RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

COLLÈGE LE PROVINCIAL

CE MATHS

Année scolaire 20..... / 20.....

FICHE DE COURS — MATHÉMATIQUES

LEÇON 5 : PROBABILITÉS

Classe	Durée	Régulation	Discipline
Terminale B	16 h	2 h	Mathématiques

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors d'une kermesse organisée au Collège Le Provincial, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance un dé, puis tire une boule dans une urne. Les élèves de la Tle B veulent savoir s'ils ont de réelles chances de gagner, quel gain moyen ils peuvent espérer et combien de fois ils doivent jouer pour gagner au moins une fois. Pour répondre à ces questions, ils étudient les probabilités.

PLAN DU COURS

- **I.** Calcul de probabilités
- **II.** Probabilité conditionnelle
- **III.** Variable aléatoire discrète
- **IV.** Loi binomiale
- **V.** Fiche d'exercices (avec réponses)

PRÉREQUIS

- Dénombrement : factorielle, arrangements, combinaisons.
- Opérations sur les ensembles : réunion, intersection, complémentaire.
- Fractions, pourcentages, développement de $(a + b)^n$.

I. CALCUL DE PROBABILITÉS

1. Vocabulaire des événements

DÉFINITION

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, sans pouvoir prévoir lequel se produira.
- Un résultat possible est une **issue**. L'ensemble de toutes les issues est l'**univers**, noté Ω.
- Un **événement** est une partie de Ω. Un événement qui ne contient qu'une issue est **élémentaire**.
- Ω est l'événement **certain** ; $\varnothing$ est l'événement **impossible**.
- $\mathbf{A \cup B}$ (« A ou B ») ; $\mathbf{A \cap B}$ (« A et B ») ; $\bar{\mathbf{A}}$ est l'événement **contraire** de A (« non A »).
- A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

EXEMPLE

On lance un dé cubique : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$. Soit A : « obtenir un nombre pair » = {2 ; 4 ; 6} et B : « obtenir un multiple de 3 » = {3 ; 6}.

$A \cap B = \{6\}$; $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}$; $\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$. Les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

2. Rappels de dénombrement

RAPPELS

- **Factorielle :** $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$; $0! = 1$.
- **Arrangements :** $A_n^{\,p} = n! / (n-p)! = n(n-1)\ldots(n-p+1)$ (p facteurs). Ordre important.
- **Combinaisons :** $C_n^{\,p} = n! / [p!(n-p)!] = A_n^{\,p} / p!$. Ordre sans importance.
- $C_n^{\,p} = C_n^{\,n-p}$; $C_n^{\,0} = C_n^{\,n} = 1$; $C_n^{\,1} = n$; $C_n^{\,p} + C_n^{\,p+1} = C_{n+1}^{\,p+1}$.
- **Tirage de p éléments parmi n :** successif avec remise → n^p tirages ; successif sans remise → $A_n^{\,p}$ tirages ; simultané → $C_n^{\,p}$ tirages.

3. Probabilité d'un événement

DÉFINITION

Soit Ω un univers fini. Une **probabilité** sur Ω est une application P qui à tout événement A associe un réel P(A) tel que :

- $0 \leq P(A) \leq 1$; $P(\Omega) = 1$;
- si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

PROPRIÉTÉS

- $P(\varnothing) = 0$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.
- Somme des probabilités des événements élémentaires = 1.

4. Cas de l'équiprobabilité

DÉFINITION

Il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité (dé non truqué, boules indiscernables au toucher, tirage « au hasard »...). Alors, pour tout événement A :

$P(A) = Card(A) / Card(\Omega)$ = nombre de cas favorables / nombre de cas possibles.

EXEMPLE

On lance deux dés équilibrés. $Card(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. Soit S : « la somme vaut 7 ». Les cas favorables sont (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1) : 6 cas. Donc $P(S) = 6/36 = 1/6$.

