

Leçon
5

SYSTÈMES LINÉAIRES DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



INSTALLATION DES HABILITÉS

Activité 1 Système de deux équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ faisant intervenir la fonction logarithme népérien ou la fonction exponentielle népérienne

1.1. Système d'équations faisant intervenir la fonction logarithme népérien

- 1) a) Conditions d'existence :
Pour que $\ln(x)$ et $\ln(y)$ existent, il faut : $x > 0$ et $y > 0$.
- b) Changement de variables :
Posons $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$. Le système devient :

1)	$X + Y = 8$
2)	$5X - Y = 6$

- c) Résolution :
- Addition des deux équations : $(X + Y) + (5X - Y) = 8 + 6 \Rightarrow 6X = 14 \Rightarrow X = 7/3$.
- Puis $Y = 8 - X = 8 - 7/3 = 17/3$.
- 2) Retour à x et y :
- $x = e^X = e^{7/3}$ et $y = e^Y = e^{17/3}$.
- Solution : $(x, y) = (e^{7/3}, e^{17/3})$.

Exercices de fixation

1-1-1 : VRAI / FAUX

- 1) Le couple $(e ; e^2)$ est solution du système :
 $2\ln x + 3\ln y = 8$
 $3\ln x - \ln y = 2$
 Réponse : FAUX
- 2) Le couple $(e^{5/2} ; e^{-1})$ est solution du système :
 $-4\ln x + 3\ln y - 7 = 0$
 $2\ln x - 5\ln y = 0$
 Réponse : FAUX

1-1-2 : Résolution des systèmes

- (S1) Solution : $(x ; y) = (e ; e^{3/2})$
 (S2) Solution : $(x ; y) = (e^2 ; e^{9/4})$

(S3) Solution : $(x ; y) = (e^3 ; e^{-7})$

1.2. Système d'équations faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

Résolution du système exponentiel

Soit le système suivant :

$$(S) \begin{cases} e^x - e^y = 2 \\ 2e^x - e^y = 5 \end{cases}$$

1. Changement de variables

On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$, avec $X > 0$ et $Y > 0$.

Le système devient :

$$\begin{cases} X - Y = 2 \\ 2X - Y = 5 \end{cases}$$

2. Résolution du système

En soustrayant la première équation de la seconde :

$$2X - Y - (X - Y) = 5 - 2 \Rightarrow X = 3$$

$$\text{Puis : } 3 - Y = 2 \Rightarrow Y = 1$$

3. Détermination de x et y

$$e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$$

$$e^y = 1 \Rightarrow y = \ln(1) = 0$$

Conclusion

La solution du système est : $x = \ln(3)$ et $y = 0$.

Exercices de fixation

1-2-1 VRAI / FAUX

1) VRAI.

2) FAUX.

1-2-2 Résolution des systèmes dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

S1 : Solution : $(\ln 2, 0)$.

S2 : Solution : $(2 \ln 3, \ln 11)$.

S3 : Solution : $(0, \ln 2)$.

Activité 2 Résolution d'un système de deux ou trois inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2.1. Résolution graphique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique : 1 cm.

On considère l'inéquation : $2x - 3y + 5 \geq 0$, avec $(x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) Tracé de la droite (D) :

On trace la droite (D) d'équation : $2x - 3y + 5 = 0$.

On met l'équation sous la forme $y = ax + b$:

$$2x - 3y + 5 = 0 \Leftrightarrow -3y = -2x - 5 \Leftrightarrow y = (2/3)x + 5/3.$$

Deux points de la droite :

• Si $x = 0$, alors $y = 5/3 \Rightarrow A(0 ; 5/3)$.

• Si $y = 0$, alors $2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5/2 \Rightarrow B(-5/2 ; 0)$.

On place A et B puis on trace la droite (D) passant par A et B.

2) Détermination du demi-plan solution :

La droite (D) partage le plan en deux demi-plans de frontière (D).

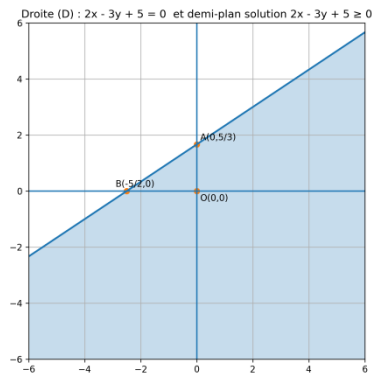
a) Test du point $O(0 ; 0)$:

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5 \geq 0 \Rightarrow O(0 ; 0) \text{ est solution.}$$

b) On hachure (ou colore) le demi-plan de frontière (D) contenant le point $O(0 ; 0)$.

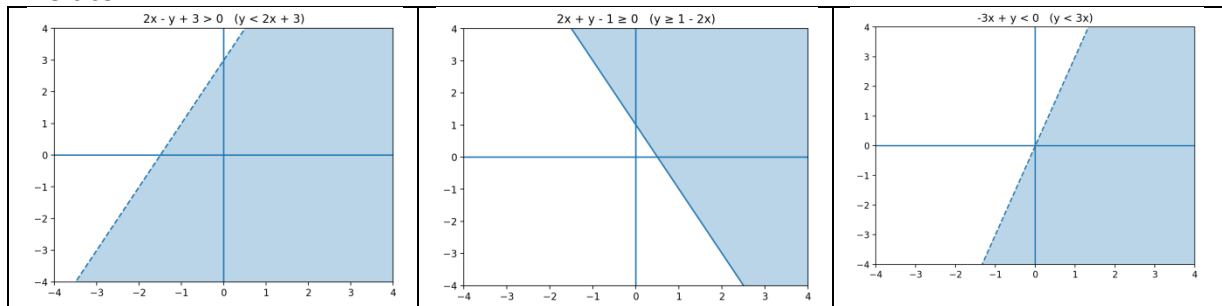
Ainsi, l'ensemble solution est : $2x - 3y + 5 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq (2/3)x + 5/3$ (droite incluse).

