

NIVEAU Tle A
Leçon 1: PROBABILITÉ

Discipline : Mathématiques

Classe : Tle A

Thème 1: Modélisation d'un phénomène aléatoire

Leçon 1 : PROBABILITÉ

Nombre de séance : 2

Situation d'apprentissage

Un jeu-concours organisé à la kermesse de l'école consiste soit à :

1-lancer un dé parfait et noter le numéro de la face supérieure ou

2-lancer deux dés parfaits et faire la somme des numéros des deux faces supérieures.

On dit qu'on a le jackpot lorsqu'on a le plus grand nombre dans chaque cas (6 dans le premier cas et 12 dans le second). Le Jackpot donne droit à 10 000 F.

Les élèves de la classe de terminale A veulent trouver le cas où il y a plus de chance d'avoir le jack pot. Ils s'organisent pour déterminer la probabilité d'obtenir le jack-pot dans chaque cas.

TABLEAU DES HABILETÉS ET CONTENUS

HABILETES	CONTENUS
Connaitre	- la définition de la probabilité d'un évènement dans l'hypothèse d'équiprobabilité - le vocabulaire de la probabilité : • une éventualité • l'univers • un évènement • un évènement élémentaire • l'évènement impossible • l'évènement certain • deux évènements incompatibles • deux évènements contraires • l'évènement « A et B » • l'évènement « A ou B » - la propriété relative à la probabilité d'un évènement connaissant la probabilité de l'évènement contraire - la propriété relative à la probabilité de l'évènement « A ou B »
Ecrire	- un évènement comme intersection de deux évènements - un évènement comme réunion de deux évènements
Calculer	- la probabilité d'un évènement dans l'hypothèse d'équiprobabilité - la probabilité d'un évènement connaissant la probabilité de l'évènement contraire - l'une des probabilités suivantes connaissant les trois autres : $P(A \cup B)$, $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$
Traiter une situation	Faisant appel à la probabilité

HABILITÉS / CONTENUS PAR SÉANCE

1^{ère} séance

HABILETÉS	CONTENUS	Plan du cours
Connaître	- le vocabulaire de la probabilité : • une éventualité • l'univers • un évènement • un évènement élémentaire • l'évènement impossible • l'évènement certain • deux évènements incompatibles • deux évènements contraires • l'évènement « A et B » • l'évènement « A ou B »	Séance 1 :

2^{ème} séance

HABILETÉS	CONTENUS	Plan du cours
Connaître	- la définition de la probabilité d'un évènement dans l'hypothèse d'équiprobabilité - la propriété relative à la probabilité d'un évènement connaissant la probabilité de l'évènement contraire - la propriété relative à la probabilité de l'évènement « A ou B »	Séance 2 :
Ecrire	- un évènement comme intersection de deux évènements - un évènement comme réunion de deux évènements	
Calculer	la probabilité d'un évènement connaissant la probabilité de l'évènement contraire l'une des probabilités suivantes connaissant les trois autres : $P(A \cup B)$, $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ la probabilité d'un évènement dans l'hypothèse d'équiprobabilité	

Discipline : MATHÉMATIQUES

Compétence 2

Classe : Tle A₂

Thème 1: Modélisation d'un phénomène aléatoire

Leçon 1 : Probabilité

Séance : 1/4 (1^{ère} partie)

Durée de la séance : 55 min

Supports didactiques: Calculatrice, Manuel.

