Leçon 1

ÉTUDE DE FONCTIONS POLYNÔMES ET DE FONCTIONS RATIONNELLES

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Limite d'une fonction polynôme en un point

On considère la fonction polynôme *f* telle que : **f(x) = x² - 3**.

1. Recopie et complète le tableau suivant :

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	0,61	0,9601	0,996001	0,99960001	1	1,00040001	1,004001	1,0401	1,41

2. Lorsque *x* prend des valeurs de plus en plus proches de 2, de quelle valeur se rapproche *f(x)* ?

Réponse : f(x) se rapproche de 1 quand x se rapproche de 2.

3. Compare cette valeur à *f(2).*

Exercice de fixation

Exercice 1-1

Recopie et complète l'énoncé suivant par le terme qui convient.

Soient *a* et *k*, des nombres réels et *n* un nombre entier naturel.

On a : $\lim_{x\to a} k = k$ et $\lim_{x\to a} x^n = a^n$.

En général, la limite d'une fonction polynôme *f* en un point *a* est égale à : *f(a).*

On note : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exercice 1-2

Réponses : 1A, 2B, 3A, 4C, 5B, 6C, 7A, 8B.

Exercice 1-3 : Calcul de limites

On peut remplacer x par la valeur vers laquelle il tend (continuité des polynômes et des constantes).

a) $\lim_{x\to -10} 3/4 = 3/4$

b) $\lim_{x\to -\sqrt{3}} x^2 = 3$

c) $\lim_{x\to 2}(-3x + 4) = -2$

d) $\lim_{x\to -1}(x^2 + 3) = 4$

e) $\lim_{x\to 1}(x - 2)(2x + 3) = -5$

f) $\lim_{x\to -1}(x^3 + 3x^2 + 2x - 3) = -3$

Activité 2 Limite à gauche en a et limite à droite en a de la fonction: $x \mapsto \frac{1}{x-a}$

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	3	3,0001	3,001	3,01	3,1
f(x)	-10	-100	-1000	-10000	**non défini**	10000	1000	100	10

2) Quand $x \to 3^-$, (x - 3) est négatif et très proche de 0, donc $f(x) \to -\infty$.

3) Quand $x \to 3^+$, (x - 3) est positif et très proche de 0, donc $f(x) \to +\infty$.

Conclusion : la droite x = 3 est une asymptote verticale de la courbe de f.

Exercices de fixation

Exercice 2-1 : Limites

Consigne : réponds par **VRAI** si la limite donnée est juste ou par **FAUX** si elle est fausse.

N°	**Limite donnée**	**Réponse**
1	$\lim_{x\to 0^-} 1/x = +\infty$	FAUX
2	$\lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$	VRAI
3	$\lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$	VRAI
4	$\lim_{x\to 0^+} 1/x = -\infty$	FAUX

5	$\lim_{x\to a^+} 1/(x-a) = +\infty$	VRAI
6	$\lim_{x\to a^+} 1/(x-a) = -\infty$	FAUX
7	$\lim_{x\to a^-} 1/(x-a) = +\infty$	FAUX
8	$\lim_{x\to a^-} 1/(x-a) = -\infty$	VRAI

Remarque : 0- signifie « x tend vers 0 par valeurs inférieures » et 0+ signifie « par valeurs supérieures ». (Idem pour a- et a+.)

Exercice 2-2 — Limites

Consigne : Recopie et relie chaque limite de la colonne de gauche à son correspondant dans la colonne de droite.

Corrections

- $\lim_{x\to 1^+} 1/(x-1) = +\infty$
- $\lim_{x\to -1^-} 1/(x+1) = -\infty$
- $\lim_{x\to -2^-} 1/(x+2) = -\infty$

Exercice 2-3

a) $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = +\infty$

d) $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$

Activité 3 Limites d’une fonction rationnelle

3.1. Limite en un point où la fonction est définie

On considère la fonction rationnelle *g* définie par : $\mathbf{g(x) = (x^2 - 2x + 5) / (2x + 1)}$.

1) a) Ensemble de définition

Le dénominateur ne doit pas être nul : $2x + 1 \neq 0$, donc $x \neq -1/2$.

Ainsi, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$.

b) Tableau de valeurs (arrondi à 4 décimales) :

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
g(x)	1,4321	1,3423	1,3342	1,3334	1,3333	1,3332	1,3324	1,3245	1,2531

2) Limite lorsque x → 1

Comme $2\cdot 1 + 1 = 3 \neq 0$, la fonction g est continue en 1.

Donc, $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = (1 - 2 + 5) / (2 + 1) = 4/3 \approx 1,3333$.

3) Comparaison avec g(1)

La valeur vers laquelle g(x) s’approche quand x se rapproche de 1 est 4/3, et c’est exactement g(1).

Exercices de fixation

Exercices de fixation - Limites (Correction)

Exercice 3-1-1

Pour chaque ligne du tableau, une seule valeur de la limite est correcte. Écris le numéro de la limite suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Réponse	Valeur de la limite
1	C	1
2	B	2
3	A	-2
4	B	3

Justifications rapides (par substitution directe) :

- 1) $\lim_{x\to -2} (3x+4)/x = (3\times(-2)+4)/(-2) = 1$
- 2) $\lim_{x\to 2} 3x/(x+1) = 3\times 2/(2+1) = 2$
- 3) $\lim_{x\to -1} -4x^2/(x^2+1) = -4\times(-1)^2/((-1)^2+1) = -2$
- 4) $\lim_{x\to 1} (x^3+2x+3)/(x+1) = (1^3+2\times 1+3)/(1+1) = 3$

Exercice 3-1-2

On considère la fonction rationnelle f définie sur ℝ \ {-1} par :

f(x) = (x² - 3x + 2) / (x + 1)

Détermine :

- a) lim(x→1) f(x) = 0
- b) lim(x→2) f(x) = 0
- c) lim(x→0) f(x) = 2

Remarque : 1, 2 et 0 ne rendent pas le dénominateur nul (x+1≠0). La fonction est donc continue en ces points et les limites se calculent par substitution directe.

3.2. Limite d'une fonction rationnelle en un point qui annule le numérateur et le dénominateur

Étude d'une fonction rationnelle – Limite en 2

Énoncé

Soit la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : f(x) = (x² − 4) / (x − 2).

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) a) Recopier puis compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

b) Déterminer la limite en 2 de f.

3) a) Factoriser x² − 4 et justifier que, pour x ≠ 2, f(x) = x + 2.

b) Déduire-en que lim_{x→2} f(x) = 4.

Corrigé

1) Domaine : le dénominateur x − 2 ne doit pas être nul, donc x ≠ 2. Ainsi, D_f = ℝ \ {2}.

2) a) Pour x ≠ 2, on peut écrire f(x) = x + 2 (voir question 3). On complète alors le tableau :

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	3,9	3,99	3,999	3,9999	Non défini	4,0001	4,001	4,01	4,1

2) b) D'après le tableau, quand x se rapproche de 2 (par valeurs inférieures ou supérieures), f(x) se rapproche de 4. Donc lim_{x→2} f(x) = 4.

3) a) On factorise : x² − 4 = (x − 2)(x + 2). Ainsi, pour x ≠ 2 : f(x) = (x − 2)(x + 2) / (x − 2) = x + 2.

3) b) Alors lim_{x→2} f(x) = lim_{x→2} (x + 2) = 2 + 2 = 4.

Exercices de fixation

3-2-1) Étapes manquantes

1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)x}{(x-2)(3x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{3x+2}=\frac{2}{3\cdot 2+2}=\frac{1}{4}$$

2.

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{x+2}=\frac{2(-1)-1}{-1+2}=-3$$

3-2-2) Calcule les limites

a)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1$$

c)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+2}=1$$

3.3. Limite d'une fonction rationnelle en un point qui annule le dénominateur et n'annule pas le numérateur

On considère les fonctions définies sur ℝ \ {2} :

p(x) = (x + 4)/(x − 2) et q(x) = (x − 4)/(x − 2)

1) Étude préliminaire

a) Ensembles de définition. Les deux fonctions ont le même dénominateur (x − 2). Elles sont donc définies pour tout réel x ≠ 2 :

Dp = Dq = ℝ \ {2}.

b) Limites de 1/(x − 2) en 2.

• Quand $x \to 2^-$, alors $(x - 2) \to 0^-$, donc $1/(x - 2) \to -\infty$.
• Quand $x \to 2^+$, alors $(x - 2) \to 0^+$, donc $1/(x - 2) \to +\infty$.
c) Signe de $\lim(x + 4)$ quand $x \to 2$.
$\lim(x + 4) = 2 + 4 = 6$, donc la limite est positive.
d) Signe de $\lim(x - 4)$ quand $x \to 2$.
$\lim(x - 4) = 2 - 4 = -2$, donc la limite est négative.
2) Tableau de valeurs et limites en 2
a) Tableau de valeurs. Pour $x \neq 2$, on calcule $q(x) = (x - 4)/(x - 2)$ et $p(x) = (x + 4)/(x - 2)$.

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
q(x)	21	201	2001	20001	Non défini	−19999	−1999	−199	−19
p(x)	−59	−599	−5999	−59999	Non défini	60001	6001	601	61

b) Limites à gauche et à droite de q en 2.
Comme $(x - 4) \to -2$ (négatif) quand $x \to 2$:
• Si $x \to 2^-$, alors $(x - 2) \to 0^-$ et $(-2)/(0^-) \to +\infty$, donc $\lim_{x\to 2^-} q(x) = +\infty$.
• Si $x \to 2^+$, alors $(x - 2) \to 0^+$ et $(-2)/(0^+) \to -\infty$, donc $\lim_{x\to 2^+} q(x) = -\infty$.
c) Limites à gauche et à droite de p en 2.
Comme $(x + 4) \to 6$ (positif) quand $x \to 2$:
• Si $x \to 2^-$, alors $6/(0^-) \to -\infty$, donc $\lim_{x\to 2^-} p(x) = -\infty$.
• Si $x \to 2^+$, alors $6/(0^+) \to +\infty$, donc $\lim_{x\to 2^+} p(x) = +\infty$.

Exercices de fixation

Corrigé

3-3-1 Calculer les limites suivantes
1. $\lim_{x \to 2^+} x / (x - 2) \Rightarrow +\infty$
Numérateur → 2 (positif) et dénominateur → 0^+, donc le quotient → $+\infty$.
2. $\lim_{x \to 2^+} (x + 2) / (x - 2) \Rightarrow +\infty$
Numérateur → 4 (positif) et dénominateur → 0^+, donc le quotient → $+\infty$.
3. $\lim_{x \to -2^-} (x + 1) / (x + 2) \Rightarrow +\infty$
Numérateur → −1 (négatif) et dénominateur → 0^-, donc $(-)/(-) \to +\infty$.
4. $\lim_{x \to -2^+} (2x) / (x + 2) \Rightarrow -\infty$
Numérateur → −4 (négatif) et dénominateur → 0^+, donc $(-)/(+) \to -\infty$.

3-3-2 Calculer les limites suivantes
1. $\lim_{x \to 1^-} (2x + 5) / (x - 1) \Rightarrow -\infty$
Numérateur → 7 (positif) et dénominateur → 0^-, donc $(+)/(-) \to -\infty$.
2. $\lim_{x \to 1^+} (2x + 5) / (x - 1) \Rightarrow +\infty$
Numérateur → 7 (positif) et dénominateur → 0^+, donc $(+)/(+) \to +\infty$.
3. $\lim_{x \to -3^-} (x - 3) / (x + 3) \Rightarrow +\infty$
Numérateur → −6 (négatif) et dénominateur → 0^-, donc $(-)/(-) \to +\infty$.
4. $\lim_{x \to -3^+} (2x + 7) / (x(x + 3)) \Rightarrow -\infty$
Numérateur → 1 (positif). Quand $x \to -3^+$, on a $x < 0$ et $(x + 3) > 0$, donc $x(x + 3) \to 0^-$; ainsi $(+)/(0^-) \to -\infty$.

Activité 4 Limites à l'infini de fonctions élémentaires

: Tableau de valeurs et interprétation en termes de limites
1) Recopie puis complète le tableau suivant :

x	-10^3	-10^5	-10^8	-10^{10}		10^3	10^5	10^8	10^{10}
x^2	10^6	10^{10}	10^{16}	10^{20}		10^6	10^{10}	10^{16}	10^{20}
x^3	-10^9	-10^{15}	-10^{24}	-10^{30}		10^9	10^{15}	10^{24}	10^{30}
$1/x$	-10^{-3}	-10^{-5}	-10^{-8}	-10^{-10}		10^{-3}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
$1/x^2$	10^{-6}	10^{-10}	10^{-16}	10^{-20}		10^{-6}	10^{-10}	10^{-16}	10^{-20}

2) Interprète en termes de limite les résultats du tableau :
Quand $x \to +\infty$:

- $x^2 \to +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $x^3 \to +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
- $1/x \to 0^+$, donc $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$
- $1/x^2 \to 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} 1/x^2 = 0$

Quand $x \to -\infty$:

- $x^2 \to +\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- $x^3 \to -\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $1/x \to 0^-$, donc $\lim_{x\to-\infty} 1/x = 0$
- $1/x^2 \to 0$, donc $\lim_{x\to-\infty} 1/x^2 = 0$

Exercices de fixation

Exercice 4-1 – Relier chaque limite à sa valeur

On relie chaque limite de la colonne de gauche à la valeur correspondante :

Limite	Valeur
$\lim_{x\to+\infty} 1/x$	0
$\lim_{x\to-\infty} x^2$	$+\infty$
$\lim_{x\to-\infty} x^3$	$-\infty$
$\lim_{x\to-\infty} 1/x$	0
$\lim_{x\to-\infty} k$ (k constant)	k

Exercice 4-2 – Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
3. $\lim_{x\to-\infty} 5 = 5$
4. $\lim_{x\to+\infty} (-7) = -7$
5. $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$

Activité 5 Opérations sur les limites

On admet que :

- $\lim_{x\to0^-} (1/x + 200) = -\infty$
- $\lim_{x\to0^-} (1 - 1/x) = +\infty$

1) Recopie puis complète le tableau suivant (tableau complété ci-dessous).

