FICHE DE LEÇON

CALCUL INTEGRAL

TLE D

Rédigée par : AZIAN Constant Yobouet Ehounou
Professeur de lycée

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

NOMBRE DES SEANCES : 7

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS

Connaître	- La définition de l'intégrale d'une fonction continue
	- La définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle
	- Les propriétés de l'intégrale :
	    o Linéarité
	    o Signe de l'intégrale
	    o Relation de Chasles
	    o Inégalité de la moyenne (les deux formes)
	- La technique de l'intégration par partie
	- La technique du changement de variable affine

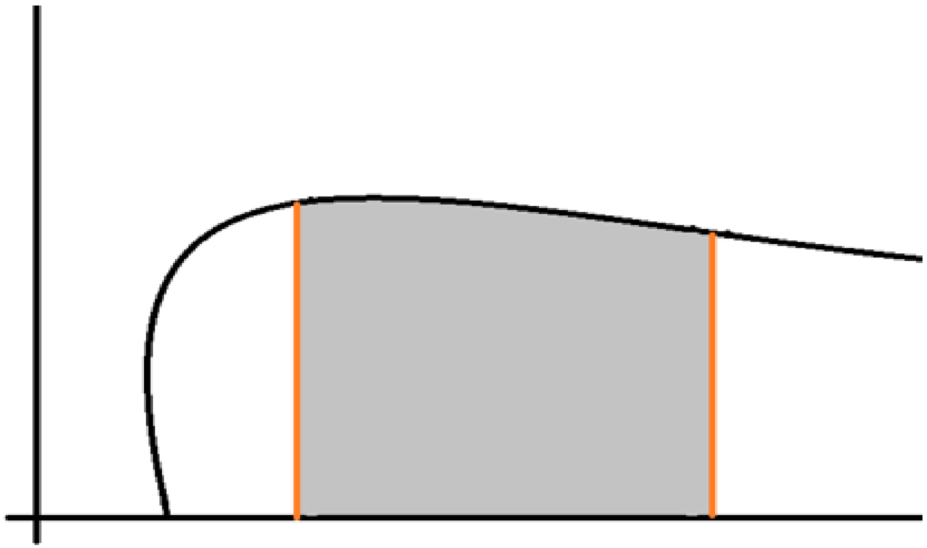
Noter	- Une intégrale

Calculer	- Une intégrale en utilisant :
	    o Les primitives de fonctions usuelles
	    o La relation de Chasles
	    o Une intégration par partie
	    o Un changement de variable affine
	    o Une fonction du type $u' \times (f' o u)$
	- Une aire
	- La valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle
	- Une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction

Déterminer	- Le signe d'une intégrale - Un encadrement d'une intégrale
Interpréter	- Graphiquement une intégrale
Etudier	- Les variations des fonctions du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$
Représenter	- Une allure d'une fonction du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$
Traiter une situation	- Faisant appel au calcul intégral

<u>SITUATION D'APPRENTISSANGE</u>

Sur la figure ci-contre, la partie grisée représente le champ d'anacarde de Monsieur Konaté. Il désire acheter des herbicides pour l'entretien de son camp. Pour connaître la quantité adéquate d'herbicide à acheter, il faut connaître l'aire du champ.
Il sollicite l'aide de sa fille, Mariam, en classe de terminale D afin de connaître cette aire.
Mariam sollicite à son tour ses camarades de classe pour l'aider à déterminer cette aire pour permettre à son père à acheter la quantité d'herbicide nécessaire.



PLAN DE LA LEÇON

HABILETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de l'intégrale d'une fonction continue
Noter	- Une intégrale

PLAN DE LA SEANCE1

I. INTEGRALE D4UNE FONCTION CONTINUE
1. Définition-notation
Conséquences de la définition

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les propriétés de l'intégrale : o Linéarité o Relation de Chasles

PLAN DE LA SEANCE2

2. Propriétés de l'intégrale
a. Egalité de Chasles
b. Linéarité

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Connaître	Les propriétés de l'intégrale : o Signe de l'intégrale
Calculer	- Une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction
Déterminer	- Le signe d'une intégrale

PLAN DE LA SEANCE3

c. Inégalité et intégrale
d. Parité

SEANCE4

HABILETES	CONTENUS
Calculer	Une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction
Etudier	Les variations des fonctions du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$
Représenter	Une allure d'une fonction du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

PLAN DE LA SEANCE4

e. Périodicité
f. Intégrale et primitive

SEANCE5

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle - Les propriétés de l'intégrale : o Inégalité de la moyenne (les deux formes)
Calculer	- La valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle
Déterminer	- Un encadrement d'une intégrale

PLAN DE LA SEANCE5

g. Inégalité de la Moyenne

3. Valeur Moyenne d'une fonction continue
   Définition

SEANCE6

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La technique de l'intégration par partie - La technique du changement de variable affine
Calculer	- Une intégrale en utilisant : ○ Les primitives de fonctions usuelles ○ Une intégration par partie ○ Un changement de variable affine ○ Une fonction du type $u' \times (f' ou)$

PLAN DE LA SEANCE6

II. TECHNIQUES DE CALCUL D'UNE INTEGRALE
1. Utilisation de primitives
2. Intégration par parties
   Propriété
3. Changement de variable affine

