FICHE DE COURS

LEÇON 1 : LIMITES ET CONTINUITÉ

Classe	Discipline	Volume horaire	Séance de régulation
Terminale B	Mathématiques	14 h	2 h

Plan de la leçon

I. Calculs de limites **II.** Étude des branches infinies **III.** Continuité d'une fonction sur un intervalle
IV. Image d'un intervalle par une fonction continue **V.** Fonction continue et strictement monotone
VI. Théorème des valeurs intermédiaires **VII.** Fiche d'exercices **VIII.** Corrigés

Prérequis : ensembles de nombres, intervalles, calcul algébrique (factorisation, identités remarquables), étude du signe d'une expression, notion de fonction, dérivée et sens de variation d'une fonction polynôme.

Objectifs : calculer des limites et lever des formes indéterminées ; déterminer et interpréter les asymptotes d'une courbe ; étudier la continuité d'une fonction ; utiliser les théorèmes de l'image d'un intervalle, de la bijection et des valeurs intermédiaires.

I. CALCULS DE LIMITES

1) Limites de référence

Limites usuelles

Pour tout entier naturel non nul n : $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} 1/x^n = 0$; $\lim_{x\to-\infty} 1/x^n = 0$.
$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair ; $= -\infty$ si n est impair.
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim_{x\to0} 1/x^2 = +\infty$; $\lim_{x\to0^+} 1/x = +\infty$; $\lim_{x\to0^-} 1/x = -\infty$.

2) Limite d'un polynôme et d'une fonction rationnelle à l'infini

Propriétés

- En $+\infty$ et en $-\infty$, un **polynôme** a la même limite que son **terme de plus haut degré**.
- En $+\infty$ et en $-\infty$, une **fonction rationnelle** a la même limite que le **quotient des termes de plus haut degré** du numérateur et du dénominateur.

3) Opérations sur les limites

Soit ℓ et ℓ' deux réels. F.I. signifie « forme indéterminée » (on ne peut pas conclure directement).

Somme

lim f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim (f + g)	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Produit

lim f	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
lim g	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
lim (f × g)	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle des signes)	F.I.

Quotient

lim f	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
lim g	$\ell' \neq 0$	0	$\pm\infty$	ℓ'	$\pm\infty$	0
lim (f / g)	ℓ / ℓ'	$\pm\infty$ (signes)	0	$\pm\infty$ (signes)	F.I.	F.I.

Les quatre formes indéterminées à retenir

$+\infty - \infty$ $\quad$ $0 \times \infty$ $\quad$ ∞ / ∞ $\quad$ $0 / 0$

4) Méthodes pour lever une forme indéterminée

- **Polynôme ou fraction rationnelle à l'infini :** on garde les termes de plus haut degré.
- **Forme 0/0 en un réel a :** on factorise numérateur et dénominateur par $(x - a)$, puis on simplifie.
- **Forme $+\infty - \infty$ avec des radicaux :** on multiplie par l'**expression conjuguée** : $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$.
- **Comparaison :** si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de $+\infty$ et si $\lim g = +\infty$, alors $\lim f = +\infty$. Théorème des gendarmes : si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim g = \lim h = \ell$, alors $\lim f = \ell$.

Exemples résolus

1. $\lim_{x\to+\infty} (3x^3 - 2x^2 + 5) = \lim_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$.

2. $\lim_{x\to+\infty} (2x^2 + 3x - 1)/(x^2 - 4) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2/x^2 = 2$.

3. (forme 0/0) $\lim_{x\to2} (x^2 - 4)/(x - 2) = \lim_{x\to2} (x - 2)(x + 2)/(x - 2) = \lim_{x\to2} (x + 2) = 4$.

4. (forme $+\infty - \infty$) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{(x^2 + 1)} - x) = \lim_{x\to+\infty} 1/(\sqrt{(x^2 + 1)} + x) = 0$.

5. $\lim_{x\to1^+} (2x + 1)/(x - 1)$: le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 0 en restant positif ; la limite est donc $+\infty$.

