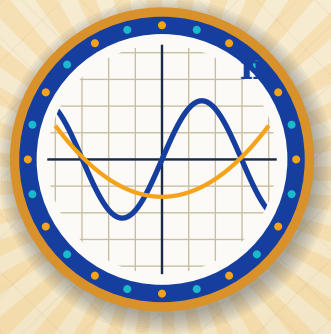
COLLÈGE LE PROVINCIAL

ANNÉE SCOLAIRE 2026-2027



COURS DE MATHS

NIVEAU : TERMINALE B

AUTEURS

M. TEHUA
+225 05 46 23 46 13

M. DIALLO
+225 07 07 66 29 51

Abobo Plateau Dokui, Abidjan

FICHE DE COURS

LEÇON 1 : LIMITES ET CONTINUITÉ

Classe	Discipline	Volume horaire	Séance de régulation
Terminale B	Mathématiques	14 h	2 h

Plan de la leçon

I. Calculs de limites **II.** Étude des branches infinies **III.** Continuité d'une fonction sur un intervalle
IV. Image d'un intervalle par une fonction continue **V.** Fonction continue et strictement monotone
VI. Théorème des valeurs intermédiaires **VII.** Fiche d'exercices **VIII.** Corrigés

Prérequis : ensembles de nombres, intervalles, calcul algébrique (factorisation, identités remarquables), étude du signe d'une expression, notion de fonction, dérivée et sens de variation d'une fonction polynôme.

Objectifs : calculer des limites et lever des formes indéterminées ; déterminer et interpréter les asymptotes d'une courbe ; étudier la continuité d'une fonction ; utiliser les théorèmes de l'image d'un intervalle, de la bijection et des valeurs intermédiaires.

I. CALCULS DE LIMITES

1) Limites de référence

Limites usuelles

Pour tout entier naturel non nul n : $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} 1/x^n = 0$; $\lim_{x\to-\infty} 1/x^n = 0$.
$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair ; $= -\infty$ si n est impair.
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim_{x\to0} 1/x^2 = +\infty$; $\lim_{x\to0^+} 1/x = +\infty$; $\lim_{x\to0^-} 1/x = -\infty$.

2) Limite d'un polynôme et d'une fonction rationnelle à l'infini

Propriétés

- En $+\infty$ et en $-\infty$, un **polynôme** a la même limite que son **terme de plus haut degré**.
- En $+\infty$ et en $-\infty$, une **fonction rationnelle** a la même limite que le **quotient des termes de plus haut degré** du numérateur et du dénominateur.

3) Opérations sur les limites

Soit ℓ et ℓ' deux réels. F.I. signifie « forme indéterminée » (on ne peut pas conclure directement).

Somme

lim f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim (f + g)	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Produit

lim f	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
lim g	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
lim (f × g)	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle des signes)	F.I.

Quotient

lim f	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
lim g	$\ell' \neq 0$	0	$\pm\infty$	ℓ'	$\pm\infty$	0
lim (f / g)	ℓ / ℓ'	$\pm\infty$ (signes)	0	$\pm\infty$ (signes)	F.I.	F.I.

Les quatre formes indéterminées à retenir

$+\infty - \infty$ $\quad$ $0 \times \infty$ $\quad$ ∞ / ∞ $\quad$ $0 / 0$

4) Méthodes pour lever une forme indéterminée

- **Polynôme ou fraction rationnelle à l'infini :** on garde les termes de plus haut degré.
- **Forme 0/0 en un réel a :** on factorise numérateur et dénominateur par $(x - a)$, puis on simplifie.
- **Forme $+\infty - \infty$ avec des radicaux :** on multiplie par l'**expression conjuguée** : $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$.
- **Comparaison :** si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de $+\infty$ et si $\lim g = +\infty$, alors $\lim f = +\infty$. Théorème des gendarmes : si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim g = \lim h = \ell$, alors $\lim f = \ell$.

Exemples résolus

1. $\lim_{x\to+\infty} (3x^3 - 2x^2 + 5) = \lim_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$.

2. $\lim_{x\to+\infty} (2x^2 + 3x - 1)/(x^2 - 4) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2/x^2 = 2$.

3. (forme 0/0) $\lim_{x\to2} (x^2 - 4)/(x - 2) = \lim_{x\to2} (x - 2)(x + 2)/(x - 2) = \lim_{x\to2} (x + 2) = 4$.

4. (forme $+\infty - \infty$) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{(x^2 + 1)} - x) = \lim_{x\to+\infty} 1/(\sqrt{(x^2 + 1)} + x) = 0$.

5. $\lim_{x\to1^+} (2x + 1)/(x - 1)$: le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 0 en restant positif ; la limite est donc $+\infty$.

Exercice d'application 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} (-2x^3 + x^2 - 1)$ $\quad$ b) $\lim_{x\to-\infty} (3x^2 - 5x)/(x^2 + 1)$ $\quad$ c) $\lim_{x\to3} (x^2 - 9)/(x - 3)$

d) $\lim_{x\to2^-} (x + 1)/(x - 2)$ $\quad$ e) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{(x^2 + 3x)} - x)$

II. ÉTUDE DES BRANCHES INFINIES

Soit f une fonction, (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Définitions : asymptotes

- **Asymptote verticale.** Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (limite à gauche ou à droite), la droite d'équation **x = a** est asymptote verticale à (C).
- **Asymptote horizontale.** Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ (ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$), la droite d'équation **y = b** est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$ (ou en $-\infty$).
- **Asymptote oblique.** Si $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ avec $a \neq 0$, la droite d'équation **y = ax + b** est asymptote oblique à (C) en $+\infty$ (de même en $-\infty$).

Méthode : recherche d'une asymptote oblique ou d'une branche parabolique en +∞

On calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x$.

- Si cette limite vaut **0** : branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
- Si cette limite vaut **±∞** : branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- Si cette limite vaut un réel **a ≠ 0**, on calcule $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$:
  – si elle vaut un réel **b**, la droite y = ax + b est asymptote oblique ;
  – si elle vaut ±∞, branche parabolique de direction la droite y = ax.

Position relative : on étudie le signe de f(x) − (ax + b). S'il est positif, (C) est au-dessus de l'asymptote ; s'il est négatif, (C) est en dessous.

Exemple résolu

Soit $f(x) = (x^2 + x + 1)/(x - 1)$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$: la droite **x = 1** est asymptote verticale.

• On a $x^2 + x + 1 = (x - 1)(x + 2) + 3$, donc $f(x) = x + 2 + 3/(x - 1)$.

• $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to \pm\infty} 3/(x - 1) = 0$: la droite **y = x + 2** est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

• Position : $f(x) - (x + 2) = 3/(x - 1)$ est positif pour $x > 1$ (courbe au-dessus de la droite) et négatif pour $x < 1$ (courbe en dessous).

Exercice d'application 2

1) Soit $g(x) = (2x^2 - x + 3)/(x + 1)$. Déterminer le domaine de définition, les asymptotes à la courbe de g et leur position relative.

2) Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la courbe de $h(x) = \sqrt{x}$, puis de $k(x) = x^2$.

III. CONTINUITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Définitions

- f est **continue en a** (a dans le domaine de f) si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est **continue à gauche** de a si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$; **continue à droite** de a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche **et** à droite de a.

- f est **continue sur un intervalle I** si elle est continue en tout point de I. Graphiquement, la courbe se trace « sans lever le crayon ».

Propriétés

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$; les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine ; $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$; $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La somme, le produit de fonctions continues sont continus ; le quotient aussi là où le dénominateur ne s'annule pas ; la composée de fonctions continues est continue.
- Toute fonction **dérivable** sur un intervalle I est continue sur I (la réciproque est fausse : $|x|$ n'est pas dérivable en 0).

Prolongement par continuité

Si f n'est pas définie en a mais que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ (réel), la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \neq a$ et $\tilde{f}(a) = \ell$ est continue en a : c'est le **prolongement par continuité** de f en a.

Exemples résolus

1. Soit $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ pour $x \neq 1$. Pour $x \neq 1$, $f(x) = x + 1$, donc $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. En posant $f(1) = 2$, f est prolongée par continuité en 1.

2. Soit $f(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = 3x - 1$ si $x > 1$. À gauche : $1 + 1 = 2$; à droite : $3 - 1 = 2$; $f(1) = 2$. Les trois valeurs sont égales : f est continue en 1.

Exercice d'application 3

1) Soit $f(x) = x^2 + m$ si $x < 2$ et $f(x) = 3x - 1$ si $x \geq 2$. Déterminer m pour que f soit continue en 2.

2) Soit $g(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ pour $x \neq 2$. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 2.

3) Soit $h(x) = x + 1$ si $x \leq 0$ et $h(x) = x^2 + 2$ si $x > 0$. h est-elle continue en 0 ? Justifier.

IV. IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

Théorèmes

- **L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.**
- L'image d'un **segment** [a ; b] par une fonction continue f est un segment [m ; M], où m et M sont le minimum et le maximum de f sur [a ; b].

Cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

L'image de I se détermine à l'aide des valeurs et des limites aux bornes :

I	f strictement croissante	f strictement décroissante
[a ; b]	[f(a) ; f(b)]	[f(b) ; f(a)]
[a ; b[	[f(a) ; $\lim_{b-}$ f[	]$\lim_{b-}$ f ; f(a)]
]a ; b]	]$\lim_{a+}$ f ; f(b)]	[f(b) ; $\lim_{a+}$ f[
]a ; b[	]$\lim_{a+}$ f ; $\lim_{b-}$ f[	]$\lim_{b-}$ f ; $\lim_{a+}$ f[

Exemples résolus

1. f(x) = 2x + 1 est continue et strictement croissante sur [−1 ; 3] : f([−1 ; 3]) = [f(−1) ; f(3)] = [−1 ; 7].

2. f(x) = x^2 + 1 est continue et strictement croissante sur [0 ; +∞[: f([0 ; +∞[) = [f(0) ; $\lim_{x\to+\infty}$ f(x)[= [1 ; +∞[.

3. f(x) = 1/x est continue et strictement décroissante sur]0 ; 1] : f(]0 ; 1]) = [f(1) ; $\lim_{x\to0^+}$ f(x)[= [1 ; +∞[.

Exercice d'application 4

Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas :

a) f(x) = −x + 4 ; I = [0 ; 3] b) f(x) = x^2 − 1 ; I =]1 ; +∞[c) f(x) = 1/(x − 1) ; I =]1 ; 3]

V. FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE

Théorème de la bijection

Si f est **continue et strictement monotone** sur un intervalle I, alors f réalise une **bijection** de I sur l'intervalle J = f(I). Autrement dit, pour tout réel k de J, l'équation f(x) = k admet **une solution unique** dans I.

Fonction réciproque

La bijection réciproque f^{-1} : J → I est continue sur J et a **le même sens de variation** que f. Dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont **symétriques par rapport à la droite y = x**. De plus : y = f(x) ⇔ x = f^{-1}(y), avec x ∈ I et y ∈ J.

Exemple résolu

La fonction f(x) = x^2 est continue et strictement croissante sur [0 ; +∞[: elle réalise une bijection de [0 ; +∞[sur [0 ; +∞[. Sa réciproque est la fonction racine carrée : f^{-1}(x) = √x.

Exercice d'application 5

1) Soit $f(x) = x^3 + x$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Résoudre $f(x) = 2$.

2) Soit $g(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $I = [2 ; +\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser, puis résoudre $g(x) = 0$ dans I.

VI. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (TVI)

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est **continue sur [a ; b]**, alors pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe **au moins un réel c** de [a ; b] tel que f(c) = k.

Corollaire (cas k = 0)

Si f est continue sur [a ; b] et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation f(x) = 0 admet **au moins une solution** dans]a ; b[. Si de plus f est **strictement monotone** sur [a ; b], cette solution est **unique**.

Méthode de rédaction

- Vérifier que f est continue sur l'intervalle (en citant la nature de f).
- Calculer f(a) et f(b) et montrer que 0 est compris entre ces deux valeurs (signes contraires).
- Pour l'unicité : justifier que f est strictement monotone (signe de f') puis conclure avec le théorème de la bijection.
- Pour encadrer la solution α : par **balayage** ou **dichotomie**, on calcule f en des valeurs intermédiaires et on resserre l'intervalle.

Exemple résolu

Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une solution unique α dans [0 ; 1] et l'encadrer à 0,1 près.

Posons $f(x) = x^3 + x - 1$. f est un polynôme donc continue sur [0 ; 1]. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$. D'après le TVI et la stricte monotonie, l'équation f(x) = 0 admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1[$.

Encadrement : $f(0,5) = -0,375 < 0$ donc $\alpha \in]0,5 ; 1[$; $f(0,7) = 0,043 > 0$ donc $\alpha \in]0,5 ; 0,7[$; $f(0,6) = -0,184 < 0$ donc **$0,6 < \alpha < 0,7$**.

Exercice d'application 6

Soit $h(x) = x^3 + 3x - 5$. Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α dans]1 ; 2[, puis donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

VII. FICHE D'EXERCICES : LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice 1 : Calculs de limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 5x^2 + 2)$ b) $\lim_{x\to-\infty} (4x^2 - 3x)/(2x^2 + 1)$ c) $\lim_{x\to-1} (x^2 + 3x + 2)/(x + 1)$

d) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{(x^2 + 1)} - x)$ e) $\lim_{x\to0^+} (1/x - 1/x^2)$ f) $\lim_{x\to1^-} (x^2 + 1)/(x - 1)$

Exercice 2 : Branches infinies

Soit $f(x) = (x^2 - 3x + 2)/(x - 3)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites aux bornes.

2) Montrer que $f(x) = x + 2/(x - 3)$. En déduire les asymptotes à la courbe (C) de f.

3) Étudier la position relative de (C) et de son asymptote oblique.

4) Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la courbe de $u(x) = x^2 + 1$.

Exercice 3 : Continuité

1) Soit $f(x) = (x^2 - x - 2)/(x - 2)$ pour $x \neq 2$ et $f(2) = a$. Déterminer a pour que f soit continue en 2.

2) Soit $g(x) = x^2 + m$ si $x < 1$ et $g(x) = 2x + 3$ si $x \geq 1$. Déterminer m pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction $x \mapsto |x - 1|$ est-elle continue en 1 ? Est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 4 : Image d'un intervalle

Déterminer l'image de I par f :

a) $f(x) = 2/(x + 1)$; $I = [0 ; +\infty[$ b) $f(x) = x^2 - 2x$; $I = [1 ; 3]$ c) $f(x) = \sqrt{x}$; $I = [4 ; 9]$

Exercice 5 : Bijection

Soit $f(x) = -x^3 - x + 2$.

1) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ (avec les limites en $\pm\infty$).

2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 6 : TVI

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0 ; 1]$ et encadrer α à 0,1 près.

2) En calculant $f(-2)$, $f(-1)$ et $f(2)$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux autres solutions $\beta \in]-2 ; -1[$ et $\gamma \in]1 ; 2[$.

3) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle dans $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 7 : Problème de synthèse

Soit $f(x) = (2x^2 + x - 1)/(x - 1)$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Déterminer le domaine D de f et calculer les limites aux bornes de D.

2) Montrer que $f(x) = 2x + 3 + 2/(x - 1)$. En déduire les asymptotes de (C).

3) Étudier la position de (C) par rapport à l'asymptote oblique.

4) Montrer que f est continue sur $]1 ; +\infty[$ puis que l'équation $f(x) = 12$ y admet au moins une solution. (On calculera f(2) et f(5).)

VIII. CORRIGÉS

A) Exercices d'application

Application 1

a) $\lim_{x\to+\infty}(-2x^3) = -\infty$. b) $\lim_{x\to-\infty} 3x^2/x^2 = 3$.

c) $(x^2 - 9)/(x - 3) = x + 3$ pour $x \neq 3$, donc la limite est 6.

d) Le numérateur tend vers 3, le dénominateur vers 0 par valeurs négatives : la limite est $-\infty$.

e) $\sqrt{(x^2 + 3x)} - x = 3x/(\sqrt{(x^2 + 3x)} + x) = 3/(\sqrt{(1 + 3/x)} + 1) \to 3/2$ quand $x \to +\infty$.

Application 2

1) $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On a $2x^2 - x + 3 = (x + 1)(2x - 3) + 6$, donc $g(x) = 2x - 3 + 6/(x + 1)$. Asymptote verticale : $x = -1$ (la limite à droite est $+\infty$, à gauche $-\infty$). Asymptote oblique : $y = 2x - 3$ en $\pm\infty$. Position : $g(x) - (2x - 3) = 6/(x + 1) > 0$ pour $x > -1$ (courbe au-dessus) et < 0 pour $x < -1$ (courbe en dessous).

2) Pour $h(x) = \sqrt{x}$: $h(x)/x = 1/\sqrt{x} \to 0$, branche parabolique de direction l'axe des abscisses. Pour $k(x) = x^2$: $k(x)/x = x \to +\infty$, branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Application 3

1) À gauche : $4 + m$; $f(2) = 5$. Continuité en 2 si $4 + m = 5$, donc **$m = 1$**.

2) $g(x) = x + 2$ pour $x \neq 2$, donc $\lim_{x\to2} g(x) = 4$. En posant $g(2) = 4$, g est prolongée par continuité en 2.

3) À gauche : 1 ; à droite : 2 ; les limites sont différentes. h n'est **pas continue** en 0.

Application 4

a) f est strictement décroissante : $f([0 ; 3]) = [f(3) ; f(0)] = [1 ; 4]$.

b) f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$, $f(x) \to 0$ en 1^+ et $\to +\infty$: image = $]0 ; +\infty[$.

c) f est strictement décroissante sur $]1 ; 3]$, $f(x) \to +\infty$ en 1^+ et $f(3) = 1/2$: image = $[1/2 ; +\infty[$.

Application 5

1) $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f(1) = 2$, la solution unique de $f(x) = 2$ est **$x = 1$**.

2) $g'(x) = 2x - 4 \geq 0$ sur $[2 ; +\infty[$: g est continue et strictement croissante. $g(2) = -1$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$, donc $J = [-1 ; +\infty[$. Comme $0 \in J$, $g(x) = 0$ admet une solution unique dans I : $g(x) = (x - 1)(x - 3)$, donc **$x = 3$**.

Application 6

h est un polynôme donc continue ; $h'(x) = 3x^2 + 3 > 0$: h est strictement croissante. $h(1) = -1 < 0$ et $h(2) = 9 > 0$: par le TVI, il existe une solution unique $\alpha \in]1 ; 2[$. $h(1,1) = -0,369 < 0$ et $h(1,2) = 0,328 > 0$, donc **$1,1 < \alpha < 1,2$**.

B) Éléments de réponse de la fiche d'exercices

Exercice 1

a) $+\infty$ b) 2 c) $(x+1)(x+2)/(x+1) = x+2$, limite 1 d) 0 (expression conjuguée) e) $(x-1)/x^2 \to -\infty$ f) numérateur $\to 2$, dénominateur $\to 0^-$: $-\infty$.

Exercice 2

1) $D = \mathbb{R}\setminus\{3\}$; lim en $3^+ = +\infty$, en $3^- = -\infty$; en $\pm\infty$, $f(x) \sim x$. 2) $x^2 - 3x + 2 = x(x-3) + 2$; asymptotes : **x = 3** et **y = x**. 3) $f(x) - x = 2/(x-3)$: (C) au-dessus pour $x > 3$, en dessous pour $x < 3$. 4) $u(x)/x \to +\infty$: branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Exercice 3

1) $f(x) = x + 1$ pour $x \neq 2$, donc la limite en 2 est 3 et **a = 3**. 2) À gauche : $1 + m$; $g(1) = 5$: **m = 4**. 3) Continue en 1 (composée de fonctions continues) mais non dérivable en 1 (dérivées à gauche -1 et à droite $+1$ différentes).

Exercice 4

a) f décroissante, $f(0) = 2$, limite 0 en $+\infty$: image = $]0\ ;\ 2]$. b) $f'(x) = 2x - 2 \geq 0$ sur $[1\ ;\ 3]$: image = $[f(1)\ ;\ f(3)] = [-1\ ;\ 3]$. c) image = $[2\ ;\ 3]$.

Exercice 5

$f'(x) = -3x^2 - 1 < 0$: f strictement décroissante ; $\lim_{-\infty} f = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = -\infty$; f continue donc bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f(1) = 0$, l'unique solution de $f(x) = 0$ est **x = 1**.

Exercice 6

1) $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$ sur $]0\ ;\ 1[$: f strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$; $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$: solution unique α ; $f(0{,}3) = 0{,}127 > 0$ et $f(0{,}4) = -0{,}136 < 0$ donc **0,3 < α < 0,4**. 2) $f(-2) = -1 < 0$ et $f(-1) = 3 > 0$: $\beta \in]-2\ ;\ -1[$; $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 3 > 0$: $\gamma \in]1\ ;\ 2[$. 3) Un polynôme de degré 3 a au plus 3 racines : l'équation admet exactement **3 solutions** dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7

1) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; lim en $1^+ = +\infty$ (numérateur $\to 2$) et en $1^- = -\infty$; en $\pm\infty$, $f(x) \sim 2x$. 2) $(x-1)(2x+3) + 2 = 2x^2 + x - 1$; asymptotes : **x = 1** et **y = 2x + 3**. 3) $f(x) - (2x+3) = 2/(x-1)$: (C) au-dessus pour $x > 1$, en dessous pour $x < 1$. 4) f est une fonction rationnelle, donc continue sur $]1\ ;\ +\infty[$. $f(2) = 9$ et $f(5) = 54/4 = 13{,}5$; comme $9 < 12 < 13{,}5$, le TVI donne au moins une solution de $f(x) = 12$ dans $]2\ ;\ 5[$.

COLLÈGE LE PROVINCIAL

Année scolaire 20…… / 20……

CE : MATHS

Classe : Tle B

LEÇON 2 : DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Classe : Terminale B (Côte d'Ivoire)	**Durée :** 14 h + 2 h (séance de régulation)

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une coopérative agricole ivoirienne modélise son bénéfice (en millions de FCFA) en fonction de la quantité produite x (en tonnes) par une fonction B. Les responsables veulent connaître la production qui rend le bénéfice maximal, savoir à partir de quand le bénéfice « s'accélère » ou « ralentit », puis représenter graphiquement la situation. Pour les aider, les élèves de Tle B apprennent à **dériver** des fonctions, à **étudier leur convexité et leurs symétries** et à **mener l'étude complète d'une fonction**.

PLAN DE LA LEÇON

I. Dérivation

- 1. Dérivabilité sur un intervalle
- 2. Dérivée de la composée de deux fonctions
- 3. Dérivées successives
- 4. Dérivée seconde et convexité

II. Éléments de symétrie

III. Étude de fonctions

IV. Corrigés des exercices d'application — V. Fiche d'exercices

I. DÉRIVATION

1. Dérivabilité sur un intervalle

Définition (nombre dérivé)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a. On dit que f est **dérivable en a** si le taux d'accroissement $\mathbf{(f(a+h) - f(a))/h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} (f(a+h) - f(a))/h = \lim_{x\to a} (f(x) - f(a))/(x - a)$$

Si la limite à droite (resp. à gauche) existe, on parle de **dérivabilité à droite** $f'_d(a)$ (resp. **à gauche** $f'_g(a)$). f est dérivable en a si et seulement si $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent et sont égales.

Définition (dérivabilité sur un intervalle)

f est **dérivable sur un intervalle I** si elle est dérivable en tout point de I (à l'intérieur de I ; aux extrémités appartenant à I, on utilise la dérivabilité à droite ou à gauche). La fonction $\mathbf{x \mapsto f'(x)}$ est alors la **fonction dérivée** de f sur I.

Propriétés

- **Dérivable ⇒ continue.** Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. **La réciproque est fausse** : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.
- **Tangente.** Si f est dérivable en a, la courbe C_f admet au point d'abscisse a une tangente d'équation $\mathbf{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$.
- **Demi-tangentes.** Si $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, la courbe admet un *point anguleux* : deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents. Si le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$, la courbe admet une demi-tangente **verticale**.
- Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$; les fonctions rationnelles, sur chaque intervalle de leur ensemble de définition ; $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ (mais pas en 0) ; ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$; exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivées usuelles

Fonction f	Dérivée f′	Fonction f	Dérivée f′
k (constante)	0	$1/x$	$-1/x^2$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$n\,x^{n-1}$	$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
ln x	$1/x$	e^x	e^x

Opérations sur les dérivées (u et v dérivables)

$(u + v)' = u' + v'$; $(k\cdot u)' = k\cdot u'$; $(u\cdot v)' = u'v + uv'$; $(1/v)' = -v'/v^2$; $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$ ($v \neq 0$)

Exemple

Soit $g(x) = |x - 2|$. Pour $h \neq 0$: $(g(2+h) - g(2))/h = |h|/h$. À droite ($h > 0$) la limite est **1** ; à gauche ($h < 0$) elle est **−1**. Les limites sont différentes : **g n'est pas dérivable en 2**. La courbe admet un point anguleux A(2 ; 0) avec deux demi-tangentes (coefficients 1 et −1).

EXERCICE D'APPLICATION 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = (2x^2 - x + 1)/(x - 1)$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f et justifier qu'elle y est dérivable.
- b) Calculer $f'(x)$ et la mettre sous forme factorisée.
- c) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.
- d) Soit $g(x) = |x - 2|$. Étudier la dérivabilité de g en 2 et interpréter graphiquement.

2. Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J tels que, pour tout x de I, $u(x) \in J$. Alors **$v\circ u$ est dérivable sur I** et, pour tout x de I :

$$\mathbf{(v\circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))}$$

Conséquences (formules à connaître)

- $(u^n)' = n\cdot u'\cdot u^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- $(\sqrt{u})' = u'/(2\sqrt{u})$ ($u > 0$)
- $(\ln u)' = u'/u$ ($u > 0$)
- $(e^u)' = u'\cdot e^u$
- $(1/u^n)' = -n\cdot u'/u^{n+1}$ ($u \neq 0$)

Méthode

1) Identifier la fonction « intérieure » u et la fonction « extérieure » v. 2) Vérifier le domaine (par exemple u(x) > 0 pour ln u ou √u). 3) Appliquer la formule : on dérive l'extérieur, puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur.

Exemples

- $f(x) = (x^2 + 1)^3$: $u(x) = x^2 + 1$, donc $f'(x) = 3\cdot(2x)\cdot(x^2 + 1)^2 = \mathbf{6x(x^2 + 1)^2}$.
- $g(x) = \sqrt{(2x - 1)}$ sur $]1/2 ; +\infty[$: $g'(x) = 2/(2\sqrt{(2x - 1)}) = \mathbf{1/\sqrt{(2x - 1)}}$.
- $h(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$: $h'(x) = \mathbf{2x/(x^2 + 1)}$.
- $k(x) = e^{x^2-3x}$: $k'(x) = \mathbf{(2x - 3)\cdot e^{x^2-3x}}$.

EXERCICE D'APPLICATION 2

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (on précisera l'ensemble de dérivabilité) : $f(x) = (3x - 2)^4$; $g(x) = \sqrt{(x^2 + 1)}$; $h(x) = \ln(x^2 + x + 1)$; $k(x) = e^{-x^2+2x}$

3. Dérivées successives

Définition

Si f' est dérivable sur I, sa dérivée est notée $\mathbf{f''}$ (dérivée seconde de f). Plus généralement, on définit la dérivée d'ordre n par $\mathbf{f^{(n+1)} = (f^{(n)})'}$, avec $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$ …

Exemples

- $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$: $f'(x) = 4x^3 - 6x + 1$; $f''(x) = 12x^2 - 6$; $f'''(x) = 24x$; $f^{(4)}(x) = 24$; $f^{(5)}(x) = 0$.
- $f(x) = e^{2x}$: $f' = 2e^{2x}$, $f'' = 4e^{2x}$; on démontre par récurrence que $\mathbf{f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}}$.
- $f(x) = \ln x$: $f' = 1/x$; $f'' = -1/x^2$; $f''' = 2/x^3$.