Prérequis : Dénombrement

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- le vocabulaire de la probabilité : • une éventualité • l'univers • un évènement • un évènement élémentaire • l'évènement impossible • l'évènement certain • deux évènements incompatibles • deux évènements contraires • l'évènement « A et B » • l'évènement « A ou B »

Plan du cours

Séance 1 :

I- Consolidation des acquis sur le dénombrement

1- Cardinal d'un ensemble

2- P-liste d'un ensemble

3- Arrangement

4- Permutation

5- Combinaison

6- Méthode de dénombrement

DEROULEMENT DE LA SÉANCE

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Présentation 10 min	Travail Individuel	Le professeur rappelle les différentes notions de dénombrement pour consolider les différents acquis.		I- <u>Consolidation des acquis sur le dénombrement</u> 1- <u>Cardinal d'un ensemble</u> * Le cardinal d'un ensemble fini E, noté $card(E)$ est le nombre d'éléments de E. * L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est fini et a pour cardinal zéro (0). * A et B étant deux parties non vides d'un ensemble fini E, on a : $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$ * $\bar{A}$ désignant le complémentaire de A dans E, on a : $card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$ 2- <u>P-liste d'un ensemble</u> * A et B étant deux ensembles. On appelle produit cartésien de A par B, noté $A \times B$ l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$. * Le produit cartésien de p ensembles $E_1, E_2, \dots, E_p$ est l'ensemble des p-listes ou p-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ tels que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_p \in E_p$. * Soit A et B deux ensembles finis On a $card(A \times B) = card(A) \times card(B)$ * Le nombre de p-uplets ou p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p. C'est-à-dire $card(E^p) = [card(E)]^p = n^p$
Développement 10 min				
Application 5 min	Travail de groupe			

				<u>3- Arrangement</u> * E étant un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que : $p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts (Pas de répétition d'un élément). * Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments, noté A_n^p, est tel que : $A_n^p = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1)$ <u>Remarque</u> Le nombre de facteurs du produit $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$ est égal à p. <u>4- Permutations</u> * Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E. * Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$ avec $n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$ <u>5- Combinaison</u> * Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel, tels que $p < n$. On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie de E ayant p éléments. * Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté C_n^p, est tels que : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! (n - p)!}$
--	--	--	--	--

Discipline : MATHÉMATIQUES

Compétence 2

Classe : Tle A₂

Thème 1: Modélisation d'un phénomène aléatoire

Leçon 1 : Probabilité

Séance : 1/4 (2^{ème} partie)

Durée de la séance : 55 min

Supports didactiques: Calculatrice, Manuel.

Prérequis : Dénombrement

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- le vocabulaire de la probabilité : • une éventualité • l'univers • un évènement • un évènement élémentaire • l'évènement impossible • l'évènement certain • deux évènements incompatibles • deux évènements contraires • l'évènement « A et B » • l'évènement « A ou B »

Plan du cours

Séance 1 :

II- Notion de probabilité

1- Vocabulaire

DEROULEMENT DE LA SÉANCE

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Présentation 10 min	Travail Individuel	<u>Activité</u> On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le numéro de la face supérieure. 1- Enumérer tous les résultats possibles. 2- Peut-on prévoir, avant de lancer, le numéro qui apparaîtra ?	<u>Réponse attendue</u> 1- Les résultats possibles sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. 2- Non, on ne peut rien prévoir.	II- Notion de Probabilité 1- Vocabulaire a- Expérience aléatoire * Une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat est appelée expérience aléatoire ou épreuve . * Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé éventualité, issue ou cas possible . * L'ensemble de toutes les éventualités est l' univers associé à l'expérience aléatoire. On le note Ω . <u>Exemple :</u> Les éventualités de l'expérience E qui consiste à lancer un dé de six faces et à noter le numéro de la face supérieure sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6. On note $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
Développement 10 min				
Application 5 min	Travail de groupe	<u>Présentation</u> Le professeur définit les expressions couramment utilisées en probabilité		b- Evénements liés à une expérience aléatoire Considérons l'expérience aléatoire de l'exemple ci-dessus. L'univers des éventualités est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$. * On appelle événement de Ω toute partie de Ω . A : « Obtenir un chiffre pair » est un sous ensemble de Ω , on l'appelle événement . On le note symboliquement $A = \{2 ; 4 ; 6\}$. L'événement A est réalisé si l'on obtient 2 (ou 4 ou 6) lors du lancer.

