LEÇON 8 : PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL

Durée : 16 h de cours + 2 h de séance de régulation **Déroulement du cours :** 1) Primitives 2) Calcul intégral	**Pré-requis :** dérivées usuelles et opérations sur les dérivées ; fonctions ln et exp ; résolution d'équations et d'inéquations ; lecture graphique.

I. PRIMITIVES	1. Définition et propriétés 2. Primitives des fonctions usuelles 3. Opérations sur les primitives
II. CALCUL INTÉGRAL	1. Intégrale d'une fonction continue 2. Propriétés de l'intégrale 3. Intégration par parties 4. Valeur moyenne 5. Calcul d'aires
III. FICHE D'EXERCICES	9 exercices, suivis des éléments de réponse

I. PRIMITIVES

Dans toute la suite, **K** désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Définition et propriétés

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle K. On appelle **primitive de f sur K** toute fonction F **dérivable sur K** telle que, pour tout x de K : $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE

La fonction $F(x) = x^3$ est une primitive de $f(x) = 3x^2$ sur $\mathbb{R}$, car $F'(x) = 3x^2 = f(x)$. Les fonctions $x \mapsto x^3 + 5$ et $x \mapsto x^3 - 2$ sont aussi des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉ

P1 (existence). Toute fonction continue sur un intervalle K admet des primitives sur K.

P2. Si F est une primitive de f sur K, alors les primitives de f sur K sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où k est un nombre réel quelconque.

P3 (condition initiale). Soit $x_0 \in K$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une **unique** primitive F de f sur K telle que $F(x_0) = y_0$.

REMARQUE / MÉTHODE

Pour trouver la primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$: (1) on détermine une primitive G de f ; (2) on écrit $F(x) = G(x) + k$; (3) on calcule k grâce à $F(x_0) = y_0$.

Exemple : primitive F de $f(x) = 2x + 3$ telle que $F(1) = 6$. On a $F(x) = x^2 + 3x + k$; $F(1) = 4 + k = 6$ donc $k = 2$ et $F(x) = x^2 + 3x + 2$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Vérifier que $F(x) = x^4 - 3x^2 + x$ est une primitive de $f(x) = 4x^3 - 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Vérifier que $G(x) = x\,e^x$ est une primitive de $g(x) = (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la primitive H de $h(x) = 3x^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $H(2) = 5$.

Correction

1) $F'(x) = 4x^3 - 6x + 1 = f(x)$, donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) $G'(x) = 1 \times e^x + x\,e^x = (x+1)e^x = g(x)$, donc G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3) $H(x) = x^3 - 2x + k$. $H(2) = 8 - 4 + k = 4 + k = 5$ donc $k = 1$. Ainsi $H(x) = x^3 - 2x + 1$.

2. Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau, k désigne un nombre réel quelconque (constante d'intégration).

Fonction f	Primitives F de f	Intervalle K
$a \quad (a \in \mathbb{R})$	$ax + k$	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2} + k$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + k$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n \geq 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + k$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$

3. Opérations sur les primitives

PROPRIÉTÉ (linéarité)

Soient F et G des primitives respectives de f et g sur K, et k un réel.

• **Somme :** F + G est une primitive de f + g sur K. • **Produit par un réel :** kF est une primitive de kf sur K.

Si u est une fonction dérivable sur K, on a les formes suivantes (k désigne une constante réelle) :

Fonction f	Primitives F de f	Conditions
$u'\,u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$	n entier, $n \neq -1$ ($u \neq 0$ si $n < 0$)

Fonction f	Primitives F de f	Conditions
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+k$	u ne s'annule pas sur K
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+k$	u > 0 sur K
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+k$	u ne s'annule pas sur K
$u'e^u$	e^u+k	—
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+k$	a ≠ 0
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+k$	a ≠ 0 ; ax + b ≠ 0 sur K
$(ax+b)^n$	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+k$	a ≠ 0 ; n ≠ −1

EXEMPLE

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$: avec $u(x)=x^2+1$ et $u'(x)=2x$, on a $F(x)=\ln(x^2+1)$ (car $x^2+1>0$).

b) $g(x)=(2x+1)(x^2+x)^3$: avec $u(x)=x^2+x$ et $u'(x)=2x+1$, on a $G(x)=\dfrac{(x^2+x)^4}{4}$.

c) $h(x)=e^{2x+1}$: $H(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x+1}$.