Exercice d'application 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} (-2x^3 + x^2 - 1)$ $\quad$ b) $\lim_{x\to-\infty} (3x^2 - 5x)/(x^2 + 1)$ $\quad$ c) $\lim_{x\to3} (x^2 - 9)/(x - 3)$

d) $\lim_{x\to2^-} (x + 1)/(x - 2)$ $\quad$ e) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{(x^2 + 3x)} - x)$

II. ÉTUDE DES BRANCHES INFINIES

Soit f une fonction, (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Définitions : asymptotes

- **Asymptote verticale.** Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (limite à gauche ou à droite), la droite d'équation **x = a** est asymptote verticale à (C).
- **Asymptote horizontale.** Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ (ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$), la droite d'équation **y = b** est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$ (ou en $-\infty$).
- **Asymptote oblique.** Si $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ avec $a \neq 0$, la droite d'équation **y = ax + b** est asymptote oblique à (C) en $+\infty$ (de même en $-\infty$).

Méthode : recherche d'une asymptote oblique ou d'une branche parabolique en $+\infty$

On calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x$.

- Si cette limite vaut **0** : branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
- Si cette limite vaut **±∞** : branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- Si cette limite vaut un réel **a ≠ 0**, on calcule $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$:
  – si elle vaut un réel **b**, la droite y = ax + b est asymptote oblique ;
  – si elle vaut ±∞, branche parabolique de direction la droite y = ax.

Position relative : on étudie le signe de f(x) − (ax + b). S'il est positif, (C) est au-dessus de l'asymptote ; s'il est négatif, (C) est en dessous.

Exemple résolu

Soit $f(x) = (x^2 + x + 1)/(x - 1)$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$: la droite **x = 1** est asymptote verticale.

• On a $x^2 + x + 1 = (x - 1)(x + 2) + 3$, donc $f(x) = x + 2 + 3/(x - 1)$.

• $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to \pm\infty} 3/(x - 1) = 0$: la droite **y = x + 2** est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

• Position : $f(x) - (x + 2) = 3/(x - 1)$ est positif pour $x > 1$ (courbe au-dessus de la droite) et négatif pour $x < 1$ (courbe en dessous).

Exercice d'application 2

1) Soit $g(x) = (2x^2 - x + 3)/(x + 1)$. Déterminer le domaine de définition, les asymptotes à la courbe de g et leur position relative.

2) Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la courbe de $h(x) = \sqrt{x}$, puis de $k(x) = x^2$.

III. CONTINUITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Définitions

- f est **continue en a** (a dans le domaine de f) si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est **continue à gauche** de a si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$; **continue à droite** de a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche **et** à droite de a.

- f est **continue sur un intervalle I** si elle est continue en tout point de I. Graphiquement, la courbe se trace « sans lever le crayon ».

Propriétés

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$; les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine ; $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$; $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La somme, le produit de fonctions continues sont continus ; le quotient aussi là où le dénominateur ne s'annule pas ; la composée de fonctions continues est continue.
- Toute fonction **dérivable** sur un intervalle I est continue sur I (la réciproque est fausse : $|x|$ n'est pas dérivable en 0).

Prolongement par continuité

Si f n'est pas définie en a mais que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ (réel), la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \neq a$ et $\tilde{f}(a) = \ell$ est continue en a : c'est le **prolongement par continuité** de f en a.

Exemples résolus

1. Soit $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ pour $x \neq 1$. Pour $x \neq 1$, $f(x) = x + 1$, donc $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. En posant $f(1) = 2$, f est prolongée par continuité en 1.

2. Soit $f(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = 3x - 1$ si $x > 1$. À gauche : $1 + 1 = 2$; à droite : $3 - 1 = 2$; $f(1) = 2$. Les trois valeurs sont égales : f est continue en 1.

Exercice d'application 3

1) Soit $f(x) = x^2 + m$ si $x < 2$ et $f(x) = 3x - 1$ si $x \geq 2$. Déterminer m pour que f soit continue en 2.

2) Soit $g(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ pour $x \neq 2$. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 2.

3) Soit $h(x) = x + 1$ si $x \leq 0$ et $h(x) = x^2 + 2$ si $x > 0$. h est-elle continue en 0 ? Justifier.

IV. IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

Théorèmes

- **L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.**
- L'image d'un **segment** [a ; b] par une fonction continue f est un segment [m ; M], où m et M sont le minimum et le maximum de f sur [a ; b].

Cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

L'image de I se détermine à l'aide des valeurs et des limites aux bornes :

I	f strictement croissante	f strictement décroissante
[a ; b]	[f(a) ; f(b)]	[f(b) ; f(a)]
[a ; b[	[f(a) ; $\lim_{b-}$ f[	]$\lim_{b-}$ f ; f(a)]
]a ; b]	]$\lim_{a+}$ f ; f(b)]	[f(b) ; $\lim_{a+}$ f[
]a ; b[	]$\lim_{a+}$ f ; $\lim_{b-}$ f[	]$\lim_{b-}$ f ; $\lim_{a+}$ f[

Exemples résolus

1. f(x) = 2x + 1 est continue et strictement croissante sur [−1 ; 3] : f([−1 ; 3]) = [f(−1) ; f(3)] = [−1 ; 7].

2. f(x) = x^2 + 1 est continue et strictement croissante sur [0 ; +∞[: f([0 ; +∞[) = [f(0) ; $\lim_{x\to+\infty}$ f(x)[= [1 ; +∞[.

3. f(x) = 1/x est continue et strictement décroissante sur]0 ; 1] : f(]0 ; 1]) = [f(1) ; $\lim_{x\to0^+}$ f(x)[= [1 ; +∞[.

Exercice d'application 4

Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas :

a) f(x) = −x + 4 ; I = [0 ; 3] b) f(x) = x^2 − 1 ; I =]1 ; +∞[c) f(x) = 1/(x − 1) ; I =]1 ; 3]

V. FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE

Théorème de la bijection

Si f est **continue et strictement monotone** sur un intervalle I, alors f réalise une **bijection** de I sur l'intervalle J = f(I). Autrement dit, pour tout réel k de J, l'équation f(x) = k admet **une solution unique** dans I.

Fonction réciproque

La bijection réciproque f^{-1} : J → I est continue sur J et a **le même sens de variation** que f. Dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont **symétriques par rapport à la droite y = x**. De plus : y = f(x) ⇔ x = f^{-1}(y), avec x ∈ I et y ∈ J.

Exemple résolu

La fonction f(x) = x^2 est continue et strictement croissante sur [0 ; +∞[: elle réalise une bijection de [0 ; +∞[sur [0 ; +∞[. Sa réciproque est la fonction racine carrée : f^{-1}(x) = √x.

Exercice d'application 5

1) Soit $f(x) = x^3 + x$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Résoudre $f(x) = 2$.

2) Soit $g(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $I = [2 ; +\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser, puis résoudre $g(x) = 0$ dans I.

VI. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (TVI)

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est **continue sur [a ; b]**, alors pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe **au moins un réel c** de [a ; b] tel que f(c) = k.

Corollaire (cas k = 0)

Si f est continue sur [a ; b] et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation f(x) = 0 admet **au moins une solution** dans]a ; b[. Si de plus f est **strictement monotone** sur [a ; b], cette solution est **unique**.

Méthode de rédaction

- Vérifier que f est continue sur l'intervalle (en citant la nature de f).
- Calculer f(a) et f(b) et montrer que 0 est compris entre ces deux valeurs (signes contraires).
- Pour l'unicité : justifier que f est strictement monotone (signe de f') puis conclure avec le théorème de la bijection.
- Pour encadrer la solution α : par **balayage** ou **dichotomie**, on calcule f en des valeurs intermédiaires et on resserre l'intervalle.

Exemple résolu

Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une solution unique α dans [0 ; 1] et l'encadrer à 0,1 près.

Posons $f(x) = x^3 + x - 1$. f est un polynôme donc continue sur [0 ; 1]. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$. D'après le TVI et la stricte monotonie, l'équation f(x) = 0 admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1[$.

Encadrement : $f(0,5) = -0,375 < 0$ donc $\alpha \in]0,5 ; 1[$; $f(0,7) = 0,043 > 0$ donc $\alpha \in]0,5 ; 0,7[$; $f(0,6) = -0,184 < 0$ donc **$0,6 < \alpha < 0,7$**.

Exercice d'application 6

Soit $h(x) = x^3 + 3x - 5$. Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α dans]1 ; 2[, puis donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

VII. FICHE D'EXERCICES : LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice 1 : Calculs de limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 5x^2 + 2)$ b) $\lim_{x\to-\infty} (4x^2 - 3x)/(2x^2 + 1)$ c) $\lim_{x\to-1} (x^2 + 3x + 2)/(x + 1)$

d) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{(x^2 + 1)} - x)$ e) $\lim_{x\to0^+} (1/x - 1/x^2)$ f) $\lim_{x\to1^-} (x^2 + 1)/(x - 1)$

Exercice 2 : Branches infinies

Soit $f(x) = (x^2 - 3x + 2)/(x - 3)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites aux bornes.

