FICHE DE LEÇON

DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

TLE D

Rédigée par : AZIAN Constant Yobouet Ehounou
Professeur de lycée

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

NOMBRE DES SEANCES : 9

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une fonction dérivable à gauche (respectivement à droite) en un point - la définition des dérivées successives d'une fonction - les nouvelles notations des dérivées successives $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2f}{dx^2}$;… ; $\frac{d^nf}{dx^n}(n \in \mathbb{N}^*)$ - les propriétés relatives à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle - la propriété relative à la dérivé d'une fonction composée - les propriétés relatives à l'inégalité des accroissements finis (les 2 formes)
Noter	- un nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction - les dérivées successives d'une fonction
Reconnaître	- graphiquement un point d'inflexion
Déterminer	- le signe d'une fonction en utilisant ses variations - le sens de variation d'une bijection réciproque d'une fonction f sur un intervalle J connaissant le sens de variation de f sur un intervalle I - le nombre dérivé de la fonction f^{-1} en un point y_0 - un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction - des dérivées successives d'une fonction
Etudier	- la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement
Calculer	- le nombre dérivé en un point d'une fonction composée - la dérivée d'une fonction composée

Représenter	- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé - une demi-tangente - graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \cos(ax+b)$ • $x \mapsto \sin(ax+b)$ • $x \mapsto \tan(ax+b)$ • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ • $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ • $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$ - graphiquement des fonctions de raccordement - graphiquement une fonction : • comportant une valeur absolue • comportant une racine carrée
Interpréter	- graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0
Démontrer	- qu'une fonction composée est dérivable en un point
Utiliser	- l'inégalité des accroissements finis pour : • démontrer une inégalité • établir un encadrement
Traiter une situation	- faisant appel à la dérivabilité et à la représentation graphique des fonctions

SITUATION D'APPRENTISSANGE

Monsieur Talla possède une agence de déménagement. Chaque jour lorsqu'il associe le nombre de manœuvre à la somme à payer pour un déménagement, il obtient la fonction $f(x) = 4000\left(\frac{x^2+5x+4}{x}\right)$ qui représente le coût d'un déménagement avec x le nombre de manœuvre. Il souhaite savoir le nombre de manœuvre qu'il lui faut pour que la somme à payer soit minimale. Aide-le.

PLAN DE LA LEÇON

I. DERIVABILITE

1. Dérivabilité en un point

   Définition

2. Dérivabilité à gauche-dérivabilité à droite d'une fonction en un point

   a. Propriété et définition

   b. Propriétés

   c. Demi-tangente verticale

3. Dérivabilité sur un intervalle

   a. Définition

   b. Propriété

4. Dérivabilité d'une fonction composée

   a. Propriété

   b. Conséquences

5. Dérivabilité d'une bijection réciproque

   a. Propriété

   b. Sens de variation de la réciproque d'une fonction bijective

      Propriété

6. Dérivées successives

   a. Définitions

   b. Point d'inflexion

7. Inégalité des accroissements finis

   Propriété1

   Propriété2

II. ETUDES DE FONCTIONS

HABILETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une fonction dérivable à gauche (respectivement à droite) en un point
Noter	- un nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction
Interpréter	- graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0
Représenter	- une demi-tangente

PLAN DE LA SEANCE1

I. DERIVABILITE
1. Dérivabilité en un point
   Définition
2. Dérivabilité à gauche-Dérivabilité à droite
   a. Propriété et définition
   b. Propriétés
   c. Démi-tangente verticale

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés relatives à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle
Etudier	- la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement

PLAN DE LA SEANCE2

3. Dérivabilité sur un intervalle
   a. Définition
   b. Propriété

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la propriété relative à la dérivé d'une fonction composée
Déterminer	- le sens de variation d'une bijection réciproque d'une fonction f sur un intervalle J connaissant le sens de variation de f sur un intervalle I - le nombre dérivé de la fonction f^{-1} en un point y_0
Calculer	- le nombre dérivé en un point d'une fonction composée - la dérivée d'une fonction composée
Représenter	- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé
Démontrer	- qu'une fonction composée est dérivable en un point

PLAN DE LA SEANCE3

4. Dérivabilité d'une fonction composée
   a. Propriété
   b. Conséquences
5. Dérivabilité d'une bijection réciproque
   a. Propriété
   b. Sens de variation de la réciproque d'une fonction bijective
      Propriété

SEANCE4

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition des dérivées successives d'une fonction - les nouvelles notations des dérivées successives $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2f}{dx^2}$;… ; $\frac{d^nf}{dx^n}(n \in \mathbb{N}^*)$
Noter	- les dérivées successives d'une fonction
Reconnaître	- graphiquement un point d'inflexion
Déterminer	- un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction - des dérivées successives d'une fonction

PLAN DE LA SEANCE4

6. Dérivées successives
   a. Définitions
   b. Point d'inflexion

SEANCE5

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés relatives à l'inégalité des accroissements finis (les 2 formes)
Utiliser	- l'inégalité des accroissements finis pour : • démontrer une inégalité • établir un encadrement

PLAN DE LA SEANCE5

7. Inégalité des accroissements finis
   Propriété1
   Propriété2

SEANCE6

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé

PLAN DE LA SEANCE6

II. ETUDES DE FONCTIONS
   1. Fonctions polynômes

SEANCE7

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$

PLAN DE LA SEANCE7

2. Fractions rationnelles

SEANCE8

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ • $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$ - graphiquement une fonction : • comportant une racine carrée

PLAN DE LA SEANCE8

3. Fonctions racines carrées

SEANCE9

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \cos(ax+b)$ • $x \mapsto \sin(ax+b)$ • $x \mapsto \tan(ax+b)$

PLAN DE LA SEANCE9

4. Fonctions trigonométriques

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

SEANCE : 1/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une fonction dérivable à gauche (respectivement à droite) en un point
Noter	- un nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction
Interpréter	- graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0
Représenter	- une demi-tangente

PLAN DE LA SEANCE

I. DERIVABILITE
   1. Dérivabilité en un point
      Définition
   2. Dérivabilité à gauche-dérivabilité à droite d'une fonction en un point
      a. Propriété et définition
      b. Propriétés
      c. Demi-tangente verticale

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min* *Développement* *25 min*	-Lecture -Travail collectif -Travail individuel	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ? <u>ACTIVITE</u> Soit f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. 1. Calcule : a. $\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ b. $\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. <u>REPONSE ATTENDUE</u> Ils souhaitent savoir le nombre de manœuvre qu'il lui faut pour que la somme à payer soit minimale. <u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. a. $\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ $\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} x + 2$ $\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4$ b. $\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	 I. <u>DERIVABILITE</u> 1. <u>Dérivabilité en un point</u> <u>Définition</u> f est une fonction et x_0 un élément de son ensemble de définition. Lorsque la fonction $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une une limite finie $\boldsymbol{l}$ en x_0(ou la fonction

