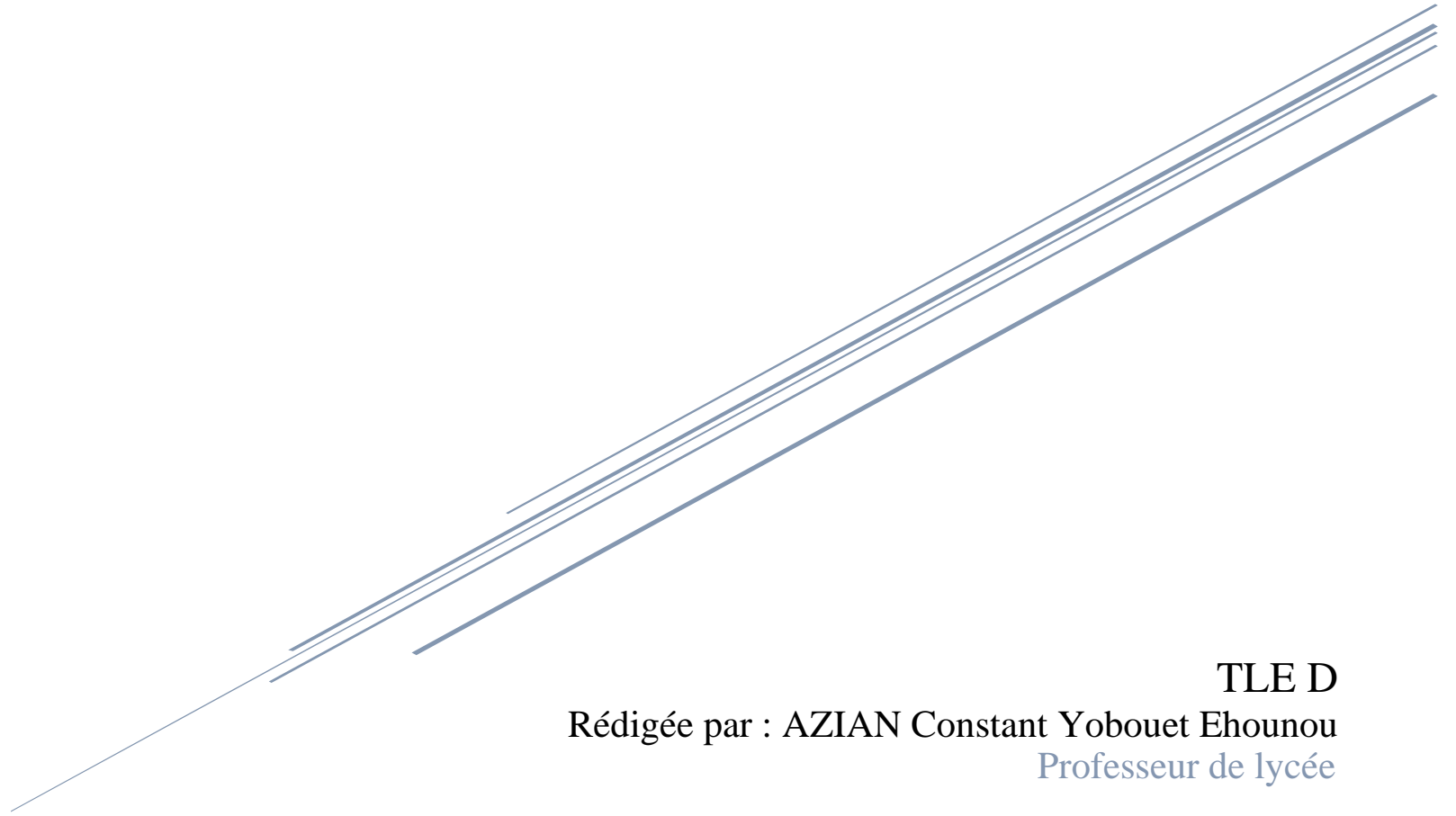


FICHE DE LEÇON

EQUATIONS DIFFERENTIELLES



TLE D

Rédigée par : AZIAN Constant Yobouet Ehounou
Professeur de lycée

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON12 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

