Fomesoutra.com
ça soutra!

FICHE DE LEÇON

SUITES NUMERIQUES

TLE D

Rédigée par : AZIAN Constant Yobouet Ehounou
Professeur de lycée

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

NOMBRE DES SEANCES : 7

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS

Connaître	- La définition d'une suite :
	  o Majorée
	  o Minorée
	  o Bornée
	- La définition d'une suite :
	  o Convergente
	  o Divergente
	- Les propriétés sur les suites monotones :
	  o Toute suite croissante et majorée converge
	  o Toute suite décroissante et minorée converge
	- Les propriétés sur la convergence des suites numériques
	  o Si (u_n) est une suite convergente vers a et f une fonction continue en a alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$.
	  o les propriétés des suites récurrentes définies par une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$
	- les propriétés sur la divergence des suites numériques
	  o Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$
	  o Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$
	- les propriétés sur la convergence :
	  o des suites géométriques

	○ des suites arithmétiques ○ des suites du type n^{α} - les théorèmes de comparaison - les propriétés sur les limites et comportements asymptotiques comparés des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^{α}), α réel
Savoir	- mener un raisonnement par récurrence
Reconnaître	- une suite géométrique convergente ou divergente - une suite du type n^{α} convergente ou divergente
Démontrer	- qu'une suite est monotone - qu'une suite est majorée et/ou minorée - qu'une suite est convergente ou divergente
Conjecturer	- le comportement d'une suite récurrente
Déterminer	- la plus petite valeur de n telle que : $u_n \geq 10^p, p \in \mathbb{N}$. - la plus petite valeur de n telle que : $\lvert u_n - l \rvert \leq 10^p, p \in \mathbb{N}$ - la limite d'une suite
Traduire	- une situation donnée à l'aide d'une suite : ○ arithmétique ○ géométrique ○ arithmético-géométrique
Traiter une situation	- faisant appel aux suites numériques

SITUATION D'APPRENTISSANGE

Dans le souci d'avoir assez de revenus pour l'organisation des festivités de fin d'année, le président de la promotion terminale veut effectuer le placement de la somme de 300.000FCFA qu'ils ont dabs leur caisse au premier Janvier 2026.
Il se rend dans une structure bancaire et le banquier lui propose deux options :
Option1 : le capital placé est augmenté de 2500 FCFA à intérêt simple par mois
Option2 : le capital placé augmentera de 5% de mois en mois pendant la durée du placement
Le budget de la manifestation étant de 400.000FCFA, le président voudrait connaître l'option la plus avantageuse pour obtenir rapidement cette somme avant la date de la manifestation fixée au début du mois d'août 2026.
Le major de cette promotion affirme que le problème peut être résolu à l'aide des suites particulières.
Forts de ces informations et voulant aider leur président, les élèves de la promotion terminale décident de faire des recherches sur les suites arithmétiques et géométriques.

PLAN DE LA LEÇON

1. Démonstration par récurrence
2. Suites minorée, majorée, bornée
3. Suites monotones
   a. Définition
   b. Sens de variation d'une suite arithmétique
   c. Sens de variation d'une suite géométrique
4. Suites convergentes, suites divergentes
   Définitions
   Remarques
5. Convergence d'une suite monotone
   Propriétés
6. Limites des suites définies par une formule explicite
7. Convergence de suite géométrique et de suite arithmétique
   a. Convergence d'une suite arithmétique
   b. Convergence d'une suite géométrique
   c. Convergence d'une suite du type $u_n = n^\alpha$
8. Limites des suites récurrentes
   Propriétés
9. Croissance comparée des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^α), α réel
10. Propriétés de comparaison
    Propriétés
    Propriété1
    Propriété2 (Théorème des gendarmes)
        1ère forme
        2e forme

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Savoir	- mener un raisonnement par récurrence

PLAN DE LA SEANCE1

1. Démonstration par récurrence

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une suite : o Majorée o Minorée o Bornée
Démontrer	- qu'une suite est majorée et/ou minorée

PLAN DE LA SEANCE2

2. Suites minorées, majorées, bornées

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Démontrer	- qu'une suite est monotone

PLAN DE LA SEANCE3

3. Suites monotones
   a. Définition
   b. Sens de variation d'une suite arithmétique
   c. Sens de variation d'une suite géométrique

SEANCE4

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition d'une suite : o Convergente o Divergente - Les propriétés sur les suites monotones : o Toute suite croissante et majorée converge o Toute suite décroissante et minorée converge - les propriétés sur la divergence des suites numériques o Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$ o Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$
Démontrer	- qu'une suite est convergente ou divergente

PLAN DE LA SEANCE4

4. Suites convergentes, Suites divergentes
   Définitions
   Remarques
5. Convergence d'une suite monotone
   Propriétés

SEANCE5

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés sur la convergence : o des suites géométriques o des suites arithmétiques o des suites du type n^{α}
Reconnaître	- une suite géométrique convergente ou divergente - une suite du type n^{α} convergente ou divergente
Déterminer	- la limite d'une suite

PLAN DE LA SEANCE5

6. Limites des suites définies par une formule explicite
7. Convergence de suite géométrique et de suite arithmétique
   a. Convergence d'une suite arithmétique
   b. Convergence d'une suite géométrique
   c. Convergence d'une suite du type $u_n = n^{\alpha}$

