FICHE DE COURS — LEÇON 9 : NOMBRES COMPLEXES

DÉROULEMENT DU COURS

I. Étude algébrique

II. Étude trigonométrique

III. Forme exponentielle

IV. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Durée : 16 h de cours + 2 h de séance de régulation.

OBJECTIFS

- Calculer avec les nombres complexes sous forme algébrique (somme, produit, inverse, quotient, conjugué, module).
- Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe ; passer d'une forme à l'autre.
- Utiliser la formule de Moivre et la forme exponentielle pour calculer des puissances.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ des équations du premier degré, du second degré à coefficients réels, et du type $z^n = a$.

I. ÉTUDE ALGÉBRIQUE

1. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

DÉFINITION

Il existe un nombre, noté **i**, tel que $\mathbf{i^2 = -1}$. On appelle **nombre complexe** tout nombre de la forme $\mathbf{z = a + ib}$ où a et b sont deux réels. L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

- $\mathbf{a + ib}$ est la **forme algébrique** de z.
- $\mathbf{a = Re(z)}$ est la **partie réelle** de z ; $\mathbf{b = Im(z)}$ est sa **partie imaginaire** (c'est un réel).
- Si b = 0, z est un **réel** ; si a = 0, z = ib est un **imaginaire pur**. On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

PROPRIÉTÉS

Égalité : $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$. En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.

Puissances de i : $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$. Plus généralement $i^{4k+r} = i^r$ (on retient le reste de la division de l'exposant par 4).

EXEMPLE

• $(x + 2) + i(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ et $y - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ et $y = 3$.

• i^{2026} : $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc $i^{2026} = i^2 = -1$.

2. Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ restent valables (on remplace i^2 par -1).

RÈGLES DE CALCUL

Somme : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

Produit : $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Inverse $(z \neq 0)$: $1/z = (a - ib)/(a^2 + b^2)$.

Quotient $(z \neq 0)$: on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur : $z'/z = z'(a - ib)/(a^2 + b^2)$.

Identités : $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$; $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

EXEMPLE

- $(2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = \mathbf{5 + i}$.
- $1/(3 - 4i) = (3 + 4i)/(3^2 + 4^2) = \mathbf{(3 + 4i)/25} = 3/25 + (4/25)i$.
- $(1 + 2i)/(3 - i) = (1 + 2i)(3 + i)/10 = (3 + i + 6i + 2i^2)/10 = \mathbf{(1 + 7i)/10}$.

3. Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION

Le **conjugué** de $z = a + ib$ est le nombre complexe $\mathbf{\bar{z} = a - ib}$.

PROPRIÉTÉS

Pour tous z, z' de $\mathbb{C}$ et tout entier n : $\text{conj}(z + z') = \bar{z} + \bar{z'}$; $\text{conj}(z \times z') = \bar{z} \times \bar{z'}$; $\text{conj}(z/z') = \bar{z}/\bar{z'}$ $(z' \neq 0)$; $\text{conj}(z^n) = (\bar{z})^n$; $\text{conj}(\bar{z}) = z$.

$z + \bar{z} = 2a = 2\text{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2ib = 2i \cdot \text{Im}(z)$; $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$.

z est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

4. Représentation géométrique et module

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O ; u, v). Au nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M(a ; b) (on dit que z est l'**affixe** de M, et que M est l'**image** de z) et le vecteur OM de coordonnées (a ; b). L'axe des abscisses est l'**axe réel** et l'axe des ordonnées est l'**axe imaginaire**.

DÉFINITION

Le **module** de $z = a + ib$ est le réel positif $\mathbf{|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \times \bar{z}}}$. C'est la distance OM.

PROPRIÉTÉS

$|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|\bar{z}| = |-z| = |z|$; $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $|z^n| = |z|^n$; $|1/z| = 1/|z|$; $|z/z'| = |z|/|z'|$;

Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Géométrie : soient A et B d'affixes z_A et z_B. L'affixe du vecteur AB est $\mathbf{z_B - z_A}$; la distance $\mathbf{AB = |z_B - z_A|}$; le milieu I de [AB] a pour affixe $\mathbf{z_I = (z_A + z_B)/2}$.

Symétries : le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M(z) par rapport à l'axe réel ; celui d'affixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à O.