EXERCICE D'APPLICATION

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué :

a) $f(x)=5x^4-3x^2+7$ sur $\mathbb{R}$ **b)** $g(x)=2x(x^2+3)^4$ sur $\mathbb{R}$ **c)** $h(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

d) $k(x)=e^{-2x+3}$ sur $\mathbb{R}$ **e)** $l(x)=\dfrac{1}{3x+2}$ sur $]-\dfrac{2}{3};+\infty[$ **f)** $p(x)=\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

Correction

a) $F(x)=x^5-x^3+7x$ **b)** $G(x)=\dfrac{(x^2+3)^5}{5}$ **c)** $H(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ (car $h=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}$)

d) $K(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-2x+3}$ **e)** $L(x)=\dfrac{1}{3}\ln(3x+2)$ **f)** $P(x)=-\dfrac{3}{x}+4\sqrt{x}$

II. CALCUL INTÉGRAL

1. Intégrale d'une fonction continue

DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K, et F une primitive de f sur K.

On appelle **intégrale de a à b de f** le nombre réel $F(b) - F(a)$. On le note :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

a et b sont les **bornes** de l'intégrale ; on lit « somme (ou intégrale) de a à b de f(x) dx ».

REMARQUE / MÉTHODE

• Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie : avec $F(x) + k$, on obtient $(F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$. On prend donc la primitive la plus simple (k = 0).

• La variable est « muette » : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

EXEMPLE

a) $\int_1^3 (2x+1)\,dx = [x^2 + x]_1^3 = (9+3) - (1+1) = 10.$

b) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$

EXERCICE D'APPLICATION

Calculer : **A** $= \int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$ **B** $= \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ **C** $= \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ **D** $= \int_0^1 e^{2x}\,dx$

Correction

A $= [x^3 - x^2 + x]_0^2 = 8 - 4 + 2 = 6.$

B $= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

C $= [\ln(x^2+1)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

D $= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}.$

2. Propriétés de l'intégrale

PROPRIÉTÉ

Soient f et g continues sur K, a, b, c éléments de K, et k un réel.

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

2) Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

3) Linéarité : $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ et $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$

4) Positivité : si $a \le b$ et $f \ge 0$ sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$

5) Ordre : si $a \le b$ et $f \le g$ sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

6) Encadrement : si $a \le b$ et $m \le f(x) \le M$ sur [a ; b], alors $m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a).$

EXEMPLE

Si $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$ et $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$, alors par Chasles $\int_0^3 f(x)\,dx = 2 + 5 = 7$ et $\int_3^1 f(x)\,dx = -5$.

EXERCICE D'APPLICATION

Soient f et g continues sur [0 ; 5] telles que $\int_0^2 f = 3$, $\int_2^5 f = -1$ et $\int_0^5 g = 4$.

1) Calculer $\int_0^5 f(x)\,dx$ et $\int_5^2 f(x)\,dx$. **2)** Calculer $\int_0^5 (2f(x) - 3g(x))dx$.

3) En utilisant l'encadrement de $\dfrac{1}{x}$ sur [1 ; 2], encadrer $\int_1^2 \dfrac{1}{x}\,dx$.

Correction

1) $\int_0^5 f = 3 + (-1) = 2$; $\int_5^2 f = -\int_2^5 f = 1$.

2) $2 \times 2 - 3 \times 4 = 4 - 12 = -8$.