SEANCE6

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les propriétés sur la convergence des suites numériques o Si (u_n) est une suite convergente vers a et f une fonction continue en a alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$. o les propriétés des suites récurrentes définies par une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$ - les propriétés sur les limites et comportements asymptotiques comparés des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^{α}), α réel
Conjecturer	- le comportement d'une suite récurrente

PLAN DE LA SEANCE6

8. Limites des suites récurrentes
   Propriétés
9. Croissance comparée des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^{α}), α réel

SEANCE7

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les théorèmes de comparaison

PLAN DE LA SEANCE7

10. Propriétés de comparaison
    Propriétés
    Propriété1
    Propriété2(Théorème des gendarmes : 1^{ERE} Forme)
    (Théorème des gendarmes : 2^{ERE} Forme)

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 1/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Savoir	- mener un raisonnement par récurrence

PLAN DE LA SEANCE

1. Démonstration par récurrence

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Présentation *5 min*	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. **Question pour faire ressortir les tâches :** Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. REPONSE ATTENDUE Ils décident de faire des recherches sur les suites arithmétiques et géométriques.	
Développement *20 min*	-Travail individuel	ACTIVITE Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ 1. Vérifie que $u_0 \leq 2$. 2. En supposant que pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, $u_k \leq 2$, démontre que $u_{k+1} \leq 2$. 3. Déduis-en que pour tout nombre entier naturel n, $u_n \leq 2$.	REPONSES ATTENDUES **1**. $u_0 = 1$ $1 \leq 2$ donc $u_0 \leq 2$. **2**. Supposons que pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, $u_k \leq 2$. $\frac{1}{2}u_k \leq \frac{1}{2} \times 2$ $\frac{1}{2}u_k \leq 1$ $\frac{1}{2}u_k + 1 \leq 1 + 1$ $u_{k+1} \leq 2$	1. Démonstration par récurrence Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un enter naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$ (n_0 entier naturel donné), on procède en trois étapes : ▪ On vérifie que la propriété est vraie quand $n = n_0$. ▪ On suppose que la propriété est vraie pour un entier $k \geq n_0$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *25 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> 1. On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$ Démontre par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 2$. 2. On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4, pour\ n > 0 \end{cases}$ Démontre par récurrence que pour tout nombre entier naturel, $u_n = 3^n - 2$. 3. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	**3**. $u_0 \leq 2$ et pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, si $u_k \leq 2$ alors $u_{k+1} \leq 2$. On en déduit que pour tout nombre entier naturel n, $u_n \leq 2$. <u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$. $u_0 = 1$ $0 \leq 1 \leq 2$ donc $0 \leq u_0 \leq 2$. $P(0)$ est vraie. Pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, supposons que $P(k)$ est vraie ; c'est-à-dire : $0 \leq u_k \leq 2$. Montrons que $P(k+1)$ est vraie. $0 \leq u_k \leq 2$ $0 + 2 \leq u_k + 2 \leq 2 + 2$ $2 \leq u_k + 2 \leq 4$ $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_k + 2} \leq \sqrt{4}$ $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_k + 2} \leq 2$ $0 \leq u_{k+1} \leq 2$ $P(k+1)$ est vraie. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$. **2**. Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2$.	et on démontre qu'elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$. ▪ On conclut que la propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$u_0 = -1 = 3^0 - 2.$ $P(0)$ est vraie. Pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, supposons que $P(k)$ est vraie ; c'est-à-dire : $u_k = 3^k - 2.$ Montrons que $P(k+1)$ est vraie. $u_k = 3^k - 2$ $u_{k+1} = 3u_k + 4$ $u_{k+1} = 3(3^k - 2) + 4$ $u_{k+1} = 3^{k+1} - 6 + 4$ $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2$ $P(k+1)$ est vraie. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2.$ **3**. Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}$ $P(2)$ est vraie. Pour un nombre entier naturel $k \geq 2$, supposons que $P(k)$ est vraie ; c'est-à-dire : $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> N°3, N°4 et N°6 page 245 Mon Livre de Mathématiques $T^{LE}D$ Pyramides.	Montrons que $P(k+1)$ est vraie. $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=$ $\frac{k(k+1)}{2}+k+1=$ $\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=$ $\frac{(k+1)(k+2)}{2}=$ $\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$ $P(k+1)$ est vraie. Conclusion : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 2/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- la définition d'une suite : o Majorée o Minorée o Bornée
Démontrer	- qu'une suite est majorée et/ou minorée