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		c. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ 2. Calcule : a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\frac{g(x)-g(-2)}{x-1}$	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} x+1$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}}\frac{x^2-4}{x+2}$ $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} x-2$ $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} -4$ 2. a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=+\infty$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{1}{\sqrt{x}+1}$	$\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie $\boldsymbol{l}$ en 0) on dit que f est dérivable en x_0. Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0. On le note $f'(x_0)$. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ La droite d'équation $\boldsymbol{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ est tangente à (C_f) en son point d'abscisse x_0. 2. <u>Dérivabilité à gauche-dérivabilité à droite d'une fonction en un point</u> a. <u>Propriété et définition</u> I est un intervalle ouvert. Soit $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction, soit x_0 un élément de I et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$ c. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$	On dit que $\boldsymbol{f}$ ***est dérivable à gauche en*** $\boldsymbol{x_0}$ lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f à gauche en x_0 et on la note $\boldsymbol{f'_g(x_0)}$. (C) admet une demi-tangente à gauche au point A d'abscisse x_0. On dit que $\boldsymbol{f}$ ***est dérivable à droite en*** $\boldsymbol{x_0}$ lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Cette limite s'appelle le nombre dérivé f à droite en x_0 et on la note $\boldsymbol{f'_d(x_0)}$. (C) admet une demi-tangente à droite au point A d'abscisse x_0. b. Propriétés Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a;b[$ contenant x_0. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$	gauche en x_0, dérivable à droite en x_0 et $\boldsymbol{f'_g(x_0) = f'_d(x_0)}$. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[x_0, b[$. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite en x_0. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a, x_0]$. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche en x_0. c. <u>Demi-tangente verticale</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0. Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\<}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\>}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est ***infinie*** la courbe représentative de f admet une ***demi-tangente verticale*** au point $A(x_0, f(x_0))$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 minutes*	-Travail individuel	<u>EXERCICES DE FIXATION</u> 1. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 2x^2 si\ x \geq 0 \\ 3x^4\ si\ x < 0 \end{cases}$ étudie la dérivabilité de f en 0. 2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x\|x-3\|$ étudie la dérivabilité de g en 3. 3. On considère la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} (x-1)^2 si\ x < 1 \\ 1-\sqrt{x}\ si\ x \geq 0 \end{cases}$ étudie la dérivabilité de f en 1. 4. On considère la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ si\ x \geq 0 \\ \sqrt{-x}\ si\ x < 0 \end{cases}$ Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J). Justifie que	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1.** $f(x) = \begin{cases} 2x^2 si\ x \geq 0 \\ 3x^4\ si\ x < 0 \end{cases}$ $\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{2x^2}{x}$ $\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} 2x$ $\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$ $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{3x^4}{x}$ $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} 3x^3$ $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$ $f'_g(0) = f'_d(0)$ donc f est dérivable en 0. **2.** $g(x) = x\|x-3\|$ $\lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} \frac{x(3-x)}{x-3}$ $\lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} -x$ $\lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = -3$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		(C) admet une tangente verticale au point O. 5. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -\sqrt{\|1-x^2\|}$ Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J). Justifie que (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.	$\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} \frac{x(x-3)}{x-3}$ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = x$ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = 3$ $g'_g(3) \neq g'_d(3)$ donc g n'est pas dérivable en 3. **3.** $h(x) = \begin{cases} (x-1)^2 si\ x < 1 \\ 1-\sqrt{x}\ si\ x \geq 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \frac{(x-1)^2}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} x-1$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = 0$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{-1}{1+\sqrt{x}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$ $h'_g(1) \neq h'_d(1)$ donc h n'est pas dérivable en 1.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			4. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \; si \; x \geq 0 \\ \sqrt{-x} \; si \; x < 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\sqrt{-x}}{x}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{-x}}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{x}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ (C) admet une demi-tangente verticale au point O dirigée vers le haut. **5.** $f(x) = -\sqrt{\lvert 1 - x^2 \rvert}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-\sqrt{1 - x^2}}{x - 1}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-\sqrt{x + 1}}{\sqrt{1 - x}}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICES DE MAISON</u> N°1 , N°2 et N°3 page 95 Mon Livre de Mathématiques T^{LE}D Pyramides.	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{-\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1 dirigée vers le bas.	

EXERCICE1

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ par : $f(x) = \sqrt{x+2}$
On note (C_f) la courbe représentative de *f* dans un repère (O ; I ; J).
1. Montre que, en utilisant la définition, que *f* est dérivable en 3 puis précise *f* '(3).
2. Donner une équation de la tangente à (C_f) en 3.

EXERCICE2

On considère la fonction g : ℝ → ℝ

$$x \to |x^2 + x - 2|$$

Etudie la dérivabilité de g en -2 et interprète graphiquement le résultat.

EXERCICE3

On donne la fonction g sur $[0.+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Etudie la dérivabilité de g en 2 puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

SEANCE : 2/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés relatives à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle
Etudier	- la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement

PLAN DE LA SEANCE

3. Dérivabilité sur un intervalle
   a. Définition
   b. Propriété

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> On donne la fonction f définie par : $$f(x)=\begin{cases}2x^2 \ \forall x \in]-\infty;2] \\ \dfrac{1}{3x} \ \forall x \in [2;+\infty[\end{cases}$$ On se propose d'étudier la dérivabilité de f et de déterminer f'. 1. Etudie la dérivabilité de f en tout point de $]-\infty;2[$. 2. Etudie la dérivabilité de f en tout point de $]2;+\infty[$. 3. Etudie la dérivabilité de f à gauche en 2 et à droite en 2. 4. Conclue.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. Sur $]-\infty;2[$, f coïncide avec $g: x \to 2x^2$ donc f est dérivable en tout élément de $]-\infty;2[$. f est dérivable sur $]-\infty;2[$ et pour tout x élément de $]-\infty;2[$ $f'(x)=4x$. **2**. Sur $]2;+\infty[$, f coïncide avec $h: x \to \dfrac{1}{3x}$ donc f est dérivable en tout élément de $]2;+\infty[$,. f est dérivable sur $]2;+\infty[$, et pour tout x élément de $$]-\infty;2]\ f'(x)=-\frac{1}{3x^2}.$$ 3. $$\lim_{\underset{<}{x\to 2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\underset{<}{x\to 0}}\frac{2(x^2-4)}{x-2}$$ $$\lim_{\underset{<}{x\to 2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\underset{<}{x\to 2}}2(x+2)$$ $$\lim_{\underset{<}{x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=8$$ f est dérivable à gauche en 2 et	3. <u>Dérivabilité sur un intervalle</u> a. <u>Définition</u> f est une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$. On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]a;b[$ lorsque f est dérivable en tout élément de l'intervalle $]a;b[$. f est une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$. On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ lorsque f est dérivable sur $]a;b[$, dérivable à droite en a, dérivable à gauche en b. f est une fonction définie sur un intervalle $]a;b]$. On dit que f est dérivable sur $]a;b]$ lorsque f est dérivable sur $]a;b[$, dérivable à gauche en b.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$f'_g(2) = 8$ $$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\frac{1}{3x}-\frac{1}{6}}{x-2}$$ $$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)}{x-2}$$ $$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2-x}{2x}\right)}{x-2}$$ $$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} -\frac{1}{6x}$$ $$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} -\frac{1}{12}$$ f est dérivable à droite en 2 et $$f'_d(2) = -\frac{1}{12}.$$ 4. f est dérivable sur $]-\infty; 2[$ et dérivable à gauche en 2 donc f est dérivable sur $]-\infty; 2]$. f est dérivable sur $]2; +\infty[$ et dérivable à droite en 2 donc f est dérivable sur $[2; +\infty[$. $$f'(x) = \begin{cases} 4x \ \forall x \in]-\infty; 2[\\ -\frac{1}{3x^2} \ \forall x \in]2; +\infty[\\ f'_g(2) = 8 \\ f'_d(2) = -\frac{1}{12} \end{cases}$$	f est une fonction définie sur un intervalle $[a; b[$. On dit que f est dérivable sur $[a; b[$ lorsque f est dérivable sur $]a; b[$, dérivable à droite en a. b. <u>Propriété</u> Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel -Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\sqrt{9-x^2}$. Etudie la dérivabilité de f sur $[-3;3]$. <u>EXERCICE DE MAISON</u> N°4 et N°5 page 95 Mon Livre de Mathématiques T[LE]D Pyramides.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ >}} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ >}} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x+3}$ $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ >}} \frac{f(x)-f(-3)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ >}} \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+3}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ >}} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=+\infty$ f n'est pas dérivable à droite en 3. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{-x+3}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$ f n'est pas dérivable à gauche en 3. f n'est dérivable sur $[-3;3]$. f est dérivable sur $]-3;3[$à droite en 3.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^LE^ D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTION

SEANCE : 3/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la propriété relative à la dérivé d'une fonction composée
Déterminer	- le sens de variation d'une bijection réciproque d'une fonction f sur un intervalle J connaissant le sens de variation de f sur un intervalle I - le nombre dérivé de la fonction f^{-1} en un point y_0
Calculer	- le nombre dérivé en un point d'une fonction composée - la dérivée d'une fonction composée
Représenter	- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé
Démontrer	- qu'une fonction composée est dérivable en un point

PLAN DE LA SEANCE

4. Dérivabilité d'une fonction composée
   a. Propriété
   b. Conséquences
5. Dérivabilité d'une bijection réciproque
   a. Propriété
   b. Sens de variation de la réciproque d'une fonction bijective
      Propriété

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *15 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison ACTIVITE1 On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = 3x + 1$ 1. Détermine g$\text{o}f(x)$ 2. Détermine : a. $f'(x)$ b. $g'(x)$ c. $(f\text{o}g)'(x)$ 3. Compare $(f\text{o}g)'(x)$ et g$'(x) \times f'(g(x))$	REPONSES ATTENDUES 1. $f\text{o}g(x) = f(g(x))$ $f\text{o}g(x) = f(3x + 1)$ $f\text{o}g(x) = 2(3x + 1)^2$ $f\text{o}g(x) = 2(9x^2 + 6x + 1)$ $f\text{o}g(x) = 18x^2 + 12x + 2$ 2. a. $f'(x) = 4x$ b. $g'(x) = 3$ c. $(f\text{o}g)'(x) = 36x + 12$ 3. $g'(x) \times f'\big(g(x)\big) =$ $3 \times 4(3x + 1)$ $g'(x) \times f'(g(x)) = 36x + 12$ $(f\text{o}g)'(x) = $ g$'(x) \times f'(g(x))$	4. Dérivabilité d'une fonction composée a. Propriété Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle inclus dans *f*(I) alors la fonction *gof* est dérivable sur I et on a : $(g\text{o}f)' = f' \times g'\text{o}f$. b. Conséquences Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K. ▪ $\forall n \in \mathbb{Q}^*$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ ▪ Pour $u > 0$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ▪ $(\cos u)' = -u' \sin u$ ▪ $(\sin u)' = u' \cos u$ ▪ Pour $\cos u \neq 0$, $(\tan u)' = u'[1 + tan^2(u)]$ ou $(\tan u)' = \frac{u'}{cos^2(u)}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Dans chacun des cas suivants, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule sa dérivée. 1. $f(x) = (3x^2 - 2x + 5)^3$ 2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 8}$ 3. $f(x) = \cos(2x^3 + 1)$ 4. $f(x) = \sin(\cos(3x + 4))$ 5. $f(x) = \tan\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $f(x) = (3x^2 - 2x + 5)^3$ $f(x) = 3(6x - 2)(3x^2 - 2x + 5)^2$ $f(x) = (18x - 6)(3x^2 - 2x + 5)^2$ 2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 8}$ $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 8}}$ $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 8}}$ 3. $f(x) = \cos(2x^3 + 1)$ $f'(x) = -6x^2 \sin(2x^3 + 1)$ 4. $f(x) = \sin(\cos(3x + 4))$ $f'(x) = -3\sin(3x + 4)\cos(\cos(3x + 4))$ 5. $f(x) = \tan\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$ $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}\left[1 + tan^2\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE2</u> Soit f une bijection d'un intervalle I sur f(I) et f^{-1} sa bijection réciproque. On suppose que pour tout élément b de f(I), $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. 1. a. Détermine $f o f^{-1}$ b. Déduis-en que $(fof^{-1})'(b)= 1$. 2. En utilisant la dérivée de la composée de deux fonctions, détermine $(fof^{-1})'(b)$. 3. Déduis la valeur de $(f^{-1})'(b)$. 4. Discute du sens de variation de f^{-1} selon celui de f.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. a. $f o f^{-1} : I \to I$ $x \to x$ b. $(fof^{-1})(x)= x$. $(fof^{-1})'(x)= 1$. $(fof^{-1})'(b)= 1$ 2. $(f o f^{-1})'(b) = (f^{-1})'(b) \times f'\left(f^{-1}(\mathrm{b})\right)$ 3. $(f^{-1})'(b) \times f'\left(f^{-1}(\mathrm{b})\right) = 1$ $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(\mathrm{b})\right)}$ 4. $(f^{-1})'(b) \times f'\left(f^{-1}(\mathrm{b})\right) = 1$ $(f^{-1})'(b) \times f'\left(f^{-1}(\mathrm{b})\right) > 0$ donc $(f^{-1})'$ et f' ont le même signe. On en déduit que : ○ Si f est croissante sur I alors f^{-1} est croissante sur f(I). ○ Si f est décroissante sur I alors f^{-1} est décroissante sur f(I).	5. <u>Dérivabilité d'une bijection réciproque</u> a. <u>Propriété</u> Soit f une bijection d'un intervalle I sur f(I) et a un élément de I d'image b par f. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ (c'est-à-dire $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$) alors f^{-1} est dérivable en b et on a : $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(\mathrm{b})\right)}$ b. <u>Sens de variation de la réciproque d'une fonction bijective</u> <u>Propriété</u> Soit f une fonction bijective et dérivable sur un intervalle I et f^{-1} sa bijection réciproque. ○ Si f est croissante sur I alors f^{-1} est croissante sur f(I). ○ Si f est décroissante sur I alors f^{-1} est décroissante sur f(I).