Remarque

Un polynôme de degré p a une dérivée d'ordre p constante et toutes ses dérivées d'ordre supérieur à p sont nulles. Pour trouver une expression de $f^{(n)}$, on calcule les premières dérivées, on *conjecture* la formule, puis on la **démontre par récurrence**.

EXERCICE D'APPLICATION 3

- 1) Soit $f(x) = x\cdot e^x$. Calculer f', f'' et f'''. Conjecturer $f^{(n)}(x)$ puis démontrer cette conjecture par récurrence.
- 2) Soit $g(x) = 1/(x + 1)$ sur $]-1 ; +\infty[$. Calculer g', g'' et g'''.

4. Dérivée seconde et convexité

Définitions

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est **convexe** sur I si sa courbe est située **au-dessus** de chacune de ses tangentes (de façon équivalente : f' est croissante sur I).
- f est **concave** sur I si sa courbe est située **au-dessous** de chacune de ses tangentes (f' est décroissante sur I).
- Un **point d'inflexion** est un point de la courbe où celle-ci **traverse sa tangente** : la convexité change de sens.

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I ⇔ **$f''(x) \geq 0$** pour tout x de I.
- f est concave sur I ⇔ **$f''(x) \leq 0$** pour tout x de I.
- Si f'' **s'annule en changeant de signe** en a, alors le point A(a ; f(a)) est un **point d'inflexion** de C_f.

Exemple

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. f'' est négative sur $]-\infty ; 1]$ et positive sur $[1 ; +\infty[$. Donc **f est concave sur $]-\infty ; 1]$ et convexe sur $[1 ; +\infty[$**. f'' s'annule en 1 en changeant de signe, et $f(1) = 0$: **I(1 ; 0) est un point d'inflexion**.

EXERCICE D'APPLICATION 4

- 1) Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Étudier la convexité de f, déterminer son point d'inflexion I et l'équation de la tangente en I.
- 2) Montrer que la fonction ln est concave sur $]0 ; +\infty[$.

II. ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE

Propriétés

Soit f une fonction définie sur D et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- **Axe de symétrie.** La droite d'équation **x = a** est axe de symétrie de C_f si et seulement si : pour tout x de D, **$2a - x \in D$** et **$f(2a - x) = f(x)$**.
- **Centre de symétrie.** Le point **Ω(a ; b)** est centre de symétrie de C_f si et seulement si : pour tout x de D, **$2a - x \in D$** et **$f(2a - x) + f(x) = 2b$**.
- **Cas particuliers.** f paire ($f(-x) = f(x)$) : l'axe des ordonnées est axe de symétrie. f impaire ($f(-x) = -f(x)$) : l'origine est centre de symétrie.

Méthode

Pour *démontrer* une symétrie : 1) vérifier que D est symétrique par rapport à a ; 2) calculer $f(2a - x)$; 3) comparer à f(x) (axe) ou calculer $f(x) + f(2a - x)$ (centre) et l'égaler à 2b.

Exemples

- $f(x) = x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout x, $f(4 - x) = (4 - x)^2 - 4(4 - x) + 1 = x^2 - 4x + 1 = f(x)$. Donc **la droite x = 2 est axe de symétrie** de C_f.
- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$. $f(2 - x) = (2 - x)^3 - 3(2 - x)^2 + 2 = -x^3 + 3x^2 - 2$. Donc $f(x) + f(2 - x) = 0 = 2b$, d'où $b = 0$: **Ω(1 ; 0) est centre de symétrie** (c'est le point d'inflexion trouvé plus haut).

EXERCICE D'APPLICATION 5

- 1) Montrer que la droite d'équation x = 3 est axe de symétrie de la courbe de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.
- 2) Soit $g(x) = (2x + 1)/(x - 1)$. Montrer que le point Ω(1 ; 2) est centre de symétrie de C_g.

III. ÉTUDE DE FONCTIONS

Plan d'étude d'une fonction

- 1) **Ensemble de définition** D_f ; éventuellement parité, périodicité, éléments de symétrie.
- 2) **Limites** aux bornes de D_f ; recherche des **asymptotes** et **branches infinies**.
- 3) **Dérivée** f' : calcul, signe, **sens de variation**, extremums ; **tableau de variation**.
- 4) **Dérivée seconde** f'' (si nécessaire) : convexité, points d'inflexion.
- 5) **Points particuliers** : intersections avec les axes, tangentes remarquables.
- 6) **Construction** de la courbe C_f (asymptotes d'abord, puis points et tangentes).

Asymptotes et branches infinies

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$: la droite **x = a** est asymptote verticale.
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$: la droite **y = b** est asymptote horizontale.
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ $(a \neq 0)$: la droite **y = ax + b** est asymptote oblique. La position de C_f par rapport à cette droite s'étudie par le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- Si $\lim f(x) = \pm\infty$ et $\lim f(x)/x = \pm\infty$: **branche parabolique de direction (y'y)**. Si $\lim f(x)/x = 0$: branche parabolique de direction (x'x). Si $\lim f(x)/x = a$ $(a \neq 0$, fini) et $\lim [f(x) - ax] = \pm\infty$: branche parabolique de direction la droite $y = ax$.

Exemple d'étude complète

Étudions la fonction **$f(x) = (x^2 - x + 1)/(x - 1)$** et construisons sa courbe C_f.

1) Ensemble de définition. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$. On remarque que $x^2 - x + 1 = x(x - 1) + 1$, donc **$f(x) = x + 1/(x - 1)$**.

2) Limites et asymptotes. En $\pm\infty$: $\lim f = \pm\infty$. En 1 : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, donc **x = 1 est asymptote verticale**. Comme $f(x) - x = 1/(x - 1) \to 0$ en $\pm\infty$, **la droite y = x est asymptote oblique**. Position : $f(x) - x$ a le signe de $x - 1$; C_f est au-dessus de la droite pour $x > 1$ et au-dessous pour $x < 1$.

3) Dérivée et variations. $f'(x) = 1 - 1/(x - 1)^2 = ((x - 1)^2 - 1)/(x - 1)^2 = $ **$x(x - 2)/(x - 1)^2$**. Le dénominateur est positif : f' a le signe de $x(x - 2)$. Donc f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[2 ; +\infty[$, décroissante sur $[0 ; 1[$ et sur $]1 ; 2]$. $f(0) = -1$ (maximum local) et $f(2) = 3$ (minimum local).

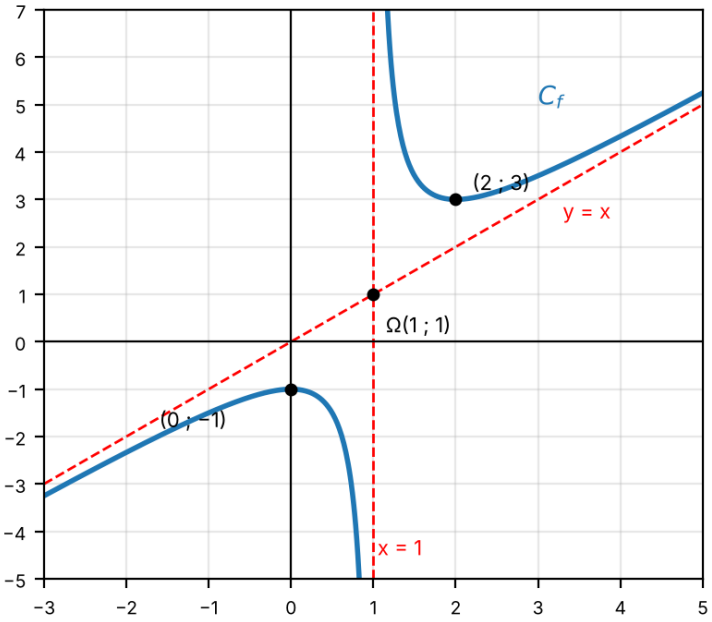
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

4) Convexité et symétrie. $f''(x) = 2/(x - 1)^3$. $f'' > 0$ sur $]1 ; +\infty[$ (f convexe) et $f'' < 0$ sur $]-\infty ; 1[$ (f concave) ; f'' ne s'annule pas : pas de point d'inflexion. De plus, pour tout $x \neq 1$, $f(2 - x) = 2 - x - 1/(x - 1)$, donc $f(x) + f(2 - x) = 2$: **Ω(1 ; 1) est centre de symétrie** (intersection des deux asymptotes).

5) Points particuliers. Intersection avec (y'y) : $f(0) = -1$, point $(0 ; -1)$. Intersection avec (x'x) : $x^2 - x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, donc **aucune** intersection. Tangentes horizontales

en (0 ; −1) et (2 ; 3).

6) Courbe.



EXERCICE D'APPLICATION 6

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

- 1) Déterminer D_f et calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Étudier la branche infinie.
- 2) Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
- 3) Étudier la convexité de f ; montrer que C_f admet un point d'inflexion I et que I est centre de symétrie.
- 4) Vérifier que $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$; en déduire les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
- 5) Tracer C_f.

IV. CORRIGÉS DES EXERCICES D'APPLICATION

Application 1

a) f est une fonction rationnelle : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, et f est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

b) $f'(x) = [(4x - 1)(x - 1) - (2x^2 - x + 1)]/(x - 1)^2 = (4x^2 - 5x + 1 - 2x^2 + x - 1)/(x - 1)^2 = (2x^2 - 4x)/(x - 1)^2 =$ **$2x(x - 2)/(x - 1)^2$**.

c) $f(3) = (18 - 3 + 1)/2 = 8$ et $f'(3) = 2 \cdot 3 \cdot 1/4 = 3/2$. Tangente : $y = (3/2)(x - 3) + 8$, soit **$y = (3/2)x + 7/2$**.

d) $g(x) = |x - 2|$: voir l'exemple du cours. $g'_d(2) = 1 \neq g'_g(2) = -1$: g **n'est pas dérivable en 2** ; C_g admet au point A(2 ; 0) un point anguleux.

Application 2

• $f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot (3x - 2)^3 =$ **$12(3x - 2)^3$**, sur $\mathbb{R}$.

• $x^2 + 1 > 0$ pour tout x, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2x/(2\sqrt{(x^2 + 1)}) =$ **$x/\sqrt{(x^2 + 1)}$**.

• $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc $x^2 + x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) =$ **$(2x + 1)/(x^2 + x + 1)$**.

• $k'(x) = (-2x + 2) \cdot e^{-x^2+2x} =$ **$-2(x - 1)e^{-x^2+2x}$**, sur $\mathbb{R}$.

Application 3

1) $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x + 1)e^x$; $f''(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$; $f'''(x) = (x + 3)e^x$. **Conjecture :** $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$. *Initialisation :* pour n = 1, $f'(x) = (x + 1)e^x$ ✓. *Hérédité :* si $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$, alors $f^{(n+1)}(x) = e^x + (x + n)e^x = (x + n + 1)e^x$ ✓. Donc, pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

2) $g'(x) = -1/(x + 1)^2$; $g''(x) = 2/(x + 1)^3$; $g'''(x) = -6/(x + 1)^4$.

Application 4

1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$. $f'' < 0$ sur $]-\infty ; 2]$: f concave ; $f'' > 0$ sur $[2 ; +\infty[$: f convexe. f'' change de signe en 2 et $f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$: **I(2 ; 3)** est point d'inflexion. $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$, donc la tangente en I est $y = -3(x - 2) + 3$, soit **$y = -3x + 9$**.

2) $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$ pour tout $x > 0$: **ln est concave** sur $]0 ; +\infty[$.

Application 5

1) $D = \mathbb{R}$ et pour tout x, $6 - x \in \mathbb{R}$. $f(6 - x) = (6 - x)^2 - 6(6 - x) + 5 = 36 - 12x + x^2 - 36 + 6x + 5 = x^2 - 6x + 5 = f(x)$. Donc **x = 3 est axe de symétrie**.

2) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si $x \neq 1$ alors $2 - x \neq 1$. $g(2 - x) = (2(2 - x) + 1)/(2 - x - 1) = (5 - 2x)/(1 - x) = (2x - 5)/(x - 1)$. Donc $g(x) + g(2 - x) = (2x + 1 + 2x - 5)/(x - 1) = (4x - 4)/(x - 1) = 4 = 2 \times 2$. **Ω(1 ; 2) est centre de symétrie**.

Application 6

1) $D_f = \mathbb{R}$. $f(x) = x^3(1 - 3/x + 4/x^3)$ donc $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. De plus $f(x)/x = x^2 - 3x + 4/x \to +\infty$: **branche parabolique de direction (y'y)**.

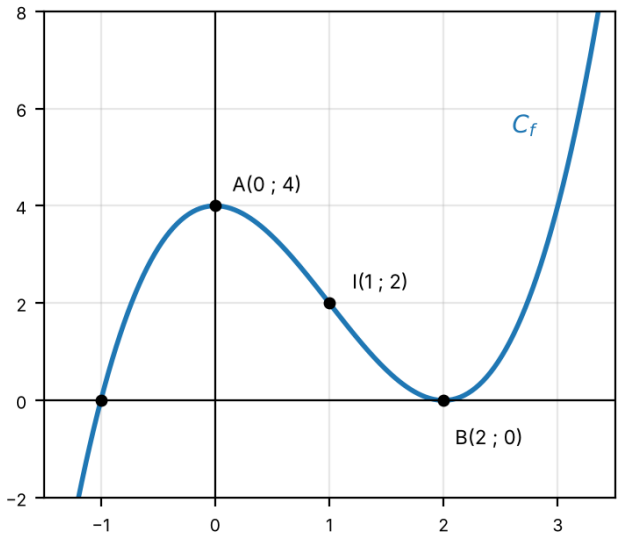
2) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. $f' > 0$ sur $]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$ et $f' < 0$ sur $]0 ; 2[$. $f(0) = 4$ et $f(2) = 0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

3) $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$: f est concave sur $]-\infty\,;\,1]$, convexe sur $[1\,;\,+\infty[$. f'' change de signe en 1 : **I(1 ; f(1)) = I(1 ; 2)** est point d'inflexion. $f(2-x) = (2-x)^3 - 3(2-x)^2 + 4 = -x^3 + 3x^2$; en ajoutant à $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, on obtient $4 = 2\times 2$: **I(1 ; 2) est centre de symétrie**.

4) $(x+1)(x-2)^2 = (x+1)(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 3x^2 + 4$ ✓. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$: C_f coupe $(x'x)$ en **(−1 ; 0)** et **(2 ; 0)** (tangente horizontale en ce dernier point).

5) Courbe :



V. FICHE D'EXERCICES

EXERCICE 1

Dérivation de base. Calculer la dérivée de chaque fonction et préciser l'ensemble de dérivabilité :

$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 1$; $g(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$; $h(x) = (2x + 1)/(x^2 + 1)$; $k(x) = \sqrt{x} - 1/x$

EXERCICE 2

Dérivabilité en un point.

- 1) Soit $f(x) = x|x|$. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
- 2) Soit $g(x) = \sqrt{x}$. Étudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter graphiquement.
- 3) Soit $h(x) = |x + 2|$. h est-elle dérivable en -2 ? Justifier.

EXERCICE 3

Composée. Calculer la dérivée de chaque fonction sur son ensemble de dérivabilité :

$f(x) = (2x^2 - x + 3)^5$; $g(x) = \sqrt{(x^2 - 4x + 5)}$; $h(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$; $k(x) = e^{3x^2 - 2x}$; $l(x) = \ln(e^x + 1)$; $m(x) = 1/(x^2 + 1)^3$

EXERCICE 4

Dérivées successives.

- 1) $f(x) = e^{-3x}$: calculer f', f'' et démontrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$.
- 2) $g(x) = x^2 e^x$: calculer g', g'' et g'''.
- 3) $h(x) = 1/(2x - 1)$: calculer h', h'', h''' puis conjecturer $h^{(n)}(x)$.

EXERCICE 5

Convexité. Soit $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$.

- 1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- 2) Étudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion de C_f.
- 3) Écrire les équations des tangentes en ces points.

EXERCICE 6

Symétries.

- 1) Montrer que $x = 1$ est axe de symétrie de la courbe de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
- 2) Montrer que le point $\Omega(2 ; 1)$ est centre de symétrie de la courbe de $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.
- 3) Montrer que le point $\Omega(-2 ; 3)$ est centre de symétrie de la courbe de $h(x) = (3x - 1)/(x + 2)$.

EXERCICE 7

Étude d'une fonction logarithme. Soit $f(x) = x^2 - 2 \ln x$, définie sur $]0 ; +\infty[$.

- 1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Étudier la branche infinie en $+\infty$.
- 2) Calculer $f'(x)$; étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
- 3) Calculer $f''(x)$ et en déduire la convexité de f.
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions.
- 5) Tracer la courbe C_f.

EXERCICE 8

Étude d'une fonction exponentielle. Soit $f(x) = (x + 1)e^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on admet que $\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x} = 0$). Interpréter graphiquement.
- 2) Montrer que $f'(x) = -x\cdot e^{-x}$. Dresser le tableau de variation de f.
- 3) Montrer que $f''(x) = (x - 1)e^{-x}$. Étudier la convexité de f et déterminer le point d'inflexion.
- 4) Donner l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0, puis tracer C_f.

EXERCICE 9

Recherche de paramètres. Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, où a et b sont deux réels. On sait que C_f admet un point d'inflexion d'abscisse 1 et que la tangente en ce point a pour coefficient directeur -3.

- 1) Déterminer a et b.
- 2) Pour la suite, on prend $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f.

EXERCICE 10

Problème de synthèse (situation d'apprentissage). Le bénéfice d'une coopérative, en millions de FCFA, pour une production de x tonnes ($0 \le x \le 6$), est donné par $B(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$.

- 1) Calculer $B'(x)$ et dresser le tableau de variation de B sur $[0 ; 6]$.
- 2) Pour quelle(s) quantité(s) le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce maximum ? Interpréter B(0) et B(6).
- 3) Étudier la convexité de B et déterminer le point d'inflexion. Que signifie-t-il pour la coopérative ?
- 4) Tracer la courbe de B.

Bon travail !

FICHE DE COURS

LEÇON 3 : SÉRIES STATISTIQUES À DEUX VARIABLES

Discipline : Mathématiques	**Niveau** : Terminale B	**Durée** : 10 h (+ 2 h de régulation)

Déroulement du cours

SÉRIES STATISTIQUES À DEUX VARIABLES	– Représentation graphique – Ajustement affine par la méthode des moindres carrés et prévisions	**10 h**
	Séance de régulation	**2 h**

Compétence visée : traiter une situation relative aux séries statistiques à deux variables.

Habiletés : à la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- représenter un nuage de points et placer le point moyen ;
- calculer la covariance, les variances et le coefficient de corrélation linéaire ;
- déterminer l'équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrés ;
- apprécier la qualité d'un ajustement affine ;
- faire des prévisions (interpolation, extrapolation) à l'aide d'une droite d'ajustement.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un gérant de boutique à Bouaké remarque que ses ventes semblent augmenter quand ses dépenses de publicité augmentent. Il note, pendant 5 mois, ses dépenses de publicité x et son chiffre d'affaires y (en millions de F CFA). Il aimerait savoir : **(1)** comment représenter ces données ; **(2)** s'il existe une relation affine entre x et y ; **(3)** quel chiffre d'affaires espérer pour une dépense de publicité donnée. Les élèves de Tle B du Collège Le Provincial se proposent de l'aider.

Plan de la leçon (répartition horaire indicative)

Partie A	Représentation graphique : nuage de points et point moyen	3 h
Partie B	Ajustement affine par la méthode des moindres carrés : covariance, droite de régression, coefficient de corrélation	5 h
Partie C	Prévisions : interpolation et extrapolation	2 h
Fin	À retenir – Fiche d'exercices – Éléments de réponse	

PRÉREQUIS – Rappels et vérification

- **Moyenne** d'une série $x_1, \ldots, x_n$: $\bar{x} = (1/n)\,\Sigma x_i$.
- **Variance** : $V(x) = (1/n)\,\Sigma x_i^2 - \bar{x}^2$; **écart-type** : $\sigma_x = \sqrt{V(x)}$.
- **Droite** d'équation $y = ax + b$: a est le coefficient directeur, b l'ordonnée à l'origine ; $a = (y_B - y_A) / (x_B - x_A)$. Pour tracer une droite, il suffit de deux points.

TEST DES PRÉREQUIS

Test. (1) Calculer la moyenne et la variance de la série 2 ; 4 ; 6 ; 8. (2) Donner l'équation de la droite passant par A(0 ; 1) et B(2 ; 5).

Réponses : (1) moyenne = 5 ; variance = (4 + 16 + 36 + 64)/4 − 25 = 30 − 25 = 5. (2) $a = (5 - 1)/(2 - 0) = 2$ et $b = 1$, donc $y = 2x + 1$.

PARTIE A : REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

3 h

1. Série statistique à deux variables

DÉFINITION

Une **série statistique à deux variables** est l'ensemble des couples $(x_i ; y_i)$, $1 \leq i \leq n$, obtenus en étudiant **simultanément** deux caractères quantitatifs X et Y sur les n individus d'une même population. On la présente dans un tableau à deux lignes (ou deux colonnes).

EXEMPLE

Dépenses de publicité x_i et chiffre d'affaires y_i (en millions de F CFA) d'une boutique de Bouaké :

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai
Publicité x_i	2	4	6	8	10
Chiffre d'affaires y_i	5	7	8	11	14

C'est une série statistique double de $n = 5$ couples : (2 ; 5), (4 ; 7), (6 ; 8), (8 ; 11) et (10 ; 14).

2. Nuage de points

DÉFINITION

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). L'ensemble des points $M_i(x_i ; y_i)$ associés aux couples de la série est appelé **nuage de points** de la série statistique double.

Méthode pour construire un nuage de points :

- **Choisir les échelles** sur chaque axe (ex. : 1 cm pour 1 million de F CFA sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 2 millions sur l'axe des ordonnées) ;
- **Graduer** les axes en tenant compte des valeurs minimale et maximale de x et de y ;
- **Placer** chaque point $M_i(x_i ; y_i)$ et le repérer par une croix ou un point.

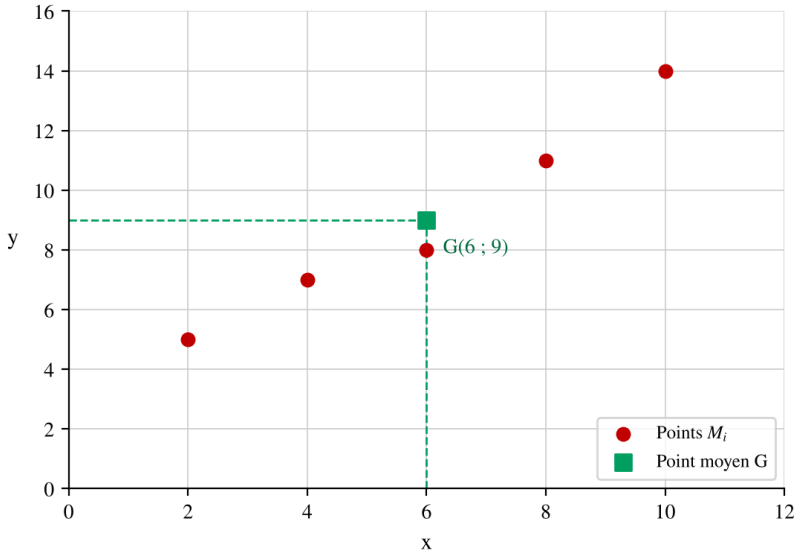


Figure 1 : nuage de points de l'exemple et point moyen G(6 ; 9)

Interprétation. Les points du nuage de la figure 1 sont presque alignés : ils se répartissent le long d'une « bande » allongée et croissante. Quand la forme du nuage est allongée, on peut envisager de résumer la liaison entre x et y par une droite : c'est l'**ajustement affine** (partie B).

3. Point moyen

DÉFINITION

On appelle **point moyen** du nuage le point G de coordonnées $(\bar{x}\ ;\ \bar{y})$, où $\bar{x} = (1/n)\ \Sigma x_i$ et $\bar{y} = (1/n)\ \Sigma y_i$.

EXEMPLE

$\bar{x} = (2 + 4 + 6 + 8 + 10) / 5 = 30 / 5 =$ **6** ; $\bar{y} = (5 + 7 + 8 + 11 + 14) / 5 = 45 / 5 =$ **9**. Donc **G(6 ; 9)** (voir figure 1).

REMARQUE

Le point moyen G n'appartient pas nécessairement au nuage. Il en est en quelque sorte le « centre de gravité ».

EXERCICE D'APPLICATION A

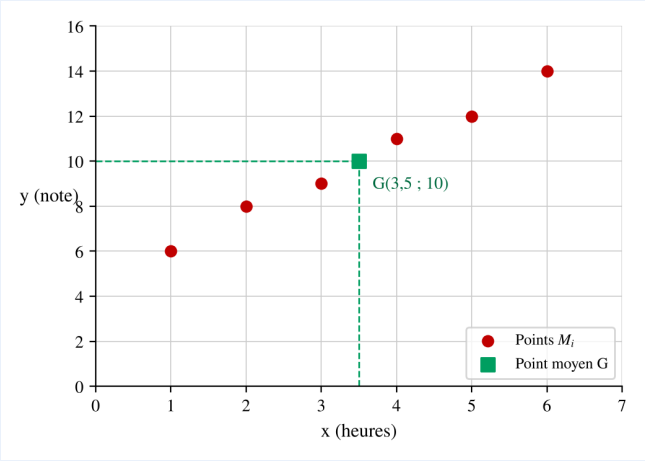
Un élève de Tle B note le nombre d'heures de révision hebdomadaire x et la note y (sur 20) obtenue au devoir de Maths :

Heures x_i	1	2	3	4	5	6
Note y_i	6	8	9	11	12	14

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal (1 cm pour 1 heure en abscisse ; 1 cm pour 2 points en ordonnée).
2) Calculer les coordonnées du point moyen G et le placer.
3) Que peut-on dire de la forme du nuage ?

Correction.

1) Voir la figure ci-contre. 2) $\bar{x}$ = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 21/6 = **3,5** ; $\bar{y}$ = (6 + 8 + 9 + 11 + 12 + 14)/6 = 60/6 = **10**. Donc **G(3,5 ; 10)**. 3) Le nuage est allongé et croissant : plus le temps de révision augmente, plus la note augmente ; un ajustement affine est envisageable.



PARTIE B : AJUSTEMENT AFFINE PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

5 h

1. Principe de l'ajustement affine

Ajuster un nuage de points par une droite, c'est chercher une droite D passant « au plus près » de tous les points afin de résumer la liaison entre x et y par une relation $y = ax + b$. Il existe plusieurs méthodes : la droite tracée « à main levée », la droite de Mayer et la **méthode des moindres carrés**, étudiée dans cette leçon.

Soit D : $y = ax + b$ une droite. À chaque point $M_i(x_i ; y_i)$ on associe le point $P_i(x_i ; ax_i + b)$ de D de même abscisse. L'**écart** (ou résidu) est $d_i = y_i - (ax_i + b)$ (longueur du segment vertical $[M_iP_i]$).

DÉFINITION

La **droite des moindres carrés** (ou **droite de régression de y en x**) est la droite D pour laquelle la somme des carrés des écarts est **minimale** :

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2 \quad \text{minimale}$$

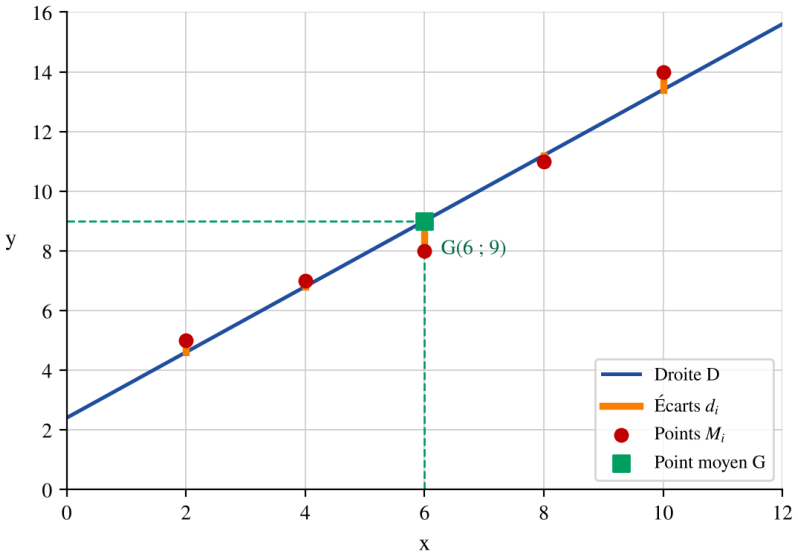


Figure 2 : la droite de régression D (en bleu) et les écarts verticaux d_i (en orange)

2. Covariance et variances

DÉFINITION

Soit une série statistique double de n couples $(x_i ; y_i)$.