PLAN DE LA SEANCE

2. Suites minorée, majorée, bornée

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *20 min*	-Travail en groupe -Travail individuel	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> 1. Soit la suite numérique (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2}{n+1}$ Démontre que pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq 1$. 2. Soit la suite numérique (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{2}{n} + 3$ Démontre que pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, $v_n \geq 3$. 3. Soit la suite numérique (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = \sqrt{1+w_n} \end{cases}$ Démontre que pour tout nombre entier naturel n, $0 \leq w_n \leq 2$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **1**. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$ $n+1 \geq 2$ $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ $\frac{2}{n+1} \leq 1$ Pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq 1$. **2**. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ $0 \leq \frac{2}{n}$ $3 \leq \frac{2}{n} + 3$ $3 \leq v_n$ **3**. Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq w_n \leq 2$. $w_0 = 2$ $2 \leq 2$ donc $w_0 \leq 2$. $P(0)$ est vraie. Pour un nombre entier naturel $k \geq 0$, supposons que $P(k)$ est vraie ; c'est-à-dire : $0 \leq w_k \leq 2$. Montrons que $P(k+1)$ est vraie.	2. <u>Suites minorée, majorée, bornée</u> On dit qu'une suite numérique (u_n) définie sur une partie E de $\mathbb{N}$ est : ○ ***Majorée***, s'il existe un nombre réel M tel que : $\forall n \in E, u_n \leq M$. ○ ***Minorée***, s'il existe un nombre réel m tel que : $\forall n \in E, u_n \geq m$. ○ ***Bornée***, s'il elle est à la fois majorée et minorée. ○ ***Positive***, si elle est minorée par 0. ○ ***Négative***, si elle est majorée par 0. <u>Méthode</u> Pour démontrer qu'une suite (u_n) est bornée, on peut utiliser l'un des procédés suivants : - Encadrer le terme général de la suite par deux nombres réels.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$0 \leq w_k \leq 2$ $1 \leq w_k + 1 \leq 3$ $1 \leq \sqrt{w_k + 1} \leq \sqrt{3}$ $1 \leq u_{k+1} \leq \sqrt{3}$ $0 \leq u_{k+1} \leq 2$ $P(k+1)$ est vraie. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq w_n \leq 2$.	▪ Etudier la fonction f, lorsque la suite est du type : $u_n = f(n)$. ▪ Faire un raisonnement par récurrence.
		Pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq 1$. On dit que la suite (u_n) est ***majorée*** *par* 1. *Pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, $v_n \geq 3$. On dit que la suite (v_n) est* ***minorée*** *par* 3. *Pour tout nombre entier naturel n, $0 \leq w_n \leq 2$. La suite (w_n) est à la fois majorée et minorée. On dit qu'elle est* ***bornée***.		
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION 1. Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes : a. Si pour tout entier n $u_n < 4$, alors la suite (u_n) est minorée par 4. b. Si pour tout entier n $u_n \geq -1$, alors la suite (u_n) est minorée par -1.	REPONSES ATTENDUES **1**. a. Faux b. Vrai c. Vrai d. Faux **2**. $v_n = \frac{3n^2 + 2}{n^2 + 1}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		c. Si pour tout entier n $\lvert u_n\rvert < 2$, alors la suite (u_n) est bornée. d. Si pour tout entier n $u_n \geq \sqrt{2}$, alors la suite (u_n) est majorée par $\sqrt{2}$. 2. Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{3n^2+2}{n^2+1}$ Démontre que v est minorée par 2. 3. Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{5 - \frac{1}{n^2+1}}$ Démontre que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \leq \sqrt{5}$.	$v_n = \frac{3(n^2+1)-3+2}{n^2+1}$ $v_n = 3 - \frac{1}{n^2+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$ $n^2 \geq 1 \Leftrightarrow n^2+1 \geq 2$ $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{n^2+1} \geq -\frac{1}{2}$ $3 - \frac{1}{n^2+1} \geq 3 - \frac{1}{2}$ $3 - \frac{1}{n^2+1} \geq \frac{5}{2}$ $v_n \geq \frac{5}{2}$ $v_n \geq 2$ v est minorée par 2. **3**. $u_n = \sqrt{5 - \frac{1}{n^2+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ $n^2 \geq 0 \Leftrightarrow n^2+1 \geq 1$ $\frac{1}{n^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n^2+1} \geq -1$ $5 \geq 5 - \frac{1}{n^2+1} \geq 4$ $2 \leq u_n \leq \sqrt{5}$	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> N°7, N°8 et N°9 page 245 Mon Livre de Mathématiques T^{LE}D Pyramides.		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 3/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Démontrer	- qu'une suite est monotone

PLAN DE LA SEANCE

3. Suites monotones
   a. Définition
   b. Sens de variation d'une suite arithmétique
   c. Sens de variation d'une suite géométrique

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction des exercices de maison <u>ACTIVITE</u> I. 1. Soit (u_n) une suite numérique. Supposons que la suite (u_n) est strictement croissante. Justifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$. 2. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$. Démontre que la suite (u_n) est strictement croissante. (on pourrait montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m < u_{m+k}$). II. 1. Soit (u_n) la suite arithmétique définie par : $u_n = rn + b$, $(r \neq 0)$, pour tout nombre entier naturel n. Etudie selon le signe de r le sens de variation de (u_n). 2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique définie par : $v_n = v_0 q^n$. a. Justifie que : $v_{n+1} - v_n = q^n v_0(q-1)$.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> **I**. **1**. Soit (u_n) une suite numérique. Supposons que la suite (u_n) est strictement croissante ; c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$, si $n < m$ alors $u_n < u_m$. $\forall n \in \mathbb{N}\ n < n+1$. Comme (u_n) est strictement croissante $u_n < u_{n+1}$. **2**. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$. montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m < u_{m+k}$. Soit $P(k)$ la propriété : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m < u_{m+k}$. Pour $k = 1$, on a : $u_m < u_{m+1}$. $P(1)$ est vraie. Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $l \geq 1$. Supposons que $P(l)$ est vraie ; c'est-à-dire $u_m < u_{m+l}$. Montrons que $P(l+1)$ est vraie. $u_m < u_{m+l}$.	3. <u>Suites monotones</u> a. Définition Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite numérique. ▪ Si pour tout n élément de E, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n > 0}$, alors la suite (u_n) est ***strictement croissante*** sur E. ▪ Si pour tout n élément de E, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n < 0}$, alors la suite (u_n) est ***strictement décroissante*** sur E. <u>Remarques</u> ✓ Une suite numérique (u_n) est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante. ✓ Une suite constante est une suite monotone. b. <u>Sens de variation d'une suite arithmétique</u> Une suite arithmétique de