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel -Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = x^3 + 1$. 1. a. Montre que f est bijective. b. Donne le sens de variation de f^{-1} 2. f^{-1} est la bijection réciproque de f . a) Démontre que f^{-1} est dérivable en 9 et calcule $(f^{-1})'(9)$. b) f^{-1} est-elle dérivable en 1 ? Justifie ta réponse. <u>EXERCICE DE MAISON</u> N°10, N°11 et N°12 page 96 Mon Livre de Mathématiques T^{LE}D Pyramides.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. a. f est un polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2$ $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est bijective. b. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. 2.a. $f(x) = 9 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 9$ $x^3 = 8$ $x = 2$ $f'(2) = 12$ $f'(2) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 9. $(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(2)}$ $(f^{-1})'(9) = \frac{1}{12}$ b. $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 1$ $x^3 = 0$ $x = 0$ $f'(0) = 0$ $f'(0) = 0$ donc f^{-1} n'est dérivable en 1.	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTION

SEANCE : 4/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition des dérivées successives d'une fonction - les nouvelles notations des dérivées successives $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2f}{dx^2}$;… ; $\frac{d^nf}{dx^n}(n \in \mathbb{N}^*)$
Noter	- les dérivées successives d'une fonction
Reconnaître	- graphiquement un point d'inflexion
Déterminer	- un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction - des dérivées successives d'une fonction

PLAN DE LA SEANCE

6. Dérivées successives
   a. Définitions
   b. Point d'inflexion

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min	-Travail en groupe	Correction des exercices de maison		
Développement *25 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE</u> On considère la fonction *f* dérivable et définie de ℝ vers ℝ par : $f(x) = x^7 + x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x + 7$. 1. Calcule la dérivée *f* ' de la fonction *f* sur ℝ. 2. On admet que *f* ' est dérivable sur ℝ. Calcule la dérivée de la fonction *f* '(on la notera f''). 3. On admet que f'' est dérivable sur ℝ. Calcule la dérivée de la fonction *f* '(on la notera $f^{(3)}$). 4. Calcule $f^{(4)}$; $f^{(5)}$; $f^{(6)}$ et $f^{(7)}$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $f(x) = x^7 + x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x + 7$. $f'(x) = 7x^6 + 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 3$ 2. $f''(x) = 42x^5 + 20x^3 - 24x^2 + 6x$ 3. $f^{(3)}(x) = 210x^4 + 60x^2 - 48x + 6$ 4. $f^{(4)}(x) = 840x^3 + 120x - 48$ $f^{(5)}(x) = 2520x^2 + 120$ $f^{(6)}(x) = 5040x$ $f^{(7)}(x) = 5040$	6. <u>Dérivées successives</u> a. <u>Définitions</u> Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I. Si *f* est dérivable sur I, alors sa dérivée *f* ' est la dérivée première de *f*. On la note aussi : $f^{(1)}$ ou $\frac{df}{dx}$ Si *f* 'est dérivable sur I, alors sa dérivée est la dérivée seconde de *f*. On la note : f'' ou $f^{(2)}$ ou $\frac{d^2f}{dx^2}$ De proche en proche, la dérivée n-ième de *f* sur I, si elle existe, est la dérivée de la fonction $(n-1)$-ième de *f* sur I. On la note : $f^{(n)}$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}$ b. <u>Point d'inflexion</u> Soit *f* une fonction deux fois

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Calcule les dérivées successives jusqu'à l'ordre 3 de chacune des fonctions suivantes : $f(x) = x^4 - 2x^3 - 8$ $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ $h(x) = \frac{1}{x+3}$ 2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$. Détermine les coordonnées des points d'inflexion éventuels de la courbe (C_f).	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ $f''(x) = 12x^2 - 12x$ $f^{(3)}(x) = 24x - 12$ $g'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ $g''(x) = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ $g^{(3)}(x) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ $h'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$ $h''(x) = \frac{2(x+3)}{(x+3)^4}$ $h^{(2)}(x) = \frac{2}{(x+3)^3}$ $h^{(3)}(x) = -\frac{6(x+2)^2}{(x+3)^6}$ $h^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+3)^4}$	dérivable sur un intervalle I, (C_f) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. Le point A(a; $f(a)$) est un point d'inflexion de (C_f) lorsque $f^{(2)}$ s'annule en a changeant de signe.

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr><td></td><td>-Travail individuel</td><td><u>EXERCICE DE MAISON</u>
N°9, N°17 page 96 et N°18 page 97 Mon Livre de Mathématiques T[LE]D Pyramides.</td><td>2. $f'(x) = 4x^3 - 12x$
$f''(x) = 12x^2 - 12$
$f''(x) = 12(x^2 - 1)$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>

Les points d'inflexion de la courbe (C_f) sont $A(-1; f(-1))$ et $B(1; f(1))$.

$f(-1) = (-1)^4 - 6(-1)^2 + 1$
$f(-1) = 1 - 6 + 1$
$f(-1) = -4$

$f(1) = (1)^4 - 6(1)^2 + 1$
$f(-1) = 1 - 6 + 1$
$f(-1) = -4$

$A(-1; -4)$ et $B(1; -4)$ sont les points d'inflexion de la courbe (C_f).</td><td></td></tr>
</table>

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T[LE] D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTION

SEANCE : 5/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés relatives à l'inégalité des accroissements finis (les 2 formes)
Utiliser	- l'inégalité des accroissements finis pour : • démontrer une inégalité • établir un encadrement