Figure :



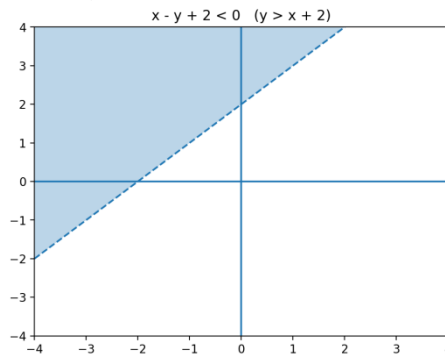
Exercices de fixation

Exercice 2.1.1



Exercice 2.1.2

Figure : $x - y + 2 < 0 \Leftrightarrow y > x + 2$ (droite en pointillés, zone hachurée au-dessus).



2.2. Résolution d'un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) Droite D1 : $x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2 - x$.

Points de construction : A(0, 2) et B(2, 0).

Inéquation : $x + y - 2 < 0 \Leftrightarrow y < 2 - x$: demi-plan situé en dessous de D1 (D1 non incluse).

2) Droite D2 : $x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = x + 3$.

Points de construction : C(0, 3) et D(-3, 0).

Inéquation : $x - y + 3 < 0 \Leftrightarrow y > x + 3$: demi-plan situé au-dessus de D2 (D2 non incluse).

3) La région solution S est l'intersection des deux demi-plans :

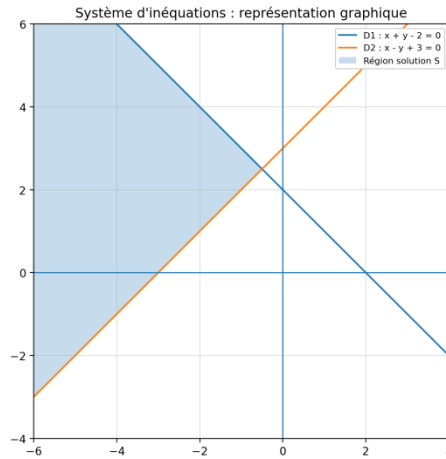
$y < 2 - x$ et $y > x + 3$.

Point d'intersection des droites :

$2 - x = x + 3 \Rightarrow x = -1/2$ et $y = 5/2$, donc P(-1/2 ; 5/2).

La zone S se situe entre les deux droites, à gauche du point P, sans inclure les droites (inégalités strictes).

Figure (zone solution S colorée)



Remarque : les droites sont tracées en limites mais ne font pas partie de S (car < et >).

Exercices de fixation

Exercice 2-2-1

Soit le système (S) :

$$(S) \begin{cases} 2x - y + 3 > 0 \\ 3x - 2y + 1 < 0 \end{cases}$$

Mise sous forme $y = ax + b$:

- $2x - y + 3 > 0 \Leftrightarrow y < 2x + 3$
- $3x - 2y + 1 < 0 \Leftrightarrow y > (3x + 1)/2$

Donc la zone solution est l'ensemble des points vérifiant :

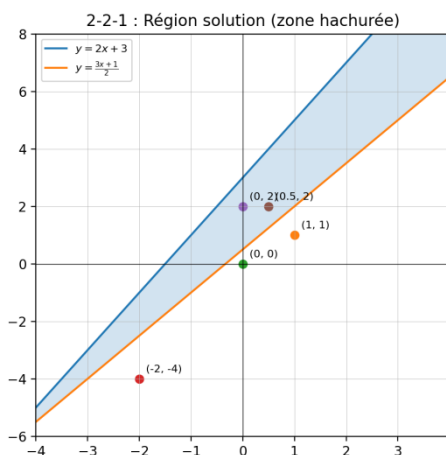
$$(3x + 1)/2 < y < 2x + 3$$

Test des couples proposés :

- $(1 ; 1) : 1 > 2$ est faux \rightarrow non solution.
- $(0 ; 0) : 0 > 0,5$ est faux \rightarrow non solution.
- $(-2 ; -4) : -4 > -2,5$ est faux \rightarrow non solution.
- $(0 ; 2) : 0,5 < 2 < 3$ est vrai \rightarrow solution.
- $(1/2 ; 2) : 1,25 < 2 < 4$ est vrai \rightarrow solution.

Solutions : (0 ; 2) et (1/2 ; 2).

Figure 2-2-1



Exercice 2-2-2

Trouver trois couples de nombres réels solutions du système (S) :

$$(S) \begin{cases} 4x + 3y > 0 \\ 2x - y < 0 \end{cases}$$

Mise sous forme $y = ax + b$:

- $4x + 3y > 0 \Leftrightarrow y > -(4/3)x$

- $2x - y < 0 \Leftrightarrow y > 2x$

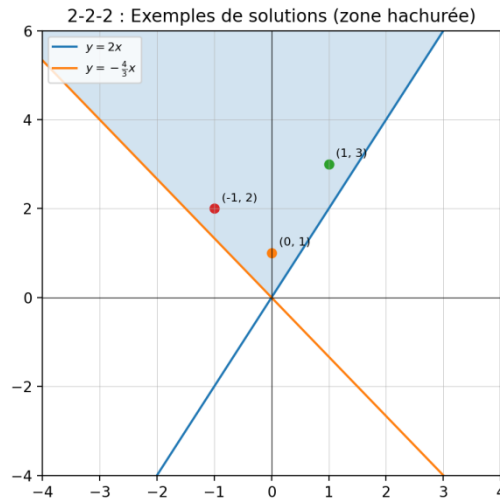
Donc la zone solution est :