		<u>Exercice d'application</u> 1a et 1b page 129. <u>Exercice de maison</u> 1 et 2 page 139.		* On appelle événement élémentaire tout événement composé d'un seul résultat. <u>Exemple</u> : A: "Obtenir le chiffre 2" * On appelle événement impossible tout événement qui ne peut être réalisé. <u>Exemple</u> : « Obtenir le chiffre 9 » * On appelle événement certain tout événement qui se réalise certainement. * On appelle événement (A ou B) la partie $A \cup B$ de Ω. * On appelle événement (A et B) la partie $A \cap B$ de Ω. * On appelle événement contraire de A, noté $\bar{A}$, le complémentaire de A dans Ω. * On dit que les événements A et B sont incompatibles (ou disjoints) lorsque l'évènement (A et B) est impossible c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$
--	--	---	--	--

Discipline : MATHÉMATIQUES

Compétence 2

Classe : Tle A₂

Thème 1: Modélisation d'un phénomène aléatoire

Leçon 1 : Probabilité

Séance : 2/4

Durée de la séance : 55 min

Supports didactiques: Calculatrice, Manuel.

Prérequis : Dénombrement

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- la définition de la probabilité d'un évènement dans l'hypothèse d'équiprobabilité - la propriété relative à la probabilité d'un évènement connaissant la probabilité de l'évènement contraire - la propriété relative à la probabilité de l'évènement « A ou B »
Ecrire	- un évènement comme intersection de deux évènements - un évènement comme réunion de deux évènements
Calculer	- la probabilité d'un évènement connaissant la probabilité de l'évènement contraire - l'une des probabilités suivantes connaissant les trois autres : $P(A \cup B)$, $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ - la probabilité d'un évènement dans l'hypothèse d'équiprobabilité

Plan du cours

Séance 2 :

DEROULEMENT DE LA SÉANCE

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Présentation 10 min	Travail Individuel	<u>Présentation</u> Lorsqu'on lance une pièce de monnaie parfaitement symétrique, chaque face a une chance sur deux d'apparaître. Dans ce cas on dit que la probabilité d'apparition d'une face est $\frac{1}{2}$. On parle alors de situation d'équiprobabilité car tous les événements élémentaires ont la même probabilité.		III- Calculs de probabilités 1- Equiprobabilité des événements élémentaires Soit une expérience aléatoire à n éventualités. On dit que cette expérience aléatoire a lieu dans une situation d'équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Dans ce cas la probabilité d'un événement élémentaire est : $\frac{1}{n}$ <u>Remarque</u> Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par les expressions comme : « dé parfait » ; « dé non pipé » ; « pièce parfaite » ; « pièce parfaitement symétrique » ; « boules indiscernables au toucher » ; « cartes bien battues » ; « tirage au hasard ».
Développement 10 min				
Application 5 min	Travail de groupe			2- Probabilité d'un événement a- Propriétés * La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1. * La probabilité de l'événement certain est égale à 1. * La probabilité de l'événement impossible est égale à 0. * La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. La probabilité d'un événement A est notée P(A).

		<u>Activité</u> On lance un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le numéro de la face supérieure. Soit les événements suivants : A : « Obtenir le chiffre 1 » B : « Obtenir un nombre impair » 1- Déterminer le nombre de cas possible 2- Déterminer P(A) et P(B). <u>Exercice d'application</u> 2a page 132 et 2b page 133 <u>Exercice de maison</u>		<u>b- Formule de LAPLACE</u> Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est : $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$ C'est-à-dire $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ <u>c- Événements contraires</u> La somme des probabilités de deux événements contraires est égale à 1. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ <u>d- Réunions d'événements</u> La probabilité de la réunion de deux événements est égale à la somme de leurs probabilités, diminuée de la probabilité de leur intersection. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ <u>Remarque</u> Si les événements A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
--	--	--	--	--

Discipline : MATHÉMATIQUES

Compétence 2

Classe : Tle A₂

Thème 1: Modélisation d'un phénomène aléatoire

Leçon 1 : Probabilité

Séance : 3/4

Durée de la séance : 55 min

Supports didactiques: Calculatrice, Manuel.