EXEMPLE

Si $z = 3 - 4i$: $|z| = \sqrt{9 + 16} = \mathbf{5}$. Si $z_A = 1 + i$ et $z_B = 4 + 5i$: $z_B - z_A = 3 + 4i$ donc AB = 5.

EXERCICE D'APPLICATION I

On donne $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 1 - 4i$.

1) Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 \times z_2$ et $|z_1|$.
2) Écrire z_1/z_2 sous forme algébrique.

3) Soient A et B les points d'affixes $2 + i$ et $-1 + 5i$. Déterminer l'affixe du vecteur AB, la distance AB et l'affixe du milieu I de [AB].

Correction

1) $z_1 + z_2 = 4 - 2i$; $z_1\, z_2 = (3 + 2i)(1 - 4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2 = \mathbf{11 - 10i}$; $|z_1| = \sqrt{(9 + 4)} = \mathbf{\sqrt{13}}$.

2) $z_1/z_2 = (3 + 2i)(1 + 4i)/(1 + 16) = (3 + 12i + 2i - 8)/17 = \mathbf{(-5 + 14i)/17} = -5/17 + (14/17)i$.

3) $z_{AB} = (-1 + 5i) - (2 + i) = \mathbf{-3 + 4i}$; $AB = \sqrt{(9 + 16)} = \mathbf{5}$; $z_I = (1 + 6i)/2 = \mathbf{1/2 + 3i}$.

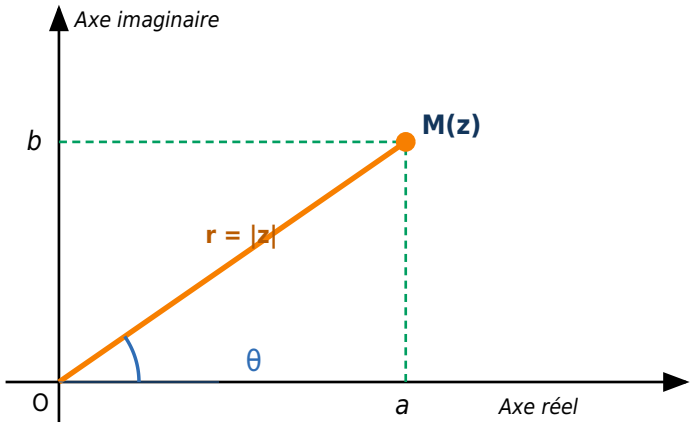
II. ÉTUDE TRIGONOMÉTRIQUE

1. Argument d'un nombre complexe non nul

DÉFINITION

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul d'image M. On appelle **argument** de z toute mesure θ (en radians) de l'angle orienté (u, OM). On note **arg(z) = θ [2π]** : un argument est défini à un multiple de 2π près.

Pour trouver θ, on calcule $r = |z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, puis on résout : **cos θ = a/r et sin θ = b/r**.



Sur la figure, pour M(z) avec $z = a + ib$:

- $a = r \cos \theta$;
- $b = r \sin \theta$;
- $r = |z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$;
- $\theta = \arg(z)$.

Cas particuliers : z réel positif → arg z = 0 ; z réel négatif → arg z = π ; z = ib avec b > 0 → arg z = π/2 ; z = ib avec b < 0 → arg z = −π/2.

Rappel : valeurs remarquables

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2
cos θ	1	√3/2	√2/2	1/2	0
sin θ	0	1/2	√2/2	√3/2	1

2. Forme trigonométrique

DÉFINITION

Tout complexe non nul z, de module r et d'argument θ, s'écrit **z = r (cos θ + i sin θ)** avec r > 0. C'est la **forme trigonométrique** de z. On la note aussi z = [r ; θ].

EXEMPLE

• $z = 1 + i$: $r = \sqrt{2}$; cos θ = 1/√2 = √2/2 et sin θ = √2/2, donc θ = π/4 : **z = √2 (cos π/4 + i sin π/4)**.

• $z = -1 + i\sqrt{3}$: $r = \sqrt{(1 + 3)} = 2$; cos θ = −1/2 et sin θ = √3/2, donc θ = 2π/3 : **z = 2 (cos 2π/3 + i sin 2π/3)**.