SEANCE7

HABILETES	CONTENUS
Calculer	- Une aire
Interpréter	- Graphiquement une intégrale

PLAN DE LA SEANCE7

III. CALCULS D'AIRES
1. Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et une courbe
2. Calcul d'aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 1/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de l'intégrale d'une fonction continue
Noter	- Une intégrale

PLAN DE LA SEANCE

I. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1. Définition - notation

   Conséquences de la definition

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. <u>REPONSE ATTENDUE</u> Les élèves de la classe de terminale D décident de déterminer l'aire du champ d'anacarde de monsieur Konaté.	
Développement *15 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE</u> Soient f, F et G les applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = 2x + 1$; $F(x) = x^2 + x + 5$ et $G(x) = x^2 + x - 3$. 1.a. Vérifie que F et G sont deux primitives de f sur $\mathbb{R}$. b. Calcule : $F(2), G(2), F(5)$ et G(5). c. Compare $F(5) - F(2)$ et $G(5) - G(2)$. 2. Soit f une fonction continue	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1.a. $F'(x) = 2x + 1$ $F'(x) = f(x)$ $G'(x) = 2x + 1$ $G'(x) = f(x)$ F et G sont deux primitives de f. b. $F(2) = 11$; $G(2) = 3$ $F(5) = 35$; $G(5) = 27$ c. $F(5) - F(2) = 24$ $G(5) - G(2) = 24$	I. <u>INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE</u> 1. <u>Définition-Notation</u> f est une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b des éléments de I. Le nombre réel F(b)−F(a), est indépendant du choix de la primitive F ; Le nombre réel F(b)−F(a) est appelé intégral de a à b de

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. F et G deux primitives de *f* sur I. Soient a et b deux nombres réels de I. Sachant qu'il existe un nombre réel c tel que $F(x) = G(x) + c$, montre que : $\forall x \in$ I, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. *Le nombre réel* **F($\boldsymbol{b}$)−F($\boldsymbol{a}$)**, *est indépendant du choix de la primitive F et est appelé* ***intégral*** *de* a à b *de f.* Il se note aussi $\int_a^b f(x)dx$ ou $[F(x)]_a^b$	$F(5) - F(2) = G(5) - G(2)$ 2. $F(b) - F(a) = [G(b) + c] - [G(a) + c]$ $F(b) - F(a) = G(b) + c - G(a) - c$ $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$	*f.* On le note aussi $\int_a^b f(x)dx$ ou $[F(x)]_a^b$ $\int_a^b f(x)dx$ se lit intégral (ou somme) de a à b de *f*(*x*)d*x*. La lettre x choisie peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre pourvue que la lettre choisie n'introduise aucune ambiguïté. Ainsi, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = \cdots$
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule l'intégrale : $I = \int_1^4 (2x+3)dx$	<u>REPONSE ATTENDUE</u> $I = \int_1^4 (2x+3)dx = [x^2 + 3x]_1^4$ $I = (4^2 + 3 \times 4) - (1^2 + 3 \times 1)$ $I = 28 - 4$ $I = 24$	
Développement *12 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE2</u> *f* est une fonction continue sur un intervalle I ; F une primitive de *f* sur I, a et b des éléments de I. En utilisant la définition de l'intégrale d'une fonction continue,	<u>REPONSES ATTENDUES</u> a. $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$	<u>Conséquences de la définition</u> Soit *f* est une fonction continue sur un intervalle I, a et b des éléments de I.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *13 min*	-Travail individuel -Travail individuel	montre que : a. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ b. $\int_a^a f(x)dx = 0$ <u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule les intégrales suivantes : a. $\int_0^2 x^3dx$ b. $\int_0^2 t^3dt$ c. $\int_e^1 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ d. $\int_{-5}^{-5} 2\sqrt{x^2-5x+7}dx$ <u>EXERCICE DE MAISON</u> N°1 et N°2 page 144 Mon Livre de Mathématiques T^LE^D Pyramides.	$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ b. $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a)$ $\int_a^a f(x)dx = 0$ <u>REPONSES ATTENDUES</u> a. $\int_0^2 x^3dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4$ b. $\int_0^2 t^3dt = \int_0^2 x^3dx = 4$ c. $\int_e^1 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = -\int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ $\int_e^1 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = -[x+\ln x]_1^e$ $\int_e^1 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = -e-1+1$ $\int_e^1 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = -e$ d. $\int_{-5}^{-5} 2\sqrt{x^2-5x+7}dx = 0$	$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$;

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T[LE] D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 2/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les propriétés de l'intégrale : o Linéarité o Relation de Chasles