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		b. Déduis selon les valeurs de v_0 et q le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.	$u_m < u_{m+1} < u_{(m+1)+l}$. $P(l+1)$ est vraie. Conclusions : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m < u_{m+k}$. On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $u_n < u_{n+1}$ alors la suite (u_n) est strictement croissante. **II**. **1**. Soit (u_n) la suite arithmétique définie par : $u_n = rn + b$, $(r \neq 0)$, pour tout nombre entier naturel n. $u_{n+1} - u_n = r$ 1er cas : $r > 0$ $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est strictement croissante. 2e cas : $r < 0$ $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est strictement décroissante. 3e cas : $r = 0$. $u_{n+1} = u_n$ donc (u_n) est constante. **2**. **a**.$v_n = v_0 q^n$. $v_{n+1} - v_n = v_0 q^{n+1} - v_0 q^n$ $v_{n+1} - v_n = v_0 q^n (q-1)$ **b**. **1 cas : $v_0 > 0$**. Si $q > 1$, $v_{n+1} > v_n$ donc (v_n) est strictement croissante. Si $0 < q < 1$, $v_{n+1} < v_n$ donc (v_n) est strictement décroissante.	raison r est ***strictement croissante*** (resp. strictement décroissante) si et seulement si r ***est positif*** (resp. si r est négatif). a. <u>Sens de variation d'une suite géométrique</u> Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 différent de 0. On suppose que $v_0 > 0$. ○ Si $q > 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. ○ Si $0 < q < 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. ○ Si $q = 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On suppose que $v_0 < 0$. ○ Si $q > 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. ○ Si $0 < q < 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. ○ Si $q = 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. <u>Remarque</u> Si $q < 0$, alors les termes de la suite sont alternativement

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			Si $q = 1$, $v_{n+1} = v_n$ donc (v_n) est constante. **2 cas : $v_0 < 0$** Si $q > 1$, $v_{n+1} < v_n$ donc (v_n) est strictement décroissante. Si $0 < q < 1$ $v_{n+1} > v_n$ donc (v_n) est strictement croissante. Si $q = 1$, $v_{n+1} = v_n$ donc (v_n) est constante.	positifs et négatifs. La suite n'est ni croissante, ni décroissante. Méthode Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (u_n) , on pourra : - étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. -si la suite est à termes strictement positifs, comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1. - étudier **le sens de variation** de la fonction f si (u_n) est définie par $u_n = f(n)$. - lorsque (u_n) est définie par une formule de récurrence :$u_{n+1} = g(u_n)$ on utilise un raisonnement par récurrence (éventuellement le sens de variation de g)
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION 1. Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes : a. Si pour tout entier n $u_{n+1} = u_n + 3$, alors la suite (u_n) décroissante. b. Si pour tout entier n	REPONSES ATTENDUES 1. a. Faux b. Faux c. Vrai d. Vrai 2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(n+1)$ $u_{n+1} - u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$u_n = 1 - 2n$, alors la suite (u_n) est croissante. c. Si pour tout entier n $u_n = -\frac{2}{3} \times 5^n$ alors la suite (u_n) est décroissante. d. Si pour tout entier n $u_n = -\frac{1}{5} \times (-2)^n$ alors la suite (u_n) croissante. 2. Démontre que la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \ln(n + 1)$ est croissante. 3. Soit la suite v définie pour tout entier naturel n non nul par : $v_n = \sqrt{\frac{2}{n} + 3}$ Justifie que la suite *v* est décroissante.	$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}, n + 2 > n + 1 > 1$ $\frac{n+2}{n+1} > 1$ $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 0$ $u_{n+1} - u_n > 0$ la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \ln(n + 1)$ est croissante. 3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n > 0$. $v_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{n+1} + 3}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, n + 1 > n$ $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\frac{1}{n+1} + 3 < \frac{1}{n} + 3$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} < v_n$ La suite *v* est décroissante.	
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> Etudie le sens de variation de la suite (u_n) définie dans chacun des cas ci-dessous :		

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		a. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ b. $u_n = 3^n$ c. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = {u_n}^3 - 2 \end{cases}$		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 4/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel, calculatrice scientifique

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- La définition d'une suite : o Convergente o Divergente - Les propriétés sur les suites monotones : o Toute suite croissante et majorée converge o Toute suite décroissante et minorée converge - les propriétés sur la divergence des suites numériques o Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$ o Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$
Démontrer	- qu'une suite est convergente ou divergente

