

CÔTE D'IVOIRE

FICHE DE COURS

Discipline :	Mathématiques
Classe :	Terminale A
Thème 1 :	Calculs Algébriques
Leçon 7 :	Systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Durée :	10 heures
Nombre de séances :	5

Situation d'apprentissage :

Pour réaliser un cocktail, on achète des bouteilles d'un litre d'orange à 800 F le litre et des bouteilles d'un litre de jus de pomme à 600 F le litre. À l'occasion de l'anniversaire de leur professeur principal, des élèves de Terminale A commandent du jus. Ils veulent au moins 20 bouteilles de mélange et ne veulent dépenser que 24 000 F CFA. Le fabricant du jus ne sachant pas si le budget prévu peut suffire pour les 20 bouteilles, te sollicite. Tes camarades de classe et toi, décidez de déterminer le nombre de bouteilles possible de chaque type de jus.

TABLEAU DES HABILETÉS ET CONTENUS

Habilités	Contenus
Résoudre	- un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la méthode de substitution - un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la méthode de combinaison
Résoudre	- un système d'équations du type $a \ln x + b \ln y = c$; $a' \ln x + b' \ln y = c'$ - un système d'équations du type $a e^x + b e^y = c$; $a' e^x + b' e^y = c'$
Résoudre	- graphiquement une inéquation du type $ax + by + c > 0$ (ou ≥ 0) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - graphiquement un système d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Traduire	- une situation par un système d'équations linéaires - une situation par un système d'inéquations linéaires
Traiter	une situation faisant appel aux systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

HABILETÉS / CONTENUS PAR SÉANCE

Séance 1

HABILETÉS	CONTENUS
Résoudre	Un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la méthode de substitution
Résoudre	Un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la méthode de combinaison

Séance 2

HABILETÉS	CONTENUS
Résoudre	Un système d'équations du type $a \ln x + b \ln y = c$; $a' \ln x + b' \ln y = c'$
Résoudre	Un système d'équations du type $a e^x + b e^y = c$; $a' e^x + b' e^y = c'$

Séance 3

HABILETÉS	CONTENUS
Résoudre	Graphiquement une inéquation du type $ax + by + c > 0$ (ou ≥ 0) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Représenter	L'ensemble des solutions dans le plan

Séance 4

HABILETÉS	CONTENUS
Résoudre	Graphiquement un système d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Déterminer	L'intersection des demi-plans solutions

Séance 5

HABILETÉS	CONTENUS
Traduire	Une situation par un système d'équations ou d'inéquations linéaires
Traiter	Une situation complexe faisant appel aux systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

PLAN DU COURS

Séance 1 : Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- I- Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- 1) Méthode de substitution
- 2) Méthode de combinaison

Séance 2 : Résolution de systèmes de type $\ln$ et $\exp$

- II- Résolution d'un système de type (S) : $a \ln x + b \ln y = c$; $a' \ln x + b' \ln y = c'$
- III- Résolution d'un système de type (S) : $a e^x + b e^y = c$; $a' e^x + b' e^y = c'$
- 1) Méthode : Changement de variables
- 2) Exemples d'application

Séance 3 : Inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- IV- Inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du type $ax + by + c > 0$ (ou ≥ 0)
- 1) Méthode de résolution graphique
- 2) Exercice d'application

Séance 4 : Systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- V- Systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- 1) Méthode de résolution graphique
- 2) Exercice d'application

Séance 5 : Traitement d'une situation complexe

- VI- Situation complexe : modélisation par un système linéaire
- 1) Traduction de la situation
- 2) Résolution et interprétation

SÉANCE 1 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Discipline : Mathématique
Thème 1 : Calculs Algébriques
Leçon 7 : Systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Classe : Terminale A
Séance : 1/5
Durée : 55 min

Supports didactiques : Calculatrice, Manuel, Tableau, Craie de couleur.

Prérequis : Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$, fonctions logarithme et exponentielle, repère et coordonnées dans le plan.