PLAN DE LA SEANCE

2. Propriétés de l'intégrale
   a. Egalité de Chasles
   b. Linéarité

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupes -Travail individuel	Correction des exercices de maison ACTIVITE Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; α et β deux nombres réels. a, b et c trois nombres réels éléments de I ; F une primitive de f sur I. G une primitive de g sur I. Démontre que : **1**. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ **2**. **a**.$\alpha F, \beta G$ et $\alpha F + \beta G$ sont des primitives respectives de $\alpha f, \beta g$ et $\alpha f + \beta g$. **b**. En déduire que : $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ et	REPONSES ATTENDUES **1**. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$ $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx}$ **2.a**. $(\alpha F)' = \alpha F'$ $(\alpha F)' = \alpha f$ donc αF est une primitive de αf sur I. $(\beta G)' = \beta G'$ $(\beta G)' = \beta g$ donc βG est une primitive de βgsur I. $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G'$ $(\alpha F)' = \alpha f+\beta g$ donc $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$ sur I. **b**.	2. Propriétés de l'intégrale a. Egalité de Chasles Propriété Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des éléments de I. On a : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ b. Linéarité Propriété Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b des éléments de I, α un nombre réel quelconque, $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx$ $= \int_a^b f(x)dx$ $+ \int_a^b g(x)dx$ *L'égalité* $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx =$ $\int_a^c f(x)dx$ *est appelée « **égalité de Chasles** ».* *L'intégrale vérifie aussi les propriétés :* $\boldsymbol{\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx}$ *et*	$\int_a^b \alpha f(x)dx = [\alpha F]_a^b$ $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha F(b) - \alpha F(a)$ $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha(F(b) - F(a))$ $\boldsymbol{\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx}$ $\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx =$ $[\alpha F + \beta G]_a^b =$ $\alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) =$ $\alpha F(b) - \alpha F(a) + \beta G(b) - \beta G(a) =$ $\alpha\big(F(b) - F(a)\big) + \beta\big(G(b) - G(a)\big)$ $\boldsymbol{\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx =}$ $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$	$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$\int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx$ *Ces propriétés permettent de dire que l'intégrale est **linéaire**. On parle ainsi de la **linéarité** de l'intégrale.*		
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Calcule : a. $\int_{-1}^{5} \lvert x-2\rvert\, dx$ b. $\int_{-3}^{4} \lvert x+1\rvert\, dx$ 2. a. Calcule les intégrales : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos x\, dx$ et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}\, dx$ b. Déduis-en $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos x - \frac{2}{x}\right) dx$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1.a**. $\int_{-1}^{5} \lvert x-2\rvert\, dx = \int_{-1}^{2} (2-x)dx + \int_{2}^{5} (x-2)dx$ $\int_{-1}^{5} \lvert x-2\rvert\, dx = \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{2}^{5}$ $\int_{-1}^{5} \lvert x-2\rvert\, dx = 4 - 2 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{25}{2} - 10 - 2 + 4$ $\int_{-1}^{5} \lvert x-2\rvert\, dx = 9$ **b**.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\int_{-3}^{4}\lvert x+1\rvert\,dx=\int_{-3}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^{4}(x+1)dx$ $\int_{-3}^{4}\lvert x+1\rvert\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-3}^{-1}+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{4}$ $\int_{-3}^{4}\lvert x+1\rvert\,dx=-\frac{1}{2}+1+\frac{9}{2}-3+8+4-\frac{1}{2}+1$ $\int_{-3}^{4}\lvert x+1\rvert\,dx=\frac{29}{2}$ **2.a.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}2\cos x\,dx=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}2\cos x\,dx=2[\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}3\cos x\,dx=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}3\cos x\,dx=\sqrt{3}-\sqrt{2}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> N°4 et N°5 page 275 ; N°7, N°8 et N°9 page 276 Mon Livre de Mathématiques T[LE]D Pyramides.	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx = -2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{x}$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx = -2[\ln x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx = -2\left(\ln\frac{\pi}{3} - \ln\frac{\pi}{4}\right)$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx = -2\left(\ln\frac{\pi}{3} \times \frac{4}{\pi}\right)$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx = -2\ln\frac{4}{3}$ **b**. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos x - \frac{2}{x}\right)dx =$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{x}dx$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos x - \frac{2}{x}\right)dx = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ $-2\ln\frac{4}{3}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 3/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	Les propriétés de l'intégrale : o Signe de l'intégrale
Calculer	- Une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction
Déterminer	- Le signe d'une intégrale

