COLLECTION PYRAMIDE

Guide du Professeur

Mon livre de MATHÉMATIQUES

1re C

Tome 1

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

MATÉRIALISEZ VOS IDÉES
JD Editions
L'Edition autrement

COLLECTION PYRAMIDE

Guide du Professeur

Mon livre de Mathématiques

1re C

Tome 1

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

SOMMAIRE

Ce document pourrait contenir des erreurs au fautes de frappes.
Prière les signaler à l'adresse : kyoussouphou@gmail.com

1 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de troisième. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où ou quand se déroule la scène ?	La scène se déroule dans une salle de classe, pendant une séance de cours.
Circonstances	Pourquoi les élèves décident de se mettre en groupes pour traiter l'exercice ?	Les élèves décident de se mettre en groupes pour traiter l'exercice pour avoir le bonus promis par le professeur.
Tâche	Que décident de faire les élèves ?	Les élèves décident de se mettre en groupes pour traiter l'exercice

DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

Activité 1

1) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.
   $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$, donc $\mathrm{D_g} = \mathbb{R}$
   D'où f et g ont le même ensemble de définition.
2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ et $\mathrm{g}(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = x^2 - 1$
   D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Exercice de fixation 1

- $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ et $\mathrm{D_g} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Donc $\mathrm{D}_f = \mathrm{D_g}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $\mathrm{g}(x) = 2x - 1 + \frac{4}{x+3} = \frac{(2x-1)(x+3)+4}{x+3} = \frac{2x^2+6x-x-3+4}{x+3} = \frac{2x^2+5x+1}{x+3}$
  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $\mathrm{g}(x) = f(x)$
  Conclusion : $\mathrm{D}_f = \mathrm{D_g}$ et $\forall x \in \mathrm{D}_f$, $\mathrm{g}(x) = f(x)$. Donc les fonctions f et g sont égales

Activité 2

1) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $D_h = \mathbb{R}$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$

   $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $g(x) = \frac{x^2-3x}{x-3} = \frac{x(x-3)}{x-3} = x$

   $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

   D'où $\forall x \in]-\infty, 0], h(x) = -x$ et $\forall x \in [0, +\infty[, h(x) = x$

   a) *f* et *g* coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

   b) *f* et *h* coïncident sur $[0, +\infty[$

   c) *g* et *h* coïncident sur $[3, +\infty[$.
3) C'est l'ensemble de définition de g.

Exercice de fixation 2

1-Faux ; 2-Fuax ; 3-Vrai

Exercice de fixation 3

• $D_f = \mathbb{R}$

• Écrivons $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\|1-x^2\|$	x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1

$\forall x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[, f(x) = x^2 - 1$

$\forall x \in [-1; 1], f(x) = 1 - x^2$

• La restriction de *f* à l'intervalle $]-\infty; -1]$ est la fonction *h* définie sur $]-\infty; -1]$ par :
$h(x) = x^2 - 1$

Activité 3

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) - (-x^2 + x + 6) = x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x+2)(x-3)$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = x(x+2)(x-3)$

x	$-\infty$	-2		0		3	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)-g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

   $\forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; 3[, f(x) < g(x)$

   $\forall x \in]-2; 0[\cup]3; +\infty[, f(x) > g(x)$

   $\forall x \in \{-2; 0; 3\}, f(x) = g(x)$
3) (C_f) est au-dessous de (C_g) sur $]-\infty; -2[$ et sur $]0; 3[$

   (C_f) est au-dessous de (C_g) sur $]-2; 0[$ et sur $]3; +\infty[$

   (C_f) et (C_g) se coupent aux points d'abscisses –2 ; 0 et 3.

Exercice de fixation 4

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = x^2 + 5x - 6$.
   Le discriminant de $x^2 + 5x - 6$ est $\Delta = 25 + 24 = 49$ et ses zéros sont
   $x_1 = \frac{-5-7}{2} = -6$ et $x_1 = \frac{-5+7}{2} = 1$.
   Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = (x+6)(x-1)$.
2) D'après la question précédente, on a :
   $\forall x \in]-\infty; -6[\cup]1; +\infty[, f(x) - g(x) > 0$, d'où $f(x) > g(x)$
   $\forall x \in]-6; 1[, f(x) - g(x) < 0$, d'où $f(x) < g(x)$
   $\forall x \in \{-6; 1\}, f(x) - g(x) = 0$, d'où $f(x) = g(x)$
   On en déduit que :
   • *f* est supérieure à g sur $]-\infty; -6[$ et sur $]1; +\infty[$;
   • *f* est inférieure à g sur $]-6; 1[$;
   • *f* est égale à g sur $\{-6; 1\}$

Exercice de fixation 5

1-B ; 2-C ; 3-A

Activité 4

Soient *f* et *g* les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :
$f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $g(x) = \frac{x}{x+2}$.

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_s \Leftrightarrow x \in D_f$ et $x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
      Donc $D_s = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
   b) $\forall x \in D_s$, $s(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{x+2+x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-x+2}{x^2-4}$.
3) a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_p \Leftrightarrow x \in D_f$ et $x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
      Donc $D_p = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
   b) $\forall x \in D_p$, $p(x) = f(x) \times g(x) = \frac{1}{x-2} \times \frac{x}{x+2} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x^2-4}$.
4) a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_q \Leftrightarrow x \in D_f$, $x \in D_g$ et $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ et $x \neq 0$
      Donc $D_q = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$
   b) $\forall x \in D_q, = q(x) = \frac{1}{x-2} \times \frac{x+2}{x} = \frac{x+2}{x(x-2)}$.

Exercice de fixation 6

On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$ $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1) La fonction *f* + *g* est la fonction définie sur $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$ par
   $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{(x-2)(x-1)+3x}{x(x-1)^2} = \frac{x^2+2}{x(x-1)^2}$
2) La fonction *f* – *g* est la fonction définie sur $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$ par
   $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{(x-2)(x-1)-3x}{x(x-1)^2} = \frac{x^2-6x+2}{x(x-1)^2}$
3) La fonction *f g* est la fonction définie sur $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$ par
   $(fg)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{x-2}{x(x-1)} \times \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3(x-2)}{x(x-1)^3}$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_{\frac{f}{g}}$ ssi $x \in D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0$, donc $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-2}{x(x-1)} \times \frac{(x-1)^2}{3} = \frac{(x-2)(x-1)}{3x}$

Activité 5

1) On a $D_f = \mathbb{R}$ $D_g = [0; +\infty[$.
2) a) $f(a) = a^2 - 1$

   $g[f(a)]$ existe lorsque $f(a) \geq 0$, soit $a^2 - 1 \geq 0$

   $g[f(a)]$ existe lorsque $a \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

   b) $g[f(a)] = g(a^2 - 1) = \sqrt{a^2 - 1}$

Exercice de fixation 7

$D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = [0; +\infty[$

• $x \in D_{g\circ f}$ ssi $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$

$x \in D_{g\circ f}$ ssi $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 + 1 \geq 0$

$D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{x^2 + 1}$

• $x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow x \in D_g$ et $g(x) \in D_f$

$x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow x \geq 0$ et $(x^2 + 1) \in \mathbb{R}$

$D_{f\circ g} = [0; +\infty[$

$\forall x \in [0; +\infty[, f \circ g\,(x) = f\big(g(x)\big) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x + 1$

Activité 6

1) a) $\overrightarrow{MM_1}\begin{pmatrix} x-x \\ f(x)+b-f(x) \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{MM_1}\binom{0}{b}$. Par conséquent $\overrightarrow{MM_1} = b\overrightarrow{OJ}$

   Comme $b\overrightarrow{OJ}$ est un vecteur constant, on conclut que M_1 est l'image de M par la translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$.

   b) Soit (C') la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x) + b$

   Soit M(x ; y) un point quelconque de (C) et M'(x' ; y') un point quelconque du plan.

   M' = $t_{b\overrightarrow{OJ}}$(M) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = b\overrightarrow{OJ}$

   $\Leftrightarrow x' - x = 0$ et $y' - y = b$

   $\Leftrightarrow x' - x = 0$ et $y' = y + b$

   $\Leftrightarrow x' = x$ et $y' = f(x) + b$, on a $y = f(x)$ car M(x ; y)$\in$(C)

   $\Leftrightarrow$ M'(x, $f(x) + b$)

   $\Leftrightarrow$ M'$\in$(C')

   On en déduit que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x) + b$ est l'image de (C) par la translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$.

2) a) On a $M(x-a, f(x-a))$ et $M_2(x, f(x-a))$, d'où $\overrightarrow{MM_2}\begin{pmatrix} x-(x-a) \\ f(x-a)-f(x-a) \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{MM_2}\binom{a}{0}$.
Par conséquent $\overrightarrow{MM_2} = a\overrightarrow{OI}$
Comme $a\overrightarrow{OI}$ est un vecteur constant, on conclut que M_2 est l'image de M par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}$.
b) Soit (C'') la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x-a)$
Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque de (C) et $M'(x'\,;y')$ un point quelconque du plan.
$M' = t_{a\overrightarrow{OI}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{OI}$
$\Leftrightarrow x' - x = a$ et $y' - y = 0$
$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = y$
$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = f(x)$, on a $y = f(x)$ car $M(x\,;y) \in (C)$
$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = f(x' - a)$
$\Leftrightarrow M'(x', f(x'-a))$
$\Leftrightarrow M' \in (C'')$
On en déduit que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x-a)$ est l'image de (C) par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}$.

3) Soit (C'') la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x-a)$
Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque de (C) et $M'(x'\,;y')$ un point quelconque du plan.
$M' = t_{a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OJ}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{OI} + b\overrightarrow{OJ}$
$\Leftrightarrow x' - x = a$ et $y' - y = b$
$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = y + b$
$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = f(x) + b$, on a $y = f(x)$ car $M(x\,;y) \in (C)$
$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = f(x' - a) + b$
$\Leftrightarrow M'(x', f((x'-a) + b))$
$\Leftrightarrow M' \in (C'')$
On en déduit que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x-a) + b$ est l'image de (C) par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI} + b\overrightarrow{OJ}$.

Exercice de fixation 8

1) C'est le vecteur $\vec{u}(0; -7)$
2) C'est le vecteur $\vec{u}(2; 0)$
3) C'est le vecteur $\vec{u}(3; 5)$
4) C'est le vecteur $\vec{u}(-1; -4)$

Exercice de fixation 9

1) C'est le vecteur $\vec{u}(1; 0)$
2) C'est le vecteur $\vec{u}(0; 6)$
3) C'est le vecteur $\vec{u}(-8; 3)$

__Activité 7__

1) a) On a M(x, $f(x)$) et M_1(x, $-f(x)$), d'où $\overrightarrow{MM_1}\begin{pmatrix} x-x \\ -f(x)-f(x)\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MM_1}\begin{pmatrix} 0 \\ -2f(x)\end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{MM_1}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OJ}$, donc (MM_1) ⊥(OI). De plus le milieu de [MM_1] a pour coordonnées (x ; 0), donc il appartient à (OI).
   On en déduit que les points M et M_1 sont symétriques par rapport à la droite (OI).
   b) Soit (C') la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(x)$
   Soit M(x ; y) un point quelconque du plan.
   M(x ; y)∈(C') ⇔ $y = -f(x)$ ⇔ $-y = f(x)$ ⇔N(x ; $-y$)∈(C)
   Or d'après la question précédente, M et N sont symétriques par rapport à (OI), donc que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ est l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (OI).
2) a) On a M(x, $f(x)$) et M_2($-x$, $f(x)$), d'où $\overrightarrow{MM_2}\begin{pmatrix} -x-x \\ f(x)-f(x)\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MM_2}\begin{pmatrix} -2x \\ 0\end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{MM_2}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OI}$, donc (MM_2) ⊥(OJ). De plus le milieu de [MM_2] a pour coordonnées (0 ; $f(x)$), donc il appartient à (OJ).
   On en déduit que les points M et M_2 sont symétriques par rapport à la droite (OJ).
   b) Soit (C'') la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$
   Soit M(x ; y) un point quelconque du plan.
   M(x ; y)∈(C'') ⇔ $y = f(-x)$ ⇔N($-x$; y)∈(C)
   Or d'après la question précédente, M et N sont symétriques par rapport à (OJ), donc que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

Exercice de fixation 10

1. (OJ)
2. (OI)

Exercice de fixation 11

1. On a : $g(x) = f(-x)$, donc c'est la symétrie orthogonal d'axe (OJ)
2. On a : $g(x) = -f(x)$, donc c'est la symétrie orthogonal d'axe (OI)

__Activité 8__

1) On a M(x, $f(x)$) et M_1($-x$, $-f(x)$). Soit K le milieu du segment [MM_1]
   On a $x_K = \frac{x-x}{2} = 0$ et $y_K = \frac{f(x)-f(x)}{2} = 0$. Le milieu du segment [$MM_1$] est le point O, donc les points M et M_1 sont symétriques par rapport au point O.
2) Soit M(x, y) un point de (C) et M(x', y') un point quelconque du plan.
   M' = S_O(M) ⇔ $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$
   ⇔ $x' = -x$ et $y' = -y$
   ⇔ $x' = -x$ et $y' = -f(x)$, on a $y = f(x)$ car M(x ; y)∈(C)
   ⇔ $x' = -x$ et $y' = -f(-x')$ car $x = -x'$
   ⇔M'($x', -f(-x')$)
   ⇔M'∈(C')
   La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(-x)$ est l'image de (C) par la symétrie centrale de centre O.

Exercice de fixation 12

1. $-f(-x) = -((-x)^2 - 7) = -(x^2 - 7) = 7 - x^2 = \mathrm{g}(x)$
   D'où (C_g) est le symétrique de (C_f) par rapport au point O.
2. $-f(-x) = -\frac{2}{-x+3} = \frac{2}{-(-x+3)} = \frac{2}{x-3}$ et $\mathrm{g}(x)$
   D'où (C_g) est le symétrique de (C_f) par rapport au point O.

Activité 9

1) Non
2) Chaque élève a une et une seule date de naissance

Exercice de fixation 13

1-F ; 2-F ; 3-V ; 4-F

Exercice de fixation 14

f, g, *p* et *r* sont des applications

h n'est pas une application car –2 est associé à deux éléments dans l'ensemble d'arrivée
h n'est pas une application car *c* n'est associé à aucun élément dans l'ensemble d'arrivée

Activité 10

1) Soit *b* un élément quelconque de [0 ; 4].
   Si $b \in [0 ; 2{,}8]$, alors la droite d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de *h* en un seul point
   Si $b \in]2{,}8 ; 4]$, alors la droite d'équation $y = b$ ne coupe pas la courbe représentative de *h*
   On en déduit que :
   •si $b \in [0 ; 2{,}8]$, alors *b* admet un unique antécédent par *h* ;
   •si $b \in]2{,}8 ; 4]$, alors *b* n'admet pas d'antécédents par *h*.
2) Soit *b* un élément quelconque de [–4 ; 6].
   Si $b \in]-4 ; 0[$, alors la droite d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de g en trois points
   Si $b \in]0 ; 6]$, alors la droite d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de g en un seul point
   Si $b \in \{-4 ; 0\}$, alors la droite d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de g en deux points
   On en déduit que :
   •si $b \in]-4 ; 0[$, alors *b* admet trois antécédent par g ;
   •si $b \in]0 ; 6]$, alors *b* admet un unique antécédent par g ;
   •si $b \in \{-4 ; 0\}$, alors *b* admet deux antécédents par g.
3) Pour tout élément *b* de $[0 ; \pi]$, la droite d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de *h* en un seul point. D'où *b* admet un unique antécédent par *h*.

Exercice de fixation 15

1.c) ; 2.a) ; 3.b)

Exercice de fixation 16

• L'application *f* est injective car chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet zéro ou un antécédent dans l'ensemble de départ.

Elle n'est pas surjective car 3 n'a pas d'antécédent.

Elle n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

• L'application g n'est ni injective (1 a deux antécédents), ni surjective (2 n'a pas d'antécédent). Elle n'est donc pas bijective.

• L'application *h* est bijective car chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent dans l'ensemble de départ. On en déduit qu'elle est injective et surjective

• L'application *k* n'est ni injective (1 a deux antécédents), donc elle n'est pas bijective.

Elle est surjective car chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.

Activité 11

Comme *f* est une application bijective, tout élément de B admet un unique antécédent dans A. ainsi que la correspondance de B dans A qui à tout élément de B associe son antécédent par *f* est une bijection.

Exercice de fixation 17

Le nombre 2 est dans de [0 ; 7] et est associé à 4 dans [0 ; 49].

Le nombre 3 est dans de [0 ; 7] et est associé à 9 dans [0 ; 49].

Ainsi de suite.

La bijection réciproque de *f* est l'application de [0 ; 49] dans [0 ; 7] qui à tout nombre réel de [0 ; 49] associe sa racine carrée.

Activité 12

Soit M(a ; b) un point quelconque de (C). Alors $f(a) = b$, par conséquent $f^{-1}(b) = a$. d'où le point N(b ; a) appartient à (C').

Justifions que (MN) ⊥(D)

Le coefficient directeur de (D) est 1 et celui de (MN) est $\frac{b-a}{a-b} = -1$.

Or $1\times(-1) = -1$, donc (MN) ⊥(D)

Justifions que le milieu de [MN] appartient à (D)

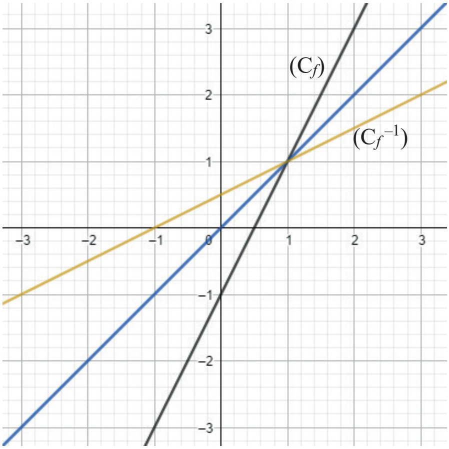
Soit K le milieu de [MN]. On a $x_K = \frac{b+a}{2}$ et $y_K = \frac{a+b}{2}$. Comme $y_K = x_K$, le point K est le milieu de [MN].

Conclusion : on a M(a ; b) ∈(C) ⟺ N(b ; a) ∈(C'), (MN) ⊥(D) et le milieu de [MN] appartient à (D). Donc (C) et (C') sont symétriques par rapport à (D).

Exercice de fixation 18

a-Faux ; b-Faux ; c-Vrai ; d-Faux

Exercice de fixation 19



DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1 : Comment comparer deux fonctions ?

- Exercice non résolu

Compare les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = \frac{2x+1}{4x+1}$ et $g(x) = \frac{-2x+1}{-4x+1}$

Corrigé

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}\{1\}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right\} \setminus \{1\}, \quad f(x) - g(x) = \frac{2x+1}{4x+1} - \frac{-2x+1}{-4x+1} = \frac{-4x}{16x^2-1}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-4x$		$+$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$16x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$+$		$-$	0	$+$		$-$	

Conclusion :

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[\cup \left]0; \frac{1}{4}\right[, f(x) > g(x)$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}; 0\right[\cup \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[, f(x) < g(x)$

$\forall x \in \{0\}, f(x) = g(x)$

Question 2 : Comment démontrer qu'une application est injective, surjective, bijective ?

- Exercices non résolus

Voici trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Pour chacune d'elle :
a) détermine l'ensemble de définition ;
b) justifie si elle injective ; surjective ; bijective ;
c) comment peut-on la rendre bijective.

1) a) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
b) $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x\mathbb{R}$, $y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 = y + 4$
• si $y < 4$, alors l'équation n'a pas de solutions, donc *y* n'a pas d'antécédent : *f* n'est pas surjective.
• si $y > 4$, alors l'équation admet deux solutions, donc *y* a deux antécédents : *f* n'est pas injective
Conclusion : *f* n'est ni injective ni surjective, donc *f* n'est pas bijective.
c) Pour que *f* soit bijective, l'équation $y = f(x)$ doit avoir une unique solution quel que soit *y*. Pour cela il faut que $y > 4$ et que *x* prenne une seule valeur.
Pour que *f* soit bijective, il faut prendre pour ensemble de départ $[0; +\infty[$ (ou $]-\infty; 0]$) et pour ensemble d'arrivée $[-4; +\infty[$.
2) a) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
b) $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x\mathbb{R}$, $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow xy = 1 - y$
• si $y = 0$, alors l'équation n'a pas de solutions, donc *y* n'a pas d'antécédent : *f* n'est pas surjective.
• si $y \neq 0$, alors l'équation admet une unique solution, donc *y* a un antécédent unique
Conclusion : *f* est injective et non surjective, donc *f* n'est pas bijective.
c) Pour que *f* soit bijective, il faut prendre pour ensemble de départ $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) a) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
b) • On a $f(-1) = f(1)$. Or $-1 \neq 1$, donc *f* n'est pas injective.
• L'équation $f(x) = -1$ n'admet pas de solutions, donc –1 n'a d'antécédent : *f* n'est pas surjective.
Conclusion : *f* n'est ni injective ni surjective, donc *f* n'est pas bijective.
c) Pour que *f* soit bijective, il faut prendre pour ensemble de départ $[0; +\infty[$ (ou $]-\infty; 0]$) et pour ensemble d'arrivée $\left[\sqrt{3}; +\infty\right[$

La restriction de f à l'ensemble de départ [-4 ; +∞[et à l'ensemble d'arrivée R^+ est alors une bijection.

Pour g :

a) g(x) est défini pour tout $x \neq -1$donc D(g) = R\{-1}.

b) Etudions les solutions de l'équation $y = \frac{1}{x+1}$ où pour y donné, on cherche x.

$y = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{y}$. Pour tout $y \neq 0$, on trouve un et un seul x.

g est donc injective (un y n'a qu'un seul antécédent), mais elle n'est pas surjective (0 n'est pas atteint).

g n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

c) La restriction de g à l'ensemble de départ Dg = R\{-1}. et à l'ensemble d'arrivée R\{0}. Est bien une bijection.

Pour h : (éléments de réponse)

a)D(h) = **R**

b)h n'est ni injective ni surjective ni bijective

c)La restriction de h à l'ensemble de départ $\mathbf{R}^+$ et à l'ensemble d'arrivée $[\sqrt{3}\ ; +\infty[$ est une bijection.

MES SÉANCES D'EXERCICES

EXERCICES DE FIXATION

Égalité de deux fonctions

Exercice 1

On a $D_f = D_g$ et $\forall x \in D_f, f(x) = \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} = g(x)$, donc les fonctions f et g sont égales.

Exercice 2

On a $D_f = D_g = \mathbb{R}$ et $\forall x \in D_f, f(x) = \sqrt{(x-7)^2} = |x-7| = g(x)$, donc les fonctions f et g sont égales.

Exercice 3

1) On a $D_f = \mathbb{R}$ et On a $D_g = [0; +\infty[$

   Comme $D_f \neq D_g$, les fonctions f et g ne sont pas égales.

2) On a $D_h = D_k = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $\forall x \in D_h, h(x) = 3 - \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)^2-3}{(x-1)^2} = \frac{3x^2-6x}{(x-1)^2} = k(x)$

   D'où les fonctions h et k sont égales.

Restriction d'une fonction
Exercice 4

On sait que $|x-2| = x-2, \text{si } x \geq 2$ et $|x-2| = -x+2, \text{si } x < 2$
Donc pour tout x de $]-\infty; 2[$, $f(x) = 2$; par suite $\mathrm{g}(x) = 2$.

Exercice 5

$[-1; 0]$ est inclus dans l'intervalle $]-\infty; 1]$. Donc h est définie sur $[-1; 0]$ par : $h(x) = x^2 - 4$

Comparaison de fonctions
Exercice 6
Pour tout x de $[0; +\infty[$, $g(x) - f(x) = x - 4 - \frac{x^2-x-2}{x+3} = \frac{(x-4)(x+3)-(x^2-x-2)}{x+3} = \frac{-10}{x+3}$.
Or $\frac{-10}{x+3} < 0$ sur $[0; +\infty[$, donc pour tout x de $[0; +\infty[$, $g(x) \leq f(x)$.

Exercice 7
- Sur l'intervalle $]-\infty; -2[$, (Cf) est au-dessus de (Cg).
- Sur l'intervalle $]-2; 2[$, (Cf) est en-dessous de (Cg).
- Sur l'intervalle $]2; +\infty[$, (Cf) est au-dessus de (Cg).
- (Cf) et (Cg) se coupent aux points d'abscisses –2 et 2.

On en déduit que :
- $\forall x \in]-\infty; -2[, f(x) \geq g(x)$
- $\forall x \in]-2; 2[, f(x) \leq g(x)$
- $\forall x \in]2; +\infty[, f(x) \geq g(x)$
- $\forall x \in \{-2; 2\}, f(x) = g(x)$

Somme, produit et quotient de fonctions
Exercice 8
1) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $\mathrm{D_g} = \mathbb{R}^*$.
   $\mathrm{D}_{f+g} = \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D_g} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$
2) Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on a : $(f + \mathrm{g})(x) = f(x) + \mathrm{g}(x) = \frac{1}{x^2-1} + \frac{(x+1)(x+2)}{x}$.

Exercice 9
1) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $\mathrm{D_g} = \mathbb{R}^*$
   $\mathrm{D}_{fg} = \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D_g} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$
2) Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on a : $(f\mathrm{g})(x) = f(x)\mathrm{g}(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x^2-1)x}$

Exercice 10
1) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ et $\mathrm{D_g} = \mathbb{R}^*$
   $x \in \mathrm{D}_{\frac{f}{\mathrm{g}}} \Leftrightarrow x \in \mathrm{D}_f$ et $x \in \mathrm{D_g}$ et $\mathrm{g}(x) \neq 0$; d'où $\mathrm{D}_{\frac{f}{\mathrm{g}}} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1; -2\}$
2) Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on a : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x^2-1}}{\frac{(x+1)(x+2)}{x}} = \frac{x}{(x^2-1)(x+1)(x+2)}$.

Composée de fonctions

Exercice 11

1) $Df = IR - \{-1\}$; $Dg = IR - \{3\}$;

   $Dfog = IR - \{1; 3\}$.

   $Dgof = IR - \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$;

   $Dfof = IR - \left\{-1; -\frac{3}{2}\right\}$

2) $\forall x \in \mathrm{D}fog,\ (fog)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{2}{3}\frac{2x-3}{x-1}$

   $\forall x \in \mathrm{D}gof, (gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \dfrac{-2(x+2)}{2x+1}$

   $\forall x \in \mathrm{D}fof, \qquad (fof)(x) = f\big(f(x)\big) = \dfrac{3x+4}{2x+3}$

Exercice 12

On a d'une part, $\mathrm{Dfo(goh)} = \mathrm{D(fog)oh} = \mathbb{R}$.

D'autre part pour tout x de Dfo(goh) :

- $(\mathrm{goh})(\mathrm{x}) = \mathrm{F}(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}^3 + 1$ d'où $\mathrm{fo(goh)(x)} = \mathrm{foF(x)} = (2\mathrm{x}^3 + 1)^2$
- $(\mathrm{fog})(\mathrm{x}) = \mathrm{H}(\mathrm{x}) = (2\mathrm{x} + 1)^2$ d'où $\mathrm{(fog)oh(x)} = \mathrm{Hoh(x)} = (2\mathrm{x}^3 + 1)^2$

On a donc $\mathrm{fo(goh)(x)} = \mathrm{(fog)oh(x)}$

Conclusion : $fo(goh) = (fog)oh$

Fonctions associées

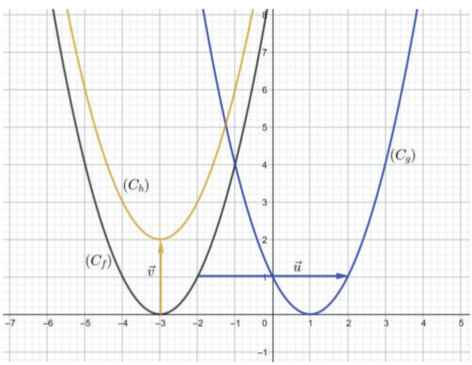
Exercice 13

$(Cf) = t_{\vec{u}}(Cg)$ avec

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$
2) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$
3) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

Exercice 14

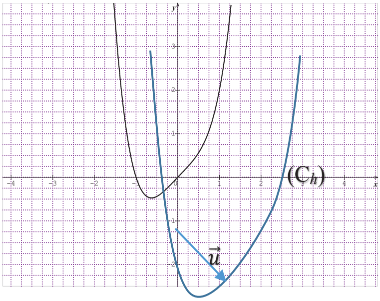
1)



2) • La courbe de g est l'image de celle de *f* par la translation de vecteur $\vec{u}(4; 0)$ (voir question précédente).
• La courbe de *h* est l'image de celle de *f* par la translation de vecteur $\vec{v}(0\,;2)$ (voir question précédente).

Exercice 15

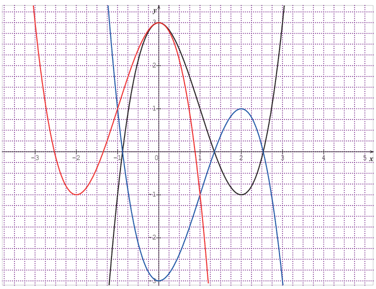
1)



2) La courbe de *h* est l'image de celle de *f* par la translation de vecteur $\vec{u}(1\,;-1)$ (voir question précédente).

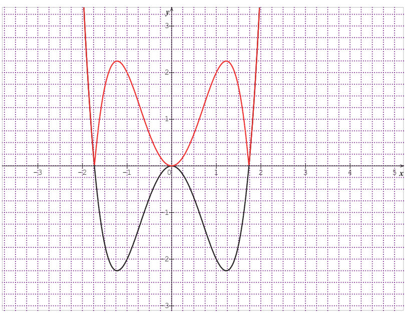
Exercice 16

Les courbes : $x \longmapsto f(x)$ *(en noir) ;* $x \longmapsto f(-x)$ *(rouge) et* $x \longmapsto -f(x)$ *(en bleu)*



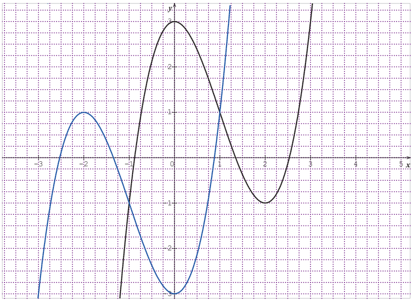
Exercice 17

$x \longmapsto |f(x)|$ *(en rouge)*



Exercice 18

$x \longmapsto -f(-x)$ *(en bleu)*



Applications

Exercice 19

Soit a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $f(a) = f(b)$.

$f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b$ car a et b sont positifs.

Donc $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$; il en résulte que f est injective.

Exercice 20

Soit y un élément quelconque de $[-1; +\infty[$. Cherchons si y a au moins un antécédent par *f.*

Pour cela, on résout dans $\mathbb{R}$ l'équation *:* $f(x) = y$.

$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y+1}$ ou $x = -\sqrt{y+1}$. L'équation admet deux solutions ; donc y a au moins un antécédent par f.

Par conséquent f est surjective.

Exercice 21

Soit y un élément quelconque de $\mathbb{R}$. Cherchons si y a au moins un antécédent par *f.* Pour cela, on résout dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = y$.

$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 3 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2}$. L'équation admet une solution unique ; donc y a un antécédent unique par f.

Par conséquent f est bijective.

Exercice 22

1) Soit $b \in \mathrm{IR}^+$. L'équation : $f(x) = b$ admet une unique solution qui est b^2.

Donc f est une bijection de IR^+ dans IR^+

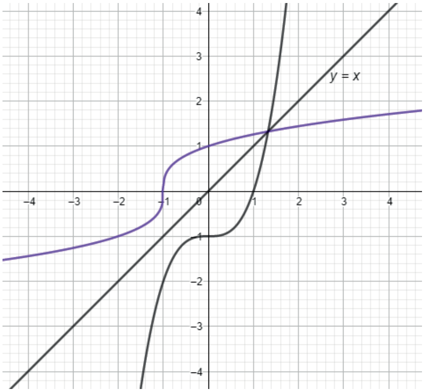
2) $\mathrm{f}^{-1}(2\sqrt{2}) = \mathrm{x} \Leftrightarrow \mathrm{f(x)} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \mathrm{x} = 8$. Donc $\mathrm{f}^{-1}(2\sqrt{2}) = 8$

$f^{-1}(5) = x \Leftrightarrow f(x) = 5 \Leftrightarrow x = 25$. Donc $f^{-1}(5) = 25$

3) $f^{-1}: IR^+ \rightarrow IR^+, tel\ que\ f^{-1}(x) = x^2$

Exercice 23

La courbe représentative de sa bijection réciproque est en bleu.



EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 24

1- Toute application bijective est surjective... ***VRAI*** *car une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective*

2- Soit f une application de IR dans IR telle que : $f(-1) = f(3) = 9$

 a) L'application est injective...... ***FAUX*** *car 9 a deux antécédents*........

 b) L'application est bijective ***FAUX*** *car cette application n'est pas injective*

3- Soit f une application de IR dans IR telle que le nombre réel -3 n'a pas d'antécédent par f.

Une telle application est surjective... ***FAUX*** *car il existe au moins un nombre réel qui n'a pas d'antécédent par f*

4- Si $g(x) = f(x+3)$ alors $(Cg) = t_{\vec{u}}(Cf)$ $avec\ \vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$... ***FAUX*** *car* ...$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$........

5- Si f est bijective, alors (Cf) et (Cf^{-1}) sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice.

6- Si une application n'est pas bijective, alors elle n'est pas injective : ***FAUX*** *car l'application* $f: IR - \{1\} \to IR, x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}$ *n'est pas bijective (car 2 n'a pas d'antécédent). Et pourtant on peut montrer qu'elle est injective.*

7- Les courbes des fonctions f et $g: x \mapsto -f(x)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) sont symétriques par rapport à la droite (OJ)...***FAUX*** *car ces deux courbes sont plutôt symétriques par rapport à la droite (OI)*

8- Si $f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$ et si $g(x) = 2x+5$ alors $fog(x) = \frac{(2x+5)^2-1}{x+3}$...***FAUX*** *car* $fog(x) = \frac{(2x+5)^2-1}{(2x+5)+3}$

9- Pour toutes fonctions f et g ; on a $fog = gof$ ***FAUX*** *car si* $f(x) = 2x+1$ *et* $g(x) = -x+4$ *alors* $fog(0) = 9$ *alors que* $gof(0) = 3$

10- Les fonctions $f: IR \rightarrow IR, x \mapsto \frac{x+1}{x^2-1}$; $g: IR \rightarrow IR, x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sont égales car $f(2) = g(2) = 1$……***FAUX*** *car ces deux fonctions n'ont pas le même ensemble de définition. En effet,* $Df = IR - \{-1; 1\}$ *alors que* $Dg = IR - \{1\}$

11- Les fonctions $f: IR \rightarrow IR, x \mapsto \frac{1}{(x-1)}$ et $g: IR \rightarrow IR, x \mapsto \frac{1}{|x-1|}$ car elles ont le même ensemble de définition. ***FAUX*** *car* $f(-2) = -\frac{1}{3}$ *alors* $g(-2) = \frac{1}{3}$

Exercice 25

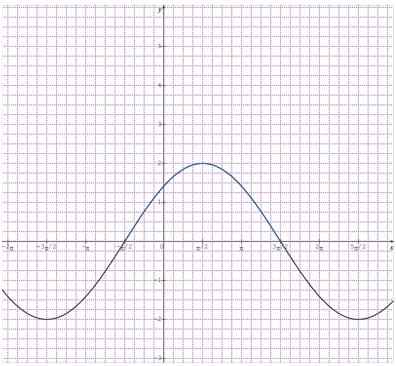
$Df = [0; +\infty[$ *et* $Dg = IR$. Les deux fonctions n'ont pas le même ensemble de définition. Donc elles ne sont pas égales.

Exercice 26

1) Soit a et b deux éléments de IR $- \{-5\}$ tel que $f(a) = f(b)$. Alors $\frac{2a-3}{a+5} = \frac{2b-3}{b+5}$ ce qui entraîne après calculs que $a = b$. Donc f est injective.
2) L'équation : $\frac{2x-3}{x+5} = 2$ n'a pas de solution. Donc S $= \emptyset$
3) Cette application n'est pas surjective car le nombre réel 2 n'a pas d'antécédent par *f*. Il en résulte que *f* n'est pas bijective.