PLAN DE LA SEANCE

7. Inégalité des accroissements finis
   Propriété1
   Propriété2

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> <u>Partie1</u> Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. m et M sont deux nombres réels tels que : $\forall x \in [a;b], m \leq f'(x) \leq M$. 1. On considère la fonction g définie sur $[a;b]$ par : $g(x) = f(x) - mx$. En utilisant le sens de variation de g, démontre que : $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$. 2. On considère la fonction h définie sur $[a;b]$ par : $h(x) = Mx - f(x)$. En utilisant le sens de variation de h, démontre que : $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ 3. Déduis des questions 1. et 2. un encadrement de $f(b) - f(a)$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $g(x) = f(x) - mx$ $g'(x) = f'(x) - m$ $\forall x \in [a;b], m \leq f'(x) \leq M$ $\forall x \in [a;b], f'(x) - m \geq 0$ $\forall x \in [a;b]$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[a;b]$. $g(a) \leq g(b)$ $f(a) - ma \leq f(b) - mb$ $mb - ma \leq f(b) - f(a)$ $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$. **2.** $h(x) = Mx - f(x)$ $h'(x) = M - f'(x)$ $\forall x \in [a;b], m \leq f'(x) \leq M$ $\forall x \in [a;b], M - f'(x) \geq 0$ $\forall x \in [a;b], h'(x) \geq 0$ donc h est croissante sur $[a;b]$. $h(a) \leq h(b)$ $Ma - f(a) \leq Mb - f(b)$ $f(b) - f(a) \leq Mb - Ma$ $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ **3**. On déduit des questions 1. et 2. Que : $\boldsymbol{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$.	7. <u>Inégalité des accroissements finis</u> <u>Propriété1</u> Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. S'il existe des nombres réels M et m tels que : $\forall x \in [a;b], m \leq f'(x) \leq M$ alors $\boldsymbol{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		<u>Partie2</u> Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. On suppose qu'il existe un nombre réel M tel que : $\forall x \in]a;b[, \lvert f'(x)\rvert \leq M$. En utilisant les résultats de l'activité1, démontre que : pour tous nombres réels x_1 et x_2 éléments de $]a;b[$, $\lvert f(x_2) - f(x_1)\rvert \leq M(x_2 - x_1)$	$\forall x \in]a;b[, \lvert f'(x)\rvert \leq M$ $\forall x \in]a;b[, -M \leq f'(x) \leq M$. D'après la partie1, on a : Pour tous nombres réels x_1 et x_2 éléments de $]a;b[$, $-M(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1)$. $\boldsymbol{\lvert f(x_2) - f(x_1)\rvert \leq M(x_2 - x_1)}$	<u>Propriété2</u> f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de I $\lvert f'(x)\rvert \leq M$, alors pour tous nombres réels a et b éléments de I, $\boldsymbol{\lvert f(b) - f(a)\rvert \leq M\lvert b - a\rvert}$
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1.Soit f une fonction dérivable sur $[2;5]$ et telle que : $1 \leq f'(x) \leq 4$ pour tout x élément de $[2;5]$. Démontre que : $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$. 2.Soient a et b deux nombres réels, tels que : $a < b$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[a;b]$, démontre que : $\lvert\cos b - \cos a\rvert \leq \lvert b - a\rvert$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. Soit f une fonction continue sur $[2;5]$ et dérivable sur $]2;5[$. $\forall x \in [2;5], 1\leq f'(x) \leq 4$ D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $1(5-2) \leq f(5) - f(2) \leq 4(5-2)$. $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$ 2. Posons $g(x) = \cos x$ g est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. $\forall x \in]a;b[, g'(x) = -\sin x$ $\forall x \in]a;b[, \lvert g'(x)\rvert \leq 1$ D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> N°13, N°14 et N°15 page 96 Mon Livre de Mathématiques T^{LE}D Pyramides.	$\lvert g(b)-g(a)\rvert \leq 1\times\lvert b-a\rvert$ $\lvert g(b)-g(a)\rvert \leq \lvert b-a\rvert$ $\lvert\cos b-\cos a\rvert \leq \lvert b-a\rvert$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTION

SEANCE : 6/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé

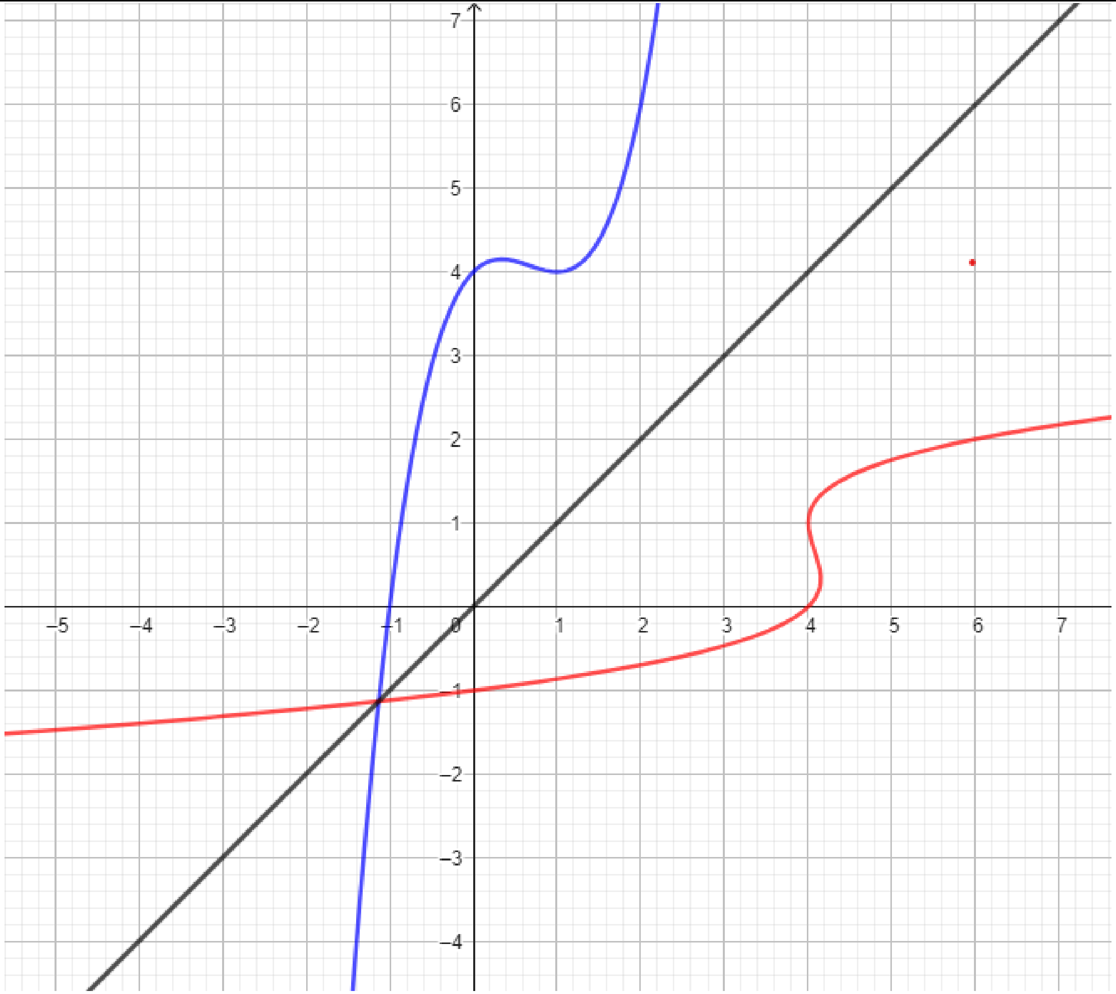
PLAN DE LA SEANCE

II. ETUDES DE FONCTIONS

1. Fonctions polynômes

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
-Travail en groupes	<u>EXERCICE1</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$. 1. Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 2. Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et interprète graphiquement les résultats obtenus. 3. Détermine le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. 4. Dresse le tableau de variation de f. 5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$. Montre que h réalise une bijection de $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$ sur un intervalle K à déterminer. 6. Donne le sens de variation de h^{-1} la bijection réciproque de h. 7. Représente (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J) : unité graphique : 1cm.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - 2x^2 + x + 4$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2x^2 + x + 4$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 2. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x}$$ $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$ (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $-\infty$. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x}$$ $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$ (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$. 3. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ $\Delta = 16 - 12$ $\Delta = 4$ $$x_1 = \frac{4-2}{6}, x_2 = \frac{4+2}{6}$$ $$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1$$ $$f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$$