$y > \max(2x, -\frac{4}{3}x)$

Exemples de trois solutions :

- (0 ; 1)
- (1 ; 3)
- (-1 ; 2)

Figure 2-2-2



Exercice 2-2-3

Résoudre graphiquement le système (S) :

(S) $\{ \begin{matrix} 2x + 3y - 6 > 0 \\ -x + y < 0 \end{matrix} \}$

Mise sous forme $y = ax + b$:

- $2x + 3y - 6 > 0 \Leftrightarrow y > 2 - \frac{2}{3}x$
- $-x + y < 0 \Leftrightarrow y < x$

Donc la zone solution est :

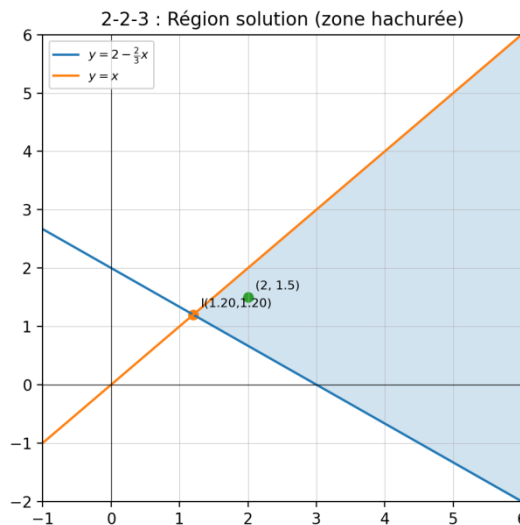
$2 - \frac{2}{3}x < y < x$

Point d'intersection des deux droites :

- On résout $x = 2 - \frac{2}{3}x \Rightarrow \frac{5}{3}x = 2 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$, donc $y = \frac{6}{5}$.

La zone solution se situe entre les deux droites, à droite du point d'intersection.

Figure 2-2-3



2.3. Système de trois ou quatre inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Système (S) de trois inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

On considère le système :

$$(S) \begin{cases} x - y + 3 > 0 \\ -2x + y - 2 < 0 \\ -x + 2y > 0 \end{cases}$$

1) Représentation des droites (L1), (L2), (L3)

Les droites frontières associées s'obtiennent en remplaçant les inégalités par des égalités :

$$(L1) : x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = x + 3$$

$$(L2) : -2x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 2$$

$$(L3) : -x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = x/2$$

2) Ensembles de solutions de chaque inéquation

On isole y dans chaque inéquation pour identifier le demi-plan solution :

1. **(I1) : $x - y + 3 > 0 \Leftrightarrow y < x + 3$.** Demi-plan strictement en dessous de (L1).

2. **(I2) : $-2x + y - 2 < 0 \Leftrightarrow y < 2x + 2$.** Demi-plan strictement en dessous de (L2).

3. **(I3) : $-x + 2y > 0 \Leftrightarrow y > x/2$.** Demi-plan strictement au-dessus de (L3).

3) Ensemble des solutions du système (S)

L'ensemble solution est l'intersection des trois demi-plans :

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x + 3, y < 2x + 2, y > x/2 \}$$

Pour décrire la zone, on compare les deux bornes supérieures : $x+3$ et $2x+2$.

$$x + 3 \leq 2x + 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Donc, la borne supérieure est :

- $y < 2x + 2$ si $x < 1$;
- $y < x + 3$ si $x \geq 1$.

Condition d'existence (sur la partie $x < 1$) :

$$x/2 < 2x + 2 \Leftrightarrow x > -4/3.$$

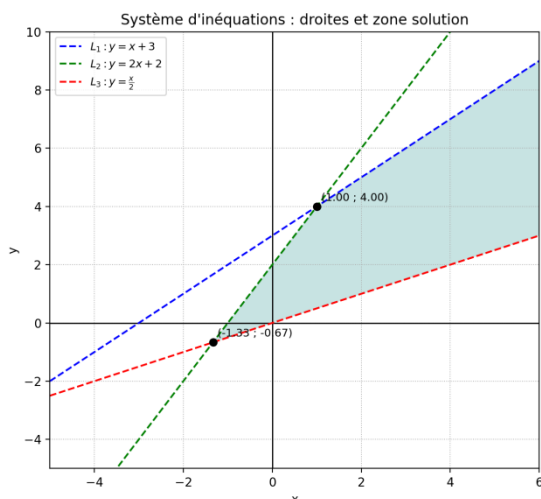
Ainsi :

$$S = \{ (x, y) \mid -4/3 < x < 1 \text{ et } x/2 < y < 2x + 2 \} \cup \{ (x, y) \mid x \geq 1 \text{ et } x/2 < y < x + 3 \}$$

Points d'intersection utiles (sommets) :

- $L2 \cap L3 : y = 2x+2 \text{ et } y = x/2 \Rightarrow (-4/3 ; -2/3)$.
- $L1 \cap L2 : y = x+3 \text{ et } y = 2x+2 \Rightarrow (1 ; 4)$.

Figure : droites (L1), (L2), (L3) et zone solution (ombrée)



Exercices de fixation

Exercice 23-1

Système (S) :

$$2x + y - 5 < 0$$

$$-x - y + 6 > 0$$

$$3x + 2y - 4 < 0$$

Couples testés : (1 ; 1), (0 ; 0), (3 ; -3), (3 ; -1), (1/2 ; 2).

Couples solutions :

- (0 ; 0)
- (3 ; -3)

Exercice 23-2

Système (S) :

$$x \geq 3$$

$$y \geq 4$$

$$-x + y \leq 2$$

$$3x + 5y - 1 \geq 0$$

Trois couples solutions:

- (3 ; 4)
- (3 ; 5)
- (4 ; 6)

Exercices de renforcement

1

1) Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants

1. $\{ 2e^x - 3e^y = -2 ; -14e^x + e^y = -6 \}$

Solution: $(x, y) = (-\ln 2, 0)$.