$\lim_{x\to-2} x^2 = 4$	$\lim_{x\to0^-} 1/x = -\infty$	$\lim_{x\to0^+} 1/x = +\infty$	$\lim_{x\to0^+} 1/x = +\infty$	$\lim_{x\to0^+} 1/x = +\infty$	$\lim_{x\to0^+} 2/x = +\infty$
$\lim_{x\to-2} x^3 = -8$	$\lim_{x\to0^-} 200 = 200$	$\lim_{x\to0^+} 2/x = +\infty$	$\lim_{x\to0^+} (1 - 1/x) = -\infty$	$\lim_{x\to0^+} (-2/x) = -\infty$	$\lim_{x\to0^+} (-1/x) = -\infty$
$\lim_{x\to-2} (x^2 + x^3) = -4$	$\lim_{x\to0^-} (1/x + 200) = -\infty$	$\lim_{x\to0^+} (1/x + 2/x) = +\infty$	$\lim_{x\to0^+} (1/x + 1 - 1/x) = 1$	$\lim_{x\to0^+} (1/x - 2/x) = -\infty$	$\lim_{x\to0^+} (2/x - 1/x) = +\infty$

2) Remarques (simplifications utiles) :

- $1/x + 2/x = 3/x$.
- $1/x + 1 - 1/x = 1$ (pour $x \neq 0$).
- $1/x - 2/x = -1/x$.
- $2/x - 1/x = 1/x$.

Exercices de fixation

Exercice 5-1-1

On donne :

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -7$
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 9$
- $\lim_{x\to+\infty} t(x) = +\infty$

Calcule :

Expression	Limite $(x\to+\infty)$	Conclusion
$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x))$	$-7 + (+\infty)$	$+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + h(x))$	$-7 + 9$	2
$\lim_{x\to+\infty} (g(x) + h(x))$	$+\infty + 9$	$+\infty$

lim(x→+∞) (g(x) + t(x))	+∞ + +∞	+∞

Exercice 5-1-2
Calcule les limites suivantes :
1) lim(x→2) [2x/(x−1) + (x²−4)/(x−2)]
On factorise : x² − 4 = (x−2)(x+2), donc (x²−4)/(x−2) = x+2 (pour x≠2).
Alors la limite vaut : 2x/(x−1) ⟶ 4 et x+2 ⟶ 4, donc la somme ⟶ 8.
Conclusion : lim(x→2) [2x/(x−1) + (x²−4)/(x−2)] = 8.

2) lim(x→1⁺) (−1000 + 1/(x−1))
Quand x→1⁺, on a x−1→0⁺ donc 1/(x−1)→+∞. Le terme −1000 ne change pas la divergence.
Conclusion : lim(x→1⁺) (−1000 + 1/(x−1)) = +∞.

3) lim(x→−1⁻) [(2x+1)/(x+1) + 1/(x+1)]
On met au même dénominateur : (2x+1)/(x+1) + 1/(x+1) = (2x+2)/(x+1) = 2(x+1)/(x+1) = 2 (pour x≠−1).
Conclusion : lim(x→−1⁻) [(2x+1)/(x+1) + 1/(x+1)] = 2.

4) lim(x→1⁺) [(x−7)/(x−1) + 1/(x−1)]
On regroupe : (x−7)/(x−1) + 1/(x−1) = (x−6)/(x−1).
Quand x→1⁺ : x−6→−5 (négatif) et x−1→0⁺ (positif), donc (x−6)/(x−1) ⟶ −∞.
Conclusion : lim(x→1⁺) [(x−7)/(x−1) + 1/(x−1)] = −∞.

5.2. Limite du produit de deux fonctions

- $\lim\limits_{x\to-2}(x^2\times x^3)=\lim\limits_{x\to-2}x^5=-32$
- $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x}(x^2+x)\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{x^2+x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\times\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\times x^3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\times\frac{-2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{-2}{x^2}\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2}{x}\times\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2}{x^2}\right)=+\infty$

Exercices de fixation

Exercice 5-21

On donne :
$\lim_{x\to a}f(x)=-7,\quad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a}h(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to a}t(x)=\frac{1}{14}$

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)t(x)=(-7)\times\frac{1}{14}=-\frac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=(-7)\times(+\infty)=-\infty$
3. $\lim\limits_{x\to a}g(x)h(x)=(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$
4. $\lim\limits_{x\to a}f(x)h(x)=(-7)\times(-\infty)=+\infty$

Exercice 5-22

1. $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{2x}{x-1} \times \frac{x-4}{2x-2} \right)$

$$\frac{2x}{x-1} \times \frac{x-4}{2(x-1)} = \frac{x(x-4)}{(x-1)^2} \xrightarrow[x \to 1^+]{} \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x+2} \times \frac{x}{x-1} \right)$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \times \frac{x}{x-1} = \frac{x(x+1)}{x+2} \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}$$

3. $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{2x+5}{x+1} \times \frac{x}{x+1} \right)$

$$\frac{x(2x+5)}{(x+1)^2} \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{1 \cdot 7}{4} = \frac{7}{4}$$

4. $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{x^2}{x+1} \times \frac{1}{x-1} \right)$

$$\frac{x^2}{(x+1)(x-1)} \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{1}{0^-} = -\infty$$

5.3. Limite de l'inverse d'une fonction

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{2x^2+3} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x^2+3} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Exercices de fixation

53-1 : Complète le tableau

- Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$, alors

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3}$$

- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$$

- Si $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{h(x)} = 0$$

- Si $\lim\limits_{x \to 3} k(x) = 0$ et $k(x) > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, alors

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{k(x)} = +\infty$$

- Si $\lim\limits_{x \to 1} t(x) = 0$ et $t(x) < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{t(x)} = -\infty$$

5-3-2

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$ (en fait 0^+ car $x^2-1>0$).
2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$ (aussi 0^+).
3. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$ (car $x^2-1 \to 0^-$).
4. $\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$ (car $x^2-1 \to 0^-$).

5.4. Limite du quotient de deux fonctions

1) Limites séparées

• Comme x ⟶ 1, on a x² ⟶ 1, donc : **lim (x⟶1−) (x² − 2) = 1 − 2 = −1.**

• Quand x ⟶ 1−, on a x − 1 ⟶ 0−, donc : **lim (x⟶1−) 1/(x − 1) = −∞.**

2) Limite de f(x)

On écrit f(x) = (x² − 2) × 1/(x − 1). Ainsi : **lim (x⟶1−) f(x) = (−1) × (−∞) = +∞.**

3) Compléter la dernière ligne du tableau

On complète la ligne lim f(x) × 1/g(x) (c'est-à-dire f(x)/g(x)) selon les cas suivants :

lim (x⟶a) f(x) =	ℓ	ℓ	ℓ	+∞		−∞		−∞	0
lim (x⟶a) g(x) =	ℓ′, ℓ′ ≠ 0	+∞	−∞	ℓ′, ℓ′ > 0	ℓ′, ℓ′ < 0	ℓ′, ℓ′ > 0	ℓ′, ℓ′ < 0	+∞	0
lim (x⟶a) f(x) × 1/g(x) =	ℓ / ℓ′	0	0	+∞	−∞	−∞	+∞	FI : ∞ × 0	FI : 0 × ∞

Exercices de fixation

Exercice 5-41 – Compléter la limite du quotient

Recopie et complète les égalités suivantes par 0 ; +∞ ; −∞ ou « on ne peut conclure ».
On suppose que a est soit un nombre réel, soit −∞, soit +∞.

lim x⟶a f(x) =	−500	+∞	−∞	+∞	0	−∞	−∞	0
lim x⟶a g(x) =	+∞	−100	−100	−∞	+∞	0	−∞	0
lim x⟶a f(x)/g(x) =	0	−∞	+∞	on ne peut conclure	0	on ne peut conclure	on ne peut conclure	on ne peut conclure

Exercice 5-42 – Déterminer les limites

a) lim (x⟶0−) (−3/x) = +∞
b) lim (x⟶−2−) (−2/(x+2)) = +∞
c) lim (x⟶3+) (3/(x−3)) = +∞
d) lim (x⟶−3+) (−2/(x+3)) = −∞

Exercice 5-43 – Limites de g et de f/g en +∞

1. f(x) = x − 1 + 1/(x+3) et g(x) = 2 − 1/x
• lim (x⟶+∞) g(x) = 2
• lim (x⟶+∞) f(x)/g(x) = +∞

2. f(x) = 6 + 1/(x+1) et g(x) = x² − 1/(x+3)
• lim (x⟶+∞) g(x) = +∞
• lim (x⟶+∞) f(x)/g(x) = 0

3. f(x) = 2x + 1/(x+3) et g(x) = x
• lim (x⟶+∞) g(x) = +∞
• lim (x⟶+∞) f(x)/g(x) = 2

4. $f(x) = -4/(x-3)$ et $g(x) = 1/(x+1)$
• $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$
• $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = -4$

Activité 6 Limite à l'infini d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle

1) Étude de $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$

a) Factorisation :
$P(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3x^2 - 3x^2\cdot(4/(3x)) + 3x^2\cdot(1/(3x^2))$
Donc $P(x) = 3x^2(1 - 4/(3x) + 1/(3x^2))$.
b) Limites des facteurs :
• Quand $x \to +\infty$:
- $3x^2 \to +\infty$ (car $x^2 \to +\infty$).
- $4/(3x) \to 0$ et $1/(3x^2) \to 0$, donc $(1 - 4/(3x) + 1/(3x^2)) \to 1$.
• Quand $x \to -\infty$:
- $3x^2 \to +\infty$ (car $x^2 \to +\infty$).
- $4/(3x) \to 0$ et $1/(3x^2) \to 0$, donc $(1 - 4/(3x) + 1/(3x^2)) \to 1$.
c) Limites de P :
Comme $P(x) = 3x^2(1 - 4/(3x) + 1/(3x^2))$ et que le second facteur tend vers 1 :
• $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.
• $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$.
d) Comparaison avec $3x^2$:
On a $P(x)/(3x^2) = 1 - 4/(3x) + 1/(3x^2) \to 1$ quand $x \to \pm\infty$.
Ainsi, $P(x) \sim 3x^2$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$ (même comportement à l'infini).

2) Étude de $Q(x) = (2x^2 - x + 1) / (x - 7)$

a) Mise sous forme produit :
$2x^2 - x + 1 = 2x^2(1 - 1/(2x) + 1/(2x^2))$.
$x - 7 = x(1 - 7/x)$.
Donc
$Q(x) = [2x^2(1 - 1/(2x) + 1/(2x^2))] / [x(1 - 7/x)]$
$= (2x^2/x) \cdot [(1 - 1/(2x) + 1/(2x^2)) / (1 - 7/x)]$.
b) Limites des facteurs :
• Quand $x \to +\infty$:
- $2x^2/x = 2x \to +\infty$.
- $(1 - 1/(2x) + 1/(2x^2)) \to 1$ et $(1 - 7/x) \to 1$, donc le quotient $\to 1$.
• Quand $x \to -\infty$:
- $2x^2/x = 2x \to -\infty$.
- $(1 - 1/(2x) + 1/(2x^2)) \to 1$ et $(1 - 7/x) \to 1$, donc le quotient $\to 1$.
c) Limites de Q :
Comme $Q(x) = (2x^2/x) \cdot [(1 - 1/(2x) + 1/(2x^2)) / (1 - 7/x)]$ et que le second facteur tend vers 1 :
• $\lim_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$.
• $\lim_{x\to-\infty} Q(x) = -\infty$.
d) Comparaison avec $2x^2/x$:
On a $Q(x) / (2x^2/x) = [(1 - 1/(2x) + 1/(2x^2)) / (1 - 7/x)] \to 1$ quand $x \to \pm\infty$.
Ainsi, $Q(x) \sim 2x$ (ou encore $Q(x) \sim 2x^2/x$) quand $x \to \pm\infty$.
Remarque (facultative) : par division euclidienne, $Q(x) = 2x + 13 + 92/(x - 7)$, donc l'asymptote oblique est $y = 2x + 13$.

Exercices de fixation

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+5)^3$

   Quand $x \to -\infty$, $x+5 \to -\infty$ et le cube conserve le signe $\Rightarrow -\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 5)$

   Terme dominant : x^2 (coefficient > 0) $\Rightarrow +\infty$.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + x^2 - 3 + 10) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + x^2 + 7)$

   Terme dominant : $-2x^3$. Or $x^3 \to -\infty$ donc $-2x^3 \to +\infty \Rightarrow +\infty$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{-x + 4}$

   Degrés : 2 au numérateur et 1 au dénominateur, donc $\sim \frac{2x^2}{-x} = -2x \to -\infty$.

   Donc la limite vaut $-\infty$.

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+1}{8x+5}$

   Même degré (1) : limite = rapport des coefficients directeurs $\frac{3}{8}$.

   Donc $\frac{3}{8}$.

Activité 7 Notion d'asymptote

On a $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Quand $x \to 1$, le numérateur $2x + 1 \to 3 > 0$.

- Si $x \to 1^-$ (par valeurs **inférieures** à 1), alors $x - 1 \to 0^-$ donc $\dfrac{3}{0^-} \to -\infty$.
- Si $x \to 1^+$ (par valeurs **supérieures** à 1), alors $x - 1 \to 0^+$ donc $\dfrac{3}{0^+} \to +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty}$$

Donc $x = 1$ est une **asymptote verticale**.

Exercices de fixation

7-2-1 — Définition (phrase réordonnée)

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Si b est un nombre réel et si b est la limite de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$), alors la droite d'équation $y = b$ est l'asymptote horizontale à (C) en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

7-2-2 — Complète

1. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$, alors la droite $y = -3$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, alors la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

7-2-3 — Justification pour $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$$h(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, on a $\frac{1}{x^2} \to 0$, donc

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Ainsi, la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

7.3. Asymptote oblique

On a :

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

Donc

$$f(x) - (x+2) = \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right) - (x+2) = \frac{1}{x}.$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+2)] = 0 \ \text{ et } \ \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x+2)] = 0.}$$

Conclusion : la droite $(D) : y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe de f quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$.

