FICHE DE COURS

Leçon 10 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Déroulement du cours

THÈME	CONTENUS	DURÉE
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	– Équations différentielles de premier ordre à coefficients constants – Équations différentielles de second ordre à coefficients constants	13 h
	Séance de régulation	**2 h**

COMPÉTENCE VISÉE ET PRÉ-REQUIS

Compétence : résoudre des équations différentielles du premier et du second ordre à coefficients constants, déterminer la solution qui vérifie des conditions initiales données, et utiliser ces équations pour traiter des situations concrètes (croissance, refroidissement, capital, oscillations).

Pré-requis :

- la dérivation : dérivées usuelles et dérivée de e^u ; $(e^{ax})' = a\,e^{ax}$;
- la fonction exponentielle : $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^x > 0$, $e^0 = 1$;
- la résolution d'une équation du second degré (discriminant Δ) ;
- la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues ;
- la notion de primitive d'une fonction.

Plan de la leçon

- **I.** Généralités sur les équations différentielles
- **II.** Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants
  - II.1 L'équation $y' = ay$
  - II.2 Les équations $y' = ay + b$ et $ay' + by = c$
  - II.3 Conditions initiales
  - II.4 Applications
- **III.** Équations différentielles du second ordre à coefficients constants
  - III.1 L'équation $ay'' + by' + cy = 0$
  - III.2 Conditions initiales
  - III.3 Équation avec second membre constant
- **IV.** Fiche d'exercices et éléments de réponses

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DÉFINITIONS

Une **équation différentielle** est une équation dont l'**inconnue est une fonction** (notée y) et qui fait intervenir cette fonction et une ou plusieurs de ses dérivées y', y'', ...

- L'**ordre** d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée qui y figure.

- **Résoudre** (ou **intégrer**) une équation différentielle sur $\mathbb{R}$, c'est trouver **toutes** les fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}$ (deux fois dérivables si l'ordre est 2), qui la vérifient. Chacune de ces fonctions est une **solution**.
- L'ensemble des solutions s'appelle la **solution générale** ; elle dépend de constantes réelles arbitraires (une constante pour l'ordre 1, deux pour l'ordre 2).
- Une **condition initiale** est une valeur imposée à la solution (et à sa dérivée) en un point : $f(x_0) = y_0$ (et $f'(x_0) = y_1$). Elle permet de choisir **une seule** solution, dite **solution particulière**.
- Une équation est **à coefficients constants** lorsque les coefficients de y, y', y'' sont des nombres réels fixés.

EXEMPLES

- $y' = 3y$ et $2y' + 5y = 1$ sont des équations différentielles du **premier ordre** à coefficients constants.
- $y'' - 5y' + 6y = 0$ et $y'' + 9y = 2$ sont des équations différentielles du **second ordre** à coefficients constants.
- Vérifions que $f(x) = e^{3x}$ est solution de $y' = 3y$: $f'(x) = 3e^{3x} = 3f(x)$ ✔. La fonction $g(x) = 5e^{3x}$ est aussi solution : on a donc **plusieurs** solutions.
- $y' = 2x$ est une équation différentielle particulière : ses solutions sont les **primitives** de $x \mapsto 2x$, c'est-à-dire $y = x^2 + C$.

EXERCICE D'APPLICATION 1

1) Donner l'ordre de chaque équation : *(a)* $y' + 3y = 5$; *(b)* $y'' - 4y' + 4y = 0$; *(c)* $2y' = x + 1$.

2) Vérifier que $f(x) = 3e^{-2x} + 1$ est solution de $(E) : y' + 2y = 2$.

3) Vérifier que $g(x) = \cos 2x$ est solution de $(E') : y'' + 4y = 0$.

CORRIGÉ

1) (a) ordre 1 ; (b) ordre 2 ; (c) ordre 1.

2) $f'(x) = -6e^{-2x}$ donc $f'(x) + 2f(x) = -6e^{-2x} + 6e^{-2x} + 2 = 2$ ✔ : f est solution de (E).

3) $g'(x) = -2\sin 2x$ et $g''(x) = -4\cos 2x$ donc $g''(x) + 4g(x) = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$ ✔.

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

II.1 L'équation différentielle y' = ay (a réel)

THÉORÈME 1

Soit a un nombre réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : y' = ay$ sont les fonctions

$$\mathbf{f(x) = C\,e^{ax}},\ C \in \mathbb{R}$$

PREUVE

• $f(x) = Ce^{ax}$ est solution : $f'(x) = aCe^{ax} = af(x)$ ✔.

