COLLÈGE LE PROVINCIAL

Année scolaire 20…… / 20……

CE : MATHS

Classe : Tle B

LEÇON 2 : DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Classe : Terminale B (Côte d'Ivoire)	**Durée :** 14 h + 2 h (séance de régulation)

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une coopérative agricole ivoirienne modélise son bénéfice (en millions de FCFA) en fonction de la quantité produite x (en tonnes) par une fonction B. Les responsables veulent connaître la production qui rend le bénéfice maximal, savoir à partir de quand le bénéfice « s'accélère » ou « ralentit », puis représenter graphiquement la situation. Pour les aider, les élèves de Tle B apprennent à **dériver** des fonctions, à **étudier leur convexité et leurs symétries** et à **mener l'étude complète d'une fonction**.

PLAN DE LA LEÇON

I. Dérivation

- 1. Dérivabilité sur un intervalle
- 2. Dérivée de la composée de deux fonctions
- 3. Dérivées successives
- 4. Dérivée seconde et convexité

II. Éléments de symétrie

III. Étude de fonctions

IV. Corrigés des exercices d'application — V. Fiche d'exercices

I. DÉRIVATION

1. Dérivabilité sur un intervalle

Définition (nombre dérivé)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a. On dit que f est **dérivable en a** si le taux d'accroissement $\mathbf{(f(a+h) - f(a))/h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} (f(a+h) - f(a))/h = \lim_{x\to a} (f(x) - f(a))/(x - a)$$

Si la limite à droite (resp. à gauche) existe, on parle de **dérivabilité à droite** $f'_d(a)$ (resp. **à gauche** $f'_g(a)$). f est dérivable en a si et seulement si $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent et sont égales.

Définition (dérivabilité sur un intervalle)

f est **dérivable sur un intervalle I** si elle est dérivable en tout point de I (à l'intérieur de I ; aux extrémités appartenant à I, on utilise la dérivabilité à droite ou à gauche). La fonction $\mathbf{x \mapsto f'(x)}$ est alors la **fonction dérivée** de f sur I.

Propriétés

- **Dérivable ⇒ continue.** Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. **La réciproque est fausse** : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.
- **Tangente.** Si f est dérivable en a, la courbe C_f admet au point d'abscisse a une tangente d'équation $\mathbf{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$.
- **Demi-tangentes.** Si $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, la courbe admet un *point anguleux* : deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents. Si le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$, la courbe admet une demi-tangente **verticale**.
- Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$; les fonctions rationnelles, sur chaque intervalle de leur ensemble de définition ; $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ (mais pas en 0) ; ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$; exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivées usuelles

Fonction f	Dérivée f′	Fonction f	Dérivée f′
k (constante)	0	$1/x$	$-1/x^2$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$n\,x^{n-1}$	$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
ln x	$1/x$	e^x	e^x

Opérations sur les dérivées (u et v dérivables)

$(u + v)' = u' + v'$; $(k\cdot u)' = k\cdot u'$; $(u\cdot v)' = u'v + uv'$; $(1/v)' = -v'/v^2$; $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$ ($v \neq 0$)

Exemple

Soit $g(x) = |x - 2|$. Pour $h \neq 0$: $(g(2+h) - g(2))/h = |h|/h$. À droite ($h > 0$) la limite est **1** ; à gauche ($h < 0$) elle est **−1**. Les limites sont différentes : **g n'est pas dérivable en 2**. La courbe admet un point anguleux A(2 ; 0) avec deux demi-tangentes (coefficients 1 et −1).

EXERCICE D'APPLICATION 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = (2x^2 - x + 1)/(x - 1)$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f et justifier qu'elle y est dérivable.
- b) Calculer $f'(x)$ et la mettre sous forme factorisée.
- c) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.
- d) Soit $g(x) = |x - 2|$. Étudier la dérivabilité de g en 2 et interpréter graphiquement.

2. Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J tels que, pour tout x de I, $u(x) \in J$. Alors **$v \circ u$ est dérivable sur I** et, pour tout x de I :

$$\mathbf{(v\circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))}$$

Conséquences (formules à connaître)

- $(u^n)' = n\cdot u'\cdot u^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- $(\sqrt{u})' = u'/(2\sqrt{u})$ ($u > 0$)
- $(\ln u)' = u'/u$ ($u > 0$)
- $(e^u)' = u'\cdot e^u$
- $(1/u^n)' = -n\cdot u'/u^{n+1}$ ($u \neq 0$)

Méthode

1) Identifier la fonction « intérieure » u et la fonction « extérieure » v. 2) Vérifier le domaine (par exemple u(x) > 0 pour ln u ou √u). 3) Appliquer la formule : on dérive l'extérieur, puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur.

Exemples

- $f(x) = (x^2 + 1)^3$: $u(x) = x^2 + 1$, donc $f'(x) = 3 \cdot (2x) \cdot (x^2 + 1)^2 = \mathbf{6x(x^2 + 1)^2}$.
- $g(x) = \sqrt{(2x - 1)}$ sur $]1/2 ; +\infty[$: $g'(x) = 2/(2\sqrt{(2x - 1)}) = \mathbf{1/\sqrt{(2x - 1)}}$.
- $h(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$: $h'(x) = \mathbf{2x/(x^2 + 1)}$.
- $k(x) = e^{x^2 - 3x}$: $k'(x) = \mathbf{(2x - 3) \cdot e^{x^2 - 3x}}$.

EXERCICE D'APPLICATION 2

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (on précisera l'ensemble de dérivabilité) : $f(x) = (3x - 2)^4$; $g(x) = \sqrt{(x^2 + 1)}$; $h(x) = \ln(x^2 + x + 1)$; $k(x) = e^{-x^2 + 2x}$

3. Dérivées successives

Définition

Si f' est dérivable sur I, sa dérivée est notée $\mathbf{f''}$ (dérivée seconde de f). Plus généralement, on définit la dérivée d'ordre n par $\mathbf{f^{(n+1)} = (f^{(n)})'}$, avec $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$ …

Exemples

- $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$: $f'(x) = 4x^3 - 6x + 1$; $f''(x) = 12x^2 - 6$; $f'''(x) = 24x$; $f^{(4)}(x) = 24$; $f^{(5)}(x) = 0$.
- $f(x) = e^{2x}$: $f' = 2e^{2x}$, $f'' = 4e^{2x}$; on démontre par récurrence que $\mathbf{f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}}$.
- $f(x) = \ln x$: $f' = 1/x$; $f'' = -1/x^2$; $f''' = 2/x^3$.

Remarque

Un polynôme de degré p a une dérivée d'ordre p constante et toutes ses dérivées d'ordre supérieur à p sont nulles. Pour trouver une expression de $f^{(n)}$, on calcule les premières dérivées, on *conjecture* la formule, puis on la **démontre par récurrence**.

EXERCICE D'APPLICATION 3

- 1) Soit $f(x) = x \cdot e^x$. Calculer f', f'' et f'''. Conjecturer $f^{(n)}(x)$ puis démontrer cette conjecture par récurrence.
- 2) Soit $g(x) = 1/(x + 1)$ sur $]-1 ; +\infty[$. Calculer g', g'' et g'''.

4. Dérivée seconde et convexité

Définitions

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est **convexe** sur I si sa courbe est située **au-dessus** de chacune de ses tangentes (de façon équivalente : f' est croissante sur I).
- f est **concave** sur I si sa courbe est située **au-dessous** de chacune de ses tangentes (f' est décroissante sur I).
- Un **point d'inflexion** est un point de la courbe où celle-ci **traverse sa tangente** : la convexité change de sens.

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I ⇔ **$f''(x) \geq 0$** pour tout x de I.
- f est concave sur I ⇔ **$f''(x) \leq 0$** pour tout x de I.
- Si f'' **s'annule en changeant de signe** en a, alors le point A(a ; f(a)) est un **point d'inflexion** de C_f.

Exemple

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. f'' est négative sur $]-\infty ; 1]$ et positive sur $[1 ; +\infty[$. Donc **f est concave sur $]-\infty ; 1]$ et convexe sur $[1 ; +\infty[$**. f'' s'annule en 1 en changeant de signe, et $f(1) = 0$: **I(1 ; 0) est un point d'inflexion**.