HABILETÉS	CONTENUS
Résoudre	Un système d'équations linéaires par la méthode de substitution
Résoudre	Un système d'équations linéaires par la méthode de combinaison

Plan du cours :

- I- Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- 1) Méthode de substitution
- 2) Méthode de combinaison

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Présentation 10 min	Travail individuel	Activité : Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations : $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = -3 \end{cases}$ Le professeur demande aux apprenants d'exprimer x en fonction de y à partir de la première équation, puis de reporter cette expression dans la seconde équation.	Réponse attendue : De la première équation : $x = 3 + 2y$. On remplace dans la deuxième : $3 + 2y + y = -3 \Leftrightarrow 3y = -6 \Leftrightarrow y = -2$. Puis $x = 3 + 2 \times (-2) = -1$. Donc $S = \{(-1 ; -2)\}$.	I- Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 1) Méthode de substitution Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = -3 \end{cases}$ $\begin{aligned} &\begin{cases} x = 3 + 2y \\ 3 + 2y + y = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2y \\ 3y = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$ Donc $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(-1 ; -2)\}$.

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Développement 10 min	Travail en groupe	Le professeur fait dégager la méthode générale de substitution : 1. Exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir d'une équation. 2. Remplacer cette inconnue dans l'autre équation. 3. Résoudre l'équation obtenue à une inconnue. 4. Calculer la seconde inconnue.	Les apprenants notent la méthode et proposent des exemples.	Méthode de substitution : - Exprimer l'une des inconnues en fonction de l'autre à partir d'une des équations. - Remplacer l'expression obtenue dans l'autre équation. - Résoudre l'équation à une inconnue obtenue. - Déterminer la valeur de la seconde inconnue.
Développement 15 min	Travail en groupe	Activité 2 : Reprendre le même système : $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = -3 \end{cases}$ Le professeur propose de multiplier la première équation par (-1) puis d'additionner membre à membre avec la seconde.	Réponse attendue : $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ x + y = -3 \end{cases}$ En additionnant : $3y = -6$, d'où $y = -2$. En remplaçant dans $x + y = -3$: $x = -1$. Donc $S = \{(-1 ; -2)\}$.	2) Méthode de combinaison Principe : Multiplier chaque équation par un nombre convenable de sorte que l'addition (ou la soustraction) membre à membre élimine une inconnue. Exemple : Système $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = -3 \end{cases}$. En multipliant la 1 ^{re} par (-1) et en additionnant : $\begin{aligned} -x + 2y + x + y &= -3 - 3 \\ 3y &= -6 \Rightarrow y = -2 \\ \text{En remplaçant : } x &= -1. \end{aligned}$ Donc $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(-1 ; -2)\}$.
Application 15 min	Travail individuel	Exercice d'application : Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations suivant par la méthode de ton choix : $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$	Solution attendue : Par combinaison : on multiplie la seconde équation par 3 : $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 9x - 3y = 15 \end{cases}$ En additionnant : $11x = 22$, donc $x = 2$. Et $3(2) - y = 5 \Rightarrow y = 1$. $S = \{(2 ; 1)\}$.	Exercice de maison : Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants : a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5x + y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$ <i>Remarque :</i> Selon le système, l'une des deux méthodes peut être plus rapide. Il faut savoir choisir la plus adaptée.

SÉANCE 2 : SYSTÈMES DE TYPE LOGARITHME ET EXPONENTIEL

Discipline : Mathématique
Thème 1 : Calculs Algébriques
Leçon 7 : Systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Classe : Terminale A
Séance : 2/5
Durée : 55 min

Supports didactiques : Calculatrice, Manuel, Tableau, Craie de couleur.

Prérequis : Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$, fonctions logarithme et exponentielle, repère et coordonnées dans le plan.