<table>
<tr><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
$\forall x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[,\ f'(x) > 0$
$\forall x \in \left]\frac{1}{3}\,;1\right[,\ f'(x) < 0.$
f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[$ et sur $]1\,;+\infty[$.
f est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{3}\,;1\right[$.
4.
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$\frac{1}{3}$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>$\frac{112}{27}$</td><td>$\searrow$</td><td>4</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>
5. h est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[$.
$f\left(\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[\right) = \left]-\infty\,;\frac{112}{27}\right[$ donc h réalise une bijection de $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[$ sur $\left]-\infty\,;\frac{112}{27}\right[$.
6. h est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{112}{27}\right[$.
7. Représentation graphique.
</td></tr>
</table>

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

SEANCE : 7/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$

2. Fractions rationnelles

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
-Travail individuel	<u>EXERCICE2</u> Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $$g(x)=\frac{x^2+3x-7}{x-1}$$ 1. Détermine l'ensemble de définition de g. 2. a. Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition. b. Interprète les résultats. 3. a. Détermine la dérivée de la fonction g sur $]-\infty;1[\cup]1;\infty[$. b. Détermine les variations de g. c. Dresse le tableau de variation de g. 4. a. Détermine trois nombres réels a, b et c tels que : $$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$ b. Déduis-en que (C$_g$) admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une asymptote (Δ) dont on précisera une équation. c. Etudie la position de (C$_g$) par rapport à (Δ). 5. a. Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions α et β tels que $\alpha<\beta$. b. Justifie que que $-4{,}6<\alpha<-4{,}6$ et $1{,}5<\alpha<1{,}6$.	1. Dg = $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. 2. a. $$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-7}{x-1}$$ $$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$$ $$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-7}{x-1}$$ $$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$ $$\lim_{\substack{x\to1\\<}} g(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x^2+3x-7}{x-1}$$ $$\lim_{\substack{x\to1\\<}} g(x)=+\infty$$ $$\lim_{\substack{x\to1\\>}} g(x)=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x^2+3x-7}{x-1}$$ $$\lim_{\substack{x\to1\\>}} g(x)=-\infty$$ b. $\lim_{\substack{x\to1\\<}} g(x)=+\infty$ et $\lim_{\substack{x\to1\\>}} g(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à (C$_g$). 3. a. $$g(x)=\frac{x^2+3x-7}{x-1}$$ $$g'(x)=\frac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x-7)}{(x-1)^2}$$ $$g'(x)=\frac{2x^2-2x+3x-3-x^2-3x+7}{(x-1)^2}$$ $$g'(x)=\frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$$ b. $\forall x\in]-\infty;1[\cup]1;\infty[, g'(x)>0$ donc g est strictement croissante sur $]-\infty;1[$ et strictement croissante sur $]1;\infty[$. c. Tableau de variation

<table>
<tr><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th></tr>
<tr><td></td><td>

c. Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

6. Trace (C_g), (Δ) et les autres asymptotes dans un même repère orthonormé (O, I, J).

</td><td>

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>$+$</td><td>‖</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td>$-\infty \nearrow +\infty$</td><td>‖</td><td>$-\infty \nearrow +\infty$</td></tr>
</table>

4. a.

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$
$$g(x) = \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$$
$$g(x) = \frac{ax^2 + (b-a)x - b + c}{x-1}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = \ \ 3 \\ c - b = -7 \end{cases}$$

$a = 1$; $b = 4$ et $c = -3$

$$g(x) = x + 4 - \frac{3}{x-1}$$

b.

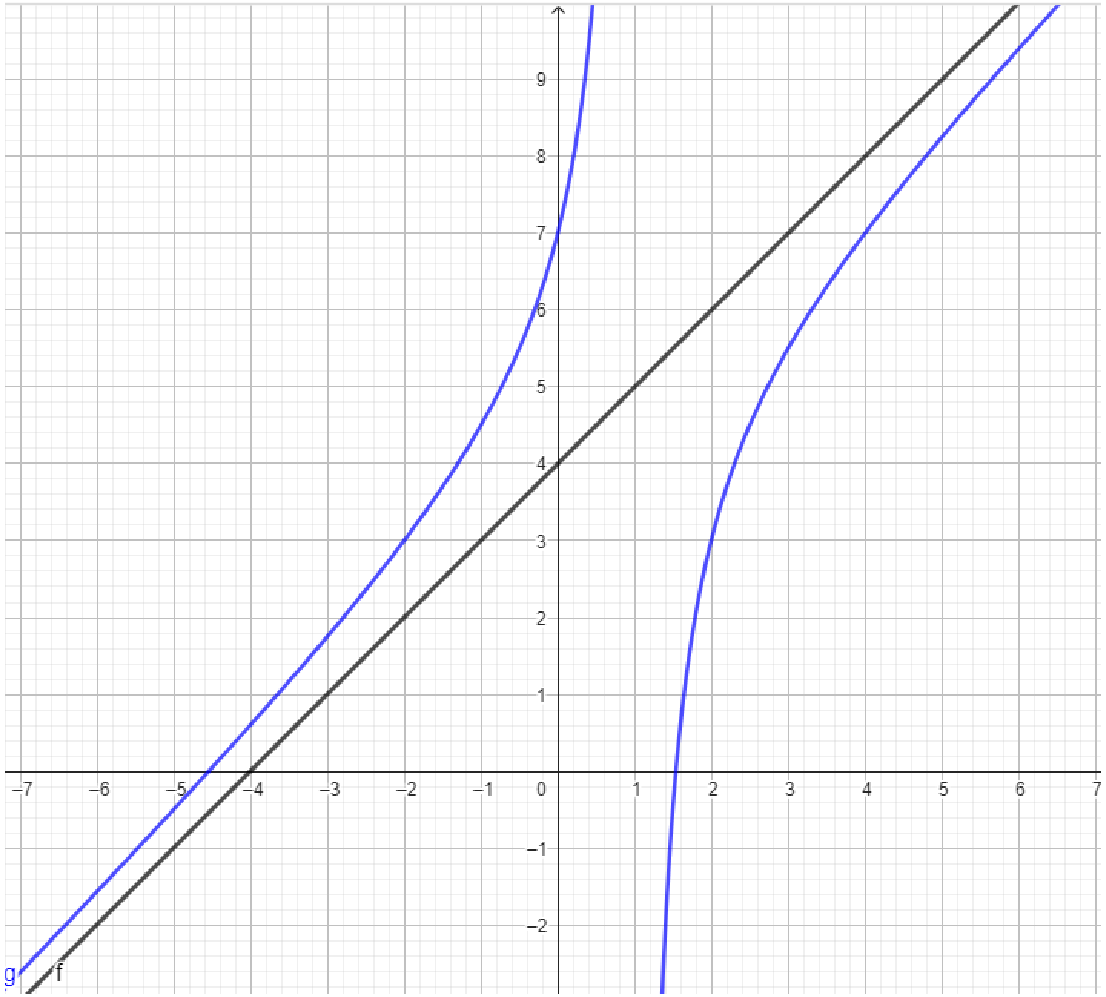
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) - (x+4) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{x-1}$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) - (x+4) = 0$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 4$ est une asymptote à (C_g) en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) - (x+4) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x-1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) - (x+4) = 0$$