EXERCICE D'APPLICATION 4

- 1) Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Étudier la convexité de f, déterminer son point d'inflexion I et l'équation de la tangente en I.
- 2) Montrer que la fonction ln est concave sur $]0 ; +\infty[$.

II. ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE

Propriétés

Soit f une fonction définie sur D et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- **Axe de symétrie.** La droite d'équation **$x = a$** est axe de symétrie de C_f si et seulement si : pour tout x de D, **$2a - x \in D$** et **$f(2a - x) = f(x)$**.
- **Centre de symétrie.** Le point **$\Omega(a ; b)$** est centre de symétrie de C_f si et seulement si : pour tout x de D, **$2a - x \in D$** et **$f(2a - x) + f(x) = 2b$**.
- **Cas particuliers.** f paire ($f(-x) = f(x)$) : l'axe des ordonnées est axe de symétrie. f impaire ($f(-x) = -f(x)$) : l'origine est centre de symétrie.

Méthode

Pour *démontrer* une symétrie : 1) vérifier que D est symétrique par rapport à a ; 2) calculer $f(2a - x)$; 3) comparer à f(x) (axe) ou calculer $f(x) + f(2a - x)$ (centre) et l'égaler à 2b.

Exemples

- $f(x) = x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout x, $f(4 - x) = (4 - x)^2 - 4(4 - x) + 1 = x^2 - 4x + 1 = f(x)$. Donc **la droite $x = 2$ est axe de symétrie** de C_f.
- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$. $f(2 - x) = (2 - x)^3 - 3(2 - x)^2 + 2 = -x^3 + 3x^2 - 2$. Donc $f(x) + f(2 - x) = 0 = 2b$, d'où $b = 0$: **$\Omega(1 ; 0)$ est centre de symétrie** (c'est le point d'inflexion trouvé plus haut).

EXERCICE D'APPLICATION 5

- 1) Montrer que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de la courbe de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.
- 2) Soit $g(x) = (2x + 1)/(x - 1)$. Montrer que le point $\Omega(1 ; 2)$ est centre de symétrie de C_g.

III. ÉTUDE DE FONCTIONS

Plan d'étude d'une fonction

- 1) **Ensemble de définition** D_f ; éventuellement parité, périodicité, éléments de symétrie.
- 2) **Limites** aux bornes de D_f ; recherche des **asymptotes** et **branches infinies**.
- 3) **Dérivée** f' : calcul, signe, **sens de variation**, extremums ; **tableau de variation**.
- 4) **Dérivée seconde** f'' (si nécessaire) : convexité, points d'inflexion.
- 5) **Points particuliers** : intersections avec les axes, tangentes remarquables.
- 6) **Construction** de la courbe C_f (asymptotes d'abord, puis points et tangentes).

Asymptotes et branches infinies

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$: la droite **x = a** est asymptote verticale.
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$: la droite **y = b** est asymptote horizontale.
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ $(a \neq 0)$: la droite **y = ax + b** est asymptote oblique. La position de C_f par rapport à cette droite s'étudie par le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- Si $\lim f(x) = \pm\infty$ et $\lim f(x)/x = \pm\infty$: **branche parabolique de direction (y'y)**. Si $\lim f(x)/x = 0$: branche parabolique de direction (x'x). Si $\lim f(x)/x = a$ $(a \neq 0$, fini) et $\lim [f(x) - ax] = \pm\infty$: branche parabolique de direction la droite $y = ax$.

Exemple d'étude complète

Étudions la fonction **$f(x) = (x^2 - x + 1)/(x - 1)$** et construisons sa courbe C_f.

1) Ensemble de définition. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$. On remarque que $x^2 - x + 1 = x(x - 1) + 1$, donc **$f(x) = x + 1/(x - 1)$**.

2) Limites et asymptotes. En $\pm\infty$: $\lim f = \pm\infty$. En 1 : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, donc **x = 1 est asymptote verticale**. Comme $f(x) - x = 1/(x - 1) \to 0$ en $\pm\infty$, **la droite y = x est asymptote oblique**. Position : $f(x) - x$ a le signe de $x - 1$; C_f est au-dessus de la droite pour $x > 1$ et au-dessous pour $x < 1$.