PLAN DE LA SEANCE

c. Inégalité et intégrale
d. Parité

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *15 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE1</u> Soit : ▪ a et b deux nombres réels tels que : $a < b$. ▪ f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$. ▪ F une primitive de f sur $[a,b]$. ▪ G une primitive de g sur $[a,b]$. **1**. On suppose que :$\forall x \in [a;b]$, $f(x) \geq 0$. **a**. Donne le sens de variation de F. **b**. Compare $F(b)$ et $F(a)$. **c**. Déduis-en que : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ **2**. $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \geq g(x)$. **a**. Donne le sens de variation de F−G. **b**. Déduis-en que : $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \geq 0$. **a**. F une primitive de f sur $[a,b]$ donc $\forall x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x)$. $\forall x \in [a;b]$, $F'(x) \geq 0$. F est croissante sur $[a;b]$. **b**. $a < b$ donc $F(a) \leq F(b)$ car F est croissante sur $[a;b]$. **c**. $F(a) \leq F(b)$ donc $F(b) - F(a) \geq 0$ $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx \geq 0}$. **2.a**. F et G sont des primitives respectives de f et g sur $[a;b]$ donc $F - G$ est une primitive de $f - g$ sur $[a,b]$. $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \geq g(x)$ donc $\forall x \in [a;b]$, $f(x) - g(x) \geq 0$. $F - G$ est croissante sur $[a,b]$. **b**. $F(b) - G(b) \geq F(a) - G(a)$ $F(b) - F(a) \geq G(b) - G(a)$ $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx}$	c. <u>Inégalité et intégrale</u> <u>Propriétés</u> Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$. Si :$\forall x \in [a;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Si :$\forall x \in [a;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION1</u> 1. Démontre que l'intégrale $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ est positive. 2. Démontre que : $\int_1^2 xe^x dx \leq \int_1^2 x^2e^x dx.$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\forall x \in [1;2]$ $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} > 0\ donc$ $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} > 0.$ 2. $xe^x - x^2e^x = (x - x^2)e^x.$ $xe^x - x^2e^x = x(1-x)e^x.$ $\forall x \in [1;2], x(1-x)e^x \leq 0.$ On en déduit que $\forall x \in [1;2], xe^x \leq x^2e^x.$ Conclusion : $\int_1^2 xe^x dx \leq \int_1^2 x^2e^x dx.$	
Développement *15 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE2</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Soit a un élément de I. 1. Si f est paire : a. En posant : $t = -x$, démontre que : $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ b. En déduire que : $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ 2. Si f est impaire	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. Supposons que f est paire : **a**. Lorsque $t = -x, dx = -dt$ Lorsque $x = -a, t = a$ Lorsque $x = 0, t = 0$ $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 -f(-t)dt$ $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(t)dt$ car $f(-t) = f(t)$ $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\left(-\int_0^a f(t)dt\right)$	d. <u>Parité</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Pour tout élément a de I, on a : Si ***f est paire***, alors $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(t)dt$ et $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ Si ***f est impaire***, alors

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		a. En posant : $t=-x$, démontre que : $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$ b. En déduire que : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$	$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$ **b**. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ car *f* est paire. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ **2**.**a**. Supposons que *f* est impaire : Lorsque $t=-x, dx=-dt$ Lorsque $x=-a, t=a$ Lorsque $x=0, t=0$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} -f(-t)dt$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(t)dt$ car $f(-t)=-f(t)$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt$	$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$ et $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$ b. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ car f est impaire. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$	
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule : a. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\, dx$ b. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> a. La fonction sinus est une fonction impaire donc $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\, dx = 0.$ b. La fonction cosinus est une fonction paire donc $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$ $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = 2\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> N°10, N°11 et N°12 page 276 ; N°23 et N°24 page 277 Mon Livre de Mathématiques T^{LE}D Pyramides.	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = 2\left(\frac{1}{2} - 0\right)$ $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = 1$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 4/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Calculer	- Une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction
Etudier	- Les variations des fonctions du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$
Représenter	- Une allure d'une fonction du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

PLAN DE LA SEANCE

e. Périodicité
f. Intégrale et primitive

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15min	-Travail en groupe	Correction des exercices de maison		
Développement *15 min*	-Travail en groupes	<u>ACTIVITE1</u> Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. Soient α et β deux nombres réels. 1. En posant $t = x + T$, démontre que $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ 2. En utilisant l'égalité de Chasles, déduis de la question 1 que $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx$ 3. Réécris l'égalité de la question 2 lorsque $\beta = 0$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. Posons $t = x - T, dx = dt.$ Lorsque $x = \alpha + T,\ \ t = \alpha.$ Lorsque $x = \beta + T,\ \ t = \beta.$ $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t+T)dt$ Comme $f(t+T) = f(t)$, on obtient : $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ 2. $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha+T}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx$ $\int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha+T}^{\beta} f(x)dx$	e. <u>Périodicité</u> <u>Propriété</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle I, α et β des éléments de I. Si f est périodique de période T, alors $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ et $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\alpha+T} f(x)dx$ $\int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx$ $\int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx$ $\int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx$ **3**. $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx$ Lorsque $\beta = 0$, on obtient : $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Sans calculer chacune des intégrales, justifie que : a. $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \int_{2\pi}^{4\pi} \sin x\, dx$ b. $\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$ 2. Calcule : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\, dx$ La fonction $x \mapsto \cos 2x$ est périodique de période π. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \int_{0+\frac{\pi}{2}}^{\pi+\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \int_0^{\pi} \cos 2x\, dx$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1.a**. La fonction $x \mapsto \sin x$ est périodique de période 2π. $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \int_{0+2\pi}^{2\pi+2\pi} \sin x\, dx$ $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \int_{2\pi}^{4\pi} \sin x\, dx$ **b**. La fonction $x \mapsto \cos x$ est périodique de période 2π. $\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = \int_{-\pi}^{-\pi+2\pi} \cos x\, dx$ $\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$ **2**. La fonction $x \mapsto \cos 4x$ est Périodique de période π. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} \cos 2x\, dx$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \int_0^{\pi} \cos 2x\, dx$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\, dx = 0.$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *5 min* *Evaluation* *5 min*	-Travail en groupes -Travail individuel	<u>ACTIVITE2</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. F est une primitive de f sur I. On considère la fonction φ définie pour tout $x \in$ I par : $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt.$ 1. Exprime $\varphi(x)$ en fonction de F(x). 2. Déduis-en que φ est une primitive de f sur I. 3. Calcule $\varphi(a)$. $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ *est la primitive de* ***f*** *sur I qui s'annule en* ***a***. <u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Justifie que la fonction logarithme népérien est la fonction F définie sur]0 ;+∞[par : $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$ 2. Détermine la primitive de la fonction G de la fonction	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt.$ $\varphi(x) = F(x) - F(a).$ 2. $\varphi(x) = F(x) - F(a).$ $\varphi'(x) = F'(x) - (F(a))'.$ $\varphi'(x) = f(x).$ φ est une primitive de f sur I. 3. $\varphi(a) = \int_a^a f(t)dt$ $\varphi(a) = 0$ <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**.$\forall x \in]0;+\infty[$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0.$ la fonction logarithme népérien est la fonction F définie sur]0 ;+∞[par : $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$	f. <u>Intégrale et primitive</u> <u>Propriété</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ de I vers $\mathbb{R}$ est la primitive de f qui s'annule en a.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ qui s'annule en 0. <u>EXERCICE DE MAISON</u> N°26 page 277, N°27, N°28 et N°29 page 278 ; Mon Livre de Mathématiques T[LE]D Pyramides.	**2**. $G(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}dt =$ $G(x) = \left[\sqrt{t^2+3}\right]_0^x$ $G(x) = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{3}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 5/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle - Les propriétés de l'intégrale : o Inégalité de la moyenne (les deux formes)
Calculer	- La valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle
Déterminer	- Un encadrement d'une intégrale