NOMBRE DES SEANCES : 3

DUREE D'UNE SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	<ul style="list-style-type: none">- la définition d'une équation différentielle- les solutions de chaque équation différentielle au programme
Identifier	<ul style="list-style-type: none">- une équation différentielle
Justifier	<ul style="list-style-type: none">- qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
Résoudre	<ul style="list-style-type: none">- une équation différentielle du type $f' = af$ (a réel)- une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels et $a \neq 0$)- une équation différentielle du type $f'' = 0$- une équation différentielle du type $f'' = \omega^2 f$ (ω réel non nul)- une équation différentielle du type $f'' = -\omega^2 f$ (ω réel non nul)
Déterminer	<ul style="list-style-type: none">- la solution d'une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels) satisfaisant à une condition initiale donnée- la solution d'une équation différentielle du type $f'' = mf$ (m réel)- satisfaisant à des conditions initiales données.
Traiter une situation	<ul style="list-style-type: none">- faisant appel aux équations différentielles

SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'enseignant de physique-chimie vous donne les informations suivantes :

« lors d'une chute d'un parachutiste, le parachute fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement \vec{F} est proportionnel à la vitesse \vec{v} : $\vec{F} = -km \vec{v}$ (où k est le coefficient de frottement). Le principe fondamental de la mécanique établit que : $mg - kmv = ma$ (m est la masse, v est la vitesse, a son accélération et g la constante de gravitation).

En remarquant que l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on obtient l'équation : $\frac{dv(t)}{dt} + kv(t) = g$.

La détermination d'une fonction v judicieusement choisie permettra de déterminer la position du parachutiste à tout instant t ». Eveillés par l'existence d'une équation qui met en relation une fonction et sa dérivée, les élèves décident de faire des recherches sur ce type d'équations.

PLAN DE LA LEÇON

I. NOTION D'EQUATION DIFFERENCIELLE

Définitions

II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f' = af + b$ (a et b réels ; $a \neq 0$)

1. Equations différentielles du type $f' = b$
2. Equations différentielles du type $f' = af$
3. Equations différentielles du type $f' = af + b$
4. Equations différentielles du type $f' = af + b$ vérifiant une condition

III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f'' = mf$ (m réel)

1. Equations différentielles du type $f'' = 0$
2. Equations différentielles du type $f'' = \omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)
3. Equations différentielles du type $f'' = -\omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)
4. Equations différentielles du type $f'' = mf$ vérifiant deux conditions

HABILETES, CONTENUS ET PLANS PAR SEANCE

SEANCE1

HABILETES	CONTENUS
Connaître	<ul style="list-style-type: none"> - la définition d'une équation différentielle - les solutions de chaque équation différentielle au programme
Identifier	<ul style="list-style-type: none"> - une équation différentielle
Justifier	<ul style="list-style-type: none"> - qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
Résoudre	<ul style="list-style-type: none"> - une équation différentielle du type $f' = af$ (a réel) - une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels et $a \neq 0$)
Déterminer	<ul style="list-style-type: none"> - la solution d'une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels) satisfaisant à une condition initiale donnée

PLAN DE LA SEANCE1

- I. NOTION D'EQUATION DIFFERENCIELLE
Définitions
- II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f' = af + b$ (a et b réels ; $a \neq 0$)
 1. Equations différentielles du type $f' = b$
 2. Equations différentielles du type $f' = af$
 3. Equations différentielles du type $f' = af + b$
 4. Equations différentielles du type $f' = af + b$ vérifiant une condition

SEANCE2

HABILETES	CONTENUS
Connaître	<ul style="list-style-type: none"> - les solutions de chaque équation différentielle au programme
Résoudre	<ul style="list-style-type: none"> - une équation différentielle du type $f'' = 0$ - une équation différentielle du type $f'' = \omega^2 f$ (ω réel non nul) - une équation différentielle du type $f'' = -\omega^2 f$ (ω réel non nul)

PLAN DE LA SEANCE2

- III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f'' = mf$ (m réel)
 1. Equations différentielles du type $f'' = 0$
 2. Equations différentielles du type $f'' = \omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)
 3. Equations différentielles du type $f'' = -\omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)

SEANCE3

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	<ul style="list-style-type: none"> - la solution d'une équation différentielle du type $f'' = mf$ (m réel) satisfaisant à des conditions initiales données.