</td></tr>
</table>

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
		Donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 4$ est une asymptote à (C_g) en $+\infty$. c. $$g(x) - (x + 4) = -\frac{3}{x - 1}$$ $$\forall x \in]-\infty; 1[, g(x) - (x + 4) > 0$$ $$\forall x \in]1; +\infty[, g(x) - (x + 4) < 0$$ (C_g) est au dessus de (Δ) sur $]-\infty; 1[$ et (C_g) est en dessous de (Δ) sur $]1; +\infty[$. 5. a. g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1[$. $g(]-\infty; 1[) =]-\infty; +\infty[$; donc g réalise une bijection de $]-\infty; 1[$ sur $]-\infty; +\infty[$. Comme $0 \in]-\infty; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty; 1[$. g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$. $g(]1; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$; donc g réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]-\infty; +\infty[$. Comme $0 \in]-\infty; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β sur $]1; +\infty[$. b. $g(-4{,}5) = 0{,}045$ et $g(-4{,}6) = -0{,}064$ $g(-4{,}5) \times g(-4{,}6) < 0$ donc $-4{,}6 < \alpha < -4{,}5$ $g(1{,}5) = -0{,}5$ et $g(1{,}6) = 0{,}6$ $g(1{,}5) \times g(1{,}6) < 0$ donc $1{,}5 < \beta < 1{,}6$. c. g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1[$; donc $\forall x < \alpha, g(x) < g(\alpha)$ et $\forall x > \alpha, g(x) > g(\alpha)$ $\forall x < \alpha, g(x) < 0$ et $\forall x > \alpha, g(x) > 0$ $\forall \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; 1[, g(x) > 0$. De même : g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$; donc $\forall x < \beta, g(x) < g(\beta)$ et $\forall x > \beta, g(x) > g(\beta)$ $\forall x < \beta, g(x) < 0$ et $\forall x > \beta, g(x) > 0$ $\forall \in]1; \beta[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\beta; +\infty[, g(x) > 0$.

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
		Conclusion : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[\cup]1; \beta[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; 1[\cup]\beta; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$ 6. Courbe 

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTION

SEANCE : 8/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \sqrt{ax + b}$ • $x \mapsto \sqrt{ax^2 + bx + c}$ - graphiquement une fonction : • comportant une racine carrée

PLAN DE LA SEANCE

3. Fonctions racines carrées

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
-Travail individuel	<u>EXERCICE3</u> Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ 1. Détermine l'ensemble de définition de f. 2. Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition et interprète graphiquement les résultats. 3. a. Calcule $f'(x)$. b. Détermine les variations de f. c. Dresse le tableau de variation de f. 4. Détermine une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 3. 5. Trace (C_f), dans un repère orthonormé (O, I, J).	1. $D_f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$. 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = -\infty$ La droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C_f). $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = +\infty$ La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à (C_f). 3. a. $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4}$ $f'(x) = \frac{x^2-4-x^2-x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$ $f'(x) = -\frac{x+4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS

b.

x	$-\infty$		-4		-2		2		$+\infty$
$-x-4$		$+$	0	$-$				$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$-$	

$\forall x \in]-\infty; -4[, f'(x) > 0.$
$\forall x \in]-4; -2[\cup]2; +\infty[, f'(x) < 0.$
f est strictement croissante sur $]-\infty; -4[$.
f est strictement décroissante sur $]-4; -2[$ et sur $]2; +\infty[$.

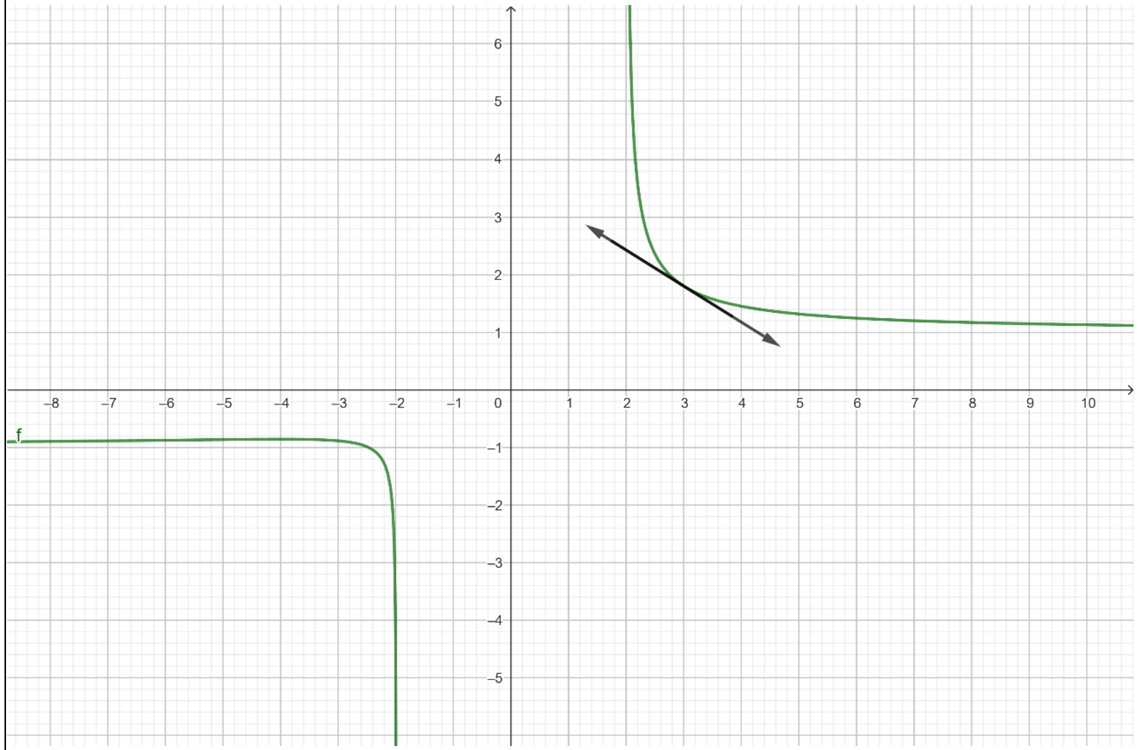
c. Tableau de variation

x	$-\infty$		-4		-2		-2		$+\infty$
$f'(x)$			0						
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$-\frac{3}{2\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	1