HABILETÉS	CONTENUS
Résoudre	Un système d'équations du type $a \ln x + b \ln y = c$; $a' \ln x + b' \ln y = c'$
Résoudre	Un système d'équations du type $a e^x + b e^y = c$; $a' e^x + b' e^y = c'$

Plan du cours :

- II- Systèmes de type logarithme
- III- Systèmes de type exponentiel
- → Méthode : changement de variables

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Présentation 10 min	Travail en groupe	Activité : Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système : $(S_1) \begin{cases} 2 \ln x - \ln y = -2 \\ 4 \ln x + \ln y = 5 \end{cases}$ Le professeur pose la question : peut-on ramener ce système à un système linéaire simple ?	Réponse attendue : Contraintes : $x > 0$ et $y > 0$. On pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. On obtient un système linéaire simple en X et Y.	II- Systèmes de type logarithme Forme : $(S) \begin{cases} a \ln x + b \ln y = c \\ a' \ln x + b' \ln y = c' \end{cases}$ Méthode : changement de variables Contraintes : $x > 0$ et $y > 0$. On pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. Le système devient un système linéaire ordinaire en $(X ; Y)$ que l'on résout par substitution ou combinaison. On revient ensuite à $(x ; y)$ par : $x = e^X$ et $y = e^Y$.

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Développement 15 min	Travail en groupe	Le professeur guide la résolution de (S_1) après le changement de variables : $\begin{cases} 2X - Y = -2 \\ 4X + Y = 5 \end{cases}$ Il demande d'utiliser la méthode de substitution.	Réponse attendue : De (i) : $Y = 2X + 2$. En remplaçant dans (ii) : $4X + 2X + 2 = 5 \Rightarrow 6X = 3 \Rightarrow X = 1/2$. Puis $Y = 2(1/2) + 2 = 3$. Donc $\ln x = 1/2$ et $\ln y = 3$. D'où $x = e^{1/2}$ et $y = e^3$. $S = \{(e^{1/2}; e^3)\}$.	Exemple 1 : Résoudre (S_1) $\begin{cases} 2 \ln x - \ln y = -2 \\ 4 \ln x + \ln y = 5 \end{cases}$ Poser $X = \ln x$, $Y = \ln y$ ($x, y > 0$) : $\begin{cases} 2X - Y = -2 \\ 4X + Y = 5 \end{cases}$ Résolution par substitution : $Y = 2X + 2$, donc $6X = 3$, d'où $X = 1/2$ et $Y = 3$. Retour aux variables initiales : $x = e^{1/2}$, $y = e^3$. $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(e^{1/2}; e^3)\}$
Développement 15 min	Travail en groupe	Activité 2 : Résoudre le système : (S_2) $\begin{cases} e^X + 3e^Y = 5 \\ 2e^X - e^Y = 3 \end{cases}$ Le professeur invite à effectuer un changement de variables analogue.	Réponse attendue : On pose $X = e^x$ ($X > 0$) et $Y = e^y$ ($Y > 0$). $\begin{cases} X + 3Y = 5 \\ 2X - Y = 3 \end{cases}$ Par combinaison, on trouve $X = 2$ et $Y = 1$. Donc $e^x = 2$ et $e^y = 1$. D'où $x = \ln 2$ et $y = 0$. $S = \{(\ln 2; 0)\}$.	III- Systèmes de type exponentiel Forme : $(S) \begin{cases} a e^x + b e^y = c \\ a' e^x + b' e^y = c' \end{cases}$ Méthode : On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$ (avec $X > 0$ et $Y > 0$), puis on résout le système linéaire. On revient à $(x; y)$ par $x = \ln X$ et $y = \ln Y$. Exemple 2 : (S_2) $\begin{cases} e^x + 3e^y = 5 \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases}$. On obtient $X = 2$, $Y = 1$, puis $x = \ln 2$, $y = 0$. $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(\ln 2; 0)\}$.
Application 15 min	Travail individuel	Exercice d'application : Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: a) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 3 \\ 2 \ln x - \ln y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} e^x + e^y = 3 \\ 2e^x - e^y = 0 \end{cases}$	Réponses attendues : a) $X + Y = 3$, $2X - Y = 0 \Rightarrow X = 1$, $Y = 2$. Donc $x = e$, $y = e^2$. $S = \{(e; e^2)\}$. b) $X + Y = 3$, $2X - Y = 0 \Rightarrow X = 1$, $Y = 2$. Donc $x = \ln 1 = 0$, $y = \ln 2$. $S = \{(0; \ln 2)\}$.	Points de vigilance : • Toujours vérifier les contraintes d'existence avant tout calcul : — pour $\ln x$: $x > 0$; — pour $e^x = X$: $X > 0$. • Ne pas oublier de revenir aux variables initiales après avoir résolu le système en $(X; Y)$. Exercice de maison : Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $\begin{cases} \ln x^2 + 3 \ln y^2 = 4 \\ \ln x^2 - \ln y^2 = 4 \end{cases}$.