PLAN DE LA SEANCE3

4. Equations différentielles du type $f'' = mf$ vérifiant deux conditions

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON12 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

SEANCE : 1/3

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	<ul style="list-style-type: none">- la définition d'une équation différentielle- les solutions de chaque équation différentielle au programme
Identifier	<ul style="list-style-type: none">- une équation différentielle
Justifier	<ul style="list-style-type: none">- qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
Résoudre	<ul style="list-style-type: none">- une équation différentielle du type $f' = af$ (a réel)- une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels et $a \neq 0$)
Déterminer	<ul style="list-style-type: none">- la solution d'une équation différentielle du type $f' = af + b$ (a et b réels) satisfaisant à une condition initiale donnée

PLAN DE LA SEANCE

I. NOTION D'EQUATION DIFFERENCIELLE

Définitions

II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f' = af + b$ (a et b réels ; $a \neq 0$)

1. Equations différentielles du type $f' = b$
2. Equations différentielles du type $f' = af$
3. Equations différentielles du type $f' = af + b$
4. Equations différentielles du type $f' = af + b$ vérifiant une condition

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
<i>Présentation</i> 5 min	-Lecture -Travail collectif	-Donne l'énoncé de la situation d'apprentissage aux apprenants. -Demande aux apprenants de faire une lecture silencieuse de la situation. -Demande à un apprenant de lire à haute voix l'énoncé de la situation. -Lis l'énoncé de la situation d'apprentissage à haute voix. Question pour faire ressortir les tâches : Qu'est-ce que les élèves décident de faire ?	-Les apprenants lisent silencieusement l'énoncé de la situation. -Un apprenant lis à haute voix l'énoncé de la situation. -Les apprenants écoutent Attentivement. <u>REPONSE ATTENDUE</u> les élèves décident de faire des recherches sur le type équation qui met en relation une fonction et sa dérivée.	
<i>Développement</i> 10 min	-Travail individuel	<u>ACTIVITE1</u> On donne la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par : $g(x) = \frac{3}{x}$ f est la primitive sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en e . 1.a. Traduis par une équation l'expression « f est une primitive de g ». b. Donne l'inconnue de cette équation. 2.a. Traduis par une égalité l'expression « f est la primitive de g qui s'annule en e	<u>REPONSES ATTENDUES</u> 1.a. $f'(x) = g(x)$ b. L'inconnue dans l'équation : $f'(x) = g(x)$ est la fonction f . 2.a. $f(e) = 0$. b. L'égalité $f(e) = 0$ est une condition à laquelle doit satisfaire la fonction inconnue f .	<u>I. NOTION D'EQUATION DIFFERENTIELLE</u> <u>Définitions</u> On appelle <i>équation différentielle</i> , toute équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue. On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction définie et dérivable