Exercices de fixation

7-3-1

Soit f une fonction, (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Une droite (D) d'équation y = ax + b avec a ≠ 0 est une asymptote oblique à (C) en +∞ (respectivement en −∞) lorsque la limite en +∞ (respectivement en −∞) de f est infinie et si la limite en +∞ (respectivement en −∞) de la différence

f(x) − (ax + b)

est nulle.

7-3-2

1. Si lim(x→+∞) (f(x) − 3x − 1) = 0, alors la droite d'équation y = 3x + 1 est une asymptote oblique à (C) en +∞.
2. Si lim(x→−∞) (f(x) + 2x) = 0, alors la droite d'équation y = −2x est une asymptote oblique à (C) en −∞.
3. Si lim(x→−∞) (f(x) + x − 3) = 0, alors la droite d'équation y = −x + 3 est une asymptote oblique à (C) en −∞.

7-3-3

Soit la fonction h définie sur R\{1} par : h(x) = x + x/(x − 1). Justifie que la droite (D) d'équation y = x + 1 est une asymptote oblique à (C) en −∞ et en +∞.

On étudie la différence :

h(x) − (x + 1) = [x + x/(x − 1)] − (x + 1) = x/(x − 1) − 1 = 1/(x − 1).

Or, lim(x→+∞) 1/(x − 1) = 0 et lim(x→−∞) 1/(x − 1) = 0.

Donc, la droite (D) : y = x + 1 est une asymptote oblique à (C) en +∞ et en −∞.

7-3-4

Soit la fonction q définie sur R\{−1 ; 1} par : q(x) = x + x/(x² − 1). Calcule lim(x→−∞) (q(x) − x). Interprète graphiquement le résultat.

On a :

q(x) − x = x/(x² − 1).

Quand x → −∞, on a x/(x² − 1) → 0 (car c'est de l'ordre de 1/x).

Ainsi, lim(x→−∞) (q(x) − x) = 0.

Interprétation : la droite y = x est une asymptote oblique à la courbe de q en −∞.

Activité 8 Étude et représentation graphique d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle

8.1. Étude et représentation graphique d'une fonction polynôme

On donne la fonction *f* définie sur ℝ par : **f(x) = x³ − 9x² + 24x − 16.**

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Limites de f en −∞ et en +∞

Le terme dominant de f(x) est x³ (coefficient positif). Donc :

• lim_{x→−∞} f(x) = −∞

• lim_{x→+∞} f(x) = +∞

2) Dérivée, signe de f'(x) et variations de f

a) Dérivée :

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = 3(x - 2)(x - 4)$.

b) Signe de f'(x) :

Comme $3 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(x - 2)(x - 4)$.

- $f'(x) > 0$ si $x < 2$ ou si $x > 4$
- $f'(x) = 0$ si $x = 2$ ou si $x = 4$
- $f'(x) < 0$ si $2 < x < 4$

c) Variations de f :

On calcule : $f(2) = 4$ et $f(4) = 0$.

- f est croissante sur $(-\infty, 2]$
- f est décroissante sur $[2, 4]$
- f est croissante sur $[4, +\infty)$

d) Tableau de variation :

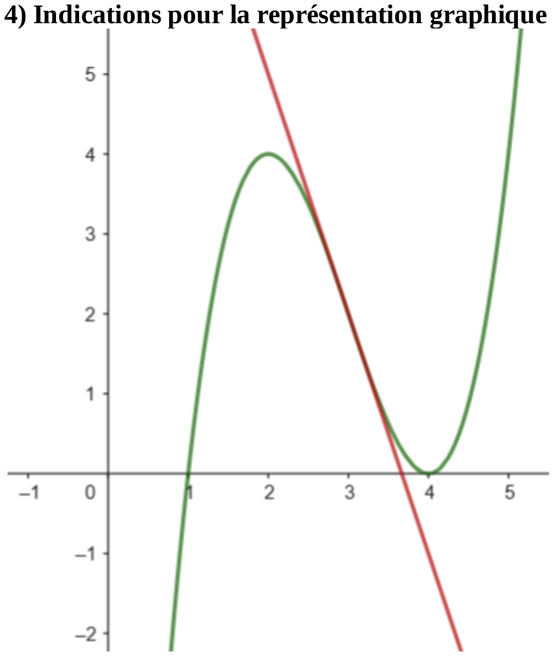
x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

3) Équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3

On calcule : $f'(3) = 3(9 - 18 + 8) = -3$ et $f(3) = 2$.

L'équation de la tangente en $x = 3$ est : $y - 2 = -3(x - 3)$, soit : $y = -3x + 11$.

4) Indications pour la représentation graphique de (T) et (C)



Points utiles :

- A(2, 4) : maximum local
- B(4, 0) : minimum local
- C(3, 2) : point de tangence
- (T) : $y = -3x + 11$

Factorisation utile : $f(x) = (x - 4)^2(x - 1)$.

Donc la courbe coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ et touche l'axe en $x = 4$ (racine double).

Exercices de fixation

Exercices de fixation

8.1.1

a) $f(x) = x^2 - 4x$ $f'(x) = 2x - 4$	b) $g(x) = 3x^2 + 4$ $g'(x) = 6x$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

c) $k(x) = -2x^2 + 10x - 6$

$$k'(x) = -4x + 10$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
k	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

d) $k(x) = -x^2 + 10x - 6$

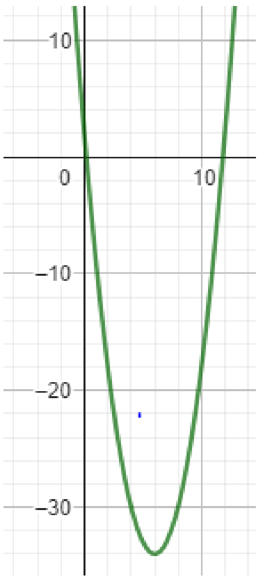
$$k'(x) = -4x + 10$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
k	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

8.1.2) $f(x) = x^2 - 12x + 2$

$$f'(x) = 2x - 12$$

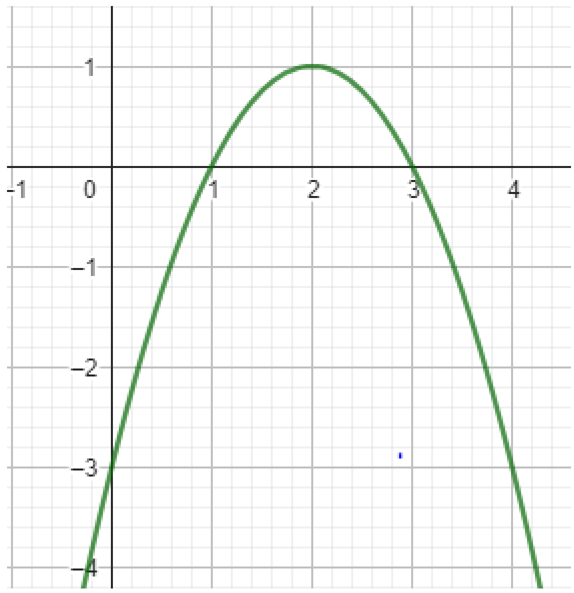
x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-36	$\nearrow$	$+\infty$



8.1.3) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

$$f'(x) = -2x + 4$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$



8.1.4

$$f(x) = (3x-2)(x+2)^2$$
$$f'(x) = 3(x+2)^2 + (3x-2) \times 2(x+2)$$
$$f'(x) = (x+2)(9x+2)$$

f est croissante sur les intervalles $]-\infty;-2]$ et $\left[-\frac{2}{9};+\infty\right[$.

f est décroissante sur l' intervalle $\left[-2\,;-\frac{2}{9}\right]$.

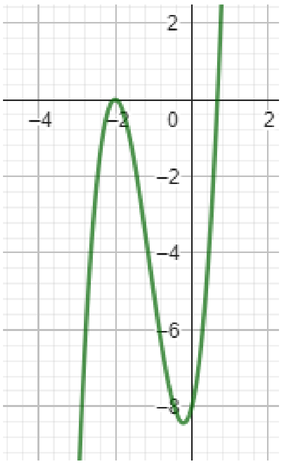
8.1.5)

$$f(x) = x^3 + 1 - 3x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f'(x) = 3(x+1)(x-1)$$

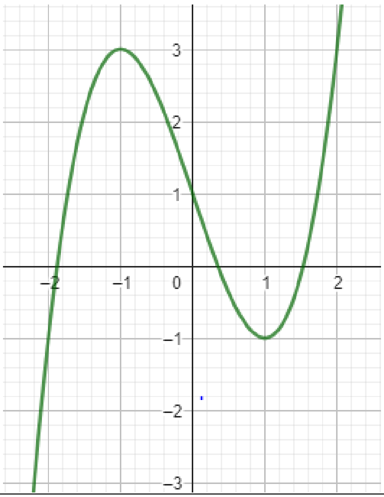
f est croissante sur les intervalles $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$.

f est décroissante sur l' intervalle $[-1\,;1]$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{9}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{7220}{729}$	$\nearrow$	$+\infty$



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



8.2. Étude et représentation graphique d'une fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 1}$$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+2x-4}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 4}{x - 1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$

2. $x^2 + 2x - 4 = (x - 1)(x + 3) - 1$

$$f(x) = x + 3 - \frac{1}{x - 1}$$

3.a) $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{1}{x-1} \times (x^2 + 2x - 4) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} \frac{1}{x-1} \times (x^2 + 2x - 4) = +\infty$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x + 3)) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x + 3)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$

Donc la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$

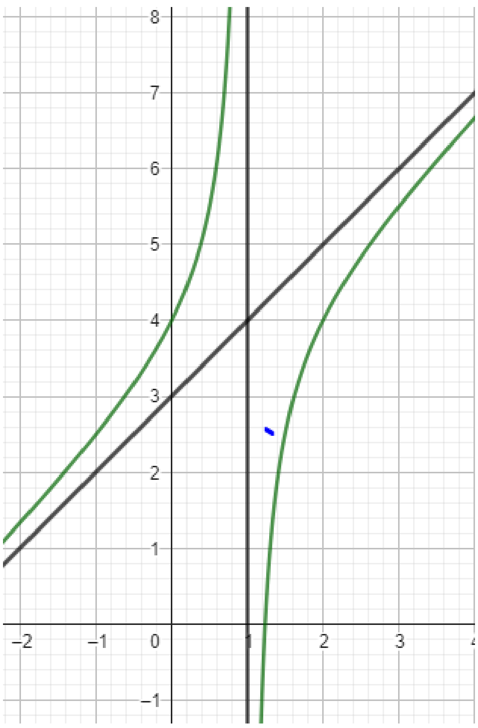
5.a) $f'(x) > 0$ sur les intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.

b) f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.

c)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6)



Exercices de fixation

8.2.1

a) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}$$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
f	0 $+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	‖	$\searrow$ 0

b) $g(x) = \frac{2x-1}{5x+2}$

$$g'(x) = \frac{9}{(5x+2)^2}$$

x	$-\infty$	$\frac{-2}{5}$	$+\infty$
$g'(x)$	$++$	‖	
g	$+\infty$ $\frac{2}{5}$ $\nearrow$ $-\infty$	‖ $\frac{2}{5}$	$\nearrow$

c) $h(x) = \frac{x^2+3x-2}{x+1}$

$$h(x) = x + 2 - \frac{4}{x+1}$$

$$h'(x) = 1 + \frac{4}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	‖	$+$
h	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

d) $k(x) = 4x + 3 - \frac{1}{3x+1}$

$$k'(x) = 4 + \frac{3}{(3x+1)^2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$k'(x)$	$+$	‖	$+$
k	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

8.2.2

$$f(x) = \frac{x}{x+2}$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{x+2} \times x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1}{x+2} \times x = +\infty$$

La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

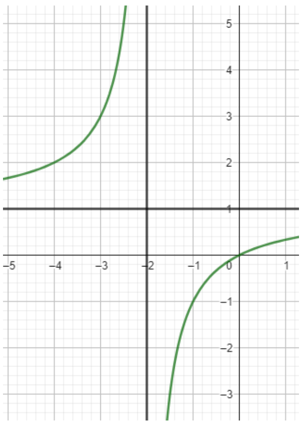
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$

f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; -2[$ et $]-2; +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	‖	$+$
h	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$



8.3. Théorème des valeurs intermédiaires

1.a) Sur l'intervalle $[-6; 1]$ la fonction g est dérivable et strictement croissante.

b) $g(-6) = -175$, $g(-1) = 5$. $g(-6) < 0$ et $g(-1) > 0$ donc $g(-6) \times g(-1) < 0$.

abscisses. L'abscisse du dit point appartient à l'intervalle $[-6; 1]$.

2) La courbe de la fonction g n'a pas de point d'intersection avec l'axe des abscisses sur l'intervalle

c) $g(-6) < 0 < g(1)$donc $0 \in [g(-6); g(1)]$ d) La courbe de la fonction g a un seul point d'intersection avec l'axe des	$[-1;1]$.Donc l'équation$g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[-1;1]$.

Exercices de fixation

8.3.1 $h(x) = -x^3 - x - 1$

$h$est dérivable et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. $h(-1) = 1$ et $h(0) = -1$; $h(-1) \times h(0) < 0$.
Donc l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[-1;0]$.

8.3.2 $q(x) = x + 1 - \frac{1}{x}$

$q$estdérivable et strictement croissante sur $]-\infty;0[$. $q\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ et $q(1) = 1$;
$q\left(\frac{1}{2}\right) =\times\ q(1) < 0$ donc l'équation $q(x) = 0$ admet une solution dans $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

8.4. Encadrement par la méthode de dichotomie

$h(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$; $h(\alpha) = 0$ et $\alpha \in [1;2]$.