3. Propriétés des arguments

PROPRIÉTÉS

Pour z et z' non nuls et n entier relatif (égalités modulo 2π) :

$\arg(z \times z') = \arg z + \arg z'$; $\arg(1/z) = -\arg z$; $\arg(z/z') = \arg z - \arg z'$;

$\arg(z^n) = n \times \arg z$; $\arg(\bar{z}) = -\arg z$; $\arg(-z) = \arg z + \pi$.

z est réel $\Leftrightarrow \arg z = 0\ [\pi]$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = \pi/2\ [\pi]$.

RÈGLE

Produit et quotient en forme trigonométrique :

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta') = r\,r'\,[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$$

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) / r'(\cos\theta' + i\sin\theta') = (r/r')\,[\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')]$$

4. Formule de Moivre

FORMULE DE MOIVRE

Pour tout réel θ et tout entier relatif n :

$$\mathbf{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Plus généralement : $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

EXEMPLE

$(\cos\pi/12 + i\sin\pi/12)^6 = \cos(6\pi/12) + i\sin(6\pi/12) = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2 = \mathbf{i}$.

$(1+i)^4$: $1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$, donc $(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4 \times (-1) = \mathbf{-4}$.

EXERCICE D'APPLICATION II

On donne $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = -3i$.

1) Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2) En déduire le module et un argument de $z_1 \times z_2$ puis de z_1/z_2.

Correction

1) • z_1 : $r = \sqrt{(3+1)} = 2$; $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, $\sin\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = \pi/6$. $\mathbf{z_1 = 2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)}$.
• z_2 : $r = \sqrt{2}$; $\cos\theta = \sqrt{2}/2$, $\sin\theta = -\sqrt{2}/2 \Rightarrow \theta = -\pi/4$. $\mathbf{z_2 = \sqrt{2}[\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)]}$.
• z_3 : $r = 3$; $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\pi/2$. $\mathbf{z_3 = 3[\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)]}$.
2) $|z_1\,z_2| = 2 \times \sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$; $\arg(z_1\,z_2) = \pi/6 - \pi/4 = \mathbf{-\pi/12}$.
$|z_1/z_2| = 2/\sqrt{2} = \mathbf{\sqrt{2}}$; $\arg(z_1/z_2) = \pi/6 + \pi/4 = \mathbf{5\pi/12}$.

III. FORME EXPONENTIELLE

1. Notation $e^{i\theta}$

DÉFINITION

Pour tout réel θ, on pose $\mathbf{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$. Tout complexe non nul z de module r et d'argument θ s'écrit alors $\mathbf{z = r\,e^{i\theta}}$: c'est la **forme exponentielle** de z.

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels θ, θ' et tout entier n :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $e^{i\theta} / e^{i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$; $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$;

$|e^{i\theta}| = 1$; $\text{conj}(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$; $r\,e^{i\theta} \times r'\,e^{i\theta'} = r\,r'\,e^{i(\theta+\theta')}$; $(r\,e^{i\theta})^n = r^n\,e^{in\theta}$.

Valeurs usuelles : $e^{i0} = 1$; $e^{i\pi/2} = i$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{-i\pi/2} = -i$.

2. Formules d'Euler

FORMULES D'EULER

$$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 \text{ et } \sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$$

Elles servent à **linéariser** des expressions trigonométriques.

EXEMPLE

• Passage à l'exponentielle : $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$. Donc $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\, e^{i2\pi} = 16 \times 1 = \mathbf{16}$.

• Linéarisation : $\cos^2\theta = [(e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2]^2 = (e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta})/4 = (1 + \cos 2\theta)/2$.

• Quotient : $(1+i)^{10}/(1-i)^6$: $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ et $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$. Le numérateur vaut $32\, e^{i5\pi/2} = 32i$ et le dénominateur $8\, e^{-i3\pi/2} = 8i$, donc le quotient est **4**.

EXERCICE D'APPLICATION III

On donne $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 + i$.

1) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2) Calculer $(z_1)^6$.
3) Calculer z_1^3 / z_2^2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Correction

1) z_1 : $r = 2$; $\cos\theta = 1/2$, $\sin\theta = -\sqrt{3}/2 \Rightarrow \theta = -\pi/3$: $\mathbf{z_1 = 2\, e^{-i\pi/3}}$. z_2 : $r = \sqrt{2}$; $\cos\theta = -\sqrt{2}/2$, $\sin\theta = \sqrt{2}/2 \Rightarrow \theta = 3\pi/4$: $\mathbf{z_2 = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}}$.