Exercice 27

Solution en bleu



Exercice 28

1) Soit y un élément quelconque de $[3; +\infty[$ tel que $\mathrm{g}(x) = y$
   $\mathrm{g}(x) = y \Leftrightarrow (x-2)^2 + 3 = y \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{y-3}$.
   L'équation admet une solution unique. Donc g est bijective.
2) $\mathrm{g}^{-1}: [3; +\infty[\longrightarrow \mathrm{IR}^+ \ , x \mapsto -2 + \sqrt{x-3}$

Exercice 29

$\forall x \in [-1; 1], |x^2 - 1| = -x^2 + 1$

La restriction de *f* à l'intervalle $[-1; 1]$ est la fonction : $[-1; 1] \rightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 1$

Exercice 30

1) $Df = \mathbb{R} - \{0\}$ et $Dg = \mathbb{R} - \{-3;3\}$
2) $Dfg = Df \cap Dg = \mathbb{R} - \{-3;0;3\}$; $D(f+g) = Df \cap Dg = \mathbb{R} - \{-3;0;3\}$

   $D\dfrac{f}{g} = Df \cap Dg \cap \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-3;0;3\}$
3) $(fg)(x) = \frac{x(x+3)}{x(x^2-9)}$; $(f+g)(x) = \frac{x^3+4x^2-9x-27}{x(x^2-9)}$; $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x}{x^2-9}} = \frac{(x^2-9)(x+3)}{x^2}$

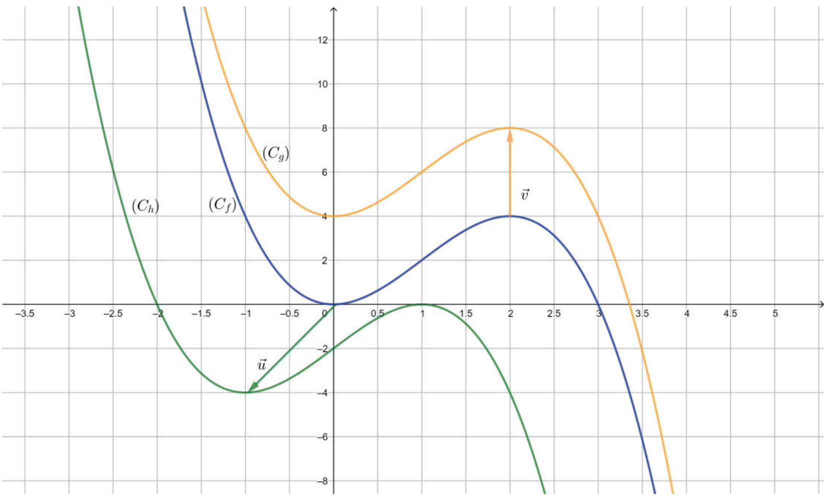
Exercice 31

1) Pour (E_1) on a S $=\{-2;2\}$ et pour (E_2) on a S $= \{0\}$
2) Ensembles de définition
   a) $D_f = [-3;+\infty[$ et $D_g = IR - \{-1;1\}$
   b) $D_{fog} = [0;1] \cup]1;+\infty[\; et \; D_{gof} = \left]-1;-\frac{1}{3}\right] \cup]-1;+\infty[$
   c) Pour tout x de D_{fog}, $(fog)(x) = \sqrt{\frac{3|x|-2}{|x|-1}}$ et pour tout x de D_{gof},

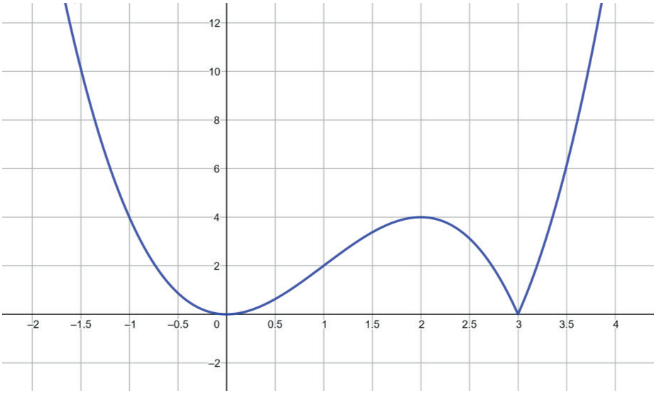
   $(fog)(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}-1}$

Exercice 32

1)



2) a) • La courbe de h est l'image de celle de f par la translation de vecteur $\vec{u}(-1;-4)$ (voir question précédente).
   • La courbe de g est l'image de celle de f par la translation de vecteur $\vec{v}(0\,;4)$ (voir question précédente).
   • Courbe de k



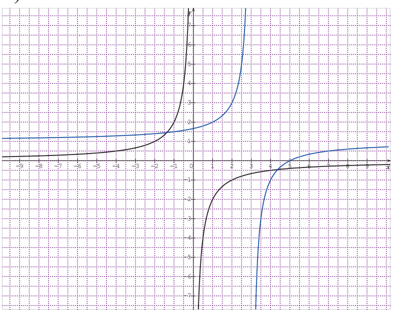
b) $g(x) = f(x) + 4 = 3x^2 - x^3 + 4$
$h(x) = f(x+1) - 4 = -x^3 + 3x - 2$
$k(x) = |f(x)| = |3x^2 - x^3|$.

Exercice 33

1) $f(x) = g(x-2) + 1$. Donc $(Cf) = t_{\vec{u}}(Cg)$ avec $\vec{u}\binom{2}{1}$
2) $f(x) = (x-2)^2 - 5$. Donc $f(x) = g(x-2) + 1$. Donc $(Cf) = t_{\vec{u}}(Cg)$ avec $\vec{u}\binom{3}{-5}$
3) $f(x) = g(x+7) - 10$. Donc $(Cf) = t_{\vec{u}}(Cg)$ avec $\vec{u}\binom{-7}{-10}$

Exercice 34

1) Une équation de la courbe (C') est : $y = -\frac{2}{x-3} + 1$
2)



Exercice 35

$g: x \mapsto f(x+1) - 2$; $h: x \mapsto -f(-x)$; $k: x \mapsto |f(x)|$

x	-3	-1	2	5
$g(x)$	-1 ↗	3 ↘	-2 ↘	-7

x	2		0		-3		-6
$h(x)$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5

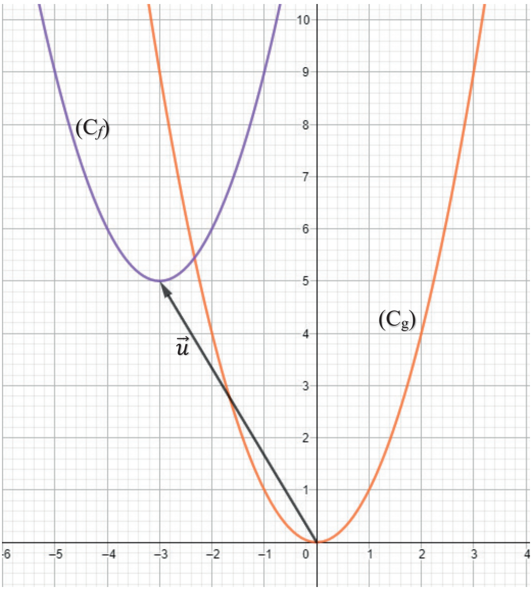
x	-2		0		3		6
$k(x)$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

Exercice 36

1) 0 a deux antécédents : -2 et 1. Donc f n'est pas injective.
2) L'application f n'est pas bijective car elle n'est pas injective.
3) Dans l'intervalle $[-2{,}5; 2]$ la droite d'équation $y = m$ pour m variant dans $\mathbb{R}$, coupe au moins une fois la courbe (C). Donc f est surjective.

Exercice 37

1) $f(x) = x^2 + 6x + 14 = (x+3)^2 + 5 = g(x+3) + 5$, donc $\vec{u}(-3; 5)$
2)



Exercice 38

1) $f(x) \leq g(x)$ dans l'intervalle $[-3; 3]$. L'ensemble des solutions est $[-2; 2]$
2) a) Si $x \in [-3; -1]$, $g(x) = -x + 1$.

Donc $(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq -x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0$.

Ensemble des solutions : $S = [-2; -1]$

Si $x \in]-1; 3]$, $g(x) = \frac{x+7}{3}$. Donc $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq \frac{x+7}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - x - 10 \leq 0$

Ensemble des solutions : $S = [-1; 2]$

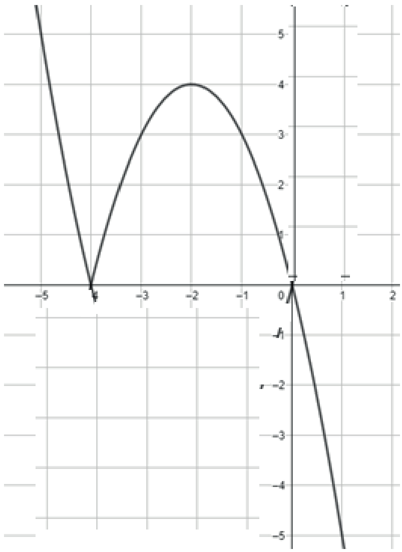
Finalement : l'ensemble des solution de l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$ est $[-2; -1] \cup [-1; 2]$.

Soit $S = [-2; 2]$

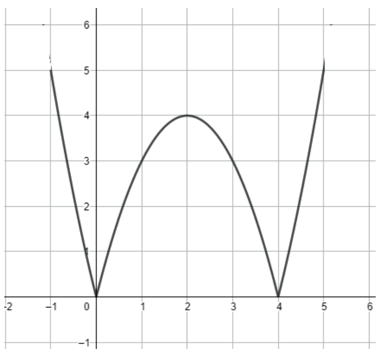
b) On trouve le même ensemble de solutions.

Exercice 39

Courbe de la fonction : $x \mapsto f(-x)$



Courbe de la fonction : $x \mapsto |f(x)|$



Exercice 40

Soit $f: \mathbb{R} \to [0;+\infty[\,,\ x \mapsto (x+3)^2$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

1) $gof(-1) = g(f(-1)) = g(4) = \frac{7}{2}$ et $fog(1) = f(g(1)) = f(4) = 49$.
2) *a)* $Df = \mathbb{R}$ *et* $=]0;+\infty[$ donc $Dgof = \mathbb{R} - \{-3\}$ et $Dfog =]0;+\infty[$

   c) $gof(x) = \frac{(x+3)^2+3}{|x+3|}$ *et* $fog(x) = (\frac{x+3}{\sqrt{x}} + 3)^2$
3) Soit $y \in [0;+\infty[$ tel que $f(x) = y$. Cette équation admet deux solutions : $-3+\sqrt{y}$ et $-3-\sqrt{y}$. Donc f est surjective.
4) On a $f(-6) = 9$ *et* $f(0) = 9$. Donc 9 a deux antécédents. Il en résulte que f n'est pas injective.
5) On considère maintenant h l'application de $[-3;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$ telle que $h(x) = (x+3)^2$.

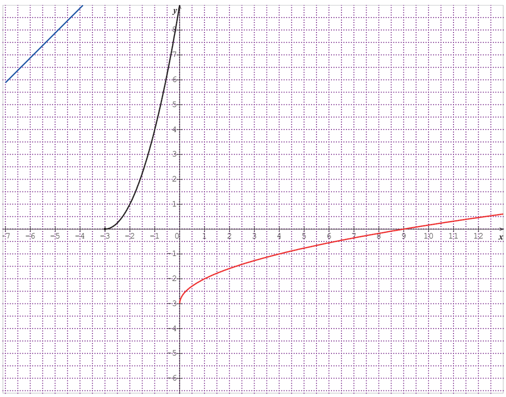
   Soit $y \in [0;+\infty[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution : $-3+\sqrt{y}$

   Donc h est bijective.

6) a) $h^{-1}(25) = x \Leftrightarrow h(x) = 25 \Leftrightarrow x = 2$, donc $h^{-1}(25) = 2.0$

   on calcula de même $h^{-1}(1) = -2$ et $h^{-1}(9) = 0$.

   b) Voir courbes ci-dessous.



Exercice 41

1- $D_f =]-\infty;-\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2};-1] \cup [1;\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};+\infty[$

2-a) Si $b = -1$, alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Si $\in\ \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\sqrt{(\frac{b-1}{b+1})^2+1};\sqrt{(\frac{b-1}{b+1})^2+1}\right\}$.

b) On a : $f(-1) = 1$ *et* $f(1) = 1$ donc f n'est pas injective.

-1 n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective.

3-a) $E = [1;\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};+\infty[$ *et* $F = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

b) $g^{-1}: F \to E$

$x \longmapsto \sqrt{(\frac{x-1}{x+1})^2 + 1}$

Exercice 42

1- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 1 \geq x^2 + 1 > 0$ donc $\frac{2x^2+1}{x^2+1} \geq 1$. Ainsi $\forall\, x \in \mathbb{R}; g(x) \geq 1$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) - 2 = -\frac{1}{x^2+1} < 0$; d'où $\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 2$.

Ainsi $\forall\, x \in \mathbb{R}, 1 \leq g(x) \leq 2$.

2- On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}$ et la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction gof est aussi bornée sur $\mathbb{R}$.

3- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $1 \leq g(x) \leq 2$.

Donc $f(1) \leq f(g(x)) \leq f(2)$. fog est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

De plus $f(1) = -2$ et $f(2) = 1$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R}; -2 \leq (fog)(x) \leq 1$.

Exercice 43

1- $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$.

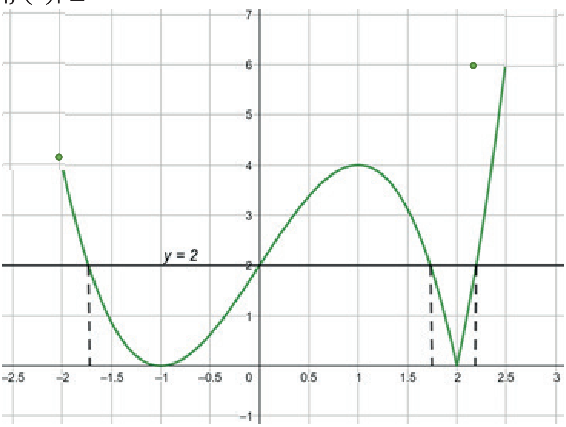
2-$D_{fog} = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$ et $D_{gof} = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.

3- $fog(x) = \frac{sin^3(x)+2}{sin^2(x)-1}$ et $gof(x) = \sin(\frac{x^3+2}{x^2-1})$.

SITUATION COMPLEXE

Exercice 44

Pour répondre à la préoccupation de ces élèves, je vais tracer la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto |f(x)|$ à partir de celle de f puis résoudre graphiquement l'inéquation : $|f(x)| \geq 2$



D'après ce graphique, l'inéquation : $|f(x)| \geq 2$ a pour ensemble de solutions [–2 ; –1,7]U[0 ; 1,7]U[2,2 ; 2,5].

En conclusion, le composant s'endommage lorsque la température est entre :

- –2 et –1,7
- ou bien 0 et 1,7
- ou bien 2,2 et 2,5.

Exercice 45

Le bénéfice en fonction de x est $B(x) = C(x) - R(x)$

$B(x) = x^2 - 70x + 1000$

$B(x) = (x - 35)^2 - 225$ pour $x \in [0; 60]$

la fonction est maximal pour $x = 60$

le bénéfice est donc maximum pour $x = 60$

2 DÉNOMBREMENT

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la scène ?	Le cabinet d'avocats « LAW FOR CITIZEN (LFC) »
Circonstances	Quel est le problème auquel Le cabinet d'avocats est confronté ?	Ce cabinet envisage ouvrir et donc redéployer une partie de ses avocats dans un autre pays où on parle l'arabe ou l'anglais. Pour minimiser les coûts, il compte n'envoyer que des avocats qui parlent l'arabe et l'anglais mais pas le français.
Tâche	Qu'est-ce que des élèves en classe de première se proposent de faire ?	Ils se proposent d'aider ce cabinet à déterminer le nombre d'avocats à redéployer

DECOUVERTE DES HABILETES

Activité 1

1) Les nombres : 15 ; 77 ; 3 ; 9 et 13 sont des éléments de A.
2) On a : $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

Exercice de fixation 1

1) On écrit : $F = \{\text{Kalifa}; \text{Anoh}; \text{Fodé}, \text{Yves}; \text{Fabienne}\}$.
2) L'ensemble F possède cinq éléments. Il est donc fini.

Activité 2

Déterminons d'abord tous les éléments de cet ensemble.
On trouve :-4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4.
L'ensemble F possède donc 9 éléments.

Exercice de fixation 2

On a $\text{card}(A) = 7$ et $\text{card}(B) = 0$.

Activité 3

1) On a : $A = \{112 ; 114 ; 116 ; 118 ; 120 ; 122 ; 124 ; 126\}$ et

$$B = \{111; 114; 117; 120; 123; 126\}$$

2) On a : $C = \{114; 120; 126\}$

Exercice de fixation 3

1) On a : $C = \{\theta; 2;\ \delta\}$
2) B est contenu dans $C \cap B$: Faux
   - C est contenu dans $C \cap B$: Faux
   - $C \cap B$ est contenu dans B :Vrai
   - $C \cap B$ est contenu dans C : Vrai

Activité 4

1. On a : $A = \{111; 114; 117; 120; 123; 126\}$ et $B = \{115; 120; 125\}$
2. On a : $G = \{111; 114; 115; 117; 120; 123; 125; 126\}$

Exercice de fixation 4

1. $C = \left\{\theta;\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2}; 0{,}33;\ P;\ \pi; Q;\ 3{,}14;\ 2;\ \frac{1}{3};\ 0;\ \delta\right\}$;

2. a) Faux ; b)Vrai ; c) Vrai

Activité 5

On obtient les ensembles suivants : $A = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ et $B = \{6\}$. Ces deux ensembles n'ont pas d'éléments communs.

Exercice de fixation 5

1) Deux ensembles qui n'ont **aucun** élément **commun** sont dits **disjoints**.
2) Le chiffre 2 est à la fois un nombre premier et un nombre pair. Il se retrouve 2 donc dans les deux ensembles. Les deux ensembles ne sont ne pas disjoints.

   La propriété est fausse.

Activité 6

1) On obtient : $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
2) $A = \{3; 6\}$ et $B = \{1; 2; 4; 5\}$. Ces deux ensembles sont bien disjoints et puis leur réunion est l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ c'est-à-dire E. Donc $A \cap B = \emptyset$ et $E = A \cup B$

Exercice de fixation 6

1.Les ensembles A et B sont complémentaires dans la figure 2.

2. On a :

   a) Le complémentaire de P dans K est l'ensemble :$\{1; 4; 7\}$

   b) Le complémentaire de Q dans K est l'ensemble :$\{1; 4; 7; 2; 3; 5; 6\}$

Activité 7

1) A l'aide de diagramme, on trouve : $\text{card}(C \cup N) = 10 + 5 + 5$ soit $\text{card}(C \cup N) = 20$
2) D'après les données, $\text{card}(C \cap N) = 5$. Donc $\text{card}C + \text{card}N - \text{card}(C \cap N) = 20$.

En définitive : $\text{card}(C \cup N) = \text{card}C + \text{card}N - \text{card}(C \cap N)$

Exercice de fixation 7

Notons A l'ensemble des professeurs de la 1èreD1 et B ceux de la 1èreD2.

On a $\text{card}A = \text{card}B = 8$ et $\text{card}(A \cap B) = 4$. $A \cup B$ est l'ensemble des professeurs des deux classes. En appliquant la propriété ci-dessus, on obtient : $\text{card}(A \cup B) = 12$.

Le nombre de professeurs des deux classes est donc 12.

Activité 8

1) a) L'ensemble C de tous les résultats possibles est :

$C = \{(1,F);(1,P);(2,F);(2,P);(3,F);(3,P);(4,F);(4,P);(5,F);(5,P);(6,F);(6,P)\}$.

b) Il résulte de la question précédente que : $\text{card}(C) = 12$

2) On a : $\text{card}A = 6$ et $\text{card}B = 2$. Donc $\text{card}(C) = (\text{card}A)x(\text{card}B)$

Exercice de fixation 8

1) Vrai
2) Faux
3) Faux

Activité 9

1) On recopie l'arbre de choix puis on le complète. Ensuite on compte les mots obtenus.

   On trouve au total 9 mots

2) a) On a : $ExE = \{AA; AB; AC; BB; BA; BC; CC; CA; CB\}$. On trouve exactement les mêmes que dans l'arbre de choix.

Exercice de fixation 9

Un numéro de téléphone est un élément de l'ensemble L^{10}. C'est donc un 10-liste

Donc le nombre de numéros de téléphones est égal à : 8^{10}.

Activité 10

On peut par exemple s'aider d'un arbre de choix dont il n'est pas nécessaire de dessiner toutes les branches.
Soit V_1 ; V_2 et V_3 les trois véhicules.

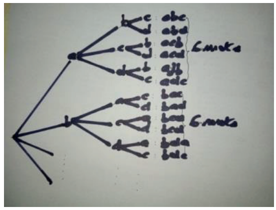
V_1 a 6 possibilités de stationner ; une fois qu'il stationne, V_2 a 5 possibilités de stationnemer et V_3 a quatre possibilités de stationner. En conclusion :

- Chacune des deuxièmes branches génère 4 stationnements possibles ;
- Chacune des premières branches génère 5 stationnements possibles ;
- Il y a 6 premières branches

Le nombre de stationnements possibles est 6x5x4 soit 120.

Exercice de fixation 10

1) D'après l'arbre de choix, chacune des quatre premières branches génère 6 mots. Le nombre de mots est donc : 4x6 soit 24 mots
2) Par exemple les mots BAC et CAB sont différents. Ensuite on ne peut pas répéter une lettre dans un mot. Donc un mot est un 3-arrangement.
   En appliquant la formule, on obtient : 4x3x2 soit 24 mots



Activité 11 : dénombrement de permutations

On reprend l'arbre de choix de l'activité 10 mais cette fois-ci avec six véhicules.

On trouve au total : 6x5x4x3x2x1 stationnements possibles soit 120.

Exercice de fixation 11

Un rangement des cinq CD est une permutation des cinq CD.

Le nombre total de rangements est donc 5 ! soit 120.

Activité 12 :

1) Les tirages $\{1,3,5\}$ et$\{1; 5; 3\}$ sont les mêmes car les trois boules sortent en même temps il n'y a un aucun ordre de sortie à prendre en compte.

Tous les résultats sont : $\{1,2,3\}$; $\{1,2,4\}$; $\{1,2,5\}$; $\{1,3,4\}$; $\{1,3,5\}$; $\{1,4,5\}$; $\{2,3,4\}$; $\{2,3,5\}$; $\{2,4,5\}$; $\{3,4,5\}$.

2) Leur nombre donc 10.
3) Démontrons que $p\,!\,\mathrm{C}_n^p = \mathrm{A}_n^p$
   Chaque sous-ensemble à p éléments donne p ! permutations.
   Il y a C_n^p sous-ensembles. Or une permutation de p éléments parmi n n'est rien d'autre qu'un arrangement de p éléments.
   Le nombre d'arrangements à p éléments est donc $p\,!\,C_n^p$ c'est-à-dire A_n^p
   Donc : $p\,!\,\mathrm{C}_n^p = \mathrm{A}_n^p$. On divise les membres de l'égalité par p !; on obtient : $C_n^p = \frac{\mathrm{A}_n^p}{p!}$

Exercice de fixation 12

Un petit groupe de cinq personnes est une 5-combinaison.

Leur nombre total est donc $\binom{30}{5}$. On sait que $\binom{30}{5} = \frac{A_{30}^5}{5!}$. On trouve donc 142 506 petits groupes possibles.

Activité 13

1) a) n ! est le nombre de permutations de n éléments.

b) On part de l'écriture $n! = nx(n-1)x(n-2)x \dots x2x1$;

On remarque que $(n-1)! = (n-1)x(n-2)x \dots x2x1$ d'où le résultat.

c) $6! = 6x5x4x3x2x1$. On trouve $6! = 720$ et de même $5! = 120$

2) a) C'est le nombre d'arrangements de p éléments parmi n éléments.

On trouve respectivement : $A_{10}^3 = 720$; $A_{20}^2 = 380$; $A_8^5 = 6\,720$.

b) $n! = nx(n-1)x(n-2)x \dots x(n-p+1)(n-p)!$. Donc $n! = A_n^p(n-p)!$.

3) On appelle une combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments est un sous-ensemble non ordonné de p éléments de cet ensemble.

a) Toutes les combinaisons à 3 éléments de E sont : $\{1,2,3\}$; $\{1,2,4\}$; $\{1,3,4\}$ et $\{2,3,4\}$. On en déduit que $C_4^3 = 4$

b) On sait $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ d'où $C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}$ qu'on peut écrire encore

$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\dots 2x1}{p!(n-p)(n-p-1)\dots 2x1}$ et donc finalement on obtient

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

c) $C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120$; $C_{20}^3 = \frac{20!}{20!17!} = 1140$ et $C_4^4 = \frac{4!}{4!0!} = 1$

4) Pour tous nombres entiers naturels n et k tels que $1 \leq k \leq n$,

a) $C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1$.

b) $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} = (n-1)!\,(\frac{1}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{1}{p!(n-p-1)!})$.

On rend on même dénominateur puis on additionne.

On trouve : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ d'où le résultat.

c) $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$ se démontre en mettant $\frac{n}{p}$ en facteur dans la définition de C_n^p.

Exercice de fixation 13

1) $\frac{20!}{18!} = \frac{20x19x18!}{18!}$. Donc $\frac{20!}{18!} = 380$
2) On sait que : $C_{70}^{68} = C_{70}^{2}$. Soit donc $C_{70}^{68} = 2\,415$.
3) $A_{10}^{5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$

DES QUESTIONS D'EVALUATIONS

Question 1 : Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage simultané de p objets pris parmi n objets $(p \leq n)$?

Exercice non corrigé

1. $C_1^1 \times C_5^2 = 10$ (il y'a une seule boule numérotée 1 et on tire deux boules parmi les 5 restantes
2. $C_3^3 = 1$ (il y'a trois boules numérotées 1 ; 3 et 5)

Question 2 : Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage successif de p objets avec remise pris parmi n objets ?

Exercice non corrigé

1. Un code est assimilable à un tirage successif avec remise de 4 chiffre Parmi 10 donc $10^4 = 10\,000$ possibilités
2. Le chiffre 7 est fixé au début et les 4 chiffres paires à la fin il ne reste que qu' à tirer deux chiffres parmi les cinq chiffres impaires. Donc on a : $1^1 \times 5^2 \times 4^1 = 100$ possibilités

Question 3 : Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage successif de p objets sans remise pris parmi n objets. $(p \leq n)$?

Exercice non corrigé

1. $A_{32}^3 = 29\,760$
2. $A_1^1 \times A_{31}^2 = 930$

Question 4 : Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage successif de p objets pris chacun successivement p ensembles :
E_1 ; E_2 ; E_3 ;…. ; E_p de cardinal respectifs non nuls : n_1 ; n_2 ; n_3 ;…. ; n_p

Exercice non corrigé

il y'a 20 consonnes et 10 chiffres
donc on prend une consonne parmi les 20 et trois chiffres parmi les 10 chiffres.
on a donc le nombre de codes possibles est : $20 \times 10^3 = 20\,000$

MES SEANCES D'EXERCICES

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

L'ensemble des nombres premiers inférieurs à 50 est :

$\mathrm{P} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47\}$. Donc $\mathrm{cardP} = 15$

Exercice 2

L'ensemble des nombres entiers relatifs compris dans l'intervalle $[-5{,}75\ ;\ \ 6{,}01]$ est

$\{-5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Le cardinal est 12.

Exercice 3

1) $A \cap B = \{6; 12; 18\}$.

2) $A \cap B$ est l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à A et à B.

Exercice 4

$G = \{1: 2; 3; 6; 9; 18\}$ et $H = \{1; 5; 7: 35\}$. Donc $G \cap H = \{1\}$.

On dit que 18 et 35 sont premiers entre eux.

Exercice 5

L'ensemble de F est composé d'entiers strictement négatifs alors E est composé d'entiers positifs ou nuls. Donc E et F sont disjoints.

Exercice 6

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 15; 20\}$.

Exercice 7

1) Tous les éléments de A sont dans E.
2) $\overline{\mathrm{A}} = \{\mathrm{b};\ -2; 3; 7; 9; 8\}$

Exercice 8

$\mathrm{card}(\mathrm{E} \cup \emptyset) = \mathrm{cardE} + \mathrm{card}\emptyset - \mathrm{card}(\mathrm{E} \cap \emptyset)$. $\mathrm{card}\emptyset = 0$ et $\mathrm{E} \cap \emptyset = \emptyset$ d'où le résultat.

Exercice 9

$\mathrm{card}(A \cup B) = 40$

Exercice 10

$\mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B - \mathrm{card}(A \cup B)$. Après calcul, $\mathrm{card}(A \cap B) = 0$ cela signifie que A et B n'ont pas d'éléments communs. Ils sont donc disjoints.

Exercice 11

$\mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B - \mathrm{card}(A \cup B) = 10 + 15 - 19 = 6$.

Exercice 12

1) L'élève possède 14 billes dans sa poche.
2) Le complémentaire de V est l'ensemble des 6 billes bleues.

Exercice 13

Le nombre de couples est 320.

Exercice 14

Le nombre de mots est 26^2.

Exercice 15

Il y a dix chiffres. Chaque code PIN est un 4-listes. Le nombre de codes PIN est 10 000.

Exercice 16

Un résultat est 10-liste à partir de Face et Pile. Il y a donc 2^{10} résultats possibles.

Exercice 17

$4 \times 5 \times 3 = 60$

Exercice 18

Le nombre de rangements est 5^{10}

Exercice 19

Le nombre est 840.

Exercice 20

Détermine le nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 12.

Il y a 792 combinaisons possibles.

Exercice 21

On peut s'aider d'un arbre de choix. On va noter E1 ; E2 et E3 les trois enfants.

On noter C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 et C_5 les cadeaux.

E1 a 5 possibilités de recevoir son cadeau ; E2 à 4 possibilités de recevoir son cadeau et enfin E3 à 3 possibilités.

Le nombre de cas possibles est donc :60.

Exercice 22

Un mot est une permutation des cinq lettres. On dit que c'est anagramme.

Le nombre de mots est donc $5\,! = 120$

Exercice 23

Il y a 10 ! façons

Exercice 24

Notons D l'ensemble des dames et H celui des hommes.

Dans ce contexte, un couple est une paire. C'est un élément de l'ensemble HxD. Ici HxD = DxH.

Il y a donc 96 couples possibles.

Exercice 25

$C_{24}^{3} = 2024$

Exercice 26

$C_8^2 = 28$

Exercice 27

$A_{49}^{5} \times A_{10}^{1} = 2\,288\,260\,800$

Exercice 28

$C_{10}^{3} \times C_5^2 = 28 = 1\,200$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 29

1) VRAI; 2) FAUX ; 3) VRAI ; 4) FAUX ; 5) FAUX ; 6) VRAI ; 7) VRAI ; 8) FAUX ; 9) VRAI

Exercice 30

1) n^5 est le nombre de 5-listes d'un ensemble à n éléments.
2) C_{12}^3 est le nombre de 3-combinaisons d'un ensemble à 12 éléments.
3) 8! Est le nombre de permutations de 8 éléments.
4) 9x8x7x6 est A_9^4 c'est-à-dire le nombre de 4-arrangements de 9 éléments.

Exercice 31

1.Soit $\overline{\mathrm{A}}$ le complémentaire de A dans B. on a $\mathrm{cardB} = \mathrm{cardA} + \mathrm{card}\overline{\mathrm{A}}$.

Donc $\mathrm{cardA} \leq \mathrm{cardB}$.

2.Les ensembles A et B sont inclus dans $A \cup B$ d'où le résultat en utilisant la question 1).

Exercice 32

1. $6! = 720$
2. $4! \times 2! = 48$
3. On a : GFGFGG ou GGFGFG ou GFGGFG
   donc $4! \times 2! + 4! \times 2! + 4! \times 2! = 3 \times 48 = 144$
4. On a : FFGGGG ou GGFFGG ou GGGGFF
   donc $4! \times 2! + 4! \times 2! + 4! \times 2! = 3 \times 48 = 144$

Exercice 33

1. $C_{30}^4 = 27\,405$
2. $C_{18}^4 = 3\,060$
3. $C_{30}^4 - C_{18}^4 = 27\,405 - 3\,060 = 24\,345$

Exercice 34

1.D ; 2.C ; 3.B ; 4.B

Exercice 35

Il y a 24 lettres possibles ; ensuite les numéros chiffrés sont des 4-listes.
Le nombre total de véhicules à immatriculer est égal à : 24x10^4 soit 240 000 véhicules.
(La saturation est vite arrivée)

Exercice 36

1) Un plat est un triplé (entrée ; plat de résistance ; dessert).

   Il y a donc 2x3x2 soit 12 types de plats possibles.
2) Ce sera une pomme pour elle au dessert. Il y donc 6 types de plats possibles qu'on peut lui servir.

Exercice 37

Le choix de trois pharmacies est une 3-combinaison.

Le nombre total de choix possibles est égal à 220.

Exercice 38

1) Un résultat du tirage est une 3-combinaison. Il y a donc 45 résultats possibles.
2) Là encore, on fait appel au complémentaire de A ; $\overline{A}$: « on obtient des boules de la même couleur ». $\mathrm{card}\overline{A} = \binom{3}{3} + \binom{5}{3} = 11$.

   Donc $\mathrm{card}A = 45 - 11$ soit 34.

Exercice 39

1) Ces nombres sont des 5-listes. On obtient : 6^5.
2) Ces nombres sont des 5-arrangements. On obtient : A_6^5.
3) Ces nombres sont des 3-listes. On obtient : 6^3.
4) On obtient : 6x6x5.

Exercice 40

Il y a 5x4x3x2 programmations.

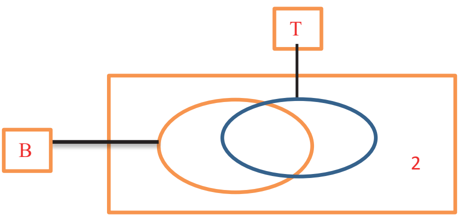
Exercice 41

1) Les résultats possibles sont des 5-listes formés à partir des chiffres 1 à 6.

   Donc on a : $\mathrm{card}E = 6^5 = 7\,776$.
2) On a : $\mathrm{card}A = 6^2 = 36$.
3) On a $\mathrm{card}B = 250$ ou $\binom{5}{3}\mathrm{x}5^2$.
4) Le complémentaire s'énonce comme suit : « le numéro 6 n'apparait pas ».

   Dans ce cas, il y a 5^5 résultats possibles. Le nombre cherché est donc : $6^5 - 5^5$ soit 4 651 résultats.

Exercice 42



Soit B l'ensemble des pratiquants de Basket-ball et T celui des pratiquants de Tennis.

On a : $\mathrm{card}(B \cup T) = 28$.

$\mathrm{card}(B \cap T) = \mathrm{card}B + \mathrm{card}T - \mathrm{card}(B \cup T)$

Donc : $\mathrm{card}(B \cap T) = 9$. Le nombre de personnes qui pratiquent les deux sports est donc 9.

Exercice 43

1) Le rangement est le nombre 4-arrangement parmi 5. Cela donne 120.
2) a) Le nombre de rangements est 6.

   b) Soit A l'ensemble des rangements possibles.

   Le complémentaire de A est $\overline{A}$ tel que :

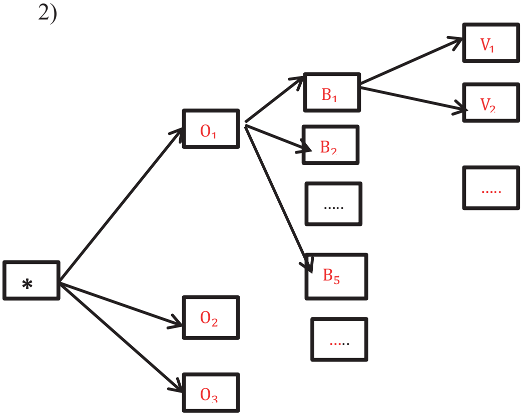
   $\overline{A}$: " les livres S et A sont dans deux casiers consécutifs"

   - ils sont dans 1 et 2 : 12 possibilités ;
   - ils sont dans 2 et 3 : 12 possibilités ;
   -ils sont dans 3 et 4 : 12 possibilités ;
   - ils sont dans 4 et 5 : 12 possibilités

Au total : $\mathrm{card}\overline{A} = 48$ possibilités. Donc $\mathrm{card}A = 120 - 48$ soit 72.

Exercice 44

1) Le nombre de tirages est égal à $A_{10}^{3} = 720$. L'ensemble de tous les résultats possibles s'appelle l'univers des possibles.
2)



D'après l'arbre de choix, le cardinale de A est 30

3) On obtient trois boules de trois couleurs différentes
   a) On obtient une permutation de : orange-blanc-vert. Il y a 6 permutations possibles.
   Chacune des permutations donne 30 possibilités.
   Le cardinal de B est donc 180.
   b) L'ensemble $\overline{B}$ peut-etre défini comme suit : « on n'obtient pas des boules de trois couleurs différentes »

c) Première méthode : $\mathrm{card}\overline{\mathrm{B}} = 720 - 180 = 540$.

Deuxième méthode :

– orange-orange-blanc : 90 possibilités ;

– orange-orange-orange : 6 possibilités

– orange-orange-vert : 36 possibilités

– blanc-blanc-orange : 180 possibilités ;

– blanc-blanc-blanc : 60 possibilités ;

blanc-blanc-vert : 120 possibilités ;

vert-vert-orange : 18 possibilités

vert-blanc : 30 possibilités.

La somme donne 540 possibilités

4) Il semble facile de calculer d'abord le cardinal du complémentaire de C.