$a_0 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$	$h(a_0) = \frac{5}{2}$; $h(1) = -1$; $h(2) = 12$	$h(a_0) \times h(1) < 0$ $h(a_0) \times h(2) > 0$	$\alpha \in [1; a_0]$ Amplitude : $\frac{1}{2}$
$a_1 = \frac{1+a_0}{2} = \frac{5}{4}$	$h(a_1) = \frac{3}{16}$; $h(1) = -1$; $h(a_0) = \frac{5}{2}$	$h(a_1) \times h(1) < 0$ $h(a_1) \times h(a_0) > 0$	$1 < \alpha < a_1$
$a_2 = \frac{1+a_1}{2} = \frac{9}{8}$	$h(a_2) = -\frac{109}{16}$; $h(1) = -1$; $h(a_1) = \frac{3}{16}$	$h(a_2) \times h(a_1) < 0$ $h(a_2) \times h(1) > 0$	$a_2 < \alpha < a_1$

Exercices de fixation

8.4.1 $f(x) = x^3 - 7x$

Intervalle		Centre $\frac{a+b}{2}$de $[a;b]$	$f(a)$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$f(b)$	Signe de		Amplitude de l'intervalle $[a;b]$
a	b					$f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(b)$	
2	4	3	−6	6	36	−	+	2
2	3	2,5	−6	−1,87	6	+	−	1
2,5	3	2,75	−1,87	1,5468	6	−	+	0,5
2,5	2,75	2,625	−1,87	−0,2872	1,5468	+	−	0,25
2,625	2,75	2,701	−0,2872	0 ,7978	1,5468	−	+	0,125
2,625	2,701	2,663	−0,2872	0,24384	0 ,7978	−	+	0,076

Donc 2,625< α <2,701

8.4.2 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$; $f(\alpha) = 0$ et $\alpha \in [0;4]$

Centre	Images par f	Intervalle	Amplitude
2	$f(0) = 6$; $f(4) = -26$ et $f(2) = -10$	$\alpha \in [0;2]$	2
1	$f(0) = 6$; $f(2) = -10$ et $f(1) = 1$	$\alpha \in [1;2]$	1
1,5	$f(2) = -10$, $f(1) = 1$ et $f(1{,}5) = -4{,}125$	$\alpha \in [1;1{,}5]$	0,5
1,25	$f(1) = 1$, $f(1{,}5) = -4{,}125$ et $f(1{,}25) = -1{,}4218$	$\alpha \in [1;1{,}25]$	0,25
1,125	$f(1) = 1$, $f(1{,}5) = -4{,}125$ et $f(1{,}125) = -0{,}1699$	$\alpha \in [1;1{,}125]$	0,125
1,0625	$f(1) = 1$, $f(1{,}125) = -0{,}1699$ et $f(1{,}0625) = 0{,}426$	$\alpha \in [1{,}0625;1{,}125]$	0,0625

Donc 1,0625< α <1,125

8.4.3 $f(x) = x^3 + 2x - 2$; $f(\alpha) = 0$ et $\alpha \in [0{,}7;0{,}8]$

Centre	Images par f	Intervalle	Amplitude
0,75	$f(0{,}7) = -0{,}257$; $f(0{,}8) = 0{,}11$ et $f(0{,}75) = -0{,}078$	$\alpha \in [0{,}75;0{,}8]$	0,5
0,775	; $f(0{,}75) = -0{,}078$, $f(0{,}8) = 0{,}11$et $f(0{,}775) = 0{,}154$	$\alpha \in [0{,}75;0{,}775]$	0,25
0 ,7625	$f(0{,}75) = -0{,}078$, $f(0{,}775) = 0{,}154$et $f(0{,}7625) = -0{,}03159$	$\alpha \in [0{,}7625;0{,}775]$	0,125
0 ,76875	$f(0{,}7625) = -0{,}03167$, $f(0{,}775) = 0{,}154$ et	$\alpha \in [0{,}76875;0{,}775]$	0,0625

	$f(0{,}76875) = -0{,}0081$		
0 ,771875	$f(0{,}76875) = -0{,}0081$, $f(0{,}775) = 0{,}154$ et $f(0{,}771875) = 0{,}036$	$\alpha \in [0{,}76875; 0{,}771875]$	0,03125
0,7703125	$f(0{,}76875) = -0{,}0081$, $f(0{,}771875) = 0{,}036$ et $f(0{,}7703125) = -0{,}00228$	$\alpha \in [0{,}7703125; 0{,}771875]$	0,015625
0,7710936	$f(0{,}7703125) = -0{,}00228$, $f(0{,}771875) = 0{,}036$ et $f(0{,}7710936) = 0{,}00066$	$\alpha \in [0{,}7710936; 0{,}771875]$	0,0078125

Donc 0,7710936 < α <0,771875

8.5. Encadrement par la méthode de balayage

$$g(x) = x^3 - 3x + 3$$

1)

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$g(x)$	-195	-107	-49	-15	1	5

$g(-3) < 0$ et $g(-2) > 0$ donc $-3 < \alpha < -2$.

2)

x	-3	$-2{,}9$	$-2{,}8$	$-2{,}7$	$-2{,}6$	$-2{,}5$	$-2{,}4$	$-2{,}3$	$-2{,}2$	$-2{,}1$	-2
$g(x)$	-15	$-12{,}68$	$-10{,}55$	$-8{,}58$	$-6{,}776$	$-5{,}125$	$-3{,}624$	$-2{,}267$	$-1{,}048$	$0{,}039$	1

$g(-2{,}2) < 0$ et $g(-2{,}1) > 0$ donc $-2{,}1 < \alpha < -2{,}2$.

Exercices de fixation

8.5.1 $t(x) = x^3 + x - 1$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$t(x)$	−1	−0,89	−0,79	−0,67	−0,53	−0,37	−0,18	0,43	0,31	0,62	1

$t(0{,}6) < 0$ et $t(0{,}7) > 0$ donc $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$

8.5.2

On cherche la solution $\beta \in]1;2[$ de

$$k(x) = 2x - \frac{3}{x} = 0 \qquad (x > 0).$$

Pour $x > 0$,

$$k(x) = \frac{2x^2 - 3}{x}$$

donc le **signe** de $k(x)$ est celui de $2x^2 - 3$ (car $x > 0$).

Balayage aux centièmes

- Pour $x = 1{,}22$:

$$2x^2 - 3 = 2(1{,}22)^2 - 3 = 2(1{,}4884) - 3 = 2{,}9768 - 3 = -0{,}0232 < 0$$

donc $k(1{,}22) < 0$.

- Pour $x = 1{,}23$:

$$2x^2 - 3 = 2(1{,}23)^2 - 3 = 2(1{,}5129) - 3 = 3{,}0258 - 3 = 0{,}0258 > 0$$

donc $k(1{,}23) > 0$.

Comme k change de signe entre 1,22et 1,23 la solution β est encadrée par ces **deux décimaux consécutifs d'ordre 2** :

1,22< β < 1,23

8.6. Résolution graphique et algébrique d'une inéquation du type f(x) ≥ ax + b

1.a) Graphiquement : $f(x) \geq g(x)$

Sur la figure, la courbe de f est **au-dessus** de la droite g entre les deux points d'intersection :

$$\boxed{x \in [1;4]}$$

1.b) Vérification par le calcul

$$f(x) \geq g(x) \iff 4 - \frac{4}{x} \geq x - 1$$

$$\iff 5 - x - \frac{4}{x} \geq 0$$

Comme $x > 0$, on multiplie par x sans changer le sens :

$$\iff 5x - x^2 - 4 \geq 0$$

$$\iff x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

$$\iff (x-1)(x-4) \leq 0$$

Donc :

$$\boxed{x \in [1;4]}$$

2.a) Graphiquement : $f(x) \leq g(x)$

La courbe de f est **en dessous** de g avant 1 et après 4 :

$$\boxed{x \in]0;1] \ \cup \ [4;+\infty[}$$

2.b) Vérification par le calcul

$$f(x) \leq g(x) \iff (x-1)(x-4) \geq 0$$

Donc :

$$\boxed{x \in]0;1] \ \cup \ [4;+\infty[}$$

Exercices

Exercices de renforcement

1 **Limites**

1. lim(x⟶1) 2 = 2
2. lim(x⟶−3) (2 − √3) = 2 − √3
3. lim(x⟶−1) (2x + 3) = 1
4. lim(x⟶2) (x^2 + x − 3) = 3
5. lim(x⟶−2) (x^3 + 2x^2 + x − 3) = −5
6. lim(x⟶−1) (x^4 + x^3 + 2x^2 − x − 3) = 0

2 **Limites**

1. lim(x⟶1) 2/x = 2
2. lim(x⟶−3) (2 − 3/x) = 3
3. lim(x⟶−3) (2x + 3)/(6x − 1) = 3/19
4. lim(x⟶2) 3x/(x^2 + x − 3) = 2
5. lim(x⟶−2) (x^3 + 2x^2 + x − 3)/(x + 1) = 5
6. lim(x⟶−1) (2x^2 − x + 3)/(x^2 + 1) = 3

3 **Limites**

1. $\lim_{x\to 1} [(x-1)(x-2)]/[x(x-1)] = -1$
2. $\lim_{x\to 0} (x^2 - x)/(2x) = -1/2$
3. $\lim_{x\to -3} (x^2 + x - 6)/(x + 3) = -5$
4. $\lim_{x\to 1} (3x - 3)/(x^2 - 1) = 3/2$
5. $\lim_{x\to 2} (x^2 - x - 2)/(x^2 + x - 6) = 3/5$
6. $\lim_{x\to -2} (2x^2 - x - 6)/(x^2 + 2x)$: n'existe pas (gauche = $+\infty$, droite = $-\infty$)
7. $\lim_{x\to -1} (2x^2 - x - 3)/(x^3 - x) = -5/2$

4

Limites unilatérales

1. $\lim_{x\to -2^-} 2/[x(x+2)] = +\infty$
2. $\lim_{x\to 0^+} (x^2 - 3)/[(x+2)x] = -\infty$
3. $\lim_{x\to -3^-} (x^2 + x + 4)/(x + 3) = -\infty$
4. $\lim_{x\to -1^-} (3 - x)/(x^2 - 1) = +\infty$
5. $\lim_{x\to 2^+} (x^2 - 2)/(x^2 + x - 6) = +\infty$
6. $\lim_{x\to -2^-} (x^2 + 1)/(x^2 + 2x) = +\infty$
7. $\lim_{x\to -1^+} 2x/(x^3 - x) = -\infty$

5

Limites à l'infini

1. $\lim_{x\to +\infty} (-3) = -3$
2. $\lim_{x\to -\infty} (x^2 + x - 6) = +\infty$
3. $\lim_{x\to -\infty} (2x^2 + x + 1)/(x - 3) = -\infty$
4. $\lim_{x\to +\infty} (x^2 - 2)/(x^2 + x - 6) = 1$
5. $\lim_{x\to +\infty} (x^2 - x - 2)/(x^2 + x - 6) = 1$
6. $\lim_{x\to -\infty} (2x^2 - x - 3)/(x^3 - x) = 0$
7. $\lim_{x\to +\infty} [(3 - x)/(x - 1)^2]\cdot(x^2 - x) = -\infty$

6

Limites (divergences / produit)

1. $\lim_{x\to -2} [\ 1/(x+2)^2 + 1/(x+2)\ ] = +\infty$
2. $\lim_{x\to 3} [\ (x^2 + x + 4)/(x + 3) - x/(x^2 - 9)\ ]$: n'existe pas (gauche = $+\infty$, droite = $-\infty$)
3. $\lim_{x\to 1^-} [(3 - x)/(x - 1)^2]\cdot(x^2 - x) = -\infty$
4. $\lim_{x\to +\infty} [\ (2x^2 - x - 3)/(x^3 - x)\ ]\cdot(-3x + 2) = -6$
5. $\lim_{x\to 0^+} [\ 1/x - 1/x^2 + 1/x^3\ ] = +\infty$

7

Variations (étude de dérivées)

1. $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$
- $f'(x) = -6(x - 2)$
- f croît sur $]-\infty, 2]$ puis décroît sur $[2, +\infty[$
- Maximum : $f(2) = 7$

2. $f(x) = x^3 - 9x^2 - 21x + 4$
- $f'(x) = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x + 1)(x - 7)$
- f croît sur $(-\infty, -1]$, décroît sur $[-1, 7]$, croît sur $[7, +\infty[$
- $f(-1) = 15$ (maximum local) ; $f(7) = -241$ (minimum local)

3. $f(x) = (5x - 3)/(x - 1)$ sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$
- $f(x) = 5 + 2/(x - 1)$
- $f'(x) = -2/(x - 1)^2 < 0$
- f est décroissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$

4. $f(x) = (3x - 1)/(x + 2)$ sur $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$
- $f(x) = 3 - 7/(x + 2)$
- $f'(x) = 7/(x + 2)^2 > 0$
- f est croissante sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, +\infty[$

8

f(x) = Error!

- Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- Dérivée : $f'(x) = 1 - 3/(x + 2)^2$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 3 \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{3}$ ou $x = -2 + \sqrt{3}$.
- Variations : croît sur $]-\infty, -2 - \sqrt{3}]$, décroît sur $[-2 - \sqrt{3}, -2)$, décroît sur $]-2, -2 + \sqrt{3}]$, croît sur $[-2 + \sqrt{3}, +\infty[$.
- Valeurs aux extremums : $f(-2 - \sqrt{3}) = -4 - 2\sqrt{3}$ (max local) ; $f(-2 + \sqrt{3}) = -4 + 2\sqrt{3}$ (min local).
- Asymptote verticale : $x = -2$.

9 **$f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$**

- $f'(x) = 1 - 1/x^2$.
- f décroît sur $]0, 1]$ puis croît sur $[1, +\infty[$.
- Minimum en $x = 1$: $f(1) = 2$.

10 **g(x) = Error!**

- Asymptote verticale : $x = -2$ (dénominateur nul et numérateur $\neq 0$).
- Division : $g(x) = x + 1 - 1/(x + 2)$. Donc $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$.
- Asymptote oblique : $y = x + 1$ (car $-1/(x+2) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$).
- Positions relatives : $g(x) - (x + 1) = -1/(x + 2)$. Donc $g(x) > x + 1$ si $x < -2$, et $g(x) < x + 1$ si $x > -2$.

11 **h(x) = Error!**

- Asymptote verticale : $x = 4$.
- Écriture : $h(x) = 1 + 4/(x - 4)$.
- Asymptote horizontale : $y = 1$ (car $4/(x-4) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$).