2. $\{ -4 \ln x + \ln y = 1 ; -6 \ln x - 4 \ln y = 7 \}$ (avec $x > 0, y > 0$)

Solution: $(x, y) = (1/\sqrt{e}, 1/e)$.

2

Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants

1. $\{ \ln x + 2 \ln y = 0 ; -\ln x + \ln y = 6 \}$ (avec $x > 0, y > 0$)

Solution: $(x, y) = (e^{-4}, e^2)$.

2. $\{ e^x + e^y - 2 = 0 ; e^x + 2e^x - 3 = 0 \}$

Solution: $(x, y) = (0, 0)$.

3. $\{ 3 \ln x + 4 \ln y = -4 ; 5 \ln x + 7 \ln y = 6 \}$ (avec $x > 0, y > 0$)

Solution: $(x, y) = (e^{-52}, e^{38})$.

4. $\{ e^x = 2 - e^y ; 2e^y = 3 - e^x \}$

Solution: $(x, y) = (0, 0)$.

3

Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système suivant

(S) $\{ e^x + 3e^y = 5 ; 2e^x - e^y = 3 \}$

Posons $a = e^x > 0$ et $b = e^y > 0$.

On obtient: $\{ a + 3b = 5 ; 2a - b = 3 \}$.

Résolution: $a = 2$ et $b = 1$.

Donc: $x = \ln 2$ et $y = 0$.

Solution: $(x, y) = (\ln 2, 0)$.

4

Résous graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système (Σ)

(Σ) $\{ 3x + y - 6 > 0 ; -x - y + 4 > 0 ; 2x - y - 2 < 0 \}$

Ce système est équivalent à: $\{ y > 6 - 3x ; y < 4 - x ; y > 2x - 2 \}$.

La solution est l'intérieur du triangle délimité par les droites $y = 6 - 3x$, $y = 4 - x$ et $y = 2x - 2$ (bords exclus).

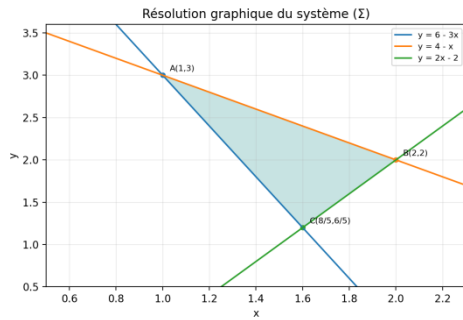
Sommets: A(1, 3), B(2, 2), C(8/5, 6/5).

On peut écrire:

- si $1 < x < 8/5$ alors $6 - 3x < y < 4 - x$

- si $8/5 < x < 2$ alors $2x - 2 < y < 4 - x$

Représentation graphique (zone solution en grisé):

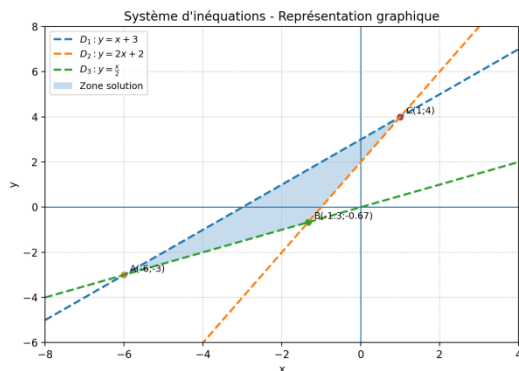


5

On considère le système (Σ) suivant :

$$(\Sigma) \begin{cases} x - y + 3 > 0 \\ y - 2x - 2 > 0 \\ 2y - x > 0 \end{cases}$$

Représentation graphique (zone solution hachurée) :



Zone solution (description) :

La solution est l'intersection des trois demi-plans :

- $y < x + 3$
- $y > 2x + 2$
- $y > x/2$

Les frontières ne sont pas incluses (inégalités strictes).

6

Corrigé

1)

Posons $a = e^x > 0$ et $b = e^y > 0$. Le système devient :

$$\begin{cases} 2a - b = 15 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

Soustraction (1) - (2) : $a = 12$.

Puis $12 - b = 3$, donc $b = 9$.

Ainsi : $x = \ln(12)$ et $y = \ln(9)$.

Solution : $(x, y) = (\ln 12, \ln 9)$.

2)

On impose $y > 0$ pour que $\ln(y)$ soit défini.

Posons $a = e^x > 0$ et $t = \ln(y)$. Le système devient :

$$\begin{cases} 3a - 2t = 11 \\ -a + 3t = 1 \end{cases}$$

De la 2e équation : $a = 3t - 1$.

Dans la 1re : $3(3t - 1) - 2t = 11 \Leftrightarrow 9t - 3 - 2t = 11 \Leftrightarrow 7t = 14 \Leftrightarrow t = 2$.

Alors $a = 3 \cdot 2 - 1 = 5$.

Donc : $x = \ln(5)$ et $\ln(y) = 2$, d'où $y = e^2$.

Solution : $(x, y) = (\ln 5, e^2)$.

7

1. Système :

- $e^x + e^y = 5$
- $e^x - e^y = 3$

Solution :

Addition : $2e^x = 8 \Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln(4)$.

Soustraction : $2e^y = 2 \Rightarrow e^y = 1 \Rightarrow y = 0$.

Conclusion : $(x, y) = (\ln(4), 0)$.

2. Système :

- $e^x + 2e^y = 3$
- $e^{-x} + y = 0$ (c.-à-d. $y = -e^{-x}$)

Solution :

De $e^{-x} + y = 0$, on déduit $y = -e^{-x}$.

En remplaçant : $e^x + 2e^{-e^{-x}} = 3$.

On vérifie $x = 0 \Rightarrow y = 0 : 1 + 2 \cdot 1 = 3$, donc $(0, 0)$ est solution.

Cette équation admet aussi une seconde solution numérique : $x \approx 1,060586$ et $y = -e^{-x} \approx -2,882972$.

Conclusion : $(x, y) = (0, 0)$ ou $(x, y) \approx (1,060586 ; -2,882972)$.

3. Système :

- $x \cdot y = -15$
- $e^x \cdot e^y = e^{-2}$

Solution :

On a $e^x \cdot e^y = e^{(x+y)} = e^{-2} \Rightarrow x + y = -2$.

Les nombres x et y sont alors racines du polynôme : $t^2 - (x+y)t + x \cdot y = 0$, soit $t^2 + 2t - 15 = 0$.

Factorisation : $(t + 5)(t - 3) = 0 \Rightarrow t = 3$ ou $t = -5$.

Conclusion : $(x, y) = (3, -5)$ ou $(-5, 3)$.

8

1)

- $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy) = 3 \ln 6 = \ln(6^3) = \ln(216) \Rightarrow xy = 216$, avec $x > 0$ et $y > 0$.
- On utilise alors la relation somme-produit : $t^2 - 30t + 216 = 0$.
- $\Delta = 30^2 - 4 \cdot 216 = 900 - 864 = 36$, donc $t = (30 \pm 6)/2$, soit $t \in \{18 ; 12\}$.
- Ainsi, $(x, y) = (18, 12)$ ou $(12, 18)$.

2) $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy) = \ln(91) \Rightarrow xy = 91$, avec $x > 0$ et $y > 0$.

- $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 218 + 2 \cdot 91 = 400 \Rightarrow x + y = 20$ (car x et y sont positifs).
- On résout $t^2 - 20t + 91 = 0$.
- $\Delta = 20^2 - 4 \cdot 91 = 400 - 364 = 36$, donc $t = (20 \pm 6)/2$, soit $t \in \{13 ; 7\}$.
- Ainsi, $(x, y) = (13, 7)$ ou $(7, 13)$.

9

1)

On a $\ln x + \ln y = 0 \Leftrightarrow \ln(xy) = 0 \Leftrightarrow xy = 1$.

De $x - y = 3/2$, on obtient $y = x - 3/2$.

Donc $x(x - 3/2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - (3/2)x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$.

$\Delta = 3^2 + 16 = 25$, donc $x = (3 \pm 5)/4 : x = 2$ ou $x = -1/2$.

Comme $x > 0$, on retient $x = 2$, puis $y = 2 - 3/2 = 1/2$.

Solution : $(x, y) = (2, 1/2)$.

2)

Posons $a = \ln x$ et $b = \ln y$. Le système devient :

$$\{ 5a + 2b = 26 ; 2a - 3b = -1 \}$$

On multiplie la 1re équation par 3 : $15a + 6b = 78$.

On multiplie la 2e équation par 2 : $4a - 6b = -2$.

En additionnant : $19a = 76$, donc $a = 4$.

Puis $2a - 3b = -1 \Leftrightarrow -3b = -1 - 2a \Leftrightarrow b = \frac{1+2a}{3}$.

Donc $\ln x = 4$ et $\ln y = 3$, d'où $x = e^4$ et $y = e^3$.

Solution : $(x, y) = (e^4, e^3)$.

3)

Posons $a = \ln x$ et $b = \ln y$.

De $\ln(xy) = 4$, on déduit $a + b = 4$.

La 2e équation donne $ab = -12$.

Ainsi a et b sont les racines de $t^2 - 4t - 12 = 0$.

$\Delta = 16 + 48 = 64$, donc $t = \frac{4 \pm 8}{2}$: $t = 6$ ou $t = -2$.

Donc $(a, b) = (6, -2)$ ou $(-2, 6)$.

En revenant à x et y : $(x, y) = (e^6, e^{-2})$ ou (e^{-2}, e^6) .

Solutions : (e^6, e^{-2}) et (e^{-2}, e^6) .

10

1.

On pose $a = e^x > 0$ et $b = e^y > 0$. Le système devient :

$$ab = 10$$

$$a / b = 2/5$$

Donc $a = (2/5)b$. En remplaçant dans $ab = 10$:

$$(2/5)b^2 = 10 \Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow b = 5 \text{ (car } b > 0\text{)}.$$

Puis $a = (2/5) \cdot 5 = 2$.

Ainsi $e^x = 2$ et $e^y = 5$, donc :

$$x = \ln(2) \text{ et } y = \ln(5).$$

Conclusion : $(x, y) = (\ln(2), \ln(5))$.

2.

Pour tout réel x et y , on a $e^x > 0$ et $e^y > 0$. Donc $e^x + 2e^y > 0$.

Or le système impose $e^x + 2e^y = -5$, ce qui est impossible.

Conclusion : aucune solution réelle.

11

- Comme $\ln(x)$ et $\ln(y)$ sont définis, on doit avoir $x > 0$ et $y > 0$.
- On utilise la propriété : $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$.
- Ainsi, $\ln(xy) = \ln(700)$ donc $xy = 700$.
- Le système devient : $x + y = 55$ et $xy = 700$.
- Donc x et y sont les racines du polynôme : $t^2 - 55t + 700 = 0$.
- Discriminant : $\Delta = 55^2 - 4 \times 700 = 3025 - 2800 = 225 = 15^2$.
- Ainsi, $t = \frac{55 \pm 15}{2}$, d'où $t_1 = 35$ et $t_2 = 20$.

Solutions : $(x, y) = (35, 20)$ ou $(20, 35)$.

12

Corrigé

1)

Posons $a = e^x > 0$ et $b = e^y > 0$. On obtient :

$$a + b = 5$$

$$a - b = 3$$

En additionnant puis en soustrayant :

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

Donc $e^x = 4$ et $e^y = 1$, d'où :

$$x = \ln(4) \text{ et } y = 0.$$

Solution : $(x, y) = (\ln 4, 0)$.

2)

De $x + y = 0$, on déduit $y = -x$. Le système devient :

$$e^x + 2e^{-x} = 3$$

Posons $t = e^x > 0$, alors $e^{-x} = 1/t$. On obtient :

$$t + 2/t = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t - 1)(t - 2) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = 2.$$

• Si $t = 1$: $x = 0$ et $y = 0$.

• Si $t = 2$: $x = \ln(2)$ et $y = -\ln(2)$.

Solutions : $(0, 0)$ et $(\ln 2, -\ln 2)$.

3)

On a $e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}$. Donc :

$$e^{(x+y)} = e^{-2} \Rightarrow x + y = -2.$$

Le système équivaut alors à :

$$x + y = -2$$

$$xy = -15$$

Ainsi x et y sont les racines du polynôme :

$$r^2 - (x+y)r + xy = 0 \Leftrightarrow r^2 + 2r - 15 = 0$$

$$(r + 5)(r - 3) = 0 \Rightarrow r = 3 \text{ ou } r = -5.$$

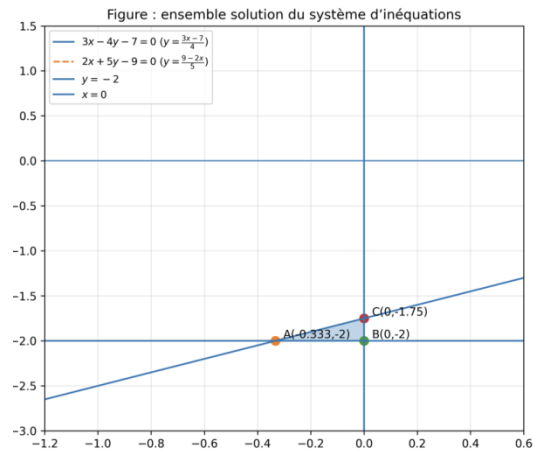
Donc : $(x, y) = (3, -5)$ ou $(-5, 3)$.

13

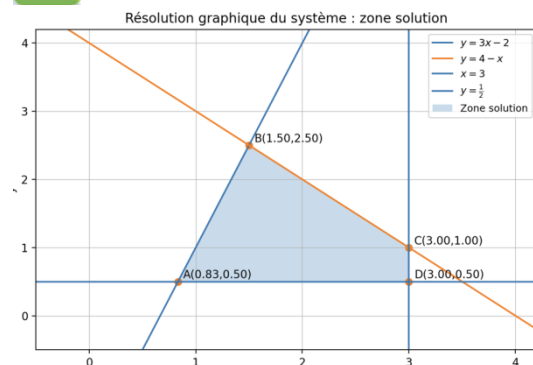
Ensemble solution

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/3 \leq x \leq 0 \text{ et } -2 \leq y \leq (3x - 7)/4 \}$$

Interprétation : la solution est le triangle délimité par les droites $y = -2$, $x = 0$ et $3x - 4y - 7 = 0$.



14



Sommets de la région solution : • $A(5/6 ; 1/2)$; • $B(3/2 ; 5/2)$; • $C(3 ; 1)$; • $D(3 ; 1/2)$

15

1. Faux ; 2. Faux ; 3. Vrai ; 4. Faux

16

Réponses (Vrai/Faux) : 1. Faux 2. Faux 3. Faux 4. Vrai

17

a) Solution : $(x, y) = (\ln(2), \ln(3))$.

b) Solution : $(x, y) = (e^2, e^{-3})$.

18

$$x \geq 3 \text{ et } y \leq -2x + 4$$

19

$$y \geq -2x + 6 \text{ et } y \leq 3x + 1$$

20

On pose $a = \ln x$ et $b = \ln y$ (avec $x > 0$ et $y > 0$).

Le système devient :

$$a - b = 1$$

$$a^2 - b^2 = 13.$$

Or $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Donc :

$$(a - b)(a + b) = 13.$$

Comme $a - b = 1$, on obtient :

$$1 \cdot (a + b) = 13, \text{ donc } a + b = 13.$$

On résout alors :

$$a - b = 1$$

$$a + b = 13$$

$$\Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 7 \text{ et } b = 6.$$

Ainsi :

$$\ln x = 7 \Rightarrow x = e^7,$$

$$\ln y = 6 \Rightarrow y = e^6.$$

Conclusion : $(x, y) = (e^7, e^6)$.

21

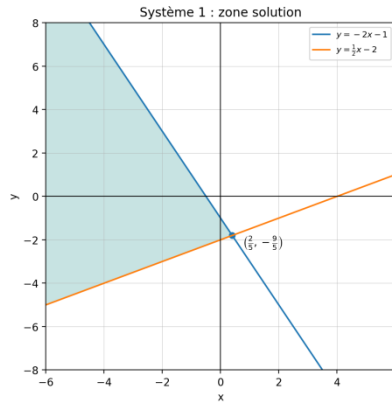
1) Solution : $(x, y) = (2, 5)$

2) Solution : $(x, y) = (e^2, e^5)$ (avec $x > 0$ et $y > 0$)

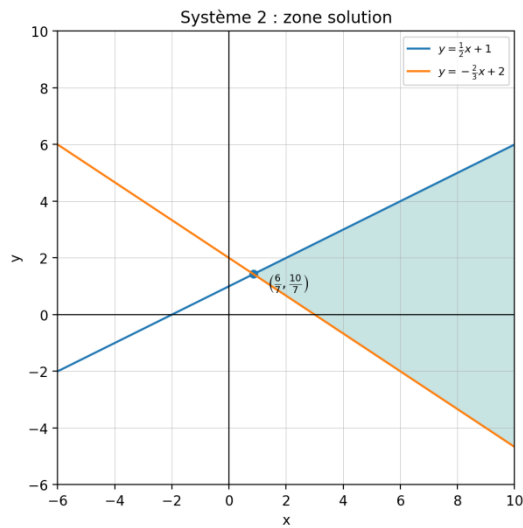
3) Solution : $(x, y) = (\ln(2), \ln(5))$.