Probabilité de ne pas obtenir 7 : $P(S) = 1 - 1/6 = 5/6$.

EXERCICE D'APPLICATION

Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules bleues, indiscernables au toucher. On tire **simultanément** 3 boules. Calculer la probabilité des événements :

A : « les trois boules sont de la même couleur » ; B : « exactement deux boules rouges » ; C : « au moins une boule verte ».

Solution. Nombre de tirages possibles : Card(Ω) = C_{10}^{3} = 120 (équiprobabilité).

• A : trois rouges ou trois vertes (pas de trois bleues) : $C_5^{3} + C_3^{3}$ = 10 + 1 = 11. Donc **P(A) = 11/120**.

• B : 2 rouges parmi 5 et 1 non rouge parmi 5 : $C_5^{2} \times C_5^{1}$ = 10 × 5 = 50. Donc P(B) = 50/120 = **5/12**.

• C : l'événement contraire C est « aucune boule verte » : 3 boules parmi les 7 non vertes : C_7^{3} = 35. P(C) = 35/120 donc P(C) = 1 − 35/120 = 85/120 = **17/24**.

II. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

1. Définition

DÉFINITION

Soit A et B deux événements avec P(B) ≠ 0. La **probabilité de A sachant B** est le réel noté $P_B(A)$ (ou P(A | B)) défini par :

$$\mathbf{P_B(A) = P(A \cap B) / P(B)}$$

PROPRIÉTÉS

- P_B est une probabilité : $0 \leq P_B(A) \leq 1$ et $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$.
- Si A ⊂ B (équiprobabilité) : $P_B(A)$ = Card(A ∩ B) / Card(B).

EXEMPLE

On lance un dé équilibré. A : « obtenir 6 » ; B : « obtenir un nombre pair ». P(A ∩ B) = 1/6 et P(B) = 1/2, donc $P_B(A)$ = (1/6)/(1/2) = 1/3.

2. Probabilités composées

PROPRIÉTÉS

- Si P(A) ≠ 0 et P(B) ≠ 0 : $\mathbf{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B)}$.
- Pour trois événements : $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C)$.

3. Arbre pondéré, probabilités totales et formule de Bayes

DÉFINITION

- Sur un **arbre pondéré**, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 ; la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités de ses branches.
- Des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ non vides, deux à deux incompatibles et dont la réunion est Ω forment un **système complet d'événements** (ou partition de Ω).

PROPRIÉTÉS ET FORMULES

- **Formule des probabilités totales :** $P(A) = P(A \cap B_1) + \ldots + P(A \cap B_n) = P(B_1)P_{B1}(A) + \ldots + P(B_n)P_{Bn}(A)$.
- **Formule de Bayes :** $P_A(B_i) = P(B_i) \times P_{Bi}(A) / P(A)$.
- En particulier : $P(A) = P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)$.

4. Événements indépendants

DÉFINITION

Deux événements A et B sont **indépendants** si **P(A ∩ B) = P(A) × P(B)**. Si P(B) ≠ 0, cela équivaut à $P_B(A) = P(A)$. Dans ce cas, A et B, $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.