• **Variances** :

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \qquad V(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2$$

• **Covariance** de x et y :

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}$$

• **Écarts-types** : $\sigma_x = \sqrt{V(x)}$ et $\sigma_y = \sqrt{V(y)}$.

Calcul pratique. On dresse un tableau des calculs (colonnes x_i, y_i, x_iy_i, x_i^2, y_i^2) avec la ligne des totaux.

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
1	2	5	10	4	25
2	4	7	28	16	49
3	6	8	48	36	64
4	8	11	88	64	121
5	10	14	140	100	196
Total	**30**	**45**	**314**	**220**	**455**

EXEMPLE

$\bar{x} = 6$ et $\bar{y} = 9$ (déjà calculés). Avec $n = 5$:

- $V(x) = 220/5 - 6^2 = 44 - 36 = \mathbf{8}$; $V(y) = 455/5 - 9^2 = 91 - 81 = \mathbf{10}$.
- $\text{cov}(x, y) = 314/5 - 6 \times 9 = 62{,}8 - 54 = \mathbf{8{,}8}$.
- $\sigma_x = \sqrt{8} \approx 2{,}83$; $\sigma_y = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

3. Droite de régression de *y* en *x*

PROPRIÉTÉ

Si $V(x) \neq 0$, la droite de régression de y en x (droite des moindres carrés) a pour équation D : $y = ax + b$ avec :

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(x)} \qquad \text{et} \qquad b = \bar{y} - a\,\bar{x}$$

En particulier, **la droite D passe par le point moyen G**.

EXEMPLE

$a = 8{,}8 / 8 = \mathbf{1{,}1}$; $b = 9 - 1{,}1 \times 6 = 9 - 6{,}6 = \mathbf{2{,}4}$.

Donc D : $\boldsymbol{y = 1{,}1x + 2{,}4}$. *Tracé* : on prend deux points, par exemple A(0 ; 2,4) et B(10 ; 13,4), ou G(6 ; 9) et A. La droite est tracée sur la figure 2.

REMARQUE

Par échange des rôles, la **droite de régression de *x* en *y*** a pour équation D' : $x = a'y + b'$ avec $a' = \text{cov}(x, y) / V(y)$ et $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$. Ici : $a' = 8{,}8/10 = 0{,}88$ et $b' = 6 - 0{,}88 \times 9 = -1{,}92$. D et D' se coupent en G.

EXERCICE D'APPLICATION B1

Pour étudier l'effet d'un engrais sur une culture de maïs, on relève la quantité d'engrais x (en dizaines de kg par hectare) et le rendement y (en dizaines de quintaux par hectare) :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	4	5	7	9

1) Calculer le point moyen G.

2) Calculer $V(x)$, $V(y)$ et $\text{cov}(x, y)$ (on dressera un tableau).

3) Déterminer l'équation de la droite de régression D de y en x et la tracer.

Correction.

1) $\bar{x}$ = 15/5 = **3** ; $\bar{y}$ = 27/5 = **5,4** ; G(3 ; 5,4).

2) Tableau des calculs :

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
1	1	2	2	1	4
2	2	4	8	4	16
3	3	5	15	9	25
4	4	7	28	16	49
5	5	9	45	25	81
Total	**15**	**27**	**98**	**55**	**175**

$V(x) = 55/5 - 3^2 = 11 - 9 =$ **2** ; $V(y) = 175/5 - 5{,}4^2 = 35 - 29{,}16 =$ **5,84** ; $\text{cov}(x, y) = 98/5 - 3 \times 5{,}4 = 19{,}6 - 16{,}2 =$ **3,4**.

3) $a = 3{,}4/2 =$ **1,7** ; $b = 5{,}4 - 1{,}7 \times 3 =$ **0,3**. D : $y =$ **1,7**$x +$ **0,3**. Pour la tracer : A(0 ; 0,3) et G(3 ; 5,4) (ou B(5 ; 8,8)).

4. Coefficient de corrélation linéaire

La droite de régression existe toujours, mais elle n'est **utile** que si les points sont réellement proches d'une droite. Le coefficient de corrélation linéaire mesure cette qualité d'ajustement.

DÉFINITION

Si $\sigma_x \neq 0$ et $\sigma_y \neq 0$, le **coefficient de corrélation linéaire** de la série est le nombre :

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \, \sigma_y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)\, V(y)}}$$

PROPRIÉTÉ

- $-1 \leq r \leq 1$ (autrement dit $|r| \leq 1$).
- r a le même signe que la covariance et que le coefficient directeur a de D.
- Si $|r|$ est **proche de 1**, les points sont presque alignés : l'ajustement affine est **justifié** (en pratique, on retient $|r| \geq 0{,}87$).
- Si $|r|$ est **proche de 0**, il n'y a pas de liaison affine entre x et y : l'ajustement affine n'est pas pertinent.
- $r = \pm 1$ si, et seulement si, tous les points sont alignés. De plus, $r^2 = a \times a'$.

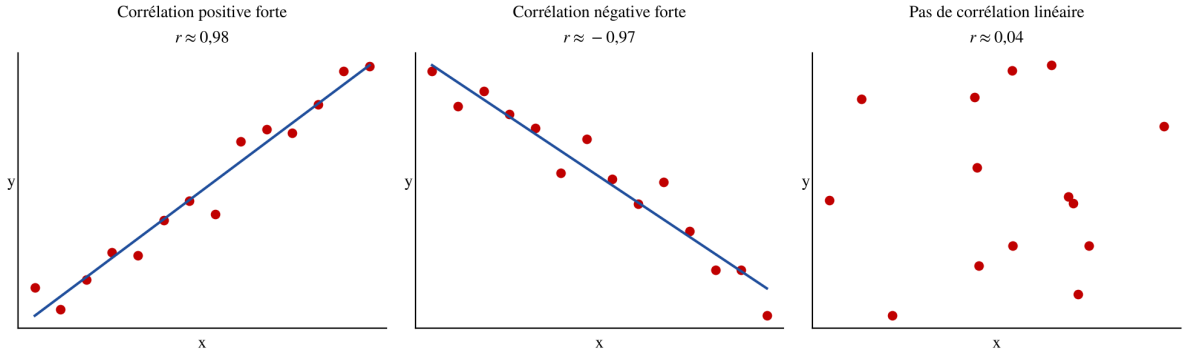


Figure 3 : trois nuages de points et la valeur de r correspondante

EXEMPLE

Pour la série de la boutique : $r = 8{,}8 / \sqrt{(8 \times 10)} = 8{,}8 / \sqrt{80} \approx$ **0,984**. Comme r est positif et très proche de 1 ($|r| \geq 0{,}87$), il existe une **forte corrélation linéaire positive** : l'ajustement affine est justifié.

EXERCICE D'APPLICATION B2

Le tableau donne le prix x d'un article (en centaines de F CFA) et le nombre y d'articles vendus (en dizaines) :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	9	7	6	3	2

1) Calculer cov(x, y), $V(x)$ et $V(y)$.

2) Calculer le coefficient de corrélation r (arrondi à 10^{-3}).

3) Un ajustement affine est-il justifié ? Que traduit le signe de r ?

Correction.

1) $\bar{x} = 3$; $\bar{y} = 5{,}4$; $\Sigma x_i y_i = 63$; $\Sigma x_i^2 = 55$; $\Sigma y_i^2 = 179$. Donc cov(x, y) = 63/5 − 3 × 5,4 = **−3,6** ; $V(x)$ = 11 − 9 = **2** ; $V(y)$ = 35,8 − 29,16 = **6,64**.

2) $r = -3{,}6 / \sqrt{(2 \times 6{,}64)} = -3{,}6 / \sqrt{13{,}28} \approx$ **−0,988**.

3) $|r| \approx 0{,}988 \geq 0{,}87$: l'ajustement affine est justifié. r est négatif : y diminue quand x augmente (plus l'article est cher, moins il se vend) ; la corrélation est négative et forte.

PARTIE C : PRÉVISIONS — 2 h

1. Principe

Lorsque l'ajustement affine est justifié ($|r|$ proche de 1), la droite de régression D : $y = ax + b$ sert de **modèle** pour estimer des valeurs de y que l'on n'a pas observées, ou prévoir l'évolution du phénomène.

VOCABULAIRE

- **Interpolation** : estimer y pour une valeur de x **comprise** entre la plus petite et la plus grande valeur observées de x. L'estimation est en général fiable.
- **Extrapolation** : estimer y pour une valeur de x **en dehors** de l'intervalle observé. Plus on s'éloigne des données, moins la prévision est fiable.

2. Méthode

- **Vérifier** que $|r|$ est proche de 1 ($|r| \geq 0{,}87$) : sinon, on ne fait pas de prévision avec une droite ;
- **Estimer y pour $x = x_0$** : calculer $y_0 = ax_0 + b$;
- **Estimer x pour $y = y_0$** : résoudre $ax + b = y_0$, d'où $x = (y_0 - b) / a$;
- **Conclure** par une phrase avec l'unité et préciser s'il s'agit d'une interpolation ou d'une extrapolation.

REMARQUE

Rigoureusement, pour estimer x connaissant y, on utilise la droite de régression D' de x en y. Quand $|r|$ est très proche de 1, D et D' sont presque confondues et la résolution de l'équation de D en x donne un résultat voisin. Sauf indication contraire de l'énoncé, on résout l'équation de D.

EXEMPLE

Reprenons D : $y = 1{,}1x + 2{,}4$ ($|r| \approx 0{,}984$).

• **Quel chiffre d'affaires pour 7 millions de publicité ?** $y = 1{,}1 \times 7 + 2{,}4 =$ **10,1**. Interpolation ($2 \leq 7 \leq 10$) : environ 10,1 millions de F CFA.

• **Et pour 12 millions ?** $y = 1{,}1 \times 12 + 2{,}4 =$ **15,6**. Extrapolation ($12 > 10$) : environ 15,6 millions de F CFA.

• **Quelle publicité pour atteindre 20 millions de chiffre d'affaires ?** $1{,}1x + 2{,}4 = 20 \quad x = 17{,}6 / 1{,}1 =$ **16**. Il faudrait environ 16 millions de F CFA (extrapolation).

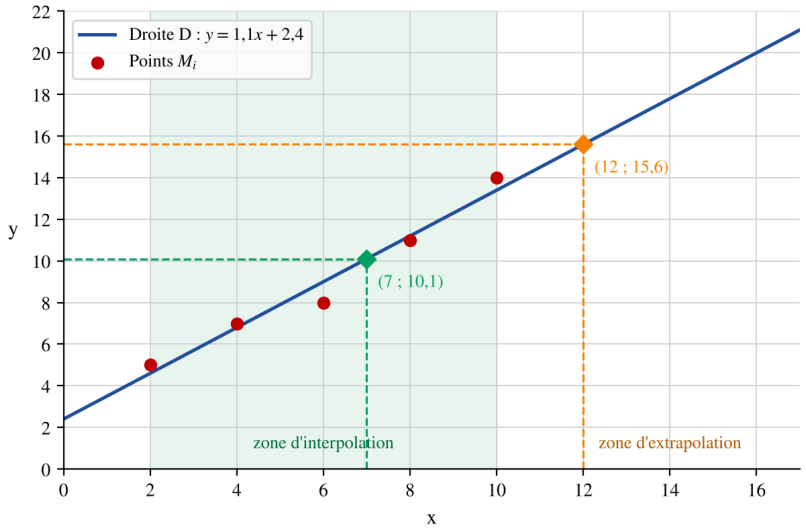


Figure 4 : lecture graphique de prévisions sur la droite D

EXERCICE D'APPLICATION C

La production d'anacarde (noix de cajou) d'une coopérative est donnée ci-dessous (données fictives), avec x = année − 2018 :

Année	2019	2020	2021	2022	2023
Rang x_i	1	2	3	4	5
Production y_i (centaines de tonnes)	12	15	17	21	24

1) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x et calculer r.

2) Estimer la production en 2026.

3) En quelle année la production dépassera-t-elle 4 000 tonnes (soit 40 centaines) ?

Correction.

1) $\bar{x} = 3$; $\bar{y} = 17{,}8$; $V(x) = 2$; $V(y) = 335 - 316{,}84 = 18{,}16$; $\text{cov}(x, y) = 297/5 - 3 \times 17{,}8 = 59{,}4 - 53{,}4 = 6$. Donc $a = 6/2 =$ **3** et $b = 17{,}8 - 3 \times 3 =$ **8,8**. D : $\boldsymbol{y = 3x + 8{,}8}$. Et $r = 6/\sqrt{(2 \times 18{,}16)} \approx$ **0,996** : ajustement très bon.

2) 2026 correspond à $x = 8$: $y = 3 \times 8 + 8{,}8 =$ **32,8** centaines de tonnes, soit environ **3280 tonnes** en 2026 (extrapolation).

3) $3x + 8{,}8 > 40 \quad x > 10{,}4$. Le plus petit entier convenable est $x = 11$, soit l'année 2018 + 11 = **2029**.

À RETENIR

- **Nuage de points** : ensemble des points $M_i(x_i ; y_i)$. **Point moyen** $G(\bar{x} ; \bar{y})$.
- **Covariance** : $\text{cov}(x, y) = (1/n)\,\Sigma x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}$.
- **Droite de régression de y en x** : $y = ax + b$ avec $a = \text{cov}(x, y) / V(x)$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$; elle passe par G.
- **Coefficient de corrélation** : $r = \text{cov}(x, y) / (\sigma_x \sigma_y)$, avec $-1 \le r \le 1$; ajustement justifié si $|r| \ge 0{,}87$.
- **Prévisions** : $y_0 = ax_0 + b$; interpolation (dans l'intervalle des données) ou extrapolation (en dehors, moins fiable).

FICHE D'EXERCICES

Leçon 3 : Séries statistiques à deux variables – Tle B. Sauf indication contraire, arrondir à 10^{-2} près. Les données sont fictives.

EXERCICE 1 : nuage de points et point moyen

Un commerçant d'Abidjan relève le prix x d'un article (en centaines de F CFA) et la quantité y demandée (en dizaines d'articles) :

x_i	2	3	4	5	6	7
y_i	80	72	66	60	52	42

1) Représenter le nuage de points (1 cm pour 1 unité en abscisse ; 1 cm pour 10 unités en ordonnée à partir de 40).

2) Calculer les coordonnées du point moyen G et le placer.

3) Que peut-on dire de la liaison entre x et y ?

EXERCICE 2 : calculs à partir de sommes

Pour une série double de $n = 10$ couples, on donne : $\Sigma x_i = 120$; $\Sigma y_i = 300$; $\Sigma x_i^2 = 1\,480$; $\Sigma y_i^2 = 9\,640$; $\Sigma x_i y_i = 3\,740$.

1) Calculer $\bar{x}$, $\bar{y}$, $V(x)$, $V(y)$ et $\text{cov}(x, y)$.

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.

3) Calculer r. Un ajustement affine est-il justifié ?

EXERCICE 3 : production de cacao

La production y de cacao (en milliers de tonnes) d'une région est donnée pour les années 2016 à 2022 ; on pose x = année − 2015.

Année	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	20	24	27	33	36	41	45

1) Représenter le nuage de points et placer G.

2) Déterminer la droite de régression D de y en x (coefficients arrondis à 10^{-2}) et la tracer.

3) Calculer r. Commenter.

4) Estimer la production en 2025, puis l'année où elle dépassera 70 milliers de tonnes.

EXERCICE 4 : publicité et ventes

Une entreprise note, pour huit mois, ses dépenses de publicité x (en dizaines de milliers de F CFA) et le nombre y de produits vendus (en centaines) :

x_i	10	15	20	25	30	35	40	45
y_i	42	50	57	66	72	79	90	95

1) Dresser le tableau des calculs et déterminer $\bar{x}$, $\bar{y}$, $V(x)$, $V(y)$, $\text{cov}(x, y)$.

2) Donner l'équation de la droite de régression de y en x (arrondir a et b à 10^{-3}) ; calculer r.

3) Quelles ventes peut-on prévoir pour une dépense de 50 ? Quelle dépense faut-il prévoir pour vendre 12 000 produits (soit 120 centaines) ?

EXERCICE 5 : vrai ou faux (justifier)

a) La covariance de deux variables est toujours positive.

b) Le point moyen G appartient toujours à la droite de régression de y en x.

c) Si $r = -0{,}96$, l'ajustement affine est justifié et y diminue quand x augmente.

d) Si $r = 1{,}2$, l'ajustement affine est excellent.

e) Le coefficient directeur de la droite de régression de y en x est $\text{cov}(x, y) / V(y)$.

f) Si $\text{cov}(x, y) = 0$, la droite de régression de y en x est horizontale.

EXERCICE 6 : taille et poids (deux droites de régression)

On mesure la taille x (en cm) et le poids y (en kg) de six élèves :

x_i	150	155	160	165	170	175
y_i	48	52	55	61	64	70

1) Calculer $\bar{x}$, $\bar{y}$, $V(x)$, $V(y)$ et $\text{cov}(x, y)$.

2) Déterminer la droite de régression D de y en x et la droite D' de x en y (coefficients arrondis à 10^{-2}).

3) Calculer r et vérifier que $r^2 = a \times a'$.

4) Estimer le poids d'un élève de 180 cm, puis la taille d'un élève de 58 kg (avec D').

EXERCICE 7 : problème de synthèse

Une société de téléphonie mobile suit l'évolution du nombre d'abonnés y (en milliers) à la fin de chacun des six premiers trimestres (rang x) suivant son lancement :

Trimestre x_i	1	2	3	4	5	6
Abonnés y_i	50	58	63	71	77	86

1) Représenter le nuage de points associé à cette série.

2) Déterminer le point moyen G, puis l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (a et b à 10^{-2} près).

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Peut-on faire confiance à l'ajustement ?

4) En utilisant cet ajustement, estimer le nombre d'abonnés au 10e trimestre.

5) À partir de quel trimestre la société dépassera-t-elle 150 000 abonnés ? Cette prévision est-elle aussi fiable que la précédente ?

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE (fiche d'exercices)

Exercice 1. G(4,5 ; 62). Nuage allongé et décroissant : quand le prix augmente, la quantité demandée diminue (liaison négative).

Exercice 2. $\bar{x}$ = 12 ; $\bar{y}$ = 30 ; $V(x) = 148 - 144 = 4$; $V(y) = 964 - 900 = 64$; cov = 374 − 360 = 14. D : $y = 3{,}5x - 12$. $r = 14/16 = 0{,}875 \geq 0{,}87$: ajustement justifié (limite).

Exercice 3. G(4 ; 32,29) ; $V(x) = 4$; cov = 16,86 ; D : $y = 4{,}21x + 15{,}43$; $r \approx 0{,}998$ (très forte corrélation positive). Avec D : en 2025 ($x = 10$) $y \approx 57{,}5$ milliers de tonnes ; $y > 70$ pour $x > 12{,}96$, soit $x = 13$: l'année 2028.

Exercice 4. $\bar{x}$ = 27,5 ; $\bar{y}$ = 68,875 ; $V(x) = 131{,}25$; $V(y) = 308{,}609$; cov = 200,938. D : $y = 1{,}531x + 26{,}774$; $r \approx 0{,}998$. Pour $x = 50$: $y \approx 103{,}3$ centaines (extrapolation). Pour $y = 120$: $x \approx 60{,}9$ (extrapolation).

Exercice 5. a) Faux (peut être négative). b) Vrai. c) Vrai. d) Faux ($|r| \leq 1$: valeur impossible, il y a une erreur de calcul). e) Faux : c'est cov(x, y) / $V(x)$. f) Vrai ($a = 0$, donc $y = \bar{y}$).

Exercice 6. $\bar{x}$ = 162,5 ; $\bar{y}$ = 58,33 ; $V(x) = 72{,}92$; $V(y) = 55{,}56$; cov = 63,33. D : $y = 0{,}87x - 82{,}81$; D' : $x = 1{,}14y + 96$; $r \approx 0{,}995$ et $a \times a' = 0{,}99 = r^2$ (0,99). Poids à 180 cm : $y \approx 73{,}8$ kg ; taille pour 58 kg : $x \approx 162{,}1$ cm.

Exercice 7. G(3,5 ; 67,5) ; $V(x) = 2{,}917$; cov = 20,417 ; D : $y = 7x + 43$; $r \approx 0{,}998$: ajustement très fiable. 10e trimestre : $y \approx 113$ milliers d'abonnés (extrapolation). $y > 150$ pour $x > 15{,}29$, donc à partir du trimestre n° 16 ; cette prévision est une extrapolation plus lointaine, donc moins fiable.

Bon courage à tous !

FICHE DE COURS

Leçon 4 : FONCTIONS LOGARITHMES

Classe	Terminale B (Tle B)	Discipline	Mathématiques
Durée	16 h (hors séance de régulation : 2 h)	Niveau	Système éducatif ivoirien

Compétence : traiter une situation faisant appel aux fonctions logarithmes (fonction ln).

Pré-requis : limites et continuité, dérivation, primitives, sens de variation, tableau de variation, équations et inéquations.

Plan de la leçon : I. Définition et propriétés — II. Étude de la fonction ln — III. Étude de fonctions comportant ln — Fiche d'exercices — Réponses.

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1. Définition

DÉFINITION

On appelle **fonction logarithme népérien**, notée **ln**, l'unique primitive sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1.

On note : $x \mapsto \ln x$ (lire « logarithme népérien de x » ou « ln de x »).

Remarque. La fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0 ; +\infty[$: elle y admet donc des primitives. La condition « s'annule en 1 » permet de choisir une seule d'entre elles. Le logarithme n'existe que pour les réels **strictement positifs** : $\mathbf{D_{ln} =]0 ; +\infty[}$.

2. Conséquences immédiates

PROPRIÉTÉ

- $\ln 1 = 0$.
- ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\mathbf{\ln'(x) = 1/x}$.
- Comme $\ln'(x) = 1/x > 0$, la fonction ln est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$.
- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\mathbf{\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b}$; $\mathbf{\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b}$ (idem avec $\leq$).
- $\mathbf{\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1}$; $\mathbf{\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1}$; $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Justification du signe : ln est strictement croissante et $\ln 1 = 0$; donc si $x > 1$, $\ln x > \ln 1 = 0$, et si $0 < x < 1$, $\ln x < 0$.

3. Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉS (relation fonctionnelle)

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et tout entier relatif n :

(1) $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

(2) $\ln(1/b) = -\ln b$

(3) $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

(4) $\ln(a^n) = n \ln a$

(5) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Démonstration de (1). Fixons $a > 0$ et posons $\varphi(x) = \ln(ax)$ pour $x > 0$. φ est dérivable et $\varphi'(x) = a \times 1/(ax) = 1/x = \ln'(x)$. Les fonctions φ et ln ont la même dérivée sur $]0 ; +\infty[$, donc elles diffèrent d'une constante : $\ln(ax) = \ln x + k$. En $x = 1$: $\ln a = \ln 1 + k = k$. Ainsi $\ln(ax) = \ln x + \ln a$. (CQFD)

Démonstration de (2) et (3). $\ln b + \ln(1/b) = \ln(b \times 1/b) = \ln 1 = 0$, d'où $\ln(1/b) = -\ln b$. Puis $\ln(a/b) = \ln(a \times 1/b) = \ln a + \ln(1/b) = \ln a - \ln b$. (CQFD)

Pour (4) et (5). (4) s'obtient par récurrence à partir de (1) (et de (2) si $n < 0$). Pour (5) : $\ln a = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = 2 \ln(\sqrt{a})$, donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$. (CQFD)

EXEMPLE

Exemple résolu. Simplifier $A = \ln 18 - \ln 6 + \ln 2$: $A = \ln(18 \times 2 / 6) = \ln 6 = \ln 2 + \ln 3$.

4. Équations et inéquations avec ln

MÉTHODE

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles tous les logarithmes sont définis (**conditions d'existence** : argument > 0).

2. Se ramener à la forme $\ln A = \ln B$ (ou $\ln A \leq \ln B$) en utilisant les propriétés algébriques.

3. Appliquer l'équivalence : $A = B$ (ou $A \leq B$, ln étant croissante).

4. Résoudre, puis **vérifier** que les solutions appartiennent au domaine trouvé en 1.

Exemple. Résoudre $\ln(x + 1) = \ln(2x - 3)$. Conditions : $x + 1 > 0$ et $2x - 3 > 0$, soit $x > 3/2$. L'équation équivaut à $x + 1 = 2x - 3$, soit $x = 4$. Comme $4 > 3/2$, $S = \{4\}$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) On pose $a = \ln 2$ et $b = \ln 3$. Exprimer en fonction de a et b : $A = \ln 12$; $B = \ln(2/27)$; $C = \ln(\sqrt{6})$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln 8$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\ln(2x - 4) \leq 0$.

Corrigé

1) $A = \ln(2^2 \times 3) = 2 \ln 2 + \ln 3 =$ **$2a + b$**. $B = \ln 2 - \ln 27 = \ln 2 - 3 \ln 3 =$ **$a - 3b$**. $C = \frac{1}{2} \ln 6 =$ **$\frac{1}{2}(a + b)$**.

2) Conditions : $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$, d'où $x > 1$. (E) $\Leftrightarrow \ln[(x - 1)(x + 1)] = \ln 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$. Or $-3 \notin]1 ; +\infty[$. Donc **$S = \{3\}$**.

3) Condition : $2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. (I) $\Leftrightarrow \ln(2x - 4) \leq \ln 1 \Leftrightarrow 2x - 4 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 5/2$. Avec $x > 2$: **$S =]2 ; 5/2]$**.

II. ÉTUDE DE LA FONCTION ln

1. Ensemble de définition, dérivée, variations

La fonction ln est définie, continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée $\ln'(x) = 1/x > 0$. Elle est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. Limites

PROPRIÉTÉ

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to 0,\ x>0} \ln x = -\infty$

Limites de référence (croissances comparées) :

- $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)/x = 0$ • $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)/x^n = 0$ (n entier ≥ 1)
- $\lim_{x\to 0,\ x>0} x \ln x = 0$ • $\lim_{x\to 0,\ x>0} x^n \ln x = 0$ (n entier ≥ 1)

Nombre dérivé en 1 : $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)/x = 1$ et $\lim_{x\to 1} (\ln x)/(x-1) = 1$.

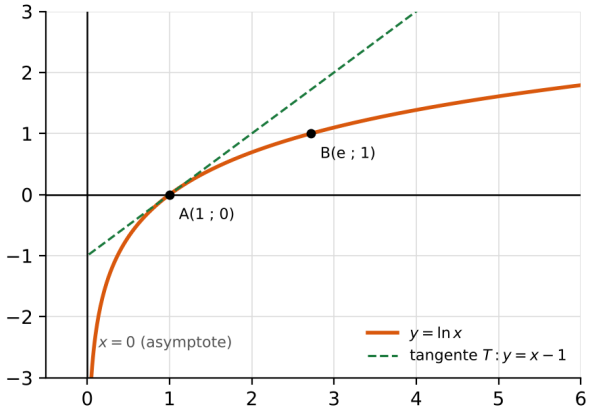
Idées de justification. $\ln(2^n) = n \ln 2 \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et ln est croissante, d'où $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$. En posant $X = 1/x$, $\ln x = -\ln X$ avec $X \to +\infty$ quand $x \to 0^+$: la limite est $-\infty$. Enfin $\ln(1+x)/x = (\ln(1+x) - \ln 1)/x$ est le taux d'accroissement de ln en 1 ; sa limite est $\ln'(1) = 1$.

