

NIVEAU Tle A

Leçon 3: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Discipline : Mathématiques

Classe : Tle A

Thème 2: FONCTIONS NUMERIQUES

Leçon 3 : FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Nombre de séance : 6

Situation d'apprentissage

Le médico-scolaire de ta commune organise une campagne de dépistage de la fièvre typhoïde dans ton établissement. Après avoir examiné n élèves pris au hasard, le médecin chef affirme que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde dans cet établissement est de $1 - (0,325)^n$.

Afin de sensibiliser davantage les élèves contre cette maladie, le chef de l'établissement veut connaître le nombre minimum d'élèves tel que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 0,98. Il sollicite ta classe. Après plusieurs essais infructueux avec la calculatrice, vous posez le problème à votre professeur de Mathématique qui vous demande d'utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien.

Curieux, chaque élève de la classe décide de s'informer sur la fonction logarithme népérien.

TABLEAU DES HABILETÉS ET CONTENUS

HABILETES	CONTENUS
Connaitre	- la définition de la fonction logarithme népérien - le signe de la fonction logarithme népérien sur : $] 0 ; 1 [;] 1 ; +\infty [$ - la dérivée de la fonction logarithme népérien - le sens de variation de la fonction logarithme népérien - la dérivée d'une fonction de type : $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$ - le nombre e - une valeur approchée du nombre e - les résultats $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$ - les Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien - les résultats suivants : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
Noter	- le logarithme népérien
Reconnaitre	- la courbe de la fonction logarithme népérien
Calculer	- en utilisant les propriétés algébriques de la fonction $\ln$
Résoudre	- des équations faisant intervenir $\ln$. - des inéquations faisant intervenir $\ln$.
Déterminer	- la fonction dérivée d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$

	- des limites d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$
Etudier	Les variations d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$ en utilisant le signe de la fonction dérivée
Dresser	Le tableau de variation d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$
Représenter	graphiquement une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$
Traiter une situation	Faisant appel à la fonction logarithme népérien

HABILITÉS / CONTENUS PAR SÉANCE

1^{ère} séance

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- la définition de la fonction logarithme népérien - le signe de la fonction logarithme népérien sur : $] 0 ; 1 [$; $] 1 ; +\infty [$
Noter	le logarithme népérien

Plan du cours
Séance 1 :
I- Définition et propriété
1- Définition et notation
2- Propriétés

2^{ème} séance

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- les Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien
Calculer	en utilisant les propriétés algébriques de la fonction $\ln$

Plan du cours
Séance 2 :
II- Propriétés algébriques
1-Propriété fondamentale
2-Conséquences de la propriété fondamentale

3^{ème} séance

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- les résultats suivants : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

	- la dérivée de la fonction logarithme népérien - le sens de variation de la fonction logarithme népérien
Reconnaître	la courbe de la fonction logarithme népérien

Plan du cours

Séance 3 :

III- Propriétés analytiques de la fonction $\ln$

1- Calculs de limites

2- Dérivée et sens de variation

4^{ème} séance

HABILETÉS	CONTENUS
connaître	- le nombre e - une valeur approchée du nombre e - le résultat $\ln e = 1$

Plan du cours

Séance 4 :

3- Conséquences de la stricte croissance de $\ln$

4- Définition et Propriétés

5^{ème} séance

HABILETÉS	CONTENUS
Résoudre	- des équations faisant intervenir $\ln$. - des inéquations faisant intervenir $\ln$.

Plan du cours

Séance 5 :

IV- Résolutions d'équations et d'inéquations

1- Résolutions d'équations

2- Résolutions d'inéquations

6^{ème} séance

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	la dérivée d'une fonction de type : $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$
Déterminer	- la fonction dérivée d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$

	- des limites d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$
Etudier	Les variations d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$ en utilisant le signe de la fonction dérivée
Dresser	Le tableau de variation d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$
Représenter	graphiquement une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$

Plan du cours

Séance 6:

Etude de fonction comportant $\ln$

Voir fiche travaux dirigés

Discipline : MATHÉMATIQUES

Compétence 1

Thème 2: Fonctions Numériques

Leçon 3 : Fonction logarithme népérien

Séance : 1/6

Durée de la séance : 55 min

Supports didactiques: Calculatrice, Manuel.

