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que n est pair.

2. Justifie que :
- a) (C_n) est au-dessus de (C_{n+1}) sur $]0 ; \beta[$;
- b) (C_n) est au-dessous de (C_{n+1}) sur $]\beta ; +\infty[$.
(On pourra utiliser la question 3 de la partie A).
3. Construis (C_2) et (C_3) dans le même repère (O, I, J) .
On prendra : $\alpha = 2,35$ et $\beta = 4,35$.
4. Soit A_n l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par (C_n) , (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
- a) Justifie que, pour tout entier naturel n pair et non nul, $A_n = \int_1^2 (1 - g_1(t)) \times g_n(t) dt$.
- b) À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\int_1^2 (1 - g_1(t)) dt$.
- c) Démontre que pour tout entier naturel n pair et non nul, $2g_n(2) \leq A_n \leq 2g_n(1)$.
- d) Déduis de ce qui précède que pour tout entier naturel n pair et non nul, $2(1 - \ln 2)^n \leq A_n \leq 2^{n+1}$.

BACCALAURÉAT
SESSION 2019

Coefficient : 5
Durée : 4h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre K tel que $AB = 3$.

On note E le milieu du segment [BC] et G le barycentre des points pondérés (A, 4), (B, -1) et (D, -1).

1. a) Démontre que A est le milieu du segment [KG].
 b) Justifie que : $GB^2 = \frac{45}{2}$.
 c) Justifie que : $GB = GD$.
 d) Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :

$$4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9.$$
2. a) Justifie que : $AE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.
 b) Démontre que pour tout point M du plan :

$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = -27 + 4\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE}.$$

 c) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :

$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 63.$$

EXERCICE 2

On considère un entier naturel m dont l'écriture dans le système décimal est $\overline{abc}$.

(On rappelle que : $m = 10^2a + 10b + c$)

Partie A

1. Écris l'entier naturel m en base 2 dans le cas où : $a = 1$; $b = 2$ et $c = 1$.
2. On suppose que : $m \equiv 0 [27]$.
 i) Démontre que : $10^3a + 10bc \equiv 0 [27]$.
 ii) Déduis-en que : $10\overline{bc} + a \equiv 0 [27]$.
 iii) Justifie alors que l'entier $\overline{bca}$ est divisible par 27.

Partie B

Dans cette partie on suppose que : $a > c$.

On pose : $p = \overline{cba}$; $u = a - c$ et $d = m - p$.

1. Justifie que : $d = 99u$.

2. Déduis de la question précédente que l'entier naturel d ne peut être le carré d'un entier naturel.
3. On suppose que : $b = a + c$.
 - i) Justifie que : $m = 11(10a + c)$.
 - ii) Déduis-en que m et d ne sont pas premiers entre eux.
4. On suppose que : $a = b + c$.
 - i) Justifie que : $d = 3^2 \times 11b$.
 - ii) Justifie que : $m = 110b + 101c$.
 - iii) Démontre que les entiers naturels m qui sont premiers avec d sont ceux qui vérifient à la fois : $b \neq 0$, $c \neq 0$, $b+c$ n'est pas divisible par 3 ; b et c sont premiers entre eux.
 - iv) Déduis des questions précédentes, tous les entiers naturels m premiers avec d .

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions f_n et F_n continues sur $\mathbb{R}$ et définies par :

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction F_n dans le repère (O, I, J).

On se propose dans ce problème de donner, pour tout entier naturel n non nul, l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. Démontre que f est une fonction impaire.
2. a) Calcule la limite de $f(x)$ puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
 b) Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
 - b) Détermine le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
 - c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
4. Détermine une équation de la tangente (Δ)    $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
5. On note g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$g(x) = -x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$
 - a) Détermine le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
 - b) Détermine les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (Δ) . (On pourra calculer $g(0)$).
6. Construis la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ) dans le plan muni du repère (O, I, J).
7. On note A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
 Calcule A à l'aide d'une intégration par parties.

Partie B

1. a) Justifie que F_n est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Démontre que F_n est une fonction impaire.
c) Étudie le sens de variation de F_n sur $[0 ; +\infty[$.

2. Soit (I_n) la suite numérique définie par :

$$I_0 = \ln(1 + \sqrt{2}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

- a) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.
- b) Démontre que la suite (I_n) est décroissante.
- c) Démontre que la suite (I_n) est convergente.
(On ne demande pas de calculer la limite de (I_n) .)
- d) Vérifie que pour tout entier naturel n non nul et pour tout nombre réel t positif, on a :

$$t^{2n} \sqrt{1+t^2} = \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}$$

- e) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2} I_n.$$

$$\text{On remarquera que pour tout nombre réel } t, \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}} = t^{2n+1} \times \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\text{On admettra que : } I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} I_0.$$

- f) Calcule I_1 et I_2 .

3. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = I_n + \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt.$

- b) Démontre que :

$$\forall t \geq 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \geq 1, \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{n} (x^{2n} - 1) \leq \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

- c) Déduis-en la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- d) Démontre que, pour tout entier naturel non nul n , $(\mathcal{C}_n)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.
- e) Construis la courbe $(\mathcal{C}_2)$ dans le plan muni du repère (O, I, J).