Prérequis : Dénombrement

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une variable aléatoire - la loi de probabilité
Déterminer	- la loi de probabilité d'une variable aléatoire

Plan du cours

Séance 3 : VARIABLE ALEATOIRE

1- Définition

2- Loi de probabilité

DEROULEMENT DE LA SÉANCE

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite									
Présentation 10 min	Travail Individuel	<u>Activité 1</u> Une roue mobile autour d'un axe est partagée en dix secteurs de même aire coloriée en quatre zones comme l'indique la figure ci-contre. On tourne la roue, après immobilisation de celle-ci, on note la zone indiquée. 1- Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ? 2- Détermine la probabilité des éventualités de cette expérience aléatoire.	<u>Réponse attendue</u> 1- Les éventualités de cette expérience aléatoire sont : zone noire, zone rouge, zone blanche et zone grise. Donc l'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega=\{N; G; B; R\}$ 2- $P(N)=0,1$ $P(G)=0,3$ $P(R)=0,2$ $P(B)=0,4$	IV- <u>Variable aléatoire</u> 1- <u>Définition</u> Soit une expérience aléatoire à n éventualités. Lorsqu'à chaque éventualité e_i d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel x_i , on dit que l'on a défini une variable aléatoire numérique notée X . <u>Remarque</u> L'évènement « X prend la valeur x_i » est noté (X=x_i)									
Développement 10 min		<u>Présentation</u> Un joueur qui tourne la roue perd ou gagne une certaine somme d'argent suivant la règle de jeu ci-contre. <table border="1"><tr><td>Zone repérée</td><td>Gain algébrique</td></tr><tr><td>N</td><td>1000 F</td></tr><tr><td>R</td><td>500 F</td></tr><tr><td>B</td><td>0 F</td></tr><tr><td>G</td><td>-500 F</td></tr></table> A chaque éventualité de l'univers on associe le gain algébrique du joueur. On dit que l'on a défini une variable aléatoire. La probabilité de chaque éventualité auquel l'on associe le gain défini la loi de probabilité de cette variable aléatoire.	Zone repérée	Gain algébrique	N	1000 F	R	500 F	B	0 F	G	-500 F	<u>Réponse attendue</u> $P(X=1000)=0,1$ $P(X=500)=0,2$ $P(X=0)=0,4$ $P(X=-500)=0,3$
Zone repérée	Gain algébrique												
N	1000 F												
R	500 F												
B	0 F												
G	-500 F												
Application 5 min	Travail de groupe												

Détermine dans ce cas la loi de probabilité de X.

Exercice d'application

Un joueur lance un dé cubique et homogène dont les faces sont numérotées de 1 à 6 puis après son immobilisation, on relève le numéro de la face supérieure.

- Lorsque le numéro relevé est 1 ; 2 ou 3 le joueur paye 1800 f au propriétaire du jeu.

- Lorsque le numéro relevé est 4 le joueur ne paye rien et ne reçoit rien.

- Lorsque le numéro relevé est 5 ou 6 le joueur reçoit 2700 du propriétaire du jeu.

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le gain du joueur à l'issue d'un lancer.

1) Déterminer les valeurs prises par X et leur probabilités respectives.

2) Donner la loi de probabilité de X.

Exercice de maison

2c et 2d page 133.

Réponse attendue

1- L'univers de cette expérience aléatoire est :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Les valeurs prises par X sont :

$$-1800 ; 0 ; 2700.$$

$$(X = -1800) = \{1; 2; 3\}$$

$$P(X = -1800) = P(1) + P(2) + P(3)$$

$$= 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$(X = 0) = \{4\}$$

$$P(X = 0) = P(4) = \frac{1}{6}.$$

$$(X = 2700) = \{5; 6\}$$

$$P(X = 2700) = P(5) + P(6)$$

$$= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

2- La loi de probabilité de X est :

x_i	-1800	0	2700
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Discipline : MATHÉMATIQUES

Compétence 2

Thème 1: Modélisation d'un phénomène aléatoire

Leçon 1 : Probabilité

Séance : 4/4

Durée de la séance : 55 min

Supports didactiques: Calculatrice, Manuel.