3) Pour $1 \leq x \leq 2$, on a $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1$; la longueur de [1 ; 2] est 1, donc $\dfrac{1}{2} \leq \int_1^2 \dfrac{1}{x}\,dx \leq 1$.

3. Intégration par parties

THÉORÈME (formule d'intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur K, dont les dérivées u′ et v′ sont continues sur K. Pour tous a et b de K :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

REMARQUE / MÉTHODE

On choisit u (que l'on dérive) et v′ (dont on cherche une primitive v) de façon que l'intégrale obtenue soit plus simple.

• Pour $P(x)\,e^x$ (P polynôme) : $u = P$ et $v' = e^x$. • Pour $P(x)\ln x$: $u = \ln x$ et $v' = P(x)$.

EXEMPLE

Calculons $I = \int_0^1 x\,e^x\,dx$. Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

$I = [x\,e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$.

EXERCICE D'APPLICATION

Calculer à l'aide d'une intégration par parties : **J** $= \int_0^1 (x+1)\,e^x\,dx$ et **K** $= \int_1^e x \ln x\,dx$.

Correction

J : $u = x + 1$, $v' = e^x$ d'où $J = [(x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e - 1 - (e - 1) = e$.

K : $u = \ln x$, $v' = x$ donc $u' = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$. D'où $K = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \dfrac{x}{2}\,dx = \dfrac{e^2}{2} - \left[\dfrac{x^2}{4}\right]_1^e = \dfrac{e^2+1}{4}$.

4. Valeur moyenne d'une fonction

DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur [a ; b] avec $a < b$. La **valeur moyenne** de f sur [a ; b] est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

EXEMPLE

Valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur [0 ; 3] : $\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$, donc $\mu = \frac{9}{3-0} = 3$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Calculer la valeur moyenne de $f(x) = 3x^2 + 2x$ sur [1 ; 3].

2) Le prix d'un article (en milliers de F CFA) évolue pendant 4 mois selon $p(t) = 2t + 5$, t étant le temps en mois, $t \in [0\,;4]$. Calculer le prix moyen de l'article sur cette période.

Correction

1) $\int_1^3 (3x^2 + 2x)dx = [x^3 + x^2]_1^3 = 36 - 2 = 34$; $\mu = \frac{34}{2} = 17$.

2) $\int_0^4 (2t + 5)dt = [t^2 + 5t]_0^4 = 36$; $\mu = \frac{36}{4} = 9$, soit un prix moyen de 9 000 F CFA.

5. Calcul d'aires

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). L'**unité d'aire** (u.a.) est l'aire du rectangle construit sur [OI] et [OJ]. Si OI = a cm et OJ = b cm, alors 1 u.a. = a × b cm².

PROPRIÉTÉ

Soit f continue sur [a ; b] (avec $a < b$) et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1) Si $f \geq 0$ sur [a ; b], l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b est : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$ u.a.

2) Si $f \leq 0$ sur [a ; b], cette aire est $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,dx$ u.a.

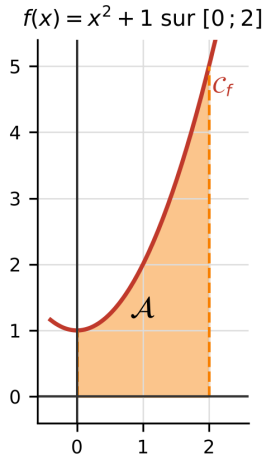
3) Si f et g sont continues avec $f \geq g$ sur [a ; b], l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites x = a, x = b est : $\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ u.a.