4.
(T) : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$$y = f'(3)(x-3) + f(3) = -\frac{7}{5\sqrt{5}}(x-3) + \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$(T): y = -\frac{7}{5\sqrt{5}}x + \frac{41}{5\sqrt{5}}$$

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
		5. Courbe 

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON3 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

SEANCE : 9/9

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Représenter	- graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \cos(ax+b)$ • $x \mapsto \sin(ax+b)$ • $x \mapsto \tan(ax+b)$

PLAN DE LA SEANCE

4. Fonctions trigonométriques

<table>
<tr><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th></tr>
<tr><td>-Travail individuel</td><td>

<u>EXERCICE4</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

1. Donne l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Démontre que f est une fonction π-périodique.
3. Justifie qu'on peut restreindre l'étude de la fonction f à l'intervalle $[0; \pi]$.
4. Calcule : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)$.
5. Calcule $f\,'(x)$.
6. a. Etudie le signe de $f\,'(x)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.
   b. Déduis-en les variations de la fonction f sur $[0; \pi]$.
7. Dresse le tableau de variation de la fonction f sur $[0; \pi]$.
8. Réalise la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

</td><td>

<u>REPONSES ATTENDUES</u>

1. f est la composée des fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ respectivement par $x \to \cos x$ et $x \to 3x - \frac{\pi}{4}$ donc $D_f = \mathbb{R}$.
2. Périodicité

$$f(x+\pi) = \cos\left(2(x+\pi) - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$f(x+\pi) = \cos\left(2x + 2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$f(x+\pi) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$f(x+\pi) = f(x).$$

On en déduit que f est une fonction π-périodique.

3. f est une fonction π-périodique donc on peut restreindre son étude à l'intervalle $[0; \pi]$ et compléter sa courbe représentative grâce à une translation de vecteur $\pi\overrightarrow{OI}$ ou $-\pi\overrightarrow{OI}$.
4. Calculons : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \qquad \lim_{x\to \pi} f(x) = \lim_{x\to \pi} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \qquad \lim_{x\to \pi} f(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to \pi} f(x) = \frac{1}{2}$$

5. f est la composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $[0; \pi]$.

$$\forall x \in [0; \pi], f'(x) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

6. a.

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, 0 + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi + 2k\pi$$

</td></tr>
</table>

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS
		$$\forall k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$ $$\forall k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi$$ Cherchons les solutions de l'inéquation : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ dans $[0;\pi]$: Pour $k = 0$: $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ Pour $k = 1$: $\frac{-5\pi}{6} \leq x \leq -\frac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	0	$+$	$\sqrt{3}$

b. Les variations de *f* sur $[0;\pi]$.

$$\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3};\pi\right[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right[, f'(x) < 0$$

f est strictement croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$ et sur $\left]\frac{2\pi}{3};\pi\right[$

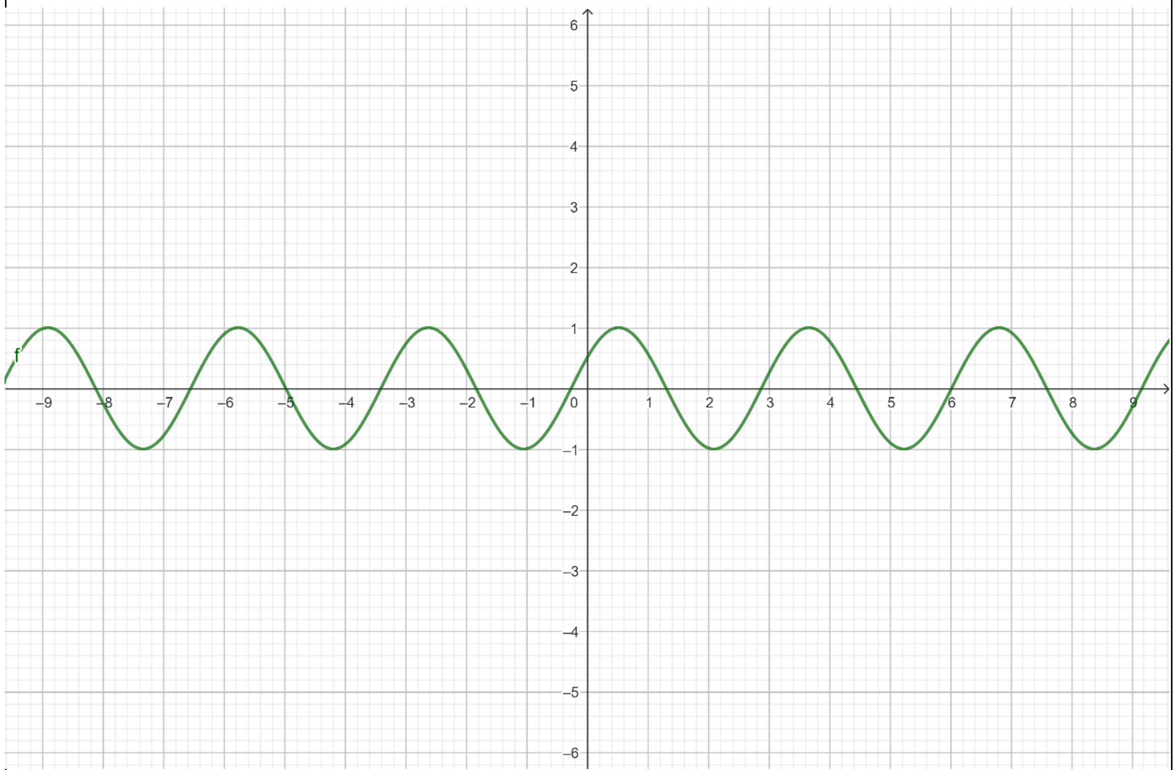
f est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right[$.

7. Tableau de variation

STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	0	$+$	$\sqrt{3}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

8. Courbe



BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques T^LE^D

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques T^LE^D Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques T^LE^D Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^LE^ D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^LE^ D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr