Leçon 3

FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

Déroulement de la situation d'apprentissage

- Où se déroule la situation ? : Dans un lycée.
- Qu'a dit un ingénieur dans son intervention ? :« les câbles…fonction exponentielle ».
- Que font les élèves de terminale A qui sont impressionnés par les informations données par cet ingénieur ? : ils décident d'étudier la fonction exponentielle népérienne.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Définition et propriétés de la fonction exponentielle népérienne

1.1. Définition

Activité 1

1.

x	-7	-6,1	-2,3	-2	0	1	$\sqrt{2}$	1,5	2	2,7	3
$exp\ x$	0,000 9	0,0022	0,1002	0,1353	1	2,7183	4,1132	4,4817	7,3891	14,8797	20,0855
$ln(exp\ x)$	-7	-6,1	-2,3	-2	0	1	$\sqrt{2}$	1,5	2	2,7	3
$exp(lnx)$	-7	-6,1	-2,3	-2	0	1	$\sqrt{2}$	1,5	2	2,7	3

2.a) $\forall\ x \in\ \mathbb{R}, \ln(expx) = xet\ \forall\ x \in \mathbb{R}, \exp(lnx) = x.$

b) La fonction exponentielle népérienne est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

Exercices de fixation

Exercice 1-1-1

AFFIRMATIONS	REPONSES

L'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto e^x$ est $\mathbb{R}$	VRAI
Le nombre e^{-8} est négatif	FAUX
Le nombre $e^{\ln 19}$ est égal à ln 19	FAUX
Le nombre $\ln e^{37}$ est égal à 37	VRAI
Le nombre e^0 est égal à 0	FAUX

Exercice 1-1-2

b) E= $\ln(e^3)$= 3, F= $\ln(e^{-11})$= -11, G= $e^{\ln 27} = 27$, H=$e^{-\ln 3}$= $e^{ln\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

Exercice 1-1-3

a) $ln(a) = 5$ équivaut à : $a = e^5$
b) $ln(a) = -5{,}3$ équivaut à : $a = e^{-5{,}3}$
c) $ln(a) = 0$ équivaut à : $a = e^0 = 1$
d) $e^a = 15$ équivaut à $a = \ln(15)$
e) $e^a = \frac{3}{4}$équivaut à $a = \ln(\frac{3}{4})$
f) $e^a = 1$ équivaut à $a = \ln(1) = 0$

1.2. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne

1.

a	b	$e^a \times e^b$	e^{a+b}	e^{a-b}	$\frac{e^a}{e^b}$
3	2	148,41	148,41	2,718	2,718
4,8	5	18033,74	18033,74	0,8187	0,8187
-7	6	0,368	0,368	0,000002	0,000002
11	0,6	109097,7	109097,7	32859,62	32859,62
-8	-12	0,000000002	0,000000002	54,5981	54,5981

2. a)

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

b)

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

Exercices de fixation

Exercice 1-2-1

1. $e^5 = e^3 \times e^2$ 2. $e^7 = e^4 \times e^3$ 3. $e^{2x} = e^x \times e^x$ 4.$e^{x+2} = e^x \times e^2$
5. $e^5 = \frac{e^3}{e^{-2}}$ 6. $e^{x-2} = \frac{e^x}{e^2}$ 7.$e^4 = \frac{e^8}{e^4}$ 8. $e \quad = \frac{e^7}{e^6}$

Exercice 1-2-2

$A = e^3 \times e^5 = e^{3+5} = e^8$; $B = \frac{e^{10}}{e^6} = e^{10-6} = e^4$;
$C = e^4 \times e^{-4} = e^{4+(-4)} = e^{4-4} = e^0 = 1$;
$D = e \times \frac{1}{e^{-5}} = e \times e^5 = e^{1+5} = e^6$;
$E = (e^{-2})^3 = e^{-2X3} = e^{-6}$; $F = (e^4)^2 = e^{4X2} = e^8$

Exercice 1-2-3

a) $e^{-3x+1} \times (e^x)^3 = e^{-3x+1} \times e^{3x} = e^{-3x+1+3x} = e^1 = e;$

b) $(e^x)^3 \times e^{-3x} = e^{3x+(-3x)} = e^{3x-3x} = e^0 = 1$;

c) $(e^x - 2)(e^x + 2) = (e^x)^2 - (2)^2 = e^{2x} - 4$

Activité 2 Étude et représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne

2.1. Dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$

Activité 2

1. La dérivée de $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{ln(u(x))}$ estla fonction$\boldsymbol{x} \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

2. $a)$ $f'(x) = 1$

 b) la dérivée de la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto x$ est $x \longmapsto 1$.

 c) . La dérivée de $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{ln(e^x)}$ estla fonction$\boldsymbol{x} \longmapsto \frac{(e^x)'}{e^x}$. De plus comme la dérivée de la fonction$x \longmapsto ln(e^x)$ est la fonction $x \longmapsto 1$ donc on a $(e^x)' = e^x$

Exercices de fixation

Exercice

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations ci-dessous :

N°	Affirmations	Réponses
1	La dérivée de la fonction $f: x \mapsto -e^x$ est la fonction $f': x \mapsto e^x$.	FAUX
2	La dérivée de la fonction $f: x \mapsto -e^x$est la fonction $f': x \mapsto -e^x$.	VRAI
3	La dérivée de la fonction $f: x \mapsto -5e^x$est la fonction$f': x \mapsto 5e^x$	FAUX
4	La dérivée de la fonction $f: x \mapsto \frac{e^x}{3}$est la fonction $f': x \mapsto \frac{e^x}{3}$.	VRAI

2.2. Sens de variation de la fonction $x \mapsto e^x$

Activité

1. $g'(x) = e^x$
2. La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
3.

x	-∞ + ∞
$g'(x)$	+
$g(x)$	$\nearrow$

Exercices de fixation

Exercice 2-2-1

1-F 2-V 3-F

Exercice 2-2-2

a) $f'(x) = -e^x$. $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$ donc$f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$b)$$g'(x) = e^x$. $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc$g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $h'(x) = -e^x$. $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $h'(x) < 0$ donc$h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2.3. Conséquence de la variation de la fonction $x \mapsto e^x$

Justification d'une inégalité avec la fonction exponentielle

Soient a et b deux nombres réels.

On rappelle que la fonction exponentielle définie par f(x) = e^x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puisque f est strictement croissante, elle conserve l'ordre :

- Si a ≤ b, alors en appliquant la fonction exponentielle aux deux membres, on obtient $e^a \leq e^b$.
- Réciproquement, si $e^a \leq e^b$, comme la fonction exponentielle est strictement croissante (et donc injective), on en déduit nécessairement que a ≤ b.

Ainsi, on a l'équivalence suivante :

$a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$.

Exercices de fixation

Exercice 2-3-1

a) $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 2[$ b) $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 1[$ c) $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; \frac{-5}{2}\right]$

Exercice 2-3-2

a) $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; ln2[$ b) $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{ln0{,}5-1}{3}; +\infty\right[$ c) $S_{\mathbb{R}} =]2 - ln5; +\infty[$

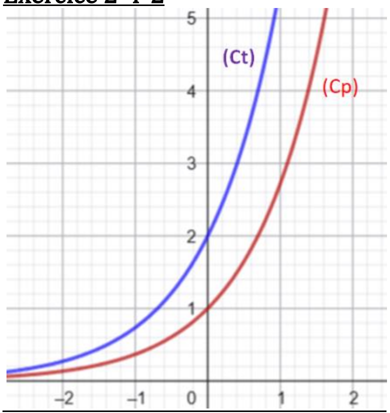
2.4. Représentation graphique de la fonction $x \mapsto e^x$

Exercices de fixation

Exercice 2-4-1

(C_k)

Exercice 2-4-2



Activité 3 Dérivée et sens de variation d'une fonction comportant la fonction exponentielle

3.1. Dérivée et sens de variation des fonctions $x \mapsto ax + b + e^x$ et $x \mapsto ax + b - e^x$

Activité

3-1- Dérivée et sens de variation des fonctions $x \longmapsto ax + b + e^x$ et $x \longmapsto ax + b - e^x$

1- $f'(x) = a + e^x$ et $g'(x) = a - e^x$

2. a) $h'(x) = 2 + e^x$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 –a) $k'(x) = 2 - e^x$

b) $\forall x \in]-\infty; ln2[, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur$]-\infty; ln2[$

$\forall x \in]ln2; +\infty[, h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur$]ln2; +\infty[$.

Exercices de fixation

Exercice 3-1-1

$x \longmapsto 2 - 5x + e^x$	•	•	$x \longmapsto 3 + e^x$
$x \longmapsto -x - e^x$	•	•	$x \longmapsto \frac{1}{2} - e^x$
$x \longmapsto 5x + 1 - e^x$	•	•	$x \longmapsto 2 + e^x$
$x \longmapsto 3x - 5 + e^x$	•	•	$x \longmapsto -1 - e^x$
$x \longmapsto 2x - 3 + e^x$	•	•	$x \longmapsto 5 - e^x$
$x \longmapsto \frac{1}{2}x + 100 - e^x$	•	•	$x \longmapsto -5 + e^x$

Exercice 3-1-2

a) $f'(x) = 7 + e^x$ b) $f'(x) = -0{,}5 - e^x$ c) $f'(x) = 9 - e^x$ d) $f'(x) = -\frac{5}{2} + e^x$

3.2. Dérivée et sens de variation des fonctions $x \mapsto (ax+b)e^x$

1- $f'(x) = (ax + a + b)e^x$.

2– a) $g'(x) = (2x - 3)e^x$

b) $\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$

$\forall\, x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

Exercices de fixation

Exercice 3-2-1

1-b 2-a 3-c

Exercice 3-2-2

a) $f'(x) = (7x + 11)e^x$ b) $f'(x) = (-x - 4)e^x$

c) $f'(x) = (9x + 4)e^x d)$ $f'(x) = (-\frac{5}{2}x + \frac{15}{2})e^x$

Exercice 3-2-3

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x + 1)e^x$.

$\forall\, x \in]-\infty; -1[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$

$\forall\, x \in]-1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x + 3)e^x$.

$\forall\, x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$

$\forall\, x \in \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-3x + 2)e^x$.

$\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$

$\forall\, x \in \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$

d) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-x - 3)e^x$.

$\forall\, x \in]-\infty; -3[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -3[$

$\forall\, x \in]-3; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-3; +\infty[$

3.3. Dérivée et sens de variation de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{ax+b}$

1- $f'(x) = \frac{(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^2}$.

2– a) $g'(x) = \frac{(x-4)e^x}{(x-3)^2}$

b) $\forall\, x \in]-\infty; 3[\cup]3; 4[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$ et sur $]3; 4[$

$\forall\, x \in]4; +\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]4; +\infty[$

Exercices de fixation

Exercice 3-3-1

1-F 2-V 3-F

Exercice 3-3-2

a) $f'(x) = \frac{(x+3)e^x}{(x+4)^2}$ b) $f'(x) = \frac{(-3x+4)e^x}{(-3x+1)^2}$

Exercice 3-3-3

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-1\}, f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

$\forall\, x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; 0[$

$\forall\, x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{4}\right\}, f'(x) = \frac{(4x-9)e^x}{(4x-5)^2}$

$\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{5}{4}\right[\cup \left]\frac{5}{4}; \frac{9}{4}\right[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{5}{4}\right[$ et sur $\left]\frac{5}{4}; \frac{9}{4}\right[$

$\forall\, x \in \left]\frac{9}{4}; +\infty\right[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]\frac{9}{4}; +\infty\right[$

3.4. Dérivée d'une fonction du type : $x \mapsto e^{ax^2+bx+c}$ où $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$

1- $f'(x) = 2ax + b$

2- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, la dérivée de la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est la fonction $x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$ donc

$$\left(e^{ax^2+bx+c}\right)' = (2ax+b)e^{ax^2+bx+c}$$

3-a) $g'(x) = (2x-1)e^{x^2-x+1}$

b) $\forall\, x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Exercices de fixation

<u>Exercice 3-4-1</u>

1-F 2-V 3-V 4-F

<u>Exercice 3-4-2</u>

a) $f'(x) = (-10x+1)e^{-5x^2+x-4}$ b) $f'(x) = (-2x+\frac{1}{2})e^{-x^2+\frac{1}{2}x-7}$

c) $f'(x) = (6x+3)e^{3x^2+3x}$

<u>Exercice 3-4-3</u>

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = (4x+8)e^{2x^2+8x+3}$.

$\forall\, x \in]-\infty;-2[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;-2[$

$\forall\, x \in]-2;+\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-2x+5)e^{-x^2+5x-4}$.

$\forall\, x \in \left]-\infty;\frac{5}{2}\right[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$

$\forall\, x \in \left]\frac{5}{2};+\infty\right[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

Activité 4 Limites

4.1. Limites en l'infini de la fonction : $x \mapsto e^x$.

4-1- Limites en l'infini de la fonction $x \longmapsto e^x$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Exercices de fixation

<u>Exercice 4-1-1</u>

a) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(2x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x) = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+e^x) = +\infty$

b) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x+3) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x) = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3+e^x) = +\infty$

c) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(-x+4) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-e^x) = -\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+4-e^x) = -\infty$

d) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x) = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(7x-9-e^x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(-7x-9) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x) = 0 \end{cases}$

<u>Exercice 4-1-2</u>

a) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(2x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x) = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+e^x) = -\infty$

b) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(x+3) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x) = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3+e^x) = -\infty$

c) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x) = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+4-e^x) = +\infty$

d) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x) = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+1-e^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+1-e^x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-e^x) = -\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x) = -\infty \end{cases}$

4.2. Limite en $-\infty$ de la fonction : $x \mapsto xe^x$

1- $f(x) = \frac{-\ln(e^{-x})}{e^{-x}} = -\ln(e^{-x}) \times \frac{1}{e^{-x}} = xlne \times e^x = xe^x$

2- a) Posons $X = e^{-x}$. Si $x \to -\infty$ alors $X \to +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\ln(e^{-x})}{e^{-x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{-lnX}{X} = 0$

b) Comme $xe^x = \frac{-\ln(e^{-x})}{e^{-x}}$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Exercices de fixation

Exercice 4-2-1

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x\,e^x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(4+xe^x) = 4$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(4) = 4 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x) = 0 \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(4xe^x - 1) = -1$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(4xe^x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-1) = -1 \end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{11}{7} x\,e^x = 0$

Exercice 4-2-2

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+5)\,e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}(2xe^x + 5e^x) = 0 car \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x) = 0 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x+3)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}(5xe^x + 3e^x) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(5xe^x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(3e^x) = 0 \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x+1)\,e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}(-3xe^x + e^x) = 0$car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(-3xe^x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x) = 0 \end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x-11)\,e^x + x = \lim\limits_{x\to-\infty}(4xe^x - 11e^x) + x = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(4xe^x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-11e^x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x) = -\infty \end{cases}$

4.3. limite en $+\infty$ de la fonction : $x \mapsto \frac{e^x}{x}$

1- On sait que $x = e^{lnx}$ et $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ d'où $\frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{e^{lnx}} = e^{x-lnx}$.

2- Posons $X = x - lnx$. Si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-lnx} = \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$$

Exercices de fixation

Exercice 4-3-1

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty\end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+3+e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(-1+\frac{3}{x}+\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{x}+\frac{e^x}{x}\right)=+\infty\end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(-3+\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{e^x}{x}\right)=+\infty\end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty\end{cases}$

Exercice 4-3-2

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x(2+\frac{1}{x})}\right)=\frac{e^x}{x}\times\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=+\infty$car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{2}\end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{-2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x(-2+\frac{1}{x})}\right)=\frac{e^x}{x}\times\frac{1}{-2+\frac{1}{x}}=-\infty$car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\right)=-\frac{1}{2}\end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{5x+4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\times\frac{1}{5+\frac{4}{x}}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5+\frac{4}{x}}\right)=\frac{1}{5}$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{5x+4}\right)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{-7x-11}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\times\frac{1}{-7-\frac{11}{x}}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{-7-\frac{11}{x}}\right)=-\frac{1}{7}$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{-7x-11}\right)=-\infty$

Activité 5 Équations et inéquations faisant intervenir la fonction exponentielle

5.1. Équations et inéquations comportant la fonction exponentielle

Activité

5-1- Equations et inéquations comportant la fonction exponentielle

1-a) $S_{\mathbb{R}}=\{c\}$ b) $S_{\mathbb{R}}=\{lnc\}$

2-a) $S_{\mathbb{R}}=]-\infty;c[$ b) $S_{\mathbb{R}}=]-\infty;lnc[$ c) $S_{\mathbb{R}}=]lnc;+\infty[$

Exercices de fixation

Exercice 5-1-1

1-V 2-F 3-F

Exercice 5-1-2

1-a) $S_{\mathbb{R}}=\{3\}$ b) $S_{\mathbb{R}}=\{-3;1\}$ c) $S_{\mathbb{R}}=\{8\}$ d) $S_{\mathbb{R}}=\{-1\}$ e) $S_{\mathbb{R}}=\{2\}$ f) $S_{\mathbb{R}}=\{1\}$.

2-a) $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$ b) $S_{\mathbb{R}}=\{\frac{4}{7}\}$ c) $S_{\mathbb{R}}=\{1;2\}$d) $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$e) $S_{\mathbb{R}}=\{\frac{ln3-1}{2}\}$

Exercice 5-1-3

1-V 2-F 3-F 4-F 5-V 6-F

Exercice 5-1-4

a) $S_{\mathbb{R}}=]ln13;+\infty[$ b) $S_{\mathbb{R}}=[-ln2;+\infty[$ c) $S_{\mathbb{R}}=]-\infty;0[$ d) $S_{\mathbb{R}}=[2;+\infty[$

e) $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{-1}{2}; +\infty\right[$

5.2. Équations du type $ae^{2x} + be^{x} + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels tels que $a \neq 0$

1- On sait que $e^{2x} = (e^x)^2$ donc l'équation (E) est équivalente à l'équation
(E') :$(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$.
2- a) Posons $X = e^x$ donc (E') est équivalente à l'équation (E'') : : $X^2 - 3X + 2 = 0$.
  b) $S_{\mathbb{R}} = \{1; 2\}$
  c) $S_{\mathbb{R}} = \{0; ln2\}$

Exercices de fixation

<u>Exercice 5-2-1</u>

a) $S_{\mathbb{R}} = \left\{\ln(\frac{12}{5})\right\}$ b) $S_{\mathbb{R}} = \{ln3; ln5\}$c) $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$ d) $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

<u>Exercice 5-2-2</u>

a) $S_{\mathbb{R}} = \left[\ln(\frac{12}{5}); +\infty\right[$ b) $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; ln3[\cup]ln5; +\infty[$ c) $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
d) $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

Exercices de renforcement

1 a) $\frac{e^{1+a}}{e^{a+2}} = e^{-1}$ b) $\frac{e^{2a+a} - e^a}{e^{2a+a} + e^a} = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1}$ c) $(\frac{e}{e^{-a}})^4 = e^{4+4a}$

2 a) $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ b) $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-3}{2}\right\}$ c) $S_{\mathbb{R}} = \{-2; 2\}$ d) $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

3 a)$S_{\mathbb{R}} = \{0\}$ b) $S_{\mathbb{R}} = \{-ln2\}$

4

1) $S_{\mathbb{R}} =]0; +\infty[$ 2) $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right]$
3) Revoir l'énoncé. Prendre plutôt $e^{5-x} > e^{2x-4}$ donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 3[$ 4) $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

5 $S_{\mathbb{R}} =]-1; 1[$

6 a) $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$ b) $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 2]$ c) $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 0]$ d)$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -1[$

7 a) $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$ b) $S_{\mathbb{R}} = \{-ln3\}$ c) b) $S_{\mathbb{R}} = \{-ln3\}$

9

a) $S_{\mathbb{R}} = \left]\ln(\frac{5}{3}); +\infty\right[$b) $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 0]$

<u>Exercice 9</u>

a) $\forall\, x \in]-\infty; 0[, 1 - e^{2x} > 0\ et\ \forall\, x \in]0; +\infty[, 1 - e^{2x} < 0$.
$b)\forall\, x \in]-\infty; -ln2[, e^{2x} - \frac{1}{4} < 0\ et\ \forall\, x \in]-ln2; +\infty[, e^{2x} - \frac{1}{4} > 0$.
c) $\forall\, x \in]-\infty; ln16[, e^{2x} - 16e^x < 0\ et\ \forall\, x \in]ln16; +\infty[, e^{2x} - 16e^x > 0$

$$d)\ \forall\, x \in]-\infty; 1[, 1 - \frac{e^2}{e^{2x}} < 0\ et\ \forall\, x \in]1; +\infty[, 1 - \frac{e^2}{e^{2x}} > 0$$

10

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\ et\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty\, et\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
c) $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty\, et\ \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

11

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\ et\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0\, et \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
c) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0\, et \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

12

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \;\; et \;\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0\, et \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
c) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0\, et \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

13

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \;\; et \;\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0\, et \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$
c) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty\, et \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

14

a) $f'(x) = -5 + e^x$

$$b) g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(x-2)^2}$$

c) $h'(x) = (4x-4)e^{2x^2-4x+1}$
d) $i'(x) = (-2x+1)e^x$

15

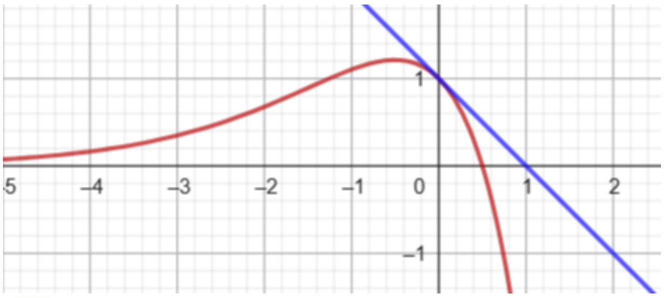
1- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
2- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Interprétation : la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) en $-\infty$.
3-a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2e^x + (-2x+1)e^x = (-2-2x+1)e^x = (-2x-1)e^x$.
D'où $f'(x) = -(2x+1)e^x$.
b) $f'(x) > 0$ équivaut à$-(2x+1) > 0$.
$f'(x) > 0$ équivaut à$(2x+1) < 0$.
$f'(x) > 0$ équivaut à$x < -\frac{1}{2}$.
D'où $\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[, f'(x) > 0$
c) $f'(x) < 0$ équivaut à$-(2x+1) < 0$.
$f'(x) < 0$ équivaut à$(2x+1) > 0$.
$f'(x) < 0$ équivaut à$x > -\frac{1}{2}$.
D'où $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[, f'(x) < 0$.
d) De ce qui précède, f est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
4- $(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$(T): y = -x + 1$$

5-a)

x	-5	-3	-1	-0,5	0	0,5	1
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,1	0,3	1,1	1,2	1	0	-2,7

b) Construction de (C) et (T)



16

1- On a : $2 \times (-\frac{5}{2})^2 - 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 20 = \frac{25}{2} + \frac{15}{2} - 20 = 20 - 20 = 0.$

De même on a : $2 \times 4^2 - 3 \times 4 - 20 = 32 - 12 - 20 = 20 - 20 = 0.$

D'où $-\frac{5}{2}$ *et* 4 sont les solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 3x - 20 = 0.$

2- $S_{\mathbb{R}} = \{ln4\}$

3- $S_{\mathbb{R}} = \left\{e^4; e^{-\frac{5}{2}}\right\}$

17

1-c 2-f 3-e 4-g 5-b 6-a 7-d(la réponse dans l'énoncé doit être $x + ln3$)

18

a) $\forall x \in]-\infty; 0[, 1 - e^x > 0$ *et* $\forall x \in]0; +\infty[, 1 - e^x < 0$.

$b)$ $\forall x \in]-\infty; 0[, e^{2x} - 1 < 0$ *et* $\forall x \in]0; +\infty[, e^{2x} - 1 > 0$.

c) $\forall x \in]-\infty; 1[, e^{2x} - e^{x+1} < 0$ *et* $\forall x \in]1; +\infty[, e^{2x} - e^{x+1} > 0.$

$d)$ $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, e^{x^2} - e^x > 0$ *et* $\forall x \in]0; 1[, e^{x^2} - e^x < 0.$

19

1- $\forall x < 0$, on a: $-x > 0$.

$-x > 0$ équivaut à: $e^{-x} > 1$

$-x > 0$ équivaut à: $-e^{-x} < -1$

$-x > 0$ équivaut à: $1 - e^{-x} < 0$

D'où pour tout nombre réel $x < 0$, on a : $1 - e^{-x} < 0$.

2- $\forall x \geq 0$, on a: $-x \leq 0$.

$-x \leq 0$ équivaut à: $e^{-x} \leq 1$

$-x \leq 0$ équivaut à: $-e^{-x} \geq -1$

$-x \leq 0$ équivaut à: $1 - e^{-x} \geq 0$

De plus $\forall x \geq 0, e^{-x} > 0$.

$e^{-x} > 0$ équivaut à : $-e^{-x} < 0$

$e^{-x} > 0$ équivaut à : $1-e^{-x} < 1$.

De ce qui précède, $\forall x \geq 0$, on a:$0 \leq 1 - e^{-x} < 1$

20

1-d 2-c 3-b 4-d

21

1-b 2-a 3-c 4-d

22

1- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2-a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3 + e^x = x\left(\frac{-2x}{x} + \frac{3}{x} + \frac{e^x}{x}\right) = x(-2 + \frac{3}{x} + \frac{e^x}{x})$.

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3-a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2 + e^x$.

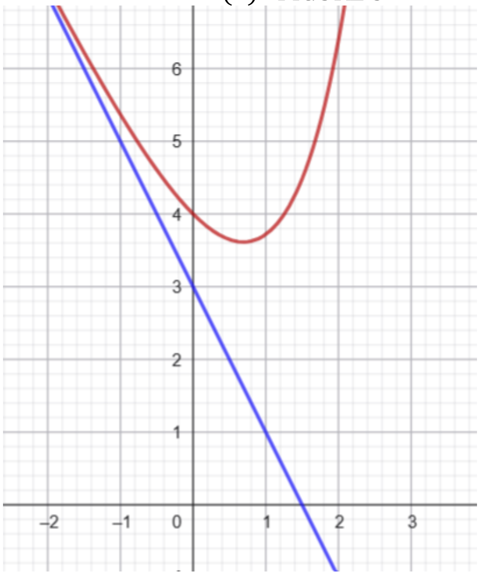
$\forall x \in]ln2; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]ln2; +\infty[$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $ln2$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $+$
$f(x)$	$+\infty$ $+\infty$ $\qquad$ $-2ln2 + 5$

4- $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-2x+3))=0$ donc la droite (D) d'équation $y=-2x+3$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

5- Construction de (C) : **FIGURE 3**



23

1- $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

2– $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$; $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}f(x)=-\infty$; $\lim_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