PLAN DE LA SEANCE

g. Inégalités de la moyenne

3. Valeur moyenne d'une fonction continue

Définition

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
14 min *Développement* *13 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE1</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Soient m et M deux nombres réels. 1. On suppose que : $\forall x \in [a;b], m \leq f(x) \leq M$. Justifie que : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. 2. On suppose que : $\forall x \in [a;b], \lvert f(x) \rvert \leq M$. Déduis de la question 1 que : $\left\lvert \int_a^b f(x)dt \right\rvert \leq M(a-b)$. *Les inégalités :* $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ $et\ \left\lvert \int_a^b f(x)dt \right\rvert \leq M(a-b)\ sont$ *appelées* ***inégalités de la moyenne***.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $\forall x \in [a;b], m \leq f(x) \leq M$. $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$ $m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\int_a^b dx$ $m[x]_a^b \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M[x]_a^b$ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. **2**. $\forall x \in [a;b], \lvert f(x) \rvert \leq M$. $-M \leq f(x) \leq M$ D'après l'inégalité de la question 1, $-M(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$ $\left\lvert \int_a^b f(x)dt \right\rvert \leq M(a-b)$.	f. <u>Inégalités de la moyenne</u> <u>Propriétés</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, m et M deux nombres réels. Si $\forall x \in [a\,;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. Si $\forall x \in [a;b], \lvert f(x) \rvert \leq M$, alors $\left\lvert \int_a^b f(x)dt \right\rvert \leq M(a-b)$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *8 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. Sans calculer l'intégrale, justifie que $\left\|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right\| \leq 2.$ 2. En supposant que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$, justifie que : $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow \|\sin x\| \leq 1$ La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc d'après l'inégalité de la moyenne, on a : $\left\|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right\| \leq 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - 0\right).$ $\left\|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right\| \leq \frac{\pi}{2}.$ $\left\|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right\| \leq 2.$ **2**. $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right], 1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$ La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ donc d'après l'inégalité de la moyenne, on a : $1\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx \leq \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$ $\frac{\pi}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *10 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE2</u> On donne la fonction f définie sur $[1;7]$ par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+2.$ La courbe (C) est la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Figure : Voir annexe1) 1. Calcule le nombre μ tel que : $\mu=\frac{1}{7-1}\int_1^7 f(x)\,dx.$ 2. Compare μ et la hauteur du rectangle de base $7-1$ ayant le même aire que la partie du plan limitée par (C), l'axe (OI), les droites d'équation $x=7$ et $x=2$. *μ est appelé la **valeur moyenne** de la fonction f sur $[1;7]$.* *Graphiquement, μ est la hauteur du rectangle de base $7-1$ ayant le même aire que la partie du plan limitée par (C), l'axe (OI), les droites d'équation $x=7$ et $x=1$.*	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\mu=\frac{1}{7-1}\int_1^7 f(x)\,dx.$ $\mu=\frac{1}{7-1}\int_1^7\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)dx.$ $\mu=\frac{1}{6}\left[2\sqrt{x}+2x\right]_1^7$ $\mu=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{7}+14-2-2\right)$ $\mu=\frac{1}{3}\left(\sqrt{7}+5\right)$ $\mu=\frac{\sqrt{7}+5}{3}$ $\mu\simeq 2{,}55.$ 2. μ est égale à la hauteur du rectangle de base $7-1$ ayant le même aire que la partie du plan limitée par (C), l'axe (OI), les droites d'équation $x=7$ et $x=1$.	3. <u>Valeur moyenne d'une fonction continue</u> <u>Définition</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$, le nombre réel $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$ <u>Interprétation graphique</u> Dans le cas d'une fonction positive, la valeur moyenne μ de f est la hauteur du rectangle de base $b-a$ ayant le même aire (en unité d'aire) que la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr><td>Evaluation
10 min</td><td>-Travail individuel

-Travail individuel</td><td><u>EXERCICE DE FIXATION</u>
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - sinx$.
Calcule la valeur moyenne μ_1 de f sur $[0; \pi]$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2$.
Calcule la valeur moyenne μ_2 de g sur $[0; 1]$.