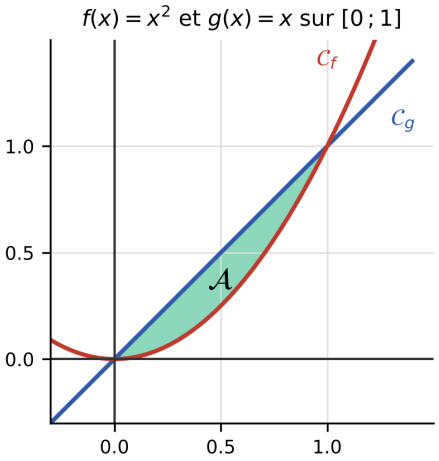
EXEMPLE

a) Aire du domaine limité par la courbe de $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 2 (figure de gauche) : $\mathcal{A} = \int_0^2 (x^2 + 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = \frac{14}{3}$ u.a. Avec OI = OJ = 1 cm : $\mathcal{A} = \frac{14}{3}$ cm² ≈ 4,67 cm².

b) Aire comprise entre $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ sur [0 ; 1] (figure de droite). Sur [0 ; 1], $x \geq x^2$, donc

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$$





EXERCICE D'APPLICATION

Le repère est orthogonal avec OI = 2 cm et OJ = 3 cm (donc 1 u.a. = 6 cm²).

1) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe de $f(x) = 4x - x^2$, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 4, en u.a. puis en cm².

2) Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes de $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x^2$ sur $[-1 ; 2]$, en u.a. puis en cm². (On vérifiera que $f \geq g$ sur $[-1 ; 2]$.)

Correction

1) $f(x) = x(4 - x) \geq 0$ sur [0 ; 4] ; $\mathcal{A} = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$ u.a., soit $\frac{32}{3} \times 6 = 64$ cm².

2) $f(x) - g(x) = -x^2 + x + 2 = -(x - 2)(x + 1) \geq 0$ sur $[-1 ; 2]$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^2 = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2} \text{ u.a., soit } \frac{9}{2} \times 6 = 27 \text{ cm}^2.$$

III. FICHE D'EXERCICES

Exercice 1 — Vrai ou faux (justifier)

a) La fonction $x \mapsto x^2 + 3$ est une primitive de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

b) Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet une seule primitive sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$.

d) $\int_0^1 x\,dx = 1$. **e)** Si f est positive sur [a ; b] (a ≤ b), alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Exercice 2 — Calcul de primitives

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle donné :

1) $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$ **2)** $g(x) = (2x+3)(x^2+3x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$

3) $h(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ sur $\mathbb{R}$ **4)** $k(x) = 4e^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$

5) $l(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$ **6)** $p(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ sur $]1\,;+\infty[$ **7)** $q(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 3 — Primitive avec condition initiale

Soit $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$. **2)** Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1. **3)** Déterminer la primitive G de f telle que $G(0) = 4$.

Exercice 4 — Calcul d'intégrales

Calculer : **1)** $\int_1^2 (4x^3 - 2x)\,dx$ **2)** $\int_0^1 (2x+2)(x^2+2x)^2\,dx$ **3)** $\int_1^e \dfrac{x+1}{x}\,dx$

4) $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ **5)** $\int_0^2 \dfrac{x}{x^2+1}\,dx$ **6)** $\int_1^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Exercice 5 — Propriétés de l'intégrale

Soient f et g continues sur [0 ; 4] telles que $\int_0^1 f = 2$, $\int_1^4 f = 5$ et $\int_0^4 g = -3$. Calculer :

$\int_0^4 f$, $\int_4^1 f$, $\int_0^4 (f+g)$, $\int_0^4 (3f - 2g)$, $\int_1^4 (f(x) + 2)dx$.

Exercice 6 — Intégration par parties

Calculer à l'aide d'une intégration par parties : **1)** $\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx$ **2)** $\int_1^e \ln x\,dx$ **3)** $\int_1^e x^2 \ln x\,dx$

Exercice 7 — Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne : **1)** de $f(x) = x^2 - 2x + 3$ sur [0 ; 3] **2)** de $g(x) = e^x$ sur $[0\,;\ln 3]$.