2) Montrer que $f(x) = x + 2/(x - 3)$. En déduire les asymptotes à la courbe (C) de f.

3) Étudier la position relative de (C) et de son asymptote oblique.

4) Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la courbe de $u(x) = x^2 + 1$.

Exercice 3 : Continuité

1) Soit $f(x) = (x^2 - x - 2)/(x - 2)$ pour $x \neq 2$ et $f(2) = a$. Déterminer a pour que f soit continue en 2.

2) Soit $g(x) = x^2 + m$ si $x < 1$ et $g(x) = 2x + 3$ si $x \geq 1$. Déterminer m pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction $x \mapsto |x - 1|$ est-elle continue en 1 ? Est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 4 : Image d'un intervalle

Déterminer l'image de I par f :

a) $f(x) = 2/(x + 1)$; $I = [0 ; +\infty[$ b) $f(x) = x^2 - 2x$; $I = [1 ; 3]$ c) $f(x) = \sqrt{x}$; $I = [4 ; 9]$

Exercice 5 : Bijection

Soit $f(x) = -x^3 - x + 2$.

1) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ (avec les limites en $\pm\infty$).

2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 6 : TVI

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0 ; 1]$ et encadrer α à 0,1 près.

2) En calculant $f(-2)$, $f(-1)$ et $f(2)$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux autres solutions $\beta \in]-2 ; -1[$ et $\gamma \in]1 ; 2[$.

3) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle dans $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 7 : Problème de synthèse

Soit $f(x) = (2x^2 + x - 1)/(x - 1)$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Déterminer le domaine D de f et calculer les limites aux bornes de D.

2) Montrer que $f(x) = 2x + 3 + 2/(x - 1)$. En déduire les asymptotes de (C).

3) Étudier la position de (C) par rapport à l'asymptote oblique.

4) Montrer que f est continue sur $]1 ; +\infty[$ puis que l'équation $f(x) = 12$ y admet au moins une solution. (On calculera f(2) et f(5).)

VIII. CORRIGÉS

A) Exercices d'application

Application 1

a) $\lim_{x\to+\infty}(-2x^3) = -\infty$. b) $\lim_{x\to-\infty} 3x^2/x^2 = 3$.

c) $(x^2 - 9)/(x - 3) = x + 3$ pour $x \neq 3$, donc la limite est 6.

d) Le numérateur tend vers 3, le dénominateur vers 0 par valeurs négatives : la limite est $-\infty$.

e) $\sqrt{(x^2 + 3x)} - x = 3x/(\sqrt{(x^2 + 3x)} + x) = 3/(\sqrt{(1 + 3/x)} + 1) \to 3/2$ quand $x \to +\infty$.

Application 2

1) $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On a $2x^2 - x + 3 = (x + 1)(2x - 3) + 6$, donc $g(x) = 2x - 3 + 6/(x + 1)$. Asymptote verticale : $x = -1$ (la limite à droite est $+\infty$, à gauche $-\infty$). Asymptote oblique : $y = 2x - 3$ en $\pm\infty$. Position : $g(x) - (2x - 3) = 6/(x + 1) > 0$ pour $x > -1$ (courbe au-dessus) et < 0 pour $x < -1$ (courbe en dessous).

2) Pour $h(x) = \sqrt{x}$: $h(x)/x = 1/\sqrt{x} \to 0$, branche parabolique de direction l'axe des abscisses. Pour $k(x) = x^2$: $k(x)/x = x \to +\infty$, branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Application 3

1) À gauche : $4 + m$; $f(2) = 5$. Continuité en 2 si $4 + m = 5$, donc **$m = 1$**.

2) $g(x) = x + 2$ pour $x \neq 2$, donc $\lim_{x\to2} g(x) = 4$. En posant $g(2) = 4$, g est prolongée par continuité en 2.

3) À gauche : 1 ; à droite : 2 ; les limites sont différentes. h n'est **pas continue** en 0.