12

a) $f(x) \geq 0$: f(x) est positive ou nulle à partir de $x = 2$.

- Solution : $x \in [2 ; 3]$.

b) $f(x) \geq g(x)$: Cf est au-dessus (ou confondue avec) Cg sur $[-2 ; -1]$ puis sur $[2 ; 3]$.

- Solution : $x \in [-2 ; -1] \cup [2 ; 3]$.

c) $g(x) \geq f(x)$: Cg est au-dessus (ou confondue avec) Cf entre les deux intersections.

- Solution : $x \in [-1 ; 2]$.

13

$x \in [-5, 0[\cup [1/2, +\infty[$

14

Corrigé

1) Existence et unicité sur [0 ; 4]

• f est continue sur [0 ; 4] (polynôme).

• $f(0) = 6 > 0$ et $f(4) = 64 - 96 + 6 = -26 < 0$; donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution $\alpha \in (0 ; 4)$ telle que $f(\alpha)=0$.

• $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$. Sur $(0 ; 4)$, on a $x > 0$ et $(x - 4) < 0$, donc $f'(x) < 0$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur [0 ; 4] : l'équation $f(x)=0$ admet donc une unique solution α dans [0 ; 4].

2) Encadrement de α à 0,1 près par dichotomie

$\alpha \in [1{,}06 ; 1{,}13]$ (plus précisément : $[1{,}0625 ; 1{,}125]$).

3) Encadrement de α à 0,01 près par balayage

$\alpha \in [1{,}10 ; 1{,}11]$.

Exercices d'approfondissement

15 Calcul de limites

1) Limite lorsque x tend vers 1 :

$\lim (x\to1)\ [x^2 - 1 + (2x - 1)(x^2 + 2x - 3)] / (x^2 + 4x + 5)$

Le dénominateur vaut $10 \neq 0$ lorsque $x = 1$.
Le numérateur tend vers 0.
Donc la limite est : 0.

2) Limite lorsque x tend vers 2 :
$\lim (x \to 2)\ (x^2 + x - 6) / (x^4 - 16)$

Factorisations :
$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$
$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

Après simplification, la limite vaut : 5/32.

3) Limite lorsque x tend vers 4 :
$\lim (x \to 4)\ (x - 4) / [x(2 - x) + 4x - 8]$

Le dénominateur se factorise en : $-(x - 2)(x - 4)$
Après simplification, la limite vaut : $-1/2$.

16

Limites et factorisation
1) Soit la fonction polynôme u définie par : $u(x) = x^3 + 2x + 3$.
a) Vérification que -1 est un zéro de u :
$u(-1) = (-1)^3 + 2(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$. Donc -1 est un zéro de u.
b) Déterminer a, b et c tels que : $u(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
$(x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c$.
Par identification avec $x^3 + 0x^2 + 2x + 3$:
- $a = 1$
- $a + b = 0 \Rightarrow 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$
- $b + c = 2 \Rightarrow -1 + c = 2 \Rightarrow c = 3$

Ainsi : $u(x) = (x + 1)(x^2 - x + 3)$.

2)
a) Développer :
- $(x + 1)(x + 3) = x^2 + 4x + 3$.
- $(x + 1)(x^2 - x + 3) = x^3 + 2x + 3$.

b) Calculer $\lim_{x \to -1} (x^3 + 2x + 3) / (x^2 + 4x + 3)$.
On factorise :
$x^3 + 2x + 3 = (x + 1)(x^2 - x + 3)$
$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$
Pour $x \neq -1$, on simplifie par $(x + 1)$:
$(x^3 + 2x + 3) / (x^2 + 4x + 3) = (x^2 - x + 3) / (x + 3)$.
Donc :
$\lim_{x \to -1} (x^3 + 2x + 3) / (x^2 + 4x + 3) = 5/2$.

3) Calculer :
- $\lim_{x \to +\infty} (x^3 + 2x + 3) / (x^2 + 4x + 3)$.
  Le terme dominant au numérateur est x^3 et au dénominateur x^2, donc le quotient se comporte comme x.
  Ainsi, $\lim_{x \to +\infty} (x^3 + 2x + 3) / (x^2 + 4x + 3) = +\infty$.
- $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + 2x + 3) / (x^2 + 4x + 3)$.
  De même, le quotient se comporte comme x, donc il tend vers $-\infty$.
  Ainsi, $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + 2x + 3) / (x^2 + 4x + 3) = -\infty$.

17

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la dérivée f'(x) de la fonction f.
1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$
Dérivée : $f'(x) = 6x^2 - 6x + 1$
2. $f(x) = (2x - 3)^2 - x + 3$
Dérivée : $f'(x) = 8x - 13$

3. $f(x) = (-x^2 + 3)(3x^2 + x - 1)$

Dérivée : $f'(x) = (-2x)(3x^2 + x - 1) + (-x^2 + 3)(6x + 1)$

$= -12x^3 - 3x^2 + 20x + 3$

4. $f(x) = 1 / (x^2 + x + 3)$

Dérivée : $f'(x) = -(2x + 1) / (x^2 + x + 3)^2$

5. $f(x) = 1 / (x^2 + x + 3)$

Dérivée : $f'(x) = -(2x + 1) / (x^2 + x + 3)^2$

6. $f(x) = (x - 1) / (x^2 + 4)$

Dérivée : $f'(x) = [(x^2 + 4) - (x - 1)(2x)] / (x^2 + 4)^2$

$= (-x^2 + 2x + 4) / (x^2 + 4)^2$

7. $f(x) = x + x / (x^2 + 1)$

Dérivée : $f'(x) = 1 + [(x^2 + 1) - 2x^2] / (x^2 + 1)^2$

$= 1 + (1 - x^2) / (x^2 + 1)^2$

$= (x^4 + x^2 + 2) / (x^2 + 1)^2$

18

Étude de la fonction $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Énoncé :
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
Le terme dominant est x^3.
• $\lim(x\to-\infty)\ g(x) = -\infty$
• $\lim(x\to+\infty)\ g(x) = +\infty$

2) Dérivée de g
$g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

3) Étude des variations et extrémums
a) Signe de $g'(x)$
$g'(x) = 3x(x - 2)$. Les zéros sont $x = 0$ et $x = 2$.
• Si $x < 0$, alors $x < 0$ et $x - 2 < 0 \Rightarrow x(x - 2) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$.
• Si $0 < x < 2$, alors $x > 0$ et $x - 2 < 0 \Rightarrow x(x - 2) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$.
• Si $x > 2$, alors $x > 0$ et $x - 2 > 0 \Rightarrow x(x - 2) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$.

b) Tableau de variation de g
On calcule : $g(0) = 2$ et $g(2) = 8 - 12 + 2 = -2$.
Donc : g est croissante sur $]-\infty, 0]$, décroissante sur $[0, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$.

Tableau de variation (lecture) :

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
g'(x)	+	0	−	0	+
g(x)	$-\infty$ ↗	2	↘	2	− ↗ $+\infty$

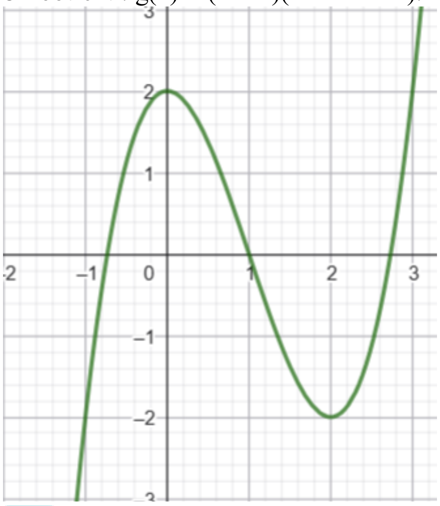
c) Extrémums relatifs
• Maximum relatif en $x = 0$: $g(0) = 2$.
• Minimum relatif en $x = 2$: $g(2) = -2$.

4) Tableau de valeurs
On complète le tableau pour $x = -1{,}5$; -1 ; $-0{,}5$; 0 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2.

x	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
g(x)	−8,125	−2	1,125	2	1,375	0	−1,375	−2

b) Construction de la représentation graphique (consignes)
1. Placer les points du tableau de valeurs.
2. Placer les points remarquables : A(0 ; 2), B(2 ; −2), C(1 ; 0).
3. Relier par une courbe lisse en respectant les variations : montée jusqu'à $x = 0$, descente jusqu'à $x = 2$, puis montée.

5) Factorisation sachant que g(1) = 0
Comme $g(1) = 0$, alors $(x - 1)$ est un facteur de $g(x)$.
On obtient : $g(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$.



19

Exercice 19 – Étude de la fonction polynôme

Corrigé
1) Domaine et limites
f est un polynôme, donc $D_f = \mathbb{R}$.
Le terme dominant est x^3, donc :
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) Dérivée et signe de f'(x)
$f'(x) = 3x^2 - 3x + 3 = 3(x^2 - x + 1)$.
Or $x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Tableau de variation
Comme $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	+
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

Donc f(x) augmente de $-\infty$ vers $+\infty$ quand x va de $-\infty$ vers $+\infty$.

4) Existence et unicité de la solution dans]1 ; 2[
$f(1) = 1 - 3/2 + 3 - 3 = -1/2 < 0$.
$f(2) = 8 - (3/2)\cdot 4 + 6 - 3 = 5 > 0$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in (1,2)$ tel que $f(\alpha)=0$.
Comme f est strictement croissante, cette solution est unique.

5) Encadrement de α (au dixième)
$f(1,1) = 1,331 - (3/2)\cdot 1,21 + 3,3 - 3 = -0,184 < 0$.
$f(1,2) = 1,728 - (3/2)\cdot 1,44 + 3,6 - 3 = 0,168 > 0$.
Donc : $1,1 < \alpha < 1,2$.

6) Tangente en x = 0
$f(0) = -3$ et $f'(0) = 3$.
L'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est : $y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 3x - 3$.
Donc (T) : $y = 3x - 3$.

7) Construction de (T) et (Cf)
- Pour (T) : placer par exemple les points (0 ; −3) et (1 ; 0), puis tracer la droite.
- Pour (Cf) : la courbe est strictement croissante. Placer quelques points, par exemple :
  – (0 ; −3), (1 ; −0,5), (2 ; 5).
  – (Cf) coupe l'axe des abscisses une seule fois en α, avec $1,1 < \alpha < 1,2$.

Relier en respectant la croissance (forme cubique montant de $-\infty$ vers $+\infty$).

20

Corrigé – Exercice 20
Partie A
On considère la fonction :
$q(x) = (-x^2 + 3x + 7)/(x + 2)$
1) Ensemble de définition
Le dénominateur ne doit pas être nul : $x + 2 \neq 0$
Donc $D_q = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2) Écriture sous la forme $q(x) = ax + b + c/(x + 2)$
Par division euclidienne, on obtient :
$q(x) = -x + 5 - 3/(x + 2)$
Ainsi : $a = -1$, $b = 5$, $c = -3$.
Partie B
On considère la fonction :
$g(x) = -x + 5 - 3/(x + 2)$, $x \neq -2$.
1a) Calcul de $g(-2 + x) + g(-2 - x)$
$g(-2 + x) = 7 - x - 3/x$
$g(-2 - x) = 7 + x + 3/x$
Donc $g(-2 + x) + g(-2 - x) = 14$.
1b) Centre de symétrie
Puisque la somme vaut $14 = 2 \times 7$,
le centre de symétrie de la courbe est $\Omega(-2 ; 7)$.
2) Asymptotes
Asymptote verticale : $x = -2$
Asymptote oblique : $y = -x + 5$
Leur point d'intersection est $(-2 ; 7)$.
Donc Ω appartient aux asymptotes.

21

1) Ensemble de définition, asymptotes et limites
Ensemble de définition : On observe deux asymptotes verticales en $x = -1$ et $x = 1$, donc :
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Asymptotes :
• Asymptotes verticales : $x = -1$ (D1) et $x = 1$ (D2).
• Asymptote oblique : la droite (D) a pour équation $y = x$.
Limites :
Au voisinage de $x = 1$:
• $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$
• $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$
Au voisinage de $x = -1$:
• $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$
• $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$
À l'infini :
• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
La courbe se rapproche de l'asymptote oblique $y = x$ aux extrémités.

2) Positions relatives de (Cf) et de l'asymptote oblique $y = x$
D'après le graphique :
• pour $x < -1$, (Cf) est en dessous de $y = x$;
• pour $-1 < x < 0$, (Cf) est au-dessus de $y = x$;
• pour $0 < x < 1$, (Cf) est en dessous de $y = x$;
• pour $x > 1$, (Cf) est au-dessus de $y = x$.
La courbe coupe l'asymptote oblique au point $O(0, 0)$.

3) Tangente en $x = 0$
On lit sur le graphique que $f(0) = 0$ et on sait que $f'(0) = -1$.
L'équation de la tangente en $x = 0$ est :
$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x$.
Donc la tangente (T) a pour équation : $y = -x$.

22 – Étude d'une fonction rationnelle

1. Ensemble de définition
Le tableau de variations montre deux discontinuités en $x = 0$ et $x = 3$.
Donc l'ensemble de définition est :
$Df = \mathbb{R} \setminus \{0 ; 3\}$.

2. Signe de $f'(x)$ sur Df
- Sur $]-\infty ; -1[$, f est décroissante donc $f'(x) < 0$
- Sur $]-1 ; 0[$, f est croissante donc $f'(x) > 0$
- Sur $]0 ; 1[$, f est croissante donc $f'(x) > 0$
- Sur $]1 ; 3[$, f est décroissante donc $f'(x) < 0$
- Sur $]3 ; +\infty[$, f est croissante donc $f'(x) > 0$

On a donc $f'(-1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

3. Unicité de la solution de $f(x) = 0$ sur $]3 ; +\infty[$
Sur $]3 ; +\infty[$, la fonction est strictement croissante.
De plus :
$\lim(x\to3^+) f(x) = -\infty$ et $\lim(x\to+\infty) f(x) = 2 > 0$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]3 ; +\infty[$.