22

1) Système :



2) Système :



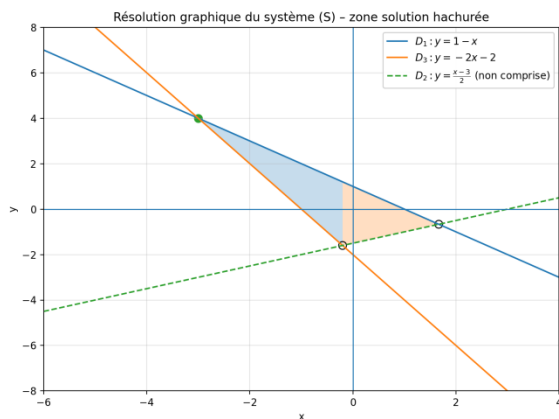
23

1) Vérification des couples proposés

- $(1 ; -1) : \Rightarrow$ pas solution.
- $(-1 ; -1) : \Rightarrow$ pas solution.
- $(-1 ; 1) : \Rightarrow$ solution.
- $(1 ; 1) : \Rightarrow$ pas solution.

Conclusion : le seul couple solution parmi ceux proposés est $(-1 ; 1)$.

2) Résolution graphique



- $D1 \cap D3 : (-3 ; 4)$ (point appartenant à la zone).
- $D2 \cap D3 : (-1/5 ; -8/5)$ (sur D2, frontière exclue).

- $D1 \cap D2 : (5/3 ; -2/3)$ (sur $D2$, frontière exclue).

24

Solution

Mise sous la forme $y = \dots$:

$$x + y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 1 - x$$

$$2x + 2y + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq -3/2 \Leftrightarrow y \geq -x - 3/2$$

$$-2 \leq x \leq 2 : \text{ bande verticale comprise entre } x = -2 \text{ et } x = 2$$

Les deux droites $y = 1 - x$ et $y = -x - 3/2$ sont parallèles. La solution est la région comprise entre ces deux droites, limitée par la bande $-2 \leq x \leq 2$.

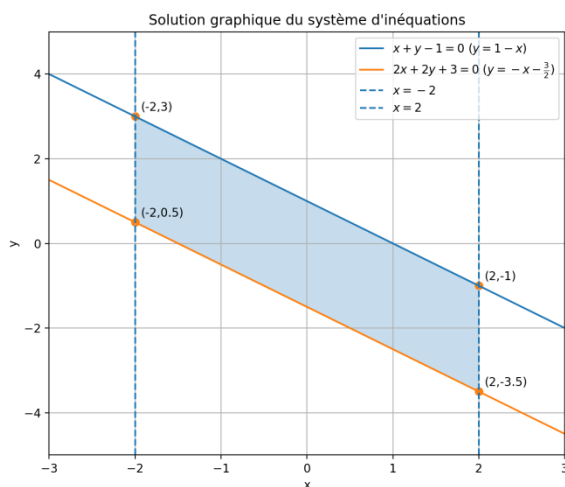
Ensemble solution :

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ et } -x - 3/2 \leq y \leq 1 - x \}$$

Sommets de la région solution :

$$(-2, 1/2), (-2, 3), (2, -1), (2, -7/2)$$

Figure (région solution ombrée) :



Exercices d'approfondissement

25*

1) Résolution du système linéaire

De $2x - y = 3$, on tire $y = 2x - 3$.

En remplaçant dans $x + 3y = 5$:

$$x + 3(2x - 3) = 5 \Rightarrow x + 6x - 9 = 5 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2.$$

Donc $y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$.

Solution : $(x, y) = (2, 1)$.

2a) Transformations logarithmiques (conditions : $x > 0$ et $y > 0$)

- $\ln(\text{Error!}) = \ln(x) - \ln(y)$. Donc :

$$\ln(x) + \ln(\text{Error!}) = \ln(x) + (\ln(x) - \ln(y)) = 2 \ln(x) - \ln(y).$$

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln(y^2) = 2 \ln(y)$. Donc :

$$\ln(xy) + \ln(y^2) = (\ln(x) + \ln(y)) + 2 \ln(y) = \ln(x) + 3 \ln(y).$$

2b) Résolution et retour à x, y

Posons $u = \ln(x)$ et $v = \ln(y)$. On obtient :

$$\begin{cases} 2u - v = 3 \\ u + 3v = 5 \end{cases}$$

Ce système est identique à celui de la question 1, donc $(u, v) = (2, 1)$.

Ainsi : $\ln(x) = 2 \Rightarrow x = e^2$, et $\ln(y) = 1 \Rightarrow y = e$.

Solution : $(x, y) = (e^2, e)$.

26*

1) a) $x^2 - x - 2 = 0$

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1.$$

1) b) $(x - 1)(x^2 - x - 2)$

Comme $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, on a : $(x - 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$.

Développement : $(x - 1)(x^2 - x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

1) c) $x^3 - 2x^2 - x + 2 \leq 0$

$$S =]-\infty, -1] \cup [1, 2].$$

2) a) **Système (S)**

Solution : $(x, y) = (2, 2)$.