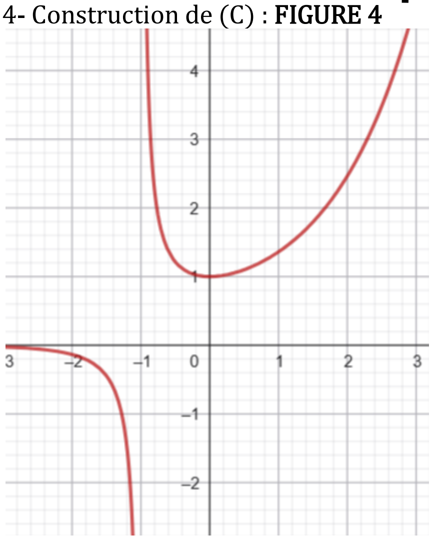
3- a) $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$

b) $\forall x\in]-\infty;-1[\cup]-1;0[, f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ *et sur* $]-1;0[$.
$\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

c) Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$--+$		0	
$f(x)$	$0+\infty+\infty$ $-\infty$	4		

4- Construction de (C) : **FIGURE 4**



24

1- $D_f = \mathbb{R}$

2– $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3-a) $f'(x) = (2x + 7)e^{x}$

b) $\forall x \in \left]-\infty ; -\frac{7}{2}\right[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; -\frac{7}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]-\frac{7}{2} ; +\infty\right[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\frac{7}{2} ; +\infty\right[$.

c) Tableau de variation

x	$-\infty$	$\frac{-7}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	0 $+\infty$	$-2e^{-\frac{7}{2}}$	

4- Construction de (C) : **FIGURE 5**

25

1- $D_f = \mathbb{R}$

2– $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3-a) $f'(x) = (2x - 1)e^{-x^2+x+2}$

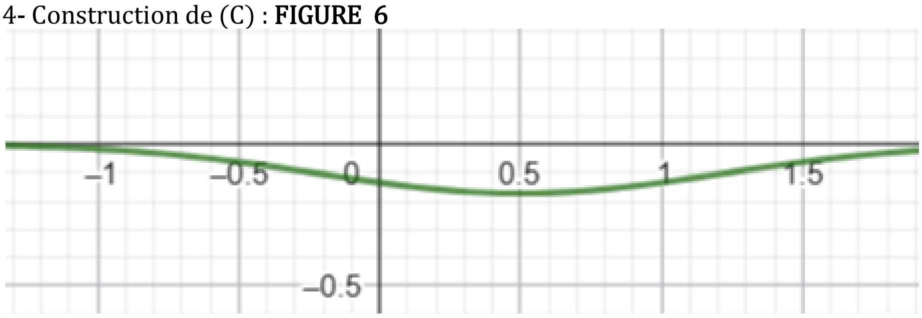
b) $\forall x \in \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

c) Tableau de variation

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	0	$-e^{-\frac{7}{4}}$	0

4- Construction de (C) : **FIGURE 6**



26

1. Simplifions chacun des nombres suivants :

$$A=\frac{e}{e^3}=\mathrm{e}^{-2}\ ;\ \mathrm{B}=\frac{e^{-3}}{e^{-5}}=\mathrm{e}^2\ ;\ \mathrm{C}=\frac{e\times e^{-2}}{e^{-3}}=\mathrm{e}^2\ ;\ \mathrm{D}=e^7\times e^{-5}=\mathrm{e}^2\ ;\ \mathrm{E}=\left(e^{-3}\right)^5=e^{-15}$$

2. Simplifions les expressions suivantes :

a) $(\mathrm{e}^{-x})^3\mathrm{e}^{-2x}=e^{-5x}$ b) $\frac{\mathrm{e}^{4x}}{(\mathrm{e}^{-x})^2}=e^{6x}$ c) $\frac{\mathrm{e}^{x-y}}{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y}=\frac{1}{e^{2y}}$ d) $\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2=4$

3. Simplifions chacune des expressions a, b et c suivantes :

$$a=\frac{e^{-3x}}{e^{-x}}=\mathrm{e}^{-2x}\ ;\ b=\frac{e^{4x}}{e^{-3x}}=\mathrm{e}^{7x}\ ;\ \mathrm{c}=\frac{e^{6x}\times e^{-3x}}{e^{-2x+3}}=e^{5x-3}.$$

27

1-FAUX 2-VRAI 3-FAUX 4-VRAI

28

$\lim_{x\to-\infty}(2x+5)e^x=0\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(5x+3)e^x=+\infty\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(-7x-4)e^x=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(-3x+1)e^x=0\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(4x-11)e^x=+\infty\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(4-11x)e^x=-\infty$

29

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{2x+1}\right)=0\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{-2x+1}\right)=0\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{5x+4}\right)=+\infty\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)=0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{-7x-11}\right)=-\infty$

30

a) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0\ et\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty\ et\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=0$

c) $\lim_{x\to-\infty}h(x)=0\ et\ \lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty}i(x)=+\infty\ et\ \lim_{x\to+\infty}i(x)=+\infty$

31

- $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)=\lim_{\substack{x\to-1\\<}}(e^x)\,\mathrm{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)=e^{-1}\mathrm{x}(-\infty)=-\infty$.
- $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\>}}\left(\frac{e^x}{-2x+1}\right)=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\>}}(e^x)\,\mathrm{x}\left(\frac{1}{-2x+1}\right)=e^{\frac{-1}{2}}\,\mathrm{x}\,(-\infty)=-\infty$.
- $\lim_{\substack{x\to2\\<}}\left(\frac{e^x}{2x-4}\right)=\lim_{\substack{x\to2\\<}}(e^x)\,\mathrm{x}\left(\frac{1}{2x-4}\right)=e^2\mathrm{x}(-\infty)=-\infty$.
- $\lim_{\substack{x\to-3\\<}}\left(\frac{e^x}{(x+3)^2}\right)=\lim_{\substack{x\to-3\\<}}(e^x)\,\mathrm{x}\left(\frac{1}{(x+3)^2}\right)=e^{-3}\mathrm{x}(+\infty)=+\infty$.
- $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}(e^x)\,\mathrm{x}\left(\frac{1}{x^2}\right)=e^0\mathrm{x}(+\infty)=1\mathrm{x}(+\infty)=+\infty$.

32

1-

a) $f'(x)=\frac{(e^x)'(x+5)-(e^x)(x+5)'}{(x+5)^2}=\frac{(e^x)(x+5)-(e^x)(1)}{(x+5)^2}$.

$f'(x)=\frac{e^x(x+4)}{(x+5)^2}$.

b) $f'(x)=\frac{(e^x)'(3-x)-(e^x)(3-x)'}{(3-x)^2}=\frac{(e^x)(3-x)-(e^x)(-1)}{(3-x)^2}$.

$f'(x)=\frac{e^x(4-x)}{(3-x)^2}$.

c) $f'(x)=(\frac{3}{4}x-4-e^x)'=\frac{3}{4}-e^x$

$d) f'(x) = (e^{-5x^2+x+2})' = (-10x+1)e^{-5x^2+x+2}$.

2- a) $\forall x \in]-\infty;-5[\cup]-5;-4[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;-5[$ *et sur* $]-5;-4[$.
$\forall x \in]-4;+\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) $\forall x \in]-\infty;3[\cup]3;4[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;3[$ *et sur* $]3;4[$.
$\forall x \in]4;+\infty[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]4;+\infty[$.
c) $\forall x \in \left]-\infty;\ln(\frac{3}{4})\right[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty;\ln(\frac{3}{4})\right[$.
$\forall x \in \left]\ln(\frac{3}{4});+\infty\right[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]\ln(\frac{3}{4});+\infty\right[$.
d) $\forall x \in \left]-\infty;\frac{1}{10}\right[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{10}\right[$.
$\forall x \in \left]\frac{1}{10};+\infty\right[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{10};+\infty\right[$.

33

a) $e^{x-2} = e^{3-2x} \Leftrightarrow x-2 = 3-2x$. Donc $S_{IR} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.
b) $e^{-2x+3} = e^{3x+5} \Leftrightarrow -2x+3 = 3x+5$. Donc $S_{IR} = \left\{\frac{-2}{5}\right\}$.
c) $e^x = 7 \Leftrightarrow x = ln7$ .donc $S_{IR} = \{ln7\}$
d) e^x=-1(Impossible) donc $S_{IR} = \emptyset$.
e) $e^{3x+2} = 3 \Leftrightarrow 3x+2 = \ln(3)$.
$\Leftrightarrow 3x = -2+\ln(3)$.
$\Leftrightarrow x = \frac{-2+\ln(3)}{3}$. Donc $S_{IR} = \left\{\frac{-2+\ln(3)}{3}\right\}$

34

a) $e^{x+3} \leq e^{3+2x} \Leftrightarrow x+3 \leq 3+2x$.
$\Leftrightarrow x-2x \leq 3-3$
$\Leftrightarrow -x \leq 0$
$\Leftrightarrow x \geq 0$. Donc $S_{IR} = [0;+\infty[$

b) $e^{2x-3} > e^{x+5} \Leftrightarrow 2x-3 > x+5$
$\Leftrightarrow 2x-x > 5+3$
$\Leftrightarrow x > 8$. Donc $S_{IR} =]8;+\infty[$.

c) $e^x \geq 2 \quad \Leftrightarrow x \geq ln2$. Donc $S_{IR} = [ln2;+\infty[$.

d) $e^x < e^{-2x+6} \Leftrightarrow x < -2x+6$.
$\Leftrightarrow x+2x < 6$
$\Leftrightarrow 3x < 6$
$\Leftrightarrow x < 2$ . . Donc $S_{IR} =]-\infty;2[$.
e) $e^{3x+2}+2 \leq 7 \Leftrightarrow e^{3x+2} \leq 7-2$.
$\Leftrightarrow e^{3x+2} \leq 7-2$.
$\Leftrightarrow e^{3x+2} \leq 5$

$\Leftrightarrow 3x+2 \leq \ln(5)$.

$\Leftrightarrow x \leq \frac{-2+\ln(5)}{3}$.
Donc :$S_{IR} =]-\infty;\frac{-2+\ln(5)}{3}[$.

35

1) Développons$(e^x-1)(e^x-6)$

$(e^x-1)(e^x-6) = (e^x)^2-6e^x-e^x+6 = e^{2x}$-$7e^x$+6.

2) Résolution de l'équation e^{2x}-$7e^x$+6=0
Posons X=e^x avec la condition $X > 0$ car pour tout $\in IR, e^x > 0$. Donc $X^2 = e^{2x}$
L'équatione^{2x}-$7e^x$+6 = 0devient $X^2-7X+6 = 0$.

Résolution de l'équation : $X^2 - 7X + 6 = 0$.

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times (1) \times (6) = 49 - 24 = 25$$

$\Delta > 0$,donc l'équation admet deux solutions distinctes X_1 et X_2 telles que :
$X_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $X_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; on obtient donc $X_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{25}}{2\times(1)}$et $X_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{25}}{2\times(1)}$. D'où $X_1 = 1$ et X_2 =6.

Déterminons les valeurs de "x" en résolvant les équations suivantes :

$* \ e^x = X_1 = 1 \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(1)$.
$\Leftrightarrow x = 0$
$* \ e^x = X_2 = 6 \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(6)$
d'où $x = \ln(6)$.
$S_{IR} = \{0; \ln(6)\}$.

36

1- Résolution de l'équation : $x^2 - 4x - 5 = 0$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (1) \times (-5) = 16 + 20 = 36$$

$\Delta > 0$,donc l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; on obtient donc $x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{36}}{2\times(1)}$et $x_2 = \frac{-(-4)+\sqrt{36}}{2\times(1)}$. d'où$x_1$ =-1 et x_1 =5
donc $S_{IR} = \{-1; 5\}$.
2- Vérifions que 2 est solution de l'équation $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$.
on a ; $(2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) + 10 = 8 - 6x4 + 6 + 10 = 8 - 24 + 16 = 0$
donc 2 est solution de l'équation $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$.
3- Développons $(x-2)(x^2 - 4x - 5)$.

$(x-2)(x^2 - 4x - 5) = x^3 - 4x^2 - 5x - 2x^2 + 8x + 10 = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$
4- En utilisant la question 2), on a vu que2 est racine du polynôme $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ .Ensuite, d'aprèsla question 3), ce polynôme se factorise sous la forme :
$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x-2)(x^2 - 4x - 5).$$
Donc les autres solutions sont les racines du polynôme $x^2 - 4x - 5$.
Cependant d'après la question 1) , les racines de $x^2 - 4x - 5$ sont -1 et 5.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$ est ; $S_{IR} = \{-1; 5; 2\}$.
5- Posons X=e^x avec la condition X > 0 car pour tout $\in IR, e^x > 0$. Donc $X^2 = e^{2x}$
et $X^3 = e^{3x}$. Par conséquent, l'équation $e^{3x} - 6e^{2x} + 3e^x + 10 = 0$devient $X^3 - 6X^2 + 3X + 10 = 0$.
Donc, les solutions sont d'après les questions précédentes X_1=-1 ; X_2=5 ; X_3=2 .
Déterminons les solutions en "x" .