Interprétation : la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est **asymptote verticale** à la courbe de ln. Comme $(\ln x)/x \to 0$ en $+\infty$, la courbe admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction (Ox)**.

3. Tableau de variation et courbe

x	0		$+\infty$
$\ln'(x) = 1/x$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Tangente en 1 : $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$, donc $T : y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$, soit $\mathbf{y = x - 1}$.



4. Le nombre e

DÉFINITION DU NOMBRE e

ln est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ avec $\lim_{0} \ln = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$: c'est une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un unique réel noté **e** tel que $\mathbf{\ln e = 1}$. $\mathbf{e \approx 2{,}718}$.

PROPRIÉTÉ

• Pour tout rationnel r : $\ln(e^r) = r$. En particulier $\ln(1/e) = -1$.

• Pour tout réel k et tout $x > 0$: $\mathbf{\ln x = k \Leftrightarrow x = e^k}$.

• $\mathbf{\ln x \leq k \Leftrightarrow 0 < x \leq e^k}$; $\mathbf{\ln x \geq k \Leftrightarrow x \geq e^k}$.

Exemple. $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$; $\ln(x-3) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x - 3 \leq e \Leftrightarrow 3 < x \leq 3 + e$.

5. Dérivée de ln u

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I. Alors la fonction $\ln u : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et

$\mathbf{(\ln u)' = u'/u}$.

Cas particulier : la fonction $x \mapsto \ln|x|$ est dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1/x$.

Exemple. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ est définie sur $\mathbb{R}$ ($x^2 + 1 > 0$) et $f'(x) = 2x/(x^2 + 1)$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\ln x = -1$; b) $\ln(x-1) \geq 2$.

2) Calculer les limites : a) $\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x)$; b) $\lim_{x\to0,\ x>0} x^2 \ln x$; c) $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)/(2x+1)$; d) $\lim_{x\to0} \ln(1+3x)/x$.

3) Déterminer l'ensemble de définition puis la dérivée de : $f(x) = \ln(3x-6)$; $g(x) = \ln(x^2+1)$; $h(x) = x \ln x - x$.

Corrigé

1) a) $\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \mathbf{1/e}$. b) Condition $x > 1$. $\ln(x-1) \geq 2 \Leftrightarrow x - 1 \geq e^2 \Leftrightarrow x \geq 1 + e^2$. $\mathbf{S = [1 + e^2 ; +\infty[}$.

2) a) $x - \ln x = x(1 - (\ln x)/x)$ et $(\ln x)/x \to 0$: limite $\mathbf{+\infty}$. b) $x^2 \ln x = x \times (x \ln x) \to 0 \times 0$: limite **0**. c) $(\ln x)/(2x+1) = ((\ln x)/x) \times (x/(2x+1)) \to 0 \times \tfrac{1}{2}$: limite **0**. d) $\ln(1+3x)/x = 3 \times \ln(1+3x)/(3x) \to 3 \times 1$: limite **3**.

3) f : $3x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 2$, $D_f =]2 ; +\infty[$ et $f'(x) = 3/(3x-6) = \mathbf{1/(x-2)}$. g : $D_g = \mathbb{R}$ et $g'(x) = \mathbf{2x/(x^2+1)}$. h : $D_h =]0 ; +\infty[$ et $h'(x) = \ln x + x \times 1/x - 1 = \mathbf{\ln x}$.

III. ÉTUDE DE FONCTIONS COMPORTANT ln

1. Méthode générale

MÉTHODE : ÉTUDE COMPLÈTE D'UNE FONCTION

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f (argument de ln > 0, dénominateur ≠ 0…).

2. Calculer les limites aux bornes de D_f (utiliser les limites de référence) et en déduire les **asymptotes** ou branches infinies.

3. Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Déterminer, si demandé, les équations de tangentes, les points d'intersection avec les axes.

6. Tracer la courbe (C_f) avec les asymptotes et les tangentes.

2. Exemple 1 : f(x) = x − 2 ln x

1) Ensemble de définition. $\ln x$ existe pour $x > 0$: $D_f =]0 ; +\infty[$.

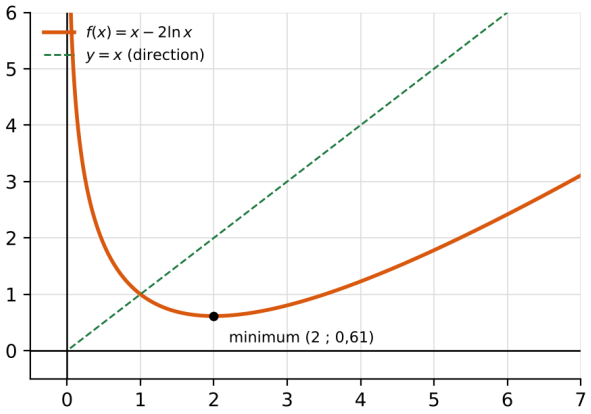
2) Limites. En 0^+ : $\ln x \to -\infty$ donc $-2 \ln x \to +\infty$ et $f(x) \to \mathbf{+\infty}$; la droite $x = 0$ est asymptote verticale. En $+\infty$: $f(x) = x(1 - 2(\ln x)/x) \to \mathbf{+\infty}$ car $(\ln x)/x \to 0$. De plus $f(x)/x = 1 - 2(\ln x)/x \to 1$ et $f(x) - x = -2 \ln x \to -\infty$: (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

3) Dérivée. $f'(x) = 1 - 2/x = \mathbf{(x-2)/x}$. Pour $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $x - 2$.

4) Tableau de variation.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2-2\ln 2 \approx 0{,}61$	$\nearrow$	$+\infty$

5) Tangente en 1. $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$: $T : y = -(x-1) + 1$, soit $\mathbf{y = -x + 2}$. Le minimum de f est $2 - 2\ln 2 > 0$: **f(x) > 0 pour tout x > 0**.

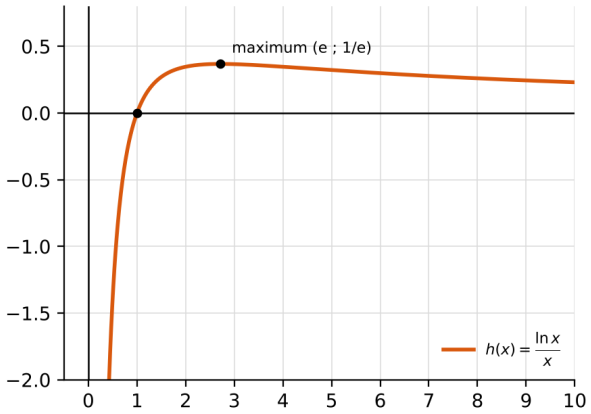


3. Exemple 2 : h(x) = (ln x)/x

$\mathbf{D_h =]0 ; +\infty[}$. En 0^+ : $\ln x \to -\infty$ et $1/x \to +\infty$, donc $h(x) \to \mathbf{-\infty}$: asymptote verticale $x = 0$. En $+\infty$: $h(x) \to \mathbf{0}$: asymptote horizontale $y = 0$ (axe des abscisses).

Dérivée : $h'(x) = (1/x \times x - \ln x)/x^2 = \mathbf{(1 - \ln x)/x^2}$. Le signe est celui de $1 - \ln x$: $h'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$. Maximum : $h(e) = 1/e \approx 0{,}37$. Intersection avec (Ox) : $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0



EXERCICE D'APPLICATION

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\mathbf{g(x) = x - 1 - \ln x}$.

1) Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

2) Calculer $g'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de g.

3) En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 2.

Corrigé

1) En 0^+ : $x - 1 \to -1$ et $-\ln x \to +\infty$, donc $\lim g = +\infty$. En $+\infty$: $g(x) = x(1 - 1/x - (\ln x)/x) \to +\infty$.

2) $g'(x) = 1 - 1/x = (x - 1)/x$, du signe de $x - 1$ ($x > 0$). g décroît sur $]0 ; 1]$, croît sur $[1 ; +\infty[$ et $g(1) = 1 - 1 - 0 = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) Le minimum de g est $g(1) = 0$, donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire $x - 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow$ **$\ln x \leq x - 1$**.

4) $g(2) = 1 - \ln 2$ et $g'(2) = 1/2$. Tangente : $y = \frac{1}{2}(x - 2) + 1 - \ln 2$, soit **$y = \frac{1}{2}x - \ln 2$**.

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union – Discipline – Travail

COLLÈGE LE PROVINCIAL
Année scolaire 20..... / 20.....
CE MATHS

FICHE D'EXERCICES — Leçon 4 : FONCTIONS LOGARITHMES (Tle B)

Exercice 1 – Propriétés algébriques

On pose $a = \ln 2$ et $b = \ln 3$. Exprimer en fonction de a et b : $\ln 12$; $\ln 18$; $\ln(3/4)$; $\ln 144$; $\ln(\sqrt{8}/3)$.

Simplifier : $A = \ln 15 + \ln 4 - \ln 10 - \ln 6$; $B = 3\ln 2 + \ln 16 - \ln 4$.

Exercice 2 – Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$, après avoir précisé le domaine de validité : a) $\ln(2x - 1) = \ln(x + 3)$; b) $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 3$; c) $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$ (poser $X = \ln x$) ; d) $\ln(x + 1) = 2$.

Exercice 3 – Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\ln(3x - 1) > 0$; b) $\ln(x - 2) \leq \ln(6 - x)$; c) $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 \leq 0$.

Exercice 4 – Limites

Calculer : a) $\lim_{x \to +\infty} (x - 3\ln x)$; b) $\lim_{x \to 0,\, x>0} (x \ln x - x)$; c) $\lim_{x \to +\infty} (\ln x)/x^2$; d) $\lim_{x \to 0,\, x>0} (\ln x)/x$; e) $\lim_{x \to +\infty} [\ln(2x + 1) - \ln x]$; f) $\lim_{x \to 0} \ln(1 + 2x)/x$.

Exercice 5 – Dérivées

Donner l'ensemble de définition et la dérivée de : $f_1(x) = \ln(x^2 - 4)$; $f_2(x) = (\ln x)^2$; $f_3(x) = x^2 \ln x$; $f_4(x) = \ln((x + 1)/(x - 1))$.

Exercice 6 – Étude d'une fonction et théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f(x) = x - 2 + \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

1) Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. 2) Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$. 4) En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

5) Écrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1. 6) Tracer (T) et (C).

Exercice 7 – Problème

Soit $g(x) = (2 + \ln x)/x$ définie sur $]0 ; +\infty[$, de courbe (C_g).

1) Calculer $\lim_{0^+} g$ et $\lim_{+\infty} g$ (écrire $g(x) = 2/x + (\ln x)/x$). Interpréter graphiquement.

2) Montrer que $g'(x) = -(1 + \ln x)/x^2$. Dresser le tableau de variation de g.

3) Déterminer le point d'intersection de (C_g) avec l'axe (Ox). 4) Écrire l'équation de la tangente à (C_g) au point d'abscisse 1. 5) Tracer (C_g).

Exercice 8 – Situation de gestion

Une entreprise fabrique x centaines d'articles ($1 \le x \le 10$). Son bénéfice, en millions de francs CFA, est $B(x) = 5 \ln x - x$.

1) Calculer $B'(x)$ et dresser le tableau de variation de B sur $[1 ; 10]$. 2) Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal (valeur approchée à 10^{-2} près) ?

3) Montrer que $B(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[1 ; 5]$ et donner un encadrement de β d'amplitude 0,1. 4) À partir de quelle production l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

RÉPONSES DE LA FICHE D'EXERCICES

Ex 1 : $\ln 12 = 2a + b$; $\ln 18 = a + 2b$; $\ln(3/4) = b - 2a$; $\ln 144 = 4a + 2b$; $\ln(\sqrt{8}/3) = (3/2)a - b$. A = $\ln 1 = 0$; B = $5 \ln 2 = \ln 32$.

Ex 2 : a) $x > ½$; $2x - 1 = x + 3 \Rightarrow S = \{4\}$. b) $x > 2$; $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou -1 ; $S = \{3\}$. c) $X^2 - X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2$ ou $X = -1$; $S = \{e^{-1} ; e^2\}$. d) $S = \{e^2 - 1\}$.

Ex 3 : a) $S =]2/3 ; +\infty[$. b) $2 < x < 6$ et $x - 2 \le 6 - x \Rightarrow S =]2 ; 4]$. c) $1 \le \ln x \le 2 \Rightarrow S = [e ; e^2]$.

Ex 4 : a) $+\infty$ b) 0 c) 0 d) $-\infty$ e) $\ln 2$ f) 2.

Ex 5 : f_1 : $D =]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$, $f_1'(x) = 2x/(x^2 - 4)$. f_2 : $D =]0 ; +\infty[$, $f_2'(x) = 2 \ln x / x$. f_3 : $D =]0 ; +\infty[$, $f_3'(x) = 2x \ln x + x$. f_4 : $D =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $f_4'(x) = 1/(x + 1) - 1/(x - 1) = -2/(x^2 - 1)$.

Ex 6 : 1) $-\infty$ et $+\infty$. 2) $f'(x) = (x + 1)/x > 0$: f strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$. 3) f est continue, strictement croissante ; $f(1,5) \approx -0,09 < 0$ et $f(1,6) \approx 0,07 > 0 \Rightarrow \alpha \in]1,5 ; 1,6[$ ($\alpha \approx 1,56$). 4) $f(x) < 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(x) > 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$. 5) $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$: (T) : $y = 2x - 3$.

Ex 7 : 1) $\lim_{0^+} g = -\infty$ (asymptote $x = 0$) ; $\lim_{+\infty} g = 0$ (asymptote $y = 0$). 2) $g' > 0 \Leftrightarrow x < 1/e$: g croît de $-\infty$ à $g(1/e) = e$, puis décroît de e à 0. 3) $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$: point $(e^{-2} ; 0)$. 4) $g(1) = 2$, $g'(1) = -1$: $y = -x + 3$.

Ex 8 : 1) $B'(x) = (5 - x)/x$: B croît sur $[1 ; 5]$, décroît sur $[5 ; 10]$; $B(1) = -1$, $B(5) \approx 3,05$, $B(10) \approx 1,51$. 2) Maximum pour $x = 5$ (500 articles) : environ 3,05 millions de F CFA. 3) $B(1,2) \approx -0,29$ et $B(1,3) \approx 0,01 \Rightarrow \beta \in]1,2 ; 1,3[$. 4) Bénéfice positif dès que $x > \beta$, soit environ plus de 130 articles.

« Les mathématiques sont la clé de toutes les sciences. » — Bon courage !

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

COLLÈGE LE PROVINCIAL

CE MATHS

Année scolaire 20..... / 20.....

FICHE DE COURS — MATHÉMATIQUES

LEÇON 5 : PROBABILITÉS

Classe	Durée	Régulation	Discipline
Terminale B	16 h	2 h	Mathématiques

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors d'une kermesse organisée au Collège Le Provincial, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance un dé, puis tire une boule dans une urne. Les élèves de la Tle B veulent savoir s'ils ont de réelles chances de gagner, quel gain moyen ils peuvent espérer et combien de fois ils doivent jouer pour gagner au moins une fois. Pour répondre à ces questions, ils étudient les probabilités.

PLAN DU COURS

- **I.** Calcul de probabilités
- **II.** Probabilité conditionnelle
- **III.** Variable aléatoire discrète
- **IV.** Loi binomiale
- **V.** Fiche d'exercices (avec réponses)

PRÉREQUIS

- Dénombrement : factorielle, arrangements, combinaisons.
- Opérations sur les ensembles : réunion, intersection, complémentaire.
- Fractions, pourcentages, développement de $(a + b)^n$.

I. CALCUL DE PROBABILITÉS

1. Vocabulaire des événements

DÉFINITION

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, sans pouvoir prévoir lequel se produira.
- Un résultat possible est une **issue**. L'ensemble de toutes les issues est l'**univers**, noté Ω.
- Un **événement** est une partie de Ω. Un événement qui ne contient qu'une issue est **élémentaire**.
- Ω est l'événement **certain** ; $\varnothing$ est l'événement **impossible**.
- $\mathbf{A \cup B}$ (« A ou B ») ; $\mathbf{A \cap B}$ (« A et B ») ; $\bar{\mathbf{A}}$ est l'événement **contraire** de A (« non A »).
- A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

EXEMPLE

On lance un dé cubique : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$. Soit A : « obtenir un nombre pair » = {2 ; 4 ; 6} et B : « obtenir un multiple de 3 » = {3 ; 6}.

$A \cap B = \{6\}$; $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}$; $\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$. Les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

2. Rappels de dénombrement

RAPPELS

- **Factorielle :** $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$; $0! = 1$.
- **Arrangements :** $A_n^{\,p} = n! / (n-p)! = n(n-1)\ldots(n-p+1)$ (p facteurs). Ordre important.
- **Combinaisons :** $C_n^{\,p} = n! / [p!(n-p)!] = A_n^{\,p} / p!$. Ordre sans importance.
- $C_n^{\,p} = C_n^{\,n-p}$; $C_n^{\,0} = C_n^{\,n} = 1$; $C_n^{\,1} = n$; $C_n^{\,p} + C_n^{\,p+1} = C_{n+1}^{\,p+1}$.
- **Tirage de p éléments parmi n :** successif avec remise → n^p tirages ; successif sans remise → $A_n^{\,p}$ tirages ; simultané → $C_n^{\,p}$ tirages.

3. Probabilité d'un événement

DÉFINITION

Soit Ω un univers fini. Une **probabilité** sur Ω est une application P qui à tout événement A associe un réel P(A) tel que :

- $0 \leq P(A) \leq 1$; $P(\Omega) = 1$;
- si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

PROPRIÉTÉS

- $P(\varnothing) = 0$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.
- Somme des probabilités des événements élémentaires = 1.

4. Cas de l'équiprobabilité

DÉFINITION

Il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité (dé non truqué, boules indiscernables au toucher, tirage « au hasard »...). Alors, pour tout événement A :

$P(A) = Card(A) / Card(\Omega)$ = nombre de cas favorables / nombre de cas possibles.

EXEMPLE

On lance deux dés équilibrés. $Card(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. Soit S : « la somme vaut 7 ». Les cas favorables sont (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1) : 6 cas. Donc $P(S) = 6/36 = 1/6$.

Probabilité de ne pas obtenir 7 : $P(S) = 1 - 1/6 = 5/6$.

EXERCICE D'APPLICATION

Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules bleues, indiscernables au toucher. On tire **simultanément** 3 boules. Calculer la probabilité des événements :

A : « les trois boules sont de la même couleur » ; B : « exactement deux boules rouges » ; C : « au moins une boule verte ».

Solution. Nombre de tirages possibles : Card(Ω) = C_{10}^{3} = 120 (équiprobabilité).

• A : trois rouges ou trois vertes (pas de trois bleues) : $C_5^{3} + C_3^{3}$ = 10 + 1 = 11. Donc **P(A) = 11/120**.

• B : 2 rouges parmi 5 et 1 non rouge parmi 5 : $C_5^{2} \times C_5^{1}$ = 10 × 5 = 50. Donc P(B) = 50/120 = **5/12**.

• C : l'événement contraire C est « aucune boule verte » : 3 boules parmi les 7 non vertes : C_7^{3} = 35. P(C) = 35/120 donc P(C) = 1 − 35/120 = 85/120 = **17/24**.

II. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

1. Définition

DÉFINITION

Soit A et B deux événements avec P(B) ≠ 0. La **probabilité de A sachant B** est le réel noté $P_B(A)$ (ou P(A | B)) défini par :

$$\mathbf{P_B(A) = P(A \cap B) / P(B)}$$

PROPRIÉTÉS

- P_B est une probabilité : $0 \leq P_B(A) \leq 1$ et $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$.
- Si A ⊂ B (équiprobabilité) : $P_B(A)$ = Card(A ∩ B) / Card(B).

EXEMPLE

On lance un dé équilibré. A : « obtenir 6 » ; B : « obtenir un nombre pair ». P(A ∩ B) = 1/6 et P(B) = 1/2, donc $P_B(A)$ = (1/6)/(1/2) = 1/3.

2. Probabilités composées

PROPRIÉTÉS

- Si P(A) ≠ 0 et P(B) ≠ 0 : $\mathbf{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B)}$.
- Pour trois événements : $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C)$.

3. Arbre pondéré, probabilités totales et formule de Bayes

DÉFINITION

- Sur un **arbre pondéré**, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 ; la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités de ses branches.
- Des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ non vides, deux à deux incompatibles et dont la réunion est Ω forment un **système complet d'événements** (ou partition de Ω).

PROPRIÉTÉS ET FORMULES

- **Formule des probabilités totales :** $P(A) = P(A \cap B_1) + \ldots + P(A \cap B_n) = P(B_1)P_{B1}(A) + \ldots + P(B_n)P_{Bn}(A)$.
- **Formule de Bayes :** $P_A(B_i) = P(B_i) \times P_{Bi}(A) / P(A)$.
- En particulier : $P(A) = P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)$.

4. Événements indépendants

DÉFINITION

Deux événements A et B sont **indépendants** si **P(A ∩ B) = P(A) × P(B)**. Si P(B) ≠ 0, cela équivaut à $P_B(A) = P(A)$. Dans ce cas, A et B, Ā et B, Ā et B̄ sont aussi indépendants.

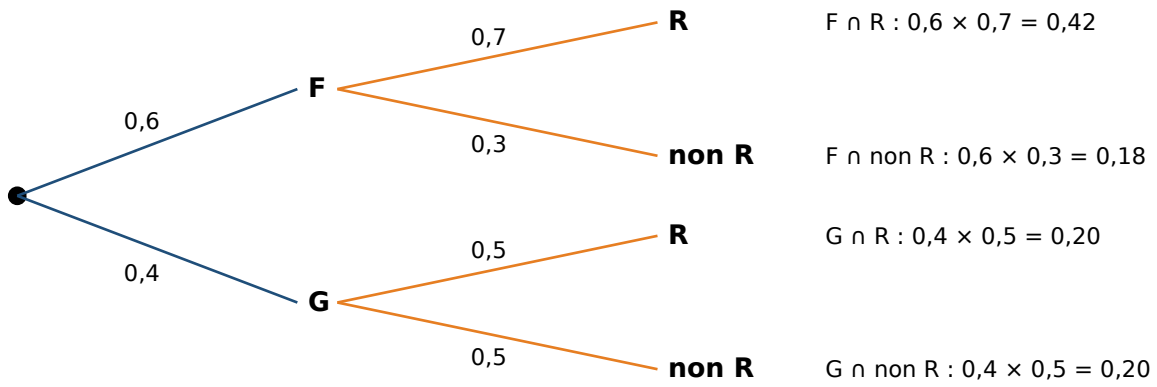
EXEMPLE

On lance un dé : A : « pair » (P = 1/2) ; B : « multiple de 3 » (P = 1/3) ; A ∩ B = {6} donc P(A ∩ B) = 1/6 = 1/2 × 1/3. A et B sont indépendants.

EXERCICE D'APPLICATION

Dans une classe de Tle B, 60 % des élèves sont des filles. 70 % des filles et 50 % des garçons ont obtenu la moyenne en mathématiques. On choisit un élève au hasard. On note F : « l'élève est une fille » et R : « l'élève a la moyenne ».

1) Représenter la situation par un arbre pondéré. 2) Calculer P(R). 3) L'élève a la moyenne : quelle est la probabilité que ce soit une fille ? 4) F et R sont-ils indépendants ?



SOLUTION

1) L'arbre est donné ci-dessus : P(F) = 0,6 ; $P_F(R) = 0,7$; $P_G(R) = 0,5$ (G = garçon, P(G) = 0,4).

2) F et G forment un système complet : P(R) = P(F ∩ R) + P(G ∩ R) = 0,42 + 0,20 = **0,62**.

3) $P_R(F) = P(F \cap R)/P(R) = 0,42/0,62 = 21/31 \approx$ **0,68**.

4) P(F) × P(R) = 0,6 × 0,62 = 0,372 ≠ 0,42 = P(F ∩ R). Donc F et R **ne sont pas indépendants**.

III. VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

1. Définition et loi de probabilité

DÉFINITION

Une **variable aléatoire discrète** X sur Ω est une application qui à chaque issue associe un nombre réel. L'ensemble de ses valeurs est $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$. On note $(X = x_i)$ l'événement « X prend la valeur x_i ».

La **loi de probabilité** de X est la donnée des $p_i = P(X = x_i)$, présentée sous forme de tableau. On a toujours $\mathbf{p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1}$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

EXEMPLE

On lance un dé équilibré. Si le résultat est 6, on gagne 5 F ; s'il est 4 ou 5, on gagne 1 F ; sinon on perd 2 F. Soit X le gain algébrique. Loi de X :

x_i	-2	1	5
$P(X = x_i)$	3/6 = 1/2	2/6 = 1/3	1/6

2. Fonction de répartition

DÉFINITION

La **fonction de répartition** de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par **$F(x) = P(X \leq x)$**. Si $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$: $F(x) = 0$ pour $x < x_1$; $F(x) = p_1 + \ldots + p_k$ pour $x_k \leq x < x_{k+1}$; $F(x) = 1$ pour $x \geq x_n$. F est **croissante**, en escalier, à valeurs dans [0 ; 1].

3. Espérance, variance, écart-type

DÉFINITION

- **Espérance :** $E(X) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = \Sigma\, p_ix_i$ (valeur moyenne).
- **Variance :** $V(X) = \Sigma\, p_i(x_i - E(X))^2 = \mathbf{E(X^2) - [E(X)]^2}$, où $E(X^2) = \Sigma\, p_ix_i^2$.
- **Écart-type :** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

PROPRIÉTÉS

- Pour tous réels a et b : $E(aX + b) = a\,E(X) + b$; $V(aX + b) = a^2\,V(X)$; $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$.
- Un jeu est dit **équitable** si l'espérance du gain est nulle : $E(X) = 0$.

EXEMPLE

Pour le jeu de l'exemple précédent : $E(X) = -2 \times 1/2 + 1 \times 1/3 + 5 \times 1/6 = -1 + 1/3 + 5/6 =$ **1/6** (le jeu est favorable au joueur, il n'est pas équitable).

EXERCICE D'APPLICATION

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément 2 boules. Soit X le nombre de boules rouges obtenues.

1) Déterminer la loi de X. 2) Calculer E(X), V(X) et σ(X). 3) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Solution. 1) $\text{Card}(\Omega) = C_5^2 = 10$. $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$.

$P(X = 0) = C_3^2/10 = 3/10$; $P(X = 1) = C_2^1 \times C_3^1/10 = 6/10$; $P(X = 2) = C_2^2/10 = 1/10$. (Vérification : 3/10 + 6/10 + 1/10 = 1.)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,3	0,6	0,1

2) $E(X) = 0\times0{,}3 + 1\times0{,}6 + 2\times0{,}1 =$ **0,8**. $E(X^2) = 0\times0{,}3 + 1\times0{,}6 + 4\times0{,}1 = 1$. $V(X) = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 =$ **0,36**. $\sigma(X) = \sqrt{0{,}36} =$ **0,6**.

3) $F(x) = 0$ si $x < 0$; $F(x) = 0{,}3$ si $0 \leq x < 1$; $F(x) = 0{,}9$ si $1 \leq x < 2$; $F(x) = 1$ si $x \geq 2$.

IV. LOI BINOMIALE

1. Épreuve et schéma de Bernoulli

DÉFINITION

- Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues : le **succès** S, de probabilité p, et l'**échec** S, de probabilité q = 1 − p.
- La **loi de Bernoulli** de paramètre p est celle de la variable X valant 1 en cas de succès et 0 sinon : E(X) = p et V(X) = pq.
- Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.