C: " trois boules de couleurs différentes" donc $\overline{\mathrm{C}}$: " trois boules de même couleur"

Le nombres des boules vertes n'atteint pas ; donc $\overline{\mathrm{C}} = A_3^3 + A_5^3 = 66$.

$\mathrm{cardC} = 720 - 66$; donc $\mathrm{cardC} = 654$.

Exercice 45

1. $26^1 \times 10^3 = 26\,000$
2. $26^1 \times 9^3 = 18\,954$
3. $26^1 \times 10^3 - 26^1 \times 9^3 = 26\,000 - 18\,954 = 7\,046$
4. $26^1 \times A_{10}^3 = 26 \times 720 = 18\,720$
5. $26^1 \times 10^3 - 26^1 \times A_{10}^3 = 26\,000 - 18\,720 = 7\,280$

Exercice 46

1- $15! = 1307674368000$

2- $2 \times 6! \times 9! = 522547200$

Exercice 47

1. $6^6 = 46656$

2. a) 6 b) 6×5^5 c) 5×4^4

Exercice 48

1- Le nombre de diagonales d'un polygone convexe de n côtés est déterminé par le nombre de segments joignant deux sommets de ce polygone mais qui ne sont pas des côtés de ce polygone. Donc, pour un polygone de n côtés, le nombre de diagonales est : $C_n^2 - n$

2- $C_n^2 - n = \frac{n^2 - 3n}{2}$

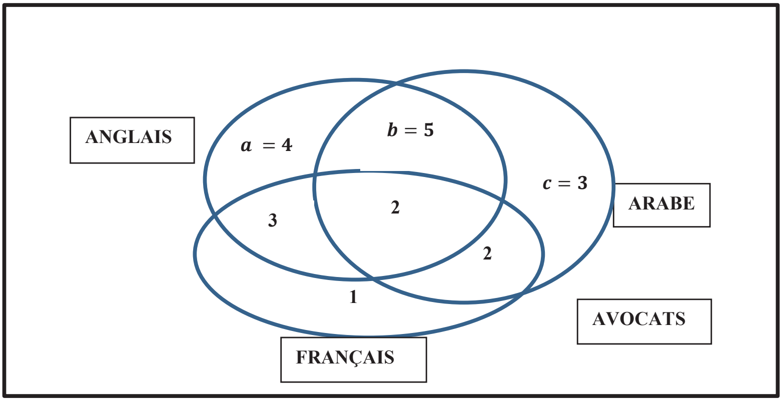
3- Un octogone à 8 côtés. On a : $\frac{8^2 - 3\times 8}{2} = 20$, donc un octogone régulier à 20 diagonales.

4-a) $S_{\mathbb{N}} = \{5\}$

b) pentagone régulier

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 49



Notons a le nombre d'avocats qui parlent uniquement l'anglais, b qui parlent l'anglais et l'arabe mais pas le français et c le nombre d'avocats qui parlent uniquement l'arabe.

On a : $\begin{cases} a+b=9 \\ b+c=8 \\ a+b+c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9-b \\ c=8-b \\ (9-b)+b+(8-b)=12 \end{cases}$ donc $\begin{cases} b=5 \\ a=4. \\ c=3 \end{cases}$

Il y a donc 5 avocats à redéployer.

Exercice 50

Tirage simultané : Le nombre de tirage est : $C_4^2 = 6$

Tirage successif sans remise : Le nombre de tirage est : $A_4^2 = 12$

Tirage successif avec remise : Le nombre de tirage est : $4^2 = 16$

le tirage successif avec remise est plus avantageux

Exercice 51

Pour déterminer le nombre de délégation possibles, nous allons déterminer le nombre de personnes susceptibles de participer à une délégation, ensuite il faut savoir que monsieur Coulibaly fera partie de la délégation en tant que porte-parole.

- Le CE compte 14 enseignants ;
- Le doyen des professeurs de mathématiques fait partie de la délégation (porte-parole) ;
- Une délégation est une combinaison une délégation ;
- Une délégation doit contenir au moins une dame ;

Soit l'ensemble A défini par : « la délégation contient le doyen et au moins une dame ».

Le cardinal de A est le nombre de délégations possibles.

Le doyen fait partie de la délégation, il reste 9 hommes ; les dames sont au nombre de 4.

- La délégation est composée d'une seule dame : $1\text{x}4\text{x}\binom{9}{3}$ possibilités ;
- La délégation est composée de deux dames exactement :$1\text{x}\binom{4}{2}\binom{9}{2}$ possibilités ;
- La délégation est composée de trois dames exactement : $1\text{x}\binom{4}{3}\binom{9}{1}$ possibilités ;

Au total : $\text{card}A = 1\text{x}4\text{x}\binom{9}{3} + 1\text{x}\binom{4}{2}\binom{9}{2} + 1\text{x}\binom{4}{3}\binom{9}{1}$; $\text{card}A = 588$.

Le nombre de délégations possibles est donc 588.

Exercice 52

On peut raisonner à l'aide d'un arbre de choix.

1er cas : le président est un garçon. Alors le vice-président est une fille.

Il y a 8x12x18 bureaux possibles.

2nd cas : le président est une fille. Alors le vice-président est un garçon.

Il y a 12x8x18 bureaux possibles.

Au total, on obtient 2x(8x12x18) bureaux possibles ; soit 3 456.

Exercice 53

Un rang est une permutation des huit élèves. Si en plus les cinq filles occupent les cinq premières, le nombre de rangs possibles est donc : 5 !3 ! soit 720 rangs.

Exercice 54

Soit l'ensemble : G : « gagner au moins un lot ».

Il s'agit de déterminer le cardinal de G.

Avant de déterminer le cardinal de G, nous allons :

- déterminer le cardinal de l'univers des possibilités ;

- définir le contraire $\overline{\text{G}}$ de G puis calculer son cardinal ;

-enfin nous déduirons le cardinal de G.

- <u>Cardinal de G</u>. Acheter cinq tickets revient à choisir 5 tickets parmi 50.
  Donc le cardinal de l'univers est $\binom{50}{5} = 2\,118\,760$
- $\overline{\mathrm{G}}$: « aucun des cinq tickets n'est gagnant ». Donc $\mathrm{card}\overline{\mathrm{G}} = \binom{38}{5} = 501\,942$;
- Donc $\mathrm{cardG} = \binom{50}{5} - \binom{38}{5} = 1\,616\,818$

Le participant a donc 1 616 818 possibilités d'obtenir au moins un lot.

<u>Commentaire</u> : ce nombre est certes «énorme» cependant il ne permet pas d'évaluer les chances de gagner au moins un lot. En réalité il a plus de 75% de chance de gagner au moins un lot.

La justification de cet argument sera faite dans le cours de probabilité.

3 LIMITES ET CONTINUITÉ

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où se déroule la scène ?	génies en herbe organisé par le club de mathématique d'un Lycée
Circonstances	Quel est le problème auquel un élève de 1ere D est confronté ?	La préparation en vue d'une participation en cherchant à étudier la continuité de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+\|x\|}{x}$ en 0.
Tâche	Qu'est-ce que des élèves en classe de première se proposent de faire ?	Les élèves se proposent d'étudier les limite et la continuité d'une fonction

Découverte des habiletés

Activité 1

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.

x	-1	$-0,1$	$-0,01$	0	$0,001$	$1,01$	1
$g(x)$	0,91	0,99	0,999		0,999	0,917	0,919

3. Lorsque x tend vers 0 alors $g(x)$ tend vers 1.

Exercice de fixation 1

1.

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	$-0,00001$	0	$0,00001$	$0,001$	$0,01$
$h(x)$	0,99	0,99	0,99	0,99	0,999		0,999	0,99	0,99

2. Lorsque x tend vers 0 alors $h(x)$ tend vers 1

Activité 2

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1
$h(x)$	3,61	3,96	3,996	3,999	4,000	4,004	4,04	4,41

1. Lorsque x tend vers 2 alors $h(x)$ tend vers 4
2. $h(2) = 4$
3. Lorsque x tend vers 2 alors la limite de $h(x)$ vaut 4 qui est $h(2)$

Exercice de fixation 2

une fonction numérique f est continue en un point a si et seulement si f est définie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exercice de fixation 3

1. F ; 2. V ; 3. F

Exercice de fixation 4

1. V ; 2. F ; 3. F

Exercice de fixation 5

1. B ; 2. D ; 3. A ; 4. D

Activité 3

1. a) $\lim\limits_{x \to 4}(16 - x^2) = 16 - 16 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 4}(x - 4) = 4 - 4 = 0$

b) On a la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » donc on ne peut pas conclure directement quand à la limite.

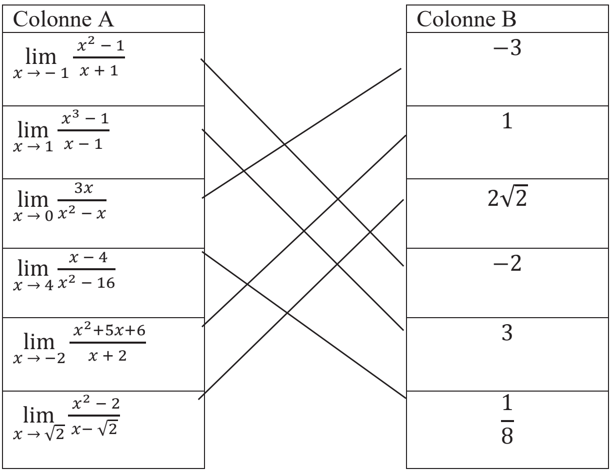
2. a) $f(x) = \frac{16 - x^2}{x - 4}$ et $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}, f(x) = -x - 4$ or

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -x - 4$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $f(x) = g(x)$

ainsi f est la restriction de g à $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

b) $\lim\limits_{x \to 4}(-x - 4) = -4 - 4 = -8$

Exercice de fixation 6



Activité 4

1. $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 2$
2. $\lim\limits_{x \to -1} h(x) \neq \lim\limits_{x \to -1} g(x)$ donc f ne possède pas de limite en -1.

Exercice de fixation 7

$\forall x \in]-\infty; 0]$ $f(x) = -x$ et $\forall x \in [0; +\infty[$ $g(x) = x$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}}(-x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0$

Exercice de fixation 8

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} 3x + 1 = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} x^2 + 1 = 2$

DES QUESTIONS D'EVALUATIONS

Question 1 : Comment calculer la limite en $\boldsymbol{a}$ de certaines fonctions du type $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$ telle que $\boldsymbol{f(a) = g(a) = 0}$?

Exercice non corrigé

on a : $g(x) = \frac{2x^2-9x-5}{2x^2+7x+3} = \frac{2(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

Pour $\neq -\frac{1}{2}$, $g(x) = \frac{x-5}{x+3}$

donc $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} g(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x-5}{x+3} = -\frac{11}{5}$

Question 2 : Comment justifier qu'une fonction définie sur les intervalles $]-\infty; \boldsymbol{a}[$ et $]\boldsymbol{a}; +\infty[$ admet une limite en $\boldsymbol{a}$?

Exercice non corrigé

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{2x^2}{x-2} = -2$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x - 3 = -2$ et $g(1) = -2$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = g(1)$ donc g admet une limite en 1.

Question 3 : Comment justifier qu'une fonction est continue en un point $\boldsymbol{a}$?

Exercice non corrigé

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} (x^3-4x^2 + 2x - 5) = 3$; $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \sqrt{x} + 1 = 3$ et $g(4) = 3$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} g(x) = g(4)$ donc g est continue en 4.

MES SEANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

x	0,9	0,99	0,999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999		2,0001	2,001	2,01	2,1

On constate que lorsque x est proche de 1, $f(x)$ est proche de 2 ; donc on peut conjecturer que la limite de f en 1 est 2.

Exercice 2

2.

Exercice 3

1.

Exercice 4

1. VRAI
2. FAUX
3. FAUX
4. FAUX

Exercice 5

Colonne A
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x$
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x$
$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin x$

Colonne B
-1
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1
$\frac{1}{2}$

Exercice 6

1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \frac{3}{2}$; $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f}{g}(x) = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x \to 2} (fg)(x) = \frac{3}{4}$

2. . $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f}{g}(x) = 8$; $\lim\limits_{x \to 2} (fg)(x) = 2$

3. . $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{2}{3}$; $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f}{g}(x) = -\frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x \to 2} (fg)(x) = -\frac{4}{3}$

Exercice 7

$\lim\limits_{x \to 8} (2x-1)+(x+3) = 17 + 11 = 28$; $\lim\limits_{x \to 0} (2x-1)+(x+3) = -1+3 = 2$

$\lim\limits_{x \to -1} (x^3+3x^2-5x-3) = -1+3+5-3 = 0$; $\lim\limits_{x \to 1} (2x-1) = 1$

Exercice 8

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-\frac{3}{2}}{x^2-2} = \frac{3}{4}$; $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}) = 8 + \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \left(x^3 - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{2x}\right) = -\frac{1}{8} + 24 + 1 = -\frac{1}{8} + 25$

Exercice 9

$\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3} (x-3) = -6$; $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}(x+3) = 4$;

$\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\to0} x+2 = 2$; $\lim\limits_{x\to2} \frac{x-3}{x^2-3x} = \lim\limits_{x\to2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1) = 2$; $\lim\limits_{x\to1} -3(2x-1) = -3$

Exercice 10

1. ; 2. ; 3

Exercice 11

$\forall x \in]-\infty; 0]\ f(x) = -x$ et $\forall x \in [0; +\infty[\ g(x) = x$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0$

Exercice 12

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x^2 + 4x + 3) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x^3) = -1$

Exercice 13

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{x-1} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} 2x - 1 = 1$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 1.

Exercice 14

N°	Affirmations	Réponses
1	Si une fonction ne possède pas de limite en un point, alors elle est continue en ce point	Faux
2	Toute fonction continue en point est définie en ce point	Vrai
3	Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$ et $f(a) \neq k$ alors f est continue en a.	Faux
4		Faux

Exercice 15

1. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x + \sqrt{x}\right) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0 .
2. $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ donc g n'est pas continue en 0

Exercice 16

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$ et $f(4) = 1$ donc f n'est pas continue en 4

Exercice 17

Une fonction numérique f est continue sur un intervalle si et seulement si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Exercice 18

1. Faux ; 2. Faux ; 3. Vrai

Exercice 19

Cas 4 ; cas 6 ; cas 7 ; cas 8

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 20

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x+\sqrt{x}} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{x-8} = \lim\limits_{x\to 8} \frac{1}{\sqrt{x}+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$; $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-3x-10}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} x-5 = -7$

Exercice 21

$\forall x \in]1;+\infty[$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-)1(\sqrt{x}+1)}{x-1} = 1+\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} 1+\sqrt{x} = 2$

Exercice 22

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{x^2-5x+6}{3-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{(x-3)(x-2)}{3-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} 2-x = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{x^2-5x+6}{3-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{(x-3)(x-2)}{3-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}} 2-x = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \frac{28}{7} = 4$; $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\>}} \frac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\>}} \frac{3(x-4)}{(4-x)(\sqrt{3x-3}+3)} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\>}} \frac{-3}{(\sqrt{3x-3}+3)} = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\<}} \frac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\<}} \frac{3(x-4)}{(4-x)(\sqrt{3x-3}+3)} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\v}} \frac{-3}{(\sqrt{3x-3}+3)} = -\frac{1}{2}$

Exercice 23

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} 2x^2 - x + 4 = 10$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} 3x+2 = 8$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 2.

Exercice 24

Démontrons que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Pour tout x différent de 0, $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$. On a ensuite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exercice 25

Pour tout x différent de 0, $f(x) = 1 + \frac{|x|}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} 2 = 2$ car pour > 0 , $f(x) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} 0 = 0$ car pour < 0 , $f(x) = 0$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)$ donc f n'est pas continue en 0.

Exercice 26

a. Vrai ; b. Faux ; c. Faux d. Faux ; e. Vrai

Exercice 27

On a $f(-1) = 7$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = 1 + a$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -3 - b$.

La fonction f est continue en -1 si et seulement si $\begin{cases} 1 + a = 7 \\ \\ -3 - b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ \\ b = 4 \end{cases}$

Exercice 28

1. L'ensemble de définition de la fonction $h.g$ est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
2. La formule explicite de la fonction $h.g$ est $(h.g)(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$
3. Pour tout x différent de 3, $(h.g)(x) = x + 1$. D'où $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$ alors que $f(3) = 5$.

   On a donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$. La fonction f n'admet pas de limite en 3 ; elle n'est donc pas continue en 3.

Exercice 29

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x^3 = 1$

on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1.

Exercice 30

On a $f(-5) = a$ et $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = \lim\limits_{x \to -5} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{7}$. Donc la fonction f est continue en -5 si et seulement si $a = -\frac{1}{7}$

Exercice 31

1. $D_f = \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$.
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ donc f n'est pas continue en 0
4. f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 32

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$
2. $p(1) = 0$ et $q(1) = 0$
3. $p(x) = (x - 1)(x^2 + x - 2)$ donc $a = 1$; $b = 1$ et $c = -2$
4. Pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x^2+x-2}{x-3}$
5. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-3} = 0$
6. f n'est définie en 1 et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ donc f n'est pas continue en 1.
7. f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$

Exercice 33

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $D_m = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2+3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0}(2x+3) = 3$

$\lim\limits_{x \to 0} m(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{x^2+x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{x+1} = 3$

Exercice 34

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{3x-x^2}{x^2-9} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{-x}{x+3} = -\frac{1}{2}$

   $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{2}$

Exercice 35

$\forall x \in [0; 1]$, $f(x) = x^2$ et $\forall x \in [1; 2]$, $f(x) = 1 + (x-1)^2$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} 1 + (x-1)^2 = 1$

comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1.

Exercice 36

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = h(0)$ donc h est continue en 0 .

Exercice 37

1- $\forall\, x \in]-\infty; -1[, f(x) = x + a + \sqrt{x^2+x+1}$

$\forall\, x \in [-1; 1], f(x) = \frac{ax-b+a}{2x+4}$

$\forall\, x \in]1; +\infty[, f(x) = \frac{2}{3}bx - \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}$

$D_f =]-\infty; -1[\cup [-1; 1] \cup]1; +\infty[$.

D'où $D_f = \mathbb{R}$.

2- f est continue en -1 si et seulement si $2a + b = 0$.

f est continue en 1 si et seulement si $2a - 5b = -12$.

f est donc continue en -1 et en 1 si et seulement si $a = -1$ *et* $b = 2$.

Exercice 38

$\lim\limits_{x \to 2}\left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+ax+a}\right) = 0$ lorsque $a = 2$.

De plus $= \lim\limits_{x \to 2}\left(\frac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2x+2}}{x-2}\right)$, donc $k = \frac{\sqrt{10}}{20}$.

f est continue en 2 pour $a = 2$ et $k = \frac{\sqrt{10}}{20}$.

Situations complexes

Exercice 39

$$f(x) = \frac{(x^{20}+100)^2 - 10000}{x^{20}}$$

x	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
$f(x)$	200	200	200	200	200	0	0

d'après le tableau la limite en 0 est 0

or $f(x) = \frac{(x^{20}+100)^2 - 10000}{x^{20}} = x^{20} + 200$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^{20} + 200 = 200$

Exercice 40

La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 150x \; pour \; x \in [0; 5] \\ f(x) = 750 \; pour \; x \in]5; 10] \\ f(x) = 100x \; pour \; x \in]10; 30] \\ f(x) = 3000 + 50x \; pour \; x \in]30, +\infty[\end{cases}$$

La fonction f a pour ensemble de définition : $\mathbb{R}$

La représentation graphique est la suivante :

Sur la représentation graphique, on constate qu'au point d'abscisse 5 de la courbe, il n'y a pas de « cassure » alors qu'au point d'abscisse 30, il y a « cassure ».

On peut démontrer que la fonction f est continue en 5 alors qu'elle est discontinue en 30.

Le premier élève a donc raison.

4 EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE

Situation d'apprentissage

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la scène ?	La scène se déroule en classe pendant le cours de mathématiques
Circonstances	Indique les raisons qui ont motivé les élèves.	Les élèves constatent une différence entre ces deux représentations graphiques
Tâche	Qu'a décidé de faire le professeur de mathématiques	Il demande à ses élèves de se mettre par groupe de trois pour effectuer des recherches sur ces droites : noms, équations, définition, exemples, etc

DECOUVERTE DES HABILETES

Activité 1 :

1) On obtient les tableaux suivants :

x	0,9999	0,99999	1,0001	1,00001
$g(x)$	10 000	100 000	10 000	100 000

x	$-0{,}0001$	$-0{,}00001$	$0{,}0001$	$0{,}00001$
$f(x)$	-10^{8}	-10^{10}	-10^{8}	-10^{10}

2) On peut dire que : $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = +\infty$.

3) On peut dire que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

Exercice de fixation 1

1) On obtient le tableau suivant :

x	$-1{,}99999$	$-1{,}999999$	$-1{,}99999999$	$-1{,}999999999$
$f(x)$	$10^2\sqrt{10}$	10^3	$\cong 10^4$	$\cong 3\text{x}10^4$

2) On peut dire que : la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 est $+\infty$.

Activité 2 :

1) a) On obtient le tableau suivant :

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999
$f(x)$	-10	-100	-1000	-10^4	-10^5

b) On peut dire que la limite de $f(x)$ est égale à $-\infty$ lorsque x tend vers 3 par valeurs inférieures à 3. On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{1}{x-3} = -\infty$

2) a) On obtient le tableau suivant :

x	3,1	3,01	3,001	3,0001	3,00001
$f(x)$	10	100	1000	10^4	10^5

b) On peut dire que la limite de $f(x)$ est égale à $+\infty$ lorsque x tend vers 3 par valeurs supérieures à 3. On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{1}{x-3} = +\infty$.

Exercice de fixation 2

Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} \frac{1}{x-5} = -\infty$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1}{x-(-1)} = +\infty$.

Activité 3 :

1er cas : n est pair

A l'aide du graphique, on peut conjecturer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Ces deux limites sont égales. On écrit donc : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$.

2nd cas : n est impair

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

A l'aide de cette représentation graphique, donne sans justification (notion intuitive) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$. Indique si les deux limites sont égales ou pas.

A l'aide du graphique, on peut conjecturer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{(x-1)^3} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{(x-1)^3} = +\infty$.

Ces deux limites ne sont pas égales.

Exercice de fixation 3

1) L'exposant de $(x-4)$ est impair. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{1}{(x-4)^7} = -\infty$.

2) On remarque que $(x+6) = (x-(-6))$. Ensuite l'exposant de $(x+6)$ est pair.

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -6 \\ <}} \frac{1}{(x+6)^{12}} = +\infty$.

Exercice de fixation 4

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^9} = +\infty$; b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^{10}} = +\infty$.

Activité 4 :

1^er^ cas : *n* est pair

a) A l'aide du graphique, on obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

b) A l'aide du graphique, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

2^ème^ cas : *n* est impair

a) A l'aide du graphique, on obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

b) A l'aide du graphique, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

Exercice de fixation 5

1) La puissance de la fonction $\boldsymbol{x \mapsto x^4}$ est paire. Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4)} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^6) = +\infty$.

2) La puissance de la fonction $\boldsymbol{x \mapsto x^{11}}$ est impaire. Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} (x^{11})} = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^{25}) = +\infty$

Exercice de fixation 6

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^9} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^{20}} = 0$

Activité 5

On conjecturer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Exercice de fixation 7

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x-1}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{x} = -1$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

Activité 6 :

1) On obtient le tableau suivant :

x	10	10^2	10^3	10^{12}	10^{20}
$t(x)$	$\sqrt{10}$	10	$10\sqrt{10}$	10^6	10^{10}

2) Le tableau suggère que la fonction racine carrée tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice de fixation 8

On a d'après l'indication : $\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Activité 7 :

On considère la fonction polynôme suivante :$P(x) = -3x^4 + x^3 + 5x^2 + 12x - 7$.

1) Le monôme de plus haut degré de P est : $-3x^4$.

2) On met $-3x^4$ en fonction ; on obtient $P(x) = -3x^4(1 + \frac{x^3}{-3x^4} + \frac{5x^2}{-3x^4} + \frac{12x}{-3x^4} - \frac{7}{3x^4})$.

   Après simplification, on obtient : $P(x) = -3x^4(1 - \frac{1}{3x} - \frac{5}{3x^2} - \frac{12}{3x^3} + \frac{7}{3x^4})$.

3) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{3x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{12}{3x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7}{3x^4} = 0$.

   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{3x} - \frac{5}{3x^2} - \frac{12}{3x^3} + \frac{7}{3x^4}\right) = 1$. Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^4$.

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^4 = -\infty$. Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = -\infty$

4) On démontre de même que : $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$.

Exercice de fixation 9

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (12x^4 - x^3 + 2x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 12x^4$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} 12x^4 = +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (12x^4 - x^3 + 2x) = +\infty$.

2) On démontre de même que $\lim_{x\to+\infty}(-5x^7 - x^2 - 3) = -\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}(-4x^3 + 2x^2 - 5) = +\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}(x^6 + x^5 - x^2) = +\infty$

Activité 8 :.

1) On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{-12x^4}{-2x^6} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{-12x^4}{-2x^6} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x^2} = 0.$

2) Dans l'expression de $f(x)$, on met, $-12x^4$ en facteur au numérateur et $-2x^6$ en facteur au dénominateur. On obtient après simplifications : $f(x) = \frac{-12x^4(1-\frac{1}{12x^2}+\frac{7}{12x^4})}{-2x^6(1-\frac{1}{2x^3}-\frac{5}{2x^4})}$.

3) On sait que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{12x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{12}}{x^2} = 0$; de même $\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{12x^4} = 0.$

Donc $\lim_{x\to+\infty}(1 - \frac{1}{12x^2} + \frac{7}{12x^4}) = 1$

On démontre de même que $\lim_{x\to+\infty}(1 - \frac{1}{2x^3} - \frac{5}{2x^4}) = 1.$

Il en résulte que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-12x^4}{-2x^6}$. Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{-12x^4}{-2x^6} = 0.$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

4) On démontre de la même manière que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$

Exercice de fixation 10

1) La fonction $x \longmapsto \frac{5x^2-14}{-x^{26}+4x^2-3}$ est rationnelle.

Donc : $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-14}{-x^{26}+4x^2-3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{-2x^{26}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{-2x^{24}} = 0$

2) La fonction $x \longmapsto \frac{3x-8x^6}{2x}$ est rationnelle.

Donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-8x^6}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x^6}{2x} = \lim_{x\to+\infty} 4x^4 = +\infty$

Activité 9 :

1) Les coordonnées du point H sont $(1\ ;\frac{1}{|x-1|})$

2) La distance du point M à la droite (D) est la même que celle de M à H. Notons A le projeté orthogonal de M sur (OI) et B celui de H sur (OI).

Le quadrilatère $AMHB$ est un rectangle d'où $MH = AB$. Ensuite $A(x\,; 0)$ et $B(1\ ;\frac{1}{|x-1|})$.

Donc $AB = |x - 1|$. Donc $MH = |x - 1|$

La distance du point M à la droite (D) est donc $|x - 1|$.

3) On obtient le tableau suivant :

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1,1	1,01	1,001	1,0001
$\lvert x-1\rvert$	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,1	0,01	0,001	0,0001

4) Lorsque x tend vers 1, la distance MH tend vers zéro.

Exercice de fixation 11

La droite (D) est une asymptote verticale à la courbe (C) dans le cas de P3.

Activité 10 :

1) On a : $M(x; \frac{2x-1}{x})$ et $H(x; 2)$. Donc la distance MH est égale à $\left|\frac{2x-1}{x} - 2\right|$.

2) On sait $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} MH = 0$.

3) $MH = |f(x) - 2|$. Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x) - 2| = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Exercice de fixation 12

La droite (D) est une asymptote horizontale à (C) dans le cas de P1.

- **DES QUESTIONS D'EVALUATION**
  - **Question 1** : comment déterminer la limite à gauche ou à droite en a d'une fonction du type : $x \longmapsto \frac{b}{(x-a)^n}$ où $b \neq 0$?

Exercice non corrigé

- D'une part : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{4}{(x-1)^6} = +\infty$ comme $4 > 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{1}{(x-1)^6} = +\infty$.
- D'une part : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{-12}{(x-1)^6} = -\infty$ comme $-12 < 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}} \frac{1}{(x-1)^6} = -\infty$.
- **Question 2** : comment déterminer la limite à gauche ou à droite en a d'une fonction du type :$x \longmapsto \frac{P(x)}{(x-a)^n}$ où P est un polynôme tel que $P(a) \neq 0$?

Exercice non corrigé

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{-2x^2+3}{(x-1)^3} = +\infty$.

Question 3 : comment déterminer la limite à l'infini d'une fonction du type :
$x \longmapsto \frac{P(x)}{(x-a)^n}$ où P est une fonction polynôme ?

Exercice non corrigé

Pour tout x non nul, $\frac{12x^{33}+x^2-10}{(x-2)^{20}} = \frac{12x^{33}+x^2-10}{(x-2)^{20}}$.

Ensuite on a : $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{12\,x^{31}}+\frac{10}{12\,x^{33}}\right) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{2}{x})^{20} = 1$.

D'où $\lim_{x\to-\infty}\frac{12x^{33}+x^2-10}{(x-2)^{20}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{12x^{33}}{x^{20}} = \lim_{x\to-\infty} x^{13} = -\infty$.

Question 4 : comment étudier la position d'une courbe par rapport à son asymptote horizontale ?

Exercice non corrigé

1) On a $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x-3)) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x-1}\right) = 0$.
   De même $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-3)) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x-1}\right) = 0$. D'où le résultat.
2) On a : $f(x)-(x-3) = \frac{2}{x-1}$.
   Etudions le signe cette fonction sur les intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$
   Pour tout x de $]-\infty;1[$, $\frac{2}{x-1} < 0$ donc (C) est au-dessous de (D).
   pour tout x de $]1;+\infty[$, $\frac{2}{x^2-1} > 0$ .Donc (C) est au-dessus de (D).

MES SEANCES D'EXERCICES

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini de son monôme de plus haut degré.

Exercice 2

1) $\lim_{\substack{x\to3\\<}}\frac{1}{(x-3)} = -\infty$;
2) $\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{1}{(x-1)} = +\infty$
3) $\lim_{\substack{x\to-6\\>}}\frac{1}{(x+6)} = +\infty$
4) $\lim_{\substack{x\to-8\\<}}\frac{1}{(x+8)} = -\infty$

Exercice 3

1) $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ <}} \frac{1}{(x+5)^7} = -\infty$;
2) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{1}{(x-4)^{\text{ç}}} = +\infty$
3) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{1}{(x+1)^4} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{(x+2)^6} = +\infty$

Exercice 4

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(x+1)^5} = 0$
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+12)^{63}} = 0$
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(x+1)^5} = 0$
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(x-7)^2} = 0$
5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(x-6)^9} = 0$

Exercice 5

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-10) = -10$
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^{20}} = 0$
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{11}} =0$
4) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{101} = -\infty$
5) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{121} = +\infty$

Exercice 6

1) Faux car f n'est pas une fonction polynôme.
2) Faux car f n'est pas une fonction rationnelle.
3) Faux car voici un contre-exemple : $f(x) = \frac{-3(x-2)}{x-2}$. On a bien $Df = \mathbb{R} - \{2\}$ pourtant $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -3$. On ne trouve pas l'infini. Donc la droite d'équation $x = 2$ n'est pas une asymptote.
4) Faux car quel que soit la parité de n, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
5) Vrai d'après une propriété du cours.
6) Faux car quel que soit la parité de n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
7) Vrai ; voici un exemple : $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ si $x < 1$ et $f(x) = \frac{x}{x+1}$ si ≥ 1.
   Il y a deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses. En $-\infty$, $y = 2$ et en $+\infty$, $y = 1$.

Exercice 7

Asymptote horizontale : $y = 4$; asymptote verticale : $x = 1$.

Exercice 8

1) La courbe de f admet une asymptote d'équation $x = 0$.
2) La courbe de g admet une asymptote d'équation $x = -2$.
3) La courbe de h admet une asymptote d'équation $y = 0$.
4) La courbe de f admet une asymptote d'équation $y = -2$.

Exercice 9

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-2x+3} = -\frac{1}{2}$. Il en résulte que la représentation graphique de la fonction : $x \longmapsto \frac{x+1}{-2x+3}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

Exercice 10

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty$.
2) $\lim\limits_{x \to -\infty}(\frac{4x^2+5}{3x-1}) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[(\frac{4x^2+5}{3x-1}) \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)\right] = -\infty$.
3) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}}(\frac{x-3}{x-2}) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}}(1 - 3x) = -5$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left[(\frac{x-3}{x-2})(1 - 3x)\right] = -\infty$.
4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{-5x^2+3x-1}{x^2-1}) = -5$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(\frac{x^3+41}{x^4-x^3-1}\right)\right] = 0$.

   Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[(\frac{-5x^2+3x-1}{x^2-1}) \left(\frac{x^3+41}{x^4-x^3-1}\right)\right] = 0$.

Exercice 11

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^7} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 9) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{x^7} + x + 9\right] = -\infty$.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{-10x^2+7}{x-1}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2 + \frac{1}{x^2}\right) = -2$.

   Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(\frac{-10x^2+7}{x-1}\right) + \left(-2 + \frac{1}{x^2}\right)\right] = +\infty$.
2) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(\frac{x+4}{x+1}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (1 - x^2) = 0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left[\frac{x+4}{x+1} + 1 - x^2\right] = -\infty$.
3) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(\frac{-3x+2}{x-2}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(\frac{4}{2-x}\right) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left[\frac{-3x+2}{x-2} + \frac{4}{2-x}\right] = -\infty$.

Exercice 12

1) Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{x}(\frac{1}{2+\frac{5}{x}})$. On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2+\frac{5}{x}} = \frac{1}{2}$.

   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x+5} = 0$

2) a) On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5} = 0$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[4 + \frac{1}{x^5}\right] = 4.$

b) $\frac{4+\frac{1}{x^5}}{2x+5} = (4 + \frac{1}{x^5})\frac{1}{2x+5}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{4+\frac{1}{x^5}}{2x+5}\right] = 0$ d'après les calculs effectués ci-dessus.

Exercice 13

Toutes ces fonctions sont des fonctions rationnelles. Donc

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-2}{\sqrt{2}}.$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 = +\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 14

1) On applique la propriété sur la limite d'une somme de fonctions : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$
2) Impossible d'appliquer la limite d'une somme. Donc :

   Pour tout $x > 0$, $\sqrt{x^2 - 1} - 5x = x(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 5)$. D'une part

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 5\right) = -4$

   D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 5\right) = -\infty.$

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x+5}{24x+1} = \frac{1}{4}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$

Exercice 15

1) $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\<}} \frac{x-2}{36-x^2} = +\infty$ car $\frac{x-2}{36-x^2} = \frac{x-2}{6-x}\,\frac{1}{x+6}$; $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\<}} \frac{x-2}{6-x} = -\frac{4}{7}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\<}} \frac{1}{6+x} = -\infty.$
2) $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\>}} \frac{x-2}{36-x^2} = -\infty$ la justification se fait comme au 1).
3) $\lim\limits_{\substack{x\to6\\<}} \frac{x-2}{36-x^2} = +\infty$ la justification se fait comme au 1).
4) $\lim\limits_{\substack{x\to6\\>}} \frac{x-2}{36-x^2} = -\infty$ la justification se fait comme au 1)

Exercice 16

1) $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}} f(x) = -\infty.$
2) La droite d'équation est une asymptote à la courbe de f.
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{3}{x} = 0$; de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$
4) Il en résulte que la droite d'équation y=0 (l'axe des abscisses) est une asymptote à la courbe de f parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 17

1) D'après ce graphique :
   a) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$.
   b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$
   c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
2) Les limites $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ par exemple prouvent que les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont des asymptotes.
   La limite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ par exemple prouve que la droite d'équation $y = 2$.

Exercice 18

Si on applique un résultat sur la limite d'une somme, on obtient une forme indéterminée. En effet

$\sqrt{x} - 2x^2 = \sqrt{x} + (-2x^2)$ ensuite $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^2 = -\infty$.

Pour lever l'indétermination, on écrit : pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} - 2x^2 = \sqrt{x}(1 - 2x\sqrt{x})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2x\sqrt{x}) = -\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(1 - 2x\sqrt{x}) = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - 2x^2) = -\infty$.

Exercice 19

1) On écrit : $\frac{x-3}{x^2-25} = \frac{x-3}{x+5}\frac{1}{x-5}$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{x-3}{x+5} = \frac{1}{5}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{1}{x-5} = -\infty$.

   Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{x-3}{x^2-25} = -\infty$.

On écrit : $\frac{x-3}{x^2-25} = \frac{x-3}{x+5}\frac{1}{x-5}$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} \frac{x-3}{x+5} = \frac{1}{5}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} \frac{1}{x-5} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{x-3}{x^2-25} = +\infty$.

2) On écrit : $\frac{3-x}{4-x^2} = \frac{x-3}{2-x}\frac{1}{2+x}$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{3-x}{2-x} = \frac{5}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1}{2+x} = -\infty$.

   Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{x-3}{x^2-25} = -\infty$.

On écrit : $\frac{3-x}{4-x^2} = \frac{x-3}{2-x}\frac{1}{2+x}$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{3-x}{2-x} = \frac{5}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{2+x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{x-3}{x^2-25} = +\infty$.

Exercice 20

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - \frac{12}{x^2}} = 1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{12}{x^2}\right) = 1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3+\frac{1}{x})^3 = 27$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

On écrit $\frac{2-x}{x} = (2-x)\frac{1}{x}$. Ensuite $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(2-x) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x} = +\infty$.

3) Donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{2-x}{x} = +\infty$; par suite : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\sqrt{\frac{2-x}{x}} = +\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{25x^2+2}{x^2-1}\right) = 25$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{25x^2+2}{x^2-1}} = \sqrt{25} = 5$.

5) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{25x^2+2}{(x-1)^2}\right) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\frac{25x^2+2}{(x-1)^2}} = +\infty$

Exercice 21

1) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}\sqrt{x-2} = 0$ et $\sqrt{x-2} \geq 0$; d'où $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}\left[\frac{-1}{\sqrt{x-2}}\right] = -\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2} = +\infty$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right] = +\infty$.

Exercice 22

1) Il suffit de calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{x-2}{\sqrt{x}}$. On a : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{x-2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$. D'où le résultat.

2) Il suffit de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{-2x^2+x}{x^2+1}) = -2$; ce qui est le cas.

Exercice 23

1) On mettre x^2 en facteur dans $\sqrt{x^2+1}$
2) Évident.
3) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(2+\frac{3}{x}) = 2$ et enfin $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x} = -1$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = -\frac{1}{2}$

Exercice 24

On sait que pour tous $a \geq 0$ et $b > 0$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Pour tout $x > 0$, $\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{5x-1}} = \sqrt{\frac{x^2+4}{5x-1}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4}{5x-1} = +\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+4}{5x-1}} = +\infty$.

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$

Exercice 25

1) Pour tout $x > 0$, $\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2}+2} = \frac{-2x+3}{x+2}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = -2$.

2) Pour tout $x < 0$, $\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2}+2} = \frac{-2x+3}{-x+2}$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = 2$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{1-10x^7}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{1-10x^7}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

4) On écrit : $\frac{x^3-\sqrt{x}}{2x^3+1}=\frac{1-\frac{1}{x^2\sqrt{x}}}{2+\frac{1}{x^3}}$. Ensuite $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$.

Exercice 26

On n'a pas d'équation de droite ; cependant d'après la définition d'une asymptote horizontale, on va calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{-3x^2-1}{2x^2+1})=-\frac{3}{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{3}{2}$. Il en résulte que la représentation graphique de f admet en $-\infty$ une asymptote parallèle à la droite des abscisses.

Son équation est $y=-\frac{3}{2}$

Exercice 27

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

Exercice 28

Détermine la limite suivante : $\lim\limits_{x\to4}\left|\frac{x+5}{x^2-16}\right|$

$\lim\limits_{\substack{x\to4\\<}}\left(\frac{x+5}{x^2-16}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to4\\>}}\left(\frac{x+5}{x^2-16}\right)=+\infty$; d'où $\lim\limits_{x\to4}\left|\frac{x+5}{x^2-16}\right|=+\infty$.

Exercice 29

1) L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle : $]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$.

2) a) Démontre que pour tout $x<0$, $f(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-2x})(x-\sqrt{x^2-2x})}{x-\sqrt{x^2-2x}}=\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x}$; ensuite en mettant x en facteur, on obtient : $f(x)=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}$

b) De ce qui précède, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$.

c) Il en résulte que la droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

3) Soit (D) la droite d'équation : $y=2x-1$.

a) Pour tout $x>0$, $[f(x)-(2x-1)]=1-x+\sqrt{x^2-2x}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}+x-1}$.

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}+x-1}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)]=0$.

c) Il résulte de la question b) que la droite d'équation (D) est une asymptote oblique à la courbe de la fonction f.

Exercice 30

1) L'ensemble de définition de la fonction f est : $\mathbb{R}-\{-1;1\}$.
C'est-à-dire $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

2) Il y a six limites à calculer :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

Ensuite $\lim\limits_{x \to -1} (2x^3 - 5x^2 - 2x + 4) = -1$ et $\frac{-1}{x^2-1} = \frac{-1}{x-1}\frac{1}{x+1}$ $\lim\limits_{x \to -1}\left(\frac{-1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\lim$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}}(\frac{1}{x+1}) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$.

Puis $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}}(\frac{1}{x+1}) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$.

$\frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}\frac{-1}{x+1}$; $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{-1}{x+1}\right) = \frac{-1}{2}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}}(\frac{1}{x-1}) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$.

On démontre de même que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$.

En conclusion : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

3) Les limites obtenues à la question précédente, permettent d'obtenir les asymptotes suivantes :

Les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$ sont des asymptotes verticales ;

La droite d'équation $y = 2$ sont des asymptotes de (C).

4) La division euclidienne de $2x^3 - 5x^2 - 2x + 4$ par $x^2 - 1$ donne le résultat.

5) Pour tout x de Df, $f(x) - (2x - 5) = \frac{1}{x^2-1}$. Les limites $\lim\limits_{x \to -\infty}(\frac{1}{x^2-1}) = 0$ et

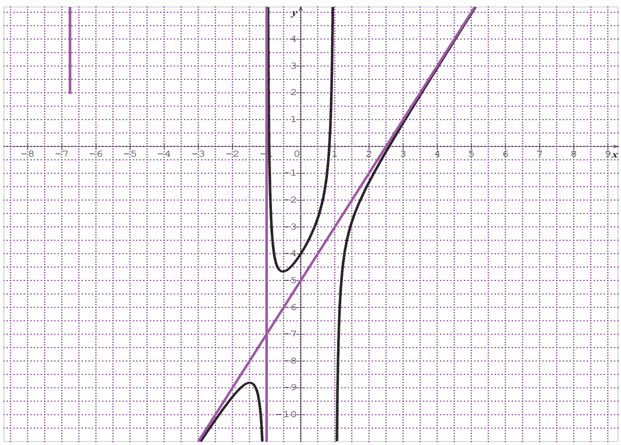
$\lim\limits_{x \to +\infty}(\frac{1}{x^2-1}) = 0$ permettent de conclure.

6) Pour tout x de Df, $f(x) - (2x - 5) = \frac{1}{x^2-1}$.

Ensuite : sur $]-\infty; -1[\cup]; 1 + \infty[$, $\frac{1}{x^2-1} > 0$. Il en résulte que (C) est au-dessus de (D).

Sur $]-1; 1[$, $\frac{1}{x^2-1} < 0$. Il en résulte que (C) est en dessous de (D).

7)



Exercice 31

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right) = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right) = +\infty$.

Exercice 32

1) Pour tout a, $g(x) = ax + 3 + a + \frac{4+a}{x-1}$. Soit $g(x) - (ax+3+a) = \frac{4+a}{x-1}$

Si $a = 0$ alors : $g(x) - 3 = \frac{4}{x-1}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-3) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-3) = 0$.

La courbe (C) n'admet donc pas d'asymptote oblique mais plutôt une asymptote horizontale d'équation $y = 3$.

Si $a \neq 0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - (ax+3+a)) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x) - (ax+3+a)) = 0$

La courbe (C) admet alors une asymptote oblique d'équation $y = ax + 3 + a$.

Conclusion : La courbe (C) admet alors une asymptote oblique d'équation $y = ax + 3 + a$ si et seulement si $a \neq 0$.

2) Déterminons: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} g(x)$. On a pour tout $x \neq 1$, $g(x) = (ax^2+3x+1)\frac{1}{x-1}$;

D'abord : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}(ax^2+3x+1) = a+4$. Ce résultat conduit à examiner deux cas.

1^er^ cas : Si $a = -4$ alors pour tout $x \neq 1$, $g(x) = \frac{-4x^2+3x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(-4x-1)}{x-1}$;

$g(x) = -4x - 1$ par conséquent $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} g(x) = -5$. La courbe (C) n'admet pas d'asymptote parallèle à (OJ).

2^nd^ cas : Si $a \neq -4$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}(ax^2+3x+1) = a+4$ avec $a+4 \neq 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{1}{x-1} = -\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} g(x) = \pm\infty$ suivant le signe de $a+4$. Dans ce cas, la courbe (C) admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote parallèle à (OJ).

Le calcul de $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} g(x)$ donne les mêmes résultats.

Conclusion : la courbe (C) admet une asymptote parallèle à (OJ) d'équation $x = 1$ si et seulement si $a \neq -4$.

3) D'après l'étude faite dans la question précédente, si $a = -4$, la courbe (C) n'admet pas d'asymptote d'équation $x = 1$ car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} g(x) = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = -5$.

Exercice 33

1) Pour tout $x > 0$, $f(x) - (x - 2) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}+(x-2)}$;

   puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4x + 5} + (x - 2)\right] = +\infty$; d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}+(x-2)}\right] = 0$.

   C'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$ d'où le résultat.

2) Pour tout $x > 2$, $x^2 - 4x + 5 > (x - 2)^2$ d'où $\sqrt{x^2 - 4x + 5} > x - 2$. Il en résulte que (C) est au-dessus de (D).

Exercice 34

1- $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$

2- $a = 1; b = -4\ et\ c = -8$ donc $\forall\ x \in\ \mathbb{R}\backslash\{-3\}; f(x) = x^2 - 4 - \frac{8}{x+3}$.

3- On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = -\infty\ et\ \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = +\infty$.

4- a) $\forall\ x \in\ \mathbb{R}\backslash\{-3\}; f(x) - g(x) = -\frac{8}{x+3}$

$\forall\ x \in\ ]-\infty; -3[, f(x) - g(x) > 0\ et\ \forall\ x \in\ ]-3; +\infty[, f(x) - g(x) < 0$.

b) $(\ C_f)\ est\ au\ dessus\ de\ (\ C_g)$ sur $]-\infty; -3[$.

$(\ C_f)\ est\ au\ dessous\ de\ (\ C_g)$ sur $]-3; +\infty[$.

Exercice 35

$f(x) = 2x + 2\ et\ g(x) = 2x$

Exercice 36

$b = 3\ et\ a = 2$

Exercice 37

1- $D_f =]-\infty; -3] \cup]5; +\infty[$

2- a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = +\infty\ et\ \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = 0$.

b) La droite $(D): y = 1$ est une asymptote horizontale à $(\ C_f)$.

La droite $(L): x = 5$ est une asymptote verticale à $(\ C_f)$.

SITUATION COMPLEXE

Exercice 38

On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{100\ t^2 + 99}{t^2 + 1} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{100\ + \frac{99}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = 100$

c'est Monsieur Coulibaly qui a raison

5 DÉRIVATION

Situation d'apprentissage

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (lecture silencieuse des élèves, lecture par un élève et par le professeur), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte en leur demandant par exemple d'en faire un résumé.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	✓ Où se déroule la scène ? ✓ De quoi s'agit-il ?	✓ Dans un lycée ✓ Les élèves de la classe veulent confectionner des poubelles pour le lycée, à l'aide de plaque de métal de 50 cm de côté.
Circonstances	Pour quelles raisons on sollicite les élèves ?	Pour fabriquer ces poubelles sans couvercle, le ferronnier enlève à chaque coin de la plaque un carré de côté x (cm) et il relève les bords par pliage.La boîte obtenue est un pavé droit (sans toit).Un élève d'une classe de terminale leur dit qu'en utilisant les fonctions dérivées on peut choisir le x de façon adéquate pour que le volume de la poubelle soit maximal.
Tâche	Que doivent faire les élèves pour répondre à la sollicitation ?	Avec l'aide du professeur de mathématiques, ils décident de s'informer pour déterminer la valeur de x qui convient.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation, tout en faisant remarquer l'importance des dérivées pour traduire, traiter et trouver des solutions à des problèmes de vie courante, d'où son importance dans le programme scolaire. Il invitera les apprenants à être très attentifs car la dérivation intervient dans la suite du programme et dans plusieurs domaines notamment en physiques, en SVT. Il annoncera par la suite le titre et le plan de la leçon

Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

Découverte des activités

Activité 1

1) f est continue en 2 et en 5.
2) $t_2 = \frac{2(x+2)(x-2)}{x-2}$ et $t_5 = \frac{2(x+5)(x-5)}{x-5}$.
3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 8$ et $\lim\limits_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = 20$

Exercice de fixation 1

(B, 3) (C, 1) (D, 2)

Activité 2 :

3) Soit M$(x, f(x))$ un point quelconque de (C) distinct de A

b) le coefficient directeur de la droite (AM) est donné par : $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

c)

x	1,5	1,7	1,9	2	2,2	2,3	2,5	3
$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$	3	3,4	3,8		4,2	4,6	5	6

Exercice de fixation 2

T1-B ; T2-C ; T3-B ; T4-B

Activité 3 :

1)

a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 4\,a$

b) $f'(a) = 4\,a$

c) $f'(x) = 4\,x$

2)

a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

b) $g'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

c) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3)

a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = -\frac{1}{a^2}$

b) $h'(a) = -\frac{1}{a^2}$

c) $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Exercice de fixation 3

Si f est dérivable en tout point de l'intervalle I, on dit que f est dérivable sur I et

la fonction qui à tout élément x de I associe **le nombre dérivé de f** en x est appelée **la fonction dérivée de f** sur I et est notée f'.

Activité 4 :

1) $f(a) + (\frac{f(x)-f(a)}{x-a})(x-a) = f(a) + f(x) - f(a) = f(x)$

2) $\lim\limits_{x \to a} (\frac{f(x)-f(a)}{x-a})(x-a) = 0$ car si f dérivable en a alors $\lim\limits_{x \to a} (\frac{f(x)-f(a)}{x-a})$ existe et est finie

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (f(a) + (\frac{f(x)-f(a)}{x-a})(x-a)) = f(a) + 0 = f(a)$

Exercice de fixation 4

Si f est **dérivable** en a alors elle est **continue** en a.

Activité 5 :

1)
$$\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

2)
$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ x } g(x) + \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \text{ x } f(x)$$

3)
$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{-g(x)-g(a)}{x-a} \text{ x } \frac{1}{g(x) \text{ x } g(a)}$$

4)
$$\lim_{x \to a} \frac{f^n(x)-f^n(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ x } [\, f^{n-1}(x) + f(a)f^{n-2}(x) + \cdots + f(a)^{n-2} f(x) + f^{n-1}(a)]$$

Exercice de fixation 5

(A, 2) ; (B, 6) ;(C, 5) ;(D, 1) ;(E, 3) et (F, 4)

Activité 6

Objectif : déterminer le sens de variation d'une fonction à partir du signe de la dérivée

1) $f'(x)= 2x$, $f'(x)$ est positive sur]0 ; + ∞[et négative sur]- ∞ ; 0[
2)
   b) f est décroissante sur]- ∞ ; 0[
3)
   b) f est croissante sur]0 ; + ∞[

Exercice de fixation 6

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. Faux ; 5. Faux ; 6. Faux ; 7. Vrai ; 8. Vrai

Questions d'évaluation

Question 1 : comment étudier les variations d'une fonction

Solution exercice non résolu :

Étudie les variations de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$.

f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2, +\infty[$
f est strictement décroissante sur $]0,2[$

Question 2 : comment déterminer graphiquement le nombre dérivé en un point a

Solution exercice non résolu :

$g'(-3) = 2$ et $g'(0) = 0$ et $g'(2) = \frac{-3}{2}$

Exercices de fixation

Exercice 1

1) $f'(a)$= 1
2) $f'(a)$= -5
3) $f'(a)$=0
4) $f'(a)$=8

Exercice2

2 ; 4

Exercice 3

1) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ = -3 qui est finie donc f est dérivable en -3
2) -3 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse -1

Exercice 4

1) (T) : $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$
2) (T) : $y = 10x$-3
3) (T) : y =- $\frac{1}{3}x$-2
4) (T) : y= 2 x +10

Exercice 5

(A,4) ;(B ,9) ; (C ,7) ; (D,7) ; (E,10) ; (F,8) ; (G,3) ;(H,6) ; (I,5) ; (J,2)

Exercice 6

1) y= $5x + 3$
2) y= $24576x - 45056$
3) y= $(-sin2)x + 2\ sin2 + cos2$
4) y= $\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$
5) y= 6

Dérivabilité et continuité en un point

Exercice 7

3 ;4 et 5 (vrai)

Exercice 8

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$= - 6
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ = 5
- $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ = 1
- $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ = 4

Exercice 9

Si une fonction est **dérivable en x_0** alors elle est **continue en x_0**

Exercice 10

1) $f' : x \mapsto cosx - sinx$
2) $f' : x \mapsto cosx^2 - sinx^2$
3) $f' : x \mapsto cosx + sinx$
4) $f' : x \mapsto \frac{1}{cosx^2}$

Exercice 11

1) $f': x \mapsto \frac{-2}{x^2}$
2) $f': x \mapsto \frac{-2}{x^2}+\frac{2}{x\sqrt{x}}$
3) $f': x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} + 4$
4) $f': x \mapsto \frac{13}{(5x+4)^2}$

Exercice 12

1) $f': x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^4}$
2) $f': x \mapsto 18x^5 - sinx$
3) $f': x \mapsto 10x + 1$

Exercice 13

1) $g(x)= \sqrt{x}$ et $f'(x)= \frac{1}{\sqrt{2x-9}}$
2) $g(x)= \cos x$ et $f'(x)= 5\ sin(-5x+2)$
3) $g(x)= sin(x)$ et $f'(x)= -\cos(-x+\frac{\pi}{6})$
4) $g(x)=x^3$ et $f'(x)= -9(-3x+5)^2$

Exercice 14

1) $f': x \mapsto$ 2cos (2 x +3) cos (5 x -6) - 5sin (2 x +3) sin (5 x -6)
2) $f': x \mapsto -5\sin(5x-6) + 5\cos(5x-6)$
3) $f': x \mapsto -\frac{3}{2(3x+2)\sqrt{3x+2}}$
4) $f': x \mapsto \frac{7}{2\sqrt{7x+2}}$

Exercice 15

f est décroissante sur l'intervalle $]-1; 1[$ et sur l'intervalle $]2; 3[$

f est croissante sur l'intervalle $]1; 2[$

Exercice 16

f est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; -1[$ et sur l'intervalle $]3 ; +\infty[$

f est décroissante sur l'intervalle $]-1 ;3[$

Exercice 17

1. $f'(x) = \frac{-6x^2+30}{(x^2+5)^2}$
2. f est décroissante sur l'intervalle$]-\infty ; -\sqrt{5}[$ et sur l'intervalle $]\sqrt{5} ; +\infty[$

   f est croissante sur l'intervalle$]-\sqrt{5} ; \sqrt{5}[$

Exercice 18

1. $f'(x) = 12x^3 - 3x^2$
2. f est décroissante sur l'intervalle$]-\infty ; \frac{1}{4}[$ et croissante sur l'intervalle$]\frac{1}{4} ;+\infty[$

Exercice 19

1. $f'(x) = -\frac{1}{3}x + 2x - 1$
2. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 20

$f'(x)$ s'annule en 1,5 en changeant de signe.

f admet -2 comme minimum relatif en 1,5

Exercice 21

$f'(x)$ s'annule en – 5 sans changer de signe.

Exercice 22

1 ; 2 ; 5 ; 6 (Vrai)

<u>Exercices de renforcement / approfondissement</u>

Exercice 23

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5 + 6(2x+3)^2$
2) f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $f'(x) = \frac{-1}{(-x+1)^2}$
3) f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{-7}{6}\}$ et $f'(x) = \frac{-6}{(6x+7)^2}$
4) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x+5)(9x+23)$
5) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -20(-x+10)^{19}$

Exercice 24

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4cos(2x - \frac{\pi}{3})$
2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2sin(x)$
3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x^3 - 6x + 7$
4) f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2}}}$

Exercice 25

1) $f'(-1) = \frac{5}{2}$
2) $f'(0) = \frac{\sqrt{7}}{7}$
3) $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Exercice 26

on vérifie que: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{9}{2}$ et comme $\frac{9}{2}$ est fini donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{9}{2}$

Exercice 27

- 5 est un maximum relatif de f sur $\mathbb{R}$
- 1 est un minimum relatif de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 28

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 29

1) f n'admet aucun extremum sur $\mathbb{R}$
2) 17 est un maximum relatif de f sur $\mathbb{R}$ et -15 est un minimum relatif de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 30

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx - sin0}{x - 0} = cos0 = 1$
2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tanx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{tanx - tan0}{x - 0} = 1 + \tan^2(0) = 1$
3) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos\left(h + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = f'(0)$ avec $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos\left(h + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}}{h} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 31

1) $f'(2) = 17$
2) $f(2) = 16$

Exercice 32

Les points en lesquels la tangente à la courbe (C) est parallèle à la droite (D) sont les points de coordonnées (2 ;3) et (-2 ;-1)

Exercice 33

$f(1) = 2$ *et* $f'(1) = 0$ ainsi $a = 0$ et $b = 0$.

Exercice 34

1) $f'(-1) = 0$
2) $y = -2x - 3$
3) $f'(-2) = -2$

Exercice 35

On a A $(x; 0)$ et B $(x ;\sqrt{9 - x})$, soit $A(x)$ l'aire du triangle OAB, on a : $A(x) = \frac{x\sqrt{9-x})}{2}$

$A(x)$ est maximale pour $x = 6$

Exercice 36

1- Supposons que P est factorisable par $(x - a)^2$. Il existe donc un polynôme Q tel que : $P(x) = (x - a)^2 Q(x)$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, P'(x) = 2(x - a)Q(x) + (x - a)^2 Q'(x)$.

On a : $P(a) = (a - a)^2 Q(a) = 0$ *et* $P'(a) = 2(a - a)Q(a) + (a - a)^2 Q'(a) = 0$.

D'où si P est factorisable par $(x - a)^2$, alors $P(a) = P'(a) = 0$.

2- Supposons que $P'(a) = 0$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, P'(x) = f(x) + (x - a)f'(x)$.

$P'(a) = 0$ *équivaut* à: $f(a) + (a - a)f'(a) = 0$.

$P'(a) = 0$ *équivaut* à $f(a) = 0$ donc a est un zéro du polynôme f.

Ainsi f est factorisable par $x - a$.

3- D'après la question 1, $P_1 \implies P_2$

Supposons P_2 . D'après la question 2, on a : $P(x) = (x-a)f(x)$; or $f(x) = (x-a)t(x)$ car f est factorisable par $x - a$. Donc : $\boldsymbol{P(x) = (x-a)^2 t(x).}$

Des questions 1 et 2, on déduit que les propriétés P_1 et P_2 sont équivalentes.

Exercice 37

1- Supposons que f soit dérivable en x_0.

On a : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} -x_0\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = -x_0 f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} -x_0\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) + f(x_0) = -x_0 f'(x_0) + f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{-x_0 f(x) + x_0 f(x_0) + x f(x_0) - x_0 f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

D'où : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

2- Supposons que f et g soient deux fonctions dérivables en 0.

On a : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$.

Comme $\frac{f'(0)}{g'(0)} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x} \times \frac{x}{g(x)-g(0)}\right)$

$\frac{f'(0)}{g'(0)} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}\right)$. Comme $f(0) = g(0) = 0, on\ a$ $\frac{f'(0)}{g'(0)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Exercice 38

1. On a : $M(x; x^2)$; $P(-x; x^2)$;$Q(x; 5)$; $N(-x; 5)$
$MP = 2x$ et $MQ = 5 - x^2$ avec $MP > 0$ et $MQ > 0$ donc $0 < x$ et $x^2 < 5$
l'aire A du rectangle $MPNQ$ est égale à : $A = 2x(5 - x^2)$
2. a) $f(x) = 2x(5 - x^2)$ avec $MP > 0$ et $MQ > 0$ donc $0 < x$ et $x^2 < 5$
donc $D_f = \left[0; \sqrt{5}\right]$
b) $f'(x) = -6x^2 + 10$
Pour tout $x \in \left[0; \frac{\sqrt{15}}{3}\right[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\sqrt{15}}{3}\right[$
Pour tout $x \in \left[\frac{\sqrt{15}}{3}; \sqrt{5}\right[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{15}}{3}; \sqrt{5}\right[$
3. a) L'aire A du rectangle $MPNQ$ admet un maximum en $\frac{\sqrt{15}}{3}$ donc
$M\left(\frac{\sqrt{15}}{3}; \frac{15}{9}\right)$ correspond à l'aire maximale.
b) pour $x = \frac{\sqrt{15}}{3}$ l'aire A est égal à $A = \frac{20\sqrt{15}}{9}$ soit $A \approx 8{,}60$
$\frac{20\sqrt{15}}{9} > 6$ donc c'est l'élève qui a raison.

Situations complexes

Exercice 39

Soit $v(x)$ le volume de la boite en cm^3, on a : $v(x) = x(100 - 2x)^2$

Le volume est maximal lorsque $x=\frac{50}{3}$ cm, on obtient $v = \frac{2000000}{27}$

Exercice 40

- Soit T la durée du trajet en heure
  Exprimons T en fonction de v : T = $\frac{100}{v}$
- Calculons le prix $P(v)$ du trajet en fonction de v
  $P(v)$ = 615 x $\frac{100}{v}$.x (6 + $\frac{v^2}{300}$) + 5000 = 61500 ($\frac{6}{v}$ + $\frac{v}{300}$)+5000
- Etudions les variations du prix de la course en fonction de la vitesse
  $p'(v)$ = 61500 ($-\frac{6}{v^2}$ + $\frac{1}{300}$) = 61500 ($\frac{v^2-1800}{300v^2}$)
  ainsi $\forall\ v \in]0; 30\sqrt{2}[$, $p'(v) < 0$ et $\forall\ v \in]30\sqrt{2};\ +\infty[$, $p'(v) > 0$
  et $p'(v) = 0$ pour $v = 30\sqrt{2}$ car v est positive
- donc le prix du trajet est minimal pour
  $v = 30\sqrt{2}$ km/h ≈ 42,42 km/h

Exercice 41

$p'(t) = -4t + 8$ où $t \in [0; 4]$
$p'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$
$t \in [0; 4]$ donc la vitesse de ce mobile sera nul à un instant donné précisément pour $t = 2$

6 PROBABILITÉ

Situation d'apprentissage

Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de seconde. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.

Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la scène ?	Dans le salon de Monsieur Ozouoloua dans le cadre de la confection d'un bijou pour un mariage.
Circonstances	Indique les raisons qui ont motivé le fils de Monsieur Ozouoloua.	Le fils de Monsieur Ozouoloua souhaite trouver la fréquence que ce pixel se retrouve sur la partie principale de l'écran.
Tâche	Qu'a décidé de faire le fils de Monsieur Ozouoloua pour répondre à la préoccupation de son papa ?	De faire des recherches sur les probabilités afin de mieux s'outiller pour répondre à la préoccupation de son père.

Activités de découvertes

Activité 1 :

Un exemple de résultat possible est 3

Exercice de fixation 1

Il faudra ajouter à l'expérience 1 « on note la couleur de la boule »

Seule l'expérience 2 est aléatoire. Car on ne sait pas à l'avance la face supérieure qu'on va obtenir, alors que dans le cas 1, la couleur est connue d'avance.

Activité 2 :

L'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ des résultats possibles est l'univers.

Exercice de fixation 2

L'univers Ω du jeu est : $\Omega = \{(P;P);(F;F);(P;F);(F;P)\}$

Activité 3 :

- L'ensemble Ω des résultats est connu
- On ne peut pas prévoir d'avance le résultat au cours de chaque lancer.

Exercice de fixation 3

L'univers Ω du jeu est : $\Omega = \{(P;P);(F;F);(P;F);(F;P)\}$

Activité 4 :

A = $\{3; 4; 5; 6\}$

Exercice de fixation 4

C = {1 ;5 ;6} est un évènement de l'expérience.

Activité 5 :

B = ∅

Exercice de fixation 5

A = {7 ; 8} et B = {0 ;1 ;2} ne sont pas des évènements liés à cette expérience aléatoire. L'objet de cette question est de dire cela.

Il faut mieux la reformuler ainsi :

1) Pour A : « le chiffre obtenu est 7 ou 8 »
2) Pour B : « le chiffre obtenu est 0 ». Car le problème, c'est 0.

A et B sont impossibles. Car ils vides, pour cette expérience aléatoire.

Activité 6 :

C = $\{1; 2; 3; 4; 4; 5 ; 6\}$

Exercice de fixation 6

B = {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6} est l'évènement certain de l'expérience

Activité 7 :

l'évènement D donne lieu à une seule éventualité.

Exercice de fixation 7

A = {6} est un évènement élémentaire de l'expérience.

Activité 8 :

1) a) F = $\{2; 4; 6\}$; b) G = $\{1; 3; 5\}$

2) Détermine l'ensemble $F \cap G = \emptyset$

Exercice de fixation 8

$A = \{1 ;5\}$; $C = \{2 ;4 ;6\}$. A et C sont deux évènements incompatibles de l'expérience.

Activité 9 :

1) a) $H = \{1; 2\}$; b) $I = \{3; 4; 5; 6\}$

2) a) $H \cap I = \emptyset$; b) $H \cup I = \Omega$

Exercice de fixation 9

- A et C sont deux évènements contraires de l'expérience.
- B et D sont deux évènements contraires de l'expérience.

Activité 10 :

1) a) $J = \{1; 2\}$; b) $K = \{2; 4; 6\}$; c) $L = \{2\}$

2) $J \cap K = L$

Exercice de fixation 10

1) A et B « le chiffre obtenu est paire et supérieur ou égal à 5 ».
2) $A \cap B = \{6\}$

Activité 11 :

1) a) $M = \{3; 4; 5 ; 6\}$; b) $N = \{2; 3; 4\}$; c) $Q = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

2) $M \cup N = Q$

Exercice de fixation 11

1) A ou B « le chiffre obtenu est paire ou supérieur ou égal à 5 »
2) $A \cup B = \{2; 4; 5; 6\}$

Activité 12 :

1) a) La chance qu'à l'évènement R de l'ensemble Ω de se réaliser est : $\frac{2}{6}$

La chance qu'à l'évènement S de l'ensemble Ω de se réaliser est : $\frac{1}{6}$

La chance qu'à l'évènement Q de l'ensemble Ω de se réaliser est : $\frac{1}{6}$

b) La chance de l'évènement R de se réaliser est égale à la sommes des chances des évènements S et Q de se réaliser.

2) La chance de l'évènement V de se réaliser est 0 ; la chance de l'évènement Ω de se réaliser est 1.

NB La probabilité sur un univers étant définie comme une fonction additive d'ensemble.

Exercice de fixation 12

1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux

Activité 13 : Calculer la probabilité d'un évènement

1) $P(W) = \frac{1}{2}$

2) a) $card(W) = 3$; et $card(\Omega) = 6$;

b) Compare $P(W) = \dfrac{card(W)}{card(\Omega)}$.

Exercice de fixation 13

1) card(A) = 2 ; et card(Ω) = 6 .
2) P(A) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Activité 14

1) $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$, $B = \{3; 6; 9; 12; 15\}$, $A \cap B = \{6; 12\}$ et $A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15\}$
2) p(A) = $\frac{7}{15}$; p(B) = $\frac{5}{15}$; p(A∩ B) = $\frac{2}{15}$; p(A∪ B) = $\frac{10}{15}$
3) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exercice de fixation 14

$p(A) = p(A \cup B) + p(A \cap B) - p(B)$; $p(A) = \frac{2}{5}$

Activité 15 :

On prend B = $\bar{A}$

$p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) - p(A \cap \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) - p(\emptyset)$;

$p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$, car $p(\emptyset) = 0$;

Or $A \cup \bar{A} = \Omega$, $p(A \cup \bar{A}) = 1$. D'où le résultat.

Exercice de fixation 15

La probabilité de $\bar{A}$ est $\frac{4}{5}$.

Résumé de cours

Dans le dernier exemple de la page 126, le programme parlant de l'évènement impossible qui est l'ensemble vide, il vaut dire au troisième point l'évènement « tirer la boule numérotée 16 ou 33 » Cela correspond à l'ensemble VIDE !

Questions d’évaluation

Question 1 : **Comment calculer la probabilité d’un évènement ?**

Exercice non résolu

On note Ω le nombre de tirages possibles. Ω est constitué de tous les sous-ensembles à trois éléments pris dans l’ensemble des dix billes du sac.

1) CardΩ = C_{10}^{3}= 120

2-a) L’évènement A est réalisé lorsqu’on tire3 billes rouges parmi 5 OU 3 billes blanches parmi 3.

Le OU introduit une réunion d’ensemble qui ici disjoints. Par suite : card(A) = $C_5^3 + C_3^3$;

$C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$; card(A)=11. P(A) $= \frac{11}{120}$

b) Pour l’évènement B, nous avons les possibilités suivantes :

RRB ou BBR ou RRN ou NNR ou BBN ou NNB

Card(B) = $C_5^2C_3^1 + C_3^2C_5^1 + C_5^2C_2^1 + C_2^2C_5^1 + C_3^2C_2^1 + C_2^2C_3^1 = 69$. P(B) $= \frac{69}{120} = \frac{23}{40}$

Question 2 : calculer la probabilité d’un évènement en utilisant son évènement contraire

Exercice non résolu

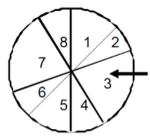
Dans une région, les grossesses vont toujours à leurs termes et la probabilité qu’une femme donne naissance à un garçon est de 0,46. On note E l’évènement : « Une femme donne naissance à un fille »

Calcule $p(E) = 1 - 0{,}46 = 0{,}54$

Question 3 : calculer la probabilité de l’évènement en utilisant les évènements élémentaires qui le composent.

Exercice non résolu

Une roue de loterie est composée de 8 secteurs d’aires différentes. Les secteurs sont numérotés de 1 à 8.
On fait tourner la roue. Quand la roue s’arrête, l’indicateur désigne alors un secteur. Le tableau ci-dessous récapitule les probabilités correspondantes aux secteurs.



Secteur	1	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	0,12	0,06	0,23	0,09	0,12	0,06	0,23	0,09

1) La probabilité que le secteur 1 ou le secteur 7 soit désigné est 0,12 +0,23 = 0,35.
2) La probabilité qu’un secteur pair soit désigné 0,06+0,09+0,06+0,09 = 0,3.
3) La probabilité qu’un secteur impair soit désigné 0,12+0,23+0,12+0,23 = 0,7.

NB. Pour le dernier, ou pourrait faire : $1 - 0{,}3$, car les évènements « la route s'arrête sur un secteur portant un numéro pair » et « la roue s'arrête sur un secteur portant un numéro impair » sont contraires.

Question 4 : calculer la probabilité de l'évènement en utilisant un tableau.

Exercice non résolu

1.

	Elèves ayant un sac à dos	Elèves ayant un sac en bandoulière	Total
Elèves ayant 14 ans	**2**	**10**	**12**
Elèves ayant 15 ans	**5**	**3**	**8**
Elèves ayant 16 ans	**3**	**2**	**5**
Total	10	**15**	25

2. A : « l'élève a 14 ans et un sac à dos »
$P(A) = \frac{2}{25}$
B : « l'élève a 15 ans et n'a pas de sac à dos »
$P(B) = \frac{3}{25}$

C : « l'élève a 16 ans »
$P(C) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

D : « l'élève a un sac en bandoulière »
$P(D) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

EXERCICES DE FIXATION

EXERCICE 1

Elle vérifie les trois conditions données dans le cours

EXERCICE 2

1) Tirer deux cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.
5) Tirer au but lors d'un match de football.
6) Lancer une pièce de monnaie et lire la face supérieure.
7) Tirer 4 boules parmi 15 boules indiscernables au toucher

Exercice 3

Chaque résultat d'une expérience aléatoire est appelé éventualité

EXERCICE 4

d) $\{2;4;6\}$. A reformuler : On regarde si le chiffre inscrit est pair

EXERCICE 5

Faites un tableau à double entrée. On obtient : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 6.

EXERCICE 6

1- C ; 2- B ; 3- C ; 4-B

EXERCICE 7

Les issues de cette expérience sont C ;H ;O ;L ;A ;T.

EXERCICE 6

Les issues de cette expérience sont : 2 ; 3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9 ;10 ;11 et 12

EXERCICE 7

1- C ; 2- B ; 3- C ; 4-B

EXERCICE 8

1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2) Ensemble des parties à trois éléments pris dans l'ensemble des 32 cartes
3) $\{1, 2, \dots, 32\} \times \{1, 2, \dots, 32\}$

EXERCICE 9

Tableau 1	
Lorsque cet évènement est l'ensemble vide	•
Lorsque cet évènement est l'ensemble Ω	•
Lorsque cet évènement est un singleton	•

	Tableau 2
•	on l'appelle évènement certain
•	on l'appelle évènement impossible
•	on l'appelle évènement élémentaire

EXERCICE 10

On lance un dé non truqué à six faces. Complète le tableau ci-dessous suivant l'exemple de la première ligne.