PLAN DE LA SEANCE

4. Suites convergentes, suites divergentes
   Définitions
   Remarques
5. Convergence d'une suite monotone
   Propriétés

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>15 min

Développement
20 min</td>
<td>-Travail en groupe

-Travail en groupes</td>
<td>Correction des exercices de maison

<u>ACTIVITE</u>
On donne les suites numériques (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) définies pour tout entier naturel n par :
$u_n = \frac{3n+1}{n+1}$ $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3 \end{cases}$
$\begin{cases} w_0 = 3 \\ w_{n+1} = \frac{1}{v_n} \end{cases}$ $t_n = 3 \times 7^n$
1. Complète les tableaux suivants :
<table>
<tr><td>n</td><td>10</td><td>10^2</td><td>10^3</td><td>10^4</td><td>10^5</td></tr>
<tr><td>u_n</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>5</td><td>8</td><td>10</td><td>11</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>v_n</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td><td>11</td><td>14</td></tr>
<tr><td>w_n</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>10</td><td>10^2</td><td>10^3</td><td>10^4</td><td>10^5</td></tr>
<tr><td>t_n</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
2. Utilise chacun de ces tableaux pour conjecturer l'existence d'un nombre réel l tel qu'il est possible de rendre u_n, v_n, w_n ou t_n aussi proche que l'on veut de l en</td>
<td><u>REPONSES ATTENDUES</u>
1.
<table>
<tr><td>n</td><td>10</td><td>10^2</td><td>10^3</td><td>10^4</td><td>10^5</td></tr>
<tr><td>u_n</td><td>2,8</td><td>2,9</td><td>2,998</td><td>2,9998</td><td>2,9999</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>5</td><td>8</td><td>10</td><td>11</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>v_n</td><td>5,9 531</td><td>5,9 882</td><td>5,9 970</td><td>5,9 985</td><td>5,9 998</td><td>5,9 999</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td><td>11</td><td>14</td></tr>
<tr><td>w_n</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>3</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>3</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>3</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>10</td><td>10^2</td><td>10^3</td><td>10^4</td></tr>
<tr><td>t_n</td><td>21</td><td>8,47 .10^8</td><td>9,7 .10^{84}</td><td>3,7. 10^{845}</td><td>5,88. 10^{8454}</td></tr>
</table>
2. En choisissant n suffisamment grand :
- on peut rendre u_n aussi proche que l'on veut de 3.
- On peut rendre v_n aussi proche que l'on veut de 6.
- il est impossible de rendre w_n aussi proche que l'on veut d'un nombre réel l.
Il est impossible de rendre t_n aussi proche que l'on veut d'un nombre réel l.</td>
<td>4. <u>Suites convergentes, suites divergentes</u>
<u>Définitions</u>
Une suite est dite ***convergente*** lorsqu'elle admet une limite finie.
Une suite est ***divergente*** si elle n'est pas convergente.
<u>Remarques</u>
On admet que si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.
Lorsqu'une suite admet une limite finie l, on dit qu'elle converge vers l.
Une suite est divergente si elle n'admet pas de limite ou si elle admet une limite infinie.
5. <u>Convergence d'une suite monotone</u>
<u>Propriétés</u>
Toute suite décroissante et minorée est convergente.</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	choisissant n suffisamment grand. *En choisissant n suffisamment grand on peut rendre u_n aussi proche que l'on veut de* 3. *On dit que la suite (u_n)* ***converge*** *vers* 3. *De même, la suite (v_n)* ***converge*** *vers* 6. *On dit aussi que les suite (u_n) et (v_n) sont* ***convergentes***. *Les suites (w_n) et (t_n) ne convergent pas ; elles* ***divergent***. *Les suite (w_n) et (t_n) sont* ***divergentes***. EXERCICE DE FIXATION On considère la suite u définie par : $u_0 = 1$; $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ a. Démontre que u est croissante. b. Démontre que u est majorée par 2. c. En déduire que la suite u converge	REPONSES ATENDUES **a**. Montrons que u est croissante : $u_1 = \sqrt{2+u_0}$ $u_1 = \sqrt{2+1}$ $u_1 = \sqrt{3}$ Soit P_n la propriété : pour tout nombre réel n $u_{n+1} > u_n$. $u_1 > u_0$ donc P_1 est vraie. Soit k un nombre réel tel que $k \geq 1$. Supposons que P_k; c'est-à-dire $u_{k+1} > u_k$. Montrons que P_{k+1} est vraie. $u_{k+1} > u_k$ $2 + u_{k+1} > 2 + u_k > 2$ $\sqrt{2+u_{k+1}} > \sqrt{2+u_k}$	Toute suite croissante et majorée est convergente. Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$. Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$u_{k+2} > u_{k+1}$ donc P_{k+1} est vraie. Conclusions : pour tout nombre réel n $u_{n+1} > u_n$. La suite u est croissante. **b**. Montrons que u est majorée par 2. Soit Q_n la propriété : pour tout nombre réel n $u_n < 2$. $u_0 = 1$ $u_0 < 2$ donc Q_0 est vraie. Soit k un nombre réel tel que $k \geq 0$. Supposons que Q_k est vraie; c'est-à-dire $u_k < 2$. Montrons que Q_{k+1} est vraie. $u_k < 2 \Leftrightarrow 2 + u_k < 2 + 2$ $2 + u_k < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2 + u_k} < \sqrt{4}$ $\sqrt{2 + u_k} < 2$ d'où $u_{k+1} < 2$. Q_{k+1} est vraie Conclusion : pour tout nombre réel n $u_n < 2$. La suite u est majorée par 2. **c**. La suite u est croissante et majorée par 2 donc elle converge.	
	-Travail individuel	<u>EXERCICES DE MAISON</u> 1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ a. Démontre par récurrence		