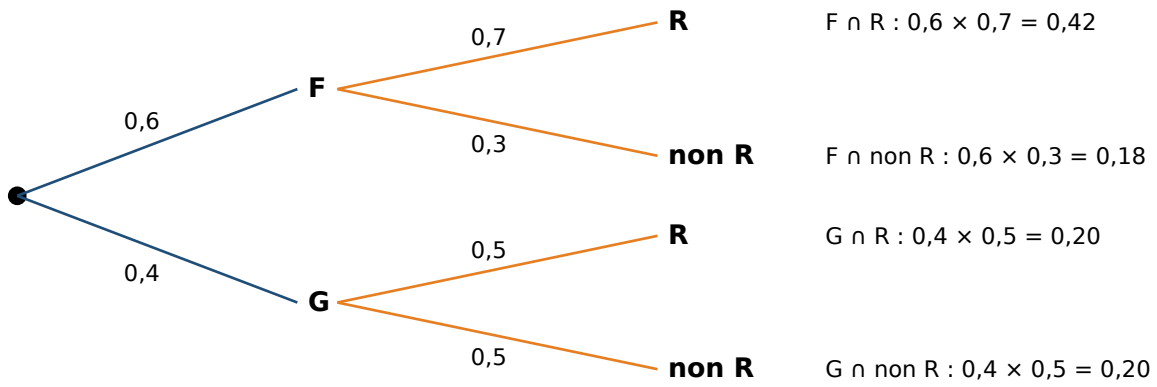
EXEMPLE

On lance un dé : A : « pair » (P = 1/2) ; B : « multiple de 3 » (P = 1/3) ; A ∩ B = {6} donc P(A ∩ B) = 1/6 = 1/2 × 1/3. A et B sont indépendants.

EXERCICE D'APPLICATION

Dans une classe de Tle B, 60 % des élèves sont des filles. 70 % des filles et 50 % des garçons ont obtenu la moyenne en mathématiques. On choisit un élève au hasard. On note F : « l'élève est une fille » et R : « l'élève a la moyenne ».

1) Représenter la situation par un arbre pondéré. 2) Calculer P(R). 3) L'élève a la moyenne : quelle est la probabilité que ce soit une fille ? 4) F et R sont-ils indépendants ?



SOLUTION

1) L'arbre est donné ci-dessus : P(F) = 0,6 ; $P_F(R) = 0,7$; $P_G(R) = 0,5$ (G = garçon, P(G) = 0,4).

2) F et G forment un système complet : P(R) = P(F ∩ R) + P(G ∩ R) = 0,42 + 0,20 = **0,62**.

3) $P_R(F) = P(F \cap R)/P(R) = 0,42/0,62 = 21/31 \approx$ **0,68**.

4) P(F) × P(R) = 0,6 × 0,62 = 0,372 ≠ 0,42 = P(F ∩ R). Donc F et R **ne sont pas indépendants**.

III. VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

1. Définition et loi de probabilité

DÉFINITION

Une **variable aléatoire discrète** X sur Ω est une application qui à chaque issue associe un nombre réel. L'ensemble de ses valeurs est $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$. On note $(X = x_i)$ l'événement « X prend la valeur x_i ».

La **loi de probabilité** de X est la donnée des $p_i = P(X = x_i)$, présentée sous forme de tableau. On a toujours $\mathbf{p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1}$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

EXEMPLE

On lance un dé équilibré. Si le résultat est 6, on gagne 5 F ; s'il est 4 ou 5, on gagne 1 F ; sinon on perd 2 F. Soit X le gain algébrique. Loi de X :

x_i	-2	1	5
$P(X = x_i)$	3/6 = 1/2	2/6 = 1/3	1/6

2. Fonction de répartition

DÉFINITION

La **fonction de répartition** de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par **$F(x) = P(X \leq x)$**. Si $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$: $F(x) = 0$ pour $x < x_1$; $F(x) = p_1 + \ldots + p_k$ pour $x_k \leq x < x_{k+1}$; $F(x) = 1$ pour $x \geq x_n$. F est **croissante**, en escalier, à valeurs dans [0 ; 1].

3. Espérance, variance, écart-type

DÉFINITION

- **Espérance :** $E(X) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = \Sigma\, p_ix_i$ (valeur moyenne).
- **Variance :** $V(X) = \Sigma\, p_i(x_i - E(X))^2 = \mathbf{E(X^2) - [E(X)]^2}$, où $E(X^2) = \Sigma\, p_ix_i^2$.
- **Écart-type :** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

PROPRIÉTÉS

- Pour tous réels a et b : $E(aX + b) = a\,E(X) + b$; $V(aX + b) = a^2\,V(X)$; $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$.
- Un jeu est dit **équitable** si l'espérance du gain est nulle : $E(X) = 0$.