EXEMPLE

On lance 10 fois une pièce équilibrée et on s'intéresse à « Pile » : schéma de Bernoulli avec n = 10 et p = 1/2. Tirer 5 fois, avec remise, une boule dans une urne et noter « boule rouge » en est un autre.

2. Loi binomiale

DÉFINITION

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la variable aléatoire X égale au **nombre de succès** suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, notée **B(n ; p)**. Pour tout entier k tel que 0 ≤ k ≤ n :

$$\mathbf{P(X = k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}} \quad \text{avec } q = 1 - p.$$

PROPRIÉTÉS

- $\Sigma\, P(X = k) = (p + q)^n = 1$ (formule du binôme).
- **E(X) = np** ; **V(X) = npq** ; $\sigma(X) = \sqrt{(npq)}$.
- $P(X = 0) = q^n$; $P(X = n) = p^n$; **$P(X \geq 1) = 1 - q^n$** (« au moins un succès »).
- Pour « au moins k succès » ou « au plus k succès », on passe souvent par l'événement contraire.

Méthode : pour reconnaître une loi binomiale, vérifier que (1) l'expérience se répète n fois, (2) les épreuves sont identiques et indépendantes, (3) chaque épreuve a deux issues (succès / échec), (4) X compte le nombre de succès.

EXERCICE D'APPLICATION

Un élève répond au hasard à un QCM de 5 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. Soit X le nombre de bonnes réponses.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. 2) Calculer P(X = 2) et P(X = 5). 3) Calculer la probabilité d'avoir au moins une bonne réponse. 4) Calculer E(X) et V(X).

Solution. 1) L'élève répète 5 fois la même épreuve de Bernoulli (succès : « bonne réponse », p = 1/4), de façon indépendante. Donc X suit **B(5 ; 1/4)**, avec q = 3/4.

2) $P(X = 2) = C_5^2\, (1/4)^2\, (3/4)^3 = 10 \times 1/16 \times 27/64 = 270/1024 = 135/512 \approx$ **0,264**. $P(X = 5) = (1/4)^5 = 1/1024 \approx$ **0,001**.

3) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (3/4)^5 = 1 - 243/1024 = 781/1024 \approx$ **0,763**.

4) $E(X) = 5 \times 1/4 =$ **5/4 = 1,25** ; $V(X) = 5 \times 1/4 \times 3/4 =$ **15/16** ≈ 0,94.

V. FICHE D'EXERCICES — LEÇON 5 : PROBABILITÉS

Exercice 1 – Calcul de probabilités (dés)

On lance deux dés cubiques équilibrés et on note la somme S des deux faces.

1) Calculer la probabilité des événements : A « S = 8 » ; B « S ≥ 10 » ; C « le produit des deux faces est pair ».

2) Calculer P(B ∪ C) et P(B ∩ C).

Exercice 2 – Dénombrement et probabilités

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires. On tire simultanément 3 boules.

1) Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges.

2) Calculer la probabilité de tirer exactement deux boules rouges.

3) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule noire.

Exercice 3 – Probabilité conditionnelle et indépendance

Soit A et B deux événements tels que P(A) = 0,4 ; P(B) = 0,5 et P(A ∪ B) = 0,7.

1) Calculer P(A ∩ B).

2) Calculer $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

3) A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 4 – Arbre pondéré et formule de Bayes

Dans une ville, 2 % de la population est atteinte d'une maladie M. Un test de dépistage est positif pour 95 % des malades et pour 4 % des personnes non malades. On choisit une personne au hasard et on note M « la personne est malade » et T « le test est positif ».

1) Construire l'arbre pondéré.

2) Calculer P(T).

3) Le test est positif : quelle est la probabilité que la personne soit malade ? (arrondir au millième)

Exercice 5 – Deux urnes

L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 noires ; l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 4 noires. On lance un dé équilibré : si on obtient 1 ou 2, on tire une boule dans U_1 ; sinon on tire une boule dans U_2.

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

2) La boule tirée est blanche : quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?

Exercice 6 – Variable aléatoire et jeu

Un joueur lance un dé équilibré. S'il obtient 6, il gagne 5 F ; s'il obtient 4 ou 5, il gagne 1 F ; sinon il perd 2 F. Soit X le gain algébrique.

1) Donner la loi de X.

2) Calculer E(X), V(X) et σ(X) (arrondir σ au centième).

3) Le jeu est-il équitable ? Quelle mise m (ajoutée au gain) le rendrait équitable ?

Exercice 7 – Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par : P(X = 1) = 0,2 ; P(X = 2) = 0,5 ; P(X = 4) = 0,3.

1) Calculer E(X) et V(X).

2) Déterminer la fonction de répartition F de X et calculer F(3).

3) Soit Y = 2X − 1. Calculer E(Y) et V(Y).

Exercice 8 – Loi binomiale (contrôle qualité)

Dans une usine, 10 % des pièces fabriquées sont défectueuses. On prélève au hasard 6 pièces (le stock est assez grand pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise). Soit X le nombre de pièces défectueuses.

1) Quelle est la loi de X ? 2) Calculer P(X = 0), P(X = 1) puis P(X ≥ 2) (valeurs exactes). 3) Calculer E(X) et V(X).

Exercice 9 – Loi binomiale (tir à l'arc)

Un archer touche sa cible avec la probabilité 0,7 à chaque tir, les tirs étant indépendants. Il tire 4 fois.

1) Calculer la probabilité qu'il touche 4 fois la cible.

2) Calculer la probabilité qu'il touche au moins une fois la cible.

3) Combien de tirs doit-il effectuer au minimum pour que la probabilité de toucher au moins une fois la cible soit supérieure ou égale à 0,999 ?

Exercice 10 – Problème de synthèse

Au Collège Le Provincial, 30 % des élèves de Tle B viennent à l'école à pied. Parmi eux, 10 % arrivent en retard. Parmi les autres élèves, 20 % arrivent en retard. On choisit un élève au hasard.

1) Calculer la probabilité qu'il arrive en retard.

2) Il est arrivé en retard : quelle est la probabilité qu'il vienne à pied ?

3) On choisit 5 élèves au hasard et indépendamment. Soit Y le nombre d'élèves en retard. Donner la loi de Y puis calculer P(Y = 2) (arrondir au centième) et E(Y).

RÉPONSES AUX EXERCICES

Ex 1 : 1) P(A) = 5/36 ; P(B) = 6/36 = 1/6 ; P(C) = 1 − (1/2)² = 3/4. 2) B ∩ C compte 5 cas : (4;6), (6;4), (5;6), (6;5), (6;6), donc P(B ∩ C) = 5/36 ; P(B ∪ C) = 1/6 + 3/4 − 5/36 = 28/36 = 7/9.

Ex 2 : Card(Ω) = 120. 1) 4/120 = 1/30. 2) 6 × 6/120 = 36/120 = 3/10. 3) 1 − 1/30 = 29/30.

Ex 3 : 1) P(A ∩ B) = 0,4 + 0,5 − 0,7 = 0,2. 2) $P_B(A) = 0,4$; $P_A(B) = 0,5$. 3) Oui, car P(A) × P(B) = 0,2 = P(A ∩ B).

Ex 4 : 2) P(T) = 0,02 × 0,95 + 0,98 × 0,04 = 0,019 + 0,0392 = 0,0582. 3) $P_T(M) = 0,019/0,0582 \approx 0,326$.

Ex 5 : 1) P(B) = 1/3 × 3/5 + 2/3 × 1/5 = 1/3. 2) $P_B(U_1) = (1/5)/(1/3) = 3/5$.

Ex 6 : 1) X ∈ {−2 ; 1 ; 5} avec les probabilités 1/2 ; 1/3 ; 1/6. 2) E(X) = 1/6 ; E(X²) = 4×1/2 + 1/3 + 25/6 = 13/2 ; V(X) = 13/2 − 1/36 = 233/36 ; σ ≈ 2,54. 3) Non (E(X) ≠ 0) ; avec une mise de 1/6 F (≈ 0,17 F) le jeu devient équitable.

Ex 7 : 1) E(X) = 0,2 + 1 + 1,2 = 2,4 ; E(X²) = 0,2 + 2 + 4,8 = 7 ; V(X) = 7 − 5,76 = 1,24. 2) F(x) = 0 si x < 1 ; 0,2 si 1 ≤ x < 2 ; 0,7 si 2 ≤ x < 4 ; 1 si x ≥ 4 ; F(3) = 0,7. 3) E(Y) = 2 × 2,4 − 1 = 3,8 ; V(Y) = 4 × 1,24 = 4,96.

Ex 8 : 1) X suit B(6 ; 0,1). 2) $P(X = 0) = 0,9^6 = 0,531441$; $P(X = 1) = 6 \times 0,1 \times 0,9^5 = 0,354294$; P(X ≥ 2) = 1 − 0,885735 = 0,114265. 3) E(X) = 0,6 ; V(X) = 0,54.

Ex 9 : 1) $0,7^4 = 0,2401$. 2) $1 - 0,3^4 = 0,9919$. 3) Il faut $1 - 0,3^n \geq 0,999$, soit $0,3^n \leq 0,001$; $0,3^5 = 0,00243$ (trop grand) et $0,3^6 = 0,000729$: n = 6 tirs minimum.

Ex 10 : 1) P(R) = 0,3 × 0,1 + 0,7 × 0,2 = 0,03 + 0,14 = 0,17. 2) 0,03/0,17 = 3/17 ≈ 0,18. 3) Y suit B(5 ; 0,17) ; $P(Y = 2) = 10 \times 0,17^2 \times 0,83^3 \approx 0,17$; E(Y) = 0,85.

LEÇON 6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

Durée : 16 h + 2 h de séance de régulation	**Plan :** A. Fonction exponentielle népérienne — B. Fonctions exponentielles de base a — C. Fonctions puissances — Fiche d'exercices

COMPÉTENCE VISÉE ET PRÉREQUIS

Compétence : traiter une situation faisant intervenir les fonctions exponentielles et les fonctions puissances (calculs, résolution d'équations et d'inéquations, calcul de limites et de dérivées, étude de fonctions).

Prérequis : la fonction logarithme népérien ln (domaine $]0 ; +\infty[$, dérivée $1/x$, propriétés algébriques, limites) ; dérivation et opérations sur les limites ; théorème de la bijection.

A. FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

1. Définition et notation

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et elle prend toutes les valeurs réelles : c'est donc une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet par conséquent une bijection réciproque.

DÉFINITION

La bijection réciproque de la fonction ln est appelée **fonction exponentielle népérienne**, notée **exp**.

$\exp : \mathbb{R} \to]0 ; +\infty[$; on pose $e = \exp(1) \approx 2{,}718$ (nombre de Néper). Pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$.

Équivalence fondamentale : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$: $\mathbf{y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y}$.

CONSÉQUENCES

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $\ln(e) = 1$; $\ln(1) = 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln(e^x) = x$. Pour tout $x > 0$: $e^{\ln x} = x$.
- Les courbes de ln et de exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. Équations et inéquations de base

ÉQUIVALENCES

Pour tous réels a et b, et pour tout réel $m > 0$:

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ • $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ • $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$
- $e^x = m \Leftrightarrow x = \ln m$ • $e^x > m \Leftrightarrow x > \ln m$ • $e^x < m \Leftrightarrow x < \ln m$
- $e^x = m$ n'a pas de solution si $m \leq 0$.

Exemple : $e^{2x-1} = 5 \Leftrightarrow 2x - 1 = \ln 5 \Leftrightarrow x = (1 + \ln 5)/2$. $e^x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \ln 3$, donc $S = [\ln 3 ; +\infty[$.

3. Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels a et b et tout entier relatif n :

• $e^{a+b} = e^a \times e^b$ • $e^{a-b} = e^a / e^b$

• $e^{-a} = 1 / e^a$ • $(e^a)^n = e^{na}$ • $e^{a/2} = \sqrt{(e^a)}$

Démonstration de $e^{a+b} = e^a\, e^b$: $\ln(e^a \times e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b) = a + b$. Or e^{a+b} est l'unique réel strictement positif dont le logarithme vaut a + b ; donc $e^a \times e^b = e^{a+b}$. □

4. Étude de la fonction exponentielle

THÉORÈME

Dérivabilité : exp est dérivable sur ℝ et $\mathbf{(e^x)' = e^x}$. Plus généralement, si u est dérivable : $\mathbf{(e^u)' = u'\, e^u}$.

Sens de variation : $\exp'(x) = e^x > 0$, donc exp est strictement croissante sur ℝ.

Limites : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Croissances comparées : $\lim_{x\to+\infty} e^x/x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} e^x/x^n = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$; $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Limite usuelle : $\lim_{x\to0} (e^x - 1)/x = 1$ (nombre dérivé de exp en 0).

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp'(x)$		+	
$\exp(x)$	0	↗	$+\infty$

Courbe : la courbe de exp passe par les points (0 ; 1) et (1 ; e). L'axe des abscisses (y = 0) est asymptote horizontale en $-\infty$. En $+\infty$, la courbe admet une *branche parabolique de direction (Oy)* puisque $e^x/x \to +\infty$. La tangente en 0 a pour équation y = x + 1.

5. Primitives

Si u est dérivable sur un intervalle K, une primitive de $u'\, e^u$ sur K est e^u. En particulier, les primitives de e^x sont $x \mapsto e^x + k$ $(k \in \mathbb{R})$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Simplifier $A = (e^{2x+1} \times e^{-x}) / e^{x-3}$.

2) Résoudre dans ℝ : (a) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$; (b) $e^{x+1} \geq e^{3-x}$.

3) Calculer $\lim_{x\to+\infty} (e^x - x)$.

4) Dériver $g(x) = e^{x^2-3x}$.

Corrigé :

1) $A = e^{(2x+1)+(-x)-(x-3)} = e^4$.

2a) On pose $X = e^x$ $(X > 0)$: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Rightarrow X = 1$ ou $X = 2$, d'où $x = \ln 1 = 0$ ou $x = \ln 2$. $S = \{0 ; \ln 2\}$.

2b) $e^{x+1} \geq e^{3-x} \Leftrightarrow x + 1 \geq 3 - x \Leftrightarrow x \geq 1$. $S = [1 ; +\infty[$.

3) $e^x - x = x\,(e^x/x - 1)$. Comme $e^x/x \to +\infty$, la limite vaut $+\infty$.

4) $g'(x) = (2x - 3)\, e^{x^2-3x}$.

B. FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a

1. Définition

DÉFINITION

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle **fonction exponentielle de base a** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\mathbf{x \mapsto a^x = e^{x \ln a}}$.

Cas particuliers : $a = e$ donne la fonction exp ; $a = 10$ donne $x \mapsto 10^x$ (utilisée en sciences).

Exemple : $2^x = e^{x \ln 2}$; $3^5 = e^{5 \ln 3} = 243$.

2. Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels $a > 0$, $b > 0$, x et y :

- $a^{x+y} = a^x \, a^y$ • $a^{x-y} = a^x / a^y$ • $a^{-x} = 1 / a^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$ • $(ab)^x = a^x \, b^x$ • $(a/b)^x = a^x / b^x$
- $a^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; $a^0 = 1$; $a^1 = a$.

3. Dérivée, sens de variation et limites

THÉORÈME

La fonction $f : x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathbf{f'(x) = (\ln a) \times a^x}$. Plus généralement $(a^u)' = u' (\ln a) \, a^u$.

- Si $\mathbf{a > 1}$: $\ln a > 0$, f est strictement croissante ; $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.
- Si $\mathbf{0 < a < 1}$: $\ln a < 0$, f est strictement décroissante ; $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$.

Dans les deux cas, la courbe passe par $(0 ; 1)$ et l'axe des abscisses est asymptote horizontale.

4. Équations, inéquations, logarithme de base a

RÉSOLUTION

- $a^x = b \Leftrightarrow x = \ln b / \ln a$ $(b > 0)$.
- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.
- Si $a > 1$: $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$. Si $0 < a < 1$: $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$ (l'ordre est inversé).
- La réciproque de $x \mapsto a^x$ est le **logarithme de base a** : $\log_a(x) = \ln x / \ln a$. Pour $a = 10$, on note $\log x$ (logarithme décimal).

Primitives : une primitive de $x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto a^x / \ln a$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: (a) $2^x = 10$ (donner une valeur approchée à 10^{-2} près) ; (b) $9^x - 4 \times 3^x + 3 = 0$; (c) $(1/2)^x < 1/8$.

2) Soit $f(x) = 2^x$. Calculer $f'(x)$, donner le sens de variation de f et les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

3) Écrire 5^{2x-1} sous la forme $e^{\cdots}$.

Corrigé :

1a) $2^x = 10 \Leftrightarrow x = \ln 10 / \ln 2 \approx 2{,}3026 / 0{,}6931 \approx 3{,}32$.

1b) On pose $X = 3^x > 0$ (car $9^x = (3^x)^2$) : $X^2 - 4X + 3 = 0 \Rightarrow X = 1$ ou $X = 3$, donc $3^x = 1$ ou $3^x = 3$, soit $x = 0$ ou $x = 1$. $S = \{0 ; 1\}$.

1c) $1/8 = (1/2)^3$. Comme $0 < 1/2 < 1$, l'ordre s'inverse : $(1/2)^x < (1/2)^3 \Leftrightarrow x > 3$. $S =]3 ; +\infty[$.

2) $f'(x) = (\ln 2) \, 2^x > 0$: f est strictement croissante ; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3) $5^{2x-1} = e^{(2x-1)\ln 5}$.

C. FONCTIONS PUISSANCES

1. Définition

DÉFINITION

Soit α un nombre réel. On appelle **fonction puissance d'exposant α** la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

$x \mapsto x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$.

Cas particuliers : $x^0 = 1$; $x^1 = x$; $x^{-1} = 1/x$; $x^{1/2} = \sqrt{x}$; $x^{1/n}$ = racine n-ième de x ($n \in \mathbb{N}^*$).

Attention : ne pas confondre $x \mapsto x^{\alpha}$ (variable en *base*, exposant constant : fonction puissance) et $x \mapsto a^x$ (variable en *exposant* : fonction exponentielle de base a).

Exemple : $8^{2/3} = e^{(2/3)\ln 8} = (\sqrt[3]{8})^2 = 4$; $27^{-1/3} = 1/\sqrt[3]{27} = 1/3$.

2. Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels $x > 0$, $y > 0$, α et β :

- $x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta}$ • $x^{\alpha-\beta} = x^{\alpha} / x^{\beta}$ • $x^{-\alpha} = 1 / x^{\alpha}$
- $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$ • $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha}$ • $(x/y)^{\alpha} = x^{\alpha} / y^{\alpha}$
- $x^{\alpha} > 0$; $\ln(x^{\alpha}) = \alpha \ln x$.

3. Dérivée, sens de variation et limites

THÉORÈME

La fonction $f : x \mapsto x^{\alpha}$ est dérivable sur]0 ; +∞[et **$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$**.

- Si **$\alpha > 0$** : f est strictement croissante ; $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$.
- Si **$\alpha < 0$** : f est strictement décroissante ; $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 0$.
- Si $\alpha = 0$: f est la fonction constante égale à 1.

Allure des courbes (toutes passent par (1 ; 1)) : pour $\alpha > 1$, branche parabolique de direction (Oy) en +∞ ; pour $0 < \alpha < 1$, branche parabolique de direction (Ox) en +∞ ; pour $\alpha < 0$, l'axe des abscisses est asymptote en +∞ et l'axe des ordonnées est asymptote en 0^+.

4. Croissances comparées

LIMITES À RETENIR

Pour tout réel $\alpha > 0$:

- $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)/x^{\alpha} = 0$ • $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} \ln x = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x/x^{\alpha} = +\infty$ • $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$

Idée : « l'exponentielle l'emporte sur la puissance, et la puissance l'emporte sur le logarithme ».

Primitives : pour $\alpha \neq -1$, une primitive de $x \mapsto x^{\alpha}$ sur]0 ; +∞[est $x \mapsto x^{\alpha+1} / (\alpha + 1)$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Calculer $16^{3/4}$ et $125^{-2/3}$.

2) Dériver $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ et $g(x) = x^{-3/2}$ sur]0 ; +∞[.

3) Calculer $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)/\sqrt{x}$; $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$; $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$.

4) Résoudre dans $]0\,;+\infty[$: $x^{3/2}=8$.

Corrigé :

1) $16^{3/4}=(16^{1/4})^3=2^3=8$. $\quad 125^{-2/3}=1/(\sqrt[3]{125})^2=1/25$.

2) $f'(x)=\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$; $g'(x)=-(3/2)\,x^{-5/2}$.

3) Par croissances comparées ($\alpha=1/2>0$) : $(\ln x)/\sqrt{x}\to 0$ en $+\infty$; $\sqrt{x}\ln x\to 0$ en 0^+ ; $x^2\,e^{-x}=x^2/e^x\to 0$ en $+\infty$.

4) $x^{3/2}=8\Leftrightarrow x=8^{2/3}=4$. $S=\{4\}$.

FICHE D'EXERCICES — LEÇON 6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

Exercice 1 : Simplifications

Simplifier les expressions suivantes :

$A = e^{3} \times e^{-5} / e^{-2}$ $B = (e^{x} + e^{-x})^{2} - (e^{x} - e^{-x})^{2}$ $C = e^{\ln 5 + 2 \ln 3}$ $D = (e^{x+1})^{2} / e^{2x-1}$

Exercice 2 : Équations et inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{3x-1} = e^{x+5}$ b) $e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$ c) $e^{x} > 5$ d) $e^{-2x+1} \leq e^{x}$

e) $4^{x} - 2^{x+1} - 8 = 0$ f) $(1/3)^{x} \geq 9$ g) $5^{x} = 20$ (valeur approchée à 10^{-2} près) h) $x^{5/2} = 32$ $(x > 0)$

Exercice 3 : Limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to +\infty} (x^{2} - e^{x})$ b) $\lim_{x \to -\infty} (x^{2} + 1)\, e^{x}$ c) $\lim_{x \to +\infty} (e^{x} - 1)/x$ d) $\lim_{x \to 0} (e^{3x} - 1)/x$

e) $\lim_{x \to +\infty} x^{3}\, e^{-x}$ f) $\lim_{x \to +\infty} (\ln x)/x^{2}$ g) $\lim_{x \to 0^{+}} x^{-2}$ h) $\lim_{x \to +\infty} (2^{x} - 3^{-x})$

Exercice 4 : Dérivées et primitives

1) Dériver chacune des fonctions suivantes sur son domaine :

$f_1(x) = (2x - 1)\, e^{x}$ $f_2(x) = e^{x} / (e^{x} + 1)$ $f_3(x) = x\, e^{-x^{2}}$ $f_4(x) = 3^{x}$ $f_5(x) = x^{\pi}$ $(x > 0)$

2) Déterminer la primitive F de $h(x) = 2x\, e^{x^{2}}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 2$.

Exercice 5 : Étude complète d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)\, e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu en $+\infty$.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -(x + 1)\, e^{-x}$.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

5) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

6) Tracer (T) et (C).

Exercice 6 : Inégalité classique

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x} - x - 1$.

1) Étudier les variations de g et en déduire que g admet un minimum que l'on déterminera.

2) En déduire que pour tout réel x, $e^{x} \geq x + 1$.

Exercice 7 : Problèmes d'application

a) Une colonie de bactéries évolue selon la loi $N(t) = 500 \times 2^{t/3}$, où t est le temps en heures et N(t) le nombre de bactéries. (i) Quel est le nombre initial de bactéries ? (ii) Combien y en a-t-il au bout de 6 heures ? (iii) Au bout de combien de temps la colonie compte-t-elle 8 000 bactéries ?

b) Un capital de 1 000 000 F CFA est placé à intérêts continus : $C(t) = 1\,000\,000 \times e^{0{,}05\ t}$, t en années. (i) Calculer C(10) (arrondir à l'unité). (ii) Au bout de combien d'années le capital aura-t-il doublé ? (arrondir au dixième).

« Les mathématiques ne s'apprennent qu'en les pratiquant : reprenez chaque exercice sans regarder le cours. »

MATHÉMATIQUES — Classe de Terminale B

LEÇON 7 : SUITES NUMÉRIQUES

Durée de la leçon	Séance de régulation	Plan de la leçon
16 h	2 h	0. Rappels • I. Théorème de récurrence • II. Suites minorées, majorées, bornées • III. Théorème de variation d'une suite • IV. Convergence d'une suite

Compétences visées : savoir raisonner par récurrence ; démontrer qu'une suite est minorée, majorée ou bornée ; étudier le sens de variation d'une suite ; étudier la convergence d'une suite et calculer sa limite.

0. RAPPELS ET GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

DÉFINITION

Une **suite numérique** est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $\{n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0\}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $u : n \mapsto u_n$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le réel u_n est le **terme général** ; u_0 est le premier terme (si la suite est définie dès 0).

Modes de définition d'une suite :

- **de façon explicite :** $u_n = f(n)$. Exemple : $u_n = 2n + 3$, donc $u_0 = 3$; $u_1 = 5$.
- **par récurrence :** on donne le premier terme et une relation qui permet de passer de u_n à u_{n+1}. Exemple : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$, donc $u_1 = 5$; $u_2 = 13$.

Suites de référence

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q ($q \neq 0$)
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n - p)r$ (avec u_0 : $u_n = u_0 + nr$)	$u_n = u_p \times q^{n-p}$ (avec u_0 : $u_n = u_0 \times q^n$)
Somme de termes consécutifs	S = (nombre de termes) × (premier terme + dernier terme) / 2	S = premier terme × $(1 - q^{\text{nombre de termes}}) / (1 - q)$ $(q \neq 1)$
Sens de variation	$r > 0$: croissante ; $r < 0$: décroissante ; $r = 0$: constante	$u_0 > 0$: $q > 1$ croissante ; $0 < q < 1$ décroissante

EXERCICE D'APPLICATION — Rappels

1) (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_3 = 7$ et $u_8 = 22$. Déterminer r, u_0, puis calculer $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{20}$.

2) (v_n) est une suite géométrique de termes positifs telle que $v_2 = 12$ et $v_4 = 48$. Déterminer q, v_0, puis calculer $T = v_0 + v_1 + \ldots + v_5$.

CORRIGÉ

1) $u_8 - u_3 = 5r = 15$, donc **r = 3**. $u_0 = u_3 - 3r = 7 - 9 = \mathbf{-2}$. Ainsi $u_n = -2 + 3n$ et $u_{20} = 58$. $S = 21 \times (-2 + 58)/2 = 21 \times 28 = \mathbf{588}$.

2) $v_4 = v_2 \times q^2$, donc $q^2 = 48/12 = 4$; v positifs donc **q = 2**. $v_0 = v_2/q^2 = 3$. $T = 3 \times (1 - 2^6)/(1 - 2) = 3 \times 63 = \mathbf{189}$.

I. LE THÉORÈME DE RÉCURRENCE

Le **raisonnement par récurrence** permet de démontrer qu'une propriété P(n), dépendant d'un entier naturel n, est vraie pour tous les entiers n supérieurs ou égaux à un entier n_0.

PROPRIÉTÉ / THÉORÈME

Théorème de récurrence. Soit P(n) une propriété dépendant de l'entier n et n_0 un entier naturel. Si :

(1) Initialisation : $P(n_0)$ est vraie ;

(2) Hérédité : pour tout entier $n \geq n_0$, (P(n) vraie ⇒ P(n+1) vraie) ;

alors P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

MÉTHODE

Étape 1 — Initialisation : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie (on calcule les deux membres, ou on teste le premier terme).

Étape 2 — Hérédité : on fixe un entier $n \geq n_0$ quelconque, on *suppose* P(n) vraie (c'est l'**hypothèse de récurrence**) et on démontre, grâce à elle, que P(n+1) est vraie.

Étape 3 — Conclusion : « D'après le théorème de récurrence, P(n) est vraie pour tout $n \geq n_0$. »

EXEMPLE

Énoncé : soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

Initialisation : pour n = 0, $2^0 + 1 = 2 = u_0$. P(0) est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^n + 1$. Alors $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(2^n + 1) - 1 = 2^{n+1} + 1$. P(n+1) est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

Remarque. Le théorème de récurrence sert aussi à démontrer des inégalités, des propriétés de divisibilité, des formules de sommes, ou des propriétés d'encadrement d'une suite définie par récurrence (voir parties II et IV).