2) $(z_1)^6 = 2^6\, e^{-i2\pi} = \mathbf{64}$.

3) $z_1^3 = 8\, e^{-i\pi}$; $z_2^2 = 2\, e^{i3\pi/2}$. Le quotient vaut $4\, e^{-i5\pi/2} = \mathbf{4\, e^{-i\pi/2}}$ (à 2π près), c'est-à-dire $\mathbf{-4i}$.

IV. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

1. Racines carrées

MÉTHODES

Réel négatif : si $a < 0$, l'équation $z^2 = a$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$: $\mathbf{z = i\sqrt{(-a)}}$ et $\mathbf{z = -i\sqrt{(-a)}}$. Exemple : $z^2 = -9 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z = -3i$.

Complexe quelconque (méthode algébrique) : pour résoudre $z^2 = \alpha$ avec $z = x + iy$, on écrit le système $\mathbf{x^2 - y^2 = Re(\alpha)}$, $\mathbf{2xy = Im(\alpha)}$ et $\mathbf{x^2 + y^2 = |\alpha|}$. Tout nombre complexe non nul a exactement deux racines carrées opposées.

EXEMPLE

Résoudre $z^2 = 3 + 4i$. On a $|\alpha| = 5$. Le système $x^2 - y^2 = 3$ et $x^2 + y^2 = 5$ donne $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$. Comme $2xy = 4 > 0$, x et y sont de même signe. Solutions : $\mathbf{z = 2 + i}$ ou $\mathbf{z = -2 - i}$.

2. Équation du second degré à coefficients réels

THÉORÈME

Soit l'équation (E) : $\mathbf{az^2 + bz + c = 0}$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$. On pose $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$.

- Si $\mathbf{\Delta > 0}$: deux solutions réelles $z_{1,2} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$.
- Si $\mathbf{\Delta = 0}$: une solution double $z = -b/(2a)$.
- Si $\mathbf{\Delta < 0}$: deux solutions complexes conjuguées $z_{1,2} = (-b \pm i\sqrt{(-\Delta)})/(2a)$.

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, avec $\mathbf{z_1 + z_2 = -b/a}$ et $\mathbf{z_1\, z_2 = c/a}$.

EXEMPLE

• $z^2 + 2z + 5 = 0$: $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$. Solutions : $z = (-2 - 4i)/2 = \mathbf{-1 - 2i}$ et $z = \mathbf{-1 + 2i}$.

• $z^2 - 2z + 2 = 0$: $\Delta = 4 - 8 = -4$. Solutions : $z = (2 \pm 2i)/2 = \mathbf{1 - i}$ et $\mathbf{1 + i}$.

3. Équations contenant z et son conjugué

On pose $z = x + iy$ (x, y réels), on remplace $\bar{z}$ par $x - iy$, puis on identifie parties réelle et imaginaire.

EXEMPLE

Résoudre $2z + \bar{z} = 6 + i$. On obtient $2(x + iy) + (x - iy) = 3x + iy = 6 + i$, donc $x = 2$ et $y = 1$. Solution : $\mathbf{z = 2 + i}$.

4. Racines n-ièmes : équation $z^n = a$

THÉORÈME

Soit $\alpha = \rho\, e^{i\varphi}$ ($\rho > 0$). L'équation $z^n = \alpha$ admet exactement **n solutions** :

$$\mathbf{z_k = \rho^{1/n}\, e^{i(\varphi + 2k\pi)/n}},\ k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Pour $\alpha = 1$, ce sont les **racines n-ièmes de l'unité** : $z_k = e^{2ik\pi/n}$.

EXEMPLE

Résoudre $z^3 = 1$: $z_k = e^{2ik\pi/3}$, $k = 0, 1, 2$. Solutions : $\mathbf{1}$; $\mathbf{e^{2i\pi/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2}$; $\mathbf{e^{4i\pi/3} = -1/2 - i\sqrt{3}/2}$.

EXERCICE D'APPLICATION IV

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 4z + 13 = 0$.
2) Déterminer les racines carrées de $-5 + 12i$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z - 2\bar{z} = 3 + 6i$.