• Réciproquement, soit f une solution et posons $g(x) = f(x)\,e^{-ax}$. Alors $g'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = (f'(x) - af(x))\,e^{-ax} = 0$. La dérivée de g est nulle sur $\mathbb{R}$, donc g est constante : $g(x) = C$. D'où $f(x) = Ce^{ax}$. ∎

EXEMPLES RÉSOLUS

- $y' = 3y$: $a = 3$ donc $y = Ce^{3x}$.
- $y' + 4y = 0 \iff y' = -4y$: $y = Ce^{-4x}$.
- $2y' - 5y = 0 \iff y' = (5/2)\,y$: $y = Ce^{(5/2)x}$ (on divise d'abord par le coefficient de y').

EXERCICE D'APPLICATION 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(E_1) : y' = -4y$; $(E_2) : 3y' - 6y = 0$; $(E_3) : 5y' + 2y = 0$.

CORRIGÉ

$(E_1) : a = -4$ donc $y = Ce^{-4x}$, $C \in \mathbb{R}$.

$(E_2) : 3y' = 6y \iff y' = 2y$ donc $y = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

$(E_3) : 5y' = -2y \iff y' = -(2/5)y$ donc $y = Ce^{-(2/5)x}$, $C \in \mathbb{R}$.

II.2 Les équations y' = ay + b et ay' + by = c

THÉORÈME 2

Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : y' = ay + b$ sont les fonctions

$$\mathbf{f(x) = C\, e^{ax} - b/a}, \; C \in \mathbb{R}$$

La fonction constante $k = -b/a$ est la **solution particulière constante** de (E).

PREUVE

La fonction constante $k = -b/a$ vérifie $k' = 0 = ak + b$, donc c'est une solution de (E). Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Par soustraction :

$$\text{f solution de (E)} \iff \text{f' = af + b et k' = ak + b} \iff \text{(f - k)' = a (f - k)}$$

donc $f - k$ est solution de $y' = ay$, c'est-à-dire $f(x) - k = Ce^{ax}$ (Théorème 1). D'où $f(x) = Ce^{ax} - b/a$. ∎

MÉTHODE : résoudre ay' + by = c (a ≠ 0)

1. **Étape 1.** Mettre l'équation sous la forme $y' = a'y + b'$ en divisant par a : $y' = -(b/a)\, y + c/a$.
2. **Étape 2.** Chercher la solution particulière constante k : on remplace y par k et y' par 0 ; on obtient $k = c/b$ (si $b \neq 0$).
3. **Étape 3.** Écrire la solution générale : $y(x) = Ce^{-(b/a)x} + k$, $C \in \mathbb{R}$.

! **Cas particulier *b = 0*** : $ay' = c \iff y' = c/a$; les solutions sont les primitives : $y = (c/a)x + C$.

EXEMPLES RÉSOLUS

Exemple 1. $y' = 2y + 6$. Solution constante : $0 = 2k + 6$ donc $k = -3$. Solutions : $y(x) = Ce^{2x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 2. $y' + 3y = 9 \iff y' = -3y + 9$. Solution constante : $0 = -3k + 9$ donc $k = 3$. Solutions : $y(x) = Ce^{-3x} + 3$.

Exemple 3. $2y' + 4y = 8 \iff y' = -2y + 4$. Solution constante : $k = 2$. Solutions : $y(x) = Ce^{-2x} + 2$.

EXERCICE D'APPLICATION 3

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(E_1) : y' - 2y = 4$; $(E_2) : 3y' + 6y = 12$; $(E_3) : 2y' - y = 3$.

CORRIGÉ

$(E_1) : y' = 2y + 4$; $0 = 2k + 4$ donc $k = -2$. Solutions : $y = Ce^{2x} - 2$.

$(E_2) : y' = -2y + 4$; $k = 2$. Solutions : $y = Ce^{-2x} + 2$.

$(E_3) : y' = (1/2)y + 3/2$; $0 = k/2 + 3/2$ donc $k = -3$. Solutions : $y = Ce^{x/2} - 3$.

II.3 Conditions initiales (problème de Cauchy)

THÉORÈME 3

Soit (E) une équation différentielle du premier ordre $y' = ay + b$. Pour tous réels x_0 et y_0, il existe **une unique solution** f de (E) telle que $f(x_0) = y_0$.

MÉTHODE

1. Écrire la solution générale $f(x) = Ce^{ax} + k$.
2. Traduire la condition initiale : $f(x_0) = y_0$, ce qui donne une équation d'inconnue C.
3. Résoudre pour trouver C, puis écrire la solution particulière.

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer la solution f de $2y' + 4y = 8$ telle que $f(0) = 5$.

On a vu $f(x) = Ce^{-2x} + 2$. Alors $f(0) = C + 2 = 5$ donc $C = 3$. La solution cherchée est $\boldsymbol{f(x) = 3e^{-2x} + 2}$.

EXERCICE D'APPLICATION 4

1) Déterminer la solution f de $(E_1) : y' - 2y = 4$ telle que $f(0) = 1$.

2) Déterminer la solution g de $(E_2) : 3y' + 6y = 12$ telle que $g(1) = 4$.

CORRIGÉ

1) $f(x) = Ce^{2x} - 2$; $f(0) = C - 2 = 1$ donc $C = 3$. D'où $\boldsymbol{f(x) = 3e^{2x} - 2}$.

2) $g(x) = Ce^{-2x} + 2$; $g(1) = Ce^{-2} + 2 = 4$ donc $C = 2e^2$. D'où $g(x) = 2e^2e^{-2x} + 2 = \boldsymbol{2e^{2-2x} + 2}$.

II.4 Applications

De nombreux phénomènes sont modélisés par une équation du type $y' = ay + b$: croissance d'une population, évolution d'un capital, refroidissement d'un corps (loi de Newton), désintégration radioactive, etc. Le signe de a donne le comportement : si $a > 0$ la quantité croît exponentiellement ; si $a < 0$ elle tend vers la valeur d'équilibre $k = -b/a$.

EXEMPLE RÉSOLU : évolution d'un capital

Le capital $K(t)$ (en milliers de FCFA) d'une entreprise, t étant le temps en années, vérifie $K'(t) = 0{,}05\,K(t) + 100$ avec $K(0) = 5\,000$. Calculer $K(10)$.

$K'(t) = 0{,}05K + 100$; solution constante : $0 = 0{,}05k + 100$ donc $k = -2\,000$. Donc $K(t) = Ce^{0{,}05t} - 2\,000$. $K(0) = C - 2\,000 = 5\,000$ donc $C = 7\,000$:

$$\mathrm{K(t)} = 7\,000\ \mathrm{e}^{0{,}05\mathrm{t}} - 2\,000$$

Alors $K(10) = 7\,000\,e^{0{,}5} - 2\,000 \approx 9\,541$ milliers de FCFA.

EXERCICE D'APPLICATION 5 : loi de refroidissement de Newton

Un corps à la température de 90 °C est placé dans une pièce maintenue à 20 °C. Sa température $\theta(t)$ (en °C), t étant le temps en minutes, vérifie $\theta'(t) = -0{,}1\,(\theta(t) - 20)$.

1) Montrer que $\theta' = -0{,}1\theta + 2$, puis déterminer $\theta(t)$ sachant que $\theta(0) = 90$.

2) Au bout de combien de temps la température atteint-elle 40 °C ? (arrondir à 0,01 min)

3) Calculer la limite de $\theta(t)$ quand $t \to +\infty$ et interpréter.

CORRIGÉ

1) $\theta' = -0{,}1\theta + 0{,}1\times 20 = -0{,}1\theta + 2$. Solution constante : $k = 20$. $\theta(t) = Ce^{-0{,}1t} + 20$; $\theta(0) = C + 20 = 90$ donc $C = 70$: $\boldsymbol{\theta(t) = 70e^{-0{,}1t} + 20}$.

2) $\theta(t) = 40 \iff 70e^{-0{,}1t} = 20 \iff e^{-0{,}1t} = 2/7 \iff -0{,}1t = \ln(2/7) \iff t = 10\ln(7/2) \approx 12{,}53$ minutes.

3) $\lim_{t\to+\infty} e^{-0{,}1t} = 0$ donc $\lim \theta(t) = 20$: le corps se stabilise à la température de la pièce (20 °C).

III. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

III.1 L'équation différentielle ay'' + by' + cy = 0 (a ≠ 0)

Cherchons des solutions de la forme $y = e^{rx}$ (r réel ou complexe). On a $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2e^{rx}$, donc

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = (ar^2 + br + c)\,e^{rx}$$

Cette expression est nulle pour tout x si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$. D'où la définition suivante.

DÉFINITION : équation caractéristique

L'**équation caractéristique** de $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ est l'équation du second degré

$$\mathbf{ar^2 + br + c = 0} \text{ (discriminant } \Delta = b^2 - 4ac)$$

THÉORÈME 4 (admis)

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ sont, avec λ et μ deux réels quelconques :

- **Si $\Delta > 0$** : deux racines réelles r_1 et r_2 ; $\boldsymbol{y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}}$.
- **Si $\Delta = 0$** : une racine double $r = -b/(2a)$; $\boldsymbol{y(x) = (\lambda x + \mu)\,e^{rx}}$.
- **Si $\Delta < 0$** : deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ avec $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = \sqrt{(-\Delta)}/(2a)$; $\boldsymbol{y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)}$.

CAS PARTICULIERS UTILES

- $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$) : $y(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$.
- $y'' - \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$) : $y(x) = \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x}$.

EXEMPLES RÉSOLUS

Exemple 1 ($\Delta > 0$). $y'' - 5y' + 6y = 0$. Équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0$, $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$. Solutions : $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$.

Exemple 2 ($\Delta = 0$). $y'' - 4y' + 4y = 0$. $r^2 - 4r + 4 = 0$, $\Delta = 0$, racine double $r = 2$. Solutions : $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$.

Exemple 3 ($\Delta < 0$). $y'' + 2y' + 5y = 0$. $r^2 + 2r + 5 = 0$, $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, $\alpha = -1$ et $\beta = 4/2 = 2$ (racines $-1 \pm 2i$). Solutions : $y(x) = e^{-x}(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$.

EXERCICE D'APPLICATION 6

Résoudre sur $\mathbb{R}$: *(a)* $y'' - 3y' + 2y = 0$; *(b)* $y'' + 6y' + 9y = 0$; *(c)* $y'' + 4y = 0$; *(d)* $y'' - 2y' + 5y = 0$.

CORRIGÉ

(a) $r^2 - 3r + 2 = 0$, $\Delta = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$: $y = \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

(b) $r^2 + 6r + 9 = 0$, $\Delta = 0$, $r = -3$: $y = (\lambda x + \mu)e^{-3x}$.

(c) $r^2 + 4 = 0$, $\Delta = -16$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$: $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$.

(d) $r^2 - 2r + 5 = 0$, $\Delta = 4 - 20 = -16$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$: $y = e^{x}(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$.

III.2 Conditions initiales

Une solution de l'équation du second ordre dépend de **deux** constantes λ et μ. Pour les déterminer, il faut **deux** conditions initiales : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues, qui admet une **unique** solution : c'est la solution particulière cherchée.

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer la solution f de $y'' - 5y' + 6y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

$f(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$ donc $f'(x) = 2\lambda e^{2x} + 3\mu e^{3x}$. Les conditions donnent :

$$\lambda + \mu = 1 \text{ et } 2\lambda + 3\mu = 0$$

De la 1re équation $\lambda = 1 - \mu$; en remplaçant : $2 - 2\mu + 3\mu = 0$ donc $\mu = -2$ et $\lambda = 3$. Ainsi $\boldsymbol{f(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x}}$. (Vérification : $f'(0) = 6 - 6 = 0$ ✔)

EXERCICE D'APPLICATION 7

1) Déterminer la solution f de $y'' - 3y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

2) Déterminer la solution g de $y'' + 4y = 0$ telle que $g(0) = 2$ et $g'(0) = 6$.

CORRIGÉ

1) $f(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $f'(x) = \lambda e^x + 2\mu e^{2x}$. $f(0) = \lambda + \mu = 1$ et $f'(0) = \lambda + 2\mu = 0$. En soustrayant : $\mu = -1$ puis $\lambda = 2$. D'où $\boldsymbol{f(x) = 2e^x - e^{2x}}$.

2) $g(x) = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$, $g'(x) = -2\lambda \sin 2x + 2\mu \cos 2x$. $g(0) = \lambda = 2$ et $g'(0) = 2\mu = 6$ donc $\mu = 3$. D'où $\boldsymbol{g(x) = 2\cos 2x + 3 \sin 2x}$.

III.3 Équation avec second membre constant : ay'' + by' + cy = d (c ≠ 0)

THÉORÈME 5

Soit $(E) : ay'' + by' + cy = d$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$. La fonction constante $k = d/c$ est une solution de (E). Les solutions de (E) sont les fonctions

$$\mathbf{f(x) = g(x) + d/c}$$

où g désigne une solution quelconque de l'équation sans second membre $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.

PREUVE

Pour $y = k$ constante, $y' = y'' = 0$ et l'équation donne $ck = d$, d'où $k = d/c$. Comme dans le cas du premier ordre, f est solution de (E) $\iff f - k$ est solution de (E_0) (par soustraction). ∎

MÉTHODE

1. Résoudre l'équation sans second membre (E_0) avec l'équation caractéristique.
2. Ajouter la solution particulière constante $k = d/c$.
3. Utiliser les deux conditions initiales (si elles sont données) pour trouver λ et μ ; attention : k intervient dans $f(x_0)$ mais pas dans $f'(x_0)$.

EXEMPLE RÉSOLU

Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 4$, puis trouver la solution f telle que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$.

• Solution constante : $2k = 4$ donc $k = 2$. Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$, $r = 1$ ou $r = 2$. Solutions : $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 2$.

• $f(0) = \lambda + \mu + 2 = 3$ donc $\lambda + \mu = 1$; $f'(0) = \lambda + 2\mu = 1$. On en tire $\mu = 0$ et $\lambda = 1$: $\boldsymbol{f(x) = e^x + 2}$.

EXERCICE D'APPLICATION 8

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(E) : y'' + 2y' + y = 4$.

2) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y'' + 4y = 8$.

CORRIGÉ

1) Solution constante : $k = 4$. $r^2 + 2r + 1 = 0$, $\Delta = 0$, $r = -1$ (double). Solutions : $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x} + 4$.

2) $f(0) = \mu + 4 = 1$ donc $\mu = -3$. $f'(x) = \lambda e^{-x} - (\lambda x + \mu)e^{-x}$ donc $f'(0) = \lambda - \mu = \lambda + 3 = 0$, $\lambda = -3$. D'où $\boldsymbol{f(x) = -3(x + 1)e^{-x} + 4}$.

3) $k = 2$; $r^2 + 4 = 0$ donne $\alpha = 0, \beta = 2$. Solutions : $y(x) = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x + 2$.

RÉSUMÉ DE LA LEÇON

Équation	Solutions sur $\mathbb{R}$ ($C, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$)
$y' = ay$	$y(x) = Ce^{ax}$
$y' = ay + b$ ($a \neq 0$)	$y(x) = Ce^{ax} - b/a$
$ay'' + by' + cy = 0$, $\Delta > 0$	$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$ay'' + by' + cy = 0$, $\Delta = 0$	$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$, $r = -b/(2a)$
$ay'' + by' + cy = 0$, $\Delta < 0$	$y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$
$ay'' + by' + cy = d$ ($c \neq 0$)	$y(x) =$ [solution de l'équation sans second membre] $+ d/c$

À retenir : une condition initiale pour l'ordre 1, deux pour l'ordre 2 ; toujours vérifier la solution trouvée en la reportant dans l'équation.

IV. FICHE D'EXERCICES

Exercice 1 — Résolution d'équations du premier ordre

Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles suivantes :

a) $y' = 5y$

b) $2y' + 3y = 0$

c) $y' - 4y = 8$

d) $3y' + 2y = 6$

e) $y' + y = -5$

Exercice 2 — Conditions initiales (ordre 1)

Dans chaque cas, déterminer la solution f de l'équation vérifiant la condition indiquée :

a) $y' - 3y = 0$ avec $f(0) = 2$

b) $y' + 2y = 6$ avec $f(0) = 0$

c) $2y' + y = 4$ avec $f(0) = 1$

d) $y' = 2y - 4$ avec $f(1) = 3$

Exercice 3 — Étude d'une solution

On considère l'équation $(E) : y' + 2y = 2$.

1) Résoudre (E). **2)** Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 4$.

3) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

4) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 4 — Équations du second ordre sans second membre

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

a) $y'' - y' - 6y = 0$

b) $y'' + 10y' + 25y = 0$

c) $y'' + 9y = 0$

d) $y'' - 2y' + 2y = 0$

e) $2y'' - 3y' + y = 0$

Exercice 5 — Conditions initiales (ordre 2)

Déterminer, dans chaque cas, la solution f vérifiant les conditions indiquées :

a) $y'' + y' - 2y = 0$; $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$; $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$

c) $y'' + 16y = 0$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = 8$

Exercice 6 — Second membre constant

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(E_1) : y'' - 4y' + 3y = 6$ et $(E_2) : y'' + 4y' + 4y = 8$.

2) Déterminer la solution f de (E_1) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 7 — Problème : refroidissement d'un café

Un café à 85 °C est posé dans une salle à 25 °C. Sa température $\theta(t)$ (en °C) après t minutes vérifie $\theta'(t) = -0{,}08(\theta(t) - 25)$.