EXERCICE D'APPLICATION — Partie I

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3^n \geq 2n + 1$.

CORRIGÉ

1) *Initialisation :* n = 1 : le membre de gauche vaut 1 et $1^2 = 1$. *Hérédité :* supposons $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Alors $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. La propriété est vraie au rang n + 1. Conclusion : elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

2) *Initialisation :* n = 0 : $3^0 = 1 \geq 1$. *Hérédité :* supposons $3^n \geq 2n + 1$. Alors $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3(2n + 1) = 6n + 3$. Or $6n + 3 \geq 2n + 3 = 2(n + 1) + 1$ car $n \geq 0$. Donc $3^{n+1} \geq 2(n + 1) + 1$. Conclusion : $3^n \geq 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II. SUITES MINORÉES, MAJORÉES, BORNÉES

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite numérique.

• (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout n, $u_n \leq M$. M est un **majorant**.

• (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout n, $u_n \geq m$. m est un **minorant**.

• (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe m et M tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout n.

PROPRIÉTÉ / THÉORÈME

Caractérisation. (u_n) est bornée $\iff$ il existe un réel $K \geq 0$ tel que, pour tout n, $|u_n| \leq K$.

Remarques. Un majorant (ou un minorant) n'est pas unique : si M est un majorant, tout réel $M' \geq M$ l'est aussi. Une suite croissante est minorée par son premier terme ; une suite décroissante est majorée par son premier terme.

MÉTHODE

① **Par calcul direct :** on étudie le signe de $u_n - M$ (pour montrer $u_n \leq M$) ou de $u_n - m$ (pour montrer $u_n \geq m$).

② **Par encadrement :** on écrit u_n sous une forme simple (par exemple $u_n = a - b/(n + c)$) puis on encadre le terme qui varie.

③ **Par récurrence :** pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, on montre par récurrence que $m \leq u_n \leq M$.

④ **Pour montrer qu'une suite n'est pas majorée :** on prouve que, pour tout réel M, il existe un rang n tel que $u_n > M$.

EXEMPLE

Énoncé : soit $u_n = (2n + 1)/(n + 1)$. Montrer que (u_n) est bornée.

On remarque que $u_n = (2(n + 1) - 1)/(n + 1) = 2 - 1/(n + 1)$.

• Majorée par 2 : $2 - u_n = 1/(n + 1) > 0$, donc $u_n < 2$.

• Minorée par 1 : $u_n - 1 = n/(n + 1) \geq 0$, donc $u_n \geq 1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < 2$. La suite est **bornée**.

EXERCICE D'APPLICATION — Partie II

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = (3n + 2)/(n + 2)$.

1) Écrire v_n sous la forme $a + b/(n + 2)$, avec a et b deux réels à déterminer.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq v_n < 3$. Conclure.

CORRIGÉ

1) $3n + 2 = 3(n + 2) - 4$, donc $v_n = 3 - 4/(n + 2)$: **$a = 3$ et $b = -4$**.

2) $v_n - 1 = 2n/(n + 2) \geq 0$, donc $v_n \geq 1$. Et $3 - v_n = 4/(n + 2) > 0$, donc $v_n < 3$. Ainsi $1 \leq v_n < 3$ pour tout n : la suite est minorée par 1 et majorée par 3, donc **bornée**.

III. THÉORÈME DE VARIATION D'UNE SUITE

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

• (u_n) est **croissante** si, pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$; **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$.

• (u_n) est **décroissante** si, pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$; **strictement décroissante** si $u_{n+1} < u_n$.

• (u_n) est **constante** si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.

• (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

PROPRIÉTÉ / THÉORÈME

Théorème de variation. Pour déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) :

• si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n, alors (u_n) est croissante ; si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n, elle est décroissante ;

• si tous les termes sont strictement positifs : $u_{n+1}/u_n \geq 1$ pour tout n ⇒ croissante ; $u_{n+1}/u_n \leq 1$ pour tout n ⇒ décroissante ;

• si $u_n = f(n)$ et que f est croissante (resp. décroissante) sur $[0 ; +\infty[$, alors (u_n) est croissante (resp. décroissante).

MÉTHODE

① **Différence :** calculer $u_{n+1} - u_n$, la réduire au même dénominateur, factoriser, puis étudier son signe.

② **Quotient :** si $u_n > 0$ pour tout n (surtout avec des puissances ou des factorielles), comparer u_{n+1}/u_n à 1.

③ **Fonction :** si $u_n = f(n)$, étudier les variations de f avec sa dérivée.

④ **Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$:** on étudie le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle où se trouvent les termes, ou on raisonne par récurrence. *Attention :* une suite peut être croissante à partir d'un certain rang seulement.

EXEMPLE

Exemple 1. $u_n = n/(n + 1)$. On calcule $u_{n+1} - u_n = (n + 1)/(n + 2) - n/(n + 1) = [(n + 1)^2 - n(n + 2)] / [(n + 1)(n + 2)] = 1/[(n + 1)(n + 2)] > 0$. La suite est **strictement croissante**.

Exemple 2. $u_n = 2^n/n!$ pour $n \geq 1$ (tous les termes sont strictement positifs). $u_{n+1}/u_n = [2^{n+1}/(n + 1)!] \times [n!/2^n] = 2/(n + 1) \leq 1$ pour $n \geq 1$. La suite est **décroissante** à partir de $n = 1$.

EXERCICE D'APPLICATION — Partie III

1) Étudier le sens de variation de la suite (v_n) définie par $v_n = (2n + 3)/(n + 1)$.

2) Soit (w_n) définie par $w_n = n^2 - 6n$. Calculer $w_{n+1} - w_n$ et en déduire le sens de variation de (w_n) en distinguant selon les valeurs de n.

CORRIGÉ

1) $v_n = 2 + 1/(n + 1)$. $v_{n+1} - v_n = 1/(n + 2) - 1/(n + 1) = -1/[(n + 1)(n + 2)] < 0$. La suite est **strictement décroissante**.

2) $w_{n+1} - w_n = (n + 1)^2 - 6(n + 1) - n^2 + 6n = 2n - 5$. Si $n \leq 2$: $2n - 5 < 0$ donc $w_{n+1} < w_n$ (la suite décroît jusqu'à w_3). Si $n \geq 3$: $2n - 5 > 0$, donc $w_{n+1} > w_n$. La suite est **strictement décroissante** pour $0 \leq n \leq 3$ et **strictement croissante** à partir de $n = 3$ (minimum $w_3 = -9$).

IV. CONVERGENCE D'UNE SUITE

DÉFINITION

• Une suite (u_n) **converge** vers le réel ℓ si u_n devient aussi proche de ℓ qu'on le souhaite dès que n est assez grand. On écrit $\lim u_n = \ell$ $(n \to +\infty)$.

• Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente** : sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$, ou bien elle n'a pas de limite (exemple : $u_n = (-1)^n$).

PROPRIÉTÉ / THÉORÈME

Unicité : si une suite converge, sa limite est unique. **Toute suite convergente est bornée** (la réciproque est fausse : $(-1)^n$ est bornée mais divergente).

1. Limites de référence

Suite	Limite	Suite	Limite
$1/n$, $1/n^2$, $1/\sqrt{n}$	0	n, n^2, $\sqrt{n}$	$+\infty$
q^n avec $\lvert q\rvert < 1$	0	q^n avec $q > 1$	$+\infty$
q^n avec $q = 1$	1	q^n avec $q \leq -1$	pas de limite

2. Opérations sur les limites

Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$ (réels), alors $\lim (u_n + v_n) = \ell + \ell'$, $\lim (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$, et $\lim u_n/v_n = \ell/\ell'$ si $\ell' \neq 0$. Les **formes indéterminées** ($+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; ∞/∞ ; $0/0$) se lèvent par factorisation du terme dominant ou par multiplication par l'expression conjuguée.

EXEMPLE

• $\lim (3n^2 + 1)/(n^2 + n)$: on factorise n^2 : $(3 + 1/n^2)/(1 + 1/n) \to 3/1 = \mathbf{3}$.

• $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \mathbf{0}$ (multiplication par l'expression conjuguée).

3. Théorèmes de comparaison et de convergence

PROPRIÉTÉ / THÉORÈME

(T1) Comparaison. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$. Si $v_n \leq u_n$ et $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim v_n = -\infty$.

(T2) Majoration de l'écart. Si $\lvert u_n - \ell\rvert \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = \ell$.

(T3) Théorème des gendarmes. Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim u_n = \ell$.

(T4) Suites monotones. Toute suite **croissante et majorée** converge. Toute suite **décroissante et minorée** converge. Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$; une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

(T5) Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$. On résout donc l'équation $f(x) = x$ pour trouver la limite possible.

MÉTHODE

Pour étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$: **(a)** montrer par récurrence qu'elle est bornée ; **(b)** étudier sa monotonie ; **(c)** conclure à la convergence par le théorème (T4) ; **(d)** déterminer la limite ℓ en résolvant $\ell = f(\ell)$ et en retenant la solution compatible avec l'encadrement.

EXEMPLE

Énoncé : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

① **Encadrement.** Montrons par récurrence que $0 \leq u_n \leq 2$. Pour $n = 0$: $0 \leq u_0 = 0 \leq 2$. Si $0 \leq u_n \leq 2$, alors $2 \leq u_n + 2 \leq 4$, donc $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$, d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

② **Monotonie.** $u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n + 2 - u_n^2 = -(u_n - 2)(u_n + 1) \geq 0$ car $u_n \leq 2$ et $u_n + 1 > 0$. Comme u_{n+1} et u_n sont positifs, $u_{n+1} \geq u_n$: la suite est croissante.

③ **Convergence.** (u_n) est croissante et majorée par 2 : elle **converge** vers un réel ℓ.

④ **Limite.** $\ell = \sqrt{(\ell + 2)}$ avec $\ell \geq 0$, donc $\ell^2 = \ell + 2$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, soit $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\boldsymbol{\ell = 2}$.

EXERCICE D'APPLICATION — Partie IV

1) Calculer la limite de la suite $u_n = (3n^2 + 1)/(n^2 + n + 1)$.

2) Soit $v_n = (n + \cos n)/(n + 2)$. Montrer que $n - 1 \leq n + \cos n \leq n + 1$, puis encadrer v_n et déterminer sa limite par le théorème des gendarmes.

3) Soit $q = 0{,}8$. Calculer $\lim (5 \times 0{,}8^n + 2)$.

CORRIGÉ

1) En factorisant n^2 : $u_n = (3 + 1/n^2)/(1 + 1/n + 1/n^2)$. Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1 : $\mathbf{\lim u_n = 3}$.

2) $-1 \leq \cos n \leq 1$, donc $n - 1 \leq n + \cos n \leq n + 1$. En divisant par $n + 2 > 0$: $(n - 1)/(n + 2) \leq v_n \leq (n + 1)/(n + 2)$. Or $(n - 1)/(n + 2) = (1 - 1/n)/(1 + 2/n) \to 1$ et $(n + 1)/(n + 2) \to 1$. D'après le théorème des gendarmes, $\mathbf{\lim v_n = 1}$.

3) Comme $|0{,}8| < 1$, $0{,}8^n \to 0$. Donc $5 \times 0{,}8^n + 2 \to \mathbf{2}$.

RÉCAPITULATIF DE LA LEÇON

Notion	À retenir	Outil principal
Récurrence	Initialisation + hérédité ⇒ propriété vraie pour tout $n \geq n_0$	Supposer P(n), démontrer P(n+1)
Majorée / minorée / bornée	$u_n \leq M$; $u_n \geq m$; $m \leq u_n \leq M$	Signe de $u_n - M$; encadrement ; récurrence
Variation	$u_{n+1} - u_n \geq 0$: croissante ; ≤ 0 : décroissante	Différence ; quotient ($u_n > 0$) ; f(n)
Convergence	$\lim u_n = \ell$ réel ; sinon divergente	Limites usuelles ; gendarmes ; comparaison
Théorème fondamental	Croissante et majorée (ou décroissante et minorée) ⇒ convergente	Puis résoudre $\ell = f(\ell)$

FICHE D'EXERCICES — LEÇON 7 : SUITES NUMÉRIQUES

EXERCICE 1 : QCM

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier le numéro de la question et la lettre de la bonne réponse.

N°	Question	A	B	C	D
1	La suite $u_n = 3 - 1/(n+1)$ est :	minorée par 3	majorée par 3	décroissante	divergente
2	La suite $u_n = (-1)^n$ est :	croissante	bornée	convergente	majorée par 0
3	(u_n) géométrique de raison 0,5 et $u_0 = 4$. Sa limite est :	0	4	$+\infty$	2
4	Toute suite croissante et majorée est :	divergente	convergente	constante	négative
5	$\lim (2n+1)/(n+3)$ est égale à :	0	1	2	$+\infty$

EXERCICE 2 : Récurrence

1) Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Montrer par récurrence que $u_n = 2^{n+2} - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

3) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $2^n \geq n + 1$.

EXERCICE 3 : Suites bornées

1) Soit $u_n = (4n+1)/(n+1)$. Montrer que $1 \leq u_n < 4$ pour tout n. Conclure.

2) Soit $v_n = (-1)^n \times n/(n+1)$. Montrer que $|v_n| < 1$. La suite (v_n) est-elle bornée ?

3) Soit $w_n = n^2 + 1$. Montrer que (w_n) est minorée mais n'est pas majorée.

EXERCICE 4 : Variation

1) Étudier le sens de variation de $u_n = 3n - n^2$ (calculer $u_{n+1} - u_n$).

2) Étudier le sens de variation de $v_n = 2^n/(n+1)$ (on pourra comparer v_{n+1}/v_n à 1).

3) Soit (a_n) la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 10. Donner son sens de variation et calculer $a_0 + a_1 + \ldots + a_{10}$.

EXERCICE 5 : Limites

1) Calculer les limites : (a) $\lim (5n^2+2)/(2n^2 - n + 1)$; (b) $\lim (3^n - 2^n)/(3^n + 1)$; (c) $\lim (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$.

2) Soit $u_n = (n + \sin n)/(n^2 + 1)$. Encadrer u_n puis déterminer sa limite.

EXERCICE 6 : Problème de synthèse

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (2u_n + 3)/(u_n + 2)$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$. (On pourra utiliser que la fonction $f : x \mapsto (2x+3)/(x+2)$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.)

3) Montrer que $u_{n+1} - u_n = (3 - u_n^2)/(u_n + 2)$. En déduire le sens de variation de (u_n).

4) Justifier que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

CORRIGÉ DE LA FICHE D'EXERCICES

Exercice 1 : QCM

Question	1	2	3	4	5
Réponse	B	B	A	B	C

Justifications : (1) $3 - 1/(n+1) < 3$. (2) $(-1)^n \in \{-1 ; 1\}$, bornée mais divergente. (3) $|0{,}5| < 1$ donc $4 \times 0{,}5^n \to 0$. (4) théorème des suites monotones. (5) $(2 + 1/n)/(1 + 3/n) \to 2$.

Exercice 2

1) $n = 0$: $2^2 - 3 = 1 = u_0$. Hérédité : si $u_n = 2^{n+2} - 3$, alors $u_{n+1} = 2(2^{n+2} - 3) + 3 = 2^{n+3} - 3$. Donc la propriété est vraie pour tout n.

2) $n = 0$: 0 est divisible par 3. Hérédité : $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$. Par hypothèse, $n^3 - n$ est divisible par 3, et $3(n^2 + n)$ l'est aussi. Donc la somme l'est.

3) $n = 1$: $2 \geq 2$. Hérédité : $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2(n+1) = 2n + 2 \geq n + 2$. Donc $2^{n+1} \geq (n+1) + 1$.

Exercice 3

1) $u_n = 4 - 3/(n+1)$. $u_n - 1 = 3n/(n+1) \geq 0$ et $4 - u_n = 3/(n+1) > 0$. Donc $1 \leq u_n < 4$: la suite est bornée.

2) $|v_n| = n/(n+1) < 1$ car $n < n + 1$. Donc $-1 < v_n < 1$: (v_n) est bornée.

3) $w_n \geq 1$ donc minorée. Pour tout réel M, dès que $n > \sqrt{|M|}$, on a $n^2 + 1 > M$: aucun réel ne majore la suite, elle n'est pas majorée.

Exercice 4

1) $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - (n+1)^2 - 3n + n^2 = 2 - 2n$. Si $n = 0$: $u_1 > u_0$; si $n = 1$: $u_2 = u_1$; si $n \geq 2$: $u_{n+1} < u_n$. La suite est croissante pour $n \leq 1$ et strictement décroissante à partir de $n = 1$.

2) $v_n > 0$ et $v_{n+1}/v_n = 2(n+1)/(n+2)$. Or $2(n+1) - (n+2) = n \geq 0$ donc $v_{n+1}/v_n \geq 1$: la suite est croissante.

3) $r = -2 < 0$: décroissante. $a_{10} = 10 - 20 = -10$; somme de 11 termes : $11 \times (10 + (-10))/2 = \mathbf{0}$.

Exercice 5

1) (a) $(5 + 2/n^2)/(2 - 1/n + 1/n^2) \to \mathbf{5/2}$. (b) On divise par 3^n : $(1 - (2/3)^n)/(1 + (1/3)^n) \to \mathbf{1}$. (c) $\sqrt{n+3} - \sqrt{n} = 3/(\sqrt{n+3} + \sqrt{n}) \to \mathbf{0}$.

2) $-1 \leq \sin n \leq 1$ donne $(n-1)/(n^2+1) \leq u_n \leq (n+1)/(n^2+1)$. Les deux bornes tendent vers 0 (on factorise n^2). D'après les gendarmes, $\mathbf{\lim u_n = 0}$.

Exercice 6

1) $u_1 = 5/3$; $u_2 = (10/3 + 3)/(5/3 + 2) = (19/3)/(11/3) = 19/11$.

2) $n = 0$: $1 \leq 1 \leq \sqrt{3}$. Hérédité : si $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$, f étant croissante, $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$, c'est-à-dire $5/3 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ (car $f(\sqrt{3}) = (2\sqrt{3} + 3)/(\sqrt{3} + 2) = \sqrt{3}$). Comme $1 \leq 5/3$, on a $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.

3) $u_{n+1} - u_n = (2u_n + 3 - u_n^2 - 2u_n)/(u_n + 2) = (3 - u_n^2)/(u_n + 2) \geq 0$ car $u_n \leq \sqrt{3}$. La suite est croissante.

4) (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$: elle converge vers ℓ. f étant continue, $\ell = (2\ell + 3)/(\ell + 2)$, donc $\ell^2 = 3$. Comme $\ell \geq 1 > 0$, $\boldsymbol{\ell = \sqrt{3}}$.

LEÇON 8 : PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL

Durée : 16 h de cours + 2 h de séance de régulation **Déroulement du cours :** 1) Primitives 2) Calcul intégral	**Pré-requis :** dérivées usuelles et opérations sur les dérivées ; fonctions ln et exp ; résolution d'équations et d'inéquations ; lecture graphique.

I. PRIMITIVES	1. Définition et propriétés 2. Primitives des fonctions usuelles 3. Opérations sur les primitives
II. CALCUL INTÉGRAL	1. Intégrale d'une fonction continue 2. Propriétés de l'intégrale 3. Intégration par parties 4. Valeur moyenne 5. Calcul d'aires
III. FICHE D'EXERCICES	9 exercices, suivis des éléments de réponse

I. PRIMITIVES

Dans toute la suite, **K** désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Définition et propriétés

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle K. On appelle **primitive de f sur K** toute fonction F **dérivable sur K** telle que, pour tout x de K : $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE

La fonction $F(x) = x^3$ est une primitive de $f(x) = 3x^2$ sur $\mathbb{R}$, car $F'(x) = 3x^2 = f(x)$. Les fonctions $x \mapsto x^3 + 5$ et $x \mapsto x^3 - 2$ sont aussi des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉ

P1 (existence). Toute fonction continue sur un intervalle K admet des primitives sur K.

P2. Si F est une primitive de f sur K, alors les primitives de f sur K sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où k est un nombre réel quelconque.

P3 (condition initiale). Soit $x_0 \in K$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une **unique** primitive F de f sur K telle que $F(x_0) = y_0$.

REMARQUE / MÉTHODE

Pour trouver la primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$: (1) on détermine une primitive G de f ; (2) on écrit $F(x) = G(x) + k$; (3) on calcule k grâce à $F(x_0) = y_0$.

Exemple : primitive F de $f(x) = 2x + 3$ telle que $F(1) = 6$. On a $F(x) = x^2 + 3x + k$; $F(1) = 4 + k = 6$ donc $k = 2$ et $F(x) = x^2 + 3x + 2$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Vérifier que $F(x) = x^4 - 3x^2 + x$ est une primitive de $f(x) = 4x^3 - 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Vérifier que $G(x) = x\,e^x$ est une primitive de $g(x) = (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la primitive H de $h(x) = 3x^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $H(2) = 5$.

Correction

1) $F'(x) = 4x^3 - 6x + 1 = f(x)$, donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) $G'(x) = 1 \times e^x + x\,e^x = (x+1)e^x = g(x)$, donc G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3) $H(x) = x^3 - 2x + k$. $H(2) = 8 - 4 + k = 4 + k = 5$ donc $k = 1$. Ainsi $H(x) = x^3 - 2x + 1$.

2. Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau, k désigne un nombre réel quelconque (constante d'intégration).

Fonction f	Primitives F de f	Intervalle K
$a \quad (a \in \mathbb{R})$	$ax + k$	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2} + k$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + k$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n \geq 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + k$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$

3. Opérations sur les primitives

PROPRIÉTÉ (linéarité)

Soient F et G des primitives respectives de f et g sur K, et k un réel.

• **Somme :** F + G est une primitive de f + g sur K. • **Produit par un réel :** kF est une primitive de kf sur K.

Si u est une fonction dérivable sur K, on a les formes suivantes (k désigne une constante réelle) :

Fonction f	Primitives F de f	Conditions
$u'\,u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$	n entier, $n \neq -1$ ($u \neq 0$ si $n < 0$)

Fonction f	Primitives F de f	Conditions
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+k$	u ne s'annule pas sur K
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+k$	u > 0 sur K
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+k$	u ne s'annule pas sur K
$u'e^u$	e^u+k	—
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+k$	a ≠ 0
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+k$	a ≠ 0 ; ax + b ≠ 0 sur K
$(ax+b)^n$	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+k$	a ≠ 0 ; n ≠ −1

EXEMPLE

a) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$: avec $u(x)=x^2+1$ et $u'(x)=2x$, on a $F(x)=\ln(x^2+1)$ (car $x^2+1>0$).

b) $g(x)=(2x+1)(x^2+x)^3$: avec $u(x)=x^2+x$ et $u'(x)=2x+1$, on a $G(x)=\frac{(x^2+x)^4}{4}$.

c) $h(x)=e^{2x+1}$: $H(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}$.

EXERCICE D'APPLICATION

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué :

a) $f(x)=5x^4-3x^2+7$ sur $\mathbb{R}$ **b)** $g(x)=2x(x^2+3)^4$ sur $\mathbb{R}$ **c)** $h(x)=\frac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

d) $k(x)=e^{-2x+3}$ sur $\mathbb{R}$ **e)** $l(x)=\frac{1}{3x+2}$ sur $]-\frac{2}{3};+\infty[$ **f)** $p(x)=\frac{3}{x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

Correction

a) $F(x)=x^5-x^3+7x$ **b)** $G(x)=\frac{(x^2+3)^5}{5}$ **c)** $H(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ (car $h=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}$)

d) $K(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x+3}$ **e)** $L(x)=\frac{1}{3}\ln(3x+2)$ **f)** $P(x)=-\frac{3}{x}+4\sqrt{x}$

II. CALCUL INTÉGRAL

1. Intégrale d'une fonction continue

DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K, et F une primitive de f sur K.

On appelle **intégrale de a à b de f** le nombre réel $F(b) - F(a)$. On le note :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

a et b sont les **bornes** de l'intégrale ; on lit « somme (ou intégrale) de a à b de f(x) dx ».

REMARQUE / MÉTHODE

• Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie : avec $F(x) + k$, on obtient $(F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$. On prend donc la primitive la plus simple (k = 0).

• La variable est « muette » : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

EXEMPLE

a) $\int_1^3 (2x+1)\,dx = [x^2 + x]_1^3 = (9+3) - (1+1) = 10.$

b) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$

EXERCICE D'APPLICATION

Calculer : **A** $= \int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$ **B** $= \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ **C** $= \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ **D** $= \int_0^1 e^{2x}\,dx$

Correction

A $= [x^3 - x^2 + x]_0^2 = 8 - 4 + 2 = 6.$

B $= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

C $= [\ln(x^2+1)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

D $= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}.$

2. Propriétés de l'intégrale

PROPRIÉTÉ

Soient f et g continues sur K, a, b, c éléments de K, et k un réel.

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

2) Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

3) Linéarité : $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ et $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$

4) Positivité : si $a \le b$ et $f \ge 0$ sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$

5) Ordre : si $a \le b$ et $f \le g$ sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

6) Encadrement : si $a \le b$ et $m \le f(x) \le M$ sur [a ; b], alors $m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a).$

EXEMPLE

Si $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$ et $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$, alors par Chasles $\int_0^3 f(x)\,dx = 2 + 5 = 7$ et $\int_3^1 f(x)\,dx = -5$.

EXERCICE D'APPLICATION

Soient f et g continues sur [0 ; 5] telles que $\int_0^2 f = 3$, $\int_2^5 f = -1$ et $\int_0^5 g = 4$.

1) Calculer $\int_0^5 f(x)\,dx$ et $\int_5^2 f(x)\,dx$. **2)** Calculer $\int_0^5 (2f(x) - 3g(x))dx$.

3) En utilisant l'encadrement de $\frac{1}{x}$ sur [1 ; 2], encadrer $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Correction

1) $\int_0^5 f = 3 + (-1) = 2$; $\int_5^2 f = -\int_2^5 f = 1$.

2) $2 \times 2 - 3 \times 4 = 4 - 12 = -8$.

3) Pour $1 \leq x \leq 2$, on a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$; la longueur de [1 ; 2] est 1, donc $\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \leq 1$.

3. Intégration par parties

THÉORÈME (formule d'intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur K, dont les dérivées u′ et v′ sont continues sur K. Pour tous a et b de K :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

REMARQUE / MÉTHODE

On choisit u (que l'on dérive) et v′ (dont on cherche une primitive v) de façon que l'intégrale obtenue soit plus simple.

• Pour $P(x)\,e^x$ (P polynôme) : $u = P$ et $v' = e^x$. • Pour $P(x)\ln x$: $u = \ln x$ et $v' = P(x)$.

EXEMPLE

Calculons $I = \int_0^1 x\,e^x\,dx$. Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

$I = [x\,e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$.

EXERCICE D'APPLICATION

Calculer à l'aide d'une intégration par parties : **J** $= \int_0^1 (x+1)\,e^x\,dx$ et **K** $= \int_1^e x \ln x\,dx$.

Correction

J : $u = x + 1$, $v' = e^x$ d'où $J = [(x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e - 1 - (e - 1) = e$.

K : $u = \ln x$, $v' = x$ donc $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. D'où $K = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$.

4. Valeur moyenne d'une fonction

DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur [a ; b] avec $a < b$. La **valeur moyenne** de f sur [a ; b] est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

EXEMPLE

Valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur [0 ; 3] : $\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$, donc $\mu = \frac{9}{3-0} = 3$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Calculer la valeur moyenne de $f(x) = 3x^2 + 2x$ sur [1 ; 3].

2) Le prix d'un article (en milliers de F CFA) évolue pendant 4 mois selon $p(t) = 2t + 5$, t étant le temps en mois, $t \in [0\,;4]$. Calculer le prix moyen de l'article sur cette période.