Correction

1) $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$. Solutions : $z = (4 - 6i)/2 = \mathbf{2 - 3i}$ et $z = \mathbf{2 + 3i}$.

2) $|\alpha| = \sqrt{(25 + 144)} = 13$. Système : $x^2 - y^2 = -5$ et $x^2 + y^2 = 13$, d'où $x^2 = 4$ et $y^2 = 9$. Comme $2xy = 12 > 0$: $\mathbf{2 + 3i}$ et $\mathbf{-2 - 3i}$.

3) $z - 2\bar{z} = (x + iy) - 2(x - iy) = -x + 3iy = 3 + 6i \Rightarrow x = -3$ et $y = 2$. Solution : $\mathbf{z = -3 + 2i}$.

FICHE D'EXERCICES — NOMBRES COMPLEXES

Collège le provincial — CE Maths — Tle B — Année scolaire 20... / 20...

EXERCICE 1 (forme algébrique)

Écrire sous forme algébrique :

$a = (2 - i)(3 + 2i)$; $b = (1 + i)^2$; $c = (2 + i)/(1 - 2i)$; $d = i^{2026}$; $e = i^{15}$.

EXERCICE 2 (égalité de complexes)

Déterminer les réels x et y tels que $(x + 2y) + i(2x - y) = 3 - 4i$.

EXERCICE 3 (géométrie)

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + 2i$, $z_B = 2 - 2i$ et $z_C = 5 + 2i$.

1) Calculer les distances AB, BC et AC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) Déterminer l'affixe du milieu I de [AC].
3) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

EXERCICE 4 (forme trigonométrique)

Écrire sous forme trigonométrique :

$a = 1 + i\sqrt{3}$; $b = -\sqrt{3} + i$; $c = -1 - i$; $d = 3 - 3i$; $e = -4$.

EXERCICE 5 (forme exponentielle)

Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2) Calculer z_1/z_2 sous forme exponentielle (module et argument).
3) Calculer $(z_1)^{12}$ et $(z_2)^6$, puis en déduire $(z_1)^{12}/(z_2)^6$.

EXERCICE 6 (formule de Moivre)

1) Développer $(\cos x + i \sin x)^3$ avec la formule du binôme.
2) En utilisant la formule de Moivre, en déduire que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ et $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

EXERCICE 7 (équations dans $\mathbb{C}$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - 6z + 10 = 0$;

b) $2z^2 + 2z + 5 = 0$;

c) $z^2 = 8 - 6i$;

d) $z^3 = -8$;

e) $z + 2\bar{z} = 3 - 2i$.

EXERCICE 8 (problème de synthèse)

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

1) Vérifier que 2 est une racine de P.
2) Déterminer les réels b et c tels que $P(z) = (z - 2)(z^2 + bz + c)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

4) Soient A, B et C les points d'affixes 2, $1+i$ et $1-i$. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

RÉPONSES (pour vérification)

1) $a = 8+i$; $b = 2i$; $c = i$; $d = -1$; $e = -i$.

2) $x = -1$ et $y = 2$.

3) $AB = BC = 5$ et $AC = 6$: ABC est isocèle en B ; $z_I = 2 + 2i$; $z_D = z_A + z_C - z_B = 2 + 6i$.

4) $a = 2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)$; $b = 2(\cos 5\pi/6 + i \sin 5\pi/6)$; $c = \sqrt{2}[\cos(-3\pi/4) + i \sin(-3\pi/4)]$; $d = 3\sqrt{2}[\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)]$; $e = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$.

5) $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$; $z_2 = 2\, e^{-i\pi/6}$; $z_1/z_2 = (\sqrt{2}/2)\, e^{i5\pi/12}$; $(z_1)^{12} = -64$; $(z_2)^6 = -64$; quotient $= 1$.

6) $(\cos x + i \sin x)^3 = (\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x) + i(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$; on identifie avec $\cos 3x + i \sin 3x$ et on remplace $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ (resp. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$).

7) a) $3 \pm i$; b) $(-1 \pm 3i)/2$; c) $3 - i$ et $-3 + i$; d) -2, $1 + i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$; e) $z = 1 + 2i$.

8) $P(2) = 0$; $P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$; solutions : 2, $1+i$, $1-i$; $AB = AC = \sqrt{2}$ et $BC = 2$, donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$: triangle rectangle isocèle en A.