FICHE DE COURS

Leçon 4 : FONCTIONS LOGARITHMES

Classe	Terminale B (Tle B)	Discipline	Mathématiques
Durée	16 h (hors séance de régulation : 2 h)	Niveau	Système éducatif ivoirien

Compétence : traiter une situation faisant appel aux fonctions logarithmes (fonction ln).

Pré-requis : limites et continuité, dérivation, primitives, sens de variation, tableau de variation, équations et inéquations.

Plan de la leçon : I. Définition et propriétés — II. Étude de la fonction ln — III. Étude de fonctions comportant ln — Fiche d'exercices — Réponses.

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1. Définition

DÉFINITION

On appelle **fonction logarithme népérien**, notée **ln**, l'unique primitive sur l'intervalle]0 ; +∞[de la fonction x ↦ 1/x qui s'annule en 1.

On note : x ↦ ln x (lire « logarithme népérien de x » ou « ln de x »).

Remarque. La fonction x ↦ 1/x est continue sur]0 ; +∞[: elle y admet donc des primitives. La condition « s'annule en 1 » permet de choisir une seule d'entre elles. Le logarithme n'existe que pour les réels **strictement positifs** : $\mathbf{D_{ln} =]0 ; +\infty[}$.

2. Conséquences immédiates

PROPRIÉTÉ

- ln 1 = 0.
- ln est dérivable sur]0 ; +∞[et, pour tout x > 0, **ln′(x) = 1/x**.
- Comme ln′(x) = 1/x > 0, la fonction ln est **strictement croissante** sur]0 ; +∞[.
- Pour tous réels a > 0 et b > 0 : **ln a = ln b ⇔ a = b** ; **ln a < ln b ⇔ a < b** (idem avec ≤).
- **ln x > 0 ⇔ x > 1** ; **ln x < 0 ⇔ 0 < x < 1** ; ln x = 0 ⇔ x = 1.

Justification du signe : ln est strictement croissante et ln 1 = 0 ; donc si x > 1, ln x > ln 1 = 0, et si 0 < x < 1, ln x < 0.

3. Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉS (relation fonctionnelle)

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et tout entier relatif n :

(1) $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

(2) $\ln(1/b) = -\ln b$

(3) $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

(4) $\ln(a^n) = n \ln a$

(5) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Démonstration de (1). Fixons $a > 0$ et posons $\varphi(x) = \ln(ax)$ pour $x > 0$. φ est dérivable et $\varphi'(x) = a \times 1/(ax) = 1/x = \ln'(x)$. Les fonctions φ et ln ont la même dérivée sur $]0 ; +\infty[$, donc elles diffèrent d'une constante : $\ln(ax) = \ln x + k$. En $x = 1$: $\ln a = \ln 1 + k = k$. Ainsi $\ln(ax) = \ln x + \ln a$. (CQFD)

Démonstration de (2) et (3). $\ln b + \ln(1/b) = \ln(b \times 1/b) = \ln 1 = 0$, d'où $\ln(1/b) = -\ln b$. Puis $\ln(a/b) = \ln(a \times 1/b) = \ln a + \ln(1/b) = \ln a - \ln b$. (CQFD)

Pour (4) et (5). (4) s'obtient par récurrence à partir de (1) (et de (2) si $n < 0$). Pour (5) : $\ln a = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = 2 \ln(\sqrt{a})$, donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$. (CQFD)

EXEMPLE

Exemple résolu. Simplifier $A = \ln 18 - \ln 6 + \ln 2$: $A = \ln(18 \times 2 / 6) = \ln 6 = \ln 2 + \ln 3$.

4. Équations et inéquations avec ln

MÉTHODE

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles tous les logarithmes sont définis (**conditions d'existence** : argument > 0).

2. Se ramener à la forme $\ln A = \ln B$ (ou $\ln A \leq \ln B$) en utilisant les propriétés algébriques.

3. Appliquer l'équivalence : $A = B$ (ou $A \leq B$, ln étant croissante).

4. Résoudre, puis **vérifier** que les solutions appartiennent au domaine trouvé en 1.

Exemple. Résoudre $\ln(x + 1) = \ln(2x - 3)$. Conditions : $x + 1 > 0$ et $2x - 3 > 0$, soit $x > 3/2$. L'équation équivaut à $x + 1 = 2x - 3$, soit $x = 4$. Comme $4 > 3/2$, $S = \{4\}$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) On pose $a = \ln 2$ et $b = \ln 3$. Exprimer en fonction de a et b : $A = \ln 12$; $B = \ln(2/27)$; $C = \ln(\sqrt{6})$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln 8$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\ln(2x - 4) \leq 0$.