Prérequis : Fonctions

Classe : Tle A₂

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- la définition de la fonction logarithme népérien - le signe de la fonction logarithme népérien sur : $] 0 ; 1 [$; $] 1 ; +\infty [$
Noter	le logarithme népérien

Plan du cours

Séance 1 :

II- Définition et propriété

3- Définition et notation

4- Propriétés

DEROULEMENT DE LA SÉANCE

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Présentation 10 min Développement 10 min	 Travail Individuel	<u>Activité</u> En utilisant la touche ln sur ta calculatrice complète le tableau suivant : Voir introduction CIAM Tle A page 58. De tout ce qui précède en tire les propriétés suivantes :		<u>I- Définition et propriétés de la fonction ln</u> <u>1- Définition et notation</u> On appelle fonction logarithme népérien, la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ et s'annulant en 1. On note $\ln :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \ln x$ <u>2- Propriétés</u>

Application 5 min	Travail de groupe	<u>Exercice d'application</u> 1a et 1b page 64. <u>Exercice de maison</u> 8 page 73	- L'ensemble de définition de la fonction $\ln$ est $]0 ; +\infty[$. - $\ln 1 = 0$ - Pour tout $x \in]0 ; 1[$; $\ln x < 0$ et pour tout $x \in]1 ; +\infty[$; $\ln x > 0$.
--------------------------	-------------------	--	--

Discipline : MATHÉMATIQUES

Compétence 1

Thème 2: Fonctions Numériques

Leçon 3 : Fonction logarithme népérien

Séance : 2/6

Durée de la séance : 55 min

Supports didactiques: Calculatrice, Manuel.

Prérequis : Fonctions

Classe : Tle A₂

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- les Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien
Calculer	en utilisant les propriétés algébriques de la fonction $\ln$

Plan du cours

Séance 2 :

II- Propriétés algébriques

1- Propriété fondamentale

2- Conséquences de la propriété fondamentale

DEROULEMENT DE LA SÉANCE

Moment Di- dactique et Durée	Stratégie Pé- dagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite																																										
Présentation 10 min Développe- ment 10 min	Travail Indi- viduel	Activité Complète le tableau suivant à l'aide de ta calculatrice. <table><tr><td>a</td><td>b</td><td>ab</td><td>$\ln a$</td><td>$\ln b$</td><td>$\ln(ab)$</td><td>$\ln a$ $+ \ln b$</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> Que peut-on dire de $\ln(a \times b)$ et $\ln a +$ $\ln b$?	a	b	ab	$\ln a$	$\ln b$	$\ln(ab)$	$\ln a$ $+ \ln b$	2	3						3	4						4	5						5	6						6	7							II- <u>Propriétés algébriques de la fonc- tion $\ln$</u> 1- <u>Propriété fondamentale</u> Pour tous nombres réels a et b stric- tement positifs, on a : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ <u>Exemple :</u> $\ln 21 = \ln(3 \times 7) = \ln 3 + \ln 7$ Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\ln 5x = \ln 5 + \ln x$ 2- <u>Conséquence de la propriété fondamentale.</u>
a		b	ab	$\ln a$	$\ln b$	$\ln(ab)$	$\ln a$ $+ \ln b$																																							
2		3																																												
3	4																																													
4	5																																													
5	6																																													
6	7																																													

Application 5 min	Travail de groupe	<u>Exercice d'application</u> 1 et 2 page 73. <u>Exercice de maison</u> 3 et 4 page 73.	Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et tout entier relatif n , on a : (1) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ (2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ (3) $\ln a^n = n \ln a$ (4) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$ <u>Exemple</u> $\ln \frac{1}{3} = -\ln 3$ $\ln 9 = \ln 3^2 = 2 \ln 3$
--------------------------	-------------------	--	---

Discipline : MATHÉMATIQUES

Compétence 1

Thème 3: Fonctions Numériques

Leçon 2 : Fonction logarithme népérien

Séance : 3/6

Durée de la séance : 55 min

Supports didactiques: Calculatrice, Manuel.