4. Signe de $f(x)$ selon les valeurs de x
- Sur $]-\infty ; 0[$, $f(x) > 0$
- Sur $]0 ; 3[$, $f(x) < 0$
- Sur $]3 ; \alpha[$, $f(x) < 0$
- $f(\alpha) = 0$
- Sur $]\alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$

23

Corrigé – Exercice 23

Partie 1
On donne : $p(x) = x^2 - 4x$ et $q(x) = x^2 + x - 2$.
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $q(x) = 0$.
$q(x) = x^2 + x - 2$
On factorise : $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$.
Donc : $q(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$.
Solutions : $\{-2 ; 1\}$.
2) Justifier le signe de $p(x)$.
$p(x) = x^2 - 4x = x(x - 4)$.
Les zéros sont 0 et 4. Comme le coefficient de x^2 est positif, $p(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.
- $p(x) > 0$ sur $]-\infty ; 0[\cup]4 ; +\infty[$
- $p(x) < 0$ sur $]0 ; 4[$
- $p(0) = p(4) = 0$

Partie 2
Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x - 2)$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
1) Domaine, limites et asymptote verticale
a) Domaine de définition
Le dénominateur ne doit pas être nul : $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.
Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
b) Limites
On écrira plus loin : $f(x) = x + 3 + 4/(x - 2)$.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ (car $4/(x-2) \to -\infty$)
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ (car $4/(x-2) \to +\infty$)

c) Asymptote verticale

Comme $f(x) \to \pm\infty$ quand $x \to 2$, la droite $x = 2$ est une asymptote verticale à (C_f).

2) Décomposition, asymptote oblique et positions relatives

a) Décomposition

Division euclidienne : $x^2 + x - 2 = (x - 2)(x + 3) + 4$.

Donc $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x - 2) = x + 3 + 4/(x - 2)$.

b) Asymptote oblique

$f(x) - (x + 3) = 4/(x - 2)$ et $\lim_{x\to\pm\infty} 4/(x - 2) = 0$.

La droite (D) : $y = x + 3$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Positions relatives de (C_f) et (D)

Le signe de $f(x) - (x + 3)$ est celui de $4/(x - 2)$.

- Si $x < 2$, alors $x - 2 < 0 \Rightarrow 4/(x - 2) < 0 \Rightarrow f(x) < x + 3$: (C_f) est en dessous de (D).
- Si $x > 2$, alors $x - 2 > 0 \Rightarrow 4/(x - 2) > 0 \Rightarrow f(x) > x + 3$: (C_f) est au-dessus de (D).

3) Dérivée et variations

a) Expression de la dérivée

On pose $u(x)=x^2+x-2$ et $v(x)=x-2$. Alors $f=u/v$ et

$f'(x) = (u'v - uv')/v^2$, avec $u'(x)=2x+1$ et $v'(x)=1$.

$f'(x) = [(2x+1)(x-2) - (x^2+x-2)]/(x-2)^2 = (x^2-4x)/(x-2)^2$.

Donc $f'(x) = p(x)/(x - 2)^2$.

b) Sens de variation et tableau

$(x - 2)^2 > 0$ sur D_f, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $p(x)$.

D'après la Partie 1 : $p(x)>0$ sur $]-\infty;0[\cup]4;+\infty[$ et $p(x)<0$ sur $]0;4[$.

Ainsi :

- f est croissante sur $]-\infty;0]$
- f est décroissante sur $[0;2[$
- f est décroissante sur $]2;4]$
- f est croissante sur $[4;+\infty[$

Valeurs utiles : $f(0)=1$ et $f(4)=9$; $\lim_{x\to 2^-}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$.

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
f'(x)	+	0	−		−	0	+
F(x)	↗ $-\infty$	1	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	9	$+\infty$ ↗

4) Intersections avec l'axe des abscisses (OI)

Sur (OI), $y=0$ donc $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ (car un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul).

Or $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Donc $x = -2$ ou $x = 1$ (et ces valeurs sont différentes de 2).

Points d'intersection : $(-2, 0)$ et $(1, 0)$.

24

On note x la longueur (en m) réservée au carré. Alors la longueur réservée au domino vaut $1 - x$, avec $x \in [0 ; 1]$.

Carré : périmètre $4a = x$ donc $a = x/4$, aire $A_1(x) = a^2 = x^2/16$.

Domino : largeur b, longueur 2b. Périmètre $2(2b + b) = 6b = 1 - x$ donc $b = (1 - x)/6$. Aire $A_2(x) = 2b^2 = (1 - x)^2/18$.

Somme des aires : $A(x) = x^2/16 + (1 - x)^2/18$.

Dérivée : $A'(x) = x/8 - (1 - x)/9$. On résout $A'(x)=0$: $x/8 = (1 - x)/9 \Leftrightarrow 17x = 8 \Leftrightarrow x = 8/17$.

Conclusion : il faut couper la ficelle de sorte que 8/17 m servent au carré et 9/17 m au domino (minimum de la somme des aires).

25

1) Recette : $R(q) = 99q$ (en milliers de francs).

2) Bénéfice : $B(q) = R(q) - C(q) = 99q - (q^3 - 48q + 600) = -q^3 + 147q - 600$, pour $q \in [4 ; 10]$.

3) Dérivée : $B'(q) = -3q^2 + 147 = 3(49 - q^2)$.

4) Sur $[4 ; 10]$: $B'(q) > 0$ si $q < 7$, $B'(7)=0$, $B'(q) < 0$ si $q > 7$.

Donc B est croissante sur $[4 ; 7]$, puis décroissante sur $[7 ; 10]$.

5) Maximum en $q = 7$: $B(7) = -343 + 1029 - 600 = 86$.

L'entreprise doit produire 7 milliers de crayons (7000) pour un bénéfice maximal de 86 (dans l'unité indiquée).

6) $B(q)=0$ sur $[4 ; 10]$: deux solutions dans l'intervalle : $q_1 \approx 4{,}864880\ldots$ et $q_2 \approx 8{,}936364\ldots$

Encadrements d'amplitude 10^{-3} : $q_1 \in [4{,}864 ; 4{,}865]$ et $q_2 \in [8{,}936 ; 8{,}937]$.

7) $B(q) > 0$ pour $q \in]q_1 ; q_2[$, donc pour $q \in]4,864880\ldots ; 8,936364\ldots[$ (en milliers).

26

Solutions : $t_1 \approx 0,590$ s (phase ascendante) et $t_2 \approx 5,526$ s (phase descendante).
Au dixième : $t \approx 0,6$ s (montée) et $t \approx 5,5$ s (descente).
2) $h'(t) = 30 - 9,81t$. Donc $h'(t)=0$ $t_{max} = 30/9,81 \approx 3,058$ s, soit 3,1 s au dixième.
3) La trajectoire $h(t)$ est une parabole concave, de sommet $S(t_{max} ; h(t_{max}))$ et d'axe $t = t_{max}$. Elle coupe l'axe des temps en $t= 0$ et $t=2v/g \approx 6,12$ s.

27

$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0$ pour tout x. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-2 ; 2]$.
Valeurs utiles :

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	−13	−3	1	5	15

Tableau de variation (sur $[-2 ; 2]$) : f augmente de $f(-2)=-13$ à $f(2)=15$.

28

1) $f(-1)= (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 -1 +1 +1 = 0$.
$f(0)=1$; $f(1)=1 -1 -1 +1 = 0$; $f(2)=8 -4 -2 +1 = 3$.
2) Sur (D) : $y = x + 1$.
a) Si $x = -1$ alors $y = 0$, donc $A(-1 ; 0)$. Si $y = 1$ alors $1 = x + 1$ donc $x = 0$, donc $B(0 ; 1)$.
b) Pour $A_1(-1 ; 1)$, on vérifie : $x + 1 = -1 + 1 = 0 \neq 1$, donc A_1 n'appartient pas à (D).
3) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$.
Signe : $f'(x) > 0$ sur $]-\infty ; -1/3[$ et sur $]1 ; +\infty[$, et $f'(x) < 0$ sur $]-1/3 ; 1[$.
Donc f est croissante sur $]-\infty ; -1/3]$, décroissante sur $[-1/3 ; 1]$, puis croissante sur $[1 ; +\infty[$.
Extrema : $f(-1/3)=32/27 \approx 1,185$ (maximum local) et $f(1)=0$ (minimum local).
Points communs avec (D) : on résout $f(x)=x+1$:
$x^3 - x^2 - x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 1)=0$.
Donc $x \in \{-1, 0, 2\}$. Les points d'intersection sont : $(-1 ; 0)$, $(0 ; 1)$, $(2 ; 3)$.

29

1) f est un polynôme donc D_f = $\mathbb{R}$.
2) Limites : lim_{x→−∞} f(x) = +∞ et lim_{x→+∞} f(x) = −∞ (car le terme dominant est $-x^3$).
3) $f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1 - x^2)$.
Donc $f'(x) > 0$ si $|x| < 1$, $f'(\pm1)=0$, $f'(x) < 0$ si $|x| > 1$.
Variations : f décroît sur $]-\infty ; -1]$, croît sur $[-1 ; 1]$, puis décroît sur $[1 ; +\infty[$.
Valeurs aux points critiques : $f(-1)=-1$ et $f(1)=3$.
4) Tangente en $x=3$: $f(3)=-27+9+1=-17$ et $f'(3)=3(1-9)=-24$.
Donc (T) : $y = f(3) + f'(3)(x-3) = -17 - 24(x-3) = -24x + 55$.
5) Tableau de valeurs :

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	3	−1	1	3	−1

30 **Étude d'une fonction rationnelle**

Fonction définie sur $]1 ; +\infty[$: $f(x) = (x^2 - x - 6) / (x - 1)$

1) Limites
a) Limite en +∞ :
On effectue la division : $(x^2 - x - 6) / (x - 1) = x - 6/(x - 1)$.
Comme $-6/(x - 1) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, on obtient :

lim_{x→+∞} f(x) = +∞

b) Limite en 1 par valeurs supérieures :
On utilise $f(x) = x - 6/(x - 1)$. Lorsque $x \to 1^+$, on a $(x - 1) \to 0^+$ donc $6/(x - 1) \to +\infty$.
Ainsi :

lim_{x→1⁺} f(x) = -∞

Conclusion : la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (C).

2) Dérivée et variations
a) Fonction dérivée :
À partir de $f(x) = x - 6/(x - 1)$, on dérive :

$$f'(x) = 1 + 6/(x - 1)^2 = (x^2 - 2x + 7)/(x - 1)^2$$

b) Étude du signe de f'(x) et interprétation :
Pour tout $x > 1$, $(x - 1)^2 > 0$ et $x^2 - 2x + 7 = (x - 1)^2 + 6 > 0$.
Donc $f'(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$: la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.
Graphiquement, la courbe (C) monte continûment de $-\infty$ (au voisinage de $x = 1$) vers $+\infty$.
Tableau de variation sur $]1 ; +\infty[$:

3) Résultats demandés sur f'
a) Pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, on obtient $f'(x) = (x^2 - 2x + 7)/(x - 1)^2$ (voir question 2).
b) Comme $(x - 1)^2 > 0$ et $x^2 - 2x + 7 = (x - 1)^2 + 6 > 0$, alors $f'(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.
c) Donc f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$. Le tableau de variation figure ci-dessus.

4) Asymptote oblique et position relative
a) Par division, pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) = x - 6/(x - 1)$.
b) $f(x) - x = -6/(x - 1) \to 0$ quand $x \to +\infty$; donc la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
c) Pour $x > 1$, on a $x - 1 > 0$ donc $-6/(x - 1) < 0$, ainsi $f(x) < x$: la courbe (C) est en dessous de (Δ) sur $]1 ; +\infty[$.

5) Valeurs numériques et tangente en x = 3
a) $f(3) = (3^2 - 3 - 6)/(3 - 1) = (9 - 9)/2 = 0$.
b) $f'(3) = 1 + 6/(3 - 1)^2 = 1 + 6/4 = 5/2$.
L'équation de la tangente (Γ) au point d'abscisse 3 (point A(3 ; 0)) est :

$$\mathbf{y = (5/2)(x - 3) = (5/2)x - 15/2}$$

c) Représentation (C), (Δ) et (Γ) :

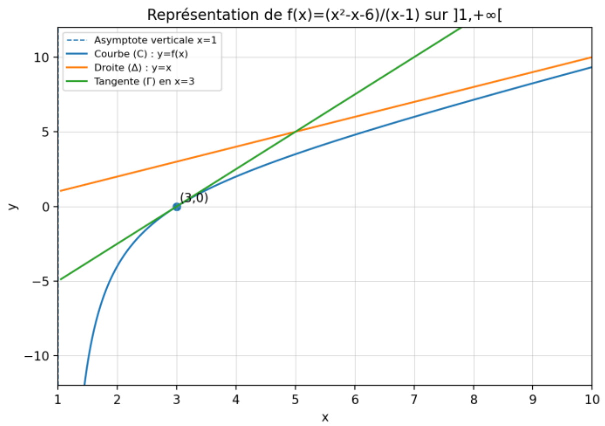


Figure : courbe (C), asymptote verticale $x = 1$, asymptote (Δ) : $y = x$, et tangente (Γ) en $x = 3$.

31

Corrigé – Exercice 31

Donnée :
On considère la fonction f définie sur $[0,3[\cup]3,+\infty[$ par :
$f(x) = x - 8 + 4 / (3 - x)$

(C) est la courbe représentative de f.

1) Asymptote verticale x = 3
On a :
$\lim_{x\to3^-} 4/(3-x) = +\infty$ et $\lim_{x\to3^+} 4/(3-x) = -\infty$
Donc :
$\lim_{x\to3^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to3^+} f(x) = -\infty$
Ainsi, la droite $x = 3$ est une asymptote verticale à (C).