<u>EXERCICE DE MAISON</u>
N°13, N°14, N°15 et N°16 page 276 ; Mon Livre de Mathématiques T^{LE}D Pyramides.</td><td><u>REPONSE ATTENDUE</u>
1.
$\mu_1 = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} f(x)\,dx.$
$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x - sinx)\,dx.$
$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\pi}$
$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \cos\pi - \frac{0^2}{2} + \cos 0\right)$
$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - 1 + 0 + 1\right)$
$\mu_1 = \frac{\pi}{2}$
2.
$\mu_2 = \frac{1}{1 - 0}\int_0^{1} g(x)\,dx = \int_0^{\pi} x^2\,dx$
$\mu_2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$</td><td></td></tr>
</table>

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 6/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La technique de l'intégration par partie - La technique du changement de variable affine
Calculer	- Une intégrale en utilisant : ○ Les primitives de fonctions usuelles ○ Une intégration par partie ○ Un changement de variable affine ○ Une fonction du type $u' \times (f' o u)$

PLAN DE LA SEANCE

II. TECHNIQUES DE CALCUL D'UNE INTEGRALE

1. Utilisation de primitives
2. Intégration par parties
   Propriété
3. Changement de variable affine

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min	-Travail en groupe	Correction des exercices de maison		
Développement *5 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE1</u> Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive sur I de f, a et b des éléments de I. Exprime $\int_a^b f(x)dx$ en Fonction de F(a) et F(b). *Lorsqu'il est possible de déterminer une primitive F de f sur* $[a; b]$, *pour calculer l'intégrale de f sur* $[a; b]$, *on utilise l'égalité* : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.	<u>REPONSES ATTENDUE</u> $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ $= F(b) - F(a)$	II. <u>TECHNIQUES DE CALCUL D'UNE INTEGRALE</u> 1. <u>Utilisation de primitives</u> f est une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive sur I de f, a et b des éléments de I. $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ $= F(b) - F(a)$
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule l'intégrale : $A = \int_0^1 \frac{2x}{3 + x^2} dx$.	<u>REPONSE ATTENDUE</u> $A = \int_0^1 \frac{2x}{3 + x^2} dx$ $A = [\ln(3 + x^2)]_0^1$ $A = \ln(3 + 1^2) - \ln(3 + 0^2)$ $A = \ln(4) - \ln(3)$ $A = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *8 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE2</u> Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$; f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dérivables sur l'intervalle $[a; b]$ telles que leurs fonctions dérivées f' et g' soient continues sur $[a; b]$. 1. Exprime $(fg)'(x)$ en fonction de $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ et $g'(x)$. 2. Déduis-en que : $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$ *Cette technique de calcul d'une intégrale est appelée la technique d'**intégration par parties**.*	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. La fonction $fg: [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) \times g(x)$ est dérivable et on a : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ **2**. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Ainsi nous avons $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ $[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$	2. <u>Intégration par parties</u> Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, a et b deux éléments de I. Si u' et v' sont continues sur I, alors: $\int_a^b u'(x)v(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *12 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> A l'aide d'une intégration par parties calculer chacune des intégrales suivantes : a. $\int_1^2 lnxdx$ b. $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **a**. Calculons $\int_1^2 lnxdx$ $\int_1^2 lnxdx = \int_1^2 1.\ln x \, dx$ Posons $u(x) = \ln x \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$ $v'(x) = 1 \qquad v(x) = x$ $\int_1^2 lnxdx = [x \ln x]_1^2$ $- \int_1^2 \frac{1}{x} \times x \, dx$ $\int_1^2 lnxdx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx \, dx$ $\int_1^2 lnxdx = [x \ln x]_1^2 - [x]_1^2$ $\int_1^2 lnxdx = 2 \ln 2 - 1$ **b**. Calculons $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$ Posons $u(x) = x^2 \qquad u'(x) = 2x$ $v'(x) = \sin x \qquad v(x) = -\cos x$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx$ $= [-x^2 \cos x]_0^\pi + \int_1^2 2x \cos x\, dx\, dx$ $\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = -\pi^2 \cos \pi$ $-0^2 \cos 0 + \int_1^2 2x \cos x\, dx\, dx$ $\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = \pi^2 +$ $\int_1^2 2x \cos x\, dx\, dx$ Posons $a(x) = 2x$ $a'(x) = 2$ $b'(x) = \cos x$ $b(x) = \sin x$ $\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = \pi^2 + [2x \sin x]_0^\pi$ $- \int_0^\pi 2 \sin x\, dx$ $\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = \pi^2 + 2\pi \sin \pi -$ $2 \times 0 \sin 0 + 2 \int_0^\pi - \sin x\, dx$ $\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = \pi^2 + 2[\cos x]_0^\pi$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx = \pi^2 - 2$	
Développement *8 min*	-Travail individuel	<u>ACTIVITE3</u> Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I et $x \mapsto \alpha x + \beta$ une fonction affine telle que $\alpha \neq 0$. a et b sont deux nombres réels tels que : $\forall x \in [a; b], \alpha x + \beta \in I$. F est une primitive de *f* sur I. 1. Justifie que la dérivée de la fonction $x \mapsto F(\alpha x + \beta)$ est la fonction $x \mapsto \alpha f(\alpha x + \beta)$. 2. On pose : $t = \alpha x + \beta$. En utilisant ce qui précède et la définition de l'intégrale d'une fonction continue, démontre que : $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(t)\, dt$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $x \mapsto F(\alpha x + \beta)$ est la composée de deux fonctions dérivables sur I : $x \mapsto \alpha x + \beta$ et $x \mapsto F(x)$. $x \mapsto F(\alpha x + \beta)$ est dérivable sur I et $F'(\alpha x + \beta) = (\alpha x + \beta)'F'(\alpha x + \beta)$ $F'(\alpha x + \beta) = \alpha f(\alpha x + \beta)$. **2**. Soit $t = \alpha x + \beta$. $dt = \alpha dx$ $dx = \frac{1}{\alpha}dt$. Lorsque $x = a,\ t = \alpha a + \beta$. Lorsque $x = b,\ t = \alpha b + \beta$. $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(t)\, dt$ $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(t)\, dt$	3. <u>Changement de variable affine</u> Pour calculer $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx$ α et β étant deux nombres réels tels que $\alpha \neq 0$, on peut procéder comme suit : o Faire le changement de variable $t = \alpha x + \beta$. On a : $dt = \alpha dx$ d'où $dx = \frac{1}{\alpha}dt$. $x = a \Leftrightarrow t = \alpha a + \beta$ $x = b \Leftrightarrow t = \alpha b + \beta$. o Utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha x + \beta)\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(t)\, dt$
Evaluation *7 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Calcule les intégrales :	<u>REPONSE ATTENDUE</u> Calculons $I = \int_{-1}^{0} (2x+1)^3 dx$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	$I = \int_{-1}^{0} (2x+1)^3 dx.$ $J = \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} dx.$ <u>EXERCICE DE MAISON</u> N°19, N°20 et N°21 page 277 ; Mon Livre de Mathématiques T^LE^D Pyramides.	Posons : $u = 2x+1$ On a : $du = 2dx$ donc $dx = \frac{1}{2} du.$ $x = -1 \Leftrightarrow u = -1$ $x = 0 \Leftrightarrow u = 1.$ $I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u^3 du = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}u^4\right]_{-1}^{1}.$ $I = \frac{1}{8}(1-1) = 0.$ Calculons $J = \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} dx$ Posons : $t = 3x-1$ On a : $dt = 3dx$ donc $dx = \frac{1}{3} dt.$ $x = 1 \Leftrightarrow t = 2$ $x = 2 \Leftrightarrow t = 5.$ $J = \frac{1}{3}\int_{2}^{5} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3}\left[\sqrt{t}\right]_{2}^{5}.$ $J = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}.$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON8 : CALCUL INTEGRAL