SÉANCE 3 : INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Discipline : Mathématique
Thème 1 : Calculs Algébriques
Leçon 7 : Systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Classe : Terminale A
Séance : 3/5
Durée : 55 min

Supports didactiques : Calculatrice, Manuel, Tableau, Craie de couleur.

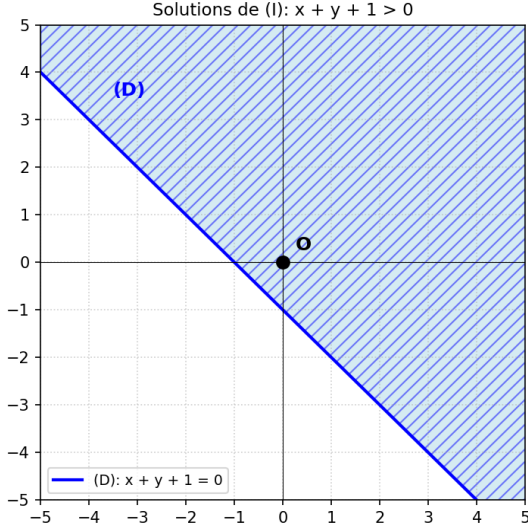
Prérequis : Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$, fonctions logarithme et exponentielle, repère et coordonnées dans le plan.

HABILETÉS	CONTENUS
Résoudre	Graphiquement une inéquation du type $ax + by + c > 0$ (ou ≥ 0) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Représenter	L'ensemble des solutions dans le plan

Plan du cours :

- IV- Inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- 1) Méthode de résolution graphique
- 2) Exemple : $x + y + 1 > 0$

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Présentation 10 min	Travail individuel	Activité : Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Que représente géométriquement l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant l'inéquation : (I) : $x + y + 1 > 0$? Le professeur fait rappeler l'équation d'une droite du plan et invite les apprenants à tracer la droite (D) d'équation $x + y + 1 = 0$.	Réponse attendue : La droite (D) : $x + y + 1 = 0$ partage le plan en deux demi-plans ouverts. L'ensemble des solutions est l'un de ces demi-plans.	IV- Inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du type $ax + by + c > 0$ (ou ≥ 0) Méthode de résolution (graphique) : Le plan est muni d'un repère (O, I, J). • Tracer la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$. • (D) partage le plan en deux demi-plans ouverts : — l'un vérifie $ax + by + c > 0$; — l'autre vérifie $ax + by + c < 0$. • Choisir un point $A(x_A ; y_A)$ n'appartenant pas à (D) et calculer $ax_A + by_A + c$: — si le résultat est > 0, le demi-plan solution est celui qui contient A ; — sinon c'est l'autre demi-plan.