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$. b. En utilisant la question 1, étudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. c. Justifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. 2. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n + 4}{3} \end{cases}$ a. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 2$. b. Démontre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. c. Déduis-en que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 5/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les propriétés sur la convergence : o des suites géométriques o des suites arithmétiques o des suites du type n^{α}
Reconnaître	- une suite géométrique convergente ou divergente - une suite du type n^{α} convergente ou divergente
Déterminer	- la limite d'une suite

PLAN DE LA SEANCE

6. Limites des suites définies par une formule explicite
7. Convergence de suite géométrique et de suite arithmétique
   a. Convergence d'une suite arithmétique
   b. Convergence d'une suite géométrique
   c. Convergence d'une suite du type $u_n = n^{\alpha}$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
15 min	-Travail en groupe	Correction des exercices de maison		
Développement *5 min*	-Travail en groupes	ACTIVITE1 On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=2+\frac{3}{x^2-1}$ et la suite (u_n) Définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n=f(n)$. 1. Détermine la limite de f en $+\infty$. 2. a. Détermine la formule explicite de la suite (u_n). b. Déduis-en la limite de la suite (u_n).	REPONSES ATTENDUES **1**. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{3}{x^2-1}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2.$ **2.a**. $u_n=f(n).$ $u_n=2+\frac{3}{n^2-1}$ **b**. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2.$	6. Limites des suites définies par une formule explicite Propriété Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par la formule explicite : $u_n=f(n)$. Si f admet une limite en $+\infty$, alors la suite (u_n) admet la même limite et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} f(n).$
Evaluation *5 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION Calcule les limites de chacune des suites numériques suivantes : a. $u_n=-3+\frac{1}{n+1}$ b. $v_n=\frac{\ln(n+1)}{n}+2$ c. $t_n=\sqrt{n^3+3n^2+1}$	REPONSES ATTENDUES **a**. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} -3+\frac{1}{n+1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-3$ **b**. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}+2$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=2$ **c**. $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^3+3n^2+1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=+\infty$	

<table>
<tr><th>MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES</th><th>STRATEGIES PEDAGOGIQUES</th><th>ACTIVITES DU PROFESSEUR</th><th>ACTIVITES DES APPRENANTS</th><th>TRACE ECRITE</th></tr>
<tr>
<td>Développement
20 min</td>
<td>-Travail en groupes</td>
<td>
<u>ACTIVITE2</u>
Soient (u_n), (v_n) et (t_n) trois suites numériques ayant pour formules explicites respectives :
$u_n = rn + p$;
$v_n = v_0 \times q^n$;
$t_n = n^\alpha$.
1. Etudie selon les valeurs de r la convergence de la suite (u_n).
2. Etudie selon les valeurs de q la convergence de la suite (v_n).
3. Etudie selon les valeurs de α la convergence de la suite (t_n).
</td>
<td>
<u>REPONSES ATTENDUES</u>
1.
<table>
<tr><td>$r = 0$</td><td>(u_n) est une suite constante. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(u_n) converge.</td></tr>
<tr><td>$r > 0$</td><td>(u_n) est croissante.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(u_n) diverge vers $+\infty$.</td></tr>
<tr><td>$r < 0$</td><td>(u_n) est décroissante.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. (u_n) diverge vers $-\infty$.</td></tr>
</table>
2.
<table>
<tr><td>$q = 1$</td><td colspan="2">$v_n = v_0$. (v_n) est une suite constante. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0$.
(v_n) converge.</td></tr>
<tr><td>$-1 < q < 1$</td><td colspan="2">$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
(v_n) converge vers 0.</td></tr>
<tr><td>$q \leq -1$</td><td colspan="2">Les termes sont alternativement positifs et négatifs. (v_n) n'a pas de limite.
(v_n) n'est pas convergente.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$q > 1$</td><td>$v_0 < 0$</td><td>$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
(v_n) diverge.</td></tr>
<tr><td>$v_0 > 0$</td><td>$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
(v_n) diverge.</td></tr>
</table>
</td>
<td>
7. <u>Convergence de suite géométrique et de suite arithmétique</u>
a. <u>Convergence d'une suite arithmétique Propriété</u>
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme v_0.
Si $r = 0$, alors (u_n) converge : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
Si $r \neq 0$, alors (u_n) diverge : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si $r < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $r > 0$.
b. <u>Convergence d'une suite géométrique</u>
Soit v une suite géométrique de de premier terme v_0 et de raison q.
Si $|\boldsymbol{q}| < \mathbf{1}$ alors v ***converge*** vers 0.
Si $|\boldsymbol{q}| > \mathbf{1}$ alors v ***diverge*** et $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \; si \; v_0 < 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \; si \; v_0 > 0 \end{cases}$
</td>
</tr>
</table>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$q = 0$ | (v_n) est la suite constante nulle et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. (v_n) converge.	Si $\boldsymbol{q < -1}$ alors ***v n'a pas de limite***.
			3.	Si $\boldsymbol{q = 0}$ ou $v_0 = 0$ ***alors v*** est la suite ***constante nulle***.
			$\alpha = 0$ | $t_n = 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (t_n) converge vers 1.	Si $\boldsymbol{q = 1}$ alors $\boldsymbol{v}$ est une suite constante et ***converge vers*** $\boldsymbol{v_0}$**.**
			$\alpha > 0$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. (t_n) diverge vers $+\infty$.	c. <u>Convergence d'une suite du type $u_n = n^\alpha$</u>
			$\alpha < 0$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (t_n) converge vers 0.	<u>Propriété</u>
				Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.
				Si $\alpha = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 1$.
				Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> On considère les suites (u_n), (v_n), (w_n), (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = (0{,}9)^n$, $v_n = 5^n$ $w_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$, $a_n = n^{-3}$ $b_n = n^5$, $c_n = \sqrt{n}$ $d_n = -2n + 1$ Donne les limites suivantes : 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ 3. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ 4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ 5. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ 6. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$ 7. $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = -\infty$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		3. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ 4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 5. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 6. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ 7. $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$		