2) Asymptote oblique en $+\infty$
$f(x) - (x - 8) = 4/(3 - x)$
Or :

$\lim_{x \to +\infty} 4/(3 - x) = 0$
Donc la droite $y = x - 8$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

3) Intersection avec l'axe des abscisses
$f(x) = 0$
$x - 8 + 4/(3 - x) = 0$
$(x - 8)(3 - x) + 4 = 0$
$-x^2 + 11x - 20 = 0$
$x^2 - 11x + 20 = 0$
$\Delta = 41$

Les solutions sont :
$x = (11 - \sqrt{41})/2$ et $x = (11 + \sqrt{41})/2$

Les points d'intersection sont :
$A((11 - \sqrt{41})/2 ; 0)$ et $B((11 + \sqrt{41})/2 ; 0)$

4) Étude des variations

a) Dérivée
$f(x) = x - 8 + 4(3 - x)^{-1}$
$f'(x) = 1 + 4/(3 - x)^2$

b) Signe de la dérivée
Pour tout $x \neq 3$, $(3 - x)^2 > 0$ donc :
$f'(x) > 0$

Ainsi, f est strictement croissante sur $[0,3[$ et sur $]3,+\infty[$.

c) Variations
$f(0) = -20/3$
$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La courbe admet :
– l'asymptote verticale $x = 3$
– l'asymptote oblique $y = x - 8$

32

Équation (E) : $1/x = x - 2$, avec $x \in]0 ; +\infty[$.
1) Lecture graphique
Sur $]0 ; +\infty[$, $y = 1/x$ est décroissante (positive) et $y = x - 2$ est croissante : il y a un seul point d'intersection.
Donc, (E) semble admettre une seule solution sur $]0 ; +\infty[$.
2) Étude de $g(x) = x - 2 - 1/x$
a) Dérivée et variation

$$g'(x) = 1 + 1/x^2$$

Pour $x > 0$, $1/x^2 > 0$ donc $g'(x) > 0$: g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
b) Existence et unicité de la solution

$$g(1) = -2 < 0$$
$$g(5) = 5 - 2 - 1/5 = 2,8 > 0$$

g étant continue et strictement croissante, elle s'annule une seule fois. Comme $g(1) < 0$ et $g(5) > 0$, l'équation (E) admet une unique solution α avec $1 < \alpha < 5$.

c) Encadrement de α à 10^{-2} près

$$g(2{,}41) \approx 0{,}41 - 0{,}41494 < 0$$
$$g(2{,}42) \approx 0{,}42 - 0{,}41322 > 0$$

Donc : $2{,}41 < \alpha < 2{,}42$.

3) Résolution algébrique

Pour $x > 0$:

$$1/x = x - 2 \Leftrightarrow 1 = x(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Comme $1 - \sqrt{2} < 0$, la seule solution sur $]0 ; +\infty[$ est :

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4142$$

33

On travaille avec

g(x) = **Error!** $(x \neq -2)$

(ce qui correspond bien à la décomposition demandée en 2).

Limites de g

D'après 2) on écrira :

$g(x) = x + 1 + 4/(x + 2)$

- Quand $x \to +\infty$: $4/(x + 2) \to 0$ donc $g(x) \sim x + 1$ et $\lim g(x) = +\infty$.
- Quand $x \to -\infty$: $4/(x + 2) \to 0$ donc $g(x) \sim x + 1$ et $\lim g(x) = -\infty$.
- Quand $x \to -2^-$: $x + 2 \to 0^-$ donc $4/(x + 2) \to -\infty$ et $\lim g(x) = -\infty$.
- Quand $x \to -2^+$: $x + 2 \to 0^+$ donc $4/(x + 2) \to +\infty$ et $\lim g(x) = +\infty$.

2) Montrer que $g(x) = x + 1 +$ **Error!**

Division euclidienne :

$$x^2 + 3x + 6 = (x + 2)(x + 1) + 4$$

(car $(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$).

En divisant par $x + 2$ (avec $x \neq -2$) :

$$g(x) = (x^2 + 3x + 6)/(x + 2) = x + 1 + \textbf{Error!}$$

3) Centre de symétrie Q(-2, -1)

Posons $x = -2 + h$ $(h \neq 0)$. Alors

$$g(-2 + h) = (-2 + h) + 1 + 4/h = -1 + h + 4/h,$$
$$g(-2 - h) = (-2 - h) + 1 + 4/(-h) = -1 - h - 4/h.$$

Donc

$$g(-2 + h) + g(-2 - h) = (-1 + h + 4/h) + (-1 - h - 4/h) = -2 = 2(-1).$$

Ainsi, les points de la courbe d'abscisses $-2 \pm h$ ont des ordonnées dont la somme vaut $2(-1)$: la courbe est symétrique par demi-tour autour de Q(-2, -1).

4) Variations de g sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$g(x) = x + 1 + 4/(x + 2)$

$\Rightarrow g'(x) = x(x + 4)/(x + 2)^2$.

Comme $(x + 2)^2 > 0$ (pour $x \neq -2$), le signe de $g'(x)$ est celui de $x(x + 4)$.

- Zéros : $x = -4$ et $x = 0$.
- Signe :
  - sur $]-\infty, -4[$: $x < 0$ et $x + 4 < 0 \Rightarrow g' > 0$ (croissante)
  - sur $]-4, -2[$: $x < 0$, $x + 4 > 0 \Rightarrow g' < 0$ (décroissante)
  - sur $]-2, 0[$: $x < 0$, $x + 4 > 0 \Rightarrow g' < 0$ (décroissante)
  - sur $]0, +\infty[$: $x > 0$, $x + 4 > 0 \Rightarrow g' > 0$ (croissante)

Valeurs utiles :

$g(-4) = -4 + 1 + 4/(-2) = -3 - 2 = -5$, $\quad g(0) = 0 + 1 + 4/2 = 3$.

5)

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
g(x)	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

6) Asymptote y = x + 1

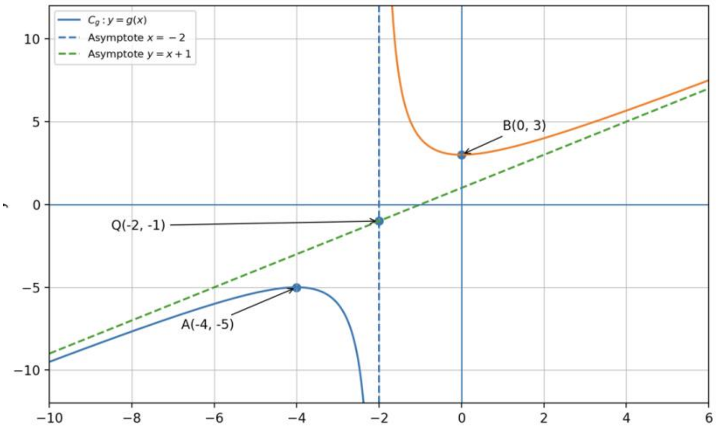
q(x) − (x + 1) = 4 / (x + 2) ⟶ 0 quand x ⟶ ±∞.

Donc la droite y = x + 1 est une asymptote oblique à la courbe (Cg) aux deux infinis.

De plus, x = −2 est une asymptote verticale (limites infinies en -2^+ et -2^-).
Remarque
On peut écrire la fonction sous la forme :
q(x) = x + 1 + 4 / (x + 2) = (x² + 3x + 6) / (x + 2).

Lorsque x ⟶ -2^+, q(x) ⟶ +∞.
Lorsque x ⟶ -2^-, q(x) ⟶ −∞.

7) Construction



Série A1
a) Une primitive sur [-1, +∞[
Sur l’intervalle [-1, +∞[, on a x + 2 > 0, donc :
ln|x + 2| = ln(x + 2).

On calcule :
∫ g(x) dx = ∫ (x + 1 + 4/(x + 2)) dx
= x²/2 + x + 4 ln(x + 2) + C.
Une primitive est donc :
F(x) = x²/2 + x + 4 ln(x + 2).
b) Primitive G telle que G(-1) = e
On calcule :
F(-1) = 1/2 − 1 + 4 ln(1) = −1/2.
On cherche G(x) = F(x) + C avec G(-1) = e :
−1/2 + C = e ⇒C = e + 1/2.
Ainsi, la primitive cherchée est :
G(x) = x²/2 + x + 4 ln(x + 2) + e + 1/2,
pour tout x ∈ [-1, +∞[.

34

1) Calcul de y pour x = 20
Le volume vaut : V = x · y · 16 = 10 000, donc xy = 10 000/16 = 625.
Ainsi, y = 625/x. Pour x = 20 : y = 625/20 = 31,25 cm.
2) Expression de f(x)

La boîte est sans couvercle : sa surface est composée de la base et des 4 faces latérales.
• Aire de la base : $A_{base} = xy$.
• Deux faces de dimensions $16 \times x$: $2 \times 16x = 32x$.
• Deux faces de dimensions $16 \times y$: $2 \times 16y = 32y$.
Donc $f(x) = xy + 32x + 32y$.
Or $xy = 625$ et $y = 625/x$, d'où :
$f(x) = 625 + 32x + 32(625/x) = 32x + 625 + 20\,000/x$.

3) Dimensions minimisant l'aire
On minimise $f(x) = 32x + 625 + 20\,000/x$ pour $x > 0$.
$f'(x) = 32 - 20\,000/x^2$. On cherche $f'(x) = 0$:
$32 = 20\,000/x^2 \Leftrightarrow x^2 = 20\,000/32 = 625 \Leftrightarrow x = 25$ (car $x > 0$).
Alors $y = 625/x = 625/25 = 25$.
Dimensions minimales : base 25 cm × 25 cm et hauteur 16 cm.

35 Boîte sans couvercle (optimisation de volume)

1) Expression de V(x)
Après découpe, la base de la boîte mesure $(24 - 2x)$ cm par $(18 - 2x)$ cm et la hauteur vaut x cm.
Ainsi : $V(x) = x(24 - 2x)(18 - 2x)$.
En développant : $(24 - 2x)(18 - 2x) = 432 - 84x + 4x^2$, donc
$V(x) = x(432 - 84x + 4x^2) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$.

2) Dérivée V'(x)
$V'(x) = 12x^2 - 168x + 432$.
On peut factoriser : $V'(x) = 12(x^2 - 14x + 36) = 12(x - (7 - \sqrt{13}))(x - (7 + \sqrt{13}))$.

3) Variations de V sur [0 ; 9]
Les zéros de V' sont $7 - \sqrt{13} \approx 3{,}39$ et $7 + \sqrt{13} \approx 10{,}61$. Sur l'intervalle $[0 ; 9]$, seul $\alpha = 7 - \sqrt{13}$ appartient à l'intervalle.
Comme $V'(0) = 432 > 0$, on a $V' > 0$ sur $[0 ; \alpha[$; et comme $V'(5) < 0$, on a $V' < 0$ sur $]\alpha ; 9]$.
Donc V est croissante sur $[0 ; \alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha ; 9]$. De plus, $V(0) = 0$ et $V(9) = 0$.

4) Valeur de x rendant le volume maximal
Le maximum sur $[0 ; 9]$ est atteint pour : $x = \alpha = 7 - \sqrt{13} \approx 3{,}39$ cm.
Le volume maximal vaut : $V_{max} = V(7 - \sqrt{13}) = 280 + 104\sqrt{13} \approx 654{,}98$ cm³.

5) Peut-on obtenir une contenance ≥ 650 cm³ ?
Oui, car $V_{max} \approx 654{,}98$ cm³ > 650 cm³. En pratique, $V(x) \geq 650$ cm³ pour x compris approximativement entre 3,06 cm et 3,74 cm.
Remarque : les valeurs décimales sont arrondies au centième.

36 Coût moyen de production (engrais biologique)

On a, pour $x \in [5 ; 60]$:
f(x) = **Error!**= x − 15 + **Error!**.
1) Coût moyen pour 5 m³
f(5) = 5 − 15 + **Error!**= 70.
Donc le coût moyen est 70 (centaines de milliers de FCFA), soit 70 × 100 000 = 7 000 000 FCFA.
2) Minimum du coût moyen
f'(x) = 1 − **Error!**.
f'(x) = 0 ⇔ 1 = **Error!**⇔ $x^2 = 400 \Leftrightarrow x = 20$ (car $x > 0$).
De plus, f''(x) = **Error!**> 0 sur [5 ; 60], donc f admet un minimum en x = 20.
f(20) = 20 − 15 + **Error!**= 5 + 20 = 25.
Le coût minimal est donc 25 (centaines de milliers de FCFA), soit 25 × 100 000 = 2 500 000 FCFA.

Conclusion : le coût moyen est minimal pour un volume de 20 m³, et vaut 2 500 000 FCFA.

37 Étude d'une fonction et optimisation d'un volume

On considère la fonction f définie sur [0 ; 15] par :
$f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x - 500$.

1) Étude de la fonction f sur [0 ; 15]

a) Calcul de f'(x)

$f'(x) = 6x^2 - 120x + 450$.

On factorise : $f'(x) = 6(x^2 - 20x + 75) = 6(x - 5)(x - 15)$.

b) Signe de f'(x) sur [0 ; 15]

Le coefficient 6 est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(x - 5)(x - 15)$.

- Sur [0 ; 5[, on a $(x - 5) < 0$ et $(x - 15) < 0$, donc $f'(x) > 0$.
- En $x = 5$: $f'(5) = 0$.
- Sur]5 ; 15[, on a $(x - 5) > 0$ et $(x - 15) < 0$, donc $f'(x) < 0$.
- En $x = 15$: $f'(15) = 0$.

c) Tableau de variation de f sur [0 ; 15]

Calculs : $f(0) = -500$; $f(5) = 500$; $f(15) = -500$.

Conclusion :

- f est croissante sur [0 ; 5] (de −500 à 500).
- f est décroissante sur [5 ; 15] (de 500 à −500).

x	0	5	15
$f'(x)$	+	0	− 0
$f(x)$	−500	↗ 500	↘ −500

d) Solutions de l’équation f(x) = 0 sur [0 ; 15]

On admet que l’équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes dans [0 ; 15].

On factorise : $f(x) = 2(x - 10)(x^2 - 20x + 25)$.

Ainsi :

- $x = 10$ est une solution.
- $x^2 - 20x + 25 = 0 \Rightarrow x = 10 \pm 5\sqrt{3}$.

Or $10 - 5\sqrt{3} \approx 1,3397$ et $10 + 5\sqrt{3} \approx 18,66$ (hors de [0 ; 15]).

Donc, à 10^{-1} près : $\alpha \approx 1,3$ et $\beta = 10,0$.