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		<p>b. Dis ce que représente cette égalité pour l'équation.</p> <p><i>L'équation $f'(x) = g(x)$ est appelée équation différentielle. Toute autre lettre désignant une fonction peut être utilisée à la place de f.</i></p> <p><i>La condition $f(e) = 0$ est appelée condition initiale du problème.</i></p> <p><i>Toute équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue est appelée équation différentielle.</i></p> <p><i>Une équation différentielle est dite d'ordre n lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est n.</i></p> <p><i>Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle ouvert K est appelée solution sur K de cette équation différentielle.</i></p>		<p>sur un intervalle et vérifiant cette équation.</p> <p>Intégrer ou résoudre une équation différentielle sur un intervalle K, c'est déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sur K.</p>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
<i>Evaluation</i> 3 minutes	-Travail individuel	<p><u>EXERCICE DE FIXATION</u></p> <p>Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont des équations différentielles.</p> <ol style="list-style-type: none"> $(E_1): 2y^3 - y = 5$ $(E_2): 3y' - 4 = 0$ $(E_3): 3y^2 = 8$ $(E_4): y'' - 2y' - y = 1$ $(E_5): y - 4 = -1$ $(E_6): 2y'' - 5y = 11$ 	<p><u>REPONSES ATTENDUES</u></p> <p>(E_2), (E_4) et (E_6) sont des équations différentielles.</p> <p>(E_1), (E_3) et (E_5) ne sont pas des équations différentielles.</p>	
<i>Développement</i> 22 min	-Travail en groupes	<p><u>ACTIVITE2</u></p> <p>Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} ; a et b deux nombres réels.</p> <p>On considère l'équation différentielle : $f' = af + b$.</p> <ol style="list-style-type: none"> Détermine les solutions de (E) : <ol style="list-style-type: none"> Pour $a = 0$ et $b \neq 0$ Pour $a \neq 0$ et $b = 0$ Pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Vérifie que les fonctions h définies par : $h(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ sont Solutions de (E). Démontre que la solution de (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$ est unique. 	<p><u>REPONSES ATTENDUES</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <ol style="list-style-type: none"> Pour $a = 0$ et $b \neq 0$ $(E): f' = b$ $\frac{df}{dx} = b \Leftrightarrow df = bdx$ $\int df = \int bdx$ $\int df = b \int dx$ $f(x) = bx + c, c \in \mathbb{R}$ Pour $a \neq 0$ et $b = 0$ $(E): f' = af$ $\frac{df}{dx} = af \Leftrightarrow \frac{df}{f} = adx$ $\int \frac{1}{f} df = \int adx$ $\int \frac{1}{f} df = a \int dx$ 	<p>II. <u>EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f' = af + b$</u> (a et b réels ; $a \neq 0$)</p> <ol style="list-style-type: none"> <u>Equations différentielles du type $f' = b$</u> <u>Propriété</u> Soit b un nombre réel. Les solutions de l'équation différentielle $f' = b$ sont les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par : $f_k(x) = bx + k$ où k est une constante réelle quelconque. <u>Equations différentielles du type $f' = af$</u>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\ln f(x) = ax + c, c \in \mathbb{R}$ $e^{\ln f(x)} = e^{ax+c}, c \in \mathbb{R}$ $f(x) = e^{ax+c}, c \in \mathbb{R}$ $f(x) = e^c e^{ax}, c \in \mathbb{R}$ $f(x) = ke^{ax}, k \in \mathbb{R}$ <p style="text-align: center;">avec $k = e^c$</p> <p>2. $f' = af + b$</p> $h(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ $h'(x) = ake^{ax}$ $ah(x) + b = ake^{ax} - b + b$ $ah(x) + b = ake^{ax}$ $h'(x) = ah(x) + b$ <p>Les fonctions h définies par :</p> $h(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ <p>sont Solutions de (E).