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 6/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- Les propriétés sur la convergence des suites numériques o Si (u_n) est une suite convergente vers a et f une fonction continue en a alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$. o les propriétés des suites récurrentes définies par une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$ - les propriétés sur les limites et comportements asymptotiques comparés des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^α), α réel
Conjecturer	- le comportement d'une suite récurrente

PLAN DE LA SEANCE

8. Limites des suites récurrentes
   Propriétés
9. Croissance comparée des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^α), α réel

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail en groupe	ACTIVITE Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$ Soient a et l des éléments de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$; f est une fonction définie sur un intervalle K. On suppose que (u_n) est une suite convergente. On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. (*On admet que la propriété donnant la limite de la composée de deux fonctions reste valable pour la composée d'une suite suivie d'une fonction*). 1. Détermine la fonction f telle que : $u_{n+1} = f(u_n)$. 2. Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(u_n)$. 3. On pose $a = 3$. a. Calcule l. b. Résous l'équation $f(x) = x$ puis compare la solution à l.	REPONSES ATTENDUES **1**. $f: \mathbb{R}\setminus\{6\} \mapsto \mathbb{R}$ $x \mapsto \dfrac{9}{6-x}$ **2**. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(u_n) = l$ **3**.**a**. $l = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $l = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9}{6-x}$ $l = 3$. **b**. $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{9}{6-x} = x$ $-x^2 + 6x = 9$ $-x^2 + 6x - 9 = 0$ $x^2 - 6x + 9 = 0$ $(x-3)^2 = 0$ $x = 3.$ l est égal à la solution de l'équation $f(x) = x$.	8. Limites des suites récurrentes Propriétés Propriété1 Soit f une fonction, D_f son ensemble de définition et (u_n) une suite d'éléments de D_f. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(u_n) = l$. $(l \in \mathbb{R})$ Propriété2(Théorème du point fixe) Soit une suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction numérique continue sur un intervalle I. Si la suite (u_n) est convergente et que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$, alors la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation : $x \in I, f(x) = x$. Remarque Toute solution de l'équation $x \in I, f(x) = x$ est appelée point fixe de f.
Evaluation *15 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FIXATION 1. Calcule la limite de la suite de terme (u_n) général :	REPONSES ATTENDUES **1**. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		$u_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 2. On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}, \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$ On suppose (v_n) est convergente et à termes positifs. Détermine la limite de la suite (v_n).	$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $u_{n+1} = f(u_n)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ $f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Posons $X = \frac{1}{x}$ Lorsque : $x \to +\infty,\ X \to 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{X}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$ **2**. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ La suite (v_n) est convergente et pour tout entier naturel n, limite de la suite (v_n).$v_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors la limite de la suite (v_n) est la solution de l'équation : $x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x$. $f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = x$ $x^2 = x + 1$ $x^2 - x - 1 = 0$ $\Delta = 1 + 4 = 5$ $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Développement *15 min*	-Travail individuel	ACTIVITE2 Soient n un nombre entier naturel strictement positif ; a et α deux nombres réels. Justifie chacune des propositions suivantes : 1. Si $\alpha > 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right) = 0.$ 2. Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{a^n}\right) = 0.$ 3. Si $a > 1$ et $\alpha > 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right) = 0.$ 4. Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right) = +\infty.$	$x_1 < 0$ et $x_2 > 0$. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ La limite de la suite (v_n) est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. REPONSES ATTENDUES **1**. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^\alpha}, \alpha > 0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right) = \lim_{n\to+\infty} f(n)$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right) = 0$ Si $\alpha > 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right) = 0.$ **2**. Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $p(x) = \frac{\ln x}{a^x}, \alpha > 1$ $\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{a^x}$ $\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^{x\ln a}} = 0$	9. Croissance comparée des suites $(\ln n)$, (a^n), a > 0 et (n^α), α réel Si $\alpha > 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right) = 0.$ Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{a^n}\right) = 0.$ Si $a > 1$ et $\alpha > 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right) = 0.$ Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right) = +\infty.$