	Evènement Elémentaire	Evènement Impossible	Evènement Certain
« Obtenir un nombre Supérieur à six »		x	
« Obtenir six »	x		
« Obtenir un multiple de 11 »		x	
« Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 »			x

EXERCICE 11

1) FAUX ; 2) VRAI ; 3) FAUX ; 4) VRAI ; 5) VRAI

EXERCICE 12

Tableau 1
Obtenir 5 est un :
Obtenir 10 est un :
Obtenir un chiffre est un :

Tableau 2
Evènement élémentaire
Evènement impossible
Evènement certain

EXERCICE 13

Tableau 1
Obtenir un nombre pair et multiple de 3
Obtenir un nombre impair et multiple de 3
Obtenir un nombre multiple de 4
Obtenir un nombre strictement supérieur à 7
Obtenir un nombre strictement supérieur à 7 et strictement inférieur à 11

Tableau 2
$\{4;8;12\}$
$\{8;9;10;11;12\}$
$\{6;12\}$
$\{8;9;10\}$
$\{3;9\}$

EXERCICE 14

Tableau 1	Tableau 2
L'évènement (A ou B)	$\{2;4;6;8;9;10;11;12\}$
L'évènement (A et B)	$\{8;10;12\}$
L'évènement (A ou C)	$\{2;3;4;6;8;9;10;12\}$
L'évènement (A et C)	$\{3;6;8;9;10;11;12\}$
L'évènement (B ou C)	$\{9;12\}$
L'évènement (B et C)	$\{6;12\}$

EXERCICE 15

1- B ; 2- C ; 3- B ; 4- B ;

EXERCICE 16

On appelle évènement contraire de A, $\overline{A}$, la partie complémentaire de A dans Ω

EXERCICE 17

1) Faux, car 6 est à la fois pair et multiple de 3.
2) Vrai, car ces nombres sont tous multiples de 15 dont le premiers positif non nul est 15 ;
3) Faux, car 1à est à la fois pair et multiple de 5.

EXERCICE 18

1) VRAI ;
2) FAUX ; cas du numéro 5
3) Faux ; cas de 5 lui-même : il n'est pas plus grand que 5 et il n'est plus petit que 5. Il est égal à 5.

EXERCICE 19

1) Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard.
Soit l'évènement A : « Les deux élèves sont des filles ». L'évènement contraire de A est :
b) « au moins un élève est un garçon ».
2) Dans un groupe de policiers et de gendarmes, on discute avec une personne.
Soit l'évènement B : « La personne est un homme policier ». L'évènement contraire de B est
c) « La personne est une femme ou un homme gendarme ».
3) A une loterie, Élise achète 3 billets.
Soit l'évènement D : « L'un des billets au moins est gagnant ». L'évènement contraire de D est :
a) « tous les billets sont perdants ».
4) A une loterie, Élise achète 3 billets.
Soit l'évènement E : « Deux billets au plus sont gagnants. L'évènement contraire de E est
c) « trois billets sont gagnants».

EXERCICE 20

1) FAUX ; 2) VRAI ; 3) FAUX ; VRAI

EXERCICE 21

1) ; 4) ; 5)

EXERCICE 22

1. Faux
2. Vrai
3. Faux

EXERCICE 23

b) $\frac{4}{5}$

EXERCICE 24

La probabilité de perdre à ce jeu est de 0,75

EXERCICE 25

La probabilité de mettre au monde un garçon est de $\frac{2}{3}$

EXERCICE 26

Données Mathématiques	Réponse
P(A) = 0,9 ; P(B) = 0,3 et $A \cap B = \emptyset$	FAUX
P(A) = 0,9 ; P(B) = −0,5	FAUX
P(A) = 0,8 ; P(B) = 0,4 et $P(A \cap B) = 0,2$	VRAI
P(A) = 0,9 ; P(B) = 0,3 et $P(A \cap B) = 0,1$	FAUX
P(A) = 0,9 ; P(B) = 0.,3 et $P(A \cap B) = 0,3$	VRAI

En dehors du cas 2, où c'est faux parce que P(B) est négatif, calculez $P(A \cup B)$.

EXERCICE 27

1)VRAI ; 2) FAUX ; 3VRAI ; 4) VRAI

EXERCICE 28

1) $P(A) = \frac{7}{15}$; $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$

2) $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

EXERCICE 29

$P(A) = \frac{2}{5}$

Exercices de renforcement / approfondissement

Exercice 30

$P(A \cup B) = 0{,}8$; $P(\bar{A}) = 0{,}7$; $P(\bar{B}) = 0{,}5$

Exercice 31

1) Déterminons la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « La carte choisie est une figure »
$P(A) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$
B : « La carte choisie est un dix ou un neuf »
$P(B) = \frac{8}{52} = \frac{4}{13}$

2) a) Définissons par une phrase chacun des événements $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $A \cup B$
$\overline{A}$: « La carte choisie n'est pas une figure »
$\overline{B}$: « La carte choisie n'est ni un dix et ni un neuf »
$A \cup B$: « la carte choisie est une figure, un dix ou un neuf »
b) Calcule les probabilités $P\left(\overline{A}\right)$, $P\left(\overline{B}\right)$ et $P\left(A \cup B\right)$.

On a : $P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{13}$

Donc $P(\bar{A}) = \frac{10}{13}$

On a : $P(\bar{B}) = 1 - \frac{4}{13}$

Donc $P(\bar{B}) = \frac{9}{13}$

Les événements A et B étant incompatibles, on a :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = \frac{3}{13} + \frac{4}{13}$

Donc $P(A \cup B) = \frac{7}{13}$

Exercice 32

1) FFF ; FFP ; FPF ; FPP ; PPP ; PPF ; PFP ; PFF
2) $P(A) = \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{7}{8}$

Exercice 33

1) $P_6 = 1 - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5)$
$P_6 = 1 - (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}15)$
$P_6 = 0{,}15$
2) soit P la probabilité d'obtenir un nombre pair
$P = P_2 + P_4 + P_6$
$P = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}15$
$P = 0{,}45$

Exercice 34

1) $\frac{4}{7}$; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{3}{7}$; 5) $\frac{4}{7}$

Exercice 35

Un collège compte 240 élèves en première, parmi lesquels 130 sont internes.
Ces élèves étudient chacun une langue.
66 élèves étudient l'anglais, 30 % des élèves l'allemand, dont 40 internes.
25 % des élèves sont des internes qui étudient l'espagnol.

1) Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Anglais	Allemand	Espagnol	Total
internes	**30**	**40**	**60**	130
Externes	**36**	**32**	**42**	110
Total	66	**72**	**102**	240

2) Un élève est choisi au hasard parmi les 240 élèves de première.

A : « l'élève étudie l'anglais »
$P(A) = \frac{66}{240} = \frac{11}{40}$
B : « l'élève est externe »
$P(B) = \frac{110}{240} = \frac{11}{24}$
C : « l'élève est externe et étudie l'anglais »
$P(C) = \frac{36}{240} = \frac{3}{20}$
D : « l'élève n'étudie pas l'espagnol »
$P(D) = \frac{138}{240} = \frac{23}{40}$
E : « l'élève est interne et n'étudie pas l'espagnol »

$P(E) = \frac{70}{240} = \frac{7}{24}$

Exercice 36

120 billets ont été vendus à 120 spectateurs, parmi lesquels 61 billets ne gagent rien.

1. a) 8 billets gagnent exactement deux places gratuites sur 120. La probabilité cherchée est $\frac{8}{120,}$, c'est-à-dire : $\frac{1}{15,}$.
   b) La probabilité de ne rien gagner est : $\frac{61}{120,}$.
2. a) La probabilité de gagner 3 ou 4 places assises est : $\frac{3+6}{120,}$, c'est-à-dire : $\frac{3}{40,}$.
   b) Deux cas : au plus 1 place gratuite (par évènement contraire) et 2, 3 ou 4 places gratuites. La probabilité cherchée est : $\frac{17}{120,}$.

Exercice 37

$P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{3}{10}$; $P(C) = \frac{1}{2}$

Exercice 38

1) $P(A) = \frac{3}{5}$

2) a) A et B sont des évènements contraires

b) $P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ou $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Exercice 39

$P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{3}{10}$; $P(C) = \frac{1}{2}$

Exercice 40

A : « La carte tirée est une dame. »

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

B : « La carte tirée est une figure rouge. »

Il y a 3 figures carreaux, 3 figures cœurs qui sont rouges

$P(B) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

C : « La carte tirée n'est pas une figure rouge. »

$P(C) = 1 - P(B)$

$P(C) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$

Exercice 41

1) Soient P_1 la probabilité qu'a le joueur A de tirer le 5 de Carreau et P_2 la probabilité qu'a le joueur B de tirer le 5 de Carreau

$P_1 = 0$ car le jeu de 32 cartes ne comporte pas le 5 de carreau.

$P_2 = \frac{1}{52}$

2) On a :

Le jeu de 32 cartes comporte 8 cœurs , $P_1 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

Le jeu de 52 cartes comporte 13 cœurs , $P_2 = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Comme $P_1 = P_2$, alors les joueurs ont la même probabilité de tirer un cœur.

3) On a :

Le jeu de 32 cartes comporte 4 cœurs , $P_1 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

Le jeu de 52 cartes comporte 4 cœurs , $P_2 = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Comme $P_1 > P_2$, donc les joueurs n'ont pas la même probabilité de tirer une dame.

Exercice 42

1) Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Dé vert \ Dé rouge	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

2) $P_1 = \frac{1}{36}$
3) $P_2 = \frac{1}{6}$
4) $P_3 = \frac{5}{12}$

Exercice 43

1) $P_1 = \frac{35}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{7}{100}$
2) $P_2 = \frac{35}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{7}{25}$ (Si elle réussit le premier essai, elle arrête).

Exercice 44

1) (R, R); (R, V) ;(V, R); (R, B) ;(B, R) ;(B, B) ;(B, V); (V, B)
2) a)

$P\{(R,R)\} = \frac{A_5^2}{A_8^2} = \frac{20}{56}$

$P\{(R,V)\} = \frac{5\times1}{A_8^2} = \frac{5}{56}$

$P\{(R,B)\} = \frac{2\times5}{A_8^2} = \frac{10}{56}$

$P\{(V,R)\} = \frac{1\times5}{A_8^2} = \frac{5}{56}$

$P\{(B,V)\} = \frac{2\times1}{A_8^2} = \frac{2}{56}$

$P\{(B,B)\} = \frac{2\times1}{56} = \frac{2}{56}$

$P\{(B,R)\} = \frac{2\times5}{56} = \frac{10}{56}$

$P\{(V,B)\} = \frac{1\times2}{A_8^2} = \frac{2}{56}$

b) $P\{(R,R)\} + P\{(B,B)\} = \frac{20}{56} + \frac{2}{56} = \frac{11}{28}$.

Exercice 45

B_r « boule rouge » ; B_b « boule bleue » ; J_r « jeton rouge » ; « j_b jeton bleu »

1) $B_r j_b$; $B_r J_r$; $B_b j_b$; $B_b J_r$

2)

$$P\{B_r j_b\} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$
$$P\{B_r j_r\} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$
$$P\{B_b j_r\} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$
$$P\{B_b j_b\} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

3) A : « la boule et le jeton extraits sont de la même couleur »

On a : $P(A) = P\{B_r j_r\} + P\{B_b j_b\}$

$$P(A) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}$$

Donc $P(A) = \frac{2}{5}$

Exercice 46

4) $P_1 = \frac{2}{25}$; $P_2 = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$; $P_3 = \frac{41}{50}$

Exercice 47

1) $P_1 = \frac{1}{45}$; $P_2 = \frac{4}{15}$; $P_3 = \frac{2}{3}$

Exercice 48

$P(A) = \frac{1}{12}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{5}{12}$; $P(D) = \frac{1}{3}$; $P(E) = \frac{1}{3}$

Exercice 49

On a : $\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{3} = \frac{p_4}{4} = \frac{p_5}{5} = \frac{p_6}{2}$, où p_i est la probabilité d'apparition de la face i. On a :
$p_2 = 2p_1$; $p_3 = 3p_1$; $p_4 = 4p_1$; $p_5 = 6p_1$; $p_6 = 6p_1$. La somme des probabilités valant 1, on a : $p_1 = \frac{1}{21}$.

On obtient de tableau ci-dessous

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

A « obtenir un nombre impair »

$$P(A) = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21}$$
$$P(A) = \frac{3}{7}$$

Exercice 50

$\mathbf{J}_b$ « Jeton bleu » ; $\mathbf{J}_j$ « Jeton jaune » ; $\mathbf{J}_r$ « Jeton rouge »

1) a) Les issues possibles de cette expérience aléatoire sont : $\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b$, $\mathbf{J}_j\mathbf{J}_j$, $\mathbf{J}_b\mathbf{J}_r$, $\mathbf{J}_r\mathbf{J}_b$, $\mathbf{J}_b\mathbf{J}_j$, $\mathbf{J}_j\mathbf{J}_b$, $\mathbf{J}_r\mathbf{J}_j$, $\mathbf{J}_j\mathbf{J}_r$

b) Soit P' la probabilité de tirer deux jetons d'une même couleur.
Tirer deux jetons d'une même couleur revient à obtenir deux jetons bleus ou deux jetons jaune.

On a : $P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4}$

$P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} = \frac{2^2}{6^2} = \frac{1}{9}$

$P' = P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} + P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\}$

Donc $P' = \frac{13}{36}$

2) - On tire au hasard un jeton du sac et on observe sa couleur

$P' = \frac{1}{6}$

- On ne le remet pas dans le sac, puis on tire au hasard un autre jeton du sac et on

On a : $P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} = \frac{A_3^2}{A_6^2} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

$P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

$P' = P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} + P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\}$

Donc $P' = \frac{4}{15}$

Exercice 51

Un dé cubique a été truqué. En lançant un grand nombre de fois, on estime la probabilité d'obtenir chaque face. Voici les estimations

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,05	0,1		0,2	0,25	0,3

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « obtenir 3 »
   On a : $P(A) = 1 - (0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}3)$
   Donc $P(A) = 0{,}1$

   B : « obtenir 4 ou plus »
   On a : $P(B) = 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}3$
   Donc $P(B) = 0{,}75$

2) La probabilité d'obtenir un nombre pair est de 0,55 et celle d'obtenir un nombre impair est de 0,45. L'affirmation de l'élève est fausse.

Exercice 52

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.
   Soit p la probabilité d'apparition des faces 1,2,3,4 et 5.
   On a : $p + p + p + p + p + \frac{1}{3} = 1$

   $5p = 1 - \frac{1}{3}$

   Donc $p = \frac{2}{15}$

2) Calculer la probabilité des événements suivants :
E : « le dé tombe sur le 3 ou le 6 »
$P(E) = \frac{2}{15} + \frac{1}{3}$
$P(E) = \frac{7}{15}$
F : « le dé tombe sur un numéro pair »
$P(F) = \frac{4}{15} + \frac{1}{3}$
$P(F) = \frac{3}{5}$

G : « le dé tombe sur un numéro impair »
$P(G) = \frac{6}{15}$
$P(G) = \frac{2}{5}$

E : « le dé tombe sur un numéro supérieur ou égal à 3 »

$P(E) = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{3}$
$P(E) = \frac{11}{15}$

F : « le dé tombe sur le numéro 7 »

$P(F) = 0$ (F : « le dé tombe sur le numéro 7 » est irréalisable)

3) Calculer la probabilité des événements (E ou F) et (E et F)

- $P(E \cap F) = 0$
- La probabilité de E ou F est $P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{11}{15}$ car $P(E \cap F) = 0$ et $P(F) = 0$

Exercice 53

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	Hommes	Femmes	Enfants	Total
Touristes	**1300**	**1480**	**320**	3100
Membres de l'équipage	**440**	**460**	**0**	900
Total	1740	**1940**	**320**	4000

2) On choisit une personne au hasard.
a) $P_1 = \frac{1300}{4000} = 0,325$ comme $P_1 < 0,5$ alors, on n'a pas plus d'une chance sur deux que ce soit un homme.
b) $P_2 = \frac{900}{4000} = \frac{9}{40}$
c) $P_3 = \frac{2520}{4000} = \frac{63}{100}$

Exercice 54

On croise un musicien de cet orchestre.

1) $P_1 = \frac{1}{102}$

2) $P_2 = \frac{2}{102} = \frac{1}{51}$

3) $P_3 = \frac{62}{102} = \frac{31}{51}$

EXERCICE 55

Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises.

On considère que 8 % des articles produits ne sont pas conformes aux normes. Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes. Cependant le test comporte une certaine marge d'erreur. Une étude a établi que :

- 5 % des articles conformes aux normes sont refusés par le test ;
- 10 % des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.

On considère un article pris au hasard au moment de passer le test. On note :

C l'évènement « l'article est conforme aux normes » ;

T l'évènement « l'article est accepté par le test ».

$\overline{C}$ et $\overline{T}$ désignent les évènements contraires respectifs de C et T.

1) Complète le tableau à double entrée ci-dessous :

	C	$\overline{C}$	Total
T	**874**	**8**	**882**
$\overline{T}$	**46**	**72**	**118**
Total	**920**	**80**	1000

2) a) Traduis par une phrase, l'évènement « *T* et *C* »

L'article est conforme aux normes et accepté par le test

b) Calcule $P(T \cap C)$

$$P(T \cap C) = \frac{874}{1000} = \frac{437}{500}$$

c) Calcule $P(T \cup C)$

$$P(T \cup C) = P(T) + P(C) - P(T \cap C)$$
$$P(T \cup C) = \frac{882}{1000} + \frac{920}{1000} - \frac{874}{1000}$$

$$P(T \cup C) = \frac{116}{125}$$

Exercice 56

1) 12x11x10 = 1320

2) $P_1 = \frac{1}{1320}$

3) Le nombre de tickets gagnant dans le désordre est : 3x2x1 – 1 = 5

Donc $P_2 = \frac{5}{1320}$

4) Calcule est la probabilité qu'il arrive dans le tiercé de tête.

$P_3 = \frac{3x(11x10)}{1320} = \frac{1}{4}$

5) $P_4 = \frac{1x11x10}{1320} = \frac{1}{12}$

Situations complexes

Exercice 57

Calculons la probabilité P de ne pas avoir au menu, ni du riz, ni du veau.

On a : $P = \frac{7}{9} \times \frac{4}{6}$

$P = \frac{14}{27}$

$P \approx 0{,}52$

Comme $> \frac{1}{2}$, alors le marin a eu raison dans son affirmation.

Exercice 58

Supposons que 400 ordinateurs portables ont été produits avant de constater la panne.

- 8% x 400 = 32 ordinateurs portables ayant la panne A.
- 2% x 400 = 8 ordinateurs portables ayant la panne A et la panne B.
- 5% x 400 = 20 ordinateurs portables ayant la panne B.
- Coût de réparation des ordinateurs portables:
  50.000 x 32 + 100.000 x 20 + 50.000 x 2 + 100.000 x 2 = 3.900.000
- Coût de production des 10.000.000 d'ordinateurs portables
  200.000 x 10.000.000 + 3.900.000 = 2.000.003.900.000
- Coût de vente des ordinateurs portables
  10.000.000 x 500.000 = 5.000.000.000.000
- Bénéfice du chef d'entreprise
  5.000.000.000.000 – 2.000.003.900.000 = 2.999.996.100.000
  chef d'entreprise a raison d'afficher son optimisme.

7 ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de troisième. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où se déroule la scène ?	Dans une boulangerie située près d'un lycée
Circonstances	Quel est le problème auquel le gérant est confronté ?	Le gérant de cette boulangerie voudrait connaitre le nombre de baguettes à vendre par semaine pour réaliser un bénéficie maximal
Tâche	Qu'est-ce que des élèves en classe de première se proposent de faire ?	Ils se proposent d'étudier la fonction bénéfice afin de répondre à la préoccupation du gérant.

DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

Activité 1

1) $D_f = \mathbb{R}^*$.
2) a) $\forall x \in D_f$, on a $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow -x \in D_f$.

   b) $\forall x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = \frac{|-x|+3}{(-x)^2} = \frac{|x|+3}{x^2} = f(x)$.

Exercice de fixation 1

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2 ; 2\}$

$\forall x \in D_f$, on a :

• $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2 \Leftrightarrow -x \neq 2$ et $-x \neq -2 \Leftrightarrow -x \in D_f$

• $f(-x) = \frac{5}{(-x)^2-4} = \frac{5}{x^2-4} = f(x)$

Conclusion :

$\forall x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$, donc f est une fonction paire.

<u>Activité 2</u>

1) On a M(x ; $f(x)$) et N($-x$; $f(x)$).
2) On a M(x ; y)∈(C) $\Leftrightarrow y = f(x)$

$\Leftrightarrow y = f(-x)$ car f est paire donc $f(x) = f(-x)$

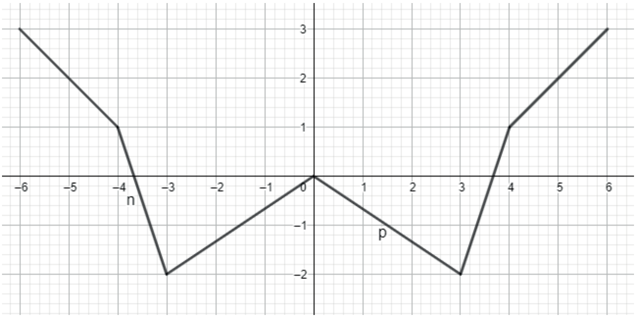
$\Leftrightarrow$ N($-x$; $f(-x)$)∈(C)

$\Leftrightarrow$ N($-x$; $f(x)$)∈(C).

Exercice de fixation 2

La fonction semble paire dans les cas a) ; c) et d).

Exercice de fixation 3



<u>Activité 3</u>

$D_f = \mathbb{R}$.

1) a) $\forall x \in D_f$, on a $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in D_f$.

   b) $\forall x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$.

Exercice de fixation 4

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$

$\forall x \in D_f$, on a :

• $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq 1$ et $-x \neq -1 \Leftrightarrow -x \in D_f$

• $f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2-1} = \frac{-3x}{x^2-1} = -\frac{3x}{x^2-1} = -f(x)$

Conclusion :

$\forall x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$, donc f est une fonction impaire.

<u>Activité 4</u>

1) On a M(x ; $f(x)$) et N($-x$; $-f(x)$).
2) On a M(x ; y)∈(C) $\Leftrightarrow y = f(x)$

$\Leftrightarrow -y = -f(x)$

$\Leftrightarrow -y = f(-x)$ car f est impaire donc $-f(x) = f(-x)$

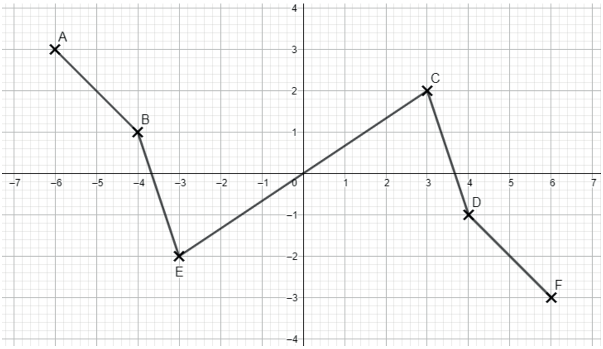
$\Leftrightarrow$ N($-x$; $f(-x)$)∈(C)

$\Leftrightarrow$ N($-x$; $-f(x)$)∈(C).

Exercice de fixation 5

La fonction semble impaire dans les cas b) et e).

Exercice de fixation 6



Activité 5

1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$.
2) Pour tout x tel que $x + 3 \in D_f$, on a :
   $g(x) = f(x+3) - 5 = \frac{5(x+3)+1}{(x+3)-3} - 5 = \frac{5x+16}{x} - 5 = \frac{16}{x}$.
   $D_g = \mathbb{R}^*$.
   $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a $-x \in \mathbb{R}^*$ et $g(-x) = \frac{16}{-x} = -\frac{16}{x} = -g(x)$, donc g est une fonction impaire.
3) Pour tout $x \in D_f$ tel que $6 - x \in D_f$, on a :
   $f(6-x) + f(x) = \frac{5(6-x)+1}{(6-x)-3} + \frac{5x+1}{x-3} = \frac{-5x+31}{3-x} + \frac{5x+1}{x-3} = \frac{5x-31}{x-3} + \frac{5x+1}{x-3} = \frac{10x-30}{x-3} = 10.$
4) Soit $x \in D_f$ tel que $3 + x \in D_f$.
   • $3 + x \in D_f \Leftrightarrow 3 + x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow 3 - x \neq 3 \Leftrightarrow 3 - x \in D_f$
   • $f(3-x) + f(3+x) = \frac{5(3-x)+1}{(3-x)-3} + \frac{5(3+x)+1}{(3+x)-3} = \frac{-5x+16}{-x} + \frac{5x+16}{x} = \frac{5x-16+5x+16}{x} = 10$

Exercice de fixation 7

$D_f = \mathbb{R}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $2 \times 1 - x \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f(2\times 1 - x) + f(x) &= f(2-x) + f(x) \\ &= (2-x)^3 - 3(2-x)^2 + 1 + x^3 - 3x^2 + 1 \\ &= 8 - 12x + 6x^2 - x^3 - 12 + 12x - 3x^2 + 1 + x^3 - 3x^2 + 1 \\ &= -2 = 2\times(-1) \end{aligned}$$

D'où le point A(1 ; –1) est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f

Activité 6

1) $D_f = \mathbb{R}$.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 7 \in \mathbb{R}$ et :
   $g(x) = f(x+7) = (x+7)^2 - 14(x+7) + 3 = x^2 - 46.$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = (-x)^2 - 46 = x^2 - 46 = g(x)$, donc g est une fonction paire.

3) Soit $x \in D_f$ tel que $14 - x \in D_f$, on a :
$f(14 - x) = (14 - x)^2 - 14(14 - x) + 3 = 196 - 28x + x^2 - 196 + 14x + 3 =$
$x^2 - 14x + 3 = f(x)$.
4) Soit $x \in D_f$ tel que $7 + x \in D_f$. Démontre que : $7 - x \in D_f$ et $f(7 - x) = f(7 + x)$.
• $7 + x \in D_f \Leftrightarrow 7 + x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -7 - x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 14 - 7 - x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 7 - x \in \mathbb{R}$
• $f(7 - x) = (7 - x)^2 - 14(7 - x) + 3 = 49 - 14x + x^2 - 98 + 14x + 3 = x^2 - 46$
$f(7 + x) = (7 + x)^2 - 14(7 + x) + 3 = 49 + 14x + x^2 - 98 - 14x + 3 = x^2 - 46$
D'où $f(7 - x) = f(7 + x)$

Exercice de fixation 8

f est définie ssi $x^2 + 2x - 3 \neq 0$
Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $2 \times 1 - x \in \mathbb{R}$ et

$$f(2 \times (-1) - x) = f(-2 - x) = \frac{3}{(-2 - x)^2 + 2(-2 - x) - 3}$$

$$= = \frac{3}{4+4x+x^2-4-2x-3} = \frac{3}{x^2+2x-3}$$

D'où la droite (D) d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f

__Activité 7__

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, donc les zéros de $f'(x)$ sont 0 ; –1 et 1.
b)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	

$\forall x \in [-2 ; -1]$, $f'(x) > 0$
$\forall x \in [-1 ; 0]$, $f'(x) < 0$
$\forall x \in [0 ; 1]$, $f'(x) < 0$
$\forall x \in [1 ; 2]$, $f'(x) > 0$

Exercice de fixation 9

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$
1 et –1 sont de zéros évidents de $f'(x)$, donc $f'(x) = (x^2 - 1)(ax + b)$
En utilisant la division euclidienne ou la méthode des coefficients indéterminés, on a :
$f'(x) = (x + 3)(x^2 - 1)$
2)

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x + 3$		–	0	+		+		+	
$x^2 - 1$		+		+	0	–	0	+	
$f'(x)$		–	0	+	0	–	0	+	

• $f'(-3) = 0$; $f'(x) < 0$ sur $]-\infty ; -3[$ et $f'(x) > 0$ sur $]-3 ; -1[$, donc $f(-3)$ c'est-à-dire 1 est un minimum local de f.

• $f'(-1) = 0$; $f'(x) > 0$ sur $]-3\,;-1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;1[$, donc $f(-1)$ c'est-à-dire 5 est un maximum local de f.
• $f'(1) = 0$; $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$, donc $f(1)$ c'est-à-dire 1 est un minimum local de f.

Activité 8

1) a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}(x^2+x+1)\times\frac{1}{x-2} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}(x^2+x+1) = 6$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}\frac{1}{x-2} = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}(x^2+x+1)\times\frac{1}{x-2} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}(x^2+x+1) = 6$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}\frac{1}{x-2} = +\infty$.

2) a) $D_g = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

b) $\lim\limits_{x\to3} g(x) = \lim\limits_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

Exercice de fixation 10

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{5\}$.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to5\\<}}(2x+3)\times\frac{1}{x-5} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}}(2x+3) = 13$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}}\frac{1}{x-5} = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to5\\>}}(2x+3)\times\frac{1}{x-5} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}}(2x+3) = 13$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}}\frac{1}{x-5} = +\infty$.

On conclut alors que la droite d'équation $x = 5$ est asymptote verticale à (C).

Activité 9

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5x+11}{2x-7} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5}{2} = \frac{-5}{2}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x+11}{2x-7} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5}{2} = \frac{-5}{2}$

Exercice de fixation 11

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x-1}{3x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x}{3x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x-1}{3x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$

On déduit de ces deux résultats que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ et en en $+\infty$.

Activité 10

• $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-1+\frac{1}{x+4}-(2x-1)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+4} = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1+\frac{1}{x+4}-(2x-1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+4} = 0$

Exercice de fixation 12

• $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x-5}{x+2}-(x-3)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-5-(x^2-x-6)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2} = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x-5}{x+2}-(x-3)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-5-(x^2-x-6)}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2} = 0$

On déduit de ces deux résultats que la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ et en en $+\infty$.

DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1 : Comment étudier la parité d'une fonction ?

- Exercice non résolu

1. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(-x) = x^2 + 3x + 5$ or $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$

   f est ni paire ni impaire.

2. $D_g = \mathbb{R}$ et $g(-x) = -g(x)$, donc g est impaire.
3. $D_h = \mathbb{R}$ et $h(-x) = -h(x)$, donc h est impaire

Question 2 : Comment déterminer une asymptote à la courbe représentative d'une fonction ?

- Exercices non résolus

1) - Déterminons l'ensemble de définition de f :

$\forall x \in \mathbb{R},\ x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 \neq 0$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 5\}$

- Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4x^2+3x}{x^2-3x-10} = -4$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4x^2+3x}{x^2-3x-10} = -4$

• $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} \frac{-4x^2+3x}{x^2-3x-10} = -\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} \frac{-4x^2+3x}{x^2-3x-10} = +\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to5\\<}} \frac{-4x^2+3x}{x^2-3x-10} = +\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}} f(x) = -\infty$

- Déduisons les asymptotes à (C_f).

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4$, donc la droite d'équation $y = -4$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -4$, donc la droite d'équation $y = -4$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à (C_f)

• $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 5$ est asymptote verticale à (C_f)

2) - Déterminons l'ensemble de définition de g :

$\forall x \in \mathbb{R},\ x \in D_g \Leftrightarrow x + 1 \neq 0$.

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- Calculons la limite de $g(x) - (-2x+5)$ en $+\infty$.et en $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x) - (-2x+5)) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x^2 + 3x + 6}{x+1} - (-2x+5)\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1}$$

$$= 0$$

- Conclusion : $\lim_{x \to +\infty} (g(x) - (-2x+5)) = 0$ donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C_g) en $+\infty$.

De même $\lim_{x \to -\infty} (g(x) - (-2x+5)) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2x^2+3x+6}{x+1} - (-2x+5)\right)$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+1}$$

$$= 0$$

- Conclusion : $\lim_{x \to -\infty} (g(x) - (-2x+5)) = 0$ donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C_g) en $-\infty$.

MES SÉANCES D'EXERCICES

EXERCICES DE FIXATION

Fonction paire

Exercice 1

L'ensemble de définition de f est $Df = \text{IR} - \{-1; 1\}$.

$\forall x \neq 1$ *et* $x \neq -1$, on a $-x \neq -1$ *et* $-x \neq 1$. Donc Df est symétrique par rapport à 0.

Ensuite $f(-x) = \frac{3}{(-x)^2 - 1} = \frac{3}{x^2 - 1}$. Donc $f(-x) = f(x)$.

Conclusion : f est une fonction paire.

Exercice 2

L'ensemble de définition de f est $Df =]1, +\infty[$. Cet ensemble n'est pas symétrique par rapport à 0 car $2 \in Df$ mais $-2 \notin Df$. Donc f n'est pas paire.

Exercice 3

Parmi les courbes, celle d'une fonction paire est la courbe 3.

Fonction impaire

Exercice 4

L'ensemble de définition de f est $Df = \text{IR} - \{-1; 1\}$.

$\forall x \neq 1$ *et* $x \neq -1$, on a $-x \neq -1$ *et* $-x \neq 1$. Donc Df est symétrique par rapport à 0.

Ensuite $f(-x) = \frac{-(-x)}{(-x)^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$. Donc $f(-x) = -f(x)$.
Conclusion : f est une fonction impaire.

Exercice 5
L''ensemble de définition de f est $Df = IR$.
Donc Df est symétrique par rapport à 0.
Mais $f(-3) = \frac{8}{10}$ alors que $f(3) = \frac{2}{10}$; $f(-3) \neq -f(3)$. Donc f n'est pas impaire.

Exercice 6
Parmi les courbes, celle d'une fonction impaire est la courbe 2.

Centre de symétrie

Exercice 7
Soit la fonction $g : IR \to IR, x \mapsto f(x + (-1)) - (-2)$; $g(x) = x^3 - 3x$
Démontrons que g est impaire.
L'ensemble de définition de g est IR ; il est donc symétrique par rapport à 0.
D'autre part $g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -g(x)$. Donc g est impaire.
Conclusion : le point $A(-1\,; -2)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de *f*.

Exercice 8
L'ensemble de définition de f est $Df = IR - \{1\}$. Pour tout $x \neq 1$,
on a $2 - x \neq 1$. Donc si $x \in Df, 2 - x \in Df$.
De plus $f(2-x) + f(x) = \frac{2x-7}{x-1} + \frac{2x+3}{x-1} = \frac{4x-4}{x-1} = 4$
$f(2-x) + f(x) = 4$.
Donc le point A est centre de symétrie de la courbe représentative de *f*.

Exercice 9

$D_f = \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $f(2 \times 0 - x) + f(x) = f(-x) + f(x) = (-x)^3 + x^3 = -x^3 + x^3 = 0$
Donc le point $A(0\,;0)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de *f*.

Axe de symétrie

Exercice 10
Considérons la fonction $: IR \to IR, x \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right)$. on a : $g(x) = 1 - \frac{2}{x^2+\frac{3}{4}}$.
Démontrons que g est paire.
L'ensemble de définition de g est IR, il est donc symétrique par rapport à 0.
Ensuite $g(-x) = g(x)$. Donc g est paire.
Il en résulte que la droite (D) est un axe de symétrie de la courbe g.

Exercice 11
L'ensemble de définition de f est IR. Donc pour tout x de Df, $6 - x$ appartient à Df.
Ensuite $f(6-x) = (6 - x - 3)^2 + 1 = (x-3)^2 + 1)$.
C'est-à-dire que $f(6-x) = f(x)$.
Donc la droite (D) est un axe de symétrie.

Exercice 12

$D_f = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\times\frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$ et $f\left(2\times\frac{\pi}{2} - x\right) = f(\pi - x) = \cos(\pi - x) = \cos(x) = f(x)$

Donc la droite (D) d'équation : $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f.

Extrémum relatif

Exercice 13

2 est un maximum relatif de f et il est atteint en –3
–4 est un minimum relatif de f et il est atteint en 0
0 est un maximum relatif de f et il est atteint en 2
–2 est un minimum relatif de f et il est atteint en 5

Exercice 14

2,5 est un maximum relatif de f et il est atteint en –2
–2 est un minimum relatif de f et il est atteint en 1

Asymptote verticale

Exercice 15

On a $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{7}{(x-1)^2} = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$ et $(x-1)^2 > 0$ pour $x \neq 1$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe (C) de la fonction f.

Exercice 16

Il suffit de démontrer que $\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ >}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ >}} \frac{1}{x+3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -3} x^2 + 2x = +3$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ >}} f(x) = +\infty$. D'où le résultat.

Asymptote horizontale

Exercice 17

Il suffit de démontrer que : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$

On a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2-4x+2}{2x^2+3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$. D'où le résultat.

Exercice 18

On a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-x}{x+8} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$. D'où le résultat.

Asymptote oblique

Exercice 19

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8}{x^3+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8}{x^3} = 0$. D'où le résultat.

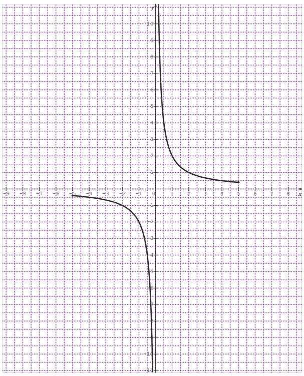
Exercice 20

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{2x^2+5x+1}{x+2} - (2x+1)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{x} = 0$.
Donc la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote en $-\infty$ à la courbe représentative de la fonction f

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

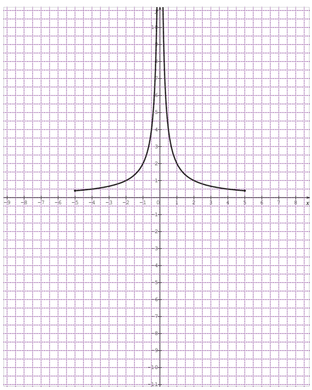
Exercice 21

On obtient le tracé suivant :



Exercice 22

On obtient le tracé suivant :



Exercice 23

	La fonction f définie sur	paire	impaire	ni paire ni impaire
1	$\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x$ est		✕	
2	$\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x^2$ est			✕
3	$\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^4 - 5x^2$ est	✕		
4	$\mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$ est	✕		
5	$\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{7x}{x^2+1}$ est		✕	
6	$[-4; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+4}$ est			✕
7	$[-3; 3]$ par $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ est	✕		

Exercice 24

1) Le minimum relatif de f est 1. Il est atteint en 2.
   Le maximum relatif de f est 5. Il est atteint en 0.
2) Établis le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Exercice 25

$D_f = \mathbb{R}^*$

$f(-1) = -1 - 1 + 1 = -2$; $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$

On a $f(-1) \neq f(1)$. Donc f n'est pas paire.

On a $f(-1) \neq -f(1)$. Donc f n'est pas impaire.

Exercice 26

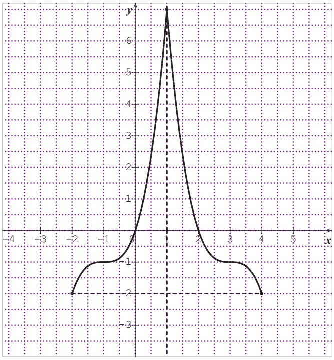
1) L'ensemble définition de f est $Df = IR - \{-3; 3\}$
2) L'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à 0.
   De plus $\frac{1}{3+x} - \frac{1}{3-x} = -(\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x})$. C'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$.
   La fonction f est donc impaire.

Exercice 27

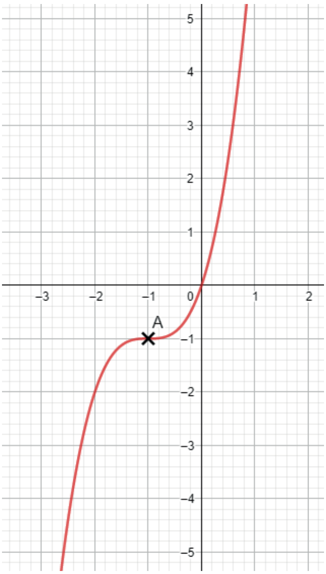
1) L'ensemble définition de f est $Df = IR - \{-1; 1\}$
2) L'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à 0. De plus $\frac{1}{|-x|-1} - (-x)^2 = \frac{1}{|x|-1} - x^2$. C'est-à-dire que $f(-x) = f(x)$. La fonction f est donc paire.

Exercice 28

On obtient le tracé suivant.



Exercice 29



Exercice 30

1) Pour tout x de $[-3; 1]$, $f'(x) = 3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2)$
2) Pour tout x de $]-3; -2[\cup \left]\frac{1}{3}; 1\right[$, $f'(x) > 0$ et pour tout x de $\left]-2; \frac{1}{3}\right[$, $f'(x) < 0$.

   Donc f est croissante sur $]-3; -2[$ et sur $\left]\frac{1}{3}; 1\right[$ et f est décroissante sur $\left]-2; \frac{1}{3}\right[$.

3) Tableau de variation de f.

x	-3		-2		$\frac{1}{3}$		1
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$\frac{35}{54}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

4) Le maximum relatif de f est 7 et il est atteint en -2.

Le minimum relatif de f est $\frac{35}{54}$ et il est atteint en $\frac{1}{3}$

Exercice 31

1) Posons $f(x) = 3 + \frac{-5}{x-2}$. On a $f(4-x) + f(x) = 3 + \frac{-5}{2-x} + 3 + \frac{-5}{x-2} = 6 = 2 \times 3$. D'où le résultat.

2) Posons $g(x) = (x-2)^3 + 3$.

On a $g(4 - x) + g(x) = (4 - x - 2)^3 + 3 + (x-2)^3 + 3 = 6 = 2 \times 3$.

D'où le résultat.

Exercice 32

1) Posons $f(x) = (4+x)^2 - 15$. On a $f(-8-x) = (-4-x)^2 - 15 = f(x)$. D'où le résultat.

2) Posons $g(x) = |x+4| + 1$. On a $g(-8-x) = |-x-4| + 1 = g(x)$.

D'où le résultat.

Exercice 33

1) $f'(x) = \frac{a-b}{(x+1)^2}$; donc $f'(0) = a - b$ c'est-à-dire que $a - b = -3$. Ensuite $f(-2-x) + f(x) = -4$ *or* $f(-2-x) + f(x) = \frac{-ax-2a+b}{-x-1} + \frac{ax+b}{x+1} = \frac{ax+2a-b}{x+1} + \frac{ax+b}{x+1} = 2a$

Donc $2a = -4$. Soit $a = -2$. Par suite $b = 1$.

On trouve donc $f(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$.

2)$\forall \in x]-1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-2(x+1)-2(-x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{3}{(x+1)^2}$

3) $\forall \in x\ ]-1; +\infty[$, $-\frac{3}{(x+1)^2} < 0$. Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1; +\infty[$

4) a) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{-2x+1}{x+1} = +\infty$

b) Il en résulte que la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe de f.

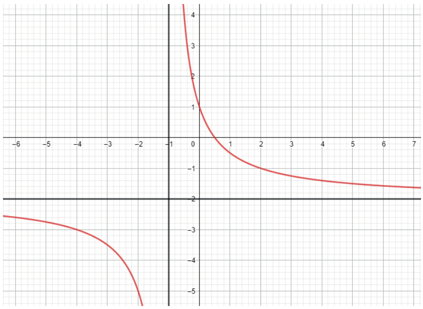
5) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = -2$

b) Il en résulte que la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote à la courbe de f

6) Le tableau de variation de f est :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$+\infty$ $\searrow$	-2

7)



Exercice 34

1) $Df = IR - \{1\}$
2) Pour tout x de Df, $f(x) = \frac{(1-x)^2+4}{1-x} = 1 - x + \frac{4}{1-x}$
3) a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty$

   b) La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe (C).
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

On admet que f est dérivable sur Df.

5) a) $f'(x) = -1 + \frac{4}{(1-x)^2} = \frac{(1+x)(3-x)}{(1-x)^2}$

   b) Pour tout x de $]-1; 1[\cup]1; 3[$, $f'(x) > 0$ *et*

   pour tout x de $]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$, $f'(x) < 0$

Donc f est croissante sur $]-1; 1[$ *et sur* $]1; 3[$ *et* f est décroissante sur $]-\infty; -1[$ *et sur* $]3; +\infty[$.

   c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$			0				0		
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$

6) $f(0) = 5$ *et* $f'(0) = 3$, donc (T) a pour équation $y = 3x + 5$
7) Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 1$

   a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (-x+1)) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (-x+1)) = 0$. Donc (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b) On a $f(x) - (-x+1) = \frac{4}{1-x}$; pour $x \in]-\infty; 1[$, $\frac{4}{1-x} > 0$

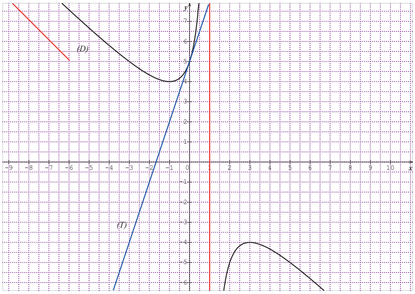
   et pour $x \in]1; +\infty[$, $\frac{4}{1-x} < 0$. Donc sur $]-\infty; 1[$, *(C)* est au-dessus de (D) et sur $]1; +\infty[$ (C) est au-dessous de (D).

8) Soit g la fonction de IR vers IR définie par $g(x) = f(x+1)$

a) $g(x) = -x - \frac{4}{x}$; l'ensemble de définition de g est $IR - \{0\}$; il est symétrique par rapport à 0. De plus $g(-x) = -g(x)$. Donc g est impaire

b) Le point de coordonnées (1 ;0) est centre de symétrie de (C).

9)

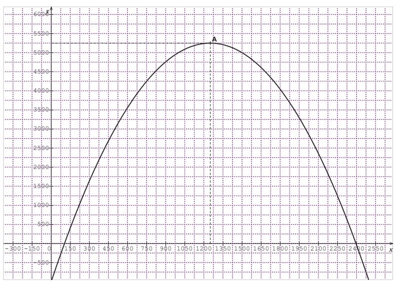


Exercice 35

1) On a $B(x) = -0,004x^2 + 10x - 1000$. Il suffit de résoudre l'équation $B(x) = 0$. On trouve 2396 et 104. Donc le bénéfice est nul si elle produit 2396 galettes ou 104 galettes.
2) a) Pour tout x ; $B'(x) = -0,008x + 10$.
   b) $B'(x) \geq 0$ pour $x \leq 1250$ *et* $B'(x) < 0$ et pour $x < 1250$. Donc B est croissante sur $]0; 1250[$ et décroissante sur $]1250; +\infty[$.
   c) Déduis-en les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice est positif.
   D'après ce qui précède, le bénéfice est positif pour un nombre de galettes compris entre 104 et 2396.
3) Etablissons le tableau de variation de *f*

x	0	1250	$+\infty$
$B'(x)$	+		-
$B(x)$	-1000 ↗	5250	↘ $+\infty$

4) D'après le tableau de variation, le bénéfice maximal est 5250F, il correspond à 1250 galettes.



Exercice 36

1) $D_f = \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = -x^4 + 2x^2 + 1 = f(x)$, donc la fonction f est paire.
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^4 = -\infty$.
3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4x^3 + 4x = 4x(1 - x^2)$

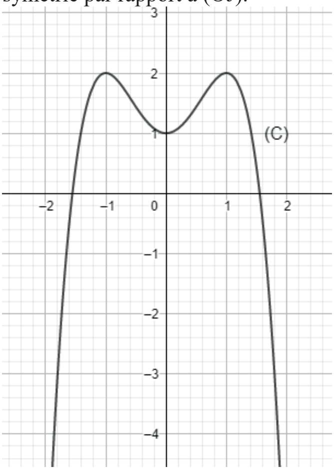
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

f est croissante sur $[0 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

4) Tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

5) Comme f est une fonction paire, la droite (OJ) est un axe de symétrie de (C).
Il suffit donc de tracer la courbe de la restriction de f à $[0 ; +\infty[$ puis de compléter par symétrie par rapport à (OJ).



Exercice 37

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 2\}$.
2) f est croissante sur $]-3 ; 0[$, donc $f'(x) > 0$ sur $]-3 ; 0[$.
f est décroissante sur $]-\infty ; -3[$, sur $]0 ; 2[$ et sur $]2 ; +\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur

]–∞ ; –3 [U]0 ; 2[U] 2 ; +∞[,.

3) $\lim\limits_{-\infty} f = 1$; la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (C_f) en –∞

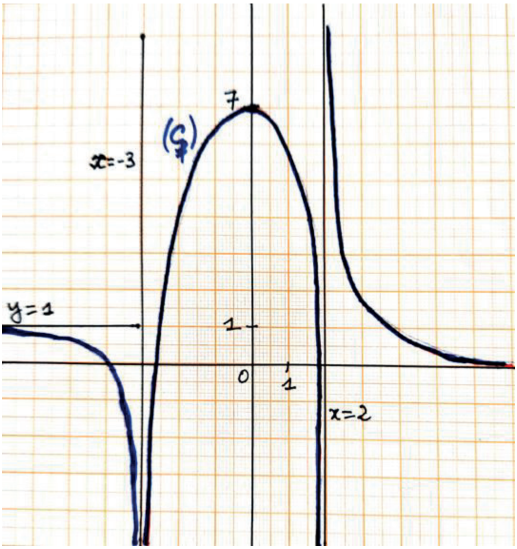
$\lim\limits_{+\infty} f = 0$; la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C_f) en +∞

4) $\lim\limits_{-3} f = -\infty$; la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à (C_f).

5)) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à (C_f).

6) Courbe susceptible de représenter la fonction f.



Exercice 38

Dans l'énoncé, ajouter ceci à la fin de la question 2) a) : (on pourra calculer la tangente de l'angle $\widehat{HAJ}$ dans deux triangles rectangles)

1)

a) f est dérivable sur I et $\forall x \in$I, $f'(x) = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

$f'(4) = 0$; $\forall x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right[, f'(x) < 0$ et $\forall x \in \,]4; 10], f'(x) > 0$

Donc f est strictement décroissante sur $\left[\frac{5}{2}; 4\right[$ et strictement croissante sur $]4; 10]$

x	$\frac{5}{2}$		4		10
$f'(x)$	0	–	0	+	
$f(x)$	12,5	↘	8	↗	12,5

b) f est strictement décroissante sur $\left[\frac{5}{2}; 4\right[$ et strictement croissante sur $]4; 10]$, donc f possède sur I un minimum qui est 8.

2) a) Dans le triangle JAH, rectangle en H, on a : $\tan\widehat{HAJ} = \frac{HJ}{HA} = \frac{r}{h}$

Dans le triangle AIO, rectangle en I, on a : $\tan\widehat{HAJ} = \frac{IO}{AI} = \frac{1}{AI}$

D'où $\frac{r}{h} = \frac{1}{AI}$, soit $r = \frac{h}{AI}$ ou encore $r^2 = \frac{h^2}{AI^2}$

Dans le triangle AIO, rectangle en I, on a $AO^2 = IA^2 + IO^2$, soit $(h-1)^2 = AI^2 + 1$ ou encore $AI^2 = h^2 - 2h = h(h-2)$

En définitive, l'égalité $r^2 = \frac{h^2}{AI^2}$ permet d'écrire $r^2 = \frac{h}{h-2}$

b) $V(h) = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h = \frac{\pi}{3} \times \frac{h^2}{h-2}$

c) On a : $V(h) = \frac{\pi}{3} \times \frac{h^2}{h-2} = \frac{\pi}{3} f(h)$. Or f possède sur I un minimum, donc le volume du cône est minimal pour $h = 4$ et ce volume est $\frac{8\pi}{3}$

Exercice 39

1- a) $D_f = \mathbb{R}$. $\forall\, x \in \mathbb{R}, x + 2\pi \in \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = \cos(2x + 4\pi) - 2\cos(x + 2\pi) = cos2x - 2cosx = f(x)$, donc la fonction f est une fonction périodique de période 2π.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}\ et\ f(-x) = \cos(-2x) - 2\cos(-x) = \cos(2x) - 2cosx = f(x)$, donc la fonction f est paire.

2-a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\sin(2x) + 2sinx$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = -4\sin x\, cosx + 2sinx = 2sinx(-2cosx + 1)$.

b) $\forall\, x \in]0; \pi[, sinx > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2cosx$.

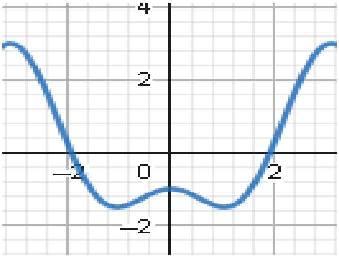
On a: $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

$\forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], f'(x) \leq 0\ et \forall\, x \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right], f'(x) \geq 0$

3- f est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$. D'où le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	-		+	0
$f(x)$	-1	↘	$\frac{-3}{2}$	↗	3

4. Construction de (C_f) sur $[-\pi; \pi]$.



Exercice 40

1- $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$

2- Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}$; $g(x + 2\pi) = g(x)$. Donc la fonction g est une fonction périodique de période 2π.

3- $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{-3\pi}{2} \\ >}} g(x) = +\infty \; et \; \lim\limits_{\substack{x \to \frac{3\pi}{2} \\ <}} g(x) = +\infty$.

4-a) g est dérivable sur $\left]\frac{-3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$et $\forall\, x \in \left]\frac{-3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[, g'(x) = \frac{cosx}{(1-sinx)^2}$.

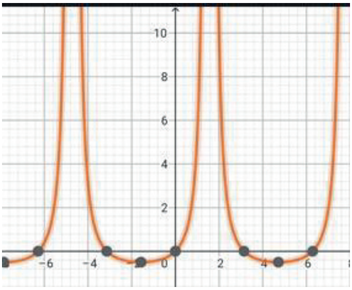
b) $\forall\, x \in \left]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right], g'(x) \leq 0 \;\; et \forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[, g'(x) \geq 0$.

g est décroissante sur $\left]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ et g est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
$g'(x)$		-		+	
$g(x)$	$+\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$

5- Construction



Exercice 41

1- $\forall\, x \in \mathbb{R}, E(x+1) = E(x) + 1.$

Donc $f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = x + 1 - E(x) - 1 = x - E(x) = f(x).$

D'où f est périodique de période 1.

2- $\forall\, x \in [0;1[, E(x) = 0$ donc $f(x) = x.$

$\forall\, x \in [1;2[, E(x) = 1$ donc $f(x) = x - 1.$

3- Construction

Exercice 42

1- $\forall\, x \in [1;+\infty[, f(x) = x - \sqrt{x-1}$ et $\forall\, x \in]-\infty;1], f(x) = x - \sqrt{1-x}$.

2- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$, donc f n'est pas dérivable en 1.

3-a) $\forall\, x \in]-\infty;1[\; f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0$, donc f est croissante sur $]-\infty;1]$.

b)) $\forall\, x \in \left[1;\frac{5}{4}\right[, f'(x) < 0 \;\; et \forall\, x \in \left]\frac{5}{4};+\infty\right[, f'(x) > 0$.

f est décroissante sur $\left[1;\frac{5}{4}\right[$ et f est croissante sur $\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$.

4- Tableau de variation

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 43

Soit V le volume de ce conteneur.
V = L×*l*×*h* = (11 – *l*)×*l*×(5,4 – *l*) = $l^3 - 16{,}4l^2 + 59{,}4l$.
Soit *f* la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x^3 - 16{,}4x^2 + 59{,}4x$.
Le volume maximal correspond au maximum de *f* sur l'intervalle [1 ; 4].
f est dérivable sur ℝ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 32{,}8x + 59{,}4$
$\Delta = 363{,}04$; $x_1 = \frac{32{,}8-\sqrt{363{,}04}}{6} \simeq 2{,}29$ et $x_2 = \frac{32{,}8+\sqrt{363{,}04}}{6} \simeq 8{,}64$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–	0	+

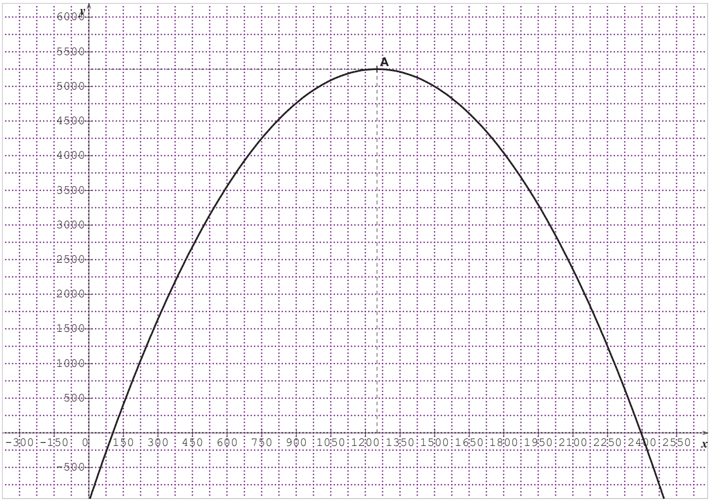
f admet un maximum relatif en x_1 et comme $1 \leq 2{,}29 \leq 4$, on conclut que le conteneur a un volume maximum lorsque la largeur est 2,3 m, la longueur 8,7 m et la hauteur 3,1 m.
Ce volume maximum est *f*(2,3), soit environ 62 m^3.

Exercice 44

5) On a B(x) = $-0{,}004x^2 + 10x - 1000$. Il suffit de résoudre l'équation B(x) = 0. On trouve 2396 et 104. Donc le bénéfice est nul si elle produit 2396 galettes ou 104 galettes.
6) a) Pour tout x ; B'(x) =$-0{,}008x + 10$.
   b) $B'(x) \geq 0$ pour $x \leq 1250$ et $B'(x) > 0$ et pour $x < 1250$. Donc B est croissante sur $]0; 1250[$ et décroissante sur $]1250; +\infty[$.
   c) Déduis-en les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice est positif.
   D'après ce qui précède, le bénéfice est positif pour un nombre de galettes compris entre 104 et 2396.
7) Etablissons le tableau de variation de *f*

x	0		1250		$+\infty$
$B'(x)$		+		-	
$B(x)$	-1000	↗	5250	↘	$+\infty$

D'après le tableau de variation, le bénéfice maximal est 5250F, il correspond à 1250 galettes (voir la courbe ci-dessous)



Exercice 45

Soit un rectangle d'aire de mesure S donnée et de côtés x et y. Son périmètre est :

$P = 2(x + y)$. Le périmètre est donc : $P = 2(x + \frac{S}{x})$.

On considère la fonction f dérivable et définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x + \frac{2S}{x}$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2(1 - \frac{S}{x^2})$, donc $f'(x) < 0$ pour $x \in \left]0; \sqrt{S}\right[$ et $f'(x) > 0$,pour tout $x \in \left]\sqrt{S}; +\infty\right[$. Il en résulte que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]0; \sqrt{S}\right[$et croissante sur l'intervalle $\left]\sqrt{S}; +\infty\right[$. Enfin $f\left(\sqrt{S}\right) = 4\sqrt{S}$.

D'après ce qui précède, la fonction f admet un minimum en $\sqrt{S}$; ce minimum est égal à $4\sqrt{S}$.

Tous les rectangles d'aire donnée S qui ont un périmètre minimum sont des carrés de côté $\sqrt{S}$ unités. Ce périmètre minimum est : $4\sqrt{S}$ unité d'aire.

Conclusion : pour S = 400, $x = 20$, le périmètre minimum P est de 80 mètres.
La proposition du chef du village n'est donc pas la bonne, Kouadio doit choisir un terrain carré de 20 mètres de côté.

8 SUITES NUMÉRIQUES

La situation d'apprentissage

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (lecture silencieuse des élèves, lecture par un élève et par le professeur), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte en leur demandant par exemple d'en faire un résumé.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	**Exemples de questions possibles**	**Réponses possibles des élèves**
Contexte	✓ Où se déroule la scène ? ✓ De quoi s'agit-il ?	✓ Dans un village ✓ Une étude démographique.
Circonstances	Pour quelles raisons on sollicite les élèves ?	Pour programmer de façon efficiente le développement (écoles, centres de santé, marchés……).du village
Tâche	Que doivent faire les élèves pour répondre à la sollicitation ?	prévoir le nombre d'habitants dans ce village année par année sans recours à de nouveaux recensements dans les trente années à venir.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation, tout en faisant remarquer l'importance des suites numériques pour traduire, traiter et trouver des solutions à des problèmes de vie courante, d'où son importance dans le programme scolaire. Il invitera les apprenants à être très attentifs car les suites numériques interviennent dans la suite du programme et dans plusieurs domaines notamment en physiques, en SVT. Il annoncera par la suite le titre et le plan de la leçon

Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

Découverte des activités

Activité 1 :

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
v en m/s	**10**	**10,8**	**11,6**	**12,4**	**13,2**	**14**	**14,8**	**15,6**	**16,4**	**17,2**	**18**

Exercice de fixation1 :

f ; h et w

Activité 2 :

Soit f la fonction définie de ℕ vers ℝ par : $f(x)= 5x^3- x^2 +1$

1) f est une fonction numérique définie sur ℕ
2) $f_2 = 37$; $f_{20} = 39\,601$; $f_{100} = 4\,990$ 0à1 ; $f_{50} = 622\,501$
3) Pour tout entier naturel n, $f_n = f(n)= 5n^3- n^2 +1$

Exercice de fixation 2

$u_0 = 2$; $u_5 = -623$; $u_{15} = -16873$; $v_{50} = \frac{1}{50}$ et $v_{60} = \frac{1}{60}$

Activité 3

a) l'application p qui à chaque durée de n en heures associe la quantité p_n de bactéries est une fonction numérique définie sur ℕ .
b) $p_0 = 5$; $p_1 = 6{,}5$; $p_2 = 8{,}45$; $p_3 = 10{,}985$ et $p_4 = 14{,}2805$
c) $p_{n+1}= p_n+ 0{,}3\ p_n+ = 1{,}3\ p_n$

Exercice de fixation 3

Formule explicite : (v_n) ; (w_n)
Formule de récurrence : (k_n) ; (f_n) ; (g_n)

Activité 4
objectif : représenter graphiquement les termes d'une suite définie par une formule de récurrence.

(voir étapes de représentation d'une suite définie suite définie par une formule de récurrence)

Exercice de fixation 4

(voir étapes de représentation d'une suite définie suite définie par une formule de récurrence)

Activité 5

1) $u_0 = 4$
2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}- u_n = 3(n + 1) + 4 - (3n +4)= 3n + 3 + 4 - 3n -4=3$

Exercice de fixation 5

a. faux
b. faux
c. vrai
d. vrai

Activité 6

1)
$u_1 = u_0 + r$ $u_2 = u_1 + r$ $u_3 = u_2 + r$ $u_4 = u_3 + r$ ………………
………………… $u_{n-2} = u_{n-3} + r$ $u_{n-1} = u_{n-2} + r$ $u_n = u_{n-1} + r$

2)
$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = u_0 + r + u_1 + r + u_2 + r + u_3 + r + \cdots + u_{n-3} + r + u_{n-2} + r + u_{n-1} + r = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + + u_{n-1} + nr$

3)
On a : $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + nr$
donc : $(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1}) + u_n = u_0 + (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + + u_{n-1}) + nr$
Ainsi : $u_n = u_0 + (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}) + nr - (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1})$
$= u_0 + nr$

Exercice de fixation 6

$u_n = 2 + 3n$

Activité 7

1) commutativité de l'addition
2) $u_{k+1} = u_k + r$, $u_{k+2} = u_k + 2r$, …, $u_{k+p-2} = u_k + (p-2)\,r$, $u_{k+p-1} = u_k + (p-1)\,r$
3) $u_{k+p-2} = u_{k+p-1} - r$, $u_{k+p-3} = u_{k+p-1} - 2\,r$ ……m, $u_{k+2} = u_{k+p-1} - (p-3)$,
$u_{k+1} = u_{k+p-1} - (p-2)\,r$ et $u_k = u_{k+p-1} - (p-1)\,r$ en fonction de u_{k+p-1} et r
4) (1) : $S = u_k + u_k + r + u_k + 2r + \ldots\ldots + u_k + (p-2)\,r + u_k + (p-1)\,r$
(2) : $S = u_{k+p-1} + u_{k+p-1} - r + u_{k+p-1} - 2 + .. + u_{k+p-1} - (p-3)\,r + u_{k+p-1} - (p-2)\,r + u_{k+p-1} - (p-1)\,r$

$2S = (u_k + u_{k+p-1}) + (u_k + r + u_{k+p-1} - r) + (u_k + 2r + u_{k+p-1} - 2r) + \ldots\ldots$
$(u_k + (p-1)r + u_{k+p-1} - (p-1)\,r) + (u_k + (p-2)\,r + u_{k+p-1} - (p-2)\,r) +$
$(u_k + (p-1)\,r + u_{k+p-1} - (p-1)\,r)$
$= (u_k + u_{k+p-1}) + (u_k + u_{k+p-1}) + \cdots (u_k + u_{k+p-1}) + (u_k + u_{k+p-1})$
$= p\,(u_k + u_{k+p-1})$

Donc $S = \frac{1}{2}\,p\,(u_k + u_{k+p-1})$

Exercice de fixation 7

$u_5 + \cdots \ldots \ldots \ldots + u_{50} = \frac{1}{2} \times 46 \times (8 - 10)$ = -46

Activité 8

1) $v_0 = 3\times 2^0 = 3$
2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3\times 2^{n+1}}{3\times 2^n} = \frac{3\times 2^n \text{x } 2}{3\times 2^n} = 2$

Exercice de fixation 8

a. vrai
b. vrai
c. faux
d. vrai

Activité 9

1) $v_1 = v_0 q^1$;$v_2 = \mathrm{q}v = v_0 q^2$; $v_3 = \mathrm{q}v_2 = v_0 q^3$; $v_4 = v_0 q^4$; $v_5 = v_0 q^5$;$v_6 = v_0 q^6$
2) $v_n = v_0 q^n$

Exercice de fixation 9

$v_n = 2(-5)^n$

Activité 10

1) S= $v_k + v_k q + v_k q^2 + v_k q^3 \ldots\ldots + v_k q^{p-2} + v_k q^{p-1}$
2) S= $v_k(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^{p-2} + q^{p-1}) = v_k \frac{1-q^p}{1-q}$

Exercice de fixation 10 (n'apparait pas dans la manuel)

$w_0 + \cdots \ldots \ldots \ldots + w_{199} = w_0 \frac{1-3^{200}}{1-3} = 2\text{x} \frac{1-3^{200}}{1-3} = -1 + 3^{200}$

Question d'évaluation

Question 1 : Comment résoudre un problème pratique à l'aide des suites numériques ?

Solution exercice non résolu

- Soit v_n le nombre de voiture dans le parking au nième jour de la semaine
- $v_{n+1} = v_n + 10$ donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme 350
- S= $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = \frac{1}{2}$ x 7 $(v_0 + v_6)$ avec $v_6 = v_0 + 6\text{x}10 = 410$

  Ainsi : S= $\frac{1}{2}$ x 7 (350 + 410)= 2660 voitures.

Question 2 : Comment démontrer qu'une suite donnée est une suite arithmétique ?

Solution exercice non résolu

$u_n = \frac{1}{15} + \frac{\sqrt{2}}{3} n$ donc u_n est une suite arithmétique de premier terme $\frac{1}{15}$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Question 3 : Comment démontrer qu'une suite donnée est une suite géométrique ?

Solution exercice non résolu

$v_n = -\frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc v_n est une suite géométrique de premier terme $-\frac{1}{7}$ et de raison $\frac{2}{3}$

Question 4 : Comment calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique?

Solution exercice non résolu

1. $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{34} = 35 \times \frac{u_0 + u_{34}}{2} = 35 \times \frac{3 - 65}{2} = -1\,085$
2. $S = v_4 + v_5 + \cdots + v_{15} = 35 \times \frac{v_4 + v_{15}}{2} = 12 \times \frac{-10 - 43}{2} = -318$

Question 5 : Comment calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique ?

Solution exercice non résolu

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$ donc

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7 = 1 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 255$

MES SEANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

h ; g ; w ;

Exercice 2

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

Exercice 3

$u_0 = 0$; $u_1 = -1$; u_2 =-5 ; $v_0 = 0$; $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $v_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Exercice 4

$u_1 = \sqrt{14}$; $u_2 = \sqrt{5\sqrt{14} + 4}$; $u_3 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{14} + 4} + 4}$

Exercice 5

$u_2 = u_1 - 4u_0 = -22$; $u_3 = u_2 - 4u_1 = -14$; $u_4 = u_3 - 4u_2 = 74$

Exercice 6

Représenter dans le plan repère (O, I, J), $x \longmapsto \sqrt{x}$ puis suivre les étapes de construction

Exercice 7

Représenter dans le plan repère (O, I, J), $x \longmapsto x^2$ puis suivre les étapes de construction

Exercice 8

$w_{n+1} = w_n + 3$

Exercice 9

$w_{n+1} - w_n = -(n+1) + \sqrt{5} - (-n + \sqrt{5}) = -n - 1 + \sqrt{5} + n - \sqrt{5} = -1$ suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $w_0 = \sqrt{5}$

Exercice 10

$u_n = -3 + 2n$ donc : $u_5 = 7$, $u_{10} = 17$ et $u_{100} = 197$

Exercice 11

$u_n = u_p + (n-p)r$ donc $u_{10} = u_3 + (10-3)r$ ainsi $r = \frac{3}{7}$

Exercice 12

$w_0 + \cdots \ldots \ldots \ldots + w_{19} = 20\text{x}\,\frac{60+2}{2} = 620$

Exercice 13

$v_n = 9 - 4n$, Donc $v_0 = 9$ *et* $v_{99} = -387$

$v_0 + \cdots \ldots \ldots \ldots + v_{99} = 100\text{x}\frac{9-387}{2} = -18900$

Exercice 14

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\text{x }5^{n+1}}{3\text{x }5^n} = 5$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme 3

Exercice 15

$v_{n+1} = 3\, v_n$

Exercice 16

$w_n = 5\text{x }(-2)^n$

Exercice 17

$v_5 = -96$, $v_{10} = -3072$ et $v_{100} = -3\text{x}2^{100}$

Exercice 18

$u_{10} = u_0\text{x}7^{10}$ donc $u_0 = \frac{14}{7^{10}} = \frac{2}{7^9}$

Exercice 19

- $u_{51} = u_5\text{x } 2^{46} = -10 \text{ x } 2^{46}$
- $u_{51} + \cdots \ldots \ldots \ldots + u_{100} = u_{51}\text{x}\,\frac{1-2^{50}}{1-2} = -10 \text{ x } 2^{46}\text{x}\,\frac{1-2^{50}}{1-2} = 10 \text{ x } 2^{46}\text{x}(1 - 2^{50})$

Exercice 20

$v_0 + \cdots \ldots \ldots \ldots + v_{29} = v_0\,\frac{1-(-4)^{30}}{1-(-4)} = 9\text{x}\,\frac{1-(-4)^{30}}{1-(-4)} = 9\text{x}\,\frac{1-4^{30}}{5}$

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

Exercice 21

1)
   - $r = \frac{w_{12}-w_4}{12-4} = -\frac{3}{8}$
   - $w_4 = w_0 + 4\text{x}\frac{-3}{8}$ donc $w_0 = w_4 - 4\text{x}\frac{-3}{8} = 8 + \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$

2) $w_n = \frac{19}{2} - \frac{3}{8}n$

3) $w_4 + \cdots \dots\dots\dots + w_{12} = \frac{117}{2}$

Exercice 22

1) $u_{12} = 5$ donc $u_{13} = 5 + 10 = 15$ $u_{14} = 15+10 = 25$

2) $u_0 = -115$ et $u_{99} = 875$ donc $u_0 + \cdots \dots . . + u_{99} = 100 \text{ x } (\frac{-115+875}{2}) = 38000$

Exercice 23

1) $u_{n+1} - u_n = -3$

2) $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \text{ x } (\frac{u_0+u_n}{2} = (n+1) \text{ x } (\frac{u_0+u_n}{2}) = (n+1) \text{ x } (\frac{10-3n+5}{2})$

Exercice 24

$v_0 + \dots + v_9 = v_0 \text{ x } \frac{3^{10}-1}{3-1} = -2 \text{ x } \frac{3^{10}-1}{3-1} = -3^{10} + 1$

Exercice 25

$v_0 + \dots + v_9 = v_0 \text{ x } \frac{2^{10}-1}{2-1} = 5 \text{ x } \frac{2^{10}-1}{2-1} = 5\text{x } (2^{10} - 1) = 5115$

Exercice 26

Soit (w_n) une suite géométrique telle que $w_{12} = 36$ et $w_{10} = 6$

1) $w_{12} = w_{10}q^2$ donc $q^2 = \frac{w_{12}}{w_{10}} = \frac{36}{6} = 6$ ainsi $q = \sqrt{6}$

   $w_{10} = w_0 q^{10}$ donc $w_0 = \frac{w_{10}}{q^{10}} = \frac{6}{\sqrt{6}^{10}} = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$

2) $w_n = w_0 q^n = \frac{1}{1296}\sqrt{6}^n$

3) $w_0 + \cdots \dots\dots\dots + w_{12} = \frac{1}{1296} \text{x} \frac{\sqrt{6}^{13}-1}{\sqrt{6}-1}$

Exercice 27

1) $u_5 = u_2 \text{x} (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} u_2$

2) $u_5 = \frac{5}{8}$; $u_2 = u_0 (\frac{1}{2})^2 = 5$ donc $u_0 = 20$

Exercice 28

1) $u_{2n} = (2n)^2 = 4n^2 = 4\, u_n$

2) $u_{3n} = (9n)^2 = 9\, n^2 = 9u_n$

Exercice 29

2 +5 + 8 + 11 + ……+ (3n +2) = $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ avec $u_n = 3n + 2$ qui est une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 3 d'où le résultat

Exercice 30

1+2+3+…….+1000 = 1000 $\frac{1+1000}{2}$ = 500500 (somme des 1000 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1)

Exercice 31

Somme des 40 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1

S = $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots.+\frac{1}{2^{39}}=1(\frac{1-(\frac{1}{2})^{40}}{1-\frac{1}{2}})=2-\frac{1}{2^{39}}$

Exercice 32

1.