</p> <p>3. Soit f_1 et f_2 deux solutions de (E) telles que :</p> $f_1(x) = k_1 e^{ax} - \frac{b}{a} \text{ et}$ $f_2(x) = k_2 e^{ax} - \frac{b}{a}$ <p>Supposons que :</p> $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0 \text{ c'est-à-dire}$ $k_1 e^{ax_0} - \frac{b}{a} = k_2 e^{ax_0} - \frac{b}{a}$ $k_1 e^{ax_0} = k_2 e^{ax_0} \Leftrightarrow$ $(k_1 - k_2) e^{ax_0} = 0 \Leftrightarrow k_1 - k_2 = 0$ $k_1 = k_2$ <p>D'où $f_1(x) = f_2(x)$</p>	<p>Soit a un réel.</p> <p>Les solutions de l'équation différentielle $f' = af$ sont les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par : $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est une constante réelle quelconque.</p> <p>3. <u>Equations différentielles du type $f' = af + b$</u></p> <p>Soit a et b deux nombres réels non nuls.</p> <p>Les solutions de l'équation différentielle $f' = af + b$ sont les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par :</p> $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ <p>où k est une constante réelle quelconque.</p> <p>4. <u>Equations différentielles du type $f' = af + b$ vérifiant une condition</u></p> <p>Quels que soient les nombres réels x_0 et y_0, l'équation $f' = af + b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ admet une unique solution g telle que $g(x_0) = y_0$.</p>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
<p><i>Evaluation</i> 15 minutes</p>	<p>-Travail individuel</p>	<p><u>EXERCICE DE FIXATION</u> Intègre chacune des équations différentielles suivantes puis déduire celle qui vérifie la condition initiale indiquée.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $y' = 4y$; $y(1) = 2e$. 2. $y' + 3y = 0$; $y(-1) = e$. 3. $y' = 5$; $y(0) = 7$. 4. $y' = 3y + 2$; $y(0) = 0$. 	<p><u>REPONSES ATTENDUES</u> 1. $y' = 4y$; $y(1) = 2e$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 4y$ sont les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par :</p> $f_k(x) = ke^{4x}, k \in \mathbb{R}$ $f_k(1) = 2e \Leftrightarrow ke^4 = 2e$ $k = \frac{2e}{e^4} = 2e^{-3}$ <p>La solution de l'équation différentielle $y' = 4y$ qui vérifie la condition $y(1) = 2e$ est la fonction f définie sur \mathbb{R} par :</p> $f(x) = 2e^{-3}e^{4x}$ $f(x) = 2e^{4x-3}$ <p>2. $y' + 3y = 0$; $y(-1) = e$. $y' = -3y$; $y(-1) = e$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = -3y$ sont les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par :</p> $f_k(x) = ke^{-3x}, k \in \mathbb{R}$ $f_k(-1) = e \Leftrightarrow ke^3 = e$ $k = \frac{e}{e^3} = e^{-2}$ <p>La solution de l'équation différentielle $y' = -3y$ qui vérifie la condition $y(-1) = e$ est la fonction f définie sur \mathbb{R} par :</p> $f(x) = e^{-2}e^{-3x}$ $f(x) = 2e^{-3x-2}$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<p align="center">EXERCICE DE MAISON N°1, N°2, N°8, N°10 et N°12 p. 322 Mon Livre de Mathématiques T^{LED} Pyramides.</p>	<p>3. $y' = 5$; $y(0) = 7$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 5$ sont les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par :</p> $f_k(x) = 5x + k, k \in \mathbb{R}$ $f_k(0) = 7 \Leftrightarrow 5 \times 0 + k = 7$ $k = 7$ <p>La solution de l'équation différentielle $y' = 5$ qui vérifie la condition $y(0) = 7$ est la fonction f définie sur \mathbb{R} par :</p> $f(x) = 5x + 7$ <p>4. $y' = 3y + 2$; $y(0) = 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y + 2$ sont les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par :</p> $f_k(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}, k \in \mathbb{R}$ $f_k(0) = 0 \Leftrightarrow k - \frac{2}{3} = 0$ $k = \frac{2}{3}$ <p>La solution de l'équation différentielle $y' = 3y + 2$ qui vérifie la condition $y(0) = 0$ est la fonction f définie sur \mathbb{R} par :</p> $f(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}$	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON12 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