Prérequis : Dénombrement

Classe : Tle A₂

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- l'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire
Calculer	- l'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire

Plan du cours

Séance 3 : VARIABLE ALEATOIRE

3- Esperance mathématique d'une variable aléatoire

4- Variance et écart-type d'une variable aléatoire

DEROULEMENT DE LA SÉANCE

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite														
Présentation 10 min	Travail Individuel	<u>Exercice d'application 1</u> On lance deux fois de suite un dés cubique et homogène dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on relève les numéros sur les faces supérieures. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme des deux nombres obtenus lorsqu'elle paire. 1) Déterminer les valeurs prises par X et leur probabilités respectives. 2) Donner la loi de probabilité de X. 3) Calcule l'espérance mathématique de E(X) de X.	<u>Réponse attendue</u> 1. Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire. On $\Omega=\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ Les valeurs prises par X sont : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 et 12. $P(X=2)=\frac{1}{36}$ $P(X=4)=\frac{3}{36}$ $P(X=6)=\frac{5}{36}$ $P(X=8)=\frac{5}{36}$ $P(X=10)=\frac{3}{36}$ $P(X=12)=\frac{1}{36}$ 2- La loi de probabilité est : <table><tr><td>X=x_i</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td></tr><tr><td>P(X=x_i)</td><td>$\frac{1}{18}$</td><td>$\frac{3}{18}$</td><td>$\frac{5}{18}$</td><td>$\frac{5}{18}$</td><td>$\frac{3}{18}$</td><td>$\frac{1}{18}$</td></tr></table>	X= x_i	2	4	6	8	10	12	P(X= x_i)	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$	<u>3- Espérance mathématique d'une variable aléatoire</u> a) Définition Soit une expérience aléatoire à n éventualités. X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$, on appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre réel noté E(X) définie par : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$ b) Interprétation de l'espérance mathématique En terme de Jeu, si : E(X) > 0 , alors le jeu est avantageux pour le joueur. E(X) = 0 , alors le jeu est équitable. E(X) < 0 , alors le jeu est désavantageux pour le joueur.
X= x_i				2	4	6	8	10	12									
P(X= x_i)	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$												
Développement 10 min	Travail de groupe	<u>Exercice d'application 2</u> Considérons l'expérience précédente. Calcule la variance et l'écart-type de X. <u>Exercice de maison</u>	<u>Réponse attendue</u> * $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ Calculons E(X ²) $E(X^2)=4 \times \frac{1}{18} + 16 \times \frac{3}{18} + 36 \times \frac{5}{18} + 64 \times \frac{5}{18} + 100 \times \frac{3}{18} + 144 \times \frac{1}{18}$	<u>2- Variance et Ecart-type.</u> a) Variance Soit une expérience aléatoire à n éventualités. X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$, on appelle Variance de la variable aléatoire X le nombre réel noté V(X) définie par :														
Application 5 min																		

		Voir fiche d'exercices.	$E(X^2) = \frac{4}{18} + \frac{48}{18} + \frac{180}{18} + \frac{320}{18} + \frac{300}{18} + \frac{144}{18}$ $E(X^2) = \frac{996}{18} = \frac{166}{3}.$ $\text{Donc } V(X) = \frac{166}{3} - 49 = \frac{166-147}{3} = \frac{19}{3}$ $* \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{19}{3}} = \frac{\sqrt{57}}{3}$	$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ Avec $E(X^2) = x^2_1 p_1 + x^2_2 p_2 + \dots + x^2_n p_n$ b) <u>Ecart-type</u> On appelle Ecart-type de la variable aléatoire X le nombre réel noté $\sigma(X)$ définie par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$
--	--	-------------------------	--	--