Correction

1) $\int_1^3 (3x^2 + 2x)dx = [x^3 + x^2]_1^3 = 36 - 2 = 34$; $\mu = \frac{34}{2} = 17$.

2) $\int_0^4 (2t + 5)dt = [t^2 + 5t]_0^4 = 36$; $\mu = \frac{36}{4} = 9$, soit un prix moyen de 9 000 F CFA.

5. Calcul d'aires

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). L'**unité d'aire** (u.a.) est l'aire du rectangle construit sur [OI] et [OJ]. Si OI = a cm et OJ = b cm, alors 1 u.a. = a × b cm².

PROPRIÉTÉ

Soit f continue sur [a ; b] (avec $a < b$) et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1) Si $f \geq 0$ sur [a ; b], l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b est : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$ u.a.

2) Si $f \leq 0$ sur [a ; b], cette aire est $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,dx$ u.a.

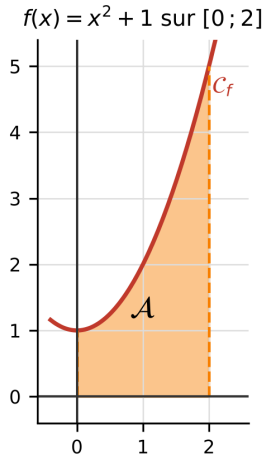
3) Si f et g sont continues avec $f \geq g$ sur [a ; b], l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites x = a, x = b est : $\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ u.a.

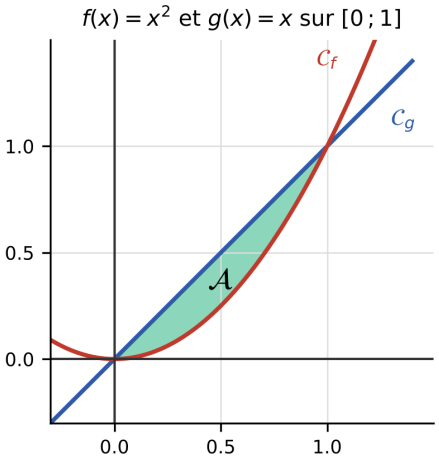
EXEMPLE

a) Aire du domaine limité par la courbe de $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 2 (figure de gauche) : $\mathcal{A} = \int_0^2 (x^2 + 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = \frac{14}{3}$ u.a. Avec OI = OJ = 1 cm : $\mathcal{A} = \frac{14}{3}$ cm² ≈ 4,67 cm².

b) Aire comprise entre $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ sur [0 ; 1] (figure de droite). Sur [0 ; 1], $x \geq x^2$, donc

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$$





EXERCICE D'APPLICATION

Le repère est orthogonal avec OI = 2 cm et OJ = 3 cm (donc 1 u.a. = 6 cm²).

1) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe de $f(x) = 4x - x^2$, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 4, en u.a. puis en cm².

2) Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes de $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x^2$ sur $[-1 ; 2]$, en u.a. puis en cm². (On vérifiera que $f \geq g$ sur $[-1 ; 2]$.)

Correction

1) $f(x) = x(4 - x) \geq 0$ sur [0 ; 4] ; $\mathcal{A} = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$ u.a., soit $\frac{32}{3} \times 6 = 64$ cm².

2) $f(x) - g(x) = -x^2 + x + 2 = -(x - 2)(x + 1) \geq 0$ sur $[-1 ; 2]$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^2 = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2} \text{ u.a., soit } \frac{9}{2} \times 6 = 27 \text{ cm}^2.$$

III. FICHE D'EXERCICES

Exercice 1 — Vrai ou faux (justifier)

a) La fonction $x \mapsto x^2 + 3$ est une primitive de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

b) Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet une seule primitive sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$.

d) $\int_0^1 x\,dx = 1$. **e)** Si f est positive sur [a ; b] (a ≤ b), alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Exercice 2 — Calcul de primitives

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle donné :

1) $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$ **2)** $g(x) = (2x+3)(x^2+3x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$

3) $h(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ sur $\mathbb{R}$ **4)** $k(x) = 4e^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$

5) $l(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$ **6)** $p(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ sur $]1\,;+\infty[$ **7)** $q(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 3 — Primitive avec condition initiale

Soit $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$. **2)** Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1. **3)** Déterminer la primitive G de f telle que $G(0) = 4$.

Exercice 4 — Calcul d'intégrales

Calculer : **1)** $\int_1^2 (4x^3 - 2x)\,dx$ **2)** $\int_0^1 (2x+2)(x^2+2x)^2\,dx$ **3)** $\int_1^e \dfrac{x+1}{x}\,dx$

4) $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ **5)** $\int_0^2 \dfrac{x}{x^2+1}\,dx$ **6)** $\int_1^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Exercice 5 — Propriétés de l'intégrale

Soient f et g continues sur [0 ; 4] telles que $\int_0^1 f = 2$, $\int_1^4 f = 5$ et $\int_0^4 g = -3$. Calculer :

$\int_0^4 f$, $\int_4^1 f$, $\int_0^4 (f+g)$, $\int_0^4 (3f - 2g)$, $\int_1^4 (f(x) + 2)dx$.

Exercice 6 — Intégration par parties

Calculer à l'aide d'une intégration par parties : **1)** $\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx$ **2)** $\int_1^e \ln x\,dx$ **3)** $\int_1^e x^2 \ln x\,dx$

Exercice 7 — Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne : **1)** de $f(x) = x^2 - 2x + 3$ sur [0 ; 3] **2)** de $g(x) = e^x$ sur $[0\,;\ln 3]$.

Exercice 8 — Calcul d'aires

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, I, J) avec OI = 2 cm et OJ = 1 cm (donc 1 u.a. = 2 cm²). Calculer, en u.a. puis en cm², l'aire du domaine :

1) limité par la courbe de $f(x) = -x^2 + 3x$, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3 ;

2) compris entre les courbes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$ sur [0 ; 2] ;

3) limité par la courbe de $f(x) = x^2 - 1$, l'axe des abscisses et les droites x = −1 et x = 1 (étudier d'abord le signe de f sur [−1 ; 1]).

Exercice 9 — Problème (économie)

Pour une production de x tonnes d'un produit ($x \in [0\,;10]$), le coût marginal, en milliers de F CFA par tonne, est $C_m(x) = 6x^2 - 12x + 20$. Le coût fixe est de 50 milliers de F CFA, c'est-à-dire $C(0) = 50$, où C est le coût total.

1) Sachant que C est une primitive de C_m, déterminer $C(x)$. **2)** Calculer $\int_3^5 C_m(x)\,dx$ et interpréter le résultat. **3)** Calculer la valeur moyenne de C_m sur [0 ; 10].

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE

Ex 1 : a) Vrai (la dérivée de $x^2 + 3$ est $2x$). b) Faux : il y en a une infinité ($F + k$). c) Vrai : $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$. d) Faux : $\int_0^1 x\,dx = \dfrac{1}{2}$. e) Vrai (positivité).

Ex 2 : 1) $2x^3 - 2x^2 + 3x$ 2) $\dfrac{(x^2+3x-1)^3}{3}$ 3) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)$ 4) $2e^{2x-1}$ 5) $-\dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}$ 6) $\ln(x^2-1)$ 7) $\dfrac{(\ln x)^2}{2}$ (à une constante près).

Ex 3 : 1) $x^3 - 3x^2 + 2x + k$. 2) $F(1) = 1 - 3 + 2 + k = k = 0$ donc $F(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. 3) $G(0) = k = 4$ donc $G(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$.

Ex 4 : 1) $[x^4 - x^2]_1^2 = 12 - 0 = 12$ 2) $\left[\dfrac{(x^2+2x)^3}{3}\right]_0^1 = 9$ 3) $[x + \ln x]_1^e = e$ 4) $1 - \dfrac{1}{e}$ 5) $\dfrac{1}{2}\ln 5$ 6) $[2\sqrt{x}]_1^4 = 2$.

Ex 5 : $\int_0^4 f = 7$; $\int_4^1 f = -5$; $\int_0^4 (f+g) = 4$; $\int_0^4 (3f - 2g) = 21 + 6 = 27$; $\int_1^4 (f+2) = 5 + 2\times 3 = 11$.

Ex 6 : 1) $\dfrac{e^2+1}{4}$ 2) $[x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1$ 3) $\dfrac{2e^3+1}{9}$.

Ex 7 : 1) $\int_0^3 f = \left[\dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^3 = 9$, $\mu = 3$. 2) $\int_0^{\ln 3} e^x dx = 3 - 1 = 2$, $\mu = \dfrac{2}{\ln 3}$.

Ex 8 : 1) $\dfrac{9}{2}$ u.a. = 9 cm². 2) $\dfrac{4}{3}$ u.a. = $\dfrac{8}{3}$ cm². 3) f ≤ 0 sur [−1 ; 1] : $\mathcal{A} = -\int_{-1}^1 (x^2-1)dx = \dfrac{4}{3}$ u.a. = $\dfrac{8}{3}$ cm².

Ex 9 : 1) $C(x) = 2x^3 - 6x^2 + 20x + 50$. 2) $\int_3^5 C_m = C(5) - C(3) = 250 - 110 = 140$: coût supplémentaire de 140 milliers de F CFA pour passer de 3 à 5 tonnes. 3) $\mu = \dfrac{C(10) - C(0)}{10} = \dfrac{1\,600}{10} = 160$ milliers de F CFA par tonne.

Bon courage !

FICHE DE COURS — LEÇON 9 : NOMBRES COMPLEXES

DÉROULEMENT DU COURS

I. Étude algébrique

II. Étude trigonométrique

III. Forme exponentielle

IV. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Durée : 16 h de cours + 2 h de séance de régulation.

OBJECTIFS

- Calculer avec les nombres complexes sous forme algébrique (somme, produit, inverse, quotient, conjugué, module).
- Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe ; passer d'une forme à l'autre.
- Utiliser la formule de Moivre et la forme exponentielle pour calculer des puissances.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ des équations du premier degré, du second degré à coefficients réels, et du type $z^n = a$.

I. ÉTUDE ALGÉBRIQUE

1. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

DÉFINITION

Il existe un nombre, noté **i**, tel que **$i^2 = -1$**. On appelle **nombre complexe** tout nombre de la forme **$z = a + ib$** où a et b sont deux réels. L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

- **$a + ib$** est la **forme algébrique** de z.
- **$a = Re(z)$** est la **partie réelle** de z ; **$b = Im(z)$** est sa **partie imaginaire** (c'est un réel).
- Si $b = 0$, z est un **réel** ; si $a = 0$, $z = ib$ est un **imaginaire pur**. On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

PROPRIÉTÉS

Égalité : $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$. En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.

Puissances de i : $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$. Plus généralement $i^{4k+r} = i^r$ (on retient le reste de la division de l'exposant par 4).

EXEMPLE

• $(x + 2) + i(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ et $y - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ et $y = 3$.

• i^{2026} : $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc $i^{2026} = i^2 = -1$.

2. Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ restent valables (on remplace i^2 par -1).

RÈGLES DE CALCUL

Somme : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

Produit : $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Inverse $(z \neq 0)$: $1/z = (a - ib)/(a^2 + b^2)$.

Quotient $(z \neq 0)$: on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur : $z'/z = z'(a - ib)/(a^2 + b^2)$.

Identités : $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$; $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

EXEMPLE

- $(2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = \mathbf{5 + i}$.
- $1/(3 - 4i) = (3 + 4i)/(3^2 + 4^2) = \mathbf{(3 + 4i)/25} = 3/25 + (4/25)i$.
- $(1 + 2i)/(3 - i) = (1 + 2i)(3 + i)/10 = (3 + i + 6i + 2i^2)/10 = \mathbf{(1 + 7i)/10}$.

3. Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION

Le **conjugué** de $z = a + ib$ est le nombre complexe $\mathbf{\bar{z} = a - ib}$.

PROPRIÉTÉS

Pour tous z, z' de $\mathbb{C}$ et tout entier n : $\text{conj}(z + z') = \bar{z} + \bar{z'}$; $\text{conj}(z \times z') = \bar{z} \times \bar{z'}$; $\text{conj}(z/z') = \bar{z}/\bar{z'}$ $(z' \neq 0)$; $\text{conj}(z^n) = (\bar{z})^n$; $\text{conj}(\bar{z}) = z$.

$z + \bar{z} = 2a = 2\text{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2ib = 2i \cdot \text{Im}(z)$; $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$.

z est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

4. Représentation géométrique et module

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O ; u, v). Au nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M(a ; b) (on dit que z est l'**affixe** de M, et que M est l'**image** de z) et le vecteur OM de coordonnées (a ; b). L'axe des abscisses est l'**axe réel** et l'axe des ordonnées est l'**axe imaginaire**.

DÉFINITION

Le **module** de $z = a + ib$ est le réel positif $\mathbf{|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \times \bar{z}}}$. C'est la distance OM.

PROPRIÉTÉS

$|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|\bar{z}| = |-z| = |z|$; $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $|z^n| = |z|^n$; $|1/z| = 1/|z|$; $|z/z'| = |z|/|z'|$;

Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Géométrie : soient A et B d'affixes z_A et z_B. L'affixe du vecteur AB est $\mathbf{z_B - z_A}$; la distance $\mathbf{AB = |z_B - z_A|}$; le milieu I de [AB] a pour affixe $\mathbf{z_I = (z_A + z_B)/2}$.

Symétries : le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M(z) par rapport à l'axe réel ; celui d'affixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à O.

EXEMPLE

Si $z = 3 - 4i$: $|z| = \sqrt{9 + 16} = \mathbf{5}$. Si $z_A = 1 + i$ et $z_B = 4 + 5i$: $z_B - z_A = 3 + 4i$ donc AB = 5.

EXERCICE D'APPLICATION I

On donne $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 1 - 4i$.

1) Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 \times z_2$ et $|z_1|$.
2) Écrire z_1/z_2 sous forme algébrique.

3) Soient A et B les points d'affixes $2 + i$ et $-1 + 5i$. Déterminer l'affixe du vecteur AB, la distance AB et l'affixe du milieu I de [AB].

Correction

1) $z_1 + z_2 = 4 - 2i$; $z_1\, z_2 = (3 + 2i)(1 - 4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2 = \mathbf{11 - 10i}$; $|z_1| = \sqrt{(9 + 4)} = \mathbf{\sqrt{13}}$.

2) $z_1/z_2 = (3 + 2i)(1 + 4i)/(1 + 16) = (3 + 12i + 2i - 8)/17 = \mathbf{(-5 + 14i)/17} = -5/17 + (14/17)i$.

3) $z_{AB} = (-1 + 5i) - (2 + i) = \mathbf{-3 + 4i}$; $AB = \sqrt{(9 + 16)} = \mathbf{5}$; $z_I = (1 + 6i)/2 = \mathbf{1/2 + 3i}$.

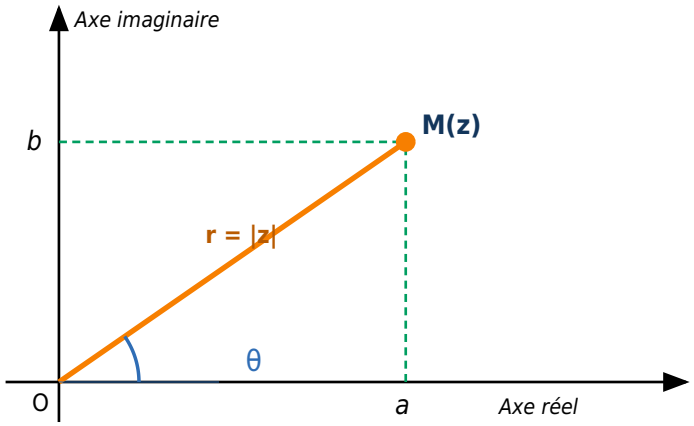
II. ÉTUDE TRIGONOMÉTRIQUE

1. Argument d'un nombre complexe non nul

DÉFINITION

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul d'image M. On appelle **argument** de z toute mesure θ (en radians) de l'angle orienté (u, OM). On note **arg(z) = θ [2π]** : un argument est défini à un multiple de 2π près.

Pour trouver θ, on calcule $r = |z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, puis on résout : **cos θ = a/r et sin θ = b/r**.



Sur la figure, pour M(z) avec $z = a + ib$:

- $a = r \cos \theta$;
- $b = r \sin \theta$;
- $r = |z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$;
- $\theta = \arg(z)$.

Cas particuliers : z réel positif → arg z = 0 ; z réel négatif → arg z = π ; z = ib avec b > 0 → arg z = π/2 ; z = ib avec b < 0 → arg z = −π/2.

Rappel : valeurs remarquables

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2
cos θ	1	√3/2	√2/2	1/2	0
sin θ	0	1/2	√2/2	√3/2	1

2. Forme trigonométrique

DÉFINITION

Tout complexe non nul z, de module r et d'argument θ, s'écrit **z = r (cos θ + i sin θ)** avec r > 0. C'est la **forme trigonométrique** de z. On la note aussi z = [r ; θ].

EXEMPLE

• $z = 1 + i$: $r = \sqrt{2}$; cos θ = 1/√2 = √2/2 et sin θ = √2/2, donc θ = π/4 : **z = √2 (cos π/4 + i sin π/4)**.

• $z = -1 + i\sqrt{3}$: $r = \sqrt{(1 + 3)} = 2$; cos θ = −1/2 et sin θ = √3/2, donc θ = 2π/3 : **z = 2 (cos 2π/3 + i sin 2π/3)**.

3. Propriétés des arguments

PROPRIÉTÉS

Pour z et z′ non nuls et n entier relatif (égalités modulo 2π) :

$\arg(z \times z') = \arg z + \arg z'$; $\arg(1/z) = -\arg z$; $\arg(z/z') = \arg z - \arg z'$;

$\arg(z^n) = n \times \arg z$; $\arg(\bar{z}) = -\arg z$; $\arg(-z) = \arg z + \pi$.

z est réel ⇔ $\arg z = 0\ [\pi]$; z est imaginaire pur ⇔ $\arg z = \pi/2\ [\pi]$.

RÈGLE

Produit et quotient en forme trigonométrique :

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta') = r\,r'\,[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$$

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) / r'(\cos\theta' + i\sin\theta') = (r/r')\,[\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')]$$

4. Formule de Moivre

FORMULE DE MOIVRE

Pour tout réel θ et tout entier relatif n :

$$\mathbf{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Plus généralement : $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

EXEMPLE

$(\cos\pi/12 + i\sin\pi/12)^6 = \cos(6\pi/12) + i\sin(6\pi/12) = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2 = \mathbf{i}$.

$(1+i)^4$: $1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$, donc $(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4 \times (-1) = \mathbf{-4}$.

EXERCICE D'APPLICATION II

On donne $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = -3i$.

1) Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2) En déduire le module et un argument de $z_1 \times z_2$ puis de z_1/z_2.

Correction

1) • z_1 : $r = \sqrt{(3+1)} = 2$; $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, $\sin\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = \pi/6$. $\mathbf{z_1 = 2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)}$.
• z_2 : $r = \sqrt{2}$; $\cos\theta = \sqrt{2}/2$, $\sin\theta = -\sqrt{2}/2 \Rightarrow \theta = -\pi/4$. $\mathbf{z_2 = \sqrt{2}[\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)]}$.
• z_3 : $r = 3$; $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\pi/2$. $\mathbf{z_3 = 3[\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)]}$.
2) $|z_1\,z_2| = 2 \times \sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$; $\arg(z_1\,z_2) = \pi/6 - \pi/4 = \mathbf{-\pi/12}$.
$|z_1/z_2| = 2/\sqrt{2} = \mathbf{\sqrt{2}}$; $\arg(z_1/z_2) = \pi/6 + \pi/4 = \mathbf{5\pi/12}$.

III. FORME EXPONENTIELLE

1. Notation $e^{i\theta}$

DÉFINITION

Pour tout réel θ, on pose $\mathbf{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$. Tout complexe non nul z de module r et d'argument θ s'écrit alors $\mathbf{z = r\,e^{i\theta}}$: c'est la **forme exponentielle** de z.

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels θ, θ′ et tout entier n :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $e^{i\theta} / e^{i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$; $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$;

$|e^{i\theta}| = 1$; $\text{conj}(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$; $r\,e^{i\theta} \times r'\,e^{i\theta'} = r\,r'\,e^{i(\theta+\theta')}$; $(r\,e^{i\theta})^n = r^n\,e^{in\theta}$.

Valeurs usuelles : $e^{i0} = 1$; $e^{i\pi/2} = i$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{-i\pi/2} = -i$.

2. Formules d'Euler

FORMULES D'EULER

$$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 \text{ et } \sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$$

Elles servent à **linéariser** des expressions trigonométriques.

EXEMPLE

• Passage à l'exponentielle : $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$. Donc $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\, e^{i2\pi} = 16 \times 1 = \mathbf{16}$.

• Linéarisation : $\cos^2\theta = [(e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2]^2 = (e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta})/4 = (1 + \cos 2\theta)/2$.

• Quotient : $(1+i)^{10}/(1-i)^6$: $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ et $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$. Le numérateur vaut $32\, e^{i5\pi/2} = 32i$ et le dénominateur $8\, e^{-i3\pi/2} = 8i$, donc le quotient est **4**.

EXERCICE D'APPLICATION III

On donne $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 + i$.

1) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2) Calculer $(z_1)^6$.
3) Calculer z_1^3 / z_2^2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Correction

1) z_1 : $r = 2$; $\cos\theta = 1/2$, $\sin\theta = -\sqrt{3}/2 \Rightarrow \theta = -\pi/3$: $\mathbf{z_1 = 2\, e^{-i\pi/3}}$. z_2 : $r = \sqrt{2}$; $\cos\theta = -\sqrt{2}/2$, $\sin\theta = \sqrt{2}/2 \Rightarrow \theta = 3\pi/4$: $\mathbf{z_2 = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}}$.

2) $(z_1)^6 = 2^6\, e^{-i2\pi} = \mathbf{64}$.

3) $z_1^3 = 8\, e^{-i\pi}$; $z_2^2 = 2\, e^{i3\pi/2}$. Le quotient vaut $4\, e^{-i5\pi/2} = \mathbf{4\, e^{-i\pi/2}}$ (à 2π près), c'est-à-dire $\mathbf{-4i}$.

IV. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

1. Racines carrées

MÉTHODES

Réel négatif : si $a < 0$, l'équation $z^2 = a$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$: $\mathbf{z = i\sqrt{(-a)}}$ et $\mathbf{z = -i\sqrt{(-a)}}$. Exemple : $z^2 = -9 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z = -3i$.

Complexe quelconque (méthode algébrique) : pour résoudre $z^2 = \alpha$ avec $z = x + iy$, on écrit le système $\mathbf{x^2 - y^2 = Re(\alpha)}$, $\mathbf{2xy = Im(\alpha)}$ et $\mathbf{x^2 + y^2 = |\alpha|}$. Tout nombre complexe non nul a exactement deux racines carrées opposées.

EXEMPLE

Résoudre $z^2 = 3 + 4i$. On a $|\alpha| = 5$. Le système $x^2 - y^2 = 3$ et $x^2 + y^2 = 5$ donne $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$. Comme $2xy = 4 > 0$, x et y sont de même signe. Solutions : $\mathbf{z = 2 + i}$ ou $\mathbf{z = -2 - i}$.

2. Équation du second degré à coefficients réels

THÉORÈME

Soit l'équation (E) : $\mathbf{az^2 + bz + c = 0}$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$. On pose $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$.

- Si $\mathbf{\Delta > 0}$: deux solutions réelles $z_{1,2} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$.
- Si $\mathbf{\Delta = 0}$: une solution double $z = -b/(2a)$.
- Si $\mathbf{\Delta < 0}$: deux solutions complexes conjuguées $z_{1,2} = (-b \pm i\sqrt{(-\Delta)})/(2a)$.

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, avec $\mathbf{z_1 + z_2 = -b/a}$ et $\mathbf{z_1\, z_2 = c/a}$.

EXEMPLE

• $z^2 + 2z + 5 = 0$: $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$. Solutions : $z = (-2 - 4i)/2 = \mathbf{-1 - 2i}$ et $z = \mathbf{-1 + 2i}$.

• $z^2 - 2z + 2 = 0$: $\Delta = 4 - 8 = -4$. Solutions : $z = (2 \pm 2i)/2 = \mathbf{1 - i}$ et $\mathbf{1 + i}$.

3. Équations contenant z et son conjugué

On pose $z = x + iy$ (x, y réels), on remplace $\bar{z}$ par $x - iy$, puis on identifie parties réelle et imaginaire.

EXEMPLE

Résoudre $2z + \bar{z} = 6 + i$. On obtient $2(x + iy) + (x - iy) = 3x + iy = 6 + i$, donc $x = 2$ et $y = 1$. Solution : $\mathbf{z = 2 + i}$.

4. Racines n-ièmes : équation $z^n = a$

THÉORÈME

Soit $\alpha = \rho\, e^{i\varphi}$ ($\rho > 0$). L'équation $z^n = \alpha$ admet exactement **n solutions** :

$$\mathbf{z_k = \rho^{1/n}\, e^{i(\varphi + 2k\pi)/n}},\ k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Pour $\alpha = 1$, ce sont les **racines n-ièmes de l'unité** : $z_k = e^{2ik\pi/n}$.

EXEMPLE

Résoudre $z^3 = 1$: $z_k = e^{2ik\pi/3}$, $k = 0, 1, 2$. Solutions : $\mathbf{1}$; $\mathbf{e^{2i\pi/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2}$; $\mathbf{e^{4i\pi/3} = -1/2 - i\sqrt{3}/2}$.

EXERCICE D'APPLICATION IV

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 4z + 13 = 0$.
2) Déterminer les racines carrées de $-5 + 12i$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z - 2\bar{z} = 3 + 6i$.

Correction

1) $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$. Solutions : $z = (4 - 6i)/2 = \mathbf{2 - 3i}$ et $z = \mathbf{2 + 3i}$.

2) $|\alpha| = \sqrt{(25 + 144)} = 13$. Système : $x^2 - y^2 = -5$ et $x^2 + y^2 = 13$, d'où $x^2 = 4$ et $y^2 = 9$. Comme $2xy = 12 > 0$: $\mathbf{2 + 3i}$ et $\mathbf{-2 - 3i}$.

3) $z - 2\bar{z} = (x + iy) - 2(x - iy) = -x + 3iy = 3 + 6i \Rightarrow x = -3$ et $y = 2$. Solution : $\mathbf{z = -3 + 2i}$.

FICHE D'EXERCICES — NOMBRES COMPLEXES

Collège le provincial — CE Maths — Tle B — Année scolaire 20... / 20...

EXERCICE 1 (forme algébrique)

Écrire sous forme algébrique :

$a = (2 - i)(3 + 2i)$; $b = (1 + i)^2$; $c = (2 + i)/(1 - 2i)$; $d = i^{2026}$; $e = i^{15}$.

EXERCICE 2 (égalité de complexes)

Déterminer les réels x et y tels que $(x + 2y) + i(2x - y) = 3 - 4i$.

EXERCICE 3 (géométrie)

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + 2i$, $z_B = 2 - 2i$ et $z_C = 5 + 2i$.

1) Calculer les distances AB, BC et AC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) Déterminer l'affixe du milieu I de [AC].
3) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

EXERCICE 4 (forme trigonométrique)

Écrire sous forme trigonométrique :

$a = 1 + i\sqrt{3}$; $b = -\sqrt{3} + i$; $c = -1 - i$; $d = 3 - 3i$; $e = -4$.

EXERCICE 5 (forme exponentielle)

Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2) Calculer z_1/z_2 sous forme exponentielle (module et argument).
3) Calculer $(z_1)^{12}$ et $(z_2)^6$, puis en déduire $(z_1)^{12}/(z_2)^6$.

EXERCICE 6 (formule de Moivre)

1) Développer $(\cos x + i \sin x)^3$ avec la formule du binôme.
2) En utilisant la formule de Moivre, en déduire que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ et $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

EXERCICE 7 (équations dans $\mathbb{C}$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - 6z + 10 = 0$;

b) $2z^2 + 2z + 5 = 0$;

c) $z^2 = 8 - 6i$;

d) $z^3 = -8$;

e) $z + 2\bar{z} = 3 - 2i$.