Prérequis : Fonctions

Classe : Tle A₂

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- les résultats suivants : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ - la dérivée de la fonction logarithme népérien - le sens de variation de la fonction logarithme népérien - le nombre e - une valeur approchée du nombre e - les résultats $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$
Reconnaître	la courbe de la fonction logarithme népérien

Plan du cours

Séance 3 :

III- Propriétés analytiques de la fonction ln

3- Calculs de limites

4- Dérivée et sens de variation

DEROULEMENT DE LA SÉANCE

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
Présentation 10 min	Travail Individuel	<u>Présentation</u> Voir CIAM Tle A page 60		III- Propriétés analytiques de la fonction ln. 1- Calculs de limites a- Limites aux bornes de l'ensemble de définition. $* \lim_{x \rightarrow >0} \ln x = 0$ $* \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ b- Limites de références $* \lim_{x \rightarrow >0} x \ln x = 0$ $* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
Développement 10 min				
Application 5 min	Travail de groupe			2- Dérivée et sens de variation La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. On note $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$. On a pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$; donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice d'application

1c page 64

Exercice de maison

9 page 73

Le tableau de variation de la fonction $\ln$.

x	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		1	+
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Représentation graphique de la fonction $\ln$

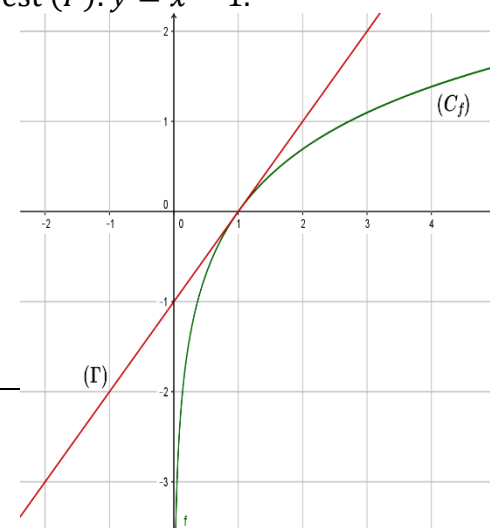
Le plan est muni du repère (O, I, J) .
Soit (C_f) la représentation graphique de la fonction $\ln$.

Asymptote à (C_f) .

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc (C_f) admet une asymptote d'équation $x = 0$, d'où la droite (OJ) est asymptote à (C_f) .

Tangente à (C_f) au point I.

Une équation de la tangente à (C_f) en I est $(\Gamma): y = x - 1$.



--	--	--	--	--

Discipline : MATHÉMATIQUES

Compétence 1

Classe : Tle A₂

Thème 2: Fonctions Numériques

Leçon 3 : Fonction logarithme népérien

Séance : 4/6

Durée de la séance : 55 min

Supports didactiques: Calculatrice, Manuel.

Prérequis : Fonctions

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	- le nombre e - une valeur approchée du nombre e - le résultat $\ln e = 1$

Plan du cours

Séance 4 :