- $7u_{n+1}=7u_n-2 \Leftrightarrow u_{n+1}=u_n-\frac{2}{7}$ donc suite arithmétique de raison $-\frac{2}{7}$
- $u_5 = u_0+5\text{x}(-\frac{2}{7})$ donc $u_0 = u_5+5\text{x}\frac{2}{7}=2+\frac{10}{7}=\frac{24}{7}$

2. $u_n=\frac{24}{7}-\frac{2n}{7}=\frac{24-2n}{7}$

3. $u_9=\frac{6}{7}$ donc $u_0+\cdots\ldots+u_9=10\text{x}\frac{\frac{24}{7}+\frac{6}{7}}{2}=5\text{x}\frac{30}{7}=\frac{150}{7}$

Exercice 33

1.

- $v_0=u_0-1=5$
- $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}-1=\frac{1}{5}(u_n-1)=\frac{1}{5}v_n$ donc suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme 5

2. $v_n=5\text{x}(\frac{1}{5})^n=\frac{1}{5^{n-1}}$
3. $u_n=\frac{1}{5^{n-1}}+1$
4. S $=u_0+u_1\ldots+u_{19}=v_0+1+v_1+1\ldots\ldots+v_{19}+1=v_0+v_1+\cdots+v_{19}+20$

   Donc S= $5\text{x}\frac{1-\frac{1}{5^{20}}}{1-\frac{1}{5}}+20$

Exercice 34

Soit (u_n) la suite définie par $u_n=3^n+5n-6$

1) $u_0=5$; $u_1=2$: $u_3=36$; $u_4=95$; $u_5=262$ et $u_6=753$
2) Calcule : S $=u_0+u_1\ldots\ldots\ldots\ldots+u_{100}$

$u_n=a_n+b_n=3^n+5n-6$ avec $a_n=3^n$ et $b_n=5n-6$

(a_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1

(b_n) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme -6

donc S= $u_0+u_1\ldots\ldots\ldots\ldots+u_{100}=(a_0+a_1+\cdots+a_{100})+(b_0+b_1\ldots\ldots\ldots\ldots+b_{100})$

Ainsi : S = $1\text{x}\frac{1-3^{101}}{1-3}+101\text{x}\frac{-6+494}{2}$

Exercice 35

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=1+\sqrt{2} \\ u_{n+1}=1+\sqrt{u_n{}^2-2u_n+4} \end{cases}$

3) $u_1=1+\sqrt{5}$; $u_2=1+2\sqrt{2}$ et $u_3=1+\sqrt{11}$
4) On pose $v_n=(u_n-1)^2$

   a)

   - $v_0=2$ premier terme
   - $v_{n+1}=u_n{}^2-2u_n+4=(u_n-1)^2+3=v_n+3$ suite arithmétique de raison 3

b) $v_n = 2+3n$

c) $u_{33} = 1+\sqrt{v_{33}} = 1+\sqrt{101}$

d) $v_6 + v_7 + \cdots + v_{50} = 45 \text{x} \frac{20+152}{2} = 3870$

Exercice 36

- $u_0 + u_1 \dots\dots\dots\dots + u_p = (p+1)\ \frac{-175+35}{2} = -70(p+1) = -2170$ donc $p = 30$
- $u_p = u_{30} = 35 = u_0 + 30\,r$ ainsi : $r = \frac{35-(-175)}{30} = 7$

Exercice 37

1. faire figure
2. $u_1 = A_1A_2 = OA_1 = 1, u_2 = A_2A_3 = OA_2 = \sqrt{2}, u_3 = OA_3 = 2$ et $u_4 = OA_4 = 2\sqrt{2}$
3. $u_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = OA_{n+1} = \sqrt{(OA_n)^2 + (A_nA_{n+1})^2}$ or $OA_n = A_nA_{n+1}$ car triangle isocéle , donc $u_{n+1} = \sqrt{2(A_nA_{n+1})^2} = \sqrt{2(u_n)^2} = \sqrt{2}\,u_n$ on a ainsi une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 1
4. Soit l la longueur de la spirale $A_1A_2 \dots\dots A_{100}$,
   on a l = $u_1 + u_2 \dots\dots\dots\dots + u_{99} = 1\left(\frac{1-(\sqrt{2})^{99}}{1-\sqrt{2}}\right)$

Exercice 38

1. $u_0 = 4\,;\, u_1 = 4 + r$ et $u_2 = 4 + 2r$ or $u_2{}^2 = u_1{}^2 + u_0{}^2$ on obtient :
$(4+2r)^2 = (4+r)^2 + 4^2 \iff 3r^2 + 8r - 16 = 0$ on résout et on obtient $r = \frac{4}{3}$ car $u_0 < u_1 < u_2$

2. $u_0 + \cdots \dots\dots . + u_{29} = 700$

Exercice 39

$a = 3; b = -\frac{3}{2}\ et\ c = -6$

Exercice 40

1- a) $r = 2$ et $u_0 = -1$

b) $u_n = 2n - 1$

2- $v_n = 2^{2n-1}\ et\ v_{n+1} = 2^{2n+1}$. On a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$.

Exercice 41

1-a) $S = 2a - 2X\ et\ P = 2a + X$

b) $P^2 - S^2 = (P-S)(P+S) = 3X(4a - X)$

2- On obtient le système : $\begin{cases} 2a - 2X = 34 \\ 2a + X = \frac{257}{2} \end{cases}$

En résolvant le système on obtient : $a = \frac{97}{2}\ et\ X = \frac{63}{2}$.

SITUATIONX COMPLEXES

Exercice 42

Premier contrat :

On a une suite arithmétique de raison 100 et de premier terme 2000

$u_0 + \cdots \ldots \ldots . + u_{35} = 36\,\frac{2000+5500}{2} = 135000$ francs

Deuxième contrat :

On a une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme 2000

$u_0 + \cdots \ldots \ldots . + u_{35} = 2000\,(\frac{1-(\mathbf{1{,}05})^{36}}{1-\mathbf{1{,}05}}) \approx 191672{,}586$ francs

Le premier contrat est plus avantageux

Exercice 43

le montant à payer chaque année est une suite géométrique de premier terme 600000 et de raison 1,05 donc le montant total à payer pendant les 10 ans est :

$u_0 + \cdots \ldots \ldots . + u_9 = 600000\,(\frac{1-(\mathbf{1{,}05})^{10}}{1-\mathbf{1{,}05}}) \approx 7546735$ francs

9 STATISTIQUE À UNE VARIABLE

Situation d'apprentissage

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de troisième. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où ou quand se déroule la scène ?	La scène se déroule dans une centrale d'achat de café- cacao, pendant la dernière campagne agricole.
Circonstances	Pourquoi les élèves décident de se mettre en groupes pour traiter l'exercice ?	Le gérant de cette centrale négocie un crédit bancaire pour augmenter son capital afin d'attirer plusieurs coopératives, mais la banque fixe deux conditions.
Tâche	Que décides- tu de faire avec les élèves ?	Les élèves décident avec l'aide du professeur d'étudier les paramètres de position et de dispersion d'une série statistique regroupée en classes afin de mieux appréhender les conditions posées par la banque.

Découverte des habiletés

Activité 1

1. 2. 3. 4.

Classe	[9,725; 9,775[	[9,775; 9,800[	[9,800; 9,825[	[9,825; 9,850[	[9,850; 9,900[
Effectif	1	4	4	6	5
Amplitude	0,05	0,025	0,025	0,025	0,05
$\dfrac{\text{Effectif}}{\text{Amplitude}}$	20	160	160	240	100
Centre	9,75	9,7875	9,8125	9,8375	9,875

5.a) L'effectif total est 20

Classe	[9,725; 9,775[	[9,775; 9,800[	[9,800; 9,825[	[9,825; 9,850[	[9,850; 9,900[
Effectif	1	4	4	6	5
Fréquence	0,05	0,2	0,2	0,3	0,25
Fréquence en %	5	20	20	30	25

Exercice de fixation 1

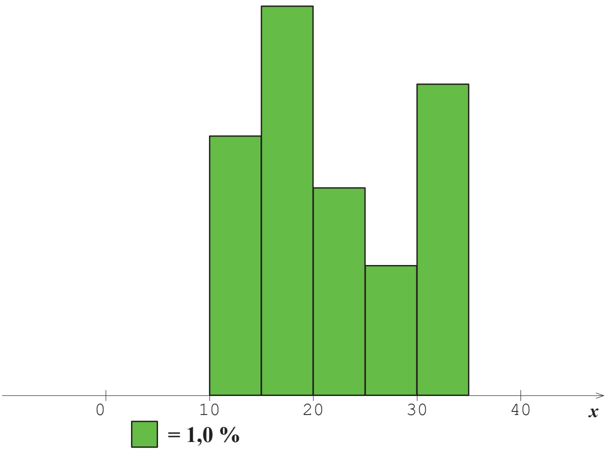
A	B
L'amplitude de la classe $[a;b[$	Le nombre réel c tel que $c = \frac{a+b}{2}$
La densité d'une classe est	Le quotient de l'effectif de cette classe par l'effectif total
Le centre de la classe $[a;b[$ est	Le nombre réel $b - a$
La fréquence d'une classe est	Le quotient de l'effectif de cette classe par l'amplitude de cette classe

Exercice de fixation 2

1. L'amplitude de la classe $[5;8[$ est 3
2. La densité de la classe $[3;5[$ est $\frac{3}{2}$ soit 1,5
3. Le centre de la classe $[8;10]$ est 9
4. La fréquence, en pourcentage de la classe $[0;3[$ est $\frac{2}{15} \times 100$ soit 13,33%

Activité 2

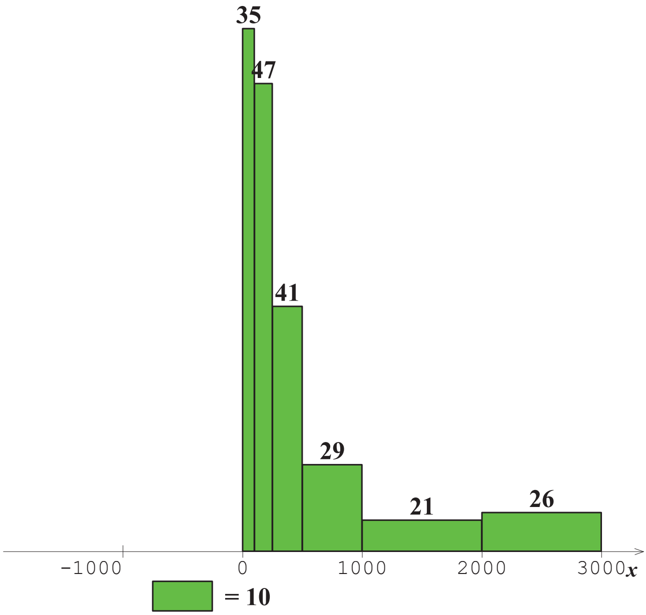
A.



B. 1.

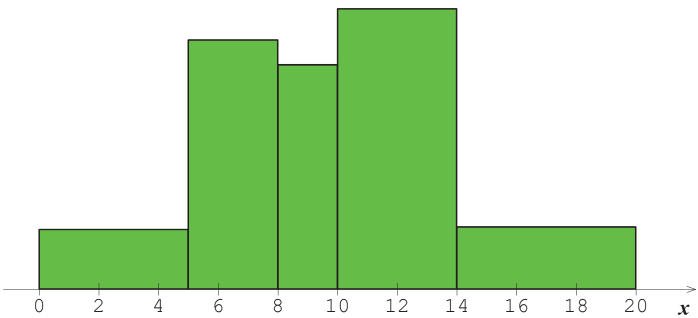
Classe	$[0;100[$	$[100;250[$	$[250;500[$	$[500;1000[$	$[1000;2000[$	$[2000;3000[$
Tarif en milliers de francs CFA	3,5	7,10	10,3	14,60	21	26,5
Amplitude	100	150	250	500	1000	1000
$\frac{\text{Effectif}}{\text{Amplitude}}$	35	47,33	41,2	29,2	21	26,5

2. Construction de l'histogramme

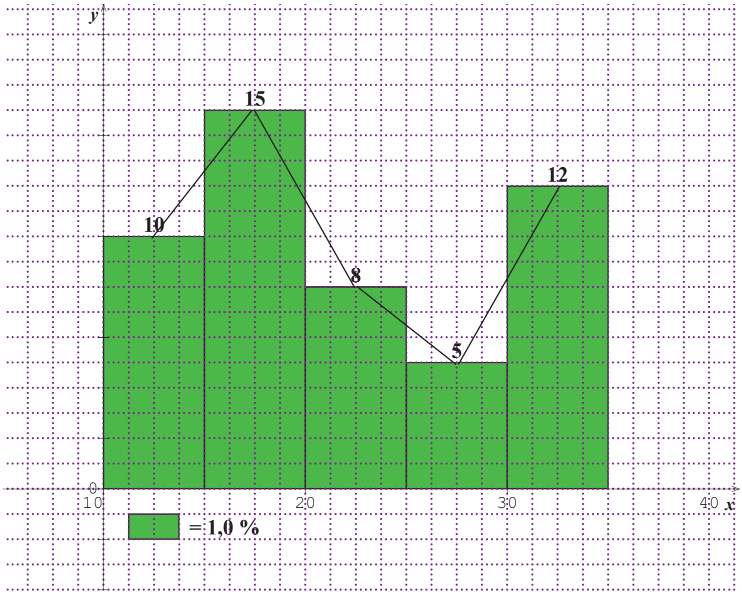


Exercice de fixation 3
1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. Faux

Exercice de fixation 4
Histogramme de la série statistique

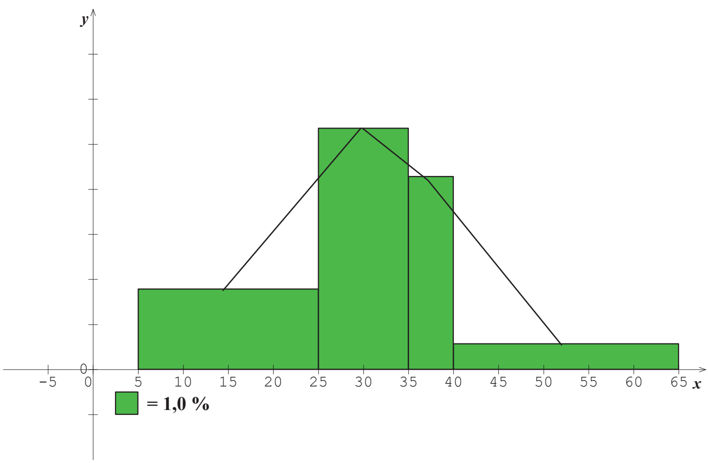


Activité 3



Exercice de fixation 5
Le polygone des effectifs est obtenu en joignant les milieux des bases supérieures des rectangles

Exercice de fixation 6

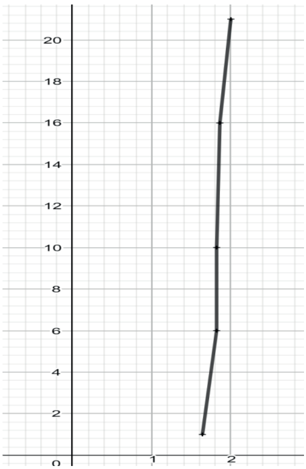


Activité 4

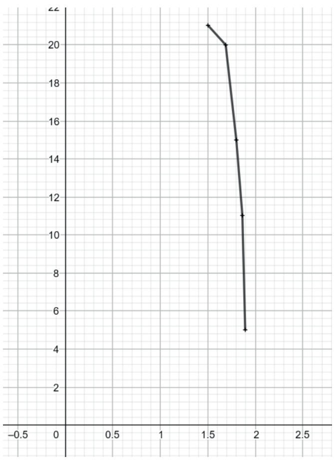
1. Complétons

Classe	[1,5; 1,65[	[1,65; 1,800[	[1,800; 1,825[	[1,825; 1,850[	[1,850; 1,900[
Effectif	1	5	4	6	5
ECC	1	6	10	16	21
ECD	21	20	15	11	5
FCC	0,0476	0,28	0,476	0,76	1
FCD	1	0,952	0,714	0,52	0,238

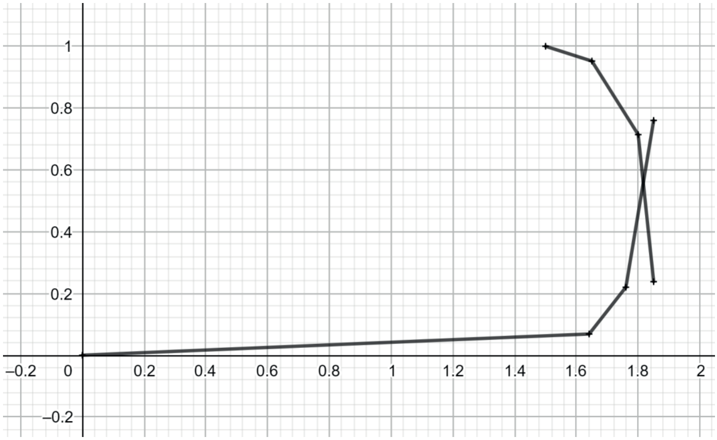
2. a)



b)



4. Construction des polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes

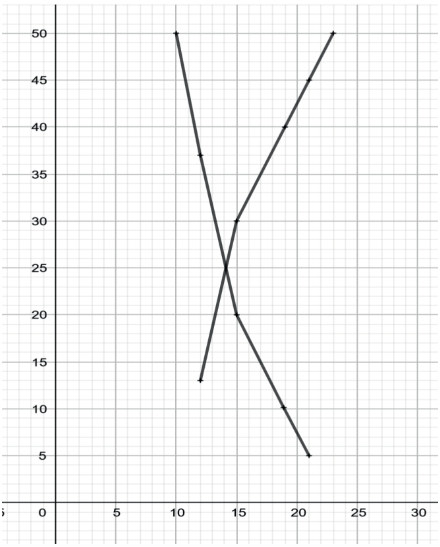


Exercice de fixation 7

Classe	[10; 12[	[12; 15[	[15; 19[	[19; 21[	[21; 23[
Effectif	13	17	10	5	5
ECC	13	30	40	45	50
ECD	50	37	20	10	5

Activité 5

Représentation graphique des fonctions F et de G



Exercice de fixation 8

Classe	[0; 20[	[20; 30[	[30; 35[	[35; 40[	[40; 50[
Effectif	5	7	10	18	10
ECC	5	12	22	40	50

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
Si $x \in]-\infty; 0[$, $F(x) = 0$
Si $x \in [0; 20[$, $F(x) = 5$
Si $x \in [20; 30[$, $F(x) = 12$
Si $x \in [30; 35[$, $F(x) = 22$
Si $x \in [35; 40[$, $F(x) = 40$
Si $x \in [40; 50[$, $F(x) = 50$
Si $x \in [50; +\infty[$, $F(x) = 50$

La courbe cumulative des effectifs est la représentation graphique de F.

Activité 6

1 la classe modale d'une série statistique regroupé en classe de même amplitude est la classe de plus grand effectif.

2.

Classe	[9,725; 9,775[	[9,775; 9,800[	[9,800; 9,825[	[9,825; 9,850[	[9,850; 9,900[
Effectif	1	5	4	6	4
Fréquence	5	25	20	30	20
Amplitude	0,05	0,025	0,025	0,025	0,05
Densité	20	200	160	240	80
$\frac{\text{Densité}}{\text{effectif total}}$	1	10	8	12	4
Centre	9,75	9,7875	9,8125	9,8375	9,875

1. La classe de plus grande densité est [9,825; 9,850[
2. a)
   b) La classe de plus grande densité de fréquence est [9,825; 9,850[
3. a)

Classe	[9,725; 9,775[	[9,775; 9,800[	[9,800; 9,825[	[9,825; 9,850[	[9,850; 9,900[
Effectif (n_i)	1	5	4	6	4
Centre (c_i)	9,75	9,7875	9,8125	9,8375	9,875
$n_i c_i$	9,75	48,9375	39,25	59,025	39,5

la moyenne est $\frac{196,4625}{20} = 9,823\ 125$

b) la moyenne est 9,823 125

Exercice de fixation 9

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. faux ; 6. Faux

Exercice de fixation 10

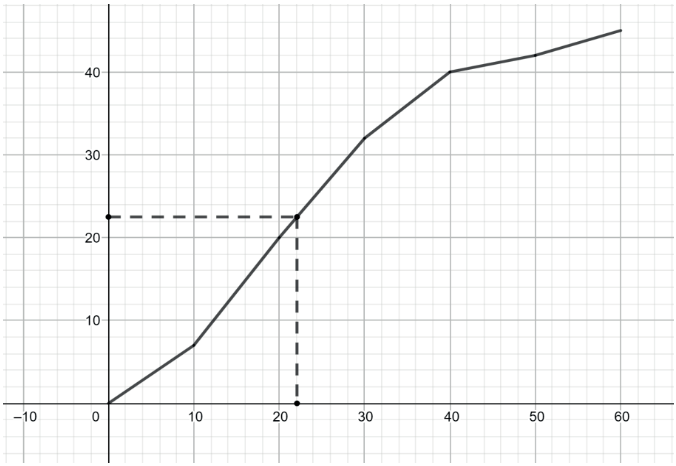
1. La classe modale est $[53;55]$
2. La taille moyenne est $51{,}22$

Activité 7

1. La médiane

Détermination graphique

a)



b) La médiane est $22{,}08$

c) Il faudra faire le partage à $22{,}08$ mn

Détermination algébrique

a) $\frac{45}{2} = 22{,}5$ et $22{,}5 \in [20;30[$

b)

20	$22{,}5$	32
20	m	30

on a ; $\frac{m-20}{22{,}5-20} = \frac{30-20}{32-20}$ donc

$m = 22{,}08$

2.a) $Q_1 = 13{,}2692$

b) $Q_3 = 32{,}1875$

Exercice de fixation 11

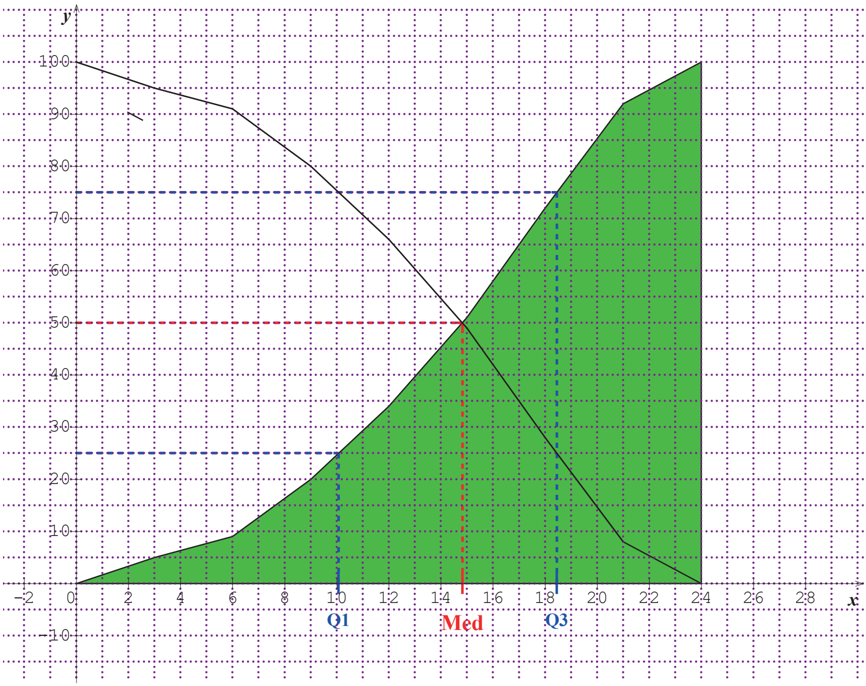
1. $m = 56{,}46$
2. $Q_1 = 28{,}75$ et $Q_3 = 100{,}714$

Activité 8

1.

Tranche horaire (en H)	[0; 3[	[3; 6[	[6; 9[	[9; 12[	[12; 15[	[15; 18[	[18; 21[	[21; 24[
Fréquence (%)	5	3,9	10,8	13,6	17,1	21,4	19,8	8,4
FCC (%)	5	8,9	19,7	33,3	50,4	71,8	91.6	100
FCD (%)	100	95	91,1	80,3	66,7	49,6	28,2	8,4

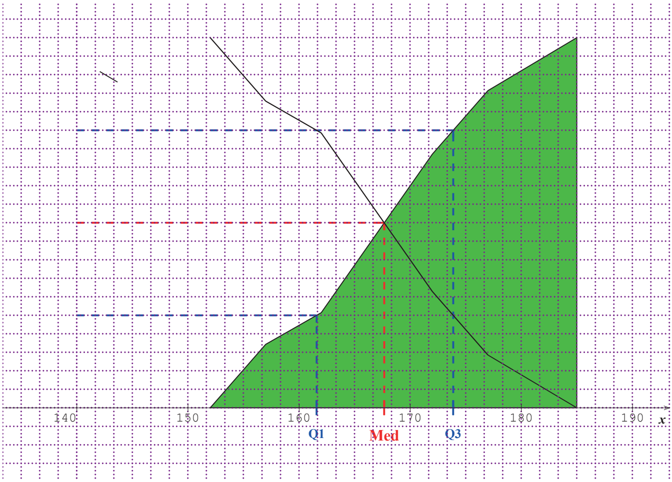
2.a) ; b)



c) 14,8

3. a) 14,82
   b) 10,07
   c) 18,45
4. a) L'intervalle qui contient la médiane est [12; 15[
   b) la médiane est égale à 14,82
5.a) L'intervalle qui contient Q_1 est [9; 12[
   b) $Q_1 = 10{,}07$
6.a) L'intervalle qui contient Q_3 est [18; 45[
   b) $Q_3 = 18{,}45$

Exercice de fixation 12



$m = 167{,}66$; $Q_1 = 161{,}58$; $Q_3 = 173{,}87$

Activité 9

1.a) 13,2692

b) $Q_3 - Q_1 = 32{,}1875 - 13{,}2692 = 18{,}9183$

b) l'écart correspond à l'étendue de la distribution une fois que l'on a retiré les 25% des valeurs les plus faibles et les 25% des valeurs les plus fortes.

2.a)

Classe	$[0;10[$	$[10;20[$	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[50;60[$
Effectif (n_i)	7	13	12	8	2	3
Centre (c_i)	5	15	25	35	45	55
$n_i c_i$	9,75	48,9375	39,25	59,025	39,5	$n_i x_i$

$e_m = 10{,}822$

b) e_m mesure les fluctuations de la série par rapport à la moyenne.

c) la classe la plus régulière est celle dont l'écart absolue moyen est plus petit.

Exercice de fixation 13

1.a) $Q_1 = 46{,}25$ et $Q_3 = 74{,}31$

b) $Q_3 - Q_1 = 74{,}31 - 46{,}25 = 28{,}06$

l'écart correspond à l'étendue de la distribution une fois que l'on a retiré les 25% des valeurs les plus faibles et les 25% des valeurs les plus fortes.

2. $e_m = 12{,}672$

L'écart entre la masse des élèves et la moyenne de la masse des élèves est de 12,672

Activité 10

1.a) $V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\,(\bar{x} - x_i)^2}{N} = \frac{1}{N}\ (\sum_{i=1}^{p} n_i\ {x_i}^2) - (\bar{x})^2$

b) $V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\,(\bar{x} - c_i)^2}{N} = \frac{1}{N}\ (\sum_{i=1}^{p} n_i\ {c_i}^2) - (\bar{x})^2$

c) $V = 233{,}921$

2. a)

b) $V = 233{,}921$

3.a) $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{233{,}921} = 15{,}2945$

b) l'écart type est la concentration des valeurs du caractère autour de la moyenne.

Exercice de fixation 14

1. $V = 124{,}476$

3.a) $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{124{,}476} = 11{,}1569$

b) le temps mis par les élèves est étalé de part et d'autre du temps moyen.

DES QUESTIONS D'ÉVALUATIONS

Question 1 : Comment déterminer la classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes ?

Exercice non corrigé

On a le tableau de calculs suivant

Classe	[9,7; 9,8[	[9,8; 9,9[	[9,9; 10,2[	[10,2; 10,3[	[10,3; 10,7[
Effectif	3	7	9	5	6
Amplitude	0,1	0,1	0,3	0,1	0,4
Densité	30	70	30	50	15

La plus grande densité est 70, par conséquent la classe modale de cette série statistique est [9,8; 9,9[

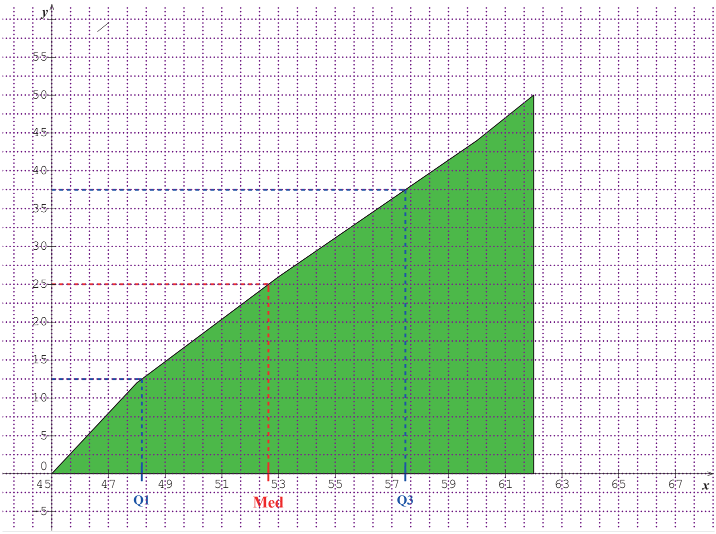
Question 2 : Comment déterminer graphiquement les quartiles d'une série statistique regroupée en classes ?

Exercice non corrigé

Dressons le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série statistique

Classe	[45; 48[	[48; 53[	[53; 60[	[60; 62[
Effectif	12	14	18	6
ECC	12	26	44	50

Construisons le polygone des effectifs cumulés croissants



On a :

$\frac{N}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$ à l'aide du graphique on obtient donc $Q_1 = 48{,}17$

$\frac{3N}{4} = \frac{3}{4} \times 50 = 37{,}5$ à l'aide du graphique on obtient donc $Q_3 = 57{,}47$

Question 3 : Comment calculer l'écart type d'une série statistique regroupée en classes ?

Exercice non corrigé

Calculons la moyenne $\bar{x}$ de cette série statistique

Classe	[80; 100[	[100; 150[	[150; 220[	[220; 300[	[300; 400[
Effectif (n_i)	52	70	38	25	5
Centre (c_i)	90	125	185	260	350
$n_i c_i$	4 680	8 750	7 030	6 500	1 750

$\bar{x} = \frac{1}{190}(4\,680 + 8\,750 + 7\,030 + 6\,500 + 1\,750) = 151{,}105$

Ensuite on a le tableau suivant

Classe	[80; 100[	[100; 150[	[150; 220[	[220; 300[	[300; 400[
Effectif (n_i)	52	70	38	25	5
Centre (c_i)	90	125	185	260	350
$n_i {c_i}^2$	421 000	1 093 750	1 300 500	1 690 000	612 500

La variance de cette série statistique est :

$V = \frac{1}{190}(421\,000 + 1\,093\,750 + 1\,300\,500 + 1\,690\,000 + 612\,500) - (151{,}105)^2$

$V = 4104{,}121$

l'écart type de cette série statistique est :

$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{4656{,}083} = 64{,}06$

MES SÉANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Vrai

Exercice 2

On obtient le tableau suivant

Classe	[2; 5[	[5; 9[	[9; 11[	[11; 15[	[15; 18[
Effectif	7	13	12	8	2
Centre	3,5	7	10	13	16,5
Amplitude	3	4	2	4	3
Densité	2,3	3,25	6	2	0,6

Exercice 3

On obtient le tableau suivant

Taille	[155; 160[	[160; 165[	[165; 170[	[170; 175[
Effectif	12	30	48	61
Fréquence	0,048	0,12	0,192	0,244
Fréquence en pourcentage	4,8	12	19,2	24,4

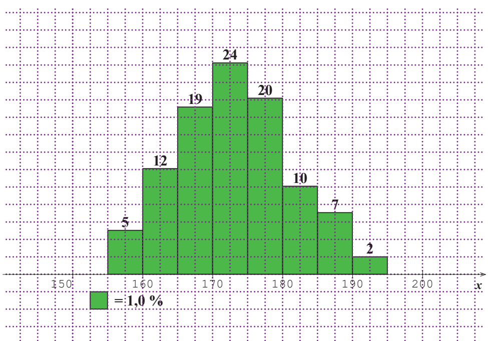
Taille	[157; 180[	[180; 185[	[185; 190[	[190; 195[
Effectif	50	26	17	6
Fréquence	0,2	0,104	0,068	0,024
Fréquence en pourcentage	20	10,4	6,8	2,4

Exercice 4

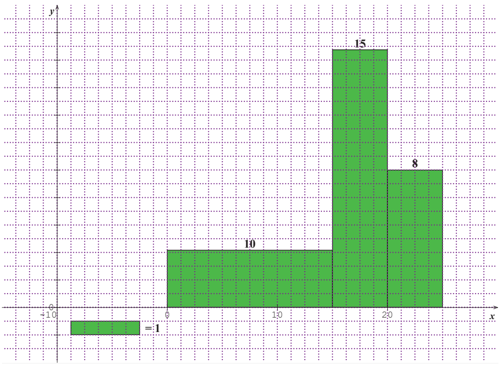
1.C ; 2.A ; 3. C ; 4. A

Exercice 5

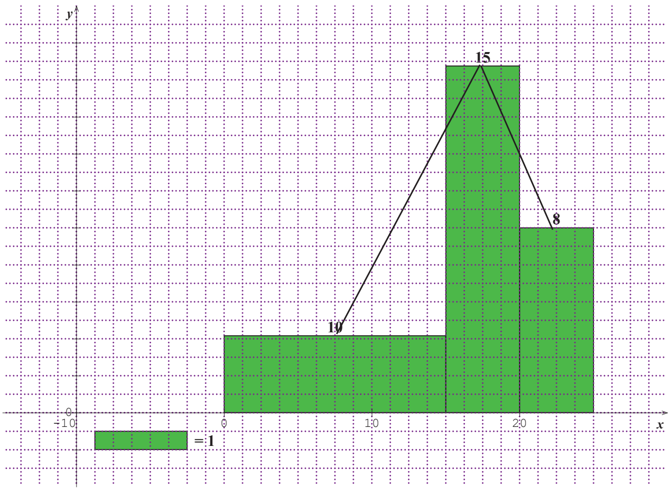
Histogramme des fréquences



Exercice 6
histogramme des effectifs

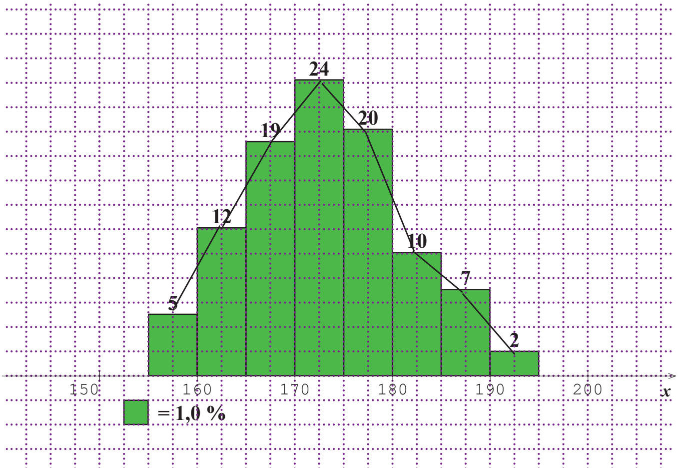


Exercice 7
Polygone des effectifs



Exercice 8

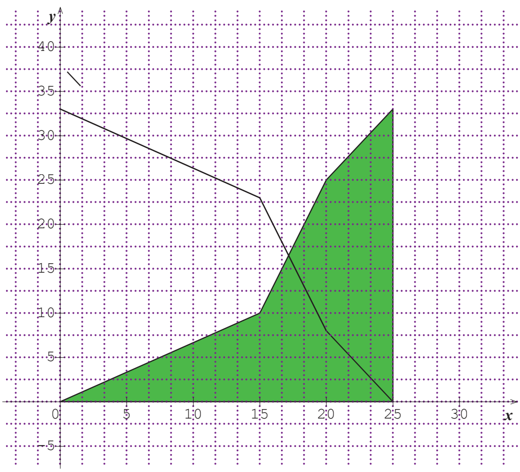
Polygone des fréquences



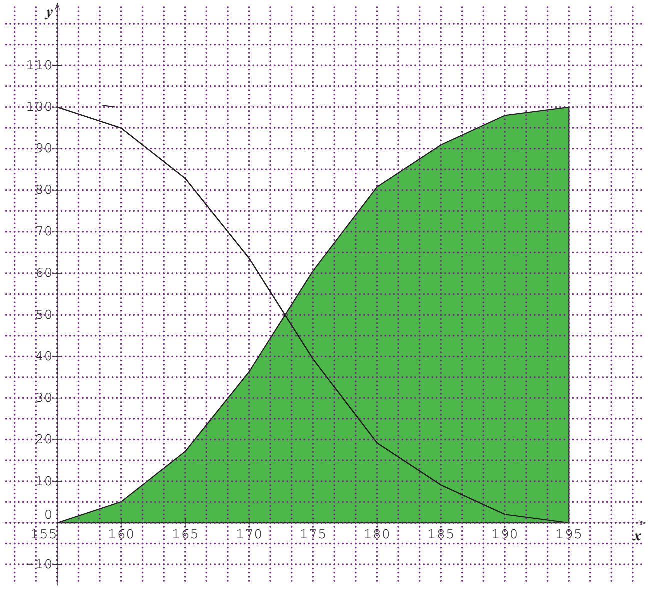
Exercice 9

On complète le tableau ci-dessus, en créant les tableaux des ECC et de ECD.