3) Dérivée et variations. $f'(x) = 1 - 1/(x - 1)^2 = ((x - 1)^2 - 1)/(x - 1)^2 = $ **$x(x - 2)/(x - 1)^2$**. Le dénominateur est positif : f' a le signe de $x(x - 2)$. Donc f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[2 ; +\infty[$, décroissante sur $[0 ; 1[$ et sur $]1 ; 2]$. $f(0) = -1$ (maximum local) et $f(2) = 3$ (minimum local).

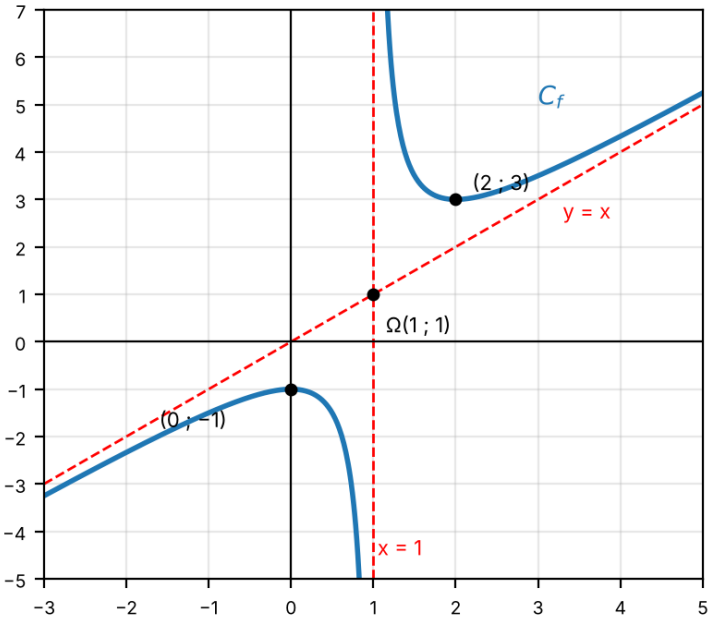
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

4) Convexité et symétrie. $f''(x) = 2/(x - 1)^3$. $f'' > 0$ sur $]1 ; +\infty[$ (f convexe) et $f'' < 0$ sur $]-\infty ; 1[$ (f concave) ; f'' ne s'annule pas : pas de point d'inflexion. De plus, pour tout $x \neq 1$, $f(2 - x) = 2 - x - 1/(x - 1)$, donc $f(x) + f(2 - x) = 2$: **Ω(1 ; 1) est centre de symétrie** (intersection des deux asymptotes).

5) Points particuliers. Intersection avec (y'y) : $f(0) = -1$, point $(0 ; -1)$. Intersection avec (x'x) : $x^2 - x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, donc **aucune** intersection. Tangentes horizontales

en (0 ; −1) et (2 ; 3).

6) Courbe.



EXERCICE D'APPLICATION 6

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

- 1) Déterminer D_f et calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Étudier la branche infinie.
- 2) Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
- 3) Étudier la convexité de f ; montrer que C_f admet un point d'inflexion I et que I est centre de symétrie.
- 4) Vérifier que $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$; en déduire les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
- 5) Tracer C_f.

IV. CORRIGÉS DES EXERCICES D'APPLICATION

Application 1

a) f est une fonction rationnelle : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, et f est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

b) $f'(x) = [(4x - 1)(x - 1) - (2x^2 - x + 1)]/(x - 1)^2 = (4x^2 - 5x + 1 - 2x^2 + x - 1)/(x - 1)^2 = (2x^2 - 4x)/(x - 1)^2 =$ **$2x(x - 2)/(x - 1)^2$**.

c) $f(3) = (18 - 3 + 1)/2 = 8$ et $f'(3) = 2 \cdot 3 \cdot 1/4 = 3/2$. Tangente : $y = (3/2)(x - 3) + 8$, soit **$y = (3/2)x + 7/2$**.

d) $g(x) = |x - 2|$: voir l'exemple du cours. $g'_d(2) = 1 \neq g'_g(2) = -1$: g **n'est pas dérivable en 2** ; C_g admet au point A(2 ; 0) un point anguleux.

Application 2

• $f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot (3x - 2)^3 =$ **$12(3x - 2)^3$**, sur $\mathbb{R}$.