EXEMPLE

Pour le jeu de l'exemple précédent : $E(X) = -2 \times 1/2 + 1 \times 1/3 + 5 \times 1/6 = -1 + 1/3 + 5/6 =$ **1/6** (le jeu est favorable au joueur, il n'est pas équitable).

EXERCICE D'APPLICATION

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément 2 boules. Soit X le nombre de boules rouges obtenues.

1) Déterminer la loi de X. 2) Calculer E(X), V(X) et σ(X). 3) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Solution. 1) $\text{Card}(\Omega) = C_5^2 = 10$. $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$.

$P(X = 0) = C_3^2/10 = 3/10$; $P(X = 1) = C_2^1 \times C_3^1/10 = 6/10$; $P(X = 2) = C_2^2/10 = 1/10$. (Vérification : 3/10 + 6/10 + 1/10 = 1.)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,3	0,6	0,1

2) $E(X) = 0\times0{,}3 + 1\times0{,}6 + 2\times0{,}1 =$ **0,8**. $E(X^2) = 0\times0{,}3 + 1\times0{,}6 + 4\times0{,}1 = 1$. $V(X) = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 =$ **0,36**. $\sigma(X) = \sqrt{0{,}36} =$ **0,6**.

3) $F(x) = 0$ si $x < 0$; $F(x) = 0{,}3$ si $0 \leq x < 1$; $F(x) = 0{,}9$ si $1 \leq x < 2$; $F(x) = 1$ si $x \geq 2$.

IV. LOI BINOMIALE

1. Épreuve et schéma de Bernoulli

DÉFINITION

- Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues : le **succès** S, de probabilité p, et l'**échec** S, de probabilité q = 1 − p.
- La **loi de Bernoulli** de paramètre p est celle de la variable X valant 1 en cas de succès et 0 sinon : E(X) = p et V(X) = pq.
- Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.

EXEMPLE

On lance 10 fois une pièce équilibrée et on s'intéresse à « Pile » : schéma de Bernoulli avec n = 10 et p = 1/2. Tirer 5 fois, avec remise, une boule dans une urne et noter « boule rouge » en est un autre.

2. Loi binomiale

DÉFINITION

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la variable aléatoire X égale au **nombre de succès** suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, notée **B(n ; p)**. Pour tout entier k tel que 0 ≤ k ≤ n :

$$\mathbf{P(X = k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}} \quad \text{avec } q = 1 - p.$$

PROPRIÉTÉS

- $\Sigma\, P(X = k) = (p + q)^n = 1$ (formule du binôme).
- **E(X) = np** ; **V(X) = npq** ; $\sigma(X) = \sqrt{(npq)}$.
- $P(X = 0) = q^n$; $P(X = n) = p^n$; **$P(X \geq 1) = 1 - q^n$** (« au moins un succès »).
- Pour « au moins k succès » ou « au plus k succès », on passe souvent par l'événement contraire.

Méthode : pour reconnaître une loi binomiale, vérifier que (1) l'expérience se répète n fois, (2) les épreuves sont identiques et indépendantes, (3) chaque épreuve a deux issues (succès / échec), (4) X compte le nombre de succès.

EXERCICE D'APPLICATION

Un élève répond au hasard à un QCM de 5 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. Soit X le nombre de bonnes réponses.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. 2) Calculer P(X = 2) et P(X = 5). 3) Calculer la probabilité d'avoir au moins une bonne réponse. 4) Calculer E(X) et V(X).

Solution. 1) L'élève répète 5 fois la même épreuve de Bernoulli (succès : « bonne réponse », p = 1/4), de façon indépendante. Donc X suit **B(5 ; 1/4)**, avec q = 3/4.

2) $P(X = 2) = C_5^2\, (1/4)^2\, (3/4)^3 = 10 \times 1/16 \times 27/64 = 270/1024 = 135/512 \approx$ **0,264**. $P(X = 5) = (1/4)^5 = 1/1024 \approx$ **0,001**.

3) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (3/4)^5 = 1 - 243/1024 = 781/1024 \approx$ **0,763**.

4) $E(X) = 5 \times 1/4 =$ **5/4 = 1,25** ; $V(X) = 5 \times 1/4 \times 3/4 =$ **15/16** ≈ 0,94.

V. FICHE D'EXERCICES — LEÇON 5 : PROBABILITÉS

Exercice 1 – Calcul de probabilités (dés)

On lance deux dés cubiques équilibrés et on note la somme S des deux faces.

1) Calculer la probabilité des événements : A « S = 8 » ; B « S ≥ 10 » ; C « le produit des deux faces est pair ».

2) Calculer P(B ∪ C) et P(B ∩ C).

Exercice 2 – Dénombrement et probabilités

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires. On tire simultanément 3 boules.

1) Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges.

2) Calculer la probabilité de tirer exactement deux boules rouges.

3) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule noire.

Exercice 3 – Probabilité conditionnelle et indépendance

Soit A et B deux événements tels que P(A) = 0,4 ; P(B) = 0,5 et P(A ∪ B) = 0,7.

1) Calculer P(A ∩ B).

2) Calculer $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

3) A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 4 – Arbre pondéré et formule de Bayes

Dans une ville, 2 % de la population est atteinte d'une maladie M. Un test de dépistage est positif pour 95 % des malades et pour 4 % des personnes non malades. On choisit une personne au hasard et on note M « la personne est malade » et T « le test est positif ».

1) Construire l'arbre pondéré.

2) Calculer P(T).

3) Le test est positif : quelle est la probabilité que la personne soit malade ? (arrondir au millième)

Exercice 5 – Deux urnes

L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 noires ; l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 4 noires. On lance un dé équilibré : si on obtient 1 ou 2, on tire une boule dans U_1 ; sinon on tire une boule dans U_2.

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

2) La boule tirée est blanche : quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?

Exercice 6 – Variable aléatoire et jeu

Un joueur lance un dé équilibré. S'il obtient 6, il gagne 5 F ; s'il obtient 4 ou 5, il gagne 1 F ; sinon il perd 2 F. Soit X le gain algébrique.

1) Donner la loi de X.

2) Calculer E(X), V(X) et σ(X) (arrondir σ au centième).

3) Le jeu est-il équitable ? Quelle mise m (ajoutée au gain) le rendrait équitable ?

Exercice 7 – Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par : P(X = 1) = 0,2 ; P(X = 2) = 0,5 ; P(X = 4) = 0,3.

1) Calculer E(X) et V(X).

2) Déterminer la fonction de répartition F de X et calculer F(3).

3) Soit Y = 2X − 1. Calculer E(Y) et V(Y).

Exercice 8 – Loi binomiale (contrôle qualité)

Dans une usine, 10 % des pièces fabriquées sont défectueuses. On prélève au hasard 6 pièces (le stock est assez grand pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise). Soit X le nombre de pièces défectueuses.

1) Quelle est la loi de X ? 2) Calculer P(X = 0), P(X = 1) puis P(X ≥ 2) (valeurs exactes). 3) Calculer E(X) et V(X).

Exercice 9 – Loi binomiale (tir à l'arc)

Un archer touche sa cible avec la probabilité 0,7 à chaque tir, les tirs étant indépendants. Il tire 4 fois.

1) Calculer la probabilité qu'il touche 4 fois la cible.

2) Calculer la probabilité qu'il touche au moins une fois la cible.

3) Combien de tirs doit-il effectuer au minimum pour que la probabilité de toucher au moins une fois la cible soit supérieure ou égale à 0,999 ?

Exercice 10 – Problème de synthèse

Au Collège Le Provincial, 30 % des élèves de Tle B viennent à l'école à pied. Parmi eux, 10 % arrivent en retard. Parmi les autres élèves, 20 % arrivent en retard. On choisit un élève au hasard.