SEANCE : 2/3

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Connaître	- les solutions de chaque équation différentielle au programme
Résoudre	- une équation différentielle du type $f'' = 0$ - une équation différentielle du type $f'' = \omega^2 f$ (ω réel non nul) - une équation différentielle du type $f'' = -\omega^2 f$ (ω réel non nul)

PLAN DE LA SEANCE

III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f'' = mf$ (m réel)

1. Equations différentielles du type $f'' = 0$
2. Equations différentielles du type $f'' = \omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)
3. Equations différentielles du type $f'' = -\omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
<p>15 min</p> <p><i>Développement</i></p> <p>30 min</p>	<p>-Travail en groupes</p> <p>-Travail en groupes</p>	<p>Correction des exercices de maison</p> <p style="text-align: center;"><u>ACTIVITE</u></p> <p>Soient m un nombre réel et f une fonction deux fois dérivable.</p> <p>1. Lorsque $m = 0$.</p> <p>a. détermine l'ensemble des fonctions f telles que $f'' = 0$.</p> <p>b. Vérifie que toute fonction h définie par $h(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $f'' = 0$.</p> <p>2. Lorsque $m = \omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$</p> <p>a. Vérifie que les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{\omega x}$ et $g(x) = e^{-\omega x}$ sont solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$.</p> <p>b. Démontre que pour tout couple $(a; b)$ élément de \mathbb{R}^2, la fonction H définie par $H(x) = af(x) + bg(x)$ est solution de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$.</p> <p>c. Déduis en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$.</p> <p>3. Lorsque $m = -\omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$</p> <p>a. Démontre que les fonctions p</p>	<p style="text-align: center;"><u>REPONSES ATTENDUES</u></p> <p>1.a. $f'' = 0$ donc $f'(x) = a, a \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$</p> <p>b. $h(x) = ax + b$ donc $h'(x) = a$ $h''(x) = 0$ donc h est solution de l'équation différentielle $f'' = 0$.</p> <p>2.a. $f'' = \omega^2 f$ $f(x) = e^{\omega x} \Rightarrow f'(x) = \omega e^{\omega x}$ $f'(x) = \omega e^{\omega x} \Rightarrow f''(x) = \omega^2 e^{\omega x}$ $f''(x) = \omega^2 f(x)$ donc la fonction f est solution de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$.</p> <p>$g(x) = e^{-\omega x} \Rightarrow g'(x) = -\omega e^{-\omega x}$ $g'(x) = -\omega e^{-\omega x} \Rightarrow$ $g''(x) = \omega^2 e^{-\omega x}$ $g''(x) = \omega^2 g(x)$ donc la fonction g est solution de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$.</p> <p>b. $H(x) = af(x) + bg(x)$ $H''(x) = af''(x) + bg''(x)$ $H''(x) = a\omega^2 f(x) + b\omega^2 g(x)$ $H''(x) = \omega^2 [af(x) + bg(x)]$ $H''(x) = \omega^2 H(x)$ H est solution de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$.</p>	<p>III. <u>EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $f'' = mf$ (m réel)</u></p> <p>1. <u>Equations différentielles du type $f'' = 0$</u></p> <p>Les solutions de l'équation différentielle $f'' = 0$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.</p> <p>2. <u>Equations différentielles du type $f'' = \omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)</u></p> <p>Soit ω un nombre réel non nul.</p> <p>Les solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$</p> <p>3. <u>Equations différentielles du type $f'' = -\omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$)</u></p>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		<p>et h définies sur \mathbb{R} par $p(x) = \sin(\omega x)$ et $h(x) = \cos(\omega x)$ sont solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$.</p> <p>b. Démontre que pour tout couple $(a; b)$ élément de \mathbb{R}^2, la fonction G définie par $G(x) = ap(x) + bh(x)$ est solution de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$.</p> <p>c. Déduis en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$.</p>	<p>c. On déduit de ce qui précède que les solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$ sont les fonctions $x \mapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.</p> <p>3.a. $f'' = -\omega^2 f$ $p(x) = \sin(\omega x) \Rightarrow$ $f'(x) = \omega \cos(\omega x)$ $f'(x) = \omega \cos(\omega x)$ $\Rightarrow f''(x) = -\omega^2 \sin(\omega x)$ $p''(x) = -\omega^2 p(x)$ donc la fonction p est solution de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$.</p> <p>$h(x) = \cos(\omega x)$ $\Rightarrow h'(x) = -\omega \sin(\omega x)$ $h'(x) = -\omega \sin(\omega x) \Rightarrow$ $h''(x) = -\omega^2 \cos(\omega x)$ $h''(x) = -\omega^2 h(x)$ donc la fonction h est solution de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$.</p> <p>b. $G(x) = ap(x) + bh(x)$ $G''(x) = ap''(x) + bh''(x)$ $G''(x) = -a\omega^2 p(x) - b\omega^2 h(x)$ $G''(x) = -\omega^2 [ap(x) + bh(x)]$ $G''(x) = -\omega^2 G(x)$ G est solution de l'équation</p>	<p>Soit ω un nombre réel non nul. Les solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.</p>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
<p><i>Evaluation</i> 10 min</p>	<p>-Travail individuel</p>	<p><u>EXERCICE DE FIXATION</u> Résous dans \mathbb{R} chacune des équations différentielles suivantes :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $y'' = 0$ 2. $y'' = y$ 3. $y'' - 49y = 0$ 4. $y'' + 36y = 0$ 5. $y'' = -16y$ 	<p>différentielle $f'' = -\omega^2 f$. c. On déduit de ce qui précède que les solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$ sont les fonctions $x \mapsto a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.</p> <p><u>REPONSES ATTENDUES</u></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $y'' = 0$ Les solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. 2. $y'' = y$ Les solutions de l'équation différentielle $y'' = 1^2 y$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = ae^x + be^{-x}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ 3. $y'' - 49y = 0$ Les solutions de l'équation différentielle $y'' = 7^2 y$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = ae^{7x} + be^{-7x}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ 4. $y'' + 36y = 0$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = -6^2 f$ sont les 	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
	-Travail individuel	<p style="text-align: center;"><u>EXERCICE DE MAISON</u></p> <p>Dans chacun des cas suivants résous l'équation différentielle (E).</p> <p>a. $y'' + y = 0$ b. $y'' - 3y = 0$ c. $y'' - 4y = 0$ d. $4y'' - y = 0$ e. $y'' - 9y = 0$ f. $4y'' - 49y = 0$ g. $4y'' + y = 0$ h. $16y'' - 9y = 0$ i. $16y'' + 9y = 0$ j. $4y'' + 49y = 0$</p>	<p>fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = a \sin(6x) + b \cos(6x)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.</p> <p>5. $y'' = -16y$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = -4^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = a \sin(4x) + b \cos(4x)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.</p>	

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : T^{LE} D

COMPETENCE1

THEME2 : FONCTIONS

LEÇON12 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

SEANCE : 3/3

DUREE DE LA SEANCE : 55 minutes

MATERIELS DIDACTIQUES : Manuel

HABILETES	CONTENUS
Déterminer	- la solution d'une équation différentielle du type $f'' = mf$ (m réel) satisfaisant à des conditions initiales données.