SEANCE : 7/7

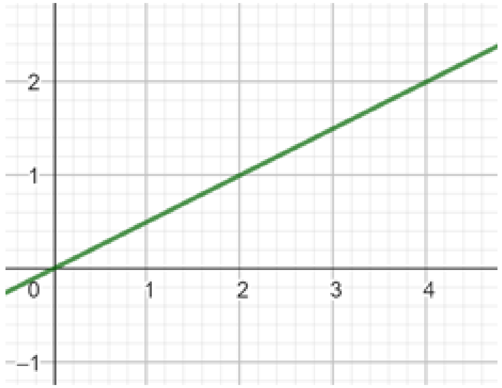
DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

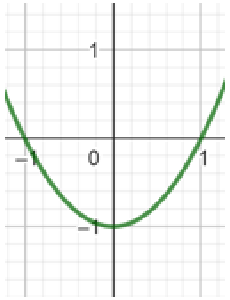
MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

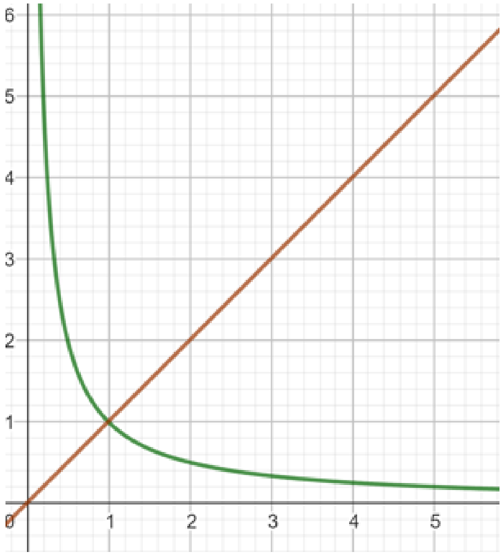
HABILETES	CONTENUS
Calculer	- Une aire
Interpréter	- Graphiquement une intégrale