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Développement 10 min	Travail en groupe	Le professeur guide la résolution de (I) : $x + y + 1 > 0$. 1) Tracer la droite (D) d'équation $x + y + 1 = 0$. 2) Tester l'origine $O(0 ; 0)$: quel est le signe de $0 + 0 + 1$? 3) En déduire le demi-plan solution.	Réponse attendue : En $O(0 ; 0)$, on a $0 + 0 + 1 = 1 > 0$. Donc O est solution de (I). L'ensemble des solutions est le demi-plan ouvert de frontière (D) contenant O.	Remarque : • Si l'inéquation est de la forme $ax + by + c \geq 0$, l'ensemble des solutions est un demi-plan fermé (la droite (D) est incluse). • Si l'inéquation est stricte (> 0), la droite (D) n'est pas comprise dans l'ensemble des solutions.
Application 15 min	Travail individuel	Exercice de fixation : Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $x + y + 1 > 0$. Représente graphiquement l'ensemble des solutions.	Solution : Soit (D) : $x + y + 1 = 0$. On trace (D) dans le repère. En $O(0 ; 0)$: $0 + 0 + 1 = 1 > 0$, donc O est solution. L'ensemble des solutions est le demi-plan ouvert de frontière (D) contenant l'origine O (partie hachurée).	
Application 10 min	Travail individuel	Exercice d'entraînement : Résous graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes : a) $2x - y + 1 > 0$ b) $x - 2y + 4 \geq 0$ c) $-x + 3y - 6 < 0$	Les apprenants tracent chaque droite frontière, testent un point (souvent O) et hachurent le bon demi-plan. Ils indiquent si la droite est en trait plein ($\geq$ ou $\leq$) ou en pointillés ($>$ ou $<$).	Exercice de maison : Représente graphiquement l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de chacune des inéquations suivantes : a) $3x + 2y - 6 \geq 0$ b) $y - 2x + 3 < 0$ <i>Astuce :</i> lorsque la droite frontière ne passe pas par O, il est commode de tester le point O pour identifier rapidement le bon demi-plan.

SÉANCE 4 : SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Discipline : Mathématique
Thème 1 : Calculs Algébriques
Leçon 7 : Systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Classe : Terminale A
Séance : 4/5
Durée : 55 min

Supports didactiques : Calculatrice, Manuel, Tableau, Craie de couleur.

Prérequis : Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$, fonctions logarithme et exponentielle, repère et coordonnées dans le plan.

HABILETÉS	CONTENUS
Résoudre	Graphiquement un système d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Déterminer	L'intersection des demi-plans solutions

Plan du cours :

- V- Systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- 1) Méthode de résolution graphique
- 2) Exemple : $\{ 2x - y + 1 < 0 ; x - 2y + 4 \geq 0 \}$

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Présentation 10 min	Travail en groupe	Activité : On rappelle la résolution graphique d'une inéquation. Comment déterminer l'ensemble des solutions d'un système de deux inéquations, par exemple : $(S) \begin{cases} 2x - y + 1 < 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{cases}$	Réponse attendue : L'ensemble des solutions du système est l' intersection des ensembles des solutions de chaque inéquation.	V- Systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Soit le système : $(S) \begin{cases} ax + by + c \geq 0 \\ a'x + b'y + c' < 0 \end{cases}$ Méthode de résolution (graphique) : • Désigner par (S_1) l'ensemble des solutions de la 1^{re} inéquation et par (S_2) celui de la 2^e. • L'ensemble des solutions du système (S) est $(S_1) \cap (S_2)$. • Graphiquement, c'est la zone du plan où les hachures des deux demi-plans se superposent.

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Développement 10 min	Travail en groupe	Le professeur guide la résolution du système : $(S) \begin{cases} 2x - y + 1 < 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{cases}$ Étape 1 : Résoudre $(I_1) : 2x - y + 1 < 0$. Étape 2 : Résoudre $(I_2) : x - 2y + 4 \geq 0$. Étape 3 : Déterminer l'intersection des deux demi-plans.	Réponse attendue : $(D_1) : 2x - y + 1 = 0$. En O : $2(0) - 0 + 1 = 1 > 0$. Donc O n'est pas solution de (I_1). L'ensemble (H_1) est le demi-plan ouvert ne contenant pas O. $(D_2) : x - 2y + 4 = 0$. En O : $0 - 0 + 4 = 4 > 0$. Donc O est solution de (I_2). L'ensemble (H_2) est le demi-plan fermé contenant O. - L'ensemble $(H) = (H_1) \cap (H_2)$.	Exercice résolu : Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $(S) \begin{cases} 2x - y + 1 < 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{cases}$ $(I_1) : 2x - y + 1 < 0$ (droite (D_1) en pointillés) ; test en O : $1 > 0 \Rightarrow O \notin (H_1)$. $(I_2) : x - 2y + 4 \geq 0$ (droite (D_2) en trait plein) ; test en O : $4 > 0 \Rightarrow O \in (H_2)$. L'ensemble (H) des solutions est l'intersection colorée en gris-bleu sur la figure.
Application 20 min	Travail individuel	Exercice de fixation : Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Résous graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système : $(S) \begin{cases} 2x - y + 1 < 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{cases}$ Représente clairement les droites (D_1) et (D_2), puis hachure la zone solution.	Solution attendue : Tracé de $(D_1) : 2x - y + 1 = 0$ (en pointillés, exclue). Tracé de $(D_2) : x - 2y + 4 = 0$ (en trait plein, incluse). L'ensemble (H) est la région commune aux deux demi-plans, au-dessus de (D_1) et au-dessous ou sur (D_2).	Solutions du système $2x - y + 1 < 0$ et $x - 2y + 4 \geq 0$ — $(D_1) : 2x - y + 1 = 0$ — $(D_2) : x - 2y + 4 = 0$
Application 5 min	Travail individuel	Exercice de maison : Résous graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants : a) $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - y + 1 < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$	Les apprenants : - tracent chaque droite frontière ; - testent un point pour identifier le bon demi-plan ; - hachurent l'intersection des demi-plans.	Points clés à retenir : - Le trait de la droite frontière dépend du type d'inégalité : — trait plein si l'inégalité est large ($\leq$ ou $\geq$) ; — pointillés si l'inégalité est stricte ($<$ ou $>$). - L'ensemble solution d'un système est toujours l'intersection des ensembles solutions.

SÉANCE 5 : TRAITEMENT D'UNE SITUATION COMPLEXE

Discipline : Mathématique
Thème 1 : Calculs Algébriques
Leçon 7 : Systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Classe : Terminale A
Séance : 5/5
Durée : 55 min

Supports didactiques : Calculatrice, Manuel, Tableau, Craie de couleur.

Prérequis : Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$, fonctions logarithme et exponentielle, repère et coordonnées dans le plan.

HABILETÉS	CONTENUS
Traduire	Une situation par un système d'équations ou d'inéquations linéaires
Traiter	Une situation complexe faisant appel aux systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Plan du cours :

- VI- Traitement d'une situation complexe
- 1) Modélisation du problème
- 2) Résolution graphique et interprétation

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Présentation 10 min	Travail en groupe	Situation : Pour réaliser un cocktail, on achète x bouteilles d'un litre d'orange à 800 F le litre et y bouteilles d'un litre de jus de pomme à 600 F le litre. On veut obtenir au moins 8 litres de mélange, mais on ne veut pas dépenser plus de 8 000 F. 1) Traduire les contraintes du problème par un système d'inéquations. 2) Résoudre graphiquement ce système.	Réponse attendue : x et y sont des quantités : $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Nombre total de litres : $x + y \geq 8$. Coût total : $800x + 600y \leq 8\,000$, soit $8x + 6y \leq 80$. Le système est : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 8 \\ 8x + 6y \leq 80 \end{cases}$	VI- Traitement d'une situation complexe Étapes de traitement : 1) Identifier les inconnues (x et y). 2) Traduire chaque contrainte par une (in)équation. 3) Écrire le système obtenu. 4) Résoudre (graphiquement pour les inéquations, par substitution ou combinaison pour les équations). 5) Interpréter la ou les solutions dans le contexte du problème.

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Développement 10 min	Travail en groupe	Le professeur fait résoudre chaque inéquation : • $(I_1) : x \geq 0 \Rightarrow$ demi-plan à droite de (OJ). • $(I_2) : y \geq 0 \Rightarrow$ demi-plan au-dessus de (OI). • $(I_3) : x + y \geq 8 \Rightarrow$ demi-plan au-dessus de $(D_3) : x + y = 8$. • $(I_4) : 8x + 6y \leq 80 \Rightarrow$ demi-plan au-dessous de $(D_4) : 8x + 6y = 80$. L'ensemble (H) est l'intersection des 4 demi-plans.	Les apprenants : • tracent les droites (OI), (OJ), (D_3), (D_4) ; • hachurent chaque demi-plan solution ; • identifient l'ensemble (H) comme intersection.	Traduction du problème : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 8 \\ 8x + 6y \leq 80 \end{cases}$ L'ensemble (H) des solutions est délimité par les droites (OI), (OJ), (D_3) et (D_4). C'est le domaine des possibilités.
Application 20 min	Travail individuel	Exercice : Représente graphiquement l'ensemble (H) des solutions du système. Donne ensuite tous les couples solutions à coordonnées entières situés dans le domaine des possibilités.	Couples solutions à coordonnées entières : (0;8), (0;9), (0;10), (0;11), (0;12), (0;13), (1;7), (1;8), ..., (1;12), (2;6), (2;7), ..., (2;10), (3;5), (3;6), (3;7), (3;8), (4;4), (4;5), (4;6), (4;7), (5;3), (5;4), (5;5), (5;6), (6;2), (6;3), (6;4), (7;1), (7;2), (7;3), (7;4), (8;0), (8;1), (9;0), (9;1), (10;0).	

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Situation complexe 15 min	Travail individuel	Exercice - Concours d'awalé : Willy et Kévin s'affrontent au jeu d'awalé. - Willy gagne : 5 points pour lui, 0 pour Kévin. - Kévin gagne : 8 points pour lui, 0 pour Willy. Ils livrent 26 matchs (sans match nul) et terminent avec le même nombre de points. Détermine le nombre de parties gagnées par chacun.	Résolution : Soit x le nombre de parties gagnées par Willy et y celui de Kévin. Système : $\{ x + y = 26 ; 5x = 8y.$ $5x - 8y = 0$. On multiplie la 1^{re} par (-5) : $\begin{cases} -5x - 5y = -130 \\ 5x - 8y = 0 \end{cases}$ En additionnant : $-13y = -130 \Rightarrow y = 10$. Puis $x = 26 - 10 = 16$. Willy a gagné 16 parties et Kévin en a gagné 10.	Bilan de la leçon : - Un système linéaire dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se résout par substitution ou combinaison. - Les systèmes de type $\ln$ ou $\exp$ se ramènent à un système linéaire par un changement de variables. - Les inéquations et systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se résolvent graphiquement : l'ensemble des solutions est un demi-plan ou l'intersection de demi-plans. - Pour traiter une situation complexe, il faut savoir traduire les contraintes par un système, le résoudre, puis interpréter les solutions dans le contexte.

EXERCICES D'ÉVALUATION

Exercice 1 : Vrai / Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, réponds par **vrai** ou **faux**.

- 1) $(2 ; 0)$ est une solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de l'inéquation $x - 3y \leq 1$.
- 2) L'équation $2x + 3y - 4 = 0$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- 3) Le système $\{ e^x + e^y = -3 ; x + 3y = 1 \}$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- 4) $(1 ; 2)$ est une solution du système $\{ \ln x + \ln y = 3 ; 2 \ln x - \ln y = 0 \}$.

Réponses : 1) Vrai 2) Vrai 3) Vrai 4) Faux

Exercice 2 : Renforcement

On veut résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations :

$$(S) \{ -x + y = 1 \quad (1) ; e^x + e^y = 1 \quad (2) \}$$

- 1) En utilisant (1) et (2), justifie que $e^x(1 + e) = 1$.
- 2) a) Déduis-en que $x = -\ln(1 + e)$.
b) Déduis-en la valeur de y .
- 3) Donne le couple solution de (S).

Solution : Le couple solution est **$(-\ln(1 + e) ; 1 - \ln(1 + e))$** .

Exercice 3 : Approfondissement

Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :

$$(S) \{ \ln x^2 + 3 \ln y^2 = 4 ; \ln x^2 - \ln y^2 = 4 \}$$

Solutions : Après changement de variables $X = \ln x^2$ et $Y = \ln y^2$, on trouve $X = 4$ et $Y = 0$, d'où $x^2 = e^4$ et $y^2 = 1$.

Les couples solutions sont : **$(e^2 ; 1)$, $(e^2 ; -1)$, $(-e^2 ; 1)$, $(-e^2 ; -1)$** .