PLAN DE LA SEANCE

4. Equations différentielles du type $f'' = mf$ vérifiant deux conditions

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
<p>15 min</p> <p><i>Développement</i></p> <p>25 min</p>	<p>-Travail en groupe</p> <p>-Travail en groupes</p>	<p>Correction de l'exercice de maison</p> <p style="text-align: center;"><u>ACTIVITE</u></p> <p>Soient m un nombre réel et f une fonction deux fois dérivable. Dans chacun des cas suivants, démontre que quels que soient les réels x_0, y_0 et z_0, l'équation différentielle $f'' = mf$ admet une unique solution g telle que : $g(x_0) = y_0$ et $g'(x_0) = z_0$.</p> <p>a. Cas1 : $m = 0$</p> <p>b. Cas2 : $m = \omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$</p> <p>c. Cas3 : $m = \omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$</p>	<p style="text-align: center;"><u>REPONSES ATTENDUES</u></p> <p>a. Cas1 : $m = 0$ $f'' = 0$ Les solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ Soient g_1 et g_2 deux solutions de l'équation différentielle $f'' = 0$ telles que $g_1(x) = a_1 + b_1x$ et $g_2(x) = a_2 + b_2x$. $g_1(x_0) = y_0$ et $g_1'(x_0) = z_0$. $g_2(x_0) = y_0$ et $g_2'(x_0) = z_0$. $g_1(x_0) = g_2(x_0)$ et $g_1'(x_0) = g_2'(x_0)$ $a_1 + b_1x_0 = a_2 + b_2x_0$ et $a_1 = a_2$ D'où $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$ Conclusion : $g_1(x) = g_2(x)$.</p> <p>b. Cas2 : $m = \omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$ $f'' = \omega^2 f$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.</p>	<p>4. <u>Equations différentielles du type $f'' = mf$ vérifiant deux conditions</u></p> <p>Quels que soient les nombres réels x_0, y_0 et z_0, l'équation différentielle $f'' = mf, m \in \mathbb{R}$ admet une unique solution g telle que : $g(x_0) = y_0$ et $g'(x_0) = z_0$.</p>