PLAN DE LA SEANCE

III. CALCULS D'AIRES
1. Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et une courbe
2. Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) tel que : $OI = a\ cm$ et $OJ = b\ cm$. **1**. Donne l'aire du rectangle de dimensions OI et OJ. **2**. Soit f_1 la fonction définie sur $[0; 4]$ par $f_1(x) = \frac{1}{2}x$ On note (C_{f_1}) la courbe représentative de f_1 dans le plan muni du repère (O, I, J). a. Trace (C_{f_1}). b. Détermine le signe de f_1 sur $[0; 4]$. c. Calcule : $\int_0^4 f_1(x)\,dx$ d. Calcule l'aire A de la surface délimitée par la courbe (C_{f_1}), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$. e. Compare les résultats du 2c et du 2d. **3**. Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = x^2 - 1$	 <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. L'aire du rectangle de dimensions OI et OJ est $ab\ cm^2$. **2.a**.  **b**.$\forall x \in [0; 4], 0 \leq x \leq 4$ $\forall x \in [0; 4], 0 \leq \frac{1}{2}x \leq 2$ $\forall x \in [0; 4], 0 \leq f_1(x) \leq 2$ f_1 est positive sur $[0; 4]$. **c**. $\int_0^4 f_1(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x\,dx$ $\int_0^4 f_1(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^4$ $\int_0^4 f_1(x)\,dx = 4.$	 III. <u>CALCULS D'AIRES</u> 1. <u>Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et une courbe</u> Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). L'aire du rectangle construit avec les points O, I et J est appelée ***unité d'aire*** ($1ua = OI \times OJ\ cm^2$). Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] et de représentation graphique (C_f). ***Cas où f est positive sur*** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ L'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale au nombre réel positif $\Delta = \int_a^b f(x)\,dx$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		On note (C_{f_2}) la courbe représentative de f_2 dans le plan muni du repère (O, I, J). a. Trace (C_{f_2}). b. Détermine le signe de f_2 sur $[-1;1]$. c. Calcule : $-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx$ **4**. On considère les fonctions f et g définies sur $[0;+\infty]$ par : $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x$. On note (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans le plan muni du repère (O, I, J). a. Trace (C_f) et (C_g). b. Justifie que $f \leq g$ sur $[1;e]$. c. Calcule : $\int_{1}^{e}(g(x)-f(x))\,dx.$	**d**. $A=\frac{4\times 2}{2}$ $A=4\ cm^2$. **e**. $A=\int_{0}^{4} f_1(x)\,dx.$ **3**. $f_2(x)=x^2-1$ **a**.  **b**. $f_2(x)=x^2-1$ $f_2(x)=(x-1)(x+1)$ $\forall x\in[-1;1], f_2(x)\leq 0$ **c**. $-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx$ $-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$ $-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$	***Cas où f est négative sur*** $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ L'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), (OI), les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale au nombre réel positif $\Delta=-\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$ 2. <u>Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes</u> Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] et de représentations graphiques respectives (C_f) et (C_g). On suppose que $f\geq g$ sur $[a;b]$. L'aire en unité d'aire de la partie délimitée par les courbes (C_f), (C_g) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale au nombre réel positif $\int_{a}^{b}[f(x)-g(x)]\,dx.$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx = 1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}$ $-\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx = 2-\frac{2}{3}$ **4. a.**  **b.** $g(x)-f(x) = x-\frac{1}{x}$ $g(x)-f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ $\forall x \in [1;e], g(x)-f(x) \geq 0$ $\forall x \in [1;e], g(x) \geq f(x)$ $f \leq g$ sur $[1;e]$ **c.**	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> **1**. Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) avec OI = 2 cm et OJ = 3 cm. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. On note ($C_f$) la courbe représentative de *f* dans le repère (O, I, J). Déterminer en cm² l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (OI), les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.	$\int_1^e (g(x) - f(x))\,dx = \int_1^e \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ $\int_1^e (g(x) - f(x))\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln x\right]_1^e$ $\int_1^e (g(x) - f(x))\,dx = \frac{e^2 - 3}{2}$ <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. *f* est continue sur $[1;2]$ et $\forall x \in [1;2], f(x) > 0$. Soit A_1 l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C_f), (OI), les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. $A_1 = \int_1^2 f(x)\,dx \times ua$ $A_1 = \int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \times ua$ $A_1 = \left[2\sqrt{x^2+1}\right]_1^2 \times 2 \times 3$ cm² $A_1 = \left[2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right] \times 6$cm2 $A_1 = 12\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$cm²	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	                         -Travail individuel	**2**. Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique : 2 cm. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 3 - xe^x$ et $g(x) = x + 3$. On note (C_f) et (C_g) respectivement les courbes représentatives de f et g dans le repère (O, I, J). Détermine en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (C_g) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e$. <u>EXERCICE DE MAISON</u> N°30, N°31 et N°32 page 278 ; Mon Livre de Mathématiques T^{LE}D Pyramides.	**2**. f et g sont continues sur $[0; e]$. $f(x) - g(x) = -xe^x$. $\forall x \in [0; e], f(x) - g(x) \leq 0$. Sur $[0; e], f \leq g$. Soit A_2 l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C_f), (C_g) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e$. $A_2 = \int_0^e [g(x) - f(x)]\, dx \times ua$ $A_2 = \int_0^e xe^x\, dx \times ua$ Posons : $u(x) = x \qquad u'(x) = 1$ $v'(x) = e^x \qquad v(x) = e^x$ $\int_0^e xe^x dx = [xe^x]_0^e - \int_0^e e^x\, dx$ $\int_0^e xe^x dx = [xe^x]_0^e - [e^x]_0^e$ $\int_0^e xe^x dx = ee^e - e^e + 1$ $\int_0^e xe^x dx = e^e(e-1) + 1$ $A_2 = 4[e^e(e-1) + 1]$cm^2	

BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques T^{LE}D

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques T^{LE}D Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques T^{LE}D Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr

ANNEXE1