Corrigé

1) $A = \ln(2^2 \times 3) = 2 \ln 2 + \ln 3 =$ **$2a + b$**. $B = \ln 2 - \ln 27 = \ln 2 - 3 \ln 3 =$ **$a - 3b$**. $C = \frac{1}{2} \ln 6 =$ **$\frac{1}{2}(a + b)$**.

2) Conditions : $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$, d'où $x > 1$. (E) $\Leftrightarrow \ln[(x - 1)(x + 1)] = \ln 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$. Or $-3 \notin]1 ; +\infty[$. Donc **$S = \{3\}$**.

3) Condition : $2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. (I) $\Leftrightarrow \ln(2x - 4) \leq \ln 1 \Leftrightarrow 2x - 4 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 5/2$. Avec $x > 2$: **$S =]2 ; 5/2]$**.

II. ÉTUDE DE LA FONCTION ln

1. Ensemble de définition, dérivée, variations

La fonction ln est définie, continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée $\ln'(x) = 1/x > 0$. Elle est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. Limites

PROPRIÉTÉ

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to 0,\ x>0} \ln x = -\infty$

Limites de référence (croissances comparées) :

- $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)/x = 0$ • $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)/x^n = 0$ (n entier ≥ 1)
- $\lim_{x\to 0,\ x>0} x \ln x = 0$ • $\lim_{x\to 0,\ x>0} x^n \ln x = 0$ (n entier ≥ 1)

Nombre dérivé en 1 : $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)/x = 1$ et $\lim_{x\to 1} (\ln x)/(x-1) = 1$.

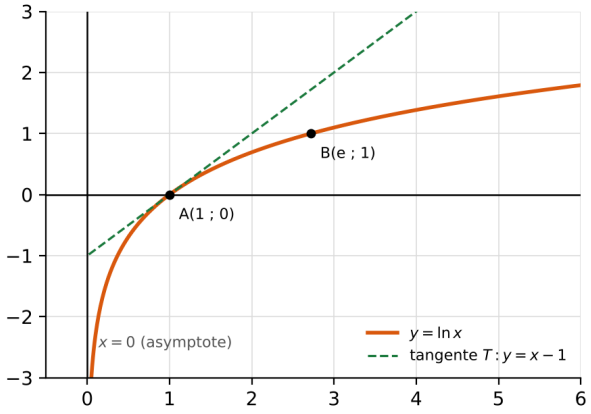
Idées de justification. $\ln(2^n) = n \ln 2 \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et ln est croissante, d'où $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$. En posant $X = 1/x$, $\ln x = -\ln X$ avec $X \to +\infty$ quand $x \to 0^+$: la limite est $-\infty$. Enfin $\ln(1+x)/x = (\ln(1+x) - \ln 1)/x$ est le taux d'accroissement de ln en 1 ; sa limite est $\ln'(1) = 1$.

Interprétation : la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est **asymptote verticale** à la courbe de ln. Comme $(\ln x)/x \to 0$ en $+\infty$, la courbe admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction (Ox)**.

3. Tableau de variation et courbe

x	0		$+\infty$
$\ln'(x) = 1/x$		+	
ln x	$-\infty$	↗	$+\infty$

Tangente en 1 : $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$, donc $T : y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$, soit **$y = x - 1$**.



4. Le nombre e

DÉFINITION DU NOMBRE e

ln est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ avec $\lim_{0} \ln = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$: c'est une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un unique réel noté **e** tel que **$\ln e = 1$**. **$e \approx 2{,}718$**.

PROPRIÉTÉ

• Pour tout rationnel r : $\ln(e^r) = r$. En particulier $\ln(1/e) = -1$.

• Pour tout réel k et tout $x > 0$: $\mathbf{\ln x = k \Leftrightarrow x = e^k}$.

• $\mathbf{\ln x \leq k \Leftrightarrow 0 < x \leq e^k}$; $\mathbf{\ln x \geq k \Leftrightarrow x \geq e^k}$.

Exemple. $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$; $\ln(x-3) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x - 3 \leq e \Leftrightarrow 3 < x \leq 3 + e$.

5. Dérivée de ln u

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I. Alors la fonction $\ln u : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et

$\mathbf{(\ln u)' = u'/u}$.

Cas particulier : la fonction $x \mapsto \ln|x|$ est dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée $x \mapsto 1/x$.

Exemple. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ est définie sur $\mathbb{R}$ ($x^2 + 1 > 0$) et $f'(x) = 2x/(x^2 + 1)$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\ln x = -1$; b) $\ln(x-1) \geq 2$.

2) Calculer les limites : a) $\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x)$; b) $\lim_{x\to0,\ x>0} x^2 \ln x$; c) $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)/(2x+1)$; d) $\lim_{x\to0} \ln(1+3x)/x$.

3) Déterminer l'ensemble de définition puis la dérivée de : $f(x) = \ln(3x-6)$; $g(x) = \ln(x^2+1)$; $h(x) = x \ln x - x$.

Corrigé

1) a) $\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \mathbf{1/e}$. b) Condition $x > 1$. $\ln(x-1) \geq 2 \Leftrightarrow x - 1 \geq e^2 \Leftrightarrow x \geq 1 + e^2$. $\mathbf{S = [1 + e^2 ; +\infty[}$.

2) a) $x - \ln x = x(1 - (\ln x)/x)$ et $(\ln x)/x \to 0$: limite $\mathbf{+\infty}$. b) $x^2 \ln x = x \times (x \ln x) \to 0 \times 0$: limite $\mathbf{0}$. c) $(\ln x)/(2x+1) = ((\ln x)/x) \times (x/(2x+1)) \to 0 \times \tfrac{1}{2}$: limite $\mathbf{0}$. d) $\ln(1+3x)/x = 3 \times \ln(1+3x)/(3x) \to 3 \times 1$: limite $\mathbf{3}$.

3) f : $3x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 2$, $D_f =]2 ; +\infty[$ et $f'(x) = 3/(3x-6) = \mathbf{1/(x-2)}$. g : $D_g = \mathbb{R}$ et $g'(x) = \mathbf{2x/(x^2+1)}$. h : $D_h =]0 ; +\infty[$ et $h'(x) = \ln x + x \times 1/x - 1 = \mathbf{\ln x}$.

III. ÉTUDE DE FONCTIONS COMPORTANT ln

1. Méthode générale

MÉTHODE : ÉTUDE COMPLÈTE D'UNE FONCTION

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f (argument de ln > 0, dénominateur ≠ 0…).

2. Calculer les limites aux bornes de D_f (utiliser les limites de référence) et en déduire les **asymptotes** ou branches infinies.

3. Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Déterminer, si demandé, les équations de tangentes, les points d'intersection avec les axes.

6. Tracer la courbe (C_f) avec les asymptotes et les tangentes.

2. Exemple 1 : f(x) = x − 2 ln x

1) Ensemble de définition. $\ln x$ existe pour $x > 0$: $D_f =]0 ; +\infty[$.

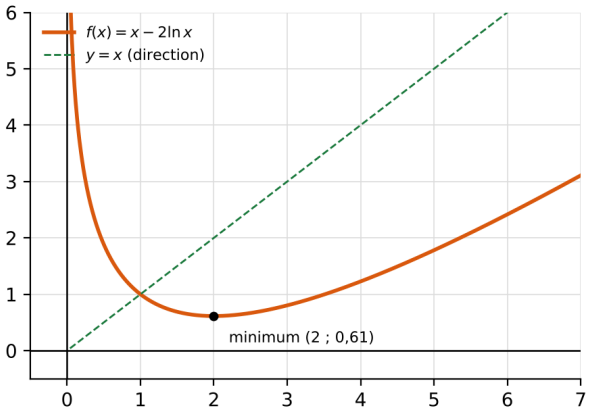
2) Limites. En 0^+ : $\ln x \to -\infty$ donc $-2 \ln x \to +\infty$ et $f(x) \to \mathbf{+\infty}$; la droite $x = 0$ est asymptote verticale. En $+\infty$: $f(x) = x(1 - 2(\ln x)/x) \to \mathbf{+\infty}$ car $(\ln x)/x \to 0$. De plus $f(x)/x = 1 - 2(\ln x)/x \to 1$ et $f(x) - x = -2 \ln x \to -\infty$: (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

3) Dérivée. $f'(x) = 1 - 2/x = \mathbf{(x-2)/x}$. Pour $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $x - 2$.

4) Tableau de variation.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2-2\ln 2 \approx 0{,}61$	$\nearrow$	$+\infty$

5) Tangente en 1. $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$: $T : y = -(x-1) + 1$, soit $\mathbf{y = -x + 2}$. Le minimum de f est $2 - 2\ln 2 > 0$: **f(x) > 0 pour tout x > 0**.

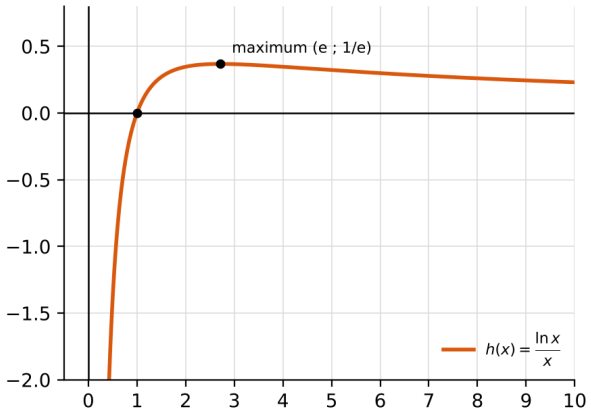


3. Exemple 2 : h(x) = (ln x)/x

$\mathbf{D_h =]0 ; +\infty[}$. En 0^+ : $\ln x \to -\infty$ et $1/x \to +\infty$, donc $h(x) \to \mathbf{-\infty}$: asymptote verticale $x = 0$. En $+\infty$: $h(x) \to \mathbf{0}$: asymptote horizontale $y = 0$ (axe des abscisses).

Dérivée : $h'(x) = (1/x \times x - \ln x)/x^2 = \mathbf{(1 - \ln x)/x^2}$. Le signe est celui de $1 - \ln x$: $h'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$. Maximum : $h(e) = 1/e \approx 0{,}37$. Intersection avec (Ox) : $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0



EXERCICE D'APPLICATION

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\mathbf{g(x) = x - 1 - \ln x}$.

1) Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

2) Calculer $g'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de g.

3) En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 2.

Corrigé

1) En 0^+ : $x-1\to -1$ et $-\ln x\to +\infty$, donc $\lim g=+\infty$. En $+\infty$: $g(x)=x(1-1/x-(\ln x)/x)\to +\infty$.

2) $g'(x)=1-1/x=(x-1)/x$, du signe de $x-1$ ($x>0$). g décroît sur $]0\,;\,1]$, croît sur $[1\,;+\infty[$ et $g(1)=1-1-0=0$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) Le minimum de g est $g(1)=0$, donc $g(x)\geq 0$ pour tout $x>0$, c'est-à-dire $x-1-\ln x\geq 0\Leftrightarrow$ **$\ln x\leq x-1$**.

4) $g(2)=1-\ln 2$ et $g'(2)=1/2$. Tangente : $y=\frac{1}{2}(x-2)+1-\ln 2$, soit **$y=\frac{1}{2}x-\ln 2$**.

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union – Discipline – Travail

COLLÈGE LE PROVINCIAL
Année scolaire 20..... / 20.....
CE MATHS

FICHE D'EXERCICES — Leçon 4 : FONCTIONS LOGARITHMES (Tle B)

Exercice 1 – Propriétés algébriques

On pose $a=\ln 2$ et $b=\ln 3$. Exprimer en fonction de a et b : $\ln 12$; $\ln 18$; $\ln(3/4)$; $\ln 144$; $\ln(\sqrt{8}/3)$.

Simplifier : $A=\ln 15+\ln 4-\ln 10-\ln 6$; $B=3\ln 2+\ln 16-\ln 4$.

Exercice 2 – Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$, après avoir précisé le domaine de validité : a) $\ln(2x-1)=\ln(x+3)$; b) $\ln x+\ln(x-2)=\ln 3$; c) $(\ln x)^2-\ln x-2=0$ (poser $X=\ln x$) ; d) $\ln(x+1)=2$.

Exercice 3 – Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\ln(3x-1)>0$; b) $\ln(x-2)\leq\ln(6-x)$; c) $(\ln x)^2-3\ln x+2\leq 0$.

Exercice 4 – Limites

Calculer : a) $\lim_{x\to+\infty}(x-3\ln x)$; b) $\lim_{x\to0,\,x>0}(x\ln x-x)$; c) $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)/x^2$; d) $\lim_{x\to0,\,x>0}(\ln x)/x$; e) $\lim_{x\to+\infty}[\ln(2x+1)-\ln x]$; f) $\lim_{x\to0}\ln(1+2x)/x$.

Exercice 5 – Dérivées

Donner l'ensemble de définition et la dérivée de : $f_1(x)=\ln(x^2-4)$; $f_2(x)=(\ln x)^2$; $f_3(x)=x^2\ln x$; $f_4(x)=\ln((x+1)/(x-1))$.

Exercice 6 – Étude d'une fonction et théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f(x)=x-2+\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

1) Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. 2) Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α et que $1{,}5<\alpha<1{,}6$. 4) En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

5) Écrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1. 6) Tracer (T) et (C).

Exercice 7 – **Problème**

Soit $g(x) = (2 + \ln x)/x$ définie sur $]0 ; +\infty[$, de courbe (C_g).

1) Calculer $\lim_{0^+} g$ et $\lim_{+\infty} g$ (écrire $g(x) = 2/x + (\ln x)/x$). Interpréter graphiquement.

2) Montrer que $g'(x) = -(1 + \ln x)/x^2$. Dresser le tableau de variation de g.

3) Déterminer le point d'intersection de (C_g) avec l'axe (Ox). 4) Écrire l'équation de la tangente à (C_g) au point d'abscisse 1. 5) Tracer (C_g).

Exercice 8 – **Situation de gestion**

Une entreprise fabrique x centaines d'articles ($1 \le x \le 10$). Son bénéfice, en millions de francs CFA, est $B(x) = 5 \ln x - x$.

1) Calculer $B'(x)$ et dresser le tableau de variation de B sur $[1 ; 10]$. 2) Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal (valeur approchée à 10^{-2} près) ?

3) Montrer que $B(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[1 ; 5]$ et donner un encadrement de β d'amplitude 0,1. 4) À partir de quelle production l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

RÉPONSES DE LA FICHE D'EXERCICES

Ex 1 : $\ln 12 = 2a + b$; $\ln 18 = a + 2b$; $\ln(3/4) = b - 2a$; $\ln 144 = 4a + 2b$; $\ln(\sqrt{8}/3) = (3/2)a - b$. A = $\ln 1 = 0$; B = $5 \ln 2 = \ln 32$.

Ex 2 : a) $x > ½$; $2x - 1 = x + 3 \Rightarrow S = \{4\}$. b) $x > 2$; $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou -1 ; $S = \{3\}$. c) $X^2 - X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2$ ou $X = -1$; $S = \{e^{-1} ; e^2\}$. d) $S = \{e^2 - 1\}$.

Ex 3 : a) $S =]2/3 ; +\infty[$. b) $2 < x < 6$ et $x - 2 \le 6 - x \Rightarrow S =]2 ; 4]$. c) $1 \le \ln x \le 2 \Rightarrow S = [e ; e^2]$.

Ex 4 : a) $+\infty$ b) 0 c) 0 d) $-\infty$ e) $\ln 2$ f) 2.

Ex 5 : f_1 : $D =]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$, $f_1'(x) = 2x/(x^2 - 4)$. f_2 : $D =]0 ; +\infty[$, $f_2'(x) = 2 \ln x / x$. f_3 : $D =]0 ; +\infty[$, $f_3'(x) = 2x \ln x + x$. f_4 : $D =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $f_4'(x) = 1/(x + 1) - 1/(x - 1) = -2/(x^2 - 1)$.

Ex 6 : 1) $-\infty$ et $+\infty$. 2) $f'(x) = (x + 1)/x > 0$: f strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$. 3) f est continue, strictement croissante ; $f(1,5) \approx -0,09 < 0$ et $f(1,6) \approx 0,07 > 0 \Rightarrow \alpha \in]1,5 ; 1,6[$ ($\alpha \approx 1,56$). 4) $f(x) < 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(x) > 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$. 5) $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$: (T) : $y = 2x - 3$.

Ex 7 : 1) $\lim_{0^+} g = -\infty$ (asymptote $x = 0$) ; $\lim_{+\infty} g = 0$ (asymptote $y = 0$). 2) $g' > 0 \Leftrightarrow x < 1/e$: g croît de $-\infty$ à $g(1/e) = e$, puis décroît de e à 0. 3) $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$: point $(e^{-2} ; 0)$. 4) $g(1) = 2$, $g'(1) = -1$: $y = -x + 3$.

Ex 8 : 1) $B'(x) = (5 - x)/x$: B croît sur $[1 ; 5]$, décroît sur $[5 ; 10]$; $B(1) = -1$, $B(5) \approx 3,05$, $B(10) \approx 1,51$. 2) Maximum pour $x = 5$ (500 articles) : environ 3,05 millions de F CFA. 3) $B(1,2) \approx -0,29$ et $B(1,3) \approx 0,01 \Rightarrow \beta \in]1,2 ; 1,3[$. 4) Bénéfice positif dès que $x > \beta$, soit environ plus de 130 articles.

« Les mathématiques sont la clé de toutes les sciences. » — Bon courage !