• $x^2 + 1 > 0$ pour tout x, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2x/(2\sqrt{(x^2 + 1)}) =$ **$x/\sqrt{(x^2 + 1)}$**.

• $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc $x^2 + x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) =$ **$(2x + 1)/(x^2 + x + 1)$**.

• $k'(x) = (-2x + 2) \cdot e^{-x^2+2x} =$ **$-2(x - 1)e^{-x^2+2x}$**, sur $\mathbb{R}$.

Application 3

1) $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x + 1)e^x$; $f''(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$; $f'''(x) = (x + 3)e^x$. **Conjecture :** $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$. *Initialisation :* pour n = 1, $f'(x) = (x + 1)e^x$ ✓. *Hérédité :* si $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$, alors $f^{(n+1)}(x) = e^x + (x + n)e^x = (x + n + 1)e^x$ ✓. Donc, pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

2) $g'(x) = -1/(x + 1)^2$; $g''(x) = 2/(x + 1)^3$; $g'''(x) = -6/(x + 1)^4$.

Application 4

1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$. $f'' < 0$ sur $]-\infty ; 2]$: f concave ; $f'' > 0$ sur $[2 ; +\infty[$: f convexe. f'' change de signe en 2 et $f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$: **I(2 ; 3)** est point d'inflexion. $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$, donc la tangente en I est $y = -3(x - 2) + 3$, soit **$y = -3x + 9$**.

2) $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$ pour tout $x > 0$: **ln est concave** sur $]0 ; +\infty[$.

Application 5

1) $D = \mathbb{R}$ et pour tout x, $6 - x \in \mathbb{R}$. $f(6 - x) = (6 - x)^2 - 6(6 - x) + 5 = 36 - 12x + x^2 - 36 + 6x + 5 = x^2 - 6x + 5 = f(x)$. Donc **x = 3 est axe de symétrie**.

2) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si $x \neq 1$ alors $2 - x \neq 1$. $g(2 - x) = (2(2 - x) + 1)/(2 - x - 1) = (5 - 2x)/(1 - x) = (2x - 5)/(x - 1)$. Donc $g(x) + g(2 - x) = (2x + 1 + 2x - 5)/(x - 1) = (4x - 4)/(x - 1) = 4 = 2 \times 2$. **Ω(1 ; 2) est centre de symétrie**.

Application 6

1) $D_f = \mathbb{R}$. $f(x) = x^3(1 - 3/x + 4/x^3)$ donc $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. De plus $f(x)/x = x^2 - 3x + 4/x \to +\infty$: **branche parabolique de direction (y'y)**.

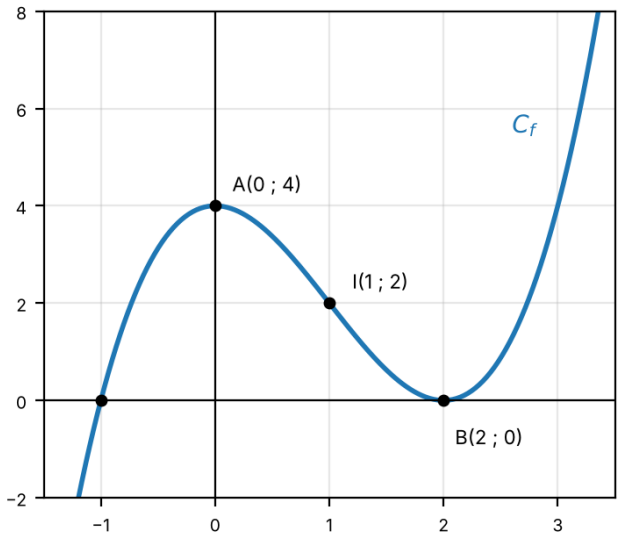
2) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. $f' > 0$ sur $]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$ et $f' < 0$ sur $]0 ; 2[$. $f(0) = 4$ et $f(2) = 0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

3) $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$: f est concave sur $]-\infty\,;\,1]$, convexe sur $[1\,;\,+\infty[$. f'' change de signe en 1 : **I(1 ; f(1)) = I(1 ; 2)** est point d'inflexion. $f(2-x) = (2-x)^3 - 3(2-x)^2 + 4 = -x^3 + 3x^2$; en ajoutant à $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, on obtient $4 = 2\times 2$: **I(1 ; 2) est centre de symétrie**.