1) Calculer la probabilité qu'il arrive en retard.

2) Il est arrivé en retard : quelle est la probabilité qu'il vienne à pied ?

3) On choisit 5 élèves au hasard et indépendamment. Soit Y le nombre d'élèves en retard. Donner la loi de Y puis calculer P(Y = 2) (arrondir au centième) et E(Y).

RÉPONSES AUX EXERCICES

Ex 1 : 1) P(A) = 5/36 ; P(B) = 6/36 = 1/6 ; P(C) = 1 − (1/2)² = 3/4. 2) B ∩ C compte 5 cas : (4;6), (6;4), (5;6), (6;5), (6;6), donc P(B ∩ C) = 5/36 ; P(B ∪ C) = 1/6 + 3/4 − 5/36 = 28/36 = 7/9.

Ex 2 : Card(Ω) = 120. 1) 4/120 = 1/30. 2) 6 × 6/120 = 36/120 = 3/10. 3) 1 − 1/30 = 29/30.

Ex 3 : 1) P(A ∩ B) = 0,4 + 0,5 − 0,7 = 0,2. 2) $P_B(A) = 0,4$; $P_A(B) = 0,5$. 3) Oui, car P(A) × P(B) = 0,2 = P(A ∩ B).

Ex 4 : 2) P(T) = 0,02 × 0,95 + 0,98 × 0,04 = 0,019 + 0,0392 = 0,0582. 3) $P_T(M) = 0,019/0,0582 \approx 0,326$.

Ex 5 : 1) P(B) = 1/3 × 3/5 + 2/3 × 1/5 = 1/3. 2) $P_B(U_1) = (1/5)/(1/3) = 3/5$.

Ex 6 : 1) X ∈ {−2 ; 1 ; 5} avec les probabilités 1/2 ; 1/3 ; 1/6. 2) E(X) = 1/6 ; E(X²) = 4×1/2 + 1/3 + 25/6 = 13/2 ; V(X) = 13/2 − 1/36 = 233/36 ; σ ≈ 2,54. 3) Non (E(X) ≠ 0) ; avec une mise de 1/6 F (≈ 0,17 F) le jeu devient équitable.

Ex 7 : 1) E(X) = 0,2 + 1 + 1,2 = 2,4 ; E(X²) = 0,2 + 2 + 4,8 = 7 ; V(X) = 7 − 5,76 = 1,24. 2) F(x) = 0 si x < 1 ; 0,2 si 1 ≤ x < 2 ; 0,7 si 2 ≤ x < 4 ; 1 si x ≥ 4 ; F(3) = 0,7. 3) E(Y) = 2 × 2,4 − 1 = 3,8 ; V(Y) = 4 × 1,24 = 4,96.

Ex 8 : 1) X suit B(6 ; 0,1). 2) $P(X = 0) = 0,9^6 = 0,531441$; $P(X = 1) = 6 \times 0,1 \times 0,9^5 = 0,354294$; P(X ≥ 2) = 1 − 0,885735 = 0,114265. 3) E(X) = 0,6 ; V(X) = 0,54.

Ex 9 : 1) $0,7^4 = 0,2401$. 2) $1 - 0,3^4 = 0,9919$. 3) Il faut $1 - 0,3^n \geq 0,999$, soit $0,3^n \leq 0,001$; $0,3^5 = 0,00243$ (trop grand) et $0,3^6 = 0,000729$: n = 6 tirs minimum.

Ex 10 : 1) P(R) = 0,3 × 0,1 + 0,7 × 0,2 = 0,03 + 0,14 = 0,17. 2) 0,03/0,17 = 3/17 ≈ 0,18. 3) Y suit B(5 ; 0,17) ; $P(Y = 2) = 10 \times 0,17^2 \times 0,83^3 \approx 0,17$; E(Y) = 0,85.