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{a^x}\right)=\lim_{n\to+\infty}p(n)$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{a^x}\right)=0$ Si $a>1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{a^n}\right)=0.$ **3**. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x)=\left(\frac{x^\alpha}{a^x}\right), a>1 \text{et } \alpha>0$ $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^\alpha}{a^x}\right)$ $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^\alpha}{e^{x\ln a}}\right)=0$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}g(n)=0$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right)=0$ Si $a>1$ et $\alpha>0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right)=0.$ **4**. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x)=\left(\frac{x^\alpha}{a^x}\right), 0<a<1 \text{et } \alpha<0$ $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^\alpha}{a^x}\right)$ $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^\alpha}{e^{x\ln a}}\right)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *10 min*	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE FIXATION</u> Etudie les limites éventuelles de la suite : a. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 4^n$ b. $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \ln n$ c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^5}{7^n}$ d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^3}$	$\alpha < 0$ donc il existe $\delta > 0$ tel que : $\alpha = -\delta$. $0 < a < 1$ donc $\ln a < 0$. Il existe $\theta > 0$ tel que : $\ln a = -\theta$. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{-\delta}}{e^{-\theta x}}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{\theta x}}{x^{\delta}}\right) = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{\alpha}}{a^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} h(n)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{\alpha}}{a^n}\right) = +\infty$ Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{\alpha}}{a^n}\right) = +\infty$. <u>REPONSES ATTENDUES</u> **a**. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 4^n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(1 - \frac{4^n}{n^3}\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 4^n = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{4^n}{n^3}\right) = -\infty \end{cases}$ **b**. $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \ln n$ $= \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<u>EXERCICE DE MAISON</u> N°16 page 246 Mon Livre de Mathématiques T^{LE}D Pyramides	$\lim_{n\to+\infty} n - \ln n = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = 1 \end{cases}$ **c**. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5}{7^n} = 0$ **d**. $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^3} = +\infty$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON10 : SUITES NUMERIQUES

SEANCE : 7/7

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les théorèmes de comparaison

PLAN DE LA SEANCE

10. Propriétés de comparaison
    Propriétés
    Propriété1
    Propriété2 (Théorème des gendarmes)
    1^{ERE} Forme
    2^{EME} Forme

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
10 min *Développement* *25 min*	-Travail en groupe -Travail en groupes	Correction de l'exercice de maison <u>ACTIVITE</u> I. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. 1. Démontre que si $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. 2. Démontre que si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \geq u_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. II. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$; $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites. Démontre que si $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ convergent vers la même limite l et si pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ alors (u_n) converge vers l.	<u>REPONSES ATTENDUES</u> I. **1**. $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc soit A un nombre réel strictement positif ; il existe un nombre entier naturel N tel que : $\forall n \geq N$, $v_n \in]A;+\infty[$. Ainsi, pour tout nombre entier $n \geq N$, $A \leq v_n \leq u_n$; c'est-à-dire : $u_n \in]A;+\infty[$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. **2**. $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ donc soit B un nombre réel strictement positif ; il existe un nombre entier naturel N' tel que : $\forall n \geq N'$, $v_n \in]-\infty;-B[$. Ainsi, pour tout nombre entier $n \geq N'$, $u_n \leq v_n \leq -B$; c'est-à-dire : $v_n \in]-\infty;-B[$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. **II**. Soit r un nombre réel strictement positif. La suite (v_n) converge vers l, donc à partir d'un certain indice N_v , les termes de la suite (v_n) sont dans l'intervalle de centre l	10. <u>Propriétés de comparaison</u> <u>Propriétés</u> <u>Propriété1</u> Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. <u>Propriété2</u> (Théorème des gendarmes) <u>1ERE Forme</u> Soit (u_n), (u_n) et (w_n) des suites définies sur $\mathbb{N}$. Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$. <u>2EME Forme</u> S'il existe une suite (u_n) telle que $\lvert u_n - l\rvert \leq v_n$ à

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
Evaluation *20 min*	-Travail individuel	EXERCICE DE FOXATION Détermine chacune des limites suivantes : 1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+(-1)^n)$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\sin n)$ 3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos n-2n)$ 4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ 5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$	et de rayon r c'est-à-dire : $l-r<v_n<l+r$. De même la suite (w_n) converge vers l, donc à partir d'un certain indice N_w , les termes de la suite (v_n) sont dans l'intervalle de centre l et de rayon r c'est-à-dire : $l-r<w_n<l+r$. Posons $N=max\{N_v\,;N_w\}$. Pour tout entier $n\geq N$, on a : $l-r<v_n\leq u_n\leq w_n<l+r$ La suite (u_n) converge vers l. REPONSES ATTENDUES **1**. $-1\leq(-1)^n\leq 1$ $n^2-1\leq n^2+(-1)^n\leq n^2+1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+(-1)^n)=+\infty$. **2**. $-1\leq\sin n\leq 1$ $n-1\leq\sin n\leq n+1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\sin n)=+\infty$. **3**. $-1\leq\cos n\leq 1$ $-1-2n\leq\cos n\leq 1-2n$	partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\lim\limits_{n\to+\infty}(-1-2n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2n)$ $=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos n-2n)=-\infty$. **4**. $-1\leq\sin n\leq 1$ $-\frac{1}{n}\leq\frac{\sin n}{n}\leq\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$ **5**. $-1\leq(-1)^n\leq 1$ $-\frac{1}{n^2}\leq\frac{(-1)^n}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$	

BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques $T^{LE}D$

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques $T^{LE}D$ Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

https://physiques-et-maths.fr