4) $(x+1)(x-2)^2 = (x+1)(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 3x^2 + 4$ ✓. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$: C_f coupe $(x'x)$ en **(−1 ; 0)** et **(2 ; 0)** (tangente horizontale en ce dernier point).

5) Courbe :



V. FICHE D'EXERCICES

EXERCICE 1

Dérivation de base. Calculer la dérivée de chaque fonction et préciser l'ensemble de dérivabilité :

$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 1$; $g(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$; $h(x) = (2x + 1)/(x^2 + 1)$; $k(x) = \sqrt{x} - 1/x$

EXERCICE 2

Dérivabilité en un point.

- 1) Soit $f(x) = x|x|$. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
- 2) Soit $g(x) = \sqrt{x}$. Étudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter graphiquement.
- 3) Soit $h(x) = |x + 2|$. h est-elle dérivable en -2 ? Justifier.

EXERCICE 3

Composée. Calculer la dérivée de chaque fonction sur son ensemble de dérivabilité :

$f(x) = (2x^2 - x + 3)^5$; $g(x) = \sqrt{(x^2 - 4x + 5)}$; $h(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$; $k(x) = e^{3x^2-2x}$; $l(x) = \ln(e^x + 1)$; $m(x) = 1/(x^2 + 1)^3$

EXERCICE 4

Dérivées successives.

- 1) $f(x) = e^{-3x}$: calculer f', f'' et démontrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$.
- 2) $g(x) = x^2 e^x$: calculer g', g'' et g'''.
- 3) $h(x) = 1/(2x - 1)$: calculer h', h'', h''' puis conjecturer $h^{(n)}(x)$.

EXERCICE 5

Convexité. Soit $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$.

- 1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- 2) Étudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion de C_f.
- 3) Écrire les équations des tangentes en ces points.

EXERCICE 6

Symétries.

- 1) Montrer que $x = 1$ est axe de symétrie de la courbe de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
- 2) Montrer que le point $\Omega(2 ; 1)$ est centre de symétrie de la courbe de $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.
- 3) Montrer que le point $\Omega(-2 ; 3)$ est centre de symétrie de la courbe de $h(x) = (3x - 1)/(x + 2)$.

EXERCICE 7

Étude d'une fonction logarithme. Soit $f(x) = x^2 - 2 \ln x$, définie sur $]0 ; +\infty[$.

- 1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Étudier la branche infinie en $+\infty$.
- 2) Calculer $f'(x)$; étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
- 3) Calculer $f''(x)$ et en déduire la convexité de f.
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions.
- 5) Tracer la courbe C_f.

EXERCICE 8

Étude d'une fonction exponentielle. Soit $f(x) = (x + 1)e^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on admet que $\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x} = 0$). Interpréter graphiquement.
- 2) Montrer que $f'(x) = -x\cdot e^{-x}$. Dresser le tableau de variation de f.
- 3) Montrer que $f''(x) = (x - 1)e^{-x}$. Étudier la convexité de f et déterminer le point d'inflexion.
- 4) Donner l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0, puis tracer C_f.

EXERCICE 9

Recherche de paramètres. Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, où a et b sont deux réels. On sait que C_f admet un point d'inflexion d'abscisse 1 et que la tangente en ce point a pour coefficient directeur -3.

- 1) Déterminer a et b.
- 2) Pour la suite, on prend $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f.

EXERCICE 10

Problème de synthèse (situation d'apprentissage). Le bénéfice d'une coopérative, en millions de FCFA, pour une production de x tonnes ($0 \le x \le 6$), est donné par $B(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$.

- 1) Calculer $B'(x)$ et dresser le tableau de variation de B sur $[0 ; 6]$.
- 2) Pour quelle(s) quantité(s) le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce maximum ? Interpréter B(0) et B(6).
- 3) Étudier la convexité de B et déterminer le point d'inflexion. Que signifie-t-il pour la coopérative ?
- 4) Tracer la courbe de B.

Bon travail !