Application 4

a) f est strictement décroissante : $f([0 ; 3]) = [f(3) ; f(0)] = [1 ; 4]$.

b) f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$, $f(x) \to 0$ en 1^+ et $\to +\infty$: image = $]0 ; +\infty[$.

c) f est strictement décroissante sur $]1 ; 3]$, $f(x) \to +\infty$ en 1^+ et $f(3) = 1/2$: image = $[1/2 ; +\infty[$.

Application 5

1) $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f(1) = 2$, la solution unique de $f(x) = 2$ est **$x = 1$**.

2) $g'(x) = 2x - 4 \geq 0$ sur $[2 ; +\infty[$: g est continue et strictement croissante. $g(2) = -1$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$, donc $J = [-1 ; +\infty[$. Comme $0 \in J$, $g(x) = 0$ admet une solution unique dans I : $g(x) = (x - 1)(x - 3)$, donc **$x = 3$**.

Application 6

h est un polynôme donc continue ; $h'(x) = 3x^2 + 3 > 0$: h est strictement croissante. $h(1) = -1 < 0$ et $h(2) = 9 > 0$: par le TVI, il existe une solution unique $\alpha \in]1 ; 2[$. $h(1,1) = -0,369 < 0$ et $h(1,2) = 0,328 > 0$, donc **$1,1 < \alpha < 1,2$**.

B) Éléments de réponse de la fiche d'exercices

Exercice 1

a) $+\infty$ b) 2 c) $(x+1)(x+2)/(x+1) = x+2$, limite 1 d) 0 (expression conjuguée) e) $(x-1)/x^2 \to -\infty$ f) numérateur $\to 2$, dénominateur $\to 0^-$: $-\infty$.

Exercice 2

1) $D = \mathbb{R}\setminus\{3\}$; lim en $3^+ = +\infty$, en $3^- = -\infty$; en $\pm\infty$, $f(x) \sim x$. 2) $x^2 - 3x + 2 = x(x-3) + 2$; asymptotes : **x = 3** et **y = x**. 3) $f(x) - x = 2/(x-3)$: (C) au-dessus pour $x > 3$, en dessous pour $x < 3$. 4) $u(x)/x \to +\infty$: branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Exercice 3

1) $f(x) = x + 1$ pour $x \neq 2$, donc la limite en 2 est 3 et **a = 3**. 2) À gauche : $1 + m$; $g(1) = 5$: **m = 4**. 3) Continue en 1 (composée de fonctions continues) mais non dérivable en 1 (dérivées à gauche -1 et à droite $+1$ différentes).

Exercice 4

a) f décroissante, $f(0) = 2$, limite 0 en $+\infty$: image = $]0\ ;\ 2]$. b) $f'(x) = 2x - 2 \geq 0$ sur $[1\ ;\ 3]$: image = $[f(1)\ ;\ f(3)] = [-1\ ;\ 3]$. c) image = $[2\ ;\ 3]$.

Exercice 5

$f'(x) = -3x^2 - 1 < 0$: f strictement décroissante ; $\lim_{-\infty} f = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = -\infty$; f continue donc bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f(1) = 0$, l'unique solution de $f(x) = 0$ est **x = 1**.

Exercice 6

1) $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$ sur $]0\ ;\ 1[$: f strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$; $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$: solution unique α ; $f(0{,}3) = 0{,}127 > 0$ et $f(0{,}4) = -0{,}136 < 0$ donc **0,3 < α < 0,4**. 2) $f(-2) = -1 < 0$ et $f(-1) = 3 > 0$: $\beta \in]-2\ ;\ -1[$; $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 3 > 0$: $\gamma \in]1\ ;\ 2[$. 3) Un polynôme de degré 3 a au plus 3 racines : l'équation admet exactement **3 solutions** dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7

1) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; lim en $1^+ = +\infty$ (numérateur $\to 2$) et en $1^- = -\infty$; en $\pm\infty$, $f(x) \sim 2x$. 2) $(x-1)(2x+3) + 2 = 2x^2 + x - 1$; asymptotes : **x = 1** et **y = 2x + 3**. 3) $f(x) - (2x+3) = 2/(x-1)$: (C) au-dessus pour $x > 1$, en dessous pour $x < 1$. 4) f est une fonction rationnelle, donc continue sur $]1\ ;\ +\infty[$. $f(2) = 9$ et $f(5) = 54/4 = 13{,}5$; comme $9 < 12 < 13{,}5$, le TVI donne au moins une solution de $f(x) = 12$ dans $]2\ ;\ 5[$.