- ✓ Pour e^x=X_1=-1 impossible . donc pas de solution.
- ✓ Pour e^x=X_2=5 ⇔ x= ln(5)
- ✓ Pour e^x=X_3=2 ⇔ x= ln(2)

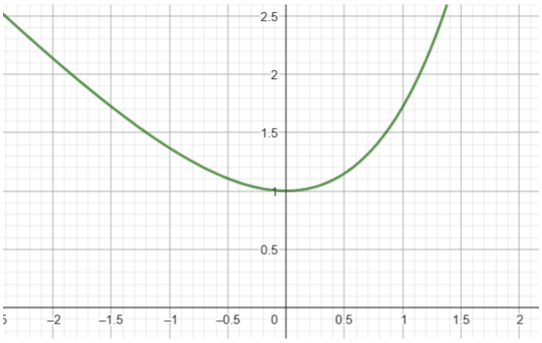
L'ensemble des solutions est :$S_{IR} = \{\ln 5; \ln 2\}$

37

1- $f'(x) = e^x - 1$
2- $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.
$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
3- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ et \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
4- Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$ $+$	0		
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

5- Construction de (C) :



38*

1- $10^3 \times (-10^{-3}) = -10^{3-3} = -10^0 = -1.$

$$10^3 - 10^{-3} = 10^3 - \frac{1}{10^3} = \frac{10^6 - 1}{10^3} = \frac{1000000 - 1}{1000} = \frac{999999}{1000} = 999{,}999$$

2−$(x + 10^3)(x - 10^{-3}) = x^2 - 10^{-3}x + 10^3x - 1 = x^2 + (10^3 - 10^{-3})x - 1$
$(x + 10^3)(x - 10^{-3}) = x^2 + 999{,}999x - 1.$
3- On a : $-10^3 \times (10^{-3}) = -1$ et $-10^3 + 10^{-3} = -999{,}999$ donc -10^3 et 10^{-3} sont les solutions de l'équation : $x^2 + 999{,}999x - 1 = 0.$
4- $S_{\mathbb{R}} = \{-3ln10\}$

Exercices d'approfondissement

39 Déjà résolu dans l'exercice 35(supprimer donc l'exercice 39)

1) Démonstration
On pose t = e^x (donc t > 0). Alors :
$e^{2x} - 7e^x + 6 = t^2 - 7t + 6.$
Or $t^2 - 7t + 6 = (t - 1)(t - 6).$
Donc :
$e^{2x} - 7e^x + 6 = (e^x - 1)(e^x - 6).$

2) Résolution de l'équation
$e^{2x} - 7e^x + 6 = (e^x - 1)(e^x - 6) = 0.$
Ainsi :
$e^x = 1$ ou $e^x = 6.$
Donc :
x = 0 ou x = ln(6).
Solution finale : {0 ; ln(6)}

40

1-a) $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{5-ln2}{0,25}; +\infty\right[$
b) $x \in \left[\frac{5-ln2}{0,25}; +\infty\right[$ équivaut à $x \geq 17{,}22.$
Le plus petit entier naturel vérifiant cete inégalité est 18.
2-a) $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{4+ln10}{0,01}; +\infty\right[$
b) $x \in \left[\frac{4+ln10}{0,01}; +\infty\right[$ équivaut à $x \geq 630{,}25.$
Le plus petit entier naturel vérifiant cete inégalité est 631.

41

1-$S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{6(ln10-1)}{0,77}; +\infty\right[$

2-) $x \in \left[\frac{6(ln10-1)}{0,77}; +\infty\right[$ équivaut à $x \geq 10,15$. Le nombre de cas a dépassé le million la 11ème année après 1983, c'est-à-dire en 1994.

42

1- $f'(x) = 2e^{2x} + 4e^{x} - 6$.

De plus $2(e^{x} - 1)(e^{x} + 3) = 2e^{2x} + 4e^{x} - 6$ donc $f'(x) = 2(e^{x} - 1)(e^{x} + 3)$.

2- $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$- +$		
$f(x)$	$+\infty$	5	$+\infty$

43

_(Revoir la numérotation)

1-a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ et \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $f'(x) = 1 + e^{x}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

2-a) f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$.

De plus $f(]-\infty; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$. Comme $0 \in]-\infty; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty; +\infty[$.

On a : $]1; 2[\subset]-\infty; +\infty[, f(1) = -0,28 \ et \ f(2) = 5,38$.

Comme $f(1) \times f(2) < 0$ alors $1 < \alpha < 2$.

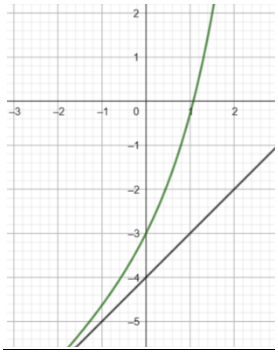
b) On a : $f(1,07) \times f(1,08) < 0$ donc $1,07 < \alpha < 1,08$.

3-a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x - 4)) = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

b) On a : $f(x) - (x - 4) = e^{x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x} > 0$ donc (C) est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

4- Construction de (C) :



44*

1- a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0 \; et \; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

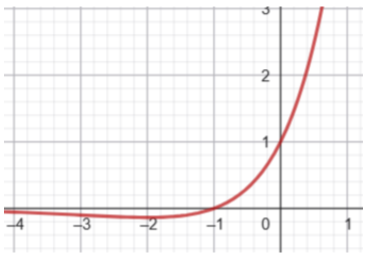
b) $g'(x) = (x+2)e^x$

c) $\forall x \in]-\infty;-2[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty;-2[$.
$\forall x \in]-2;+\infty[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2-Construction de (C) : **FIGURE 9**



45*

1-a) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

2-a) $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^x + (x-2)e^x = (1+x-2)e^x = (x-1)e^x$.

b) $\forall x \in]-\infty;1[, h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$.
$\forall x \in]1;+\infty[, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

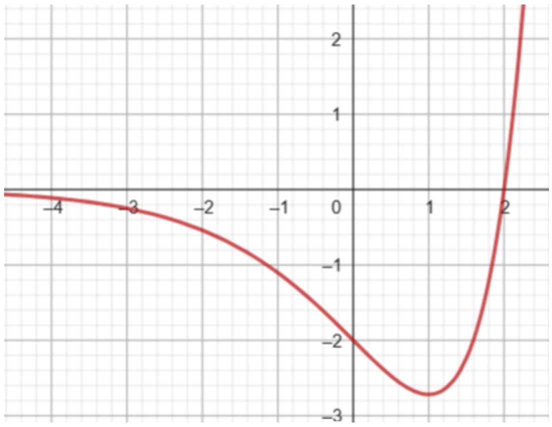
c)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$+\infty$

3-

x	-5	-4	-3	-2	-1,5	-1	0	0,5	1	2	3
$h(x)$	-0,05	-0,11	-0,25	-0,54	-0,56	-1,10	-2	-2,47	-2,72	0	20,08

4- Construction de (C) : **FIGURE 10**



46

1-a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4 \times e^x - 3x \times e^x = 4e^x - 3xe^x$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

2-a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-3x+1)e^x$

b) $\forall x \in \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$.

$\forall x \in \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

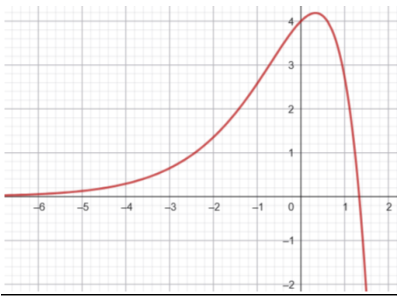
c) Tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3e^{\frac{1}{3}}$	$\searrow$	$-\infty$

3- $(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$(T): y = x + 4$

4- Construction de (C) et (T) :



47

1-a) $\frac{e^x}{x} \times \frac{x}{2x-4} = \frac{xe^x}{x(2x-4)} = \frac{e^x}{2x-4}$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = \frac{e^x}{2x-4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2-a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

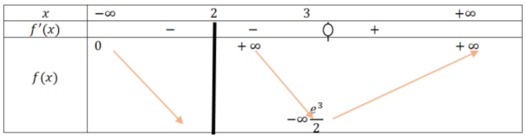
b) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à (C) .

3- $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f'(x) = \frac{e^x(2x-4) - 2e^x}{(2x-4)^2} = \frac{(2x-4-2)e^x}{(2x-4)^2} = \frac{(2x-6)e^x}{(2x-4)^2} = \frac{2(x-3)e^x}{(2x-4)^2}$

4- $\forall x \in]-\infty; 2[\cup]2; 3[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ *et sur* $]2; 3[$.

$\forall x \in]3; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]3; +\infty[$.

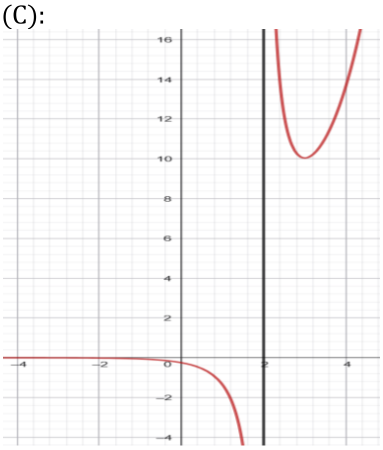
5- Tableau de variation



6-

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2,5	3	3,5	4	5	5
$f(x)$	-0,02	-0,03	-0,06	-0,12	-0,25	-0,55	-1,36	-4,48	12,18	10,04	11,04	13,65	18	24,73

7- Construction des asymptotes et de (C):



48

1- $D_f = \mathbb{R}$

2- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

3-a) On a : $x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right) = x \times \frac{1}{x} - x \times 1 + x \times \frac{e^x}{x} = 1 - x + e^x$,

d'où $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4-a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (-x+1)) = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

b) On a : $f(x) - (-x+1) = e^x$.

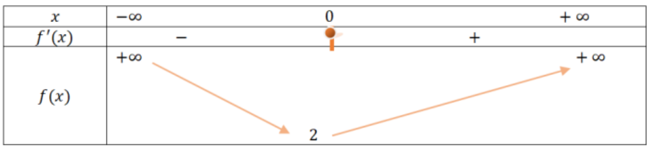
$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc (C) est au dessus de (Δ) sur $\mathbb{R}$.

5-a) - $f'(x) = e^x - 1$

b) $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

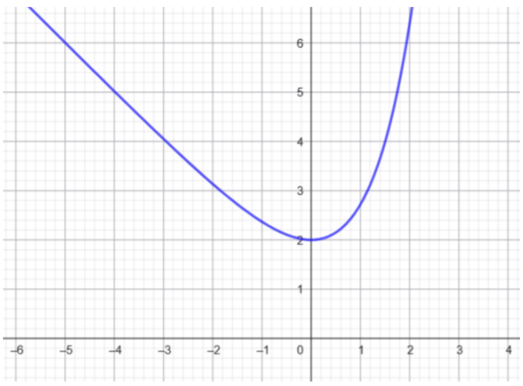
Tableau de variation



6-

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4,05	3,13	2,36	2	2,72	6,39

7- Construction de (C) et (Δ)



49

<u>PARTIE A</u>

1- $\forall x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[, 2x-1<0$ et $\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\ 2x-1>0$.

2- Comme $\forall\ x \in \mathbb{R}, e^x>0$, on a : $\forall x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[, (2x-1)e^x<0$

et $\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\ (2x-1)e^x>0$.

Ainsi : $\forall x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\ g(x)<0$ et $\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\ g(x)>0$.

<u>PARTIE B</u> **(Revoir la numérotation)**

1- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2-a) $\forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x)=2e^x+(2x-3)e^x=(2+2x-3)e^x=(2x-1)e^x$

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x)=g(x)$$

b) $\forall x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[, f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[, f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

c) Tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2e^{\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

3- $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$$(T): y=-x-3$$

4- Si la courbe (C) coupe l'axe (OI) en un point K alors les coordonnées de K sont $(a;0)$ avec a solution de l'équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ équivaut à $x=\frac{3}{2}$, d'où K$(\frac{3}{2};0)$.

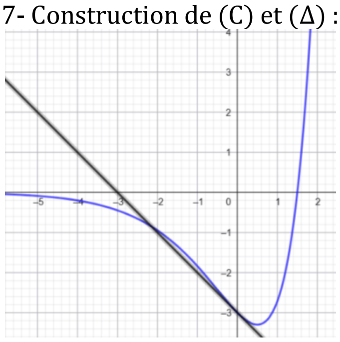
5- Recopie et complète le tableau

x	-5	-4	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$
$f(x)$	$-0{,}09$	$-0{,}20$	$-0{,}45$		$-0{,}95$	$-1{,}32$

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$		$-2{,}43$	-3	$-3{,}30$			7,39

6-Placé de K

7- Construction de (C) et (Δ) : **Figure 14**



Situations complexes

50

H(t)= 4-$e^{0.09t}$

1) **La dérivée H’(t)=(4-$e^{0.09t}$)’= -0,09$e^{0.09t}$.**
Donc la dérivée H’(t)<0 car -0,09<0 et $e^{0.09t} > 0$.
Par conséquent la fonction H(t) est strictement décroissante.

2) **S’il n’ y a plus de forêt, c’est-à-dire que :H(t)= 4-$e^{0.09t}$ = 0.**

Donc $e^{0.09t} = 4$.

D’où : t= $\frac{ln4}{0,09}$=15,4 ans.

Donc dans 16 ans environ, si l’état ivoirien ne prend pas d’initiative, alors il n’y aura plus de forêt en côte d’ivoire.

51

P(n)=1-$e^{-0,12n}$.
Détermination du nombre de jours nécessaire pour vendre 95% des 10 tonnes de riz.
Il faut pour cela résoudre l’équation P(n)=1-$e^{-0,12n} = 95\% = 0,95$
Donc 1-$e^{-0,12n}$ = 0,95 ⇔$e^{-0,12n}$ = 1-0,95=0,05
⇔ $-0,12n = \ln(0,05)$
$n = \frac{\ln(0,05)}{-012}$=24,96. Soit $n = 25$ jours.
Par conséquent, il faudra 25 jours de vente dans le mois afin de pouvoir vendre 95% du stock de riz.