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			<p>Soient g_1 et g_2 deux solutions de l'équation différentielle $f'' = \omega^2 f$ telles que :</p> $g_1(x) = a_1 e^{\omega x} + b_1 e^{-\omega x} \text{ et}$ $g_2(x) = a_2 e^{\omega x} + b_2 e^{-\omega x}$ $\begin{cases} g_1(x_0) = y_0 \text{ et } g_1'(x_0) = z_0 \\ g_2(x_0) = y_0 \text{ et } g_2'(x_0) = z_0 \end{cases}$ $\begin{cases} g_1(x_0) = g_2(x_0) \\ g_1'(x_0) = g_2'(x_0) \end{cases}$ $a_1 e^{\omega x_0} + b_1 e^{-\omega x_0} =$ $a_2 e^{\omega x_0} + b_2 e^{-\omega x_0}$ <p>et</p> $a_1 \omega e^{\omega x} - b_1 \omega e^{-\omega x} =$ $a_2 \omega e^{\omega x} - b_2 \omega e^{-\omega x}$ $(a_1 - a_2) e^{\omega x_0} +$ $(b_1 - b_2) e^{-\omega x_0} = 0$ <p>et</p> $(a_1 - a_2) \omega e^{\omega x_0} +$ $(b_2 - b_1) \omega e^{-\omega x_0} = 0$ $(a_1 - a_2) = 0 \text{ et}$ $(b_1 - b_2) = 0$ $a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2$ <p>Conclusion : $g_1(x) = g_2(x)$.</p> <p>c. Cas3 : $m = -\omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$</p> $f'' = -\omega^2 f$ <p>Les solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par :</p> $f_{a,b}(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)$	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
<i>Evaluation</i>	-Travail individuel	<p align="center"><u>EXERCICE DE FIXATION</u></p> <p>Intégrer chacune des équations différentielles suivantes puis déduire celle qui vérifie la condition initiale indiquée.</p>	<p>où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soient g_1 et g_2 deux solutions de l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$ telles que $g_1(x) = a_1 \sin(\omega x) + b_1 \cos(\omega x)$ $g_2(x) = a_2 \sin(\omega x) + b_2 \cos(\omega x)$ $\begin{cases} g_1(x_0) = y_0 \text{ et } g_1'(x_0) = z_0 \\ g_2(x_0) = y_0 \text{ et } g_2'(x_0) = z_0 \end{cases}$ $\begin{cases} g_1(x_0) = g_2(x_0) \\ g_1'(x_0) = g_2'(x_0) \end{cases}$ $a_1 \sin(\omega x_0) + b_1 \cos(\omega x_0) = a_2 \sin(\omega x_0) + b_2 \cos(\omega x_0)$ et $a_1 \omega \cos(\omega x_0) - b_1 \omega \sin(\omega x_0) = a_2 \omega \cos(\omega x_0) - b_2 \omega \sin(\omega x_0)$ $(a_1 - a_2) \sin(\omega x_0) + (b_1 - b_2) \cos(\omega x_0) = 0$ et $(a_1 - a_2) \omega \cos(\omega x_0) + (b_2 - b_1) \omega \sin(\omega x_0) = 0$ $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$ Conclusion : $g_1(x) = g_2(x)$.</p> <p align="center"><u>REPONSES ATTENDUES</u></p> <p>1. $y'' = 4y \Leftrightarrow y'' = 2^2 y$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = 2^2 f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par :</p>	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
		<p>1. $y'' = 4y$; $y(0) = 2$ et $y'(0) = -10$.</p> <p>2. $y'' + 36y = 0$; $y(0) = 1$ et $y'(0) = 6$.</p> <p>3. $y'' = 0$; $y(1) = 2$ et $y'(1) = 3$.</p>	<p>$f_{a,b}(x) = ae^{4x} + be^{-4x}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.</p> $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a - 4b = -10 \end{cases}$ $\begin{cases} 4a + 4b = 8 \\ 4a - 4b = -10 \end{cases}$ $8a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$ $-8b = -18 \Leftrightarrow b = \frac{9}{4}$ $f(x) = -\frac{1}{4}e^{4x} + \frac{9}{4}e^{-4x}$ <p>2. $y'' + 36y = 0 \Leftrightarrow y'' = -6^2y$ Les solutions de l'équation différentielle $f'' = -6^2f$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = a \sin(6x) + b \cos(6x)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.</p> $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 6a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ $f(x) = \sin(6x) + \cos(6x)$ <p>3. $y'' = 0$ Les solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions $f_{a,b}$ définies sur \mathbb{R} par : $f_{a,b}(x) = ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.</p>	

MOMENTS DIDACTIQUES ET DUREES	STRATEGIES PEDAGOGIQUES	ACTIVITES DU PROFESSEUR	ACTIVITES DES APPRENANTS	TRACE ECRITE
			$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$ $a = 3 \text{ et } b = -1$ $f(x) = 3x - 1$	

Tableau récapitulatif de résolution de quelques types d'équations différentielles

Types d'équations différentielles	Solutions générales sur \mathbb{R}
$y' = a, a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + k, k \in \mathbb{R}$
$y' = ay, a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ke^{ax}, k \in \mathbb{R}$
$y' = ay + b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}, k \in \mathbb{R}$
$y'' = 0$	$x \mapsto ax + b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
$y'' = w^2y, w \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto ae^{wx} + be^{-wx}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
$y'' = -w^2y, w \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto a \cos(wx) + b \sin(wx), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

BIBLIOGRAPHIE

Programmes éducatifs et guides d'exécution Mathématiques T^{LE}D

Progressions annuelles

Mon livre de mathématiques T^{LE}D Collection PYRAMIDE

Mon livre de mathématiques T^{LE}D Collection CIAM/EDICEF

Les cahiers de la réussite T^{LE} D Vallesse

Mon cahier d'habiletés Mathématiques T^{LE} D JD Editions

WWW.monecoleàlamaison.ci

<https://physiques-et-maths.fr>