Durée du trajet en minutes	$[0;15[$	$[15;20[$	$[20;25[$
Effectifs	10	15	8
Effectifs cumulés croissants (ECC)	10	25	33
Effectifs cumulés décroissants (ECD)	33	23	8



Exercice 10



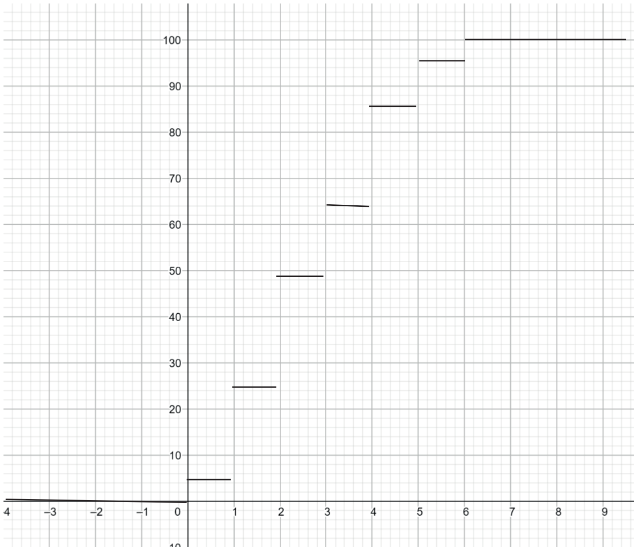
Exercice 11

1.Vrai ; 2. Faux ; 3.Vrai ; 4. Faux

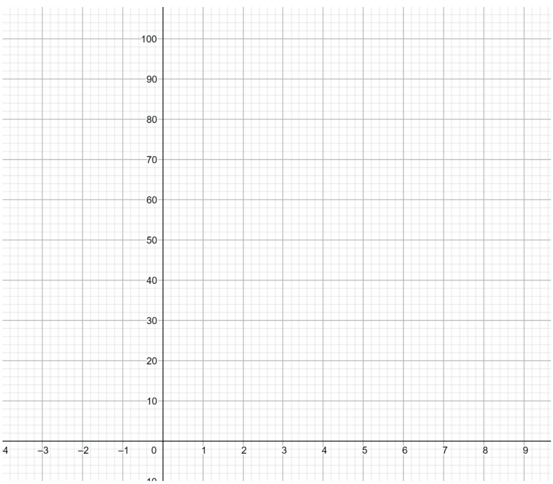
Exercice 12

1. La courbe cumulative des effectifs de cette série statistique est la représentation graphique de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

   Si $x \in]-\infty; 0[$, $F(x) = 0$
   Si $x \in [0; 1[$, $F(x) = 5$
   Si $x \in [1; 2[$, $F(x) = 25$
   Si $x \in [2; 3[$, $F(x) = 49$
   Si $x \in [3; 4[$, $F(x) = 64$
   Si $x \in [4; 5[$, $F(x) = 84$
   Si $x \in [5; 6[$, $F(x) = 94$
   Si $x \in [6; +\infty[$, $F(x) = 100$



2. La courbe cumulative des fréquences de cette série statistique est la représentation graphique de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :
   Si $x \in]-\infty; 0[$, $G(x) = 0$
   Si $x \in [0; 1[$, $G(x) = 0{,}05$
   Si $x \in [1; 2[$, $G(x) = 0{,}25$
   Si $x \in [2; 3[$, $G(x) = 0{,}49$
   Si $x \in [3; 4[$, $G(x) = 0{,}64$
   Si $x \in [4; 5[$, $G(x) = 0{,}84$
   Si $x \in [5; 6[$, $G(x) = 0{,}94$
   Si $x \in [6; +\infty[$, $G(x) = 1$



Exercice 13

1.C ; 2.B ; 3. A ; 4. B ; 5. B ; 6. C

Exercice 14

toutes les classes ont la même amplitude donc la classe modale est la classe qui a la plus grande fréquence. C'est donc $[170; 175[$

Exercice 15

On obtient le tableau suivant

Durée du trajet	$[0; 15[$	$[15; 20[$	$[20; 25[$
Effectif	10	15	8
Amplitude	15	5	5
Centre de la classe	7,5	17,5	22,5
Densité	0,6	3	1,6

3 est la densité la plus grande, la classe modale est donc $[15; 20[$

Exercice 16

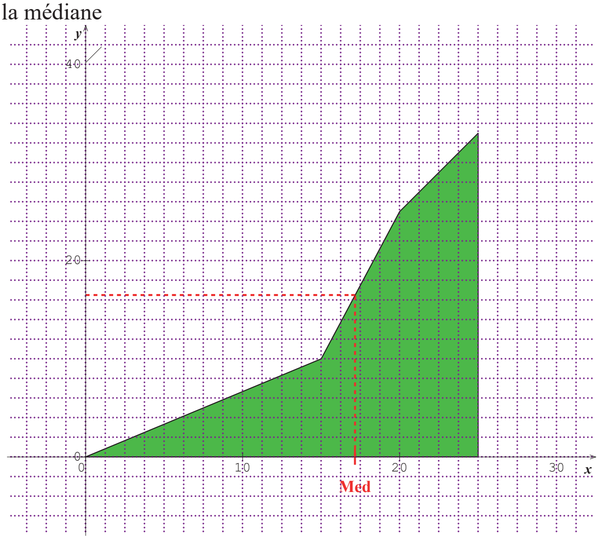
La durée moyenne du trajet des élèves est égale à : $\frac{10x7{,}5+15x17{,}5+8x22{,}5}{33} = \frac{65}{6}$ soit environ 11 minutes

Exercice 17

La moyenne est 173,05

Exercice 18

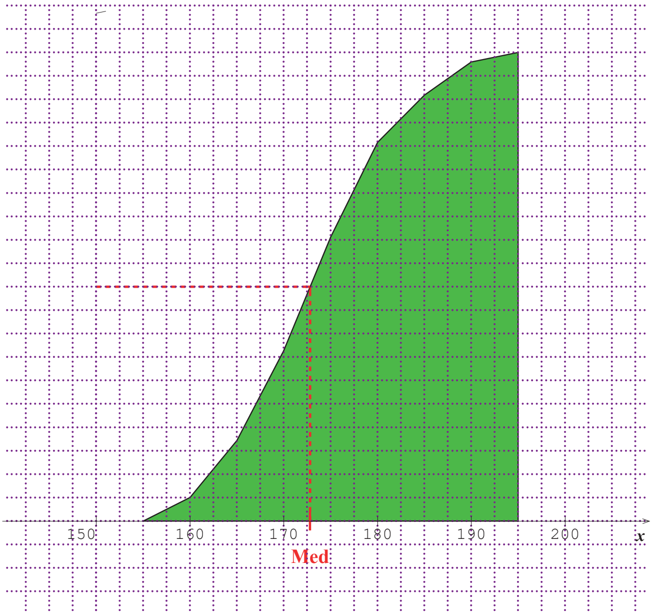
1. la médiane



À l'aide du graphique la médiane semble être égale à 17,16

2. Par le calcul, la médiane de cette série est égale à 17,16
3. il y'a au moins la moitié des élèves qui ont une durée de trajet de 17,16 mn

Exercice 19



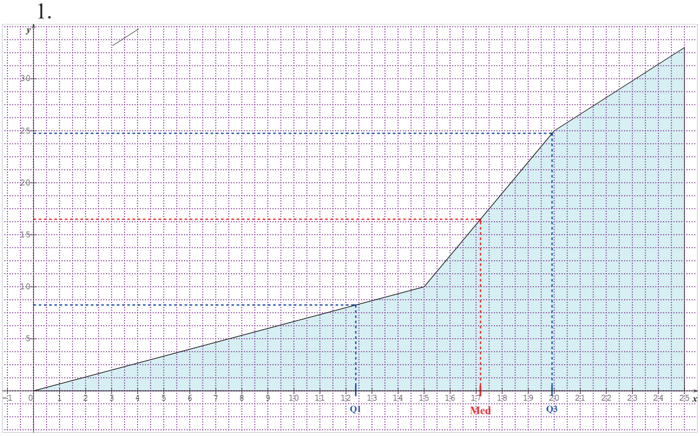
2. La médiane est 172, 81
3. Il y'a au moins la moitié des élèves qui ont une taille inférieure ou égale à 172,81cm

Exercice 20

1.Vrai ; 2. Vrai ; 3.Vrai ; 4. Vrai

Exercice 21

1.



Graphiquement, le premier quartile est environ 12,4. le troisième quartile est environ 19,91.

2 . 3. Vérifications à l'aide du calcul et interprétation.

On complète le tableau en y insérant la ligne des ECC.

Durée du trajet en minutes	$[0;15[$	$[15;20[$	$[20;25[$
Effectifs	10	15	8
ECC	10	25	33

On détermine le premier quartile q_1 par la méthode d'interpolation linéaire :
D'abord q_1 est la valeur qui est telle que 25% des valeurs soient inférieures ou égales à q_1 et 75% des valeurs soient supérieures ou égales à q_1.
Donc q_1 est à chercher dans la classe $[0;15[$. On obtient le tableau suivant :

0	q_1	15
0	8,25	10

Soit donc : $\frac{10-0}{15-0} = \frac{15-q_1}{10-8{,}25}$. Ce qui donne $q_1 = 12{,}375$ soit environ 12,4

On détermine le troisième quartile q_3 par la méthode d'interpolation linéaire :
D'abord q_3 est la valeur qui est telle que 75% des valeurs soient inférieures ou égales à q_3 et 25% des valeurs soient supérieures ou égales à q_3.
Donc q_3 est à chercher dans la classe $[0;15[$. On obtient le tableau suivant :

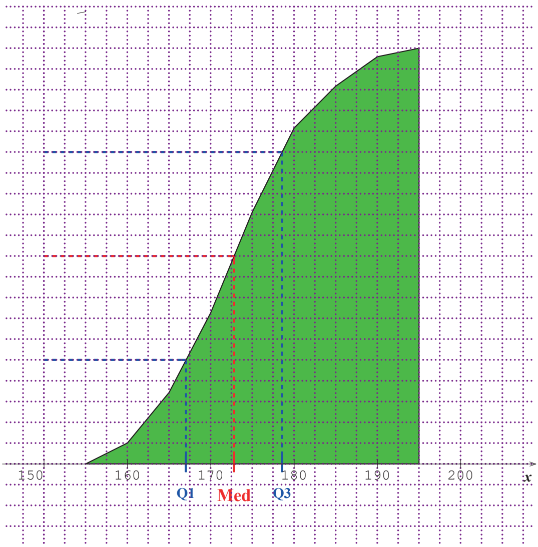
20	q_3	25
25	24,75	33

$Q_3 = 19{,}91$

4. $Q_3 - Q_1 = 19{,}91 - 12{,}37 = 7{,}54$

Exercice 22

1.



$Q_1 = 167{,}039$ et $Q_3 = 178{,}56$

2. $Q_1 = 167{,}039$ et $Q_3 = 178{,}56$
3. Interprétation

4. $Q_3 - Q_1 = 178{,}56 - 167{,}039 = 11{,}521$

Exercice 23

1.a) $e_m = 1{,}49$

b) $e_A = 2{,}46$

2. $e_A > e_m$ donc c'est Masse qui est la plus régulière que Amine

Exercice 24

1. $V = 32{,}94$

2.a) $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{32{,}94} = 5{,}74$

b) le temps mis par les élèves n'est très éloigné du temps moyen.

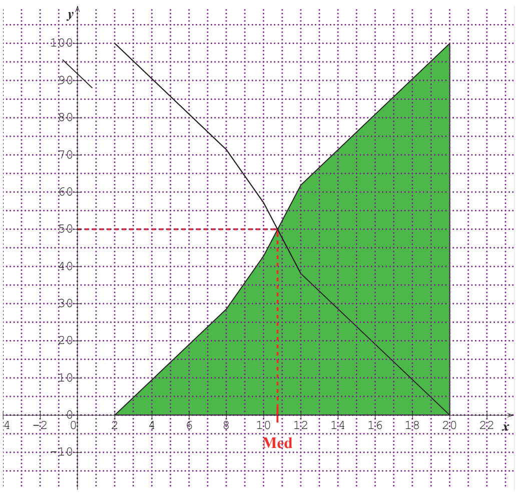
Exercice de renforcement / d'approfondissement

Exercice 25

1.Faux ; 2. Vrai ; 3.Faux ; 4. Faux ; 5.Faux ; 6. Faux ; 7.Faux ; 8. Vrai ; 9.Faux ; 10. Vrai

Exercice 26

1. la classe modale est : $[10; 12[$
2. La moyenne est : 10,90
3. Polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes



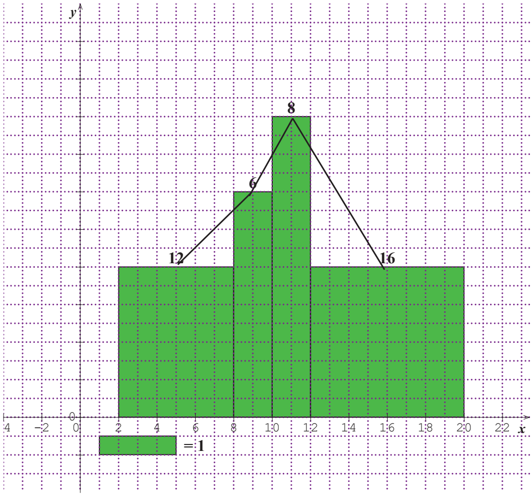
4.a) Graphiquement la médiane est 10,8

b) Algébriquement la médiane vaut 10,75

c) Interprétation

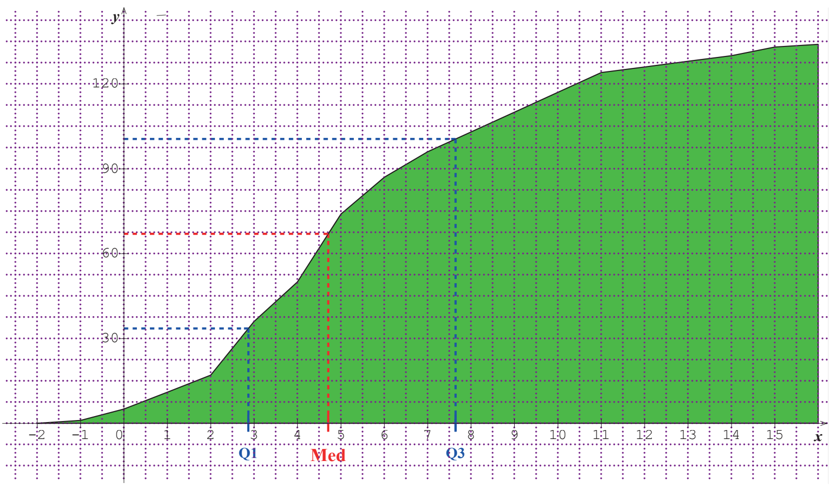
5. $Q_1 = 7{,}25$ et $Q_3 = 14{,}75$
6. a) histogramme

b) polygone des effectifs



Exercice 27

1. a) Polygone des effectifs cumulés croissants



b) la médiane vaut : 4,7

$Q_1 = 2{,}86$ et $Q_3 = 7{,}64$

c) $Q_3 - Q_1 = 7{,}64 - 2{,}86 = 4{,}78$

Interprétation :

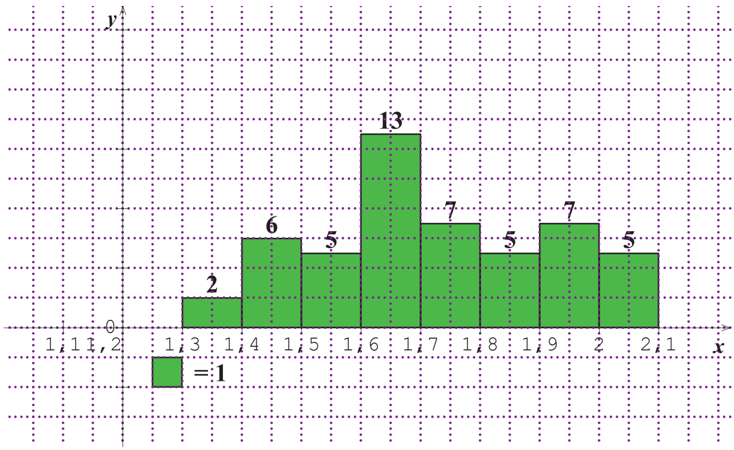
2. La moyenne vaut : 5,44

3. la variance vaut : 12,81

L'écart type vaut : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{12{,}81} = 3{,}58$

Exercice 28

1. La moyenne est égale à : 1,72
2. Histogramme

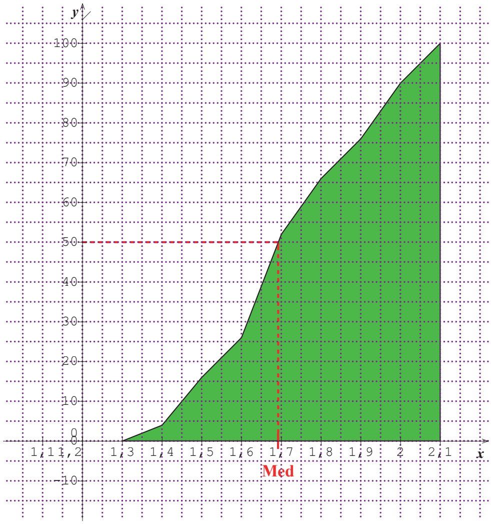


3.a) tableau des fréquences en pourcentage et des fréquences cumulées en pourcentage

Glycémie	Effectifs	Fréquences en %	FCC (en %)
[1,3; 1,4[	2	4	4
[1,4; 1,5[	6	12	16
[1,5; 1,6[	5	10	26
[1,6; 1,7[	13	26	52
[1,7; 1,8[	7	14	66
[1,8; 1,9[	5	10	76
[1,9; 2[	7	14	90
[2; 2,1[	5	10	100

b) la classe médiane est : [1,6; 1,7[

c) Polygone des fréquences cumulées croissantes



d) la médiane est 1,69

Exercice 29

1. a) La moyenne $\bar{x} = 70$

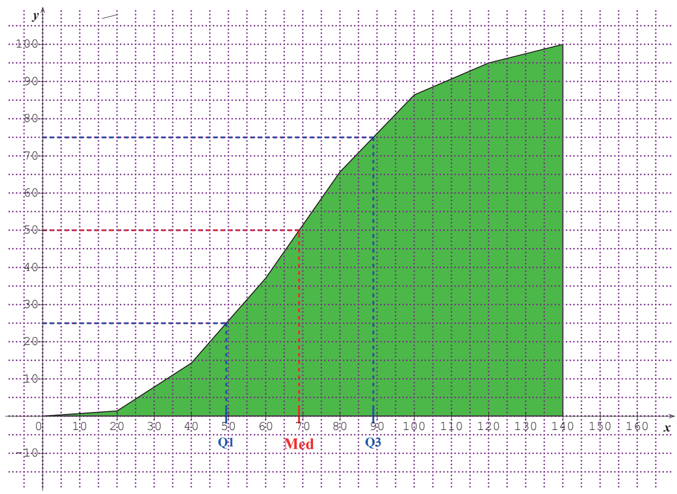
   b) L'écart type est $s = 27{,}39$

   c) Interprétation

   l'intervention de moussa sur un téléphone dur en moyenne 70

   Cet écart type est relativement grand. Cela signifie que les temps d'intervention ne sont pas resserrées autour de la moyenne. Le temps d'intervention n'est donc pas homogène.

2. Polygone des fréquences cumulées croissantes



3. a) $\bar{x} - s = 70 - 27{,}39 = 42{,}61$ et $\bar{x} + s = 70 + 27{,}39 = 97{,}39$

On a donc l'intervalle $[42{,}61\ ;97{,}39\ ]$ on peut donc estimer l'effectif à 101

b) $\bar{x} - 2s = 70 - 54{,}78 = 15{,}22$ et $\bar{x} + 2s = 70 + 54{,}78 = 124{,}78$

On a donc l'intervalle $[15{,}22\ \ ;124{,}78\ ]$ on peut donc estimer l'effectif à 140

Exercice 30

A partir de l'histogramme on a le tableau suivant

Classe	$[45;50[$	$[50;55[$	$[55;60[$	$[60;65[$	$[65;70[$	$[70;75[$
Effectif	4	7	8	5	11	2
ECC	4	11	19	24	35	37

1. On a : $\frac{37}{2} = 18{,}5$ donc la classe médiane est $[55\ ;60\ ]$

la classe de Q_1 est $[50\ ;55\ ]$

la classe de Q_3 est $[65\ ;70\ ]$

2. La médiane est égale à $59{,}66$; $Q_1 = 53{,}75$ et $Q_3 = 66{,}70$

Exercice 31

1. Construction du polygone des effectifs de la série (voir figure dans le manuel)
2. A partir de l'histogramme on a le tableau suivant

Classe	$[11;17[$	$[17;19[$	$[19;21[$	$[21;23[$	$[23;25[$	$[25;35[$
Effectif	15	25	30	25	10	5
ECC	15	40	70	97	107	112

3.a) On a : $\frac{112}{2} = 56$ donc la classe médiane est $[19;21[$

On a : $\frac{112}{4} = 28$ donc la classe de Q_1 est $[17;19[$

On a : $\frac{3}{4} \times 112 = 84$ donc la classe de Q_3 est $[21\ ;23\ ]$

b) $21 < Q_3 < 23$ et $17 < Q_1 < 19$ donc $-19 < -Q_1 < -17$

par suite $2 < Q_3 - Q_1 < 6$

Interprétation

Exercice 32

1. C'est Soutcho qui a fait une représentation correcte
2. La classe modale de cette série statistique est $[5;6[$

3.a) On a $\frac{31}{2} = 15{,}5$ donc la classe médiane est $[19;21[$

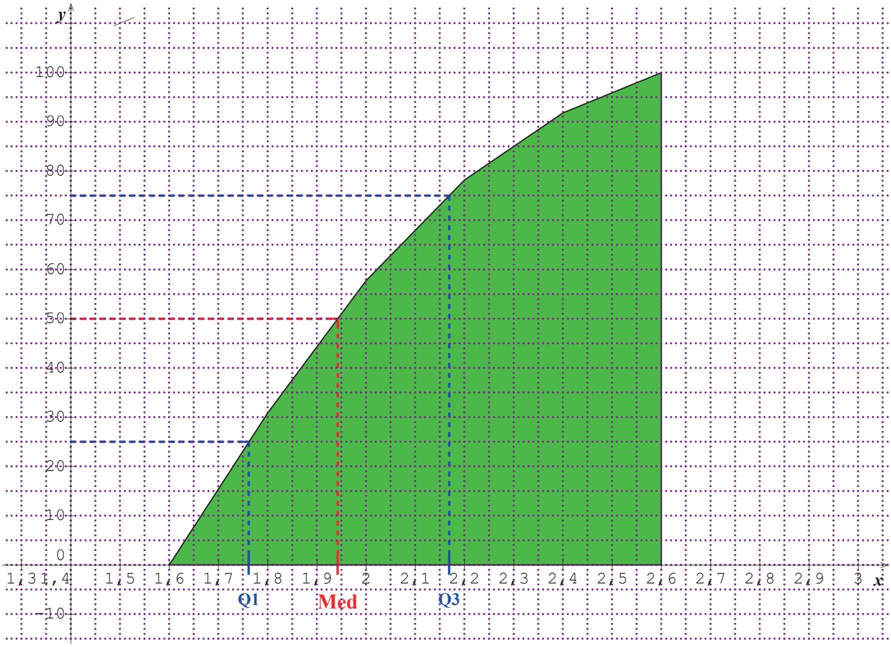
b) la médiane est donc $5{,}21$

4.a) la moyenne est : 5,08

b) l'écart type est : 2,34

Exercice 33

1. Polygone des fréquences cumulées croissantes



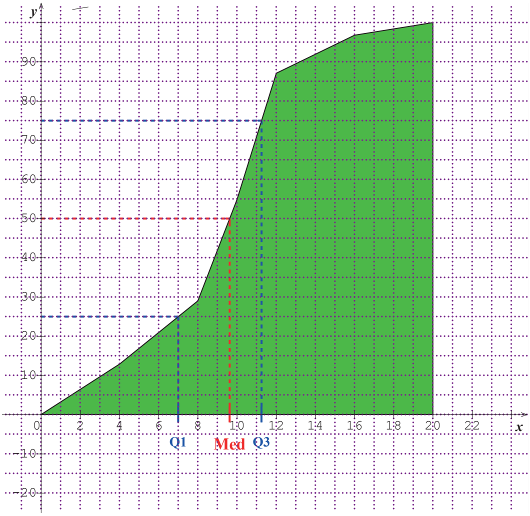
2. Par lecture graphique, il y'a environ 68 % de personnes ayant un taux anormal

Exercice 34

1. la population étudiée : les élèves d'une classe de première
   le caractère étudié : les notes
   le caractère est quantitatif
2. On obtient le tableau suivant

Valeur	[0; 4[	[4; 8[	[8; 10[	[10; 12[	[12; 16[	[16; 20[
Effectif	4	5	8	10	3	1
Fréquences	0,12	0,16	0,25	0,32	0,09	0,03
FCC	0,12	0,28	0,53	0,85	0,97	1

3. La classe modale de cette série statistique est [10; 11[
4. La moyenne est : 9,03
5. L'écart type est : 3,75
6. a) Polygone des fréquences cumulées croissantes



b) La médiane est égale à 9,62 ; $Q_1 = 7$ et $Q_3 = 11{,}25$

c) $Q_3 - Q_1 = 11{,}25 - 7 = 4{,}25$

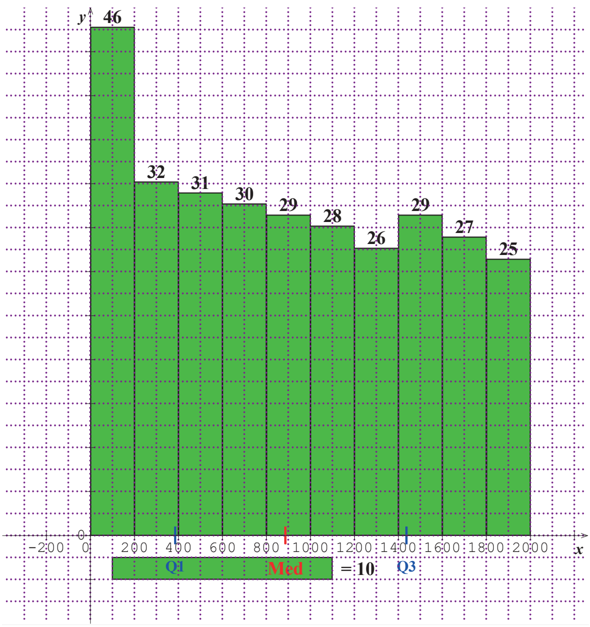
d)) $\bar{x} - s = 9{,}03 - 3{,}75 = 5{,}28$ et $\bar{x} + s = 9{,}03 + 3{,}75 = 12{,}72$

On a donc l'intervalle $[5{,}28\ ; 12{,}72]$ on peut donc estimer à 85%

Exercice 35

1.

2.a) Histogramme des effectifs



b)

Valeur	1 à 200	201 à 400	4001 à 600	601 à 800	801 à 1000
Effectif	46	32	31	30	29
Fréquences	15,18	10,56	10,23	9,9	9,6
FCC	15,18	25,74	35,97	45,87	55,47

Valeur	1001 à 1200	1201 à 1400	1401 à 1600	1601 à 1800	1801 à 2000
Effectif	28	26	29	27	25
Fréquences	9,3	8,6	9,5	8,9	8,23
FCC	64,77	73,37	82,87	91,77	100

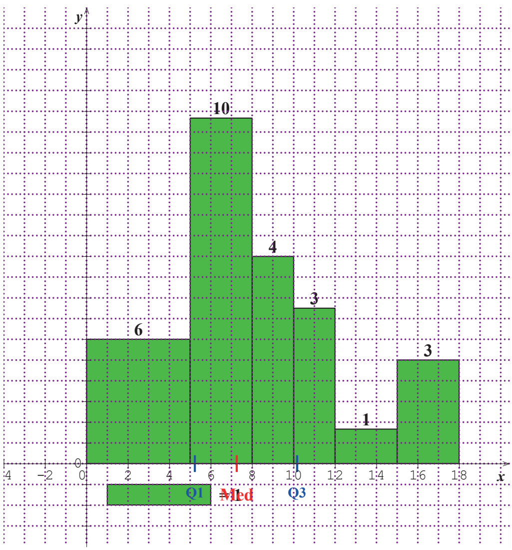
c) La médiane est entre 801 à 1000 donc on a au moins 50 % des nombres premiers qui sont inférieur à 1000.

Exercice 36

1.

Classe	$[0; 5[$	$[5; 8[$	$[8; 10[$	$[10; 12[$	$[12; 15[$	$[15; 18[$
ECC	6	16	20	23	24	27
Effectifs	6	10	4	3	1	3

2. histogramme de la série statistique



3.a) le nombre d'élèves qui ont eu plus de 10 sur 20 est : 7

b) le nombre d'élèves qui ont eu moins de 08 sur 20 est :16

4. La moyenne de la classe est $\bar{x} = 7{,}85$ or $7{,}85 < 10$ donc le devoir n'est pas réussi

5. $Q_1 \approx 5$ et $Q_3 \approx 10$ donc $Q_3 - Q_1 = 10 - 5 = 5$

6. $V = 17{,}86$

2.a) $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{17{,}86} = 4{,}22$

Cet écart type est relativement grand. Cela signifie que les notes ne sont pas resserrées autour de la moyenne. Le niveau de la classe à ce devoir n'est donc pas homogène.

Exercice 37

1- D'après la formule de Koenig, on a : $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$.

Donc $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = N(V(X) + \bar{x}^2)$.

- Pour la première série d'observation, on a : V(X) = 6 et $\bar{x}$=5
  donc $\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 7(6+5^2) = 217$.
- Pour la deuxième série d'observation, on a : V(X)= 8 et $\bar{x}$=6
  donc $\sum_{i=8}^{20} x_i^2 = 13(8+6^2) = 512$.

2- A partir de la formule $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, on déduit que :$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + N(\bar{x}^2 - V(X))}{2\bar{x}}$

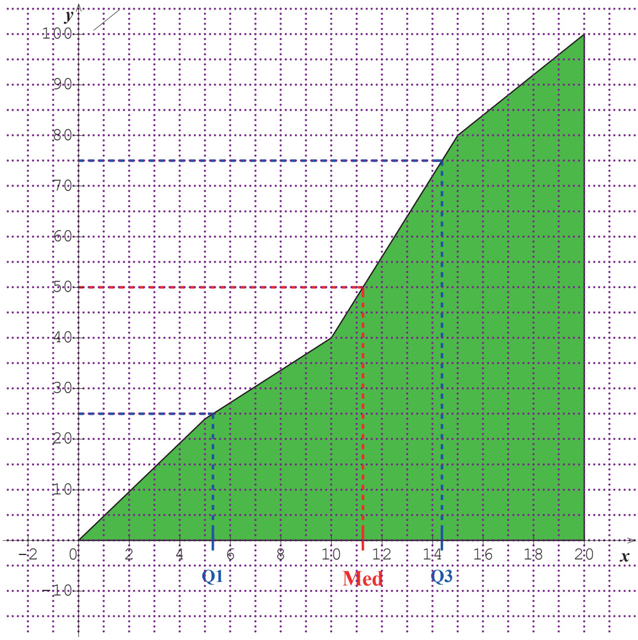
- Pour la première série d'observation on obtient $\sum_{i=1}^{7} x_i = 35$.
- Pour la deuxième série d'observation on obtient $\sum_{i=8}^{20} x_i = 78$.
  Ainsi $\bar{X} = \frac{35+78}{20} = \frac{113}{20}$

3- a) $V(X) = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{572+217}{20} - (\frac{113}{20})^2 = \frac{3011}{400}$

b) $\sigma = \sqrt{V(x)} \approx 2{,}74$

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 38



La moyenne est : 10,3

La médiane est : 11,25

$Q_1 = 5{,}31$ et $Q_3 = 14{,}37$

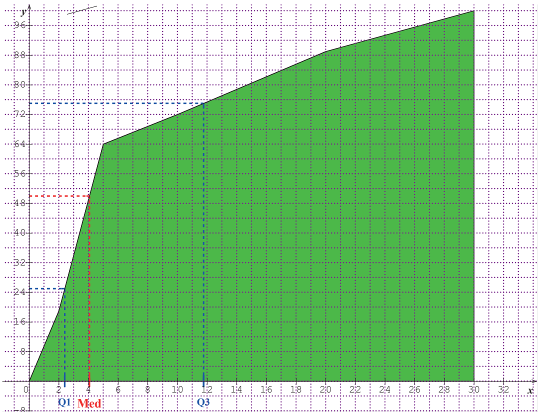
En interprétant des résultats nous avons :

la moyenne est supérieur à 10 , la note médiane est supérieure ou égale à 11

et que 50 % des élèves ont des notes comprises entre 5 et 14.

Les élèves ayant obtenu au moins la note de 10 seront récompensés.

Exercice 39



On a :

La moyenne est : 7,66

Interprétation : le temps d'attente est en moyenne de 7,66 mn donc plus de 5 mn

La médiane est : 4,02

Interprétation : dans plus de 50 % des cas, on attendra 4,02 mn donc moins de 5mn

C'est donc le slogan 2 que le directeur doit choisir

Exercice 40

Diamètre	Effectif	Effectifs cumulés croissants
[24,2; 24,4[	5	5
[24,4 ; 24,6[	13	18
[24,6; 24,8[	24	42
[24,8; 25[	19	61
[25; 25,2[	14	75
[25,2; 25,4[	10	85
[25,4; 25,6[	8	93
[25,6; 25,8[	5	98
[25,8 ; 26[	2	100

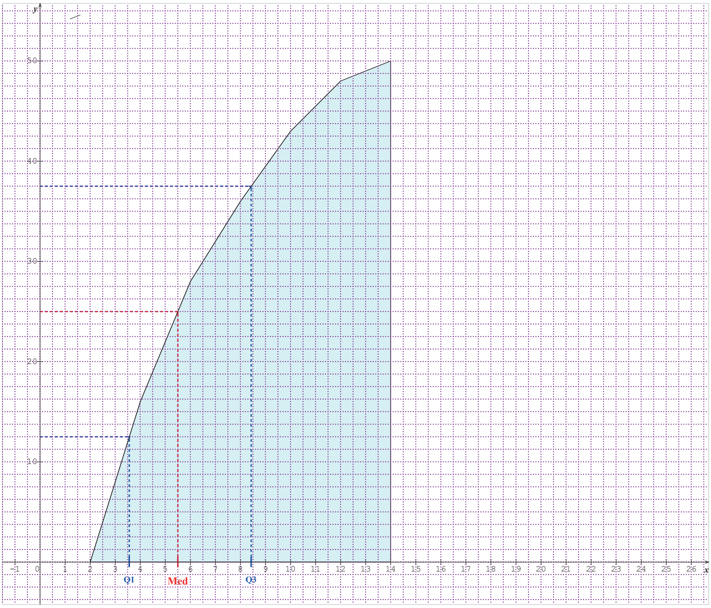
1) Le diamètre moyen de cette production est $\bar{X} = 24{,}946\ mm$. L'écart-type est $\sigma = 0{,}386$mm.

2) On a bien $24{,}9 < \bar{X} < 25{,}1$ et $\sigma < 0{,}4$. Ensuite $\bar{X} - 2\sigma = 24{,}174$ et $\bar{X} + 2\sigma = 24{,}718$.

L'intervalle $[\bar{X} - 2\sigma; \bar{X} + 2\sigma]$ est donc $[24{,}174; 24{,}718]$. Il n'y a que 42% de l'effectif qui appartient à l'intervalle $[\bar{X} - 2\sigma; \bar{X} + 2\sigma]$.

Sur les trois conditions imposées, deux seulement sont satisfaites. Donc cette production n'est pas bonne.

Exercice 41



Le tonnage moyen est 6,16 tonnes. La condition 1 est donc bien remplie par cette centrale.

Cependant le tonnage moyen est 5,5 tonnes qui sont largement inférieure à 13 tonnes.

En conclusion, cette centrale ne peut pas bénéficier du crédit.

COVID-19 / MESURES DE PREVENTIONS

Lavez-vous les mains fréquemment

Respectez la distanciation physique

Portez un masque

Toussez ou éternuez dans votre coude

Ouvrez les fenêtres

Faites-vous vacciner