EXERCICE 8 (problème de synthèse)

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

1) Vérifier que 2 est une racine de P.
2) Déterminer les réels b et c tels que $P(z) = (z - 2)(z^2 + bz + c)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

4) Soient A, B et C les points d'affixes 2, $1+i$ et $1-i$. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

RÉPONSES (pour vérification)

1) $a = 8 + i$; $b = 2i$; $c = i$; $d = -1$; $e = -i$.

2) $x = -1$ et $y = 2$.

3) $AB = BC = 5$ et $AC = 6$: ABC est isocèle en B ; $z_I = 2 + 2i$; $z_D = z_A + z_C - z_B = 2 + 6i$.

4) $a = 2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)$; $b = 2(\cos 5\pi/6 + i \sin 5\pi/6)$; $c = \sqrt{2}[\cos(-3\pi/4) + i \sin(-3\pi/4)]$; $d = 3\sqrt{2}[\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)]$; $e = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$.

5) $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$; $z_2 = 2\, e^{-i\pi/6}$; $z_1/z_2 = (\sqrt{2}/2)\, e^{i5\pi/12}$; $(z_1)^{12} = -64$; $(z_2)^6 = -64$; quotient $= 1$.

6) $(\cos x + i \sin x)^3 = (\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x) + i(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$; on identifie avec $\cos 3x + i \sin 3x$ et on remplace $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ (resp. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$).

7) a) $3 \pm i$; b) $(-1 \pm 3i)/2$; c) $3 - i$ et $-3 + i$; d) -2, $1 + i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$; e) $z = 1 + 2i$.

8) $P(2) = 0$; $P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$; solutions : 2, $1+i$, $1-i$; $AB = AC = \sqrt{2}$ et $BC = 2$, donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$: triangle rectangle isocèle en A.

FICHE DE COURS

Leçon 10 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Déroulement du cours

THÈME	CONTENUS	DURÉE
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	– Équations différentielles de premier ordre à coefficients constants – Équations différentielles de second ordre à coefficients constants	13 h
	Séance de régulation	**2 h**

COMPÉTENCE VISÉE ET PRÉ-REQUIS

Compétence : résoudre des équations différentielles du premier et du second ordre à coefficients constants, déterminer la solution qui vérifie des conditions initiales données, et utiliser ces équations pour traiter des situations concrètes (croissance, refroidissement, capital, oscillations).

Pré-requis :

- la dérivation : dérivées usuelles et dérivée de e^u ; $(e^{ax})' = a\,e^{ax}$;
- la fonction exponentielle : $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^x > 0$, $e^0 = 1$;
- la résolution d'une équation du second degré (discriminant Δ) ;
- la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues ;
- la notion de primitive d'une fonction.

Plan de la leçon

- **I.** Généralités sur les équations différentielles
- **II.** Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants
  - II.1 L'équation $y' = ay$
  - II.2 Les équations $y' = ay + b$ et $ay' + by = c$
  - II.3 Conditions initiales
  - II.4 Applications
- **III.** Équations différentielles du second ordre à coefficients constants
  - III.1 L'équation $ay'' + by' + cy = 0$
  - III.2 Conditions initiales
  - III.3 Équation avec second membre constant
- **IV.** Fiche d'exercices et éléments de réponses

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DÉFINITIONS

Une **équation différentielle** est une équation dont l'**inconnue est une fonction** (notée y) et qui fait intervenir cette fonction et une ou plusieurs de ses dérivées y', y'', ...

- L'**ordre** d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée qui y figure.

- **Résoudre** (ou **intégrer**) une équation différentielle sur $\mathbb{R}$, c'est trouver **toutes** les fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}$ (deux fois dérivables si l'ordre est 2), qui la vérifient. Chacune de ces fonctions est une **solution**.
- L'ensemble des solutions s'appelle la **solution générale** ; elle dépend de constantes réelles arbitraires (une constante pour l'ordre 1, deux pour l'ordre 2).
- Une **condition initiale** est une valeur imposée à la solution (et à sa dérivée) en un point : $f(x_0) = y_0$ (et $f'(x_0) = y_1$). Elle permet de choisir **une seule** solution, dite **solution particulière**.
- Une équation est **à coefficients constants** lorsque les coefficients de y, y', y'' sont des nombres réels fixés.

EXEMPLES

- $y' = 3y$ et $2y' + 5y = 1$ sont des équations différentielles du **premier ordre** à coefficients constants.
- $y'' - 5y' + 6y = 0$ et $y'' + 9y = 2$ sont des équations différentielles du **second ordre** à coefficients constants.
- Vérifions que $f(x) = e^{3x}$ est solution de $y' = 3y$: $f'(x) = 3e^{3x} = 3f(x)$ ✔. La fonction $g(x) = 5e^{3x}$ est aussi solution : on a donc **plusieurs** solutions.
- $y' = 2x$ est une équation différentielle particulière : ses solutions sont les **primitives** de $x \mapsto 2x$, c'est-à-dire $y = x^2 + C$.

EXERCICE D'APPLICATION 1

1) Donner l'ordre de chaque équation : *(a)* $y' + 3y = 5$; *(b)* $y'' - 4y' + 4y = 0$; *(c)* $2y' = x + 1$.

2) Vérifier que $f(x) = 3e^{-2x} + 1$ est solution de $(E) : y' + 2y = 2$.

3) Vérifier que $g(x) = \cos 2x$ est solution de $(E') : y'' + 4y = 0$.

CORRIGÉ

1) (a) ordre 1 ; (b) ordre 2 ; (c) ordre 1.

2) $f'(x) = -6e^{-2x}$ donc $f'(x) + 2f(x) = -6e^{-2x} + 6e^{-2x} + 2 = 2$ ✔ : f est solution de (E).

3) $g'(x) = -2\sin 2x$ et $g''(x) = -4\cos 2x$ donc $g''(x) + 4g(x) = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$ ✔.

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

II.1 L'équation différentielle y' = ay (a réel)

THÉORÈME 1

Soit a un nombre réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : y' = ay$ sont les fonctions

$$\mathbf{f(x) = C\,e^{ax}},\ C \in \mathbb{R}$$

PREUVE

• $f(x) = Ce^{ax}$ est solution : $f'(x) = aCe^{ax} = af(x)$ ✔.

• Réciproquement, soit f une solution et posons $g(x) = f(x)\,e^{-ax}$. Alors $g'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = (f'(x) - af(x))\,e^{-ax} = 0$. La dérivée de g est nulle sur $\mathbb{R}$, donc g est constante : $g(x) = C$. D'où $f(x) = Ce^{ax}$. ∎

EXEMPLES RÉSOLUS

- $y' = 3y$: $a = 3$ donc $y = Ce^{3x}$.
- $y' + 4y = 0 \iff y' = -4y$: $y = Ce^{-4x}$.
- $2y' - 5y = 0 \iff y' = (5/2)\,y$: $y = Ce^{(5/2)x}$ (on divise d'abord par le coefficient de y').

EXERCICE D'APPLICATION 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(E_1) : y' = -4y$; $(E_2) : 3y' - 6y = 0$; $(E_3) : 5y' + 2y = 0$.

CORRIGÉ

$(E_1) : a = -4$ donc $y = Ce^{-4x}$, $C \in \mathbb{R}$.

$(E_2) : 3y' = 6y \iff y' = 2y$ donc $y = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

$(E_3) : 5y' = -2y \iff y' = -(2/5)y$ donc $y = Ce^{-(2/5)x}$, $C \in \mathbb{R}$.

II.2 Les équations y' = ay + b et ay' + by = c

THÉORÈME 2

Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : y' = ay + b$ sont les fonctions

$$\mathbf{f(x) = C\, e^{ax} - b/a}, \; C \in \mathbb{R}$$

La fonction constante $k = -b/a$ est la **solution particulière constante** de (E).

PREUVE

La fonction constante $k = -b/a$ vérifie $k' = 0 = ak + b$, donc c'est une solution de (E). Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Par soustraction :

$$\text{f solution de (E)} \iff \text{f' = af + b et k' = ak + b} \iff \text{(f - k)' = a (f - k)}$$

donc $f - k$ est solution de $y' = ay$, c'est-à-dire $f(x) - k = Ce^{ax}$ (Théorème 1). D'où $f(x) = Ce^{ax} - b/a$. ∎

MÉTHODE : résoudre ay' + by = c (a ≠ 0)

1. **Étape 1.** Mettre l'équation sous la forme $y' = a'y + b'$ en divisant par a : $y' = -(b/a)\, y + c/a$.
2. **Étape 2.** Chercher la solution particulière constante k : on remplace y par k et y' par 0 ; on obtient $k = c/b$ (si $b \neq 0$).
3. **Étape 3.** Écrire la solution générale : $y(x) = Ce^{-(b/a)x} + k$, $C \in \mathbb{R}$.

! **Cas particulier *b = 0*** : $ay' = c \iff y' = c/a$; les solutions sont les primitives : $y = (c/a)x + C$.

EXEMPLES RÉSOLUS

Exemple 1. $y' = 2y + 6$. Solution constante : $0 = 2k + 6$ donc $k = -3$. Solutions : $y(x) = Ce^{2x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 2. $y' + 3y = 9 \iff y' = -3y + 9$. Solution constante : $0 = -3k + 9$ donc $k = 3$. Solutions : $y(x) = Ce^{-3x} + 3$.

Exemple 3. $2y' + 4y = 8 \iff y' = -2y + 4$. Solution constante : $k = 2$. Solutions : $y(x) = Ce^{-2x} + 2$.

EXERCICE D'APPLICATION 3

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(E_1) : y' - 2y = 4$; $(E_2) : 3y' + 6y = 12$; $(E_3) : 2y' - y = 3$.

CORRIGÉ

$(E_1) : y' = 2y + 4$; $0 = 2k + 4$ donc $k = -2$. Solutions : $y = Ce^{2x} - 2$.

$(E_2) : y' = -2y + 4$; $k = 2$. Solutions : $y = Ce^{-2x} + 2$.

$(E_3) : y' = (1/2)y + 3/2$; $0 = k/2 + 3/2$ donc $k = -3$. Solutions : $y = Ce^{x/2} - 3$.

II.3 Conditions initiales (problème de Cauchy)

THÉORÈME 3

Soit (E) une équation différentielle du premier ordre $y' = ay + b$. Pour tous réels x_0 et y_0, il existe **une unique solution** f de (E) telle que $f(x_0) = y_0$.

MÉTHODE

1. Écrire la solution générale $f(x) = Ce^{ax} + k$.
2. Traduire la condition initiale : $f(x_0) = y_0$, ce qui donne une équation d'inconnue C.
3. Résoudre pour trouver C, puis écrire la solution particulière.

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer la solution f de $2y' + 4y = 8$ telle que $f(0) = 5$.

On a vu $f(x) = Ce^{-2x} + 2$. Alors $f(0) = C + 2 = 5$ donc $C = 3$. La solution cherchée est $\boldsymbol{f(x) = 3e^{-2x} + 2}$.

EXERCICE D'APPLICATION 4

1) Déterminer la solution f de $(E_1) : y' - 2y = 4$ telle que $f(0) = 1$.

2) Déterminer la solution g de $(E_2) : 3y' + 6y = 12$ telle que $g(1) = 4$.

CORRIGÉ

1) $f(x) = Ce^{2x} - 2$; $f(0) = C - 2 = 1$ donc $C = 3$. D'où $\boldsymbol{f(x) = 3e^{2x} - 2}$.

2) $g(x) = Ce^{-2x} + 2$; $g(1) = Ce^{-2} + 2 = 4$ donc $C = 2e^2$. D'où $g(x) = 2e^2e^{-2x} + 2 = \boldsymbol{2e^{2-2x} + 2}$.

II.4 Applications

De nombreux phénomènes sont modélisés par une équation du type $y' = ay + b$: croissance d'une population, évolution d'un capital, refroidissement d'un corps (loi de Newton), désintégration radioactive, etc. Le signe de a donne le comportement : si $a > 0$ la quantité croît exponentiellement ; si $a < 0$ elle tend vers la valeur d'équilibre $k = -b/a$.

EXEMPLE RÉSOLU : évolution d'un capital

Le capital $K(t)$ (en milliers de FCFA) d'une entreprise, t étant le temps en années, vérifie $K'(t) = 0{,}05\,K(t) + 100$ avec $K(0) = 5\,000$. Calculer $K(10)$.

$K'(t) = 0{,}05K + 100$; solution constante : $0 = 0{,}05k + 100$ donc $k = -2\,000$. Donc $K(t) = Ce^{0{,}05t} - 2\,000$. $K(0) = C - 2\,000 = 5\,000$ donc $C = 7\,000$:

$$\mathrm{K(t)} = 7\,000\ \mathrm{e}^{0{,}05\mathrm{t}} - 2\,000$$

Alors $K(10) = 7\,000\,e^{0{,}5} - 2\,000 \approx 9\,541$ milliers de FCFA.

EXERCICE D'APPLICATION 5 : loi de refroidissement de Newton

Un corps à la température de 90 °C est placé dans une pièce maintenue à 20 °C. Sa température $\theta(t)$ (en °C), t étant le temps en minutes, vérifie $\theta'(t) = -0{,}1\,(\theta(t) - 20)$.

1) Montrer que $\theta' = -0{,}1\theta + 2$, puis déterminer $\theta(t)$ sachant que $\theta(0) = 90$.

2) Au bout de combien de temps la température atteint-elle 40 °C ? (arrondir à 0,01 min)

3) Calculer la limite de $\theta(t)$ quand $t \to +\infty$ et interpréter.

CORRIGÉ

1) $\theta' = -0{,}1\theta + 0{,}1\times 20 = -0{,}1\theta + 2$. Solution constante : $k = 20$. $\theta(t) = Ce^{-0{,}1t} + 20$; $\theta(0) = C + 20 = 90$ donc $C = 70$: $\boldsymbol{\theta(t) = 70e^{-0{,}1t} + 20}$.

2) $\theta(t) = 40 \iff 70e^{-0{,}1t} = 20 \iff e^{-0{,}1t} = 2/7 \iff -0{,}1t = \ln(2/7) \iff t = 10\ln(7/2) \approx 12{,}53$ minutes.

3) $\lim_{t\to+\infty} e^{-0{,}1t} = 0$ donc $\lim \theta(t) = 20$: le corps se stabilise à la température de la pièce (20 °C).

III. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

III.1 L'équation différentielle ay'' + by' + cy = 0 (a ≠ 0)

Cherchons des solutions de la forme $y = e^{rx}$ (r réel ou complexe). On a $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2e^{rx}$, donc

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = (ar^2 + br + c)\,e^{rx}$$

Cette expression est nulle pour tout x si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$. D'où la définition suivante.

DÉFINITION : équation caractéristique

L'**équation caractéristique** de $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ est l'équation du second degré

$$\mathbf{ar^2 + br + c = 0} \text{ (discriminant } \Delta = b^2 - 4ac)$$

THÉORÈME 4 (admis)

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ sont, avec λ et μ deux réels quelconques :

- **Si $\Delta > 0$** : deux racines réelles r_1 et r_2 ; $\boldsymbol{y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}}$.
- **Si $\Delta = 0$** : une racine double $r = -b/(2a)$; $\boldsymbol{y(x) = (\lambda x + \mu)\,e^{rx}}$.
- **Si $\Delta < 0$** : deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ avec $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = \sqrt{(-\Delta)}/(2a)$; $\boldsymbol{y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)}$.

CAS PARTICULIERS UTILES

- $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$) : $y(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$.
- $y'' - \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$) : $y(x) = \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x}$.

EXEMPLES RÉSOLUS

Exemple 1 ($\Delta > 0$). $y'' - 5y' + 6y = 0$. Équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0$, $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$. Solutions : $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$.

Exemple 2 ($\Delta = 0$). $y'' - 4y' + 4y = 0$. $r^2 - 4r + 4 = 0$, $\Delta = 0$, racine double $r = 2$. Solutions : $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$.

Exemple 3 ($\Delta < 0$). $y'' + 2y' + 5y = 0$. $r^2 + 2r + 5 = 0$, $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, $\alpha = -1$ et $\beta = 4/2 = 2$ (racines $-1 \pm 2i$). Solutions : $y(x) = e^{-x}(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$.

EXERCICE D'APPLICATION 6

Résoudre sur $\mathbb{R}$: *(a)* $y'' - 3y' + 2y = 0$; *(b)* $y'' + 6y' + 9y = 0$; *(c)* $y'' + 4y = 0$; *(d)* $y'' - 2y' + 5y = 0$.

CORRIGÉ

(a) $r^2 - 3r + 2 = 0$, $\Delta = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$: $y = \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

(b) $r^2 + 6r + 9 = 0$, $\Delta = 0$, $r = -3$: $y = (\lambda x + \mu)e^{-3x}$.

(c) $r^2 + 4 = 0$, $\Delta = -16$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$: $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$.

(d) $r^2 - 2r + 5 = 0$, $\Delta = 4 - 20 = -16$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$: $y = e^{x}(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$.

III.2 Conditions initiales

Une solution de l'équation du second ordre dépend de **deux** constantes λ et μ. Pour les déterminer, il faut **deux** conditions initiales : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues, qui admet une **unique** solution : c'est la solution particulière cherchée.

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer la solution f de $y'' - 5y' + 6y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

$f(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$ donc $f'(x) = 2\lambda e^{2x} + 3\mu e^{3x}$. Les conditions donnent :

$$\lambda + \mu = 1 \text{ et } 2\lambda + 3\mu = 0$$

De la 1re équation $\lambda = 1 - \mu$; en remplaçant : $2 - 2\mu + 3\mu = 0$ donc $\mu = -2$ et $\lambda = 3$. Ainsi $\boldsymbol{f(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x}}$. (Vérification : $f'(0) = 6 - 6 = 0$ ✔)

EXERCICE D'APPLICATION 7

1) Déterminer la solution f de $y'' - 3y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

2) Déterminer la solution g de $y'' + 4y = 0$ telle que $g(0) = 2$ et $g'(0) = 6$.

CORRIGÉ

1) $f(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $f'(x) = \lambda e^x + 2\mu e^{2x}$. $f(0) = \lambda + \mu = 1$ et $f'(0) = \lambda + 2\mu = 0$. En soustrayant : $\mu = -1$ puis $\lambda = 2$. D'où $\boldsymbol{f(x) = 2e^x - e^{2x}}$.

2) $g(x) = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$, $g'(x) = -2\lambda \sin 2x + 2\mu \cos 2x$. $g(0) = \lambda = 2$ et $g'(0) = 2\mu = 6$ donc $\mu = 3$. D'où $\boldsymbol{g(x) = 2\cos 2x + 3 \sin 2x}$.

III.3 Équation avec second membre constant : ay'' + by' + cy = d (c ≠ 0)

THÉORÈME 5

Soit $(E) : ay'' + by' + cy = d$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$. La fonction constante $k = d/c$ est une solution de (E). Les solutions de (E) sont les fonctions

$$\mathbf{f(x) = g(x) + d/c}$$

où g désigne une solution quelconque de l'équation sans second membre $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.

PREUVE

Pour $y = k$ constante, $y' = y'' = 0$ et l'équation donne $ck = d$, d'où $k = d/c$. Comme dans le cas du premier ordre, f est solution de (E) $\iff f - k$ est solution de (E_0) (par soustraction). ∎

MÉTHODE

1. Résoudre l'équation sans second membre (E_0) avec l'équation caractéristique.
2. Ajouter la solution particulière constante $k = d/c$.
3. Utiliser les deux conditions initiales (si elles sont données) pour trouver λ et μ ; attention : k intervient dans $f(x_0)$ mais pas dans $f'(x_0)$.

EXEMPLE RÉSOLU

Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 4$, puis trouver la solution f telle que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$.

• Solution constante : $2k = 4$ donc $k = 2$. Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$, $r = 1$ ou $r = 2$. Solutions : $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 2$.

• $f(0) = \lambda + \mu + 2 = 3$ donc $\lambda + \mu = 1$; $f'(0) = \lambda + 2\mu = 1$. On en tire $\mu = 0$ et $\lambda = 1$: $\boldsymbol{f(x) = e^x + 2}$.

EXERCICE D'APPLICATION 8

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(E) : y'' + 2y' + y = 4$.

2) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y'' + 4y = 8$.

CORRIGÉ

1) Solution constante : $k = 4$. $r^2 + 2r + 1 = 0$, $\Delta = 0$, $r = -1$ (double). Solutions : $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x} + 4$.

2) $f(0) = \mu + 4 = 1$ donc $\mu = -3$. $f'(x) = \lambda e^{-x} - (\lambda x + \mu)e^{-x}$ donc $f'(0) = \lambda - \mu = \lambda + 3 = 0$, $\lambda = -3$. D'où $\boldsymbol{f(x) = -3(x + 1)e^{-x} + 4}$.

3) $k = 2$; $r^2 + 4 = 0$ donne $\alpha = 0, \beta = 2$. Solutions : $y(x) = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x + 2$.

RÉSUMÉ DE LA LEÇON

Équation	Solutions sur $\mathbb{I}$ ($C, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$)
$y' = ay$	$y(x) = Ce^{ax}$
$y' = ay + b$ ($a \neq 0$)	$y(x) = Ce^{ax} - b/a$
$ay'' + by' + cy = 0$, $\Delta > 0$	$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$ay'' + by' + cy = 0$, $\Delta = 0$	$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$, $r = -b/(2a)$
$ay'' + by' + cy = 0$, $\Delta < 0$	$y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$
$ay'' + by' + cy = d$ ($c \neq 0$)	$y(x) =$ [solution de l'équation sans second membre] $+ d/c$

À retenir : une condition initiale pour l'ordre 1, deux pour l'ordre 2 ; toujours vérifier la solution trouvée en la reportant dans l'équation.

IV. FICHE D'EXERCICES

Exercice 1 — Résolution d'équations du premier ordre

Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles suivantes :

a) $y' = 5y$

b) $2y' + 3y = 0$

c) $y' - 4y = 8$

d) $3y' + 2y = 6$

e) $y' + y = -5$

Exercice 2 — Conditions initiales (ordre 1)

Dans chaque cas, déterminer la solution f de l'équation vérifiant la condition indiquée :

a) $y' - 3y = 0$ avec $f(0) = 2$

b) $y' + 2y = 6$ avec $f(0) = 0$

c) $2y' + y = 4$ avec $f(0) = 1$

d) $y' = 2y - 4$ avec $f(1) = 3$

Exercice 3 — Étude d'une solution

On considère l'équation $(E) : y' + 2y = 2$.

1) Résoudre (E). **2)** Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 4$.

3) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

4) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 4 — Équations du second ordre sans second membre

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

a) $y'' - y' - 6y = 0$

b) $y'' + 10y' + 25y = 0$

c) $y'' + 9y = 0$

d) $y'' - 2y' + 2y = 0$

e) $2y'' - 3y' + y = 0$

Exercice 5 — Conditions initiales (ordre 2)

Déterminer, dans chaque cas, la solution f vérifiant les conditions indiquées :

a) $y'' + y' - 2y = 0$; $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$; $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$

c) $y'' + 16y = 0$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = 8$

Exercice 6 — Second membre constant

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(E_1) : y'' - 4y' + 3y = 6$ et $(E_2) : y'' + 4y' + 4y = 8$.

2) Déterminer la solution f de (E_1) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 7 — Problème : refroidissement d'un café

Un café à 85 °C est posé dans une salle à 25 °C. Sa température $\theta(t)$ (en °C) après t minutes vérifie $\theta'(t) = -0{,}08(\theta(t) - 25)$.

1) Déterminer $\theta(t)$ sachant que $\theta(0) = 85$. **2)** Au bout de combien de temps le café atteint-il 45 °C ? (arrondir à 0,01 min) **3)** Quelle est la limite de $\theta(t)$ quand $t \to +\infty$?

Exercice 8 — Problème : investissement

Le capital $K(t)$ (en millions de FCFA) d'une société après t années vérifie $K'(t) = 0{,}04K(t) + 20$ avec $K(0) = 500$.

1) Déterminer $K(t)$. **2)** Calculer le capital au bout de 10 ans (arrondir au dixième).

Exercice 9 — Oscillations

L'élongation $x(t)$ (en m) d'un ressort au temps t (en s) vérifie $x''(t) + 25x(t) = 0$ avec $x(0) = 0{,}04$ et $x'(0) = 0$.

1) Déterminer $x(t)$. **2)** Calculer la période $T = 2\pi/\omega$ du mouvement.

Exercice 10 — Équation à retrouver

1) Montrer que les fonctions $x \mapsto e^{x}$ et $x \mapsto e^{3x}$ sont solutions d'une même équation du type $y'' + by' + cy = 0$; déterminer b et c.

2) Vérifier que $x \mapsto 2e^{x} - e^{3x}$ est aussi solution de cette équation.

Exercice 11 — Vrai ou faux ? (justifier)

a) Les solutions de $y' = -3y$ sont les fonctions Ce^{3x}.

b) La fonction constante -2 est solution de $y' - 2y = 4$.

c) Si $\Delta < 0$, la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ contient des fonctions trigonométriques.

d) L'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$ admet e^{2x} et xe^{2x} comme solutions.

V. ÉLÉMENTS DE RÉPONSES

Ex 1. a) Ce^{5x} ; b) $Ce^{-3x/2}$; c) $Ce^{4x} - 2$; d) $Ce^{-2x/3} + 3$; e) $Ce^{-x} - 5$.

Ex 2. a) $2e^{3x}$; b) $3 - 3e^{-2x}$; c) $4 - 3e^{-x/2}$; d) $f(x) = Ce^{2x} + 2$, $f(1) = 3$ donne $C = e^{-2}$: $f(x) = e^{2x-2} + 2$.

Ex 3. 1) $y = Ce^{-2x} + 1$; 2) $f(x) = 3e^{-2x} + 1$; 3) $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f = 1$: droite asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$; 4) $f'(x) = -6e^{-2x} < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ex 4. a) $\lambda e^{3x} + \mu e^{-2x}$; b) $(\lambda x + \mu)e^{-5x}$; c) $\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x$; d) $\Delta = -4$, racines $1 \pm i$: $e^{x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$; e) $\Delta = 1$, racines 1 et $1/2$: $\lambda e^{x} + \mu e^{x/2}$.

Ex 5. a) $f(x) = 2e^{x} + e^{-2x}$; b) $f(x) = (x + 1)e^{-2x}$; c) $f(x) = 2 \sin 4x$.

Ex 6. 1) (E_1) : $k = 2$, racines 1 et 3 : $\lambda e^{x} + \mu e^{3x} + 2$; (E_2) : $k = 2$, racine double -2 : $(\lambda x + \mu)e^{-2x} + 2$; 2) $f(x) = -3e^{x} + e^{3x} + 2$.

Ex 7. 1) $\theta(t) = 60e^{-0{,}08t} + 25$; 2) $t = \ln 3 / 0{,}08 \approx 13{,}73$ min ; 3) 25 °C.

Ex 8. 1) $k = -500$ donc $K(t) = 1\,000e^{0{,}04t} - 500$; 2) $K(10) = 1\,000e^{0{,}4} - 500 \approx 991{,}8$ millions de FCFA.

Ex 9. 1) $x(t) = 0{,}04 \cos 5t$; 2) $T = 2\pi/5 \approx 1{,}26$ s.

Ex 10. 1) $r^{2} - 4r + 3 = 0$ a pour racines 1 et 3 : $y'' - 4y' + 3y = 0$ ($b = -4$, $c = 3$) ; 2) $f = 2e^{x} - e^{3x}$: $f'' - 4f' + 3f = 2e^{x}(1 - 4 + 3) - e^{3x}(9 - 12 + 3) = 0$ ✔.

Ex 11. a) Faux (Ce^{-3x}) ; b) Vrai ($0 - 2(-2) = 4$) ; c) Vrai ($e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$) ; d) Vrai (racine double 2).

— Fin de la leçon 10 —