Exercice 8 — Calcul d'aires

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, I, J) avec OI = 2 cm et OJ = 1 cm (donc 1 u.a. = 2 cm²). Calculer, en u.a. puis en cm², l'aire du domaine :

1) limité par la courbe de $f(x) = -x^2 + 3x$, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3 ;

2) compris entre les courbes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$ sur [0 ; 2] ;

3) limité par la courbe de $f(x) = x^2 - 1$, l'axe des abscisses et les droites x = −1 et x = 1 (étudier d'abord le signe de f sur [−1 ; 1]).

Exercice 9 — Problème (économie)

Pour une production de x tonnes d'un produit ($x \in [0\,;10]$), le coût marginal, en milliers de F CFA par tonne, est $C_m(x) = 6x^2 - 12x + 20$. Le coût fixe est de 50 milliers de F CFA, c'est-à-dire $C(0) = 50$, où C est le coût total.

1) Sachant que C est une primitive de C_m, déterminer $C(x)$. **2)** Calculer $\int_3^5 C_m(x)\,dx$ et interpréter le résultat. **3)** Calculer la valeur moyenne de C_m sur [0 ; 10].

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE

Ex 1 : a) Vrai (la dérivée de $x^2 + 3$ est $2x$). b) Faux : il y en a une infinité ($F + k$). c) Vrai : $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$. d) Faux : $\int_0^1 x\,dx = \dfrac{1}{2}$. e) Vrai (positivité).

Ex 2 : 1) $2x^3 - 2x^2 + 3x$ 2) $\dfrac{(x^2+3x-1)^3}{3}$ 3) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)$ 4) $2e^{2x-1}$ 5) $-\dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}$ 6) $\ln(x^2-1)$ 7) $\dfrac{(\ln x)^2}{2}$ (à une constante près).

Ex 3 : 1) $x^3 - 3x^2 + 2x + k$. 2) $F(1) = 1 - 3 + 2 + k = k = 0$ donc $F(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. 3) $G(0) = k = 4$ donc $G(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$.

Ex 4 : 1) $[x^4 - x^2]_1^2 = 12 - 0 = 12$ 2) $\left[\dfrac{(x^2+2x)^3}{3}\right]_0^1 = 9$ 3) $[x + \ln x]_1^e = e$ 4) $1 - \dfrac{1}{e}$ 5) $\dfrac{1}{2}\ln 5$ 6) $[2\sqrt{x}]_1^4 = 2$.

Ex 5 : $\int_0^4 f = 7$; $\int_4^1 f = -5$; $\int_0^4 (f+g) = 4$; $\int_0^4 (3f - 2g) = 21 + 6 = 27$; $\int_1^4 (f+2) = 5 + 2 \times 3 = 11$.

Ex 6 : 1) $\dfrac{e^2+1}{4}$ 2) $[x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1$ 3) $\dfrac{2e^3+1}{9}$.

Ex 7 : 1) $\int_0^3 f = \left[\dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^3 = 9$, $\mu = 3$. 2) $\int_0^{\ln 3} e^x dx = 3 - 1 = 2$, $\mu = \dfrac{2}{\ln 3}$.

Ex 8 : 1) $\dfrac{9}{2}$ u.a. = 9 cm². 2) $\dfrac{4}{3}$ u.a. = $\dfrac{8}{3}$ cm². 3) f ≤ 0 sur [−1 ; 1] : $\mathcal{A} = -\int_{-1}^1 (x^2 - 1)dx = \dfrac{4}{3}$ u.a. = $\dfrac{8}{3}$ cm².

Ex 9 : 1) $C(x) = 2x^3 - 6x^2 + 20x + 50$. 2) $\int_3^5 C_m = C(5) - C(3) = 250 - 110 = 140$: coût supplémentaire de 140 milliers de F CFA pour passer de 3 à 5 tonnes. 3) $\mu = \dfrac{C(10) - C(0)}{10} = \dfrac{1\,600}{10} = 160$ milliers de F CFA par tonne.

Bon courage !