2) Boîte en forme de pavé droit (feuille carrée de 30 cm de côté)

On découpe deux bandes de même largeur x dans la feuille. On admet $0 < x < 15$.

a) Calcul du volume de la boîte si x = 2

On admet que le volume est : $V(x) = (15 - x)(30 - 2x)x$ (en cm³).

$V(2) = (15 - 2)(30 - 4)\cdot 2 = 13\cdot 26\cdot 2 = 676$ cm³.

b) Justification de V(x) = (15 − x)(30 − 2x)x

Après découpe et pliage :

- la hauteur de la boîte vaut x ;
- une dimension de la base vaut $15 - x$;
- l’autre dimension de la base vaut $30 - 2x$.

Donc $V(x) = (15 - x)(30 - 2x)x$.

c) Vérification : V(x) = f(x) + 500

Développement :

$V(x) = x(15 - x)(30 - 2x) = x(450 - 60x + 2x^2) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

Or $f(x) + 500 = (2x^3 - 60x^2 + 450x - 500) + 500 = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

Donc $V(x) = f(x) + 500$.

d) Valeur de x pour laquelle le volume est maximal

Comme $V(x) = f(x) + 500$, V est maximale exactement lorsque f est maximale.

D’après le tableau de variation, f atteint son maximum en $x = 5$.

Donc x_max = 5 et V_max = V(5) = f(5) + 500 = 500 + 500 = 1000 cm³.

3) Boîtes de 500 cm³

On cherche les x tels que $V(x) = 500$.

$V(x) = 500 \Leftrightarrow f(x) + 500 = 500 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Or, sur [0 ; 15], $f(x) = 0$ admet deux solutions : $x \approx 1,3$ et $x = 10,0$.

Conclusion : le fabricant a 2 possibilités.

38 Modèle de croissance d’un troupeau de moutons

a) Étude et tableau de variation sur [0 ; +∞[

On modélise le nombre de moutons par :

$Q(t) = -t^4 + 21t^2 + 100, \quad t \geq 0$

Dérivée :

$Q'(t) = -4t^3 + 42t = -2t(2t^2 - 21)$

Sur [0 ; +∞[, les points critiques sont : $t = 0$ et $2t^2 - 21 = 0$, soit $t = \sqrt{21/2}$.

Signe de $Q'(t)$ pour $t \geq 0$:

- $Q'(t) > 0$ pour $0 < t < \sqrt{(21/2)}$ $\Rightarrow$ Q est croissante.
- $Q'(t) < 0$ pour $t > \sqrt{(21/2)}$ $\Rightarrow$ Q est décroissante.

Valeurs utiles :

- $Q(0) = 100$.
- $Q(\sqrt{(21/2)}) = 210{,}25$.
- $\lim_{(t\to+\infty)} Q(t) = -\infty$.

Tableau de variation (résumé) :

b) Maximum de Q sur [0 ; +∞[et interprétation

Le maximum est atteint au point critique $t = \sqrt{(21/2)} \approx 3{,}24$ ans.

Valeur maximale : $Q_{max} = Q(\sqrt{(21/2)}) = 210{,}25$ (environ 210 moutons).

Interprétation : la population augmente d'abord puis atteint un pic d'environ 210 moutons vers 3,24 ans, avant de diminuer selon ce modèle.

c) Calcul de Q(5) et interprétation

$Q(5) = -(5^4) + 21\cdot(5^2) + 100 = -625 + 525 + 100 = 0$.

Interprétation : au bout de 5 ans, le modèle prévoit 0 mouton (disparition de la population). Au-delà, le modèle donnerait des valeurs négatives, ce qui n'a pas de sens : on limite donc l'interprétation aux périodes où $Q(t) \geq 0$

39* **Étude d'une fonction température (24 h)**

On considère : $T(t) = -(1/80) \cdot t \cdot (t - 12) \cdot (t - 24)$, $t \in [0 ; 24]$.

1) Températures demandées

a) À 6 h (t = 6)

$T(6) = -(1/80) \cdot 6 \cdot (6 - 12) \cdot (6 - 24)$

$= -(1/80) \cdot 6 \cdot (-6) \cdot (-18)$

$= -648/80 = -81/10$

Donc $T(6) = -8{,}1$ °C.

b) À midi (t = 12)

$T(12) = -(1/80) \cdot 12 \cdot (12 - 12) \cdot (12 - 24) = 0$

Donc $T(12) = 0$ °C.

2) Extremums sur l'intervalle [0 ; 24]

On dérive T. Pour cela, on peut développer :

$T(t) = -(t^3/80) + (9t^2/20) - (18t/5)$.

Ainsi :

$T'(t) = -(3t^2/80) + (9t/10) - (18/5)$.

On factorise :

$T'(t) = -(3/80) \cdot (t^2 - 24t + 96)$.

Les points critiques vérifient : $t^2 - 24t + 96 = 0$.

$\Delta = 24^2 - 4\cdot 96 = 576 - 384 = 192$.

Donc : $t = (24 \pm \sqrt{192})/2 = 12 \pm 4\sqrt{3}$.

On obtient :

$t_1 = 12 - 4\sqrt{3} \approx 5{,}07$ h ($\approx$ 5 h 04).

$t_2 = 12 + 4\sqrt{3} \approx 18{,}93$ h ($\approx$ 18 h 56).

Valeurs correspondantes :

$T(t_1) = -(24\sqrt{3})/5 \approx -8{,}31$ °C (minimum).

$T(t_2) = (24\sqrt{3})/5 \approx 8{,}31$ °C (maximum).

De plus : $T(0) = 0$ et $T(24) = 0$.

Variations (signe de T') :

Intervalle	Sens de variation de T
$[0 ; 12 - 4\sqrt{3}]$	T décroît
$[12 - 4\sqrt{3} ; 12 + 4\sqrt{3}]$	T croît
$[12 + 4\sqrt{3} ; 24]$	T décroît

Conclusion :

• Température la plus basse : Tmin = $-(24\sqrt{3})/5 \approx -8{,}31$ °C atteinte vers 5 h 04.
• Température la plus élevée : Tmax = $(24\sqrt{3})/5 \approx 8{,}31$ °C atteinte vers 18 h 56.

40* Boîte rectangulaire ouverte – Optimisation du volume

Feuille de carton 20 cm × 30 cm, carrés de côté x découpés aux quatre coins.

Données et modélisation
Après découpe puis pliage :
• hauteur : x
• base : $(20 - 2x) \times (30 - 2x)$
Le volume (en cm³) est donc :
$V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$.

1) Intervalle de validité de x
On doit avoir des dimensions strictement positives :
$20 - 2x > 0 \Rightarrow x < 10$
$30 - 2x > 0 \Rightarrow x < 15$
et $x > 0$.
Donc : $x \in (0 ; 10)$.

2) Développement de V(x)
$V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$
$= x(600 - 100x + 4x^2)$
$= 4x^3 - 100x^2 + 600x$.

3) Intervalle où V(x) > 0
On peut factoriser :
$V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x) = 4x(x - 10)(x - 15)$.
Sur l'intervalle de validité $(0 ; 10)$:
$x > 0$, $(x - 10) < 0$ et $(x - 15) < 0$, donc le produit est positif.
Ainsi : $V(x) > 0$ pour tout $x \in (0 ; 10)$ (et $V(0) = V(10) = 0$).

4) Valeur de x donnant le volume maximal
On dérive :
$V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 200x + 600$.
On résout $V'(x) = 0$:
$12x^2 - 200x + 600 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 50x + 150 = 0$.
$\Delta = 50^2 - 4\times3\times150 = 2500 - 1800 = 700$.
$x = (50 \pm \sqrt{700})/6 = (25 \pm 5\sqrt{7})/3$.
Sur $(0 ; 10)$, seule la solution suivante convient :
$x_{max} = (25 - 5\sqrt{7})/3 \approx 3{,}92$ cm.
De plus, $V''(x) = 24x - 200$, donc $V''(x_{max}) < 0$: il s'agit bien d'un maximum.
Volume maximal :
$V_{max} = V(x_{max}) = (10000 + 7000\sqrt{7})/27 \approx 1056{,}3$ cm³.

Réponse finale : $x \in (0 ; 10)$, $x_{max} = (25 - 5\sqrt{7})/3 \approx 3{,}92$ cm, $V_{max} \approx 1056{,}3$ cm³.

41* Situation complexe – Modélisation du nombre de bactéries (polynôme de degré 3)

On note $f(t)$ le nombre de bactéries t jours après la pollution. On cherche un polynôme de degré 3 :
$f(t) = a t^3 + b t^2 + c t + d$
Données :
- $f(0) = 0$ (au moment de la pollution)
- $f(5) = 250$ (5 jours après)
- $f(10) = 1000$ (10 jours après)
- $f(15) = 0$ (15 jours après : plus de trace)

De $f(0) = 0$, on obtient $d = 0$. Donc :
$f(t) = a t^3 + b t^2 + c t$
On obtient le système :

$125a + 25b + 5c = 250$
$1000a + 100b + 10c = 1000$
$3375a + 225b + 15c = 0$

En simplifiant :

$25a + 5b + c = 50$
$100a + 10b + c = 100$
$225a + 15b + c = 0$

Soustractions :

$(100a + 10b + c) - (25a + 5b + c) : 75a + 5b = 50 \Rightarrow 15a + b = 10$
$(225a + 15b + c) - (100a + 10b + c) : 125a + 5b = -100 \Rightarrow 25a + b = -20$

Donc :

$(25a + b) - (15a + b) = -20 - 10 \Rightarrow 10a = -30 \Rightarrow a = -3$
$15a + b = 10 \Rightarrow b = 55$
$25a + 5b + c = 50 \Rightarrow c = -150$

Conclusion : $f(t) = -3t^3 + 55t^2 - 150t$
Factorisation : $f(t) = t(15 - t)(3t - 10)$
Vérification : f(0)=0, f(5)=250, f(10)=1000 et f(15)=0.

3. Exercice du même type (contexte et données modifiés)

Pollution dans une lagune : on modélise la quantité Q(t) (en « unités de micro-organismes ») en fonction du temps t (en jours) par un polynôme de degré 3.

Données :

- $Q(0) = 0$
- $Q(4) = 192$
- $Q(8) = 320$
- $Q(12) = 0$

Questions :

1. Déterminer l'expression de Q(t).
2. Vérifier que les données sont bien respectées.

4. Corrigé de l'exercice

On cherche $Q(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$. De Q(0)=0, on a d=0, donc $Q(t)=a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t$.

Système :

$64a + 16b + 4c = 192$
$512a + 64b + 8c = 320$
$1728a + 144b + 12c = 0$

Résolution (résultats) : $a = -2$, $b = 20$, $c = 48$.
Conclusion : $Q(t) = -2t^3 + 20t^2 + 48t$
Factorisation : $Q(t) = 2t(12 - t)(t + 2)$
Vérifications : Q(0)=0, Q(4)=192, Q(8)=320, Q(12)=0.

42 Optimisation du bénéfice - Entreprise de jouets

1) Expression du bénéfice
$B(x) = (1000x - 0,04x^2) - (1\,000\,000 + 500x + 0,01x^2)$
$B(x) = -0,05x^2 + 500x - 1\,000\,000$
2) Valeur de x qui maximise B(x)
B(x) est une fonction du second degré avec $a = -0,05 < 0$: la parabole est tournée vers le bas, donc B admet un maximum au sommet.
x_max = -b / (2a) = -500 / (2 x -0,05) = -500 / -0,1 = 5000
Interprétation : x représente des centaines de jouets.
Nombre de jouets correspondant = 5000 x 100 = 500 000 jouets.
3) Bénéfice maximal (optionnel)
$B(5000) = -0,05 \times (5000)^2 + 500 \times 5000 - 1\,000\,000 = 250\,000$ F CFA
Conclusion : Pour obtenir un bénéfice maximal, l'entreprise doit fabriquer 500 000 jouets. Le bénéfice maximal est 250 000 F CFA.

43

Fonction : f(x) = **Error!**

1) Domaine de définition

Le dénominateur ne doit pas être nul : $2x + 1 \neq 0$, donc $x \neq -1/2$.
Ainsi, $Df = \mathbb{R} \setminus \{ -1/2 \}$.

2) Dérivée et variations

On dérive :
$f(x) = (x + 3)/(2x + 1) \Rightarrow f'(x) = [(2x + 1)\cdot 1 - (x + 3)\cdot 2] / (2x + 1)^2$
$f'(x) = (2x + 1 - 2x - 6) / (2x + 1)^2 = -5 / (2x + 1)^2$.
Comme $(2x + 1)^2 > 0$ pour $x \neq -1/2$, on a $f'(x) < 0$ sur tout son domaine.
Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1/2[$ et sur $]-1/2, +\infty[$.

3) Limites et asymptotes

On peut écrire par division euclidienne :
$f(x) = 1/2 + (5/2)/(2x + 1)$.
Limites à l'infini : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1/2 \Rightarrow$ asymptote horizontale : $y = 1/2$.
Limites au voisinage de $-1/2$:
• $\lim_{x\to(-1/2)^-} f(x) = -\infty$
• $\lim_{x\to(-1/2)^+} f(x) = +\infty$
Donc asymptote verticale : $x = -1/2$.

4) Points remarquables et signe de f

Zéro : $f(x)=0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow$ point A(−3 ; 0).
Ordonnée à l'origine : $f(0)=3 \Rightarrow$ point B(0 ; 3).
Signe :

- • pour $x < -3$: $(x+3)<0$ et $(2x+1)<0 \Rightarrow f(x)>0$
- • pour $-3 < x < -1/2$: $(x+3)>0$ et $(2x+1)<0 \Rightarrow f(x)<0$
- • pour $x > -1/2$: $(x+3)>0$ et $(2x+1)>0 \Rightarrow f(x)>0$

5) Tableau de variations

Sur $]-\infty, -1/2[$, f décroît de 1/2 vers $-\infty$; sur $]-1/2, +\infty[$, f décroît de $+\infty$ vers 1/2.

6) Représentation graphique (croquis)

Tracer d'abord les asymptotes $x = -1/2$ (verticale) et $y = 1/2$ (horizontale), placer A(−3;0) et B(0;3), puis dessiner les deux branches décroissantes.