2) b) **Système exponentiel**

Pose $X = e^x > 0$ et $Y = e^y > 0$. On obtient le même système que (2a), donc $X = 2$ et $Y = 2$.

Ainsi $x = \ln(2)$ et $y = \ln(2)$, donc $(x, y) = (\ln(2), \ln(2))$.

27

1) Justification du système

On part de l'équation : $a \ln(x) + b \ln(y) - 200 = 0$.

- Rencontres nationales : $x = e^1$ et $y = e^1$.

$$\ln(x) = \ln(e) = 1 \text{ et } \ln(y) = 1.$$

$$\text{Donc } a + b - 200 = 0.$$

- Matches internationaux : $x = e^2$ et $y = e^{-3}$.

$$\ln(x) = 2 \text{ et } \ln(y) = -3.$$

$$\text{Donc } 2a - 3b - 200 = 0.$$

2) Résolution et déduction

a) Résolution de (S)

De $a + b = 200$, on a $a = 200 - b$.

On remplace dans $2a - 3b = 200$:

$$2(200 - b) - 3b = 200$$

$$400 - 5b = 200$$

$$-5b = -200 \Rightarrow b = 40$$

Puis $a = 200 - 40 = 160$.

Conclusion : $a = 160$ et $b = 40$.

b) Nombre de jeux de maillots

- Rencontres nationales : $x = e$ et $y = e \approx 2,718$.
- Matches internationaux : $x = e^2 \approx 7,389$ et $y = e^{-3} \approx 0,0498$.

28*

1. Traduction en système d'inéquations

On pose :

- x : nombre d'ouvrages de type 1 ;

- y : nombre d'ouvrages de type 2.

Les conditions de l'énoncé se traduisent par :

Système conforme à l'énoncé :

$$x \geq 2$$

$$y \geq 2$$

$$y > x$$

$$6\,000x + 12\,000y \leq 90\,000, \text{ soit } x + 2y \leq 15$$

Remarque : le système imprimé sur l'image contient $y \leq x$ et $x + y \geq 4$; il ne correspond pas exactement à la phrase « plus d'ouvrages de type 2 que de type 1 » ni à « au moins deux ouvrages de chaque type ».

2. Résolution (système conforme à l'énoncé)

On cherche les couples (x, y) d'entiers naturels vérifiant : $x \geq 2$, $y \geq 2$, $y > x$ et $x + 2y \leq 15$.

La condition budgétaire impose $y \leq (15 - x)/2$. En combinant avec $y > x$, on obtient un nombre fini de solutions entières.

Possibilités d'achats (solutions entières) :

x (type 1)	y (type 2)	Dépense (F CFA)	Vérification (x+2y)
2	3	48 000	8
2	4	60 000	10
2	5	72 000	12
2	6	84 000	14
3	4	66 000	11
3	5	78 000	13
3	6	90 000	15
4	5	84 000	14

Il y a donc 8 possibilités d'achats respectant toutes les conditions.

Annexe - Résolution du système affiché sur l'image (si demandé)

Système affiché :

$$x \geq 2$$

$$y \leq x$$

$$x + y \geq 4$$

$$6x + 12y \leq 90, \text{ soit } x + 2y \leq 15$$

Dans le premier quadrant, la région solution est un polygone dont des sommets possibles sont (2,2), (5,5), (15,0) et (4,0). Les solutions entières sont alors nombreuses ; on ne les liste pas ici sauf si cela est explicitement demandé.

29

Modélisation

Posons :

- x : nombre de tas de 10 kg (gombo DIOULA).
- y : nombre de tas de 25 kg (gombo BAOULÉ).

Les variables x et y sont des entiers naturels.

Contraintes

1) Contrainte de poids (coffre ≤ 170 kg) :

$$10x + 25y \leq 170 \Leftrightarrow 2x + 5y \leq 34$$

2) Contrainte de budget ($\leq 45\,000$ F) :

$$3\,500x + 6\,000y \leq 45\,000 \Leftrightarrow 7x + 12y \leq 90$$

3) Contraintes minimales :

$$x \geq 2 \text{ et } y \geq 3$$

Résolution (recherche des couples (x, y) possibles)

On teste les valeurs possibles de y à partir de 3, puis on détermine x à l'aide des deux inégalités : $2x + 5y \leq 34$ et $7x + 12y \leq 90$, avec $x \geq 2$.

Ensemble des solutions (x, y)

y (tas 25 kg)	x possibles (tas 10 kg)	Poids total (kg)	Coût total (F CFA)
3	2, 3, 4, 5, 6, 7	95 à 145	25 000 à 42 500
4	2, 3, 4, 5, 6	120 à 160	31 000 à 45 000
5	2, 3, 4	145 à 165	37 000 à 44 000
6	2	170 à 170	43 000 à 43 000

Ainsi, tous les couples (x, y) suivants conviennent :

(2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (7, 3),

(2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (2, 5),

(3, 5), (4, 5), (2, 6)

Choix intéressants (selon l'objectif)

- Utiliser exactement tout le budget (45 000 F) : (x, y) = (6, 4).
Poids = $10 \times 6 + 25 \times 4 = 160$ kg ; Coût = $3\,500 \times 6 + 6\,000 \times 4 = 45\,000$ F.
- Remplir au maximum le coffre (170 kg) : (x, y) = (2, 6).
Poids = $10 \times 2 + 25 \times 6 = 170$ kg ; Coût = $3\,500 \times 2 + 6\,000 \times 6 = 43\,000$ F.

Conclusion

La maman de Yao peut choisir n'importe quel couple (x, y) de la liste ci-dessus : il respecte à la fois la capacité du coffre (≤ 170 kg), le budget ($\leq 45\,000$ F) et les minimums ($x \geq 2$ et $y \geq 3$).