1) Déterminer $\theta(t)$ sachant que $\theta(0) = 85$. **2)** Au bout de combien de temps le café atteint-il 45 °C ? (arrondir à 0,01 min) **3)** Quelle est la limite de $\theta(t)$ quand $t \to +\infty$?

Exercice 8 — Problème : investissement

Le capital $K(t)$ (en millions de FCFA) d'une société après t années vérifie $K'(t) = 0{,}04K(t) + 20$ avec $K(0) = 500$.

1) Déterminer $K(t)$. **2)** Calculer le capital au bout de 10 ans (arrondir au dixième).

Exercice 9 — Oscillations

L'élongation $x(t)$ (en m) d'un ressort au temps t (en s) vérifie $x''(t) + 25x(t) = 0$ avec $x(0) = 0{,}04$ et $x'(0) = 0$.

1) Déterminer $x(t)$. **2)** Calculer la période $T = 2\pi/\omega$ du mouvement.

Exercice 10 — Équation à retrouver

1) Montrer que les fonctions $x \mapsto e^{x}$ et $x \mapsto e^{3x}$ sont solutions d'une même équation du type $y'' + by' + cy = 0$; déterminer b et c.

2) Vérifier que $x \mapsto 2e^{x} - e^{3x}$ est aussi solution de cette équation.

Exercice 11 — Vrai ou faux ? (justifier)

a) Les solutions de $y' = -3y$ sont les fonctions Ce^{3x}.

b) La fonction constante -2 est solution de $y' - 2y = 4$.

c) Si $\Delta < 0$, la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ contient des fonctions trigonométriques.

d) L'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$ admet e^{2x} et xe^{2x} comme solutions.

V. ÉLÉMENTS DE RÉPONSES

Ex 1. a) Ce^{5x} ; b) $Ce^{-3x/2}$; c) $Ce^{4x} - 2$; d) $Ce^{-2x/3} + 3$; e) $Ce^{-x} - 5$.

Ex 2. a) $2e^{3x}$; b) $3 - 3e^{-2x}$; c) $4 - 3e^{-x/2}$; d) $f(x) = Ce^{2x} + 2$, $f(1) = 3$ donne $C = e^{-2}$: $f(x) = e^{2x-2} + 2$.

Ex 3. 1) $y = Ce^{-2x} + 1$; 2) $f(x) = 3e^{-2x} + 1$; 3) $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f = 1$: droite asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$; 4) $f'(x) = -6e^{-2x} < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ex 4. a) $\lambda e^{3x} + \mu e^{-2x}$; b) $(\lambda x + \mu)e^{-5x}$; c) $\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x$; d) $\Delta = -4$, racines $1 \pm i$: $e^{x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$; e) $\Delta = 1$, racines 1 et $1/2$: $\lambda e^{x} + \mu e^{x/2}$.

Ex 5. a) $f(x) = 2e^{x} + e^{-2x}$; b) $f(x) = (x + 1)e^{-2x}$; c) $f(x) = 2 \sin 4x$.

Ex 6. 1) (E_1) : $k = 2$, racines 1 et 3 : $\lambda e^{x} + \mu e^{3x} + 2$; (E_2) : $k = 2$, racine double -2 : $(\lambda x + \mu)e^{-2x} + 2$; 2) $f(x) = -3e^{x} + e^{3x} + 2$.

Ex 7. 1) $\theta(t) = 60e^{-0{,}08t} + 25$; 2) $t = \ln 3 / 0{,}08 \approx 13{,}73$ min ; 3) 25 °C.

Ex 8. 1) $k = -500$ donc $K(t) = 1\,000e^{0{,}04t} - 500$; 2) $K(10) = 1\,000e^{0{,}4} - 500 \approx 991{,}8$ millions de FCFA.

Ex 9. 1) $x(t) = 0{,}04 \cos 5t$; 2) $T = 2\pi/5 \approx 1{,}26$ s.

Ex 10. 1) $r^2 - 4r + 3 = 0$ a pour racines 1 et 3 : $y'' - 4y' + 3y = 0$ ($b = -4$, $c = 3$) ; 2) $f = 2e^{x} - e^{3x}$: $f'' - 4f' + 3f = 2e^{x}(1 - 4 + 3) - e^{3x}(9 - 12 + 3) = 0$ ✔.

Ex 11. a) Faux (Ce^{-3x}) ; b) Vrai ($0 - 2(-2) = 4$) ; c) Vrai ($e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$) ; d) Vrai (racine double 2).

— Fin de la leçon 10 —