3- Conséquences de la stricte croissance de $\ln$

4- Définition et Propriétés

DEROULEMENT DE LA SÉANCE

Moment Di- dactique et Durée	Stratégie Pé- dagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite																								
10 min		Je fais corriger l'exercice de maison																										
Présentation	Travail de groupe	<u>Activité</u> Complète le tableau suivant à l'aide de ta calculatrice. <table><tr><td>a</td><td>b</td><td>$\ln a$</td><td>$\ln b$</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td></td><td></td></tr></table>	a	b	$\ln a$	$\ln b$	2	3			3	4			4	5			5	6			6	7				3- <u>Conséquences de la stricte crois- sance de $\ln$</u> Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a : * $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$ * $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$ 4- <u>Définition et Propriétés</u> a- <u>Définition</u> On appelle bijection de A dans B toute application de l'ensemble A dans l'ensemble B telle que chaque élément de B est l'image d'un seul et unique élément de A .
a		b	$\ln a$	$\ln b$																								
2	3																											
3	4																											
4	5																											
5	6																											
6	7																											
Développement 25 min	Compare $\ln a$ et $\ln b$. Quelle remarque fais-tu ?																											

Application 10 min	Travail Individuel	<u>Exercice d'application</u> 5 page 73 <u>Exercice de maison</u> 6 page 73	b- Propriétés La fonction $\ln$ réalise une bijection de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi pour tout nombre réel m, l'équation $\ln x = m$ admet une solution unique α strictement positive. En particulier l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution notée e. Le nombre réel e est la base du logarithme népérien. <u>Remarque</u> * Une valeur approchée du nombre e s'obtient avec la calculatrice et donne : $e = 2,718\,281\,828\,456\dots$ * Pour tout nombre rationnel r, on a $\ln e^r = r \ln e = r$ <u>Exemple</u> $\ln e^3 = 3 \ln e = 3$ $\ln \frac{1}{e^4} = -\ln e^4 = -4 \ln e = -4$ $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$
-------------------------------	-------------------------------	---	---

Discipline : MATHÉMATIQUES

Compétence 1

Thème 2: Fonctions Numériques

Leçon 3 : Fonction logarithme népérien

Séance : 5/6

Durée de la séance : 55 min

Supports didactiques: Calculatrice, Manuel.

Prérequis : Fonctions

Classe : Tle A₂

HABILETÉS	CONTENUS
Résoudre	- des équations faisant intervenir $\ln$. - des inéquations faisant intervenir $\ln$.

Plan du cours

Séance 5 :

IV- Résolutions d'équations et d'inéquations

3- Résolutions d'équations

4- Résolutions d'inéquations

DEROULEMENT DE LA SÉANCE

Moment Didactique et Durée	Stratégie Pédagogique	Activités du Professeur	Activités des Apprenants	Trace écrite
10 min		Je fais corriger l'exercice de maison		
Présentation Développement 25 min	Travail de groupe	<u>Exercice d'application</u> 1d page 64		IV- <u>Résolutions d'équations et d'inéquations</u> 1- <u>Résolutions d'équations</u> <u>Méthode</u> Pour résoudre une équation comportant des logarithmes, on peut utiliser le procédé suivant : - Déterminer l'ensemble D des nombres réels pour lesquels l'équation est définie ; - Transformer l'équation de façon à obtenir une égalité de la forme $\ln a = \ln b$;

Application 10 min	Travail Individuel	<u>Exercice d'application</u> 1e page 64. <u>Exercice de maison</u> 10 à 13 page 73	- Utiliser la propriété : « $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$ » ; - Ne retenir que les nombres appartenant à l'ensemble D. 2- <u>Résolutions d'inéquations</u> Voir exercice d'application.
-----------------------	-----------------------	---	--

Discipline : MATHÉMATIQUES

Compétence 1

Thème 2: Fonctions Numériques

Leçon 3 : Fonction logarithme népérien

Séance : 6/6

Durée de la séance : 55 min

Supports didactiques: Calculatrice, Manuel.

Prérequis : Fonctions

Classe : Tle A₂

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	la dérivée d'une fonction de type : $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$
Déterminer	- la fonction dérivée d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$ - des limites d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$
Etudier	Les variations d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$ en utilisant le signe de la fonction dérivée
Dresser	Le tableau de variation d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$
Représenter	graphiquement une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$; $x \mapsto ax + b - \ln x$; $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$

Séance 6 :

Etude de fonction comportant $\